Zoran Stojaković

KVAZIGRUPE I NEKE KLASE FUNKCIONALNIH JEDNAČINA NA NJIMA

(Doktorska disertacija)

ukovodilac

vetozar dr Milić

BEOGRAD

1974

S A D R Ž A J

U V O D

Teorija kvazigrupa, iako relativno mlada, danas redstavlja jednu od značajnih oblasti savremene algebre. azlozi za brz razvitak teorije kvazigrupa leže između ostaog i u vezi kvazigrupa sa drugim oblastima matematike - kominatornom analizom, projektivnim ravnima, teorijom rešetaka, unkcionalnim jednačinama, neasocijativnim telima i dr.

Pojam kvazigrupe u implicitnom obliku javlja se još XVIII veku prilikom proučavanja latinskih kvadrata (latinki kvadrat je ustvari Kejlijeva tablica konačne kvazigrupe). atinski kvadrati bili su poznati Bachetu pre nego što je Ojer postavio poznati problem o 36 oficira [45], koji je ekvialentan sa utvrđivanjem postojanja para ortogonalnih latinkih kvadrata reda 6. Međutim, prvi radovi posvećeni ispitivaju nekih vrsta kvazigrupa pojavili su se tek tridesetih golina ovog veka. Tako je Suškevič A. 1929 god. u radu [87] razatrao kvazigrupe koje zadovoljavaju neka oslabljenja asocijativnog zakona. Podsticaj za razvitak teorije kvazigrupa i lupa bio je rad R. Moufang [66], 1935 g., posle kojeg počinje intenzivni razvitak te teorije. U tom radu Moufang je utvrdila vezu između nedezargovih projektivnih ravni i jedne klase lupa koje danas nose njeno ime - lupe Mufang. Moufang je i prva upotrebila termin "kvazigrupa" nazvavši tako lupe koje je proučavala.

Posle ovog rada R. Moufang niz matematičara počinje a izučavanjem teorije kvazigrupa.Najznačajnije priloge dali i G. Bol 1937 g. [31] koji je proučavao lupe koje zadovoljaju tzv. zakon Bola i koje se po njemu nazivaju lupe Bola, atim Murdoch D. 1939-41 g. [67], [68], [69] - F-kvazigrupe, arrison G. 1940-46 g. [47], [48] - jezgra kvazigrupa i lupa, lbert A. 1943-44 g. [7], [8] - grupa asocirana s kvazigrupom, zotopija kvazigrupa i lupa, Bruck R. [33], [34], [35] - rezulati iz raznih oblasti teorije kvazigrupa i lupa (IP-kvazirupe, TS-kvazigrupe, lupe Mufang i dr.).Kasnije teorija kvazigrupa se sve više razgranava, broj publikovanih radova i matematičara koji se bave tom problematikom stalno raste, da bi, naročito u poslednjoj deceniji, došlo do veoma intenzivnog razvoja.U ovom periodu značajnije radove koji su uticali na dalji razvitak teorije kvazigrupa i lupa dali su R. Bruck, A. Sade i V.D. Belousov.Monografiju, uglavnom posvećenu teoriji lupa, objavio je Bruck 1958 g. [32], a V.D. Belousov 1967 g. [11] monografiju posvećenu teoriji kvazigrupa koja na izvestan način dopunjava monografiju Brucka.Pored toga 1971 i 1972 g. pojavile su se dve monografije Belousova [12], [13], posvećene novim granama teorije kvazigrupa - jedna algebarskim rešetkama i kvazigrupama a druga n-arnim kvazigrupama.

Pomenućemo neke rezultate koji se odnose na funkcionalne jednačine na kvazigrupama.Ako je data univerzalna algebra (S,Ω), zakon $w_1=w_2$ u odnosu na Ω i neki sistem slobodnih elemenata $M=\{x,y,z,\ldots\}$, prirodno se postavlja pitanje: pod kojim uslovima u (S,Ω) važi zakon $w_1=w_2$, tj. koje operacije iz Ω zadovoljavaju zakon $w_1=w_2$? Tako dolazimo do problema određivanja rešenja funkcionalne jednačine $w_1=w_2$, gde su nepoznate operacije iz w_1 i w_2. Meɔdi rešavanja takvih funkcionalnih jednačina bitno zavise ı date algebre (S,Ω).Tako ako je S skup realnih brojeva Ω skup neprekidnih operacija takve jednačine se rešavaju ɜtodama matematičke analize.Međutim, u raznim oblastima mate- ıtike često se javljaju funkcionalne jednačine u kojima se ·aži da operacije definisane na S budu jednoznačno rešive ɔ svim promenljivim, tj. Ω je tada skup svih kvazigrupnih ɔeracija definisanih na skupu S.

Jedna od najpoznatijih funkcionalnih jednačina na ʌazigrupama je jednačina opšte asocijativnosti čije je reše- je dao Belousov 1958 g. [14]:

Ako su četiri kvazigrupe (Q,A_i), $(i=1,2,3,4)$, ve- ıne opštim asocijativnim zakonom

L) $$A_1(A_2(x,y),z) = A_3(x,A_4(y,z)),$$

ıda su sve kvazigrupe $(Q,A_i),(i=1,2,3,4)$, izotopne istoj ·upi $(Q,\circ)$.

Neke specijalne slučajeve opšteg zakona asocijativ- ɔsti razmatrali su Suškevič [87], Evans [46], Belousov [15], ıde [76], Devidé [43] i drugi.

Rešenje funkcionalne jednačine opšte entropije ɔdnosno medijalnosti ili bisimetrije kako se još naziva) ıli su Aczél, Belousov i Hosszú u [5]:

Ako su šest kvazigrupa (Q,A_i), $(i=1,2,\ldots,6)$, ɜzane opštim zakonom entropije

2) $$A_1(A_2(x,y),A_3(u,v))=A_4(A_5(x,u),A_6(y,v)),$$

ıda postoji Abelova grupa $(Q,+)$ kojoj su sve kvazigrupe (Q,A_i), $(i=1,2,\ldots,6)$, izotopne.

Opšti entropijski zakon i njegove specijalne slujeve ispitivali su Sade [76], [78], Stein [83], Toyoda [89], 0], Bruck [33], Murdoch [68].

Pored ovih ispitivan je veliki broj drugih funkci-alnih jednačina na kvazigrupama. Tako, rešen je veći broj ecijalnih slučajeva funkcionalne jednačine opšte distribu-vnosti, ispitivane su osobine distributivnih kvazigrupa, ma rešenje opšte jednačine distributivnosti ni do danas nije oznato (Belousov [22], Belousov, Hosszú [27], Aczél [4], tein [84]). Razmatrani su zakoni Mufanga (i utvrđena njihova eza sa zakonima distributivnosti), Bola, Steina, alternativno-ti, elastičnosti, veliki broj specijalnih slučajeva i genera-izacija ovih zakona kao i niz drugih zakona.

Iako su n-arne kvazigrupe definisali ne tako davno elousov i Sandik [26] (1966 g.), već postoji velika serija adova posvećenih funkcionalnim jednačinama na n-arnim kvazi-rupama. Neki od tih rezultata navedeni su u monografiji Belo-sova o n-arnim kvazigrupama [13].

Jugoslovenski matematičari dali su takođe priloge eoriji kvazigrupa i funkcionalnim jednačinama na kvazigru-ama. Tako je Devidé V. u [43] proučavao tzv. D-grupe, tj. vazigrupe koje zadovoljavaju jedan specijalan slučaj zakona opšte asocijativnosti (1). G. Čupona i B. Trpenovski objavili su niz radova posvećen n-arnim operativima (grupoidima, polu-grupama i kvazigrupama) [38], [39], [40], [41], [42], [91], [92]. 3. Milić je u svojim radovima [61], [62], [63], [64] dao rešenja nekih funkcionalnih jednačina na kvazigrupama i pri tome de-finisao nov pojam - GD-grupoid čijim uvođenjem se olakšava i uprošćuje proučavanje funkcionalnih jednačina na n-arnim ... [9], [10] takođe proučavala fun-

cionalne jednačine na kvazigrupama i između ostalog dala
ešenje jedne široke klase uravnoteženih zakona na kvazigru-
ama raznih arnosti. Nove rezultate u toj oblasti dao je i J.
šan u [93], [94], [95], [96].

Ovaj rad se sastoji iz šest delova.

U prvom delu navedene su oznake, definicije i ne-
i poznati rezultati teorije kvazigrupa na koje se pozivamo
ostalim delovima.

U drugom delu pokazano je da ako su G-kvazigrupe
$_1, B_1$ i GD-grupoidi A_2, A_3, B_2, B_3 vezani zakonom

3) $$A_1(A_2(x,y),A_3(u,v)) = B_1(B_2(x,u),B_3(y,v)),$$

nda postoji Abelova grupa $(S,+)$ koja je homotopna slika
vih A_i, B_i, $(i=1,2,3)$. Na osnovu tog rezultata dobijeno je
pšte rešenje funkcionalne jednačine (3) za GD-grupoide. Po-
ledica ovih teorema (kada su A_i, B_i, $(i=1,2,3)$ kvazigrupe
efinisane na istom skupu Q) je poznat stav o šest kvazi-
rupa koje zadovoljavaju opšti entropijski zakon [5].

Primenjujući te rezultate na n-arne kvazigrupe da-
o je rešenje jednačine

$$A_1(y_1^{i-1}, A_2(x_1^k, x_{k+1}^f), y_{i+1}^{j-1}, A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n), y_{j+1}^p) =$$

$$= B_1(z_1^{g-1}, B_2(x_1^k, x_{f+1}^r), z_{g+1}^{h-1}, B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n), z_{h+1}^p),$$

gde su A_i, B_i, $(i=1,2,3)$, kvazigrupe arnosti $|A_1| = |B_1| = p$,
$|A_2| = f$, $|A_3| = n-f$, $|B_2| = m$, $|B_3| = n-m$, defininisane
na istom skupu Q, $1 \leq k < \min(f,m)$, $r = f+m-k < n$, $1 \leq i < j \leq p$,
$1 \leq g < h \leq p$ a $(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, z_{h+1}^p)$ neka permutacija promen-
ljivih $(y_1^{i-1}, y_{i+1}^{j-1}, y_{j+1}^p)$.

U trećem delu opisuju se ternarne kvazigrupe vene proizvoljnim uravnoteženim zakonom I vrste. Uveden je jam izvedenih binarnih operacija iz datih ternarnih opecija, u skup svih izvedenih binarnih operacija uvedena je lacija ekvivalencije i pokazano da su sve izvedene binaroperacije jedne klase izotopne jednoj lupi. Zatim je dozano da se sve ternarne kvazigrupe koje zadovoljavaju bikoji uravnoteženi zakon prve vrste, sem tzv. nezavisnih azigrupa, mogu prikazati kao superpozicije binarnih lupa. t je i kriterijum za utvrđivanje kada su te binarne lupe ocijativne tj. grupe.

U četvrtom delu opisani su ternarni GD-grupoidi zani proizvoljnim uravnoteženim zakonom I vrste. Pokazano da se, uz uvođenje nekih dodatnih uslova, mogu dokazati oreme analogne onima iz prethodnog dela u kome je dat opis rnarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju uravnotežene zakone vrste. Time se proširuje mogućnost primene teorema iz treg dela na jednu klasu uravnoteženih zakona na kvazigrupama znih arnosti.

U petom delu ispitane su uopštene (i,j)-modularne azigrupe tj. kvazigrupe koje zadovoljavaju zakon

$$A(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, A(y_{\tau 1}^{\tau n}), x_{\sigma(i+1)}^{\sigma n}) = A(y_1^{j-1}, A(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^{n}), y_{j+1}^{n}),$$

e su i,j neki fiksirani brojevi iz skupa $N = \{1,2,\ldots,n\}$ σ i τ permutacije skupa N sa osobinom da je $\sigma i = \tau i = i$, $\sigma j = \tau j = j$. Dat je potpun opis takvih kvazigru-. Time je rešen jedan specijalan slučaj opštijeg nerešenog oblema koji je postavio Belousov V.D. [13] :

Naći sve n-kvazigrupe A koje zadovoljavaju zakon

$$A(x_1^{i-1},A(x_i^{i+n-1}),x_{i+n}^{2n-1})=A(y_1^{j-1},A(y_j^{j+n-1}),y_{j+n}^{2n-1}),$$

de je y_1^{2n-1} permutacija od x_1^{2n-1}.

U šestom delu uveden je nov pojam - infinitarne vazigrupe.U implicitnom obliku pojam infinitarne operacije reće se u raznim oblastima matematike, postoji izvestan broj adova u kojima su razmatrane infinitarne operacije ali ininitarne kvazigrupe do sada nisu bile ispitivane.U ovom radu ajpre je dokazana egzistencija infinitarnih kvazigrupa, poazano je da postoje neprebrojive i prebrojive infinitarne vazigrupe kao i infinitarne kvazigrupe bilo kog konačnog reda,Takođe je pokazano da postoje infinitarne lupe.Zatim je doazano da ne postoje netrivijalne (i,j)-asocijativne infiniarne kvazigrupe (a to znači da ne postoje ni netrivijalne nfinitarne grupe).Rešena je jednačina opšte asocijativnosti infinitarnom slučaju.Dokazana je egzistencija netrivijalnih nfinitarnih kvazigrupa aditivnih nad Abelovom grupom i rešea za infinitarne kvazigrupe funkcionalna jednačina koja predstavlja jedno uopštenje funkcionalne jednačine opšte entropije. vedene su infinitarne operacije različitih tipova i razmotrea neka pitanja u vezi s tim.Pokazano je da se i na infinitari slučaj prenose neka svojstva n-arnih kvazigrupa i pomenuta su neka specifična pitanja te teorije.Na kraju su formulisani eki problemi iz teorije infinitarnih kvazigrupa.

Većina rezultata ovog rada prikazana je u Matematičkom institutu SRS u Beogradu i Matematičkom institutu AN MSSR u Kišinjevu.Jedan deo prikazan je na trećem kongresu bugarskih matematičara u Varni 1972 g.

Na kraju želim da izrazim zahvalnost profesoru V.D. Belousovu i dr S. Miliću na sugestijama i savetima ji su mi bili od koristi pri izradi ove disertacije.

I DEO

NEKE DEFINICIJE, OZNAKE I POZNATI REZULTATI IZ TEORIJE KVAZIGRUPA

Navešćemo najpre definicije nekih osnovnoh pojmova.

Definicija 1.1. Uređenu dvojku (Q,A) nepraznog
kupa Q i n-arne operacije A skupa Q (tj. $A: Q^n \to Q$)
ızivamo n-grupoid.n-grupoid (Q,A) označavaćemo i samo sa
. Broj n nazivamo arnost operacije A i označavamo sa
$= |A|$.

Ako operacija A pridružuje uređenoj n-torki
$x_1,x_2,\ldots,x_n) \in Q^n$ elemenat $y \in Q$ pisaćemo

$$A(x_1,x_2,\ldots,x_n) = y ,$$

li

$$Ax_1x_2\ldots x_n = y .$$

a binarne grupoide $(n=2)$ pisaćemo i $x_1Ax_2 = y$.

Uvodimo sledeće oznake: niz $x_m,x_{m+1},\ldots,x_n$ ozna-
avaćemo sa $\{x_i\}_{i=1}^{n}$ ili x_m^n . Pri tome, ako je $m>n$
natramo da je x_m^n prazan skup, a ako je $m = n$ niz x_m^n
e sastoji od jednog elementa x_m. Niz $\underbrace{x,x,\ldots,x}_{n\ \text{puta}}$ označa-
aćemo sa $\overset{n}{x}$, a pri tome smatramo da je $\overset{o}{x}$ prazan skup.

Definicija 1.2. n-grupoid (Q,A) je n-kvazigrupa
ko je jednačina

$$A(a_1^{i-1},x_i,a_{i+1}^n) = b ,$$

ešiva jednoznačno po x_i za svaku n-torku $(a_1^{i-1}, a_{i+1}^n, b) \in Q^n$ za svako $i = 1,2,\dots,n$.

Dakle, binarni grupoid (Q,A) je kvazigrupa (biarna) ako su jednačine

$$A(a,x) = b \quad \text{i} \quad A(y,a) = b$$

ešive jednoznačno za svako $a,b \in Q$.

Primedba. Za $n=2$ umesto 2-grupoid, 2-kvazigrupa ili binarni grupoid, binarna kvazigrupa) pisaćemo samo grupoid, kvazigrupa. Analogno i za polugrupu, lupu i grupu koje e biti definisane kasnije.

Definicija 1.3. n-grupoid (Q,A) je (i,j)-asociativan ako važi

$$A(x_1^{i-1}, A(x_i^{n+i-1}), x_{n+i}^{2n-1}) = A(x_1^{j-1}, A(x_j^{n+j-1}), x_{n+j}^{2n-1}),$$

a svako $x_1, x_2, \dots, x_{2n-1} \in Q$.

Definicija 1.4. n-grupoid (Q,A) koji je (i,j)-asoijativan za svako i,j $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$, naziva se n-polugrupa.

Definicija 1.5. n-grupoid (Q,A) koji je n-kvazirupa i n-polugrupa se naziva n-grupa.

Definicija 1.6. Elemenat $e \in Q$ je i-neutralni eleenat n-grupoida (Q,A) ako važi

$$A(\overset{i-1}{e}, x, \overset{n-i}{e}) = x,$$

a svako $x \in Q$.

Ako je $e \in Q$ i-neutralni elemenat n-grupoida (Q,A) a svako $i = 1,2,\dots,n$ e se naziva neutralni elemenat n-grupoida (Q,A).

Definicija 1.7. n-kvazigrupa (Q,A) je n-lupa ako (Q,A) ima bar jedan neutralni elemenat.

Primedba. Poznato je da svaka grupa (binarna) ima edinstven neutralni elemenat. To međutim, ne važi kada je reč n-grupama. Postoje n-grupe bez neutralnog elementa a takođe ostoje i n-grupe sa više neutralnih elemenata ([26]).

Jedan od važnih pojmova u teoriji kvazigrupa je pojam izotopije koja predstavlja uopštenje pojma izomorfizma.

Definicija 1.8. n-grupoid (Q,B) je izotopan -grupoidu (Q,A) ako postoje permutacije $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ kupa Q takve da je

$$B(x_1^n) = \alpha_{n+1}^{-1} A(\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, \dots, \alpha_n x_n) ,$$

 svako $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$.

Rećićemo takođe da je (Q,B) izotop od (Q,A).

(n+1)-torku $T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})$ nazivamo zotopijom.

Ako je n-grupoid (Q,B) izotopan n-grupoidu (Q,A) pomoću izotopije T pisaćemo

$$B = A^T .$$

Ako je $\alpha_{n+1} = 1$ (1 je identička permutacija skupa Q) onda se izotopija naziva glavna, a (Q,B) je glavni zotop od (Q,A).

Iz definicije izotopije neposredno slede ova tvrenja:

1) Ako je $B = A^T$ onda je $A = B^{T^{-1}}$ gde je

$$T^{-1} = (\alpha_1^{-1}, \alpha_2^{-1}, \dots, \alpha_{n+1}^{-1}).$$

2) Ako je $C = B^T$, $B = A^S$, gde je $T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots$ $\dots, \alpha_{n+1})$ a $S = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{n+1})$ onda je

$$C = (A^S)^T = A^{ST},$$

ie je $ST = (\beta_1\alpha_1, \beta_2\alpha_2, \dots, \beta_{n+1}\alpha_{n+1})$.

S obzirom da je $A^1 = A$, iz gornjih tvrđenja sledi ı izotopija definiše jednu relaciju ekvivalencije na skupu vih n-grupoida definisanih na istom skupu Q. Na osnovu toga ože se reći da su n-grupoidi A i B izotopni.

Teorema 1.1. Ako je n-grupoid (Q,A) izotopan -kvazigrupi (Q,B) onda je (Q,A) n-kvazigrupa.

Teorema 1.2. Ako je n-kvazigrupa (Q,B) izotopna -kvazigrupi (Q,A) onda je (Q,B) izomorfna nekom glavnom zotopu kvazigrupe (Q,A) ([26]).

Teorema 1.2. omogućava da se dokažu neke teoreme o vazigrupama koristeći glavne izotope umesto izotopa.

Ako je (Q,A) kvazigrupa onda se lako zaključuje a su sledeća preslikavanja

$$L_a^A x \overset{\text{def}}{=\!=} A(a,x), \qquad R_b^A x \overset{\text{def}}{=\!=} A(x,b),$$

de su a i b neki fiksirani elementi iz Q, permutacije kupa Q. Te permutacije ćemo nazivati respektivno leva od- osno desna translacija operacije A .

Umesto $L_a^A x$, $R_b^A x$ pisaćemo skraćeno $L_a x$, $R_b x$ ili $L^A x$, $R^A x$ kada to ne dovodi do zabune.

Ako je (Q,A) n-kvazigrupa označimo sa $\bar{a}$ niz $a_1^n \in Q^n$, a sa $_i(\bar{a})$ niz a_1^{i-1}, a_{i+1}^n. Preslikavanje $L_i(\bar{a})$, lefinisano jednakošću

$$L_i(\bar{a})x = A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^n),$$

ɪzivamo i-ta translacija u odnosu na $\bar{a}$. S obzirom da je n-kvazigrupa ove translacije su permutacije skupa Q.

<u>Definicija 1.9.</u> Glavni izotop $T = (\alpha_1^n,1)$ n-kva- igrupe A, gde je $\alpha_i = L_i^{-1}(\bar{a})$, naziva se LP-izotop n-kva- igrupe A.

<u>Teorema 1.3.</u> Svaki LP-izotop n-kvazigrupe je -lupa ([26]).

<u>Teorema 1.4.</u> Ako je n-lupa (Q,A) izotopna n-gru- i (Q,B) sa neutralnim elementom onda je (Q,A) izomorfna -grupi (Q,B) ([26]).

Iz ove teoreme sledi da izotopne binarne grupe mo- ɪju biti izomorfne (Albert [7]).

Po definiciji kvazigrupe u jednakosti

1.1) $$A(x_1^n) = x_{n+1}$$

vakih n elemenata jednoznačno određuju (n+1)-i. Dakle, ako iksiramo i, elementi $x_1^{i-1},x_{n+1},x_{i+1}^n$ jednoznačno određuju lemenat x_i tj. dobijamo novu operaciju $x_1^{i-1},x_{n+1},x_{i+1}^n)\to x_i$ koju ćemo označiti sa ${}^{\pi_i}A$. Prema tome

1.2) $${}^{\pi_i}A(x_1^{i-1},x_{n+1},x_{i+1}^n) = x_i.$$

ednakosti (1.1) i (1.2) su ekvivalentne.

<u>Definicija 1.10.</u> Operacija ${}^{\pi_i}A$ definisana jedna- ošću (1.2), koja je ekvivalentna sa (1.1), naziva se i-ta in- erzna operacija operacije A.

i-te inverzne operacije mogu se uopštiti na sledeći ačin. Neka je σ proizvoljna permutacija skupa $\{1,2,\dots,n+1\}$. ko je A n-kvazigrupa i $A(x_1^n) = x_{n+1}$, razmotrimo preslikavanje ${}^{\sigma}A:\ x_{\sigma 1}^{\sigma n} \to x_{\sigma(n+1)}$. Ovo preslikavanje je očevidno n-ara operacija jer se niz $x_{\sigma 1}^{\sigma n}$ sastoji od proizvoljnih n elemenata iz x_1^{n+1} pa pošto je A kvazigrupa elementi $x_{\sigma 1}^{\sigma n}$ jednoznačno definišu elemenat $x_{\sigma(n+1)}$. Tako dolazimo do definicije

<u>Definicija 1.11.</u> Neka je A n-kvazigrupa a σ neka permutacija skupa $\{1,2,\dots,n+1\}$. Operacija ${}^{\sigma}A$ definisa jednakošću

$${}^{\sigma}A(x_{\sigma 1}^{\sigma n}) = x_{\sigma(n+1)},$$

koja je ekvivalentna sa $A(x_1^n) = x_{n+1}$, naziva se σ-parastrof kvazigrupe A. Preslikavanje $A \to B = {}^{\sigma}A$ naziva se parastrofija. σ-parastrof za koji je $\sigma(n+1) = n+1$ nazivamo glavni.

i-te inverzne operacije definisane ranije su parastrofi određeni transpozicijom $(i,n+1)$.

<u>Teorema 1.5.</u> Parastrof n-kvazigrupe je takođe n-kvazigrupa ([13]).

<u>Definicija 1.12.</u> Uzastopno primenjivanje izotopije i parastrofije naziva se izostrofija.

Navodimo sada neke definicije i rezultate koji se odnose na generalisane grupoide (ili višebazisne grupoide kako ih nazivaju neki autori).

<u>Definicija 1.13.</u> Ako su $S_1, S_2, \dots, S_n, S$ neprazni skupovi a A preslikavanje

$$A:\ S_1 \times S_2 \times \dots \times S_n \to S,$$

onda (n+2)-torku $(S_1,S_2,\ldots,S_n,S,A)$ nazivamo generalisani n-arni grupoid (kraće, G-grupoid).

<u>Definicija 1.14.</u> G-grupoid (S_1^n,S,A) je G-grupoid s deljenjem (kraće, GD-grupoid) ako jednačina

$$A(a_1^{i-1},x_i,a_{i+1}^n) = a_{n+1} \tag{1.3}$$

ima rešenje po x_i za svako $a_1\in S_1$, $a_2\in S_2$, ... , $a_n\in S_n$, $a_{n+1}\in S$ i za svako $i = 1,2,\ldots,n$, (ta rešenja ne moraju biti jedinstvena).

Ako su rešenja jednačina (1.3) jedinstvena GD-grupoid nazivamo G-kvazigrupa.

Ako su $a_1,a_2,\ldots,a_n$ neki fiksirani elementi skupova $S_1,S_2,\ldots,S_n$ respektivno, sa $\bar{a}$ označimo niz a_1^n. Tada se, analogno kao za n-kvazigrupe, mogu za n-arni GD-grupoid (S_1^n,S,A) definisati i-te translacije u odnosu na $\bar{a}$. Te translacije GD-grupoida su sirjektivna preslikavanja dok su translacije G-kvazigrupe bijekcije (otuda sledi da skupovi $S_1,S_2,\ldots,S_n,S$ na kojima se definiše G-kvazigrupa moraju imati jednake kardinalne brojeve).

<u>Definicija 1.15.</u> n-arni G-grupoid (S_1^n,S,A) se homotopno preslikava na n-arni G-grupoid (T_1^n,T,B) ako postoji (n+1)-torka α_1^n,α sirjektivnih preslikavanja, $\alpha_i\colon S_i\to T_i$ $(i = 1,2,\ldots,n)$, $\alpha\colon S\to T$, takvih da je

$$\alpha A(x_1^n) = B(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,\ldots,\alpha_nx_n),$$

za svako $x_i\in S_i$, $x\in S$, $(i=1,2,\ldots,n)$.

Rećićemo takođe da je G-grupoid (T_1^n,T,B) homotopna slika G-grupoida (S_1^n,S,A). (n+1)-torku $H = (\alpha_1^n,\alpha)$ nazivamo homotopija.

Ako su α_1^n, α bijekcije homotopija se naziva izotopija.

<u>Teorema 1.6.</u> Homotopna slika n-arnog GD-grupoida je n-arni GD-grupoid ([9]).

II DEO

OPŠTA ENTROPIJA NA GD-GRUPOIDIMA SA PRIMENOM NA KVAZIGRUPE RAZNIH ARNOSTI

2.1. Uvod

U ovom delu ispitujemo opšti entropijski zakon

$$A_1(A_2(x,y),A_3(u,v)) = B_1(B_2(x,u),B_3(y,v))$$

na GD-grupoidima. Ovaj zakon na kvazigrupama proučavali su Aczél, Belousov i Hosszú u [5] i pokazali da su sve kvazigrupe A_i,B_i, $(i=1,2,3)$, izotopne jednoj komutativnoj grupi. Dokazaćemo da se analogni rezultati mogu dokazati i za GD-grupoide pa se time dobija uopštenje teoreme Aczéla, Belousova i Hosszúa. Koristeći taj rezultat odredićemo rešenja nekih funkcionalnih jednačina na kvazigrupama raznih arnosti.

2.2. Opšti entropijski zakon na GD-grupoidima

Teorema 2.1. Neka su A_1 i B_1 G-kvazigrupe a A_2,A_3,B_2,B_3 GD-grupoidi definisani na

$$A_2: S_1 \times S_2 \to S_5, \qquad B_2: S_1 \times S_3 \to S_7,$$

$$A_3: S_3 \times S_4 \to S_6, \qquad B_3: S_2 \times S_4 \to S_8,$$

$$A_1: S_5 \times S_6 \to S\ , \qquad B_1: S_7 \times S_8 \to S\ ,$$

gde su $S_1,S_2,\dots,S_8,S$ neprazni skupovi.

Ako A_i,B_i, $(i=1,2,3)$, zadovoljavaju jednačinu

(2.1) $$A_1(A_2(x,y),A_3(u,v)) = B_1(B_2(x,u),B_3(y,v)),$$

za svako $x\in S_1$, $y\in S_2$, $u\in S_3$, $v\in S_4$ onda postoji Abelova grupa $(S,+)$ koja je homotopna slika za sve $A_i, B_i, (i=1,2,3)$.

Dokaz. Potpun dokaz ove teoreme je naveden u [85] pa ćemo ga ovde navesti samo u glavnim crtama.

Neka su $a \in S_1$, $b \in S_2$, $c \in S_3$, $d \in S_4$ neki fiksirani elementi.

Stavljajući u jednačinu (2.1) redom $x=a$, $y=b$; $x=a$, $u=c$; $y=b$, $u=c$; $y=b$, $v=d$ i $u=c$, $v=d$, dobićemo

$$L^{A_1} A_3(u,v) = B_1(L^{B_2}u, L^{B_3}v), \tag{2.2}$$

$$A_1(L^{A_2}y, L^{A_3}v) = L^{B_1} B_3(y,v), \tag{2.3}$$

$$A_1(R^{A_2}x, L^{A_3}v) = B_1(R^{B_2}x, L^{B_3}v), \tag{2.4}$$

$$A_1(R^{A_2}x, R^{A_3}u) = R^{B_1} B_2(x,u), \tag{2.5}$$

$$R^{A_1} A_2(x,y) = B_1(R^{B_2}x, R^{B_3}y). \tag{2.6}$$

ko sada u jednačini (2.1) fiksiramo redom $x=a$, $y=b$, $u=c$; $x=a$, $y=b$, $v=d$; $x=a$, $u=c$, $v=d$, i $y=b$, $u=c$, $v=d$ biće

$$L^{A_1} L^{A_3} = L^{B_1} L^{B_3}, \tag{2.7}$$

$$L^{A_1} R^{A_3} = R^{B_1} L^{B_2}, \tag{2.8}$$

$$R^{A_1} L^{A_2} = L^{B_1} R^{B_3}, \tag{2.9}$$

$$R^{A_1} R^{A_2} = R^{B_1} R^{B_2}. \tag{2.10}$$

iksirajući u jednačini (2.1) $y=b$ dobija se

$$A_1(R^{A_2}x, A_3(u,v)) = B_1(B_2(x,u), L^{B_3}v). \tag{2.11}$$

Definišimo sada na skupu S operaciju $(+)$ na ledeći način

$$s + t = A_1((R^{A_1})^{-1}s,(L^{A_1})^{-1}t). \tag{2.12}$$

Da je ta operacija dobro definisana očevidno je jer je A_1 G-kvazigrupa pa su R^{A_1} i L^{A_1} bijektivna preslikavanja.

Takođe se neposredno zaključuje da je $(S,+)$ kvazigrupa.

U [85] je pokazano da je kvazigrupa $(S,+)$ homotopna slika za sve A_i,B_i, $(i=1,2,3)$, i da su te homotopije oblika

$$(2.13)\quad \begin{cases} A_1(p,q) = R^{A_1}p + L^{A_1}q \,, \\ A_2(x,y) = (R^{A_1})^{-1}(R^{B_1}R^{B_2}x + L^{B_1}R^{B_3}y) \,, \\ A_3(u,v) = (L^{A_1})^{-1}(R^{B_1}L^{B_2}u + L^{B_1}L^{B_3}v) \,, \\ B_1(z,w) = R^{B_1}z + L^{B_1}w \,, \\ B_2(x,u) = (R^{B_1})^{-1}(R^{A_1}R^{A_2}x + L^{A_1}R^{A_3}u) \,, \\ B_3(y,v) = (L^{B_1})^{-1}(R^{A_1}L^{A_2}y + L^{A_1}L^{A_3}v) \,. \end{cases}$$

Kako su R^{A_1}, L^{A_1}, R^{B_1}, L^{B_1} bijektivna preslikavanja kvazigrupa $(S,+)$ je ne samo homotopna slika već je i izotopna sa A_1 i B_1.

Stavljajući dobijene vrednosti za $A_i,B_i,(i=1,2,3)$, u jednakosti (2.11) i (2.1) pokazuje se ([85]) da je operaci- (+) asocijativna i komutativna, tj. $(S,+)$ je Abelova grupa pa je time teorema dokazana.

<u>Primedba.</u> Kako su A_1 i B_1 G-kvazigrupe sledi da skupovi S_5,S_6,S_7,S_8 i S moraju imati jednake kardinalne brojeve.

Ako je $(Q,\cdot)$ grupa u skupu svih sirjektivnih preslikavanja skupa P na skup Q uvodimo relaciju ekvivalencije na sledeći način: za sirjektivna preslikavanja α, β skupa P na skup Q rećićemo da su ekvivalentna ako i samo ako postoje fiksirani elementi $a,b \in Q$ takvi da je $\alpha x = a\cdot \beta x \cdot b$, za svako $x \in P$.

Na osnovu svih prethodnih rezultata može se dokazati (v. [85]):

Teorema 2.2. Ako G-kvazigrupe A_1 i B_1 i GD-grupoidi A_2, A_3, B_2, B_3 zadovoljavaju uslove teoreme 2.1. onda je opšte rešenje jednačine (2.1)

$$(2.14)\qquad \begin{aligned} &A_1(x,y)=\alpha x+\beta y, && B_1(x,y)=\chi x+\varphi y,\\ &A_2(x,y)=\alpha^{-1}(\gamma x+\delta y), && B_2(x,y)=\chi^{-1}(\gamma x+\theta y),\\ &A_3(x,y)=\beta^{-1}(\theta x+\psi y), && B_3(x,y)=\varphi^{-1}(\delta x+\psi y), \end{aligned}$$

gde je $(+)$ Abelova grupa određena sa tačnošću do na izomorfizam a preslikavanja $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta, \varphi, \psi, \chi$ sa tačnošću do na ekvivalenciju.

Posledica. Ako je $S_1 = S_2 = \ldots = S_8 = S$, a A_i, B_i, $(i=1,2,3)$, kvazigrupe koje zadovoljavaju jednačinu (2.1) na osnovu teoreme 2.2. dobijamo da važi teorema 3. iz [5].

2.3. Primena na funkcionalne jednačine na kvazigrupama raznih arnosti

Primenićemo sada prethodne rezultate na jednačinu

$$(2.15)\qquad A_1(A_2(x_1^k, x_{k+1}^f), A_3(x_{f+1}^{f+m-k}, x_{f+m-k+1}^n)) =$$
$$= B_1(B_2(x_1^k, x_{f+1}^{f+m-k}), B_3(x_{k+1}^f, x_{f+m-k+1}^n)),$$

gde su A_i, B_i, $(i=1,2,3)$, kvazigrupe arnosti

$|A_1| = |B_1| = 2$, $|A_2| = f$, $|A_3| = n-f$, $|B_2| = m$, $|B_3| = n-m$,

definisane na istom nepraznom skupu Q, a $1 \leq k < \min(f,m)$, $f+m-k < n$.

Teorema 2.3. Opšte rešenje funkcionalne jednačine (2.15) dato je sa (da bi notacija bila jednostavnija uvešćemo oznaku $r = f+m-k$)

$$(2.16) \quad \begin{cases} A_1(x,y) = \alpha x + \beta y, \\ A_2(x_1^k, x_{k+1}^f) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^k) + \delta(x_{k+1}^f)), \\ A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n) = \beta^{-1}(\theta(x_{f+1}^r) + \psi(x_{r+1}^n)), \\ B_1(x,y) = \chi x + \varphi y, \\ B_2(x_1^k, x_{f+1}^r) = \chi^{-1}(\gamma(x_1^k) + \theta(x_{f+1}^r)), \\ B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n) = \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f) + \psi(x_{r+1}^n)), \end{cases}$$

gde je $(Q,+)$ Abelova grupa, α, β, χ i φ permutacije skupa Q, a γ, δ, θ i ψ kvazigrupe arnosti

$$|\gamma| = k, \quad |\delta| = f-k, \quad |\theta| = m-k, \quad |\psi| = n-r.$$

Dokaz. Ako stavimo

$$A_2(x_1^k, x_{k+1}^f) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{A}_2((x_1^k),(x_{k+1}^f)),$$

$$A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{A}_3((x_{f+1}^r),(x_{r+1}^n)),$$

$$B_2(x_1^k, x_{f+1}^r) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{B}_2((x_1^k),(x_{f+1}^r)),$$

$$B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{B}_3((x_{k+1}^f),(x_{r+1}^n)),$$

i uvedemo oznake

$$X = (x_1^k), \quad Y = (x_{k+1}^f), \quad U = (x_{f+1}^r), \quad V = (x_{r+1}^n),$$

jednačina (2.15) postaje

$$(2.17) \qquad A_1(\tilde{A}_2(X,Y),\tilde{A}_3(U,V)) = B_1(\tilde{B}_2(X,U),\tilde{B}_3(Y,V)),$$

gde su A_1 i B_1 kvazigrupe definisane na Q a $\tilde{A}_2,\tilde{A}_3,\tilde{B}_2$, $\tilde{B}_3$ GD-grupoidi definisani na

$$\tilde{A}_2 \colon Q^k \times Q^{f-k} \to Q, \qquad \tilde{B}_2 \colon Q^k \times Q^{m-k} \to Q,$$

$$\tilde{A}_3 \colon Q^{m-k} \times Q^{n-r} \to Q, \qquad \tilde{B}_3 \colon Q^{f-k} \times Q^{n-r} \to Q.$$

Odavde se, primenom teoreme 2.2. na jednačinu (2.17), dokazuje da je opšte rešenje jednačine (2.15) zaista dato sa (2.16) ([85]).

<u>Teorema 2.4.</u> Opšte rešenje jednačine

$$(2.18) \qquad A_1(y_1^{i-1},A_2(x_1^k,x_{k+1}^f),y_{i+1}^{j-1},A_3(x_{f+1}^r,x_{r+1}^n),y_{j+1}^p) =$$
$$= B_1(z_1^{g-1},B_2(x_1^k,x_{f+1}^r),z_{g+1}^{h-1},B_3(x_{k+1}^f,x_{r+1}^n),z_{h+1}^p),$$

gde su $A_i,B_i,(i=1,2,3)$, kvazigrupe arnosti ,

$|A_1| = |B_1| = p$, $|A_2| = f$, $|A_3| = n-f$, $|B_2| = m$, $|B_3| = n-m$,

definisane na istom nepraznom skupu Q, $1 \leqslant k < \min(f,m)$, $r = f+m-k < n$, $1 \leqslant i < j \leqslant p$, $1 \leqslant g < h \leqslant p$, a $(z_1^{g-1},z_{g+1}^{h-1},z_{h+1}^p)$ neka permutacija promenljivih $(y_1^{i-1},y_{i+1}^{j-1},y_{j+1}^p)$ (što označavamo sa $\tilde{\alpha}(y_1^{i-1},y_{i+1}^{j-1},y_{j+1}^p) = (z_1^{g-1},z_{g+1}^{h-1},z_{h+1}^p)$), je

$$A_1(y_1^{i-1},x,y_{i+1}^{j-1},y,y_{j+1}^p) = K(z_1^{g-1},z_{g+1}^{h-1},\alpha x+\beta y,z_{h+1}^p),$$

$$A_2(x_1^k,x_{k+1}^f) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^k) + \delta(x_{k+1}^f)),$$

$$A_3(x_{f+1}^r,x_{r+1}^n) = \beta^{-1}(\theta(x_{f+1}^r) + \psi(x_{r+1}^n)),$$

$$B_1(z_1^{g-1},x,z_{g+1}^{h-1},y,z_{h+1}^p) = K(z_1^{g-1},z_{g+1}^{h-1},\chi x+\varphi y,z_{h+1}^p),$$

$$B_2(x_1^k, x_{f+1}^r) = \chi^{-1}(\gamma(x_1^k) + \theta(x_{f+1}^r)),$$

$$B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n) = \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f) + \psi(x_{r+1}^n)),$$

gde je $(Q,+)$ Abelova grupa, α, β, χ i φ permutacije skupa Q, a $\gamma, \delta, \theta, \psi$ i K kvazigrupe arnosti $|\gamma| = k$, $|\delta| = f-k$, $|\theta| = m-k$, $|\psi| = n-r$, $|K| = p-1$.

Dokaz. Ako fiksiramo promenljive $(y_1^{i-1}, y_{i+1}^{j-1}, y_{j+1}^p)$ sa $(a_1^{i-1}, a_{i+1}^{j-1}, a_{j+1}^p)$ onda $(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, z_{h+1}^p)$ postaje $(b_1^{g-1}, b_{g+1}^{h-1}, b_{h+1}^p)$, gde je $\tilde{\alpha}(a_1^{i-1}, a_{i+1}^{j-1}, a_{j+1}^p) = (b_1^{g-1}, b_{g+1}^{h-1}, b_{h+1}^p)$, pa jednačina (2.18) ima oblik

$$A_1(a_1^{i-1}, A_2(x_1^k, x_{k+1}^f), a_{i+1}^{j-1}, A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n), a_{j+1}^p) = \tag{2.19}$$
$$= B_1(b_1^{g-1}, B_2(x_1^k, x_{f+1}^r), b_{g+1}^{h-1}, B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n), b_{h+1}^p) .$$

Ako stavimo

$$A_1(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^{j-1}, y, a_{j+1}^p) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{A}_1(x,y),$$
$$B_1(b_1^{g-1}, x, b_{g+1}^{h-1}, y, b_{h+1}^p) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{B}_1(x,y),$$

jednačina (2.19) može se pisati u obliku

$$\bar{A}_1(A_2(x_1^k, x_{k+1}^f), A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n)) = \tag{2.20}$$
$$= \bar{B}_1(B_2(x_1^k, x_{f+1}^r), B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n)),$$

pa na osnovu teoreme 2.3. dobijamo

$$\tag{2.21} \left\{ \begin{aligned} & A_1(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^{j-1}, y, a_{j+1}^p) = \alpha x + \beta y , \\ & A_2(x_1^k, x_{k+1}^f) = \alpha^{-1}(\gamma(x_1^k) + \delta(x_{k+1}^f)), \\ & A_3(x_{f+1}^r, x_{r+1}^n) = \beta^{-1}(\theta(x_{f+1}^r) + \psi(x_{r+1}^n)), \\ & B_1(b_1^{g-1}, x, b_{g+1}^{h-1}, y, b_{h+1}^p) = \chi x + \varphi y, \\ & B_2(x_1^k, x_{f+1}^r) = \chi^{-1}(\gamma(x_1^k) + \theta(x_{f+1}^r)), \\ & B_3(x_{k+1}^f, x_{r+1}^n) = \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f) + \psi(x_{r+1}^n)), \end{aligned} \right.$$

gde je $(Q,+)$ Abelova grupa, α, β, χ i φ permutacije skupa Q, a γ, δ, θ i ψ kvazigrupe arnosti

$$|\gamma| = k, \quad |\delta| = f-k, \quad |\theta| = m-k, \quad |\psi| = n-r.$$

Zamenimo dobijene vrednosti za A_2, A_3, B_2 i B_3 u jednačini (2.18)

$$(2.22)\quad A_1(y_1^{i-1}, \alpha^{-1}(\gamma(x_1^k)+\delta(x_{k+1}^f)), y_{i+1}^{j-1}, \beta^{-1}(\theta(x_{f+1}^r)+\psi(x_{r+1}^n)), y_{j+1}^p) =$$
$$= B_1(z_1^{g-1}, \chi^{-1}(\gamma(x_1^k)+\theta(x_{f+1}^r)), z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f)+\psi(x_{r+1}^n)), z_{h+1}^p).$$

Ako u jednakosti (2.22) fiksiramo $x_1^k = c_1^k$ i $x_{f+1}^r = c_{f+1}^r$ tako da bude $\gamma(c_1^k) = \theta(c_{f+1}^r) = 0$ (gde je 0 neutralni elemenat grupe $(Q,+)$), dobićemo

$$A_1(y_1^{i-1}, \alpha^{-1}\delta(x_{k+1}^f), y_{i+1}^{j-1}, \beta^{-1}\psi(x_{r+1}^n), y_{j+1}^p) =$$
$$= B_1(z_1^{g-1}, \chi^{-1}0, z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f)+\psi(x_{r+1}^n), z_{h+1}^p).$$

Stavimo (gde je $\chi^{-1}0$ označeno sa c)

$$(2.23)\quad K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, x, z_{h+1}^p) = B_1(z_1^{g-1}, c, z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}x, z_{h+1}^p).$$

Ovde je K kvazigrupa arnosti $|K| = p-1$.

Tada će biti

$$A_1(y_1^{-1}, \alpha^{-1}\delta(x_{k+1}^f), y_{i+1}^{j-1}, \beta^{-1}\psi(x_{r+1}^n), y_{j+1}^p) =$$
$$= B_1(z_1^{g-1}, c, z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}(\delta(x_{k+1}^f)+\psi(x_{r+1}^n)), z_{h+1}^p) =$$
$$= K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, \delta(x_{k+1}^f)+\psi(x_{r+1}^n), z_{h+1}^p),$$

odnosno ako stavimo $\alpha^{-1}\delta(x_{k+1}^f) = x$, $\beta^{-1}\psi(x_{r+1}^n) = y$,

$$(2.24)\quad A_1(y_1^{i-1}, x, y_{i+1}^{j-1}, y, y_{j+1}^p) = K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, \alpha x+\beta y, z_{h+1}^p).$$

Fiksirajmo sada u jednakosti (2.22) $x_1^k = c_1^k$ i $x_{r+1}^n = c_{r+1}^n$ tako da bude $\gamma(c_1^k) = \psi(c_{r+1}^n) = 0$,

$$A_1(y_1^{i-1}, \alpha^{-1}\delta(x_{k+1}^f), y_{i+1}^{j-1}, \beta^{-1}\theta(x_{f+1}^r), y_{j+1}^p) =$$
$$= B_1(z_1^{g-1}, \chi^{-1}\theta(x_{f+1}^r), z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}\delta(x_{k+1}^f), z_{h+1}^p).$$

Kako je prema (2.24)

$$A_1(y_1^{i-1}, \alpha^{-1}\delta(x_{k+1}^{f}), y_{i+1}^{j-1}, \beta^{-1}\theta(x_{f+1}^{r}), y_{j+1}^{p}) =$$
$$= K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, \delta(x_{k+1}^{f}) + \theta(x_{f+1}^{r}), z_{h+1}^{p}),$$

biće

$$B_1(z_1^{g-1}, \chi^{-1}\theta(x_{f+1}^{r}), z_{g+1}^{h-1}, \varphi^{-1}\delta(x_{k+1}^{f}), z_{h+1}^{p}) =$$
$$= K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, \delta(x_{k+1}^{f}) + \theta(x_{f+1}^{r}), z_{h+1}^{p}).$$

Ako stavimo $\chi^{-1}\theta(x_{f+1}^{r}) = x$, $\varphi^{-1}\delta(x_{k+1}^{f}) = y$ dobija se

(2.25) $$B_1(z_1^{g-1}, x, z_{g+1}^{h-1}, y, z_{h+1}^{p}) = K(z_1^{g-1}, z_{g+1}^{h-1}, \chi x + \varphi y, z_{h+1}^{p}).$$

Iz (2.21),(2.24) i (2.25) sledi da su uslovi teoreme potrebni.Da su oni i dovoljni jednostavno se proverava.

Teorema je dokazana.

III D E O

URAVNOTEŽENI ZAKONI NA TERNARNIM KVAZIGRUPAMA

3.1. Uvod

Zakon $w_1 = w_2$ se naziva uravnotežen ako se svaka promenljiva javlja tačno jednom na svakoj strani jednakosti. Ako su promenljive u w_1 i w_2 uređene jednako zakon se naziva I vrste, a ako nisu zakon je II vrste.

A.Sade u [76] i V.D. Belousov u [21] ispitivali su uravnotežene zakone na binarnim kvazigrupama.Uvodeći jednu relaciju ekvivalencije u skup svih binarnih kvazigrupa koje zadovoljavaju proizvoljan uravnotežen zakon, Sade je formulisao teoremu kojom se utvrđuje da su sve kvazigrupe jedne klase ekvivalencije izotopne nekoj operaciji i naveo jednu vezu koja postoji među tim operacijama.V.D. Belousov je dokazao da ovo tvrđenje Sada ne važi za uravnotežene zakone II vrste ali važi za zakone I vrste.B. Alimpić je u [9],[10] uvodeći pogodne operatore i relaciju ekvivalencije koja je finija od relacije koju je uveo Sade, dokazala teoremu analognu teoremi Sada za proizvoljne uravnotežene zakone.Te rezultate proširila je, pod određenim uslovima, na GD-grupoide vezane uravnoteženim zakonima.

U ovom delu posmatraćemo ternarne kvazigrupe vezane ma kojim uravnoteženim zakonom I vrste.Dokazaćemo da se sve ternarne kvazigrupe koje zadovoljavaju bilo koji uravnotežen zakon I vrste, sem tzv. nezavisnih kvazigrupa, mogu prikazati kao superpozicije binarnih lupa i daćemo kriterijum za utvrđivanje kada su te binarne lupe asocijativne tj. grupe.

3.2. Uravnoteženi zakoni na ternarnim kvazigrupama

Navodimo najpre oznake i definicije koje ćemo koristiti (prema Belousovu V.D. [21] i Alimpić B. [9], [10]).

Ako je w term, skup svih promenljivih koje ulaze u term w označavaćemo sa $[w]$, a sa $\Phi(w)$ skup svih operacija koje učestvuju u w. Sa $|[w]|$ označavamo broj promenljivih terma w, a sa $|\Phi(w)|$ broj operacija u w.

Definicija 3.1. Term w nazivamo pravilan ako se svaki elemenat iz $[w]$ javlja u termu w tačno jedanput.

Definicija 3.2. Zakon $w_1 = w_2$ se naziva uravnotežen ako su w_1 i w_2 pravilni termi i $[w_1] = [w_2]$.

Uravnoteženi zakon $w_1 = w_2$ naziva se zakon I vrste ako su promenljive u w_1 i w_2 jednako uređene i zakon II vrste u protivnom slučaju.

Neka je $w_1 = w_2$ uravnoteženi zakon I vrste u kome su sve operacije ternarne kvazigrupe definisane na istom nepraznom skupu Q. Tada je $[w_1] = [w_2]$ i ako je $|\Phi(w_1)| = n$, onda je i $|\Phi(w_2)| = n$, $|[w_1]| = 2n+1$. Neka su $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ proizvoljni fiksirani elementi skupa Q. Ako je v neki podterm terma w_1 ili w_2 a $P \subseteq [v]$, sa $v\Big|_{a_i}^{x_i \in P}$ ćemo označavati term koji se dobija iz v zamenom svih elemenata $x_i \in P$ elementima $a_i \in Q$ respektivno.

Definicija 3.3. Neka je $A(u_1, u_2, u_3)$ proizvoljan podterm terma w (w je w_1 ili w_2).

Definišemo sledeća preslikavanja:

$$1)\quad L_j^A\, x = A(y_1,y_2,y_3)\Big|_{a_i}^{x_i\in[y_k]\cup[y_\ell]}$$

gde je $j \neq k \neq \ell \neq j$, $j,k,\ell\in\{1,2,3\}$, $y_j=x$, $y_k=u_k$, $y_\ell=u_\ell$.

$$2)\quad L_{jk}^A(x,y) = A(z_1,z_2,z_3)\Big|_{a_i}^{x_i\in[z]}$$

gde je $j \neq k \neq \ell \neq j$, $j<k$, $j,k,\ell\in\{1,2,3\}$, $z_j = x$, $z_k = y$, $z_\ell = u_\ell$.

$$3)\quad \sigma_A x = w\Big|_{a_i}^{x_i\in[w]\setminus[A(u_1,u_2,u_3)]}$$

Ova preslikavanja očevidno zavise od izbora elemenata $a_1,a_2,\ldots,a_{2n+1}$, preslikavanja $L_j^A: Q\to Q$ i $\sigma_A: Q\to Q$ su permutacije skupa Q, dok su $L_{jk}^A: Q^2\to Q$ binarne kvazigrupe definisane na Q. Preslikavnja L_j^A, $(j=1,2,3)$, nazivamo translacije ternarne kvazigrupe A, preslikavanje σ_A spoljašnja translacija ternarne kvazigrupe A, a L_{jk}^A $(j<k$, $j,k\in\{1,2,3\})$ izvedene binarne kvazigrupe ternarne kvazigrupe A.

<u>Primer.</u> Neka je

$$w = A(x_1,B(x_2,x_3,C(x_4,x_5,x_6)),D(x_7,x_8,x_9)),$$

Tada je

$$L_1^B x = B(x,a_3,C(a_4,a_5,a_6)),\qquad L_3^B x = B(a_2,a_3,x),$$

$$L_{12}^B(x,y)=B(x,y,C(a_4,a_5,a_6)),\qquad L_{23}^B(x,y)=B(a_2,x,y),$$

$$\sigma_A x = x,\qquad \sigma_B x = A(a_1,x,D(a_7,a_8,a_9)),$$

$$\sigma_C x = A(a_1,B(a_2,a_3,x),D(a_7,a_8,a_9)).$$

Sa $\overline{\Phi}_i$ označavaćemo skup svih izvedenih binarnih operacija svih ternarnih operacija iz skupa $\Phi(w_i),(i=1,2)$.

Skup $\overline{\Phi}_1 \cup [w_1]$ je parcijalno uređen relacijom "$<$" definisanom na sledeći način: $L^A_{jk} < S$, $L^A_{jk} \in \overline{\Phi}_1$, $S \in \overline{\Phi}_1 \cup [w_1]$ tada i samo tada kada je podterm $A(u_1,u_2,u_3)$ terma w_1 takav da je S promenljiva u podtermima u_j ili u_k, ili je S izvedena binarna operacija neke ternarne operacije iz podtermova u_j ili u_k. Analogno je uređen skup $\overline{\Phi}_2 \cup [w_2]$.

<u>Primer.</u> Ako je

$$w = A(x_1,B(x_2,x_3,C(x_4,x_5,x_6)),x_7),$$

onda je

$$L^A_{12} < x_1,\ L^A_{12} < x_2,\ L^A_{12} < x_4,\ L^A_{12} < L^B_{12},\ L^A_{12} < L^B_{13},\ L^B_{13} < x_5, L^B_{13} < L^C_{23}$$

Ako je $x,y \in [w_i]$ onda postoji $\inf_{w_i}(x,y),(i=1,2)$, koji je neka izvedena binarna kvazigrupa.

Takođe, ako je $A(u_1,u_2,u_3)$ podterm terma w_i a promenljiva $x \notin [u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$, onda uvek postoji $\inf_{w_i}(L^A_{jk},x)$, $j<k$, $j,k \in \{1,2,3\}$, $(i=1,2)$.

<u>Definicija 3.4.</u> Ako je za $x,y \in [w_1]$

$$\inf_{w_1}(x,y) = L^A_{jk}, \qquad \inf_{w_2}(x,y) = L^B_{\ell m},$$

kažemo da su izvedene binarne kvazigrupe L^A_{jk} i $L^B_{\ell m}$ povezane i to označavamo sa $L^A_{jk} \xleftrightarrow{(x,y)} L^B_{\ell m}$ (ili kraće sa $L^A_{jk} \longleftrightarrow L^B_{\ell m}$).

<u>Definicija 3.5.</u> Neka su $A,B \in \overline{\Phi}$, gde je

$\overline{\Phi} = \overline{\Phi}_1 \cup \overline{\Phi}_2$. Operacija A je ekvivalentna operaciji B $(A \sim B)$, tada i samo tada kada postoje $C_1, C_2, \dots, C_t \in \overline{\Phi}$, takve da je

$$A = C_1, \quad C_1 \leftrightarrow C_2, \; \dots \;, C_{t-1} \leftrightarrow C_t, \quad C_t = B \; .$$

Za svako $A \in \overline{\Phi}$, $A \sim A$.

Lako se proverava da je relacija iz prethodne definicije relacija ekvivalencije.

Lema 3.1. Neka je $w_1 = w_2$ uravnotežen zakon I vrste u kome su sve operacije ternarne kvazigrupe. Neka je skup $\overline{\Phi}$ svih izvedenih binarnih operacija rastavljen na klase ekvivalencije relacijom $\sim$: $\overline{\Phi} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p$. Tada su sve izvedene binarne kvazigrupe jedne klase K_i izotopne nekoj lupi ⓘ , $(i=1,2,\dots,p)$.

Dokaz. Neka je L^A_{jk} neka operacija iz klase K_i. Definišemo binarnu operaciju ⓘ na skupu Q na sledeći način:

$$\sigma_A L^A_{jk}(x,y) = \sigma_A L^A_j \, x \; ⓘ \; \sigma_A L^A_k \, y \; .$$

Kako su preslikavanja σ_A, L^A_j, L^A_k permutacije skupa Q operacija ⓘ je kvazigrupa izotopna kvazigrupi L^A_{jk}.

Elemenat $e = w_1 \Big| \begin{matrix} x_i \in [w_1] \\ a_i \end{matrix}$ je jedinični elemenat operacije ⓘ (što se jednostavno proverava) pa je operacija ⓘ lupa.

Neka je $L^B_{\ell m}$ operacija iz K_i koja je povezana sa L^A_{jk}, tj. postoje $x_r, x_s \in [w_1]$ takvi da je $L^A_{jk} \xrightarrow{(x_r, x_s)} L^B_{\ell m}$.

Dokažimo da je tada

$$\sigma_B L^B_{\ell m}(x,y) = \sigma_B L^B_\ell x \; (i) \; \sigma_B L^B_m y \, .$$

Fiksirajući u zakonu $w_1 = w_2$ najpre sve promenljive sem x_r, x_s, zatim sve promenljive sem x_r i na kraju sve promenljive sem x_s dobijamo

$$\sigma_A L^A_{jk}(\alpha x_r, \beta x_s) = \sigma_B L^B_{\ell m}(\gamma x_r, \delta x_s),$$

$$\sigma_A L^A_j \alpha = \sigma_B L^B_\ell \gamma \quad ,$$

$$\sigma_A L^A_k \beta = \sigma_B L^B_m \delta \quad .$$

Odavde je

$$\sigma_B L^B_{\ell m}(\gamma x_r, \delta x_s) = \sigma_A L^A_{jk}(\alpha x_r, \beta x_s) =$$

$$= \sigma_A L^A_j \alpha x_r \; (i) \; \sigma_A L^A_k \beta x_s = \sigma_B L^B_\ell \gamma x_r \; (i) \; \sigma_B L^B_m \delta x_s,$$

dakle

$$\sigma_B L^B_{\ell m}(x,y) = \sigma_B L^B_\ell x \; (i) \; \sigma_B L^B_m y \, .$$

Odavde sledi da i za svaku drugu binarnu kvazigrupu L^C_{pq} koja je ekvivalentna sa L^A_{jk} važi

$$\sigma_C L^C_{pq}(x,y) = \sigma_C L^C_p x \; (i) \; \sigma_C L^C_q y \, . \tag{3.1}$$

<u>Primedba.</u> S obzirom na definiciju jediničnog elementa e lupe (i) dobijamo da je e zajednička jedinica za sve lupe (j), (j=1,2,...,p).

<u>Lema 3.2.</u> Ako klasa ekvivalencije K_i sadrži bar tri izvedene binarne operacije, takve da su tri ternarne operacije, iz kojih su ove binarne operacije izvedene, međusobno različite, onda je lupa (i) grupa.

<u>Dokaz.</u> Neka je A neka binarna operacija iz K_i. U K_i postoji binarna operacija B koja je povezana s A.

Po uslovu leme u K_i mora postojati binarna operacija C koja nije izvedena iz ternarnih operacija iz kojih su izvedene A i B. Operacije B i C su ekvivalentne, dakle postoje operacije $C_1, C_2, \ldots, C_t \in K_i$ takve da je

$$A \leftrightarrow B \leftrightarrow C_1 \leftrightarrow C_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow C_t \leftrightarrow C .$$

Neka su operacije A, B izvedene iz ternarnih operacija A', B' respektivno, a C nije izvedena ni iz A' ni iz B'. Prema tome u gore navedenom nizu operacija postoje tri uzastopne operacije od kojih su prve dve izvedene iz ternarnih operacija A' ili B' a treća nije. Označimo te operacije sa $\bar{A}$, $\bar{B}$ i $\bar{C}$. Dakle,

$$\bar{A} \leftrightarrow \bar{B} \leftrightarrow \bar{C} .$$

Neka su $\bar{A}$, $\bar{B}$ izvedene iz ternarnih operacija A', B' respektivno, $L_{jk}^{A'} = \bar{A}$, $L_{\ell m}^{B} = \bar{B}$. Označimo sa x, y promenljive takve da je $\bar{A} \xleftrightarrow{(x,y)} \bar{B}$, a sa s, t promenljive takve da je $\bar{B} \xleftrightarrow{(s,t)} \bar{C}$. Ako su $A'(u_1, u_2, u_3)$ i $B'(v_1, v_2, v_3)$ podtermi termova w_1 i w_2 onda je $x \in [u_j]$, $y \in [u_k]$, $x, s \in [v_\ell]$, $y, t \in [v_m]$.

Tada postoje dve mogućnosti:

1° $s, t \in [u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$,

2° bar jedna od promenljivih s, t, ne pripada skupu $[u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$.

Razmotrimo 1°: Ako $s, t \in [u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$ onda obe promenljive s, t moraju pripadati jednom i samo jednom od skupova $[u_1]$, $[u_2]$, $[u_3]$ (u suprotnom operacije $\bar{A}$ i $\bar{C}$ bi bile izvedene iz jedne iste ternarne operacije).

Pretpostavimo da $s,t \in [u_j]$ .Tada fiksirajući u zakonu $w_1 = w_2$ sve promenljive osim s,t i y dobijamo

$$(3.2) \qquad \alpha\bar{A}(\beta\bar{C}(\gamma s, \delta t), \varphi y) = \alpha'\bar{B}(\beta' s, \gamma'\bar{D}(\delta' t, \varphi' y))$$

gde je $\bar{D} = \inf_{w_2}(t,y)$.

Ako u jednakosti (3.2) fiksiramo najpre t,y, zatim s,y i na kraju s,t dobićemo

$$\alpha L_1^{\bar{A}} \beta L_1^{\bar{C}} \gamma = \alpha' L_1^{\bar{B}} \beta' ,$$

$$\alpha L_1^{\bar{A}} \beta L_2^{\bar{C}} \delta = \alpha' L_2^{\bar{B}} \gamma' L_1^{\bar{D}} \delta' ,$$

$$\alpha L_2^{\bar{A}} \varphi = \alpha' L_2^{\bar{B}} \gamma' L_2^{\bar{D}} \varphi' .$$

Kako je $\bar{A} \xleftrightarrow{(t,y)} \bar{D}$, sledi da $\bar{D} \in K_i$, pa su sve četiri operacije $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$ i $\bar{D}$ izotopne lupi (i) i izotopije imaju oblik (3.1) (v. lemu 3.1.).Prema tome jednakost (3.2) postaje

$$(\alpha L_1^{\bar{A}} \beta L_2^{\bar{C}} \gamma s \; (i) \; \alpha L_1^{\bar{A}} \beta L_2^{\bar{C}} \delta t) \; (i) \; \alpha L_2^{\bar{A}} \varphi y =$$
$$= \alpha' L_1^{\bar{B}} \beta' s \; (i) \; (\alpha' L_2^{\bar{B}} \gamma' L_1^{\bar{D}} \delta' t \; (i) \; \alpha' L_2^{\bar{B}} \gamma' L_2^{\bar{D}} \varphi' y),$$

tj.

$$(s \; (i) \; t) \; (i) \; y = s \; (i) \; (t \; (i) \; y),$$

a to znači da je lupa (i) asocijativna tj. grupa.

Pretpostavljajući da je ili $s,t \in [u_k]$, ili $s,t \in [u_g]$, $g \neq j \neq k$, i fiksirajući u zakonu sve promenljive osim x, s i t , analogno dobijamo da je (i) grupa.

Razmotrimo 2^o: Pretpostavimo da bar jedna od promenljivih s,t ne pripada skupu $[u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$.

Ako $s \notin [u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$ fiksirajmo u zakonu

$w_1 = w_2$ sve promenljive osim s, x i y. Dobijamo

$$\psi \bar{E}(\theta s, \chi \bar{A}(\nu x, \eta y)) = \psi' \bar{B}(\theta' \bar{F}(\chi' s, \nu' x), \eta' y),$$

gde je $\bar{E} = \inf_{w_1}(s,\bar{A})$, $\bar{F} = \inf_{w_2}(s,x)$, a odatle analogno kao u 1^o sledi da je (i) grupa.

Ako $t \notin [u_1] \cup [u_2] \cup [u_3]$, dokaz je analogan.

<u>Definicija 3.6.</u> Ako je $A(u_1,u_2,u_3)$ podterm terma w_1 takav da u w_2 postoji podterm $B(v_1,v_2,v_3)$ sa osobinom da je $[u_1]=[v_1]$, $[u_2]=[v_2]$, $[u_3]=[v_3]$, onda ternarne operacije A i B nazivamo nezavisne.

<u>Teorema 3.1.</u> Neka je $w_1 = w_2$ proizvoljan uravnotežen zakon I vrste u kome su sve operacije ternarne kvazigrupe. Ako je skup $\bar{\Phi}$ svih izvedenih binarnih operacija rastavljen na klase ekvivalencije relacijom $\sim$: $\bar{\Phi} = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_p$ onda su sve izvedene binarne kvazigrupe jedne klase K_i izotopne nekoj lupi (i) ,$(i=1,2,\ldots,p)$. Proizvoljna ternarna kvazigrupa A skupa $\Phi(w_1) \cup \Phi(w_2)$, osim nezavisnih, tada se može prikazati u obliku:

$$\sigma_A A(x,y,z) = \sigma_A L_1^A x \; (i) \; (\sigma_A L_2^A y \; (j) \; \sigma_A L_3^A z) \tag{3.3}$$

ili

$$\sigma_A A(x,y,z) = (\sigma_A L_1^A x \; (i) \; \sigma_A L_2^A y) \; (j) \; \sigma_A L_3^A z . \tag{3.4}$$

Lupe (i), (j) su jedinstveno određene.

Izrazi (3.3) i (3.4) su jednaki tada i samo tada kada je (i) = (j) i operacija (i) je asocijativna tj. grupa.

Lupa (i) je grupa ako klasa K_i sadrži bar tri izvedene binarne operacije, takve da su tri ternarne operacije , iz kojih su ove binarne operacije izvedene, međusobno različite.

Dokaz. Prvi deo teoreme dokazan je u lemi 3.1.

Neka je $A(u_1,u_2,u_3)$ neki podterm terma w_1, gde A nije nezavisna operacija. Dokažimo da se A može prikazati u obliku (3.3) ili (3.4).

Neka su $x\in[u_1]$, $y\in[u_2]$, $z\in[u_3]$. Ako u zakonu $w_1 = w_2$ fiksiramo sve promenljive osim x, y, z onda w_1 postaje

$$\sigma_A A(\alpha x, \beta y, \gamma z) ,$$

gde su α, β, γ neke permutacije skupa Q.

Tada za w_2 postoje dve mogućnosti: u w_2 postoji podterm $P(p_1,p_2,p_3)$ takav da je $x\in[p_1]$, $y\in[p_2]$, $z\in[p_3]$, ili ne postoji.

Najpre razmotrimo slučaj kada takav podterm ne postoji.

Tada je $\inf_{w_2}(x,y,z) = L^B_{ij}$. Ako je $B(v_1,v_2,v_3)$ podterm terma w_2 fiksirajmo u w_2 sve promenljive osim promenljivih iz $[v_i]$ i $[v_j]$. w_2 onda postaje $\sigma_B L^B_{ij}(v_i,v_j)$ i pri tome $x,y\in[v_i]$, $z\in[v_j]$ ili $x\in[v_i]$, $y,z\in[v_j]$. U prvom slučaju, ako je $\inf_{w_2}(x,y) = L^C_{k\ell}$ u w_2 fiksirajmo sve promenljive sem x,y,z. Tada w_2 postaje

$$\sigma_B L^B_{ij}(\delta L^C_{k\ell}(\varphi x, \theta y), \psi z).$$

Dakle,

$$\sigma_A A(\alpha x, \beta y, \gamma z) = \sigma_B L^B_{ij}(\delta L^C_{k\ell}(\varphi x, \theta y), \psi z).$$

U gornjoj jednakosti fiksirajmo redom y, z zatim x, z

i na kraju x, y. Dobija se

$$\sigma_A L_1^A \alpha = \sigma_B L_i^B \delta L_k^C \varphi ,$$

$$\sigma_A L_2^A \beta = \sigma_B L_i^B \delta L_\ell^C \theta ,$$

$$\sigma_A L_3^A \gamma = \sigma_B L_j^B \psi \quad .$$

Na osnovu leme 3.1. svaka od izvedenih binarnih kvazigrupa izotopna je nekoj lupi i izotopije imaju oblik (3.1) pa je

$$\sigma_A A(\alpha x, \beta y, \gamma z) = \sigma_B L_i^B(\delta L_{k\ell}^C(\varphi x, \theta y)) \, (q) \, \sigma_B L_j^B \psi z =$$

$$= (\sigma_B L_i^B \delta L_k^C \varphi x \, (p) \, \sigma_B L_i^B \delta L_\ell^C \theta y) \, (q) \, \sigma_B L_j^B \psi z =$$

$$= (\sigma_A L_1^A \alpha x \, (p) \, \sigma_A L_2^A \beta y) \, (q) \, \sigma_A L_3^A \gamma z \ .$$

Dakle,

(3.4') $$\sigma_A A(x,y,z) = (\sigma_A L_1^A x \, (p) \, \sigma_A L_2^A y) \, (q) \, \sigma_A L_3^A z.$$

U drugom slučaju, ako $x \quad v_i$, y, $z \quad v_j$ analogno se pokazuje da je

(3.3') $$\sigma_A A(x,y,z) = \sigma_A L_1^A x \, (p') \, (\sigma_A L_2^A y \, (q') \, \sigma_A L_3^A z) \ .$$

Ako u w_2 postoji podterm $P(p_1,p_2,p_3)$ takav da je $x \in [p_1]$, $y \in [p_2]$, $z \in [p_3]$, onda fiksirajući u zakonu $w_1 = w_2$ sve promenljive osim x,y,z dobijamo

(3.5) $$\sigma_A A(\alpha x, \beta y, \gamma z) = \sigma_P P(\bar{\alpha} x, \bar{\beta} y, \bar{\gamma} z),$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}$ neke permutacije skupa Q.

Razmotrimo podterme $A(u_1,u_2,u_3)$ i $P(p_1,p_2,p_3)$. Tako operacija A nije nezavisna ne može biti istovremeno

$[u_1]=[p_1]$, $[u_2]=[p_2]$, $[u_3]=[p_3]$. Razlikujemo sledeće moguće slučajeve:

a) $[u_2] \neq [p_2]$. Pretpostavimo da postoji promenljiva $t \in [u_2] \setminus [p_2]$. To znači da $t \in [p_1]$ ili $t \in [p_3]$. Pretpostavimo da $t \in [p_1]$ (ako $t \in [p_3]$ dokaz je analogan). Ako u zakonu $w_1 = w_2$ fiksiramo sve promenljive osim t,y,z dobijamo (jer $t,y \in [u_2]$, $z \in [u_3]$ a $t \in [p_1]$, $y \in [p_2]$, $z \in [p_3]$):

$$\sigma_A L_{23}^A(\alpha' L_{ij}^C(\beta' t, \gamma' y), \delta' z) = \sigma_P P(\varphi' t, \theta' y, \psi' z),$$

gde je $L_{ij}^C = \inf_{w_1}(t,y)$. Odatle na već pokazan način dobijamo da se operacija P može prikazati u obliku (3.3) ili (3.4), a onda s obzirom na (3.5) sledi da se i A može prestaviti u obliku (3.3) ili (3.4).

Dokaz je analogan ako postoji promenljiva $t \in [p_2]$ $[u_2]$.

b) $[u_2]=[p_2]$. Tada je $[u_1] \neq [p_1]$ ili $[u_3] \neq [p_3]$. Pretpostavimo da postoji promenljiva $t \in [u_1] \setminus [p_1]$ (dokaz je analogan ako $t \in [p_1] \setminus [u_1]$). Kako je $[u_2] = [p_2]$ očevidno $t \notin [p_1] \cup [p_2] \cup [p_3]$. Jasno je da je $\inf_{w_2}(y,z) = L_{23}^P$, a pošto se t nalazi van terma $P(p_1,p_2,p_3)$ postoji izvedena binarna operacija $L_{ij}^C = \inf_{w_2}(L_{23}^P, t)$.

Fiksirajući u $w_1 = w_2$ sve promenljive osim t, y, z dobijamo

$$\sigma_A A(\tilde{\alpha} t, \tilde{\beta} y, \tilde{\gamma} z) = \sigma_B L_{ij}^C(\tilde{\delta} t, \tilde{\psi} L_{23}^B(\tilde{\varphi} y, \tilde{\theta} z)),$$

gde su $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}, \tilde{\delta}, \tilde{\psi}, \tilde{\varphi}, \tilde{\theta}$ neke permutacije skupa Q. Odatle na već poznat način dobijamo da se operacija A može prikazati u obliku (3.3) ili (3.4).

Ako je $[u_3] \neq [p_3]$ dokaz je analogan.

Dokažimo da su lupe u (3.3) i (3.4) jedinstveno određene. Pretpostavimo da se ternarna operacija A može prikazati kao superpozicija binarnih lupa na dva načina:

$$\sigma_A A(x,y,z) = \sigma_A L_1^A\, x \textcircled{i} (\sigma_A L_2^A\, y \textcircled{j} \sigma_A L_3^A\, z) =$$

$$= \sigma_A L^A\, x \textcircled{k} (\sigma_A L_2^A\, y \textcircled{l} \sigma_A L_3^A\, z) .$$

Otuda je

$$x \textcircled{i} (y \textcircled{j} z) = x \textcircled{k} (y \textcircled{l} z) .$$

Kako sve lupe $\textcircled{m}$, $(m=1,2,\dots,p)$, imaju zajedničku jedinicu e (v. primedbu posle leme 3.1.), stavljajući u gornju jednakost najpre $x = e$, zatim $z = e$, dobijamo da je $\textcircled{i} = \textcircled{k}$, $\textcircled{j} = \textcircled{l}$.

Analogno se pokazuje da će i u slučaju kada je

$$\sigma_A A(x,y,z) = \sigma_A L_1^A\, x \textcircled{i} (\sigma_A L_2^A\, y \textcircled{j} \sigma_A L_3^A\, z) =$$

$$= (\sigma_A L_1^A\, x \textcircled{k} \sigma_A L_2^A\, y) \textcircled{l} \sigma_A L_3^A\, z ,$$

takođe biti $\textcircled{i} = \textcircled{k}$, $\textcircled{j} = \textcircled{l}$.

Dakle lupe $\textcircled{i}$ i $\textcircled{j}$ su jednoznačno određene.

Pretpostavimo sada da je (3.3) jednako s (3.4):

$$\sigma_A L_1^A x \textcircled{i} (\sigma_A L_2^A y \textcircled{j} \sigma_A L_3^A z) = (\sigma_A L_1^A x \textcircled{i} \sigma_A L_2^A y) \textcircled{j} \sigma_A L_3^A z .$$

tj.

$$x \textcircled{i} (y \textcircled{j} z) = (x \textcircled{i} y) \textcircled{j} z .$$

Stavljajući $y = e$ dobijamo da je $\textcircled{i} = \textcircled{j}$ i da je lupa $\textcircled{i}$ asocijativna tj. grupa.

Obrnuto, ako je ⓘ = ⓙ i ako je lupa ⓘ asocijativna očevidno je da se (3.3) poklapa s (3.4).

Poslednje tvrđenje teoreme dokazano je u lemi 3.2.

Time je teorema u potpunosti dokazana.

Primer. Neka su $A_i, B_i, (i=1,2,3)$, ternarne kvazigrupe koje zadovoljavju zakon

$$A_1(x_1,x_2,A_2(x_3,A_3(x_4,x_5,x_6),x_7)) =$$
$$= B_1(x_1,B_2(x_2,x_3,B_3(x_4,x_5,x_6)),x_7),$$

Ako je na skupu svih izvedenih binarnih operacija uvedena relacija ekvivalencije $\sim$ onda se taj skup rastavlja na šest klasa ekvivalencije:

$$K_1 = \left\{L_{12}^{A_1},\ L_{13}^{A_1},\ L_{12}^{B_1},\ L_{13}^{B_1}\right\},$$

$$K_2 = \left\{L_{23}^{A_1},\ L_{13}^{A_2},\ L_{23}^{A_2},\ L_{23}^{B_1},\ L_{13}^{B_2},\ L_{12}^{B_2}\right\},$$

$$K_3 = \left\{L_{12}^{A_2},\ L_{23}^{B_2}\right\}, \qquad K_4 = \left\{L_{12}^{A_3},\ L_{12}^{B_3}\right\},$$

$$K_5 = \left\{L_{13}^{A_3},\ L_{13}^{B_3}\right\}, \qquad K_6 = \left\{L_{23}^{A_3},\ L_{23}^{B_3}\right\}.$$

Na osnovu dokazane teoreme postoje lupe ⓘ, $(i=1,2,\dots,6)$, takve da su sve izvedene operacije klase K_i izotopne lupi ⓘ.

Lupa ② je asocijativna tj. grupa. Ternarne kvazigrupe A_3 i B_3 su nezavisne a ternarne kvazigrupe A_1, A_2, B_1, B_2 mogu se prikazati u obliku

$$A_1(x,y,z) = L_1^{A_1}x \,①\, (L_2^{A_1}y \,②\, L_3^{A_1}z),$$

$$\sigma_{A_2} A_2(x,y,z) = (\sigma_{A_2} L_1^{A_2} x \; ③ \; \sigma_{A_2} L_2^{A_2} y) \; ② \; \sigma_{A_2} L_3^{A_2} z \;,$$

$$B_1(x,y,z) = L_1^{B_1} x \; ① \; (L_2^{B_1} y \; ② \; L_3^{B_1} z \;) \;,$$

$$\sigma_{B_2} B_2(x,y,z) = \sigma_{B_2} L_1^{B_2} x \; ② \; (\sigma_{B_2} L_2^{B_2} y \; ③ \; \sigma_{B_2} L_3^{B_2} z \;).$$

IV DEO

URAVNOTEŽENI ZAKONI NA TERNARNIM GD-GRUPOIDIMA

4.1. Uvod

U ovom delu ispitaćemo ternarne GD-grupoide koji zadovoljavaju uravnotežene zakone I vrste.Pokazaćemo da se, uz uvođenje nekih dodatnih uslova, mogu dokazati teoreme analogne onima iz prethodnog dela.Time se proširuje mogućnost primene teoreme 3.1. na neke uravnotežene zakone na kvazigrupama raznih arnosti.

4.2. Uravnoteženi zakoni na ternarnim GD-grupoidima

Koristićemo analogne oznake kao u trećem delu.

Neka je $w_1 = w_2$ uravnotežen zakon I vrste u kome su sve operacije ternarne.Neka je $\Phi_1 = \{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$, $\Phi_2 = \{B_1, B_2, \ldots, B_n\}$, $[w_1] = [w_2] = \{x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}\}$, a A_1 i B_1 početna operacijska slova termova w_1 i w_2 respektivno.Neka su $S_1, S_2, \ldots, S_{2n+1}, P_1, P_2, \ldots, P_n, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ neprazni skupovi i pri tome neka je $P_1 = Q_1 = S$.

Definišemo ternarne GD-grupoide A_i, B_i, $(i=1,2,\ldots,n)$ na sledeći način.Ako je $A_k(u_1,u_2,u_3)$ podterm terma w_1 onda je A_k ternarni GD-grupoid koji preslikava

$$A_k\colon\ M_1 \times M_2 \times M_3 \to P_k \,,$$

gde je

$M_j = S_t$, ako je $u_j = x_t$,

$M_j = P_t$, ako je $u_j = A_t(u_1', u_2', u_3')$, $j=1,2,3$.

Analogno, ako je $B_k(v_1, v_2, v_3)$ podterm terma w_2 onda je B_k ternarni GD-grupoid koji preslikava

$$B_k: M_1 \times M_2 \times M_3 \rightarrow Q_k ,$$

gde je

$M_j = S_t$, ako je $v_j = x_t$,

$M_j = Q_t$, ako je $v_j = B_t(v_1', v_2', v_3')$, $j=1,2,3$.

Neka ovako definisani ternarni GD-grupoidi A_i, B_i, ($i=1,2,\dots,n$), zadovoljavaju uravnoteženi zakon I vrste $w_1 = w_2$. Ako su $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ proizvoljni fiksirani elementi skupova $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$ respektivno, $A(u_1, u_2, u_3)$ proizvoljan podterm terma w (w je w_1 ili w_2) onda preslikavanja L_j^A, L_{jk}^A, σ_A definišemo analogno kao u prethodnom delu. U ovom slučaju L_j^A i σ_A su sirjektivna preslikavanja a L_{jk}^A binarni GD-grupoid koji nazivamo izvedeni binarni GD-grupoid ternarnog GD-grupoida A.

Relaciju "$<$" u skupovima $\overline{\Phi}_1 \cup [w_1]$ odnosno $\overline{\Phi}_2 \cup [w_2]$, i relaciju ekvivalencije "$\sim$" u skupu $\overline{\Phi}$ definišemo analogno kao ranije.

Tada važi

<u>Lema 4.1.</u> Neka je $w_1 = w_2$ uravnoteženi zakon I vrste u kome su sve operacije ternarni GD-grupoidi. Neka je skup svih izvedenih binarnih GD-grupoida podeljen na klase ekvivalencije relacijom $\sim$: $\overline{\Phi} = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p$. Ako je K_i klasa ekvivalencije takva da u K_i postoje dva povezana

binarna GD-grupoida L^A_{jk} i $L^B_{\ell m}$ sa osobinom da od sle-
deća četiri para preslikavanja

$$1)\quad \sigma_A L^A_j, \quad \sigma_A L^A_k,$$

$$2)\quad \sigma_B L^B_\ell, \quad \sigma_B L^B_m,$$

$$3)\quad \sigma_A L^A_j, \quad \sigma_B L^B_m,$$

$$4)\quad \sigma_A L^A_k, \quad \sigma_B L^B_\ell,$$

bar u jednom paru oba preslikavnja su bijekcije za svaki izbor elemenata $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ iz skupova $S_1, S_2, \dots, S_{2n+1}$ respektivno, onda postoji binarna lupa (i) definisana na skupu S koja je homotopna slika svih izvedenih binarnih GD-grupoida klase K_i.

Dokaz. Definisaćemo binarnu operaciju (i) na skupu S, ako važi jedan od uslova 1,3,4, sa

$$\sigma_A L^A_{jk}(x,y) = \sigma_A L^A_j\, x \,(i)\, \sigma_A L^A_k\, y \;,$$

a ako važi uslov 2, onda sa

$$\sigma_B L^B_{\ell m}(x,y) = \sigma_B L^B_\ell\, x \,(i)\, \sigma_B L^B_m\, y \;.$$

Da je operacija (i) dobro definisana kada važe uslovi 1 ili 2, očigledno je. Pretpostavimo da važi uslov 3 i pokažimo da je i tada operacija (i) dobro definisana.

Neka su s i t bilo koja dva elementa skupa S. Preslikavanje $\sigma_A L^A_j$ je bijekcija pa postoji jedan i samo jedan elemenat x takav da je $s = \sigma_A L^A_j\, x$, a kako je preslikavanje $\sigma_A L_k^A$ sirjektivno mogu postojati dva različita elementa y_1 i y_2 takva da je $t = \sigma_A L_k^A\, y_1 = \sigma_A L_k^A\, y_2$. Kako su operacije L_{jk}^A i $L_{\ell m}^B$ povezane postoje promenljive x_q i x_r, takve da se fiksirajući u zakonu $w_1 = w_2$ sve promenljive sem x_q i x_r dobija

$$\sigma_A L_{jk}^A(\alpha x_q, \beta x_r) = \sigma_B L_{\ell m}^B(\gamma x_q, \delta x_r),$$

gde su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sirjektivna preslikavnja. Fiksirajući u gornjoj jednakosti x_q a potom x_r dobićemo da je

(4.1) $$\sigma_A L_j^A \alpha = \sigma_B L_\ell^B \gamma ,$$

(4.2) $$\sigma_A L_k^A \beta = \sigma_B L_m^B \delta .$$

Kako je β sirjektivno preslikavanje postoje elementi z_1, z_2 tako da je $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2$. Na osnovu toga je

$$\sigma_A L_k^A \beta z_1 = \sigma_A L_k^A \beta z_2 ,$$

ili, uzimajući u obzir (4.2),

$$\sigma_B L_m^B \delta z_1 = \sigma_B L_m^B \delta z_2 .$$

$\sigma_B L_m^B$ je bijekcija pa mora biti

(4.3) $$\delta z_1 = \delta z_2 .$$

α je sirjektivno preslikavnje pa postoji u tako da je $\alpha u = x$. Prema tome, na osnovu prethodnih rezultata sledi

$$\sigma_A L_{jk}^A(x, y_1) = \sigma_A L_{jk}^A(\alpha u, \beta z_1) = \sigma_B L_{\ell m}^B(\gamma u, \delta z_1) =$$

$$= \sigma_B L_{\ell m}^B(\gamma u, \delta z_2) = \sigma_A L_{jk}^A(\alpha u, \beta z_2) = \sigma_A L_{jk}^A(x, y_2).$$

Dakle, dokazali smo da iz pretpostavke da je

$$\sigma_A L_k^A\, y_1 = \sigma_A L_k^A\, y_2\ ,$$

sledi

$$\sigma_A L_{jk}^A(x,y_1) = \sigma_A L_{jk}^A(x,y_2),$$

tj. proizvod s ⓘ t ne zavisi od izbora elemenata y_1 i y_2 pa je operacija ⓘ dobro definisana.

Analogno se pokazuje da je i dobro definisana operacija i ukoliko je ispunjen uslov 4.

Kako su preslikavnja navedena u uslovima 1-4 bijekcije za svaki izbor elemenata $a_1, a_2, \dots, a_{2n+1}$ jednostavno se može pokazati da je ⓘ lupa.

Analogno kao u lemi 3.1. dokazuje se da je lupa ⓘ homotopna slika i svakog drugog binarnog GD-grupoida klase K_i i ta homotopija ima oblik

$$\sigma_C L_{gh}^C(x,y) = \sigma_C L_g^C\, x \,ⓘ\, \sigma_C L_h^C\, y\ .$$

<u>Lema 4.2.</u> Ako klasa ekvivalencije K_i sadrži najmanje tri izvedena binarna GD-grupoida, takva da su tri ternarna GD-grupoida iz kojih su ti binarni GD-grupoidi izvedeni međusobno različiti, onda je lupa ⓘ grupa.

Dokaz je analogan dokazu leme 3.2.

<u>Teorema 4.1.</u> Neka je $w_1 = w_2$ proizvoljan uravnotežen zakon I vrste u kome su sve operacije ternarni GD-grupoidi. Neka je skup $\bar{\Phi}_0$ svih izvedenih binarnih operacija koje nisu izvedene iz nezavisnih ternarnih operacija, podeljen na klase ekvivalencije relacijom $\sim$: $\bar{\Phi}_0 = K_1 \cup K_2 \cup \dots \cup K_p$. Ako u svakoj klasi K_i, $(i=1,2,\dots,p)$, postoje dva povezana

izvedena GD-grupoida $L_{jk}^{A_{q_i}}$ i $L_{\ell m}^{B_{r_i}}$ sa osobinom da od sledeća četiri para preslikavanja

1) $\sigma_{A_{q_i}} L_j^{A_{q_i}}$, $\sigma_{A_{q_i}} L_k^{A_{q_i}}$,

2) $\sigma_{B_{r_i}} L_\ell^{B_{r_i}}$, $\sigma_{B_{r_i}} L_m^{B_{r_i}}$,

3) $\sigma_{A_{q_i}} L_j^{A_{q_i}}$, $\sigma_{B_{r_i}} L_m^{B_{r_i}}$,

4) $\sigma_{A_{q_i}} L_k^{A_{q_i}}$, $\sigma_{B_{r_i}} L_\ell^{B_{r_i}}$,

bar u jednom paru oba preslikavanja su bijekcije za svaki izbor elemenata $a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}$ iz skupova $S_1, S_2, \ldots, S_{2n+1}$ respektivno, onda postoji binarna lupa (i) definisana na skupu S, koja je homotopna slika svih izvedenih binarnih GD-grupoida klase K_i.

Proizvoljan ternarni GD-grupoid A skupa $\phi(w_1) \cup \phi(w_2)$, osim nezavisnih, može se tada prikazati u obliku

$$\sigma_A A(x,y,z) = \sigma_A L_1^A \, x \, (i) \, (\sigma_A L_2^A \, y \, (j) \, \sigma_A L_3^A \, z), \tag{4.4}$$

ili

$$\sigma_A A(x,y,z) = (\sigma_A L_1^A \, x \, (i) \, \sigma_A L_2^A \, y) \, (j) \, \sigma_A L_3^A \, z \,. \tag{4.5}$$

Lupe (i), (j) su jedinstveno određene.

Izrazi (4.4) i (4.5) su jednaki tada i samo tada kada je (i) = (j) i lupa (i) je asocijativna tj. grupa.

Lupa (i) je grupa ako klasa ekvivalencije K_i sadrži najmanje tri izvedena GD-grupoida, takva da su tri ternarna GD-grupoida iz kojih su ti binarni GD-grupoidi izvedeni, međusobno različiti.

Dokaz je analogan dokazu teoreme 3.1.

Dobijeni rezultati mogu se uspešno primeniti na neke uravnotežene zakone na kvazigrupama raznih arnosti. To ćemo ilustrovati sledećim primerom.

Primer. Posmatramo zakon

$$A_1(x_1^j, A_2(x_{j+1}^k, A_3(x_{k+1}^p), x_{p+1}^q)) =$$

$$= B_1(B_2(x_1^i, B_3(x_{i+1}^m), x_{m+1}^n), x_{n+1}^q) ,$$

gde su i,j,k,m,n,p,q prirodni brojevi takvi da je $i<j<k<m<n<p<q$, a A_i, B_i, $(i=1,2,3)$, kvazigrupe definisane na istom nepraznom skupu Q, arnosti

$$|A_1| = j+1, \qquad |A_2| = k-j+q-p+1, \qquad |A_3| = p-k,$$

$$|B_1| = q-n+1, \qquad |B_2| = i+n-m+1, \qquad |B_3| = m-i.$$

Ako stavimo

$$A_1(x_1^j, x) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{A}_1((x_1^i), (x_{i+1}^j), x),$$

$$A_2(x_{j+1}^k, x, x_{p+1}^q) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{A}_2((x_{j+1}^k), x, (x_{p+1}^q)),$$

$$A_3(x_{k+1}^p) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{A}_3((x_{k+1}^m), (x_{m+1}^n), (x_{n+1}^p)),$$

$$B_1(x, x_{n+1}^q) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{B}_1(x, (x_{n+1}^p), (x_{p+1}^q)),$$

$$B_2(x_1^i, x, x_{m+1}^n) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{B}_2((x_1^i), x, (x_{m+1}^n)),$$

$$B_3(x_{i+1}^m) \overset{\text{def}}{=\!=} \tilde{B}_3((x_{i+1}^j), (x_{j+1}^k), (x_{k+1}^m)),$$

i uvedemo oznake

$X_1=(x_1^i)$, $X_2=(x_{i+1}^j)$, $X_3=(x_{j+1}^k)$, $X_4(x_{k+1}^m)$, $X_5=(x_{m+1}^n)$,

$X_6=(x_{n+1}^p)$, $X_7=(x_{p+1}^q)$,

dobijamo ternarne GD-grupoide $\tilde{A}_i, \tilde{B}_i$, $(i=1,2,3)$, koji zadovoljavaju zakon

$$\tilde{A}_1(X_1,X_2,\tilde{A}_2(X_3,\tilde{A}_3(X_4,X_5,X_6),X_7)) =$$
$$= \tilde{B}_1(\tilde{B}_2(X_1,\tilde{B}_3(X_2,X_3,X_4),X_5),X_6,X_7).$$

Ovde svi izvedeni binarni GD-grpoidi leže u jednoj klasi ekvivalencije K_1, $L_{23}^{\tilde{A}_1}$ i $L_{12}^{\tilde{B}_1}$ su povezane operacije takve da su preslikavnja $L_3^{\tilde{A}_1}$ i $L_1^{\tilde{B}_1}$ bijekcije, u K_1 ima tri binarne operacije izvedene iz tri različite ternarne operacije, pa prema tome postoji binarna grupa $(Q,\circ)$ koja je homotopna slika svih izvedenih binarnih GD-grupoida. Tada je

$$\tilde{A}_1(X_1,X_2,x) = L_1^{\tilde{A}_1}X_1 \circ L_2^{\tilde{A}_1}X_2 \circ L_3^{\tilde{A}_1}x ,$$

$$\sigma_{\tilde{A}_2}\tilde{A}_2(X_3,x,X_7) = \sigma_{\tilde{A}_2}L_1^{\tilde{A}_2}X_3 \circ \sigma_{\tilde{A}_2}L^{\tilde{A}_2}x \circ \sigma_{\tilde{A}_2}L_3^{\tilde{A}_2}X_7 ,$$

$$\sigma_{\tilde{A}_3}\tilde{A}_3(X_4,X_5,X_6) = \sigma_{\tilde{A}_3}L_1^{\tilde{A}_3}X_4 \circ \sigma_{\tilde{A}_3}L_2^{\tilde{A}_3}X_5 \circ \sigma_{\tilde{A}_3}L_3^{\tilde{A}_3}X_6 ,$$

$$\tilde{B}_1(x,X_6,X_7) = L_1^{\tilde{B}_1}x \circ L_2^{\tilde{B}_1}X_6 \circ L_3^{\tilde{B}_1}X_7 ,$$

$$\sigma_{\tilde{B}_2}\tilde{B}_2(X_1,x,X_5) = \sigma_{\tilde{B}_2}L_1^{\tilde{B}_2}X_1 \circ \sigma_{\tilde{B}_2}L^{\tilde{B}_2}x \circ \sigma_{\tilde{B}_2}L_3^{\tilde{B}_2}X_5 ,$$

$$\sigma_{\tilde{B}_3}\tilde{B}_3(X_2,X_3,X_4) = \sigma_{\tilde{B}_3}L_1^{\tilde{B}_3}X_2 \circ \sigma_{\tilde{B}_3}L_2^{\tilde{B}_3}X_3 \circ \sigma_{\tilde{B}_3}L_3^{\tilde{B}_3}X_4 ,$$

gde je $L_1^{\tilde{A}_1} = \sigma_{\tilde{B}_2}L_1^{\tilde{B}_2}$, $\quad L_2^{\tilde{A}_1} = \sigma_{\tilde{B}_3}L_1^{\tilde{B}_3}$, $\quad \sigma_{\tilde{A}_2}L_1^{\tilde{A}_2} = \sigma_{\tilde{B}_3}L_2^{\tilde{B}_3}$,

$$\sigma_{\tilde{A}_2} L_3^{\tilde{A}_2} = L_3^{\tilde{B}_1}, \quad \sigma_{\tilde{A}_3} L_1^{\tilde{A}_3} = \sigma_{\tilde{B}_3} L_3^{\tilde{B}_3}, \quad \sigma_{\tilde{A}_3} L_2^{\tilde{A}_3} = \sigma_{\tilde{B}_2} L_2^{\tilde{B}_2},$$

$$\sigma_{\tilde{A}_3} L_3^{\tilde{A}_3} = L_2^{\tilde{B}_1}, \quad \sigma_{\tilde{A}_2} L_3^{\tilde{A}_2} = L_3^{\tilde{B}_1},$$

odnosno

$$A_1(x_1^j, x) = M(x_1^i) \circ N(x_{i+1}^j) \circ L_{j+1}^{A_1} x,$$

$$L_{j+1}^{A_1} A_2(x_{j+1}^k, x, x_{p+1}^q) = P(x_{j+1}^k) \circ L_{k-j+1}^{A_2} \circ Q(x_{p+1}^q),$$

$$L_{j+1}^{A_1} L_{k-j+1}^{A_2} A_3(x_{k+1}^p) = R(x_{k+1}^m) \circ S(x_m^n) \circ T(x_{n+1}^p),$$

$$B_1(x, x_{n+1}^q) = L_1^{B_1} x \circ T(x_{n+1}^p) \circ Q(x_{p+1}^q),$$

$$L_1^{B_1} B_2(x_1^i, x, x_{m+1}^n) = M(x_1^i) \circ L_1^{B_1} L_{i+1}^{B_2} x \circ S(x_{m+1}^n),$$

$$L_1^{B_1} L_{i+1}^{B_2} B_3(x_{i+1}^m) = N(x_{i+1}^j) \circ P(x_{j+1}^k) \circ R(x_{k+1}^m),$$

gde je $(Q, \circ)$ binarna grupa a M, N, P, Q, R, S, T kvazigrupe arnosti

$$|M| = i, \quad |N| = j-i, \quad |P| = k-j, \quad |Q| = q-p, \quad |R| = m-k,$$

$$|S| = n-m, \quad |T| = p-n,$$

definisane na skupu Q.

V DEO

O UOPŠTENIM (i,j)-MODULARNIM KVAZIGRUPAMA

5.1. Uvod

U jednom od svojih radova [64] S.Milić je razmatrao (i,j)-modularni zakon. Četiri n-arne kvazigrupe A, B, C, D zadovoljavaju (i,j)-modularni zakon ako je

$$(5.1)\qquad A(x_1^{i-1},B(y_1^n),x_{i+1}^n) = C(y_1^{j-1},D(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n),$$

za svako x_r, y_s, $r,s=1,2,\dots,n$.

Na prirodan način može se definisati (i,j)-modularna kvazigrupa A koja zadovoljava (5.1) u slučaju $A = B = C = D$.

Ovde ćemo ispitati uopšteni slučaj kada A zadovoljava jednačinu

$$(5.2)\qquad A(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)},A(y_{\tau 1}^{\tau n}),x_{\sigma(i+1)}^{\sigma n})=A(y_1^{j-1},A(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^n),y_{j+1}^n),$$

gde je A n-kvazigrupa definisana na nepraznom skupu Q, i,j neki fiksirani brojevi iz skupa $N=\{1,2,\dots,n\}$, σ i τ permutacije skupa N sa osobinom $\sigma i = \tau i = i$, $\sigma j = \tau j = j$. Takvu kvazigrupu ćemo nazivati uopštena (i,j)-modularna kvazigrupa. Daćemo potpun opis takve kvazigrupe.

Napominjemo da je time rešen specijalan slučaj opštijeg nerešenog problema koji je postavio Belousov V.D. u [13]:

Naći sve n-arne kvazigrupe A koje zadovoljavaju jednačinu

$$A(x_1^{i-1},A(x_i^{i+n-1}),x_{i+1}^{2n-1})=A(y_1^{j-1},A(y_j^{j+n-1}),y_{j+n}^{2n-1}),$$

gde je y_1^{2n-1} permutacija od x_1^{2n-1}.

5.2. Uopštene (i,j)-modularne kvazigrupe

Dokazaćemo sledeću teoremu.

Teorema 5.1. Sva rešenja funkcionalne jednačine

$$(5.2)\qquad A(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)},A(y_{\tau 1}^{\tau n}),x_{\sigma(i+1)}^{\sigma n})=A(y_1^{j-1},A(x_1^{i-1},y_j,x_{i+1}^{n}),y_{j+1}^{n}),$$

gde je A n-kvazigrupa definisana na nepraznom skupu Q, i,j neki fiksirani brojevi iz skupa $N=\{1,2,\ldots,n\}$, σ i τ permutacije skupa N sa osobinom da je $\sigma i=\tau i=i$, $\sigma j=\tau j=j$, data su sa

$$A(x_1^n)=x_i\circ g\circ R(x_1^{i-1},x_{i+1}^{j-1},x_{j+1}^{n})\circ x_j\ ,$$

gde je $(Q,\circ)$ proizvoljna binarna grupa, g proizvoljan elemenat iz Q a (Q,R) proizvoljna (n-2)-kvazigrupa koja zadovoljava uslov

$$R(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)},x_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)},x_{\sigma(j+1)}^{\sigma n})=R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)},x_{\tau(i+1)}^{\tau(j-1)},x_{\tau(j+1)}^{\tau n})=$$

$$=R(x_1^{i-1},x_{i+1}^{j-1},x_{j+1}^{n})\ .$$

(Ovde pretpostavljamo da je $i<j$, ukoliko je $i>j$ dokaz je analogan).

Dokaz. Ako uvedemo glavne parastrofe n-kvazigrupe A

$$^{\sigma^{-1}}A(x_1^n) = A(x_{\sigma 1}^{\sigma n}), \qquad ^{\tau^{-1}}A(x_1^n) = A(x_{\tau 1}^{\tau n}),$$

jednačina (5.2) postaje

$$(5.2') \quad ^{\sigma^{-1}}A(x_1^{i-1}, {}^{\tau^{-1}}A(y_1^n), x_{i+1}^n) = A(y_1^{j-1}, A(x_1^{i-1}, y_j, x_{i+1}^n), y_{j+1}^n).$$

Jednačina (5.2') zadovoljava uslove teoreme 2.3. iz [64], pa na osnovu te teoreme imamo

$$(5.3) \quad \begin{cases} ^{\sigma^{-1}}A(x_1^n) = \alpha(\beta x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)), \\ ^{\tau^{-1}}A(x_1^n) = \beta^{-1}(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ \gamma x_j), \\ A(x_1^n) = \alpha(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j). \\ A(x_1^n) = \gamma x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n), \end{cases}$$

gde su α, β, γ permutacije skupa Q, K i P (n-1)-kvazigrupe a (Q,o) binarna grupa.

Definišemo glavne parastrofe $^{\bar{\sigma}}K$, $^{\bar{\tau}}P$ (n-1)-kvazigrupa K, P na sledeći način:

$$^{\bar{\sigma}}K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = K(x_{\sigma^{-1}1}^{\sigma^{-1}(i-1)}, x_{\sigma^{-1}(i+1)}^{\sigma^{-1}n}),$$

$$^{\bar{\tau}}P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) = P(x_{\tau^{-1}1}^{\tau^{-1}(j-1)}, x_{\tau^{-1}(j+1)}^{\tau^{-1}n}),$$

gde je $\bar{\sigma}$ definisano na skupu $N \setminus \{i\}$, a $\bar{\tau}$ na skupu $N \setminus \{j\}$.

Tada jednačine (5.3) možemo pisati u obliku

(5.4) $$A(x_1^n) = \alpha(\beta x_i \circ \bar{\sigma} K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)),$$

(5.5) $$A(x_1^n) = \beta^{-1}(\bar{\tau} P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ \gamma x_j),$$

(5.6) $$A(x_1^n) = \alpha(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j),$$

(5.7) $$A(x_1^n) = \gamma x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n).$$

Iz (5.4) i (5.6) sledi

$$\alpha(\beta x_i \circ \bar{\sigma} K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n)) = \alpha(P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j),$$

i ako stavimo $x_i = a$, tako da je $\beta a = e$, gde je e jedinica grupe $(Q, \circ)$, dobija se

(5.8) $$\bar{\sigma} K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n) = R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j,$$

gde je R $(n-2)$-kvazigrupa definisana sa

$$R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) = P(x_1^{i-1}, a, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n).$$

Dakle, (5.4) postaje

(5.4') $$A(x_1^n) = \alpha(\beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j).$$

Iz (5.4') i (5.6) dobijamo

(5.9) $$P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^n) = \beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n).$$

Iz (5.4') i (5.7) sledi

$$\alpha(\beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j) = \gamma x_i \circ K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^n),$$

i za $x_i = b$, tako da je $\gamma b = e$, imamo

$$(5.10) \qquad K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{n}) = \alpha(c \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ x_j),$$

gde je $\beta b = c$.

Na osnovu (5.8),(5.10) i na osnovu definicije parastrofa ${}^{\bar\sigma}K$, biće

$$(5.11) \qquad R(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}^{\sigma n}) \circ x_j = {}^{\bar\sigma}K(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}^{\sigma n}) =$$

$$= K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{n}) = \alpha(c \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ x_j).$$

Iz (5.4) i (5.5) sledi

$$\alpha(\beta x_i \circ {}^{\bar\sigma}K(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{n})) = \beta^{-1}({}^{\bar\tau}P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \gamma x_j),$$

tj.

$$\beta\alpha(\beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ x_j) = {}^{\bar\tau}P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \gamma x_j,$$

a odatle je

$$\beta\alpha(\beta x_i \circ R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)}, x_{\tau(i+1)}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) \circ x_j) =$$

$$= {}^{\bar\tau}P(x_{\tau 1}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) \circ \gamma x_j = P(x_1^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \gamma x_j =$$

$$= \beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \gamma x_j,$$

gde smo koristili (5.9) i definiciju parastrofa ${}^{\bar\tau}P$.

Dakle,

$$(5.12) \qquad \beta\alpha(x_i \circ R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)}, x_{\tau 1}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) \circ x_j) =$$

$$= x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ \gamma x_j .$$

Iz (5.4') i (5.7) s obzirom na (5.10) dobijamo

(5.13) $$\alpha(\beta x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j) =$$

$$= \gamma x_i \circ \alpha(c \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ x_j).$$

Iz (5.13) zamenjujući sve x_k, ($k \neq i,j$, $k \in N$), sa a_k, tako da je $R(a_1^{i-1}, a_{i+1}^{j-1}, a_{j-1}^n) = e$, sledi

$$\alpha(x_i \circ x_j) = \gamma\beta^{-1} x_i \circ \alpha L_c x_j ,$$

to jest, α je kvaziautomorfizam *) binarne grupe $(Q,\circ)$. Dakle, α se može prikazati u obliku $\alpha = R_d\theta$, gde je θ automorfizam grupe $(Q,\circ)$ a R_d translacija grupe $(Q,\circ)$.

Tako jednačina (5.13) postaje

$$\theta\beta x_i \circ \theta R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ \theta x_j \circ d =$$

$$= \gamma x_i \circ \theta c \circ \theta R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^n) \circ \theta x_j \circ d,$$

to jest,

(5.14) $$\beta x = \theta^{-1}\gamma x \circ c .$$

---

*) Permutacija α grupe $(Q,\circ)$ se naziva kvaziautomorfizam ako postoje permutacije β, γ skupa Q takve da je $\alpha(x \circ y) = \beta x \circ \gamma y$, za svako $x,y \in Q$ [11].Svaki kvaziautomorfizam α može se prikazati u obliku $\alpha = L_p\theta$ ili $\alpha = R_q\theta'$, gde su θ i θ' automorfizmi a $L_p x = p \circ x$, $R_q x = x \circ q$, $p,q \in Q$, translacije grupe $(Q,\circ)$.

Iz (5.11) imamo

$$(5.15)\qquad R(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}^{\sigma n}) \circ x_j =$$

$$= \theta c \circ \theta R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \theta x_j \circ d \ .$$

Stavljajući $x_1^{i-1} = b_1^{i-1}$, $x_{i+1}^{j-1} = b_{i+1}^{j-1}$, $x_j = e$, $x_{j+1}^n = b_{j+1}^n$, u (5.15) dobijamo

$$d = (\theta c \circ \theta R(b_1^{i-1}, b_{i+1}^{j-1}, b_{j+1}^{n}))^{-1} \circ R(b_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, b_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)}, b_{\sigma(j+1)}^{\sigma n}).$$

Ako u (5.15) fiksiramo $x_1^{i-1} = b_1^{i-1}$, $x_{i+1}^{j-1} = b_{i+1}^{j-1}$, $x_{j+1}^n = b_{j+1}^n$, dobijamo da je θ unutrašnji automorfizam

$$(5.16)\qquad \theta x = d \circ x \circ d^{-1},$$

i

$$(5.17)\qquad \alpha x = d \circ x \ .$$

Prema tome,

$$(5.18)\qquad R(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}^{\sigma n}) = d \circ c \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}).$$

Stavljajući u (5.18) $x_r = f$ za svako $r \neq i,j$, $r \in N$, biće $d \circ c = e$, tj.

$$(5.19)\qquad R(x_{\sigma 1}^{\sigma(i-1)}, x_{\sigma(i+1)}^{\sigma(j-1)}, x_{\sigma(j+1)}^{\sigma n}) = R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \ .$$

Iz (5.16) i (5.14) imamo

$$(5.20)\qquad \beta x = d^{-1} \circ \gamma x \circ d \circ c = d^{-1} \circ \gamma x.$$

Sada se (5.12) može pisati u obliku

$$d^{-1} \circ \gamma(d \circ x_i \circ R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)}, x_{\tau(i+1)}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) \circ x_j =$$

$$= x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ \gamma x_j \ ,$$

i ako ponovo fiksiramo $x_r = f$, za svako $r \neq i,j$, $r \in N$, i označimo $d \circ x_i \circ R(\overset{n-2}{f}) = y$, dobićemo

$$\gamma(y \circ x_j) = y \circ \gamma x_j,$$

a iz gornje jednačine za $x_j = e$ sledi

$$\gamma y = y \circ g, \tag{5.21}$$

gde je $g = \gamma e$.

Dakle (5.20) postaje

$$\beta x = d^{-1} \circ x \circ g \ . \tag{5.20'}$$

Jednakost (5.12) sada možemo pisati u obliku

$$x_i \circ R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)}, x_{\tau(i+1)}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) \circ x_j \circ g =$$

$$= x_i \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ x_j \circ g \ ,$$

tj.

$$R(x_{\tau 1}^{\tau(i-1)}, x_{\tau(i+1)}^{\tau(j-1)}, x_{\tau(j+1)}^{\tau n}) = R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}). \tag{5.22}$$

Prema tome, na osnovu (5.17),(5.20') i (5.4') sledi da se kvazigrupa A može prikazati kao

$$A(x_1^n) = x_i \circ g \circ R(x_1^{i-1}, x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{n}) \circ x_j. \tag{5.23}$$

Time je dokazan prvi deo teoreme.

Jednostavnom proverom zaključujemo da važi i obrnuti deo teoreme.

VI DEO

INFINITARNE KVAZIGRUPE

6.1. Uvod

U implicitnom obliku pojam infinitarne operacije sreće se u raznim oblastima matematike, postoji izvestan broj radova u kojima su razmatrane infinitarne operacije ali infinitarne kvazigrupe do sad nisu bile ispitivane.

U ovom delu najpre ćemo dokazati da postoje infinitarne kvazigrupe, neprebrojive, prebrojive i bilo kog konačnog reda. Takođe će biti pokazano da postoje infinitarne lupe. Zatim ćemo dokazati da ne postoje netrivijalne (i,j)-asocijativne infinitarne kvazigrupe (a to znači da ne postoje ni netrivijalne infinitarne grupe). Ispitaćemo jednačinu opšte asocijativnosti na infinitarnim kvazigrupama i dati opšte rešenje te jednačine. Dokazaćemo egzistenciju netrivijalnih infinitarnih kvazigrupa aditivnih nad Abelovom grupom i odrediti rešenje funkcionalne jednačine na infinitarnim kvazigrupama koja predstavlja jedno uopštenje funkcionalne jednačine opšte entropije. Uvešćemo infinitarne operacije različitih tipova i razmotriti neka pitanja u vezi s tim. Pokazaćemo da se i na infinitarni slučaj prenose neka svojstva n-kvazigrupa i pomenuti neka specifična pitanja te teorije. Na kraju će biti formulisani neki problemi iz teorije infinitarnih kvazigrupa.

Beskonačni niz $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n, \ldots$ (rednog tipa ω) označavaćemo sa x_m^∞, (m konačan prirodan broj). Beskonačni niz $x, x, \ldots, x, \ldots$ označavaćemo sa $\overset{\infty}{x}$.

Neka je Q neprazan skup. Skup svih beskonačnih nizova (rednog tipa ω) elemenata iz Q označavaćemo sa Q^ω.

Preslikavanje $A: Q^\omega \longrightarrow Q$ nazivamo infinitarna operacija na Q (tipa ω). Uređen par (Q,A) nazivamo infinitarni operativ. Ako infinitarna operacija A pridružuje nizu $x_1^\infty \in Q^\omega$ elemenat $y \in Q$ pisaćemo

$$A(x_1^\infty) = y .$$

Infinitarni operativ (Q,A) takav da je skup Q jednočlan nazivaćemo trivijalan.

6.2. Dokaz egzistencije netrivijalnih infinitarnih kvazigrupa i lupa

Najpre dajemo definicije infinitarne kvazigrupe i lupe.

Definicija 6.1. Infinitarni operativ (Q,A) naziva se infinitarna kvazigrupa (kraće, ∞-kvazigrupa) ako jednačina

$$A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^\infty) = b, \tag{6.1}$$

ima jedinstveno rešenje po x za svako $a_1^{i-1}, a_{i+1}^\infty, b \in Q$ i za svako $i=1,2,\ldots,n,\ldots$.

Definicija 6.2. Elemenat e infinitarnog operativa (Q,A) naziva se jedinica ako je

$$A(\overset{i-1}{e}, x, \overset{\infty}{e}) = x,$$

za svako $x \in Q$, i za svako $i=1,2,\ldots,n,\ldots$.

Ako infinitarna kvazigrupa (Q,A) sadrži bar jednu jedinicu onda se (Q,A) naziva infinitarna lupa (∞-lupa).

Dokazaćemo postojanje infinitarnih kvazigrupa i lupa.

Neka je R skup svih realnih brojeva i neka je R^{ω} skup svih beskonačnih nizova elemenata iz R.

Na skupu R^{ω} definišemo binarnu relaciju na sledeći način. Nizovi $\alpha = a_1^{\infty}$ i $\beta = b_1^{\infty}$ su ekvivalentni, $\alpha \sim \beta$, ako i samo ako je $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| < \infty$. Očevidno je da je $\alpha \sim \alpha$, i da iz $\alpha \sim \beta$ sledi $\beta \sim \alpha$. Pokazaćemo da iz $\alpha \sim \beta$, $\beta \sim \gamma$, gde je $\gamma = c_1^{\infty}$, sledi $\alpha \sim \gamma$. Zaista, imamo

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - c_i| = \sum_{i=1}^{\infty} |(a_i - b_i) + (b_i - c_i)| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| + \sum_{i=1}^{\infty} |b_i - c_i| < \infty$$

tj. $\alpha \sim \gamma$. Dakle, "$\sim$" je relacija e vivalencije.

Na skupu R definišemo infinitarnu operaciju koju označavamo sa A. U svakoj klasi ekvivalencije K, definisanoj relacijom "$\sim$", biramo po jednog predstavnika $\sigma = s_1^{\infty}$. Neka 0 odgovara tom predstavniku, to jest, $A(\sigma) = 0$. Ako je $\alpha = a_1^{\infty} \in K$, tj. $\alpha \sim \sigma$, onda je

$$\sum_{i=1} |a_i - s_i| < \infty \quad . \tag{6.2}$$

Elemenat $A(\alpha)$ definišemo na sledeći način:

$$(6.3) \qquad A(\alpha) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i - s_i).$$

Iz (6.2) sledi da je red na desnoj strani jednakosti (6.3) apsolutno konvergentan.

Pokazaćemo da jednačina

$$(6.4) \qquad A(a_1^{k-1}, x, a_{k+1}^{\infty}) = b,$$

ima jedinstveno rešenje za svako $a_1^{k-1}, a_{k+1}^{\infty}, b$ i za svako $k=1,2,\dots$.

Neka niz $\alpha' = a_1^{k-1}, 0, a_{k+1}^{\infty}$ pripada klasi K či-ji je predstavnik $\sigma = s_1^{\infty}$. Tada po definiciji A

$$A(\alpha') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} (a_i - s_i) - s_k = b' .$$

Niz $\alpha'' = a_1^{k-1}, t, a_{k+1}^{\infty}$, gde je t proizvoljan realan broj, očevidno pripada klasi K. Onda je

$$(6.5) \qquad A(\alpha'') = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^{\infty} (a_i - s_i) + (t - s_k) = t + b'.$$

Poređujući (6.4) i (6.5) vidimo da je rešenje jednačine (6.4) broj $b - b'$ i da je to rešenje jedinstveno.

Analogan metod možemo primeniti ako umesto skupa realnih brojeva R uzmemo skup Z svih celih brojeva. U tom slučaju $\alpha \sim \beta$ znači da se nizovi $\alpha = a_1^{\infty}$ i $\beta = b_1^{\infty}$ razlikuju samo na konačnom broju mesta. Zaista, uslov

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_i - b_i| < \infty$$ je ispunjen ako i samo ako je $a_i \neq b_i$ za

konačan broj indeksa.

Na isti način možemo konstruisati infinitarne kvazigrupe na skupu Q sa n elemenata, gde je n proizvoljan prirodan broj. Za Q uzimamo skup ostataka celih brojeva po modulu n. U tom slučaju $\alpha \sim \beta$ ako i samo ako se nizovi $\alpha = a_1^\infty$ i $\beta = b_1^\infty$ razlikuju na konačnom broju mesta, pa je suma $\sum_{i=1}^{\infty} (a_i - s_i)$ za dva niza $\alpha = a_1^\infty$ i $= s_1^\infty$ iz iste klase ekvivalencije, uvek dobro definisana.

Sada ćemo dokazati egzistenciju infinitarnih lupa.

Na skupu R^ω svih nizova realnih brojeva definišemo relaciju ekvivalencije kao u prethodnom primeru. Neka je K_a klasa ekvivalencije određena elementom $a \in R$, $\overset{\infty}{a} \in K_a$. Tada niz $\alpha = 0, \overset{\infty}{a}$ takođe pripada K_a. Uzimajući da je α predstavnik klase K_a, definišemo infinitarnu kvazigrupu A na R kao u prethodnom primeru (tada je $A(\alpha) = 0$).

Elemenat a je jedinica infinitarne kvazigrupe (R,A). Zaista

$$A(x, \overset{\infty}{a}) = x,$$

$$A(\overset{k}{a}, x, \overset{\infty}{a}) = (a-0)+0+\ldots+0+(x-a)+0+\ldots = x.$$

Ako $a,b \in R$, $a \neq b$, onda je očigledno da nizovi $\overset{\infty}{a}$ i $\overset{\infty}{b}$ nisu ekvivalentni. Dakle, birajući na takav način predstavnike svih klasa K_i možemo dobiti da je svaki elemenat skupa R jedinica.

Sa drugačijim izborom predstavnika iz klasa K_i može se dobiti da je skup svih jedinica proizvoljan podskup $M \subseteq R$.

6.3. (i,j)-asocijativne ∞-kvazigrupe

Definicija 6.3. Infinitarni operativ (Q,A) se naziva (i,j)-asocijativan ako zadovoljava zakon

$$A(x_1^{i-1}, A(x_i^{\infty}), y_1^{\infty}) = A(x_1^{j-1}, A(x_j^{\infty}), y_1^{\infty}), \tag{6.6}$$

za svako $x_1^{\infty}, y_1^{\infty} \in Q$.

(Ovde pretpostavljamo da je $i \neq j$).

Definicija 6.4. Infinitarni operativ (Q,A) se naziva infinitarna polugrupa ako zadovoljava zakon (6.6) za svako i i j.

Definicija 6.5. Infinitarna kvazigrupa koja je infinitarna polugrupa naziva se infinitarna grupa.

Primeri infinitarnih polugrupa dati su u [60]. Tamo je takođe dokazano da netrivijalne infinitarne grupe ne postoje.

Sada ćemo ispitati (i,j)-asocijativne infinitarne kvazigrupe.

Lema 6.1. Ako je infinitarna kvazigrupa (Q,A) (i,j)-asocijativna onda je ona (j,2j-i)-asocijativna. (Ovde pretpostavljamo da je $i<j$).

Dokaz. Neka je a proizvoljan elemenat iz Q. Tada, kako je (Q,A) (i,j)-asocijativna, biće

$$A(\overset{i-1}{a}, A(x_1^{j-1}, A(x_j^{\infty}), y_1^{\infty}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{i-1}{a}, x_1^{j-i}, A(x_{j-i+1}^{j-1}, A(x_j^{\infty}), y_1^{\infty}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{i-1}{a}, x_1^{j-i}, A(x_{j-i+1}^{2j-i-1}, A(x_{2j-i}^{\infty}), y_1^{\infty}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{i-1}{a}, A(x_1^{2j-i-1}, A(x_{2j-i}^{\infty}), y_1^{\infty}), \overset{\infty}{a}) .$$

S obzirom da je A infinitarna kvazigrupa onda mora biti

$$A(x_1^{j-1}, A(x_j^{\infty}), y_1^{\infty}) = A(x_1^{2j-i-1}, A(x_{2j-i}^{\infty}), y_1^{\infty}),$$

tj. A je $(j,2j-i)$-asocijativna.

<u>Teorema 6.1.</u> Ne postoji netrivijalna (i,j)-asocijativna infinitarna kvazigrupa.

<u>Dokaz.</u> Neka je (Q,A) (i,j)-asocijativna infinitarna kvazigrupa. Na osnovu leme 6.1. (Q,A) je $(j,2j-i)$-asocijativna.

Neka su a,b proizvoljni elementi skupa Q. Ako je $A(\overset{\infty}{a}) = c$ onda postoji elemenat $d \in Q$ tako da je $b = A(c, \overset{k-1}{a}, d, \overset{\infty}{a})$, gde je $k = j-i$.

Tada je

$$A(\overset{i-1}{a}, b, \overset{\infty}{a}) = A(\overset{i-1}{a}, A(c, \overset{k-1}{a}, d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{i-1}{a}, c, \overset{k-1}{a}, A(d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{i-1}{a}, A(\overset{\infty}{a}), \overset{k-1}{a}, A(d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{j-1}{a}, A(\overset{\infty}{a}), \overset{k-1}{a}, A(d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{j-1}{a}, c, \overset{k-1}{a}, A(d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{j-1}{a}, A(c, \overset{k-1}{a}, d, \overset{\infty}{a}), \overset{\infty}{a}) =$$

$$= A(\overset{j-1}{a}, b, \overset{\infty}{a}),$$

gde smo koristili (i,j) i $(j,2j-i)$-asocijativnost infinitarne kvazigrupe A.

Prema tome, za svako $a,b\in Q$

$$A(\overset{i-1}{a},b,\overset{\infty}{a}) = A(\overset{j-1}{a},b,\overset{\infty}{a}).$$

Neka su x_1^{∞},y proizvoljni elementi iz Q. Onda postoji z tako da je $x_i = A(\overset{i-1}{y},z,\overset{\infty}{y})$, pa imamo

$$A(x_1^{\infty}) = A(x_1^{i-1},A(\overset{i-1}{y},z,\overset{\infty}{y}),x_{i+1}^{\infty}) =$$

$$= A(x_1^{i-1},A(\overset{j-1}{y},z,\overset{\infty}{y}),x_{i+1}^{\infty}) =$$

$$= A(x_1^{i-1},\overset{k}{y},A(\overset{i-1}{y},z,\overset{\infty}{y}),x_{i+1}^{\infty}) =$$

$$= A(x_1^{i-1},\overset{k}{y},x_i^{\infty}).$$

Time smo dokazali da je za proizvoljne elemente x_1^{∞}, y

$$A(x_1^{\infty}) = A(x_1^{i-1},\overset{k}{y},x_i^{\infty}). \tag{6.7}$$

Ako u (6.7) stavimo $u = x_i = x_{i+k} = \dots = x_{i+nk} = \dots$ i $x_m = y$, za svako $m \neq i+nk$, $m>i$, dobijamo

$$A(x_1^{i-1},u,\overset{k-1}{y},u,\overset{k-1}{y},u,\dots) = A(x_1^{i-1},y,\overset{k-1}{y},u,\overset{k-1}{y},u,\dots)$$

tj. $u = y$.

To znači da se Q sastoji od samo jednog elementa i teorema je dokazana.

<u>Primedba.</u> U [60] je dokazano da ne postoji netrivijalna infinitarna grupa. U napomeni na kraju pomenutog rada

navedeno je da se lako može videti da sve leme koje su tamo dokazane važe pod pretpostavkom da je infinitarna operacija samo (1,2)-asocijativna. Napominjemo da je u dokazu leme 1. u [60] korišćena (2,3)-asocijativnost a ne samo (1,2)-asocijativnost.

6.4. Opšta asocijativnost na infinitarnim kvazigrupama

U definiciji infinitarne kvazigrupe datoj u prethodnom odeljku upotrebili smo prebrojive skupove promenljivih rednog tipa ω : preslikavnje A koje definiše infinitarnu operaciju preslikava prebrojiv skup rednog tipa ω $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ u neki elemenat y iz istog skupa Q. Ovaj skup promenljivih ima redni tip ω i rećićemo da operacija A ima takođe tip ω.

Sada ćemo uvesti infinitarne kvazigrupe tipa $\omega + k$.

Preslikavnje $A: a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots, b_1, b_2, \ldots, b_k \to c$ definisano na skupu $Q^{\omega+\kappa}$ (gde sa $Q^{\omega+\kappa}$ označavamo skup svih beskonačnih nizova rednog tipa $\omega+k$ elemenata iz Q) se naziva infinitarna operacija tipa $\omega+k$. U tom slučaju pišemo $A(a_1^{\infty}, b_1^k) = c$. Tip operacije A označavaćemo sa $|A|$.

<u>Definicija 6.6.</u> Infinitarni operativ (Q,A) tipa $\omega+k$ se naziva infinitarna kvazigrupa tipa $\omega+k$ ako jednačine

$$A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^{\infty}, b_1^k) = c, \qquad A(a_1^{\infty}, b_1^{i-1}, y, b_{i+1}^k) = c,$$

imaju jedinstveno rešenje po x odnosno y, za svako $a_p, b_q, c \in Q$ i za sve prirodne brojeve i u prvoj jednačini i za sve $i=1,2,\ldots,k$ u drugoj jednačini.

Razmotrićemo funkcionalnu jednačinu opšte asocijativnosti na infinitarnim kvazigrupama:

$$(6.8) \qquad A(x_1^{i-1}, B(x_i^{\infty}, y_1^r), y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{j-1}, D(x_j^{\infty}, y_1^s), y_{s+1}^{\infty}),$$

gde su A,B,C,D infinitarne kvazigrupe tipova

$$|A| = \omega, \qquad |B| = \omega + r, \qquad |C| = \omega, \qquad |D| = \omega + s,$$

definisane na istom nepraznom skupu Q, i,j neki fiksirani prirodni brojevi a r, s nenegativni celi brojevi.

Daćemo opšte rešenje jednačine (6.8). Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $i \leqslant j$.

<u>Slučaj I.</u> $i = j$.

<u>Podslučaj I_1.</u> $r = s \geqslant 0$.

Ako u (6.8) zamenimo promenljive $x_1^{i-1}, y_{r+1}^{\infty}$ nekim fiksiranim elementima $a_1^{i-1}, b_{r+1}^{\infty}$ iz skupa Q dobijamo

$$\alpha B(x_{i+1}^{\infty}, x_1^r) = \beta D(x_{i+1}^{\infty}, y_1^r),$$

gde su α, β permutacije skupa Q definisane sa

$$\alpha x = A(a_1^{i-1}, x, b_{r+1}^{\infty}), \qquad \beta x = C(a_1^{i-1}, x, b_{r+1}^{\infty}), \quad \text{tj.}$$

$$D = \theta B, \qquad (\theta = \gamma^{-1}\alpha).$$

Stavljajući u (6.8) θB umesto D dobijamo

$$A(x_1^{i-1}, B(x_i^{\infty}, y_1^r), y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1}, \theta B(x_i^{\infty}, y_1^r), y_{r+1}^{\infty}),$$

ili

$$A(x_1^{i-1},z,y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1}, \theta z, y_{r+1}^{\infty}).$$

Dakle, u ovom slučaju sva rešenja jednačine (6.8) data su sa

$$(6.9) \qquad D = \theta B, \quad A(x_1^{i-1},z,y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1}, \theta z, y_{r+1}^{\infty}),$$

gde je θ proizvoljna permutacija skupa Q, B i C proizvoljne infinitarne kvazigrupe tipova $|B| = \omega + r$, $|C| = \omega$ a D i A su određene jednačinama (6.9).

Podslučaj I_2. $s > r \geqslant 0$. (Ako $r > s \geqslant 0$, rešenje je analogno).

Ako u (6.8) fiksiramo promenljive $x_1^{i-1}, y_{s+1}^{\infty}$ elementima $a_1^{i-1}, b_{s+1}^{\infty}$ dobijamo

$$A_1(B(x_i^{\infty},y_1^r),y_{r+1}^s) = \gamma D(x_i^{\infty},y_1^s),$$

gde je γ permutacija skupa Q definisana sa

$\gamma x = C(a_1^{i-1},x,b_{s+1}^{\infty})$, i $A_1(z,y_{r+1}^s) = A(a_1^{i-1},z,y_{r+1}^s,b_{s+1}^{\infty})$,

to jest,

$$(6.10) \qquad D(x_i^{\infty},y_1^s) = K(B(x_i^{\infty},y_1^r),y_{r+1}^s),$$

gde je $K = \gamma^{-1}A_1$.

Stavljajući D natrag u (6.8) dobijamo

$$A(x_1^{i-1},B(x_i^{\infty},y_1^r),y_{r+1}^{\infty})=C(x_1^{i-1},K(B(x_i^{\infty},y_1^r),y_{r+1}^s),y_{s+1}^{\infty}),$$

ili

$$(6.11) \qquad A(x_1^{i-1},z,y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1},K(z,y_{r+1}^s),y_{s+1}^{\infty}).$$

U ovom slučaju sva rešenja jednačine (6.8) data su jednačinama (6.10) i (6.11), gde su B i C proizvoljne infinitarne kvazigrupe tipova $|B| = \omega + r$, $|C| = \omega$, K proizvoljna kvazigrupa arnosti $s-r+1$ a A i D su određene jednačinama (6.11) i (6.10).

Slučaj II. $i < j$.

Podslučaj II$_1$. $r \geq s \geq 0$.

Zamenjujući u (6.8) $x_1^{i-1}, y_{r+1}^{\infty}$ sa $a_1^{i-1}, b_{r+1}^{\infty}$,

dobijamo

$$B(x_i^{\infty}, y_1^r) = C_1(x_i^{j-1}, D(x_j^{\infty}, y_1^s), y_{s+1}^r),$$

gde je α permutacija skupa Q definisana sa $\alpha x = A(a_1^{i-1}, x, b_{r+1}^{\infty})$ a $C_1(x_i^{j-1}, z, y_{s+1}^r) = C(a_1^{i-1}, x_i^{j-1}, z, y_{s+1}^r, b_{r+1}^{\infty})$,

tj.

$$B(x_i^{\infty}, y_1^r) = K(x_i^{j-1}, D(x_j^{\infty}, y_1^s), y_{s+1}^r), \tag{6.12}$$

gde je $K = \alpha^{-1} C_1$.

Stavljajući B natrag u (6.8) imamo

$$A(x_1^{i-1}, K(x_i^{j-1}, D(x_j^{\infty}, y_1^s), y_{s+1}^r), y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{j-1}, D(x_j^{\infty}, y_1^s), y_{s+1}^{\infty}),$$

ili

$$C(x_1^{j-1}, z, y_{s+1}^{\infty}) = A(x_1^{i-1}, K(x_i^{j-1}, z, y_{s+1}^r), y_{r+1}^{\infty}). \tag{6.13}$$

Sva rešenja jednačine (6.8) data su sa (6.12) i (6.13) gde su A i D proizvoljne infinitarne kvazigrupe tipova $|A| = \omega$, $|D| = \omega + s$, K proizvoljna kvazigrupa arnosti $j-i+r-s+1$ a B i C su određene jednačinama (6.12) i (6.13).

Podslučaj II$_2$. $s > r \geq 0$.

U ovom slučaju opšte rešenje dobijamo analognim metodom kao u [63].

Ako u (6.8) zamenimo promenljive $x_1^{i-1}, y_{s+1}^{\infty}$ elementima $a_1^{i-1}, b_{s+1}^{\infty}$ iz Q, dobijamo

$$(6.14) \qquad A_1(B(x_i^{j-1}, x_j^{\infty}, y_1^r), y_{r+1}^s) = C_1(x_1^{j-1}, D(x_j, y_1^r, y_{r+1}^s)),$$

gde je $A_1(z, y_{r+1}^s) = A(a_1^{i-1}, z, y_{r+1}^s, b_{s+1}^{\infty})$, $C_1(x_1^{j-1}, z) = C(a_1^{i-1}, x_i^{j-1}, z, b_{s+1}^{\infty})$.

Ako stavimo

$$A_1(z, y_{r+1}^s) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{A}_1(z, (y_{r+1}^s)),$$

$$B(x_i^{j-1}, x_j^{\infty}, y_1^r) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{B}((x_i^{j-1}), (x_j^{\infty}, y_1^r)),$$

$$C_1(x_i^{j-1}, z) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{C}_1((x_i^{j-1}), z),$$

$$D(x_j^{\infty}, x_1^r, y_{r+1}^s) \overset{\text{def}}{=\!=} \bar{D}((x_j^{\infty}, y_1^r), (y_{r+1}^s)),$$

i uvedemo oznake $(x_i^{j-1}) = X$, $(x_j^{\infty}, y_1^r) = Y$, $(y_{r+1}^s) = Z$, jednačina (6.14) postaje

$$\bar{A}_1(\bar{B}(X,Y),Z) = \bar{C}_1(X, \bar{D}(Y,Z)),$$

gde su $\bar{A}_1, \bar{B}, \bar{C}_1, \bar{D}$ GD-grupoidi definisani na

$$\bar{A}_1 : Q \times Q^{s-r} \longrightarrow Q, \qquad \bar{C}_1 : Q^{j-i} \times Q \longrightarrow Q,$$

$$\bar{B} : Q^{j-i} \times Q^{\omega+r} \longrightarrow Q, \qquad \bar{D} : Q^{\omega+r} \times Q^{s-r} \longrightarrow Q.$$

Ovi GD-grupoidi zadovoljavaju uslove teoreme 2. iz [63], pa je na osnovu te teoreme

$$\bar{B}(X,Y) = \alpha^{-1}(\gamma X \circ \delta Y), \qquad \bar{D}(Y,Z) = \varphi^{-1}(\delta Y \circ \beta Z),$$

to jest,

$$B(x_i^\infty, y_1^r) = \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_j^\infty, y_1^r)), \tag{6.15}$$

$$D(x_j^\infty, y_1^s) = \varphi^{-1}(\delta(x_j^\infty, y_1^r) \circ \beta(y_{r+1}^s)), \tag{6.16}$$

gde su α, φ permutacije skupa Q, $(Q,\circ)$ binarna grupa, γ i β kvazigrupe arnosti $|\gamma| = j-i$, $|\beta| = s-r$, a δ infinitarna kvazigrupa tipa $\omega + r$.

Koristeći (6.15) i (6.16) zamenjujemo B i D natrag u (6.8) i dobijamo

$$\begin{aligned} A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_j^\infty, y_1^r)), y_{r+1}^\infty) = \\ = C(x_1^{j-1}, \varphi^{-1}(\delta(x_j^\infty, y_1^r) \circ \beta(y_{r+1}^s)), y_{s+1}^\infty), \end{aligned} \tag{6.17}$$

pa ako u (6.17) zamenimo promenljive x_i^{j-1} elementima c_i^{j-1} tako da je $\gamma(c_i^{j-1}) = e$, gde je e jedinica grupe $(Q,\circ)$, imaćemo

$$A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}\delta(x_j^\infty, y_1^r), y_{r+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, \delta(x_j^\infty, y_1^r) \circ \beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty),$$

gde je

$$K(x_1^{i-1}, y, y_{s+1}^\infty) = C(x_1^{i-1}, c_i^{j-1}, \varphi^{-1}y, y_{s+1}^\infty).$$

Prema tome,

$$A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}x, y_{r+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, x \circ \beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty). \tag{6.18}$$

Ako u (6.17) zamenimo x_j^∞, y_1^r elementima c_j^∞, d_1^r tako da je $\delta(c_j^\infty, d_1^r) = e$, imaćemo

$$(6.19)\quad C(x_1^{j-1}, \varphi^{-1}\beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty) = A(x_1^{i-1}, \alpha^{-1}\gamma(x_i^{j-1}), y_{r+1}^\infty),$$

i na osnovu (6.18) i (6.19) sledi

$$C(x_1^{j-1}, \varphi^{-1}\beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, \gamma(x_i^{j-1}) \circ \beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty),$$

tj.

$$C(x_1^{j-1}, y, y_{s+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, \gamma(x_i^{j-1}) \circ \varphi y, y_{s+1}^\infty).$$

Dakle, u ovom slučaju sva rešenja jednačine (6.8) data su sa

$$(6.20)\quad \begin{cases} A(x_1^{i-1}, x, y_{r+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, \alpha x \circ \beta(y_{r+1}^s), y_{s+1}^\infty), \\ B(x_i^\infty, y_1^r) = \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1}) \circ \delta(x_j^\infty, y_1^r)), \\ C(x_1^{j-1}, y, y_{s+1}^\infty) = K(x_1^{i-1}, \gamma(x_i^{j-1}) \circ \varphi y, y_{s+1}^\infty), \\ D(x_j^\infty, y_1^s) = \varphi^{-1}(\delta(x_j^\infty, y_1^r) \circ \beta(y_{r+1}^s)), \end{cases}$$

gde su α, φ permutacije skupa Q, $(Q,\circ)$ binarna grupa, β i γ kvazigrupe arnosti $|\beta| = s-r$, $|\gamma| = j-i$, a δ, K infinitarne kvazigrupe tipova $|\delta| = \omega+r$, $|K| = \omega$.

Sve prethodne rezultate objedinićemo u sledećoj teoremi

<u>Teorema 6.2.</u> Sva rešenja jednačine

$$(6.8)\quad A(x_1^{i-1}, B(x_i^\infty, y_1^r), y_{r+1}^\infty) = C(x_1^{j-1}, D(x_j^\infty, y_1^s), y_{s+1}^\infty),$$

data su sledećim relacijama:

I_1 $(i=j,\ r=s\geqslant 0)$:

$$D = \theta B, \quad A(x_1^{i-1},z,y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1},\theta z,y_{r+1}^{\infty}),$$

I_2 $(i=j,\ s>r\geqslant 0)$:

$$D(x_i^{\infty},y_1^{s}) = K(B(x_i^{\infty},y_1^{r}),y_{r+1}^{s}),$$

$$A(x_1^{i-1},z,y_{r+1}^{\infty}) = C(x_1^{i-1},K(z,y_{r+1}^{s}),y_{s+1}^{\infty}),$$

$K| = s-r+1$,

II_1 $(i<j,\ r\geqslant s\geqslant 0)$:

$$B(x_{i+1}^{\infty},y_1^{r}) = K(x_i^{j-1},D(x_j^{\infty},y_1^{s}),y_{s+1}^{r}),$$

$$C(x_1^{j-1},z,y_{s+1}^{\infty}) = A(x_1^{i-1},K(x_i^{j-1},z,y_{s+1}^{r}),y_{r+1}^{\infty}),$$

$K| = j-i+r-s+1$,

II_2 $(i<j,\ s>r\geqslant 0)$:

$$A(x_1^{i-1},x,y_{r+1}^{\infty}) = K(x_1^{i-1},\alpha x\circ\beta(y_{r+1}^{s}),y_{s+1}^{\infty}),$$

$$B(x_i^{\infty},y_1^{r}) = \alpha^{-1}(\gamma(x_i^{j-1})\circ\delta(x_j^{\infty},y_1^{r})),$$

$$C(x_1^{j-1},y,y_{s+1}^{\infty}) = K(x_1^{i-1},\gamma(x_i^{j-1})\circ\varphi y,y_{s+1}^{\infty}),$$

$$D(x_j^{\infty},y_1^{s}) = \varphi^{-1}(\delta(x_j^{\infty},y_1^{r})\circ\beta(y_{r+1}^{s})),$$

$K|=\omega$, $\quad |\delta|=\omega+r$, $\quad |\beta|= s-r$, $\quad |\gamma|= j-i$.

Sve operacije na desnim stranama ovih jednakosti
u proizvoljne, $(\circ)$ je proizvoljna binarna grupa.

6.5. Infinitarne kvazigrupe aditivne nad Abelovom grupom i jedno uopštenje funkcionalne jednačine opšte entropije na infinitarne kvazigrupe

U ovom odeljku najpre ćemo definisati pojam aditivne infinitarne kvazigrupe nad nekom Abelovom grupom, potom ćemo pokazati da takve netrivijalne infinitarne kvazigrupe postoje i navesti neke njihove osobine.

Zatim ćemo ispitati funkcionalnu jednačinu

$$A(B_1(x_1^{\infty}),B_2(y_1^{\infty}))=C(D_1(x_1,y_1),D_2(x_2,y_2),\dots), \tag{6.21}$$

gde su A, D_i, $i=1,2,\dots$, binarne kvazigrupe a B_1,B_2,C infinitarne kvazigrupe tipa ω sve definisane na istom nepraznom skupu Q. Pokazaćemo da su sve A, D_i, $i=1,2,\dots$. izotopne jednoj Abelovoj grupi $(Q,+)$ a infinitarne kvazigrupe B_1,B_2,C izotopne infinitarnoj kvazigrupi aditivnoj nad $(Q,+)$. Na osnovu toga odredićemo opšte rešenje funkcionalne jednačine (6.21).

Definicija 6.7. Ako je Q neprazan skup, $(Q,+)$ Abelova grupa a (Q,R) infinitarna kvazigrupa takva da je

$$R(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}) = R(x_1^{\infty}) + R(y_1^{\infty}),$$

za svako $x_1^{\infty},y_1^{\infty}\in Q$, onda infinitarnu kvazigrupu (Q,R) nazivamo aditivna nad Abelovom grupom $(Q,+)$.

Dokazaćemo najpre da postoje netrivijalne aditivne infinitarne kvazigrupe.

Neka je $Q=\{0,1,\dots,m-1\}$ skup ostataka celih brojeva po modulu m, a $(Q,+)$ aditivna grupa ostataka po modulu m. Skup svih beskonačnih nizova (tipa ω) elemenata iz Q označavamo sa Q^{ω}. U odnosu na sabiranje nizova definisano sa

$$(x_1^{\infty}) + (y_1^{\infty}) = (\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

skup Q^{ω} je očevidno Abelova grupa.

U skup Q^{ω} uvodimo relaciju ekvivalencije "$\sim$" na sledeći način: dva niza iz Q^{ω} su ekvivalentna ako i samo ako se razlikuju samo u konačnom broju članova. Da je ovako definisana relacija zaista relacija ekvivalencije jednostavno se proverava.

Uočimo sada u skupu Q^{ω} podskup H koji se sastoji od svih nizova u kojima je samo konačan broj članova različit od 0. Lako se utvrđuje da je H podgrupa grupe Q^{ω}. Elementi faktor grupe Q^{ω}/H su ustvari klase ekvivalencije količnik skupa $Q^{\omega}/\sim$. Zaista, ma koja dva niza iz istog suskupa $(a_1^{\infty})+H$ razlikuju se samo u konačnom broju članova tj. pripadaju istoj klasi ekvivalencije. Ako su (b_1^{∞}) i (c_1^{∞}) dva niza iz iste klase ekvivalencije onda niz $(\{b_i-c_i\}_{i=1}^{\infty})$ pripada skupu H jer ima samo konačan broj članova različitih od 0, tj. (b_1^{∞}) i (c_1^{∞}) pripadaju istom suskupu faktor grupe Q^{ω}/H.

Dokažimo da je H servantna (deljiva)*) podgrupa grupe Q^{ω}.

---

*) Podgrupa C Abelove grupe G se naziva servantna (ili deljiva) ako za bilo koji elemenat $c \in C$ i proizvoljan prirodan broj n iz rešivosti u grupi G jednačine

$$n\,x = c,$$

sledi rešivost te jednačine u podgrupi C. ([59], str.148).

Zaista, neka je $(c_1^\infty) \in H$, n prirodan broj i neka postoji niz $(x_1^\infty) \in Q^\omega$ tako da važi

$$n\,(x_1^\infty) = (c_1^\infty).$$

U nizu (c_1^∞) samo konačan broj članova je različit od nule. Označimo sa M skup indeksa svih tih članova koji su različiti od 0. Tada je $c_i \neq 0$, $i \in M$; $c_k = 0$, $k \in N \setminus M$, (gde je sa N označen skup svih prirodnih brojeva). Niz $(y_1^\infty) \in H$ definisan sa $y_i = x_i$, $i \in M$; $y_k = 0$, $k \in N \setminus M$, zadovoljava jednačinu

$$n\,(y_1^\infty) = (c_1^\infty),$$

a to znači da je podgrupa H servantna.

Grupa $(Q^\omega,+)$ je periodična, redovi svih njenih elemenata nisu veći od m, to isto važi i za njenu servantnu podgrupu H pa je prema tome*) podgrupa H direktan sabirak grupe Q^ω.

To znači da postoji podgrupa K grupe Q^ω takva da je $H \times K = Q^\omega$ i tada je $H \cap K = \{(\overset{\infty}{0})\}$ a svaki niz iz Q^ω može se na jedinstven način prikazati kao zbir jednog niza iz H i jednog iz K. Otuda sledi da se u svakom suskupu faktor grupe Q^ω/H (a to znači i svakoj klasi ekvivalencije skupa $Q^\omega/\sim$) nalazi tačno jedan niz iz podgrupe K.

Sada ćemo na skupu Q definisati infinitarnu ope-

---

*) Na osnovu teoreme:

Ako je servantna podgrupa C Abelove grupe G periodična, pri čemu je skup redova njenih elemenata ograničen, onda je C direktan sabirak grupe G. ([59], str. 151).

raciju A (tj. preslikavanje $A\colon Q^{\omega}\to Q$). Neka se svi elementi iz K preslikavaju u 0 tj. $A(x_1^{\infty})=0$, za svaki niz $(x_1^{\infty})\in K$. Ako je (a_1^{∞}) bilo koji niz iz Q i ako je (k_1^{∞}) niz iz K koji se nalazi u istoj klasi ekvivalencije kao (a_1^{∞}), onda $A(a_1^{\infty})$ definišemo sa

$$A(a_1^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i-k_i).$$

S obzirom da je za samo konačan broj indeksa i razlika a_i-k_i različita od 0, $A(a_1^{\infty})$ je dobro definisano.

Na osnovu ranijeg sledi da je (Q,A) infinitarna kvazigrupa.

Dokažimo da je (Q,A) infinitarna kvazigrupa aditivna nad $(Q,+)$. Neka su (x_1^{∞}) i (y_1^{∞}) dva proizvoljna elementa skupa Q^{ω}. Ako je $(s_1^{\infty})\in K$ elemenat koji je ekvivalentan sa (x_1^{∞}) a $(t_1^{\infty})\in K$ elemenat ekvivalentan sa (y_1^{∞}) onda je, s obzirom da se suskupovi faktor grupe Q^{ω}/H poklapaju sa klasama akvivalencije, $(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty})$ ekvivalentno sa $(\{s_i+t_i\}_{i=1}^{\infty})$ K. Tada je

$$A(x_1^{\infty}) + A(y_1^{\infty}) = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i-s_i) + \sum_{i=1}^{\infty} (y_i-t_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} ((x_i+y_i)-(s_i+t_i)) = A(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

tj. A je aditivna infinitarna kvazigrupa nad $(Q,+)$.

Time smo dokazali da postoje netrivijalne aditivne infinitarne kvazigrupe nad Abelovom grupom. Navešćemo sada neke osobine aditivnih kvazigrupa.

Neka je (Q,R) aditivna infinitarna kvazigrupa nad Abelovom grupom $(Q,+)$, tj.

$$R(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}) = R(x_1^{\infty}) + R(y_1^{\infty}), \tag{6.22}$$

za svako $(x_1^{\infty}),(y_1^{\infty}) \in Q^{\omega}$.

Stavimo u (6.22) $x_2=x_3= \dots =y_2=y_3= \dots = 0$. Biće

$$R(x_1+y_1, \overset{\infty}{0}) = R(x_1, \overset{\infty}{0}) + R(y_1, \overset{\infty}{0}),$$

tj. preslikavanje α_1 definisano sa $\alpha_1 x = R(x, \overset{\infty}{0})$ je automorfizam grupe $(Q,+)$. Ako u (6.22) stavimo $x_2=x_3=\dots=0$, $y_1=0$, dobija se

$$R(x_1,y_2^{\infty}) = R(x_1,\overset{\infty}{0}) + R(0,y_2^{\infty}),$$

$$R(z_1^{\infty}) = \alpha_1 z_1 + R(0,z_2^{\infty}). \tag{6.23}$$

Neka je $R(0,z_2^{\infty}) = R_1(z_2^{\infty})$. Očevidno, R_1 je takođe aditivna infinitarna kvazigrupa nad $(Q,+)$.

Analogno se dobija

$$R_1(z_2^{\infty}) = \alpha_2 z_2 + R_1(0,z_3^{\infty})$$

ili

$$R_1(z_2^{\infty}) = \alpha_2 z_2 + R_2(z_3^{\infty}), \tag{6.24}$$

gde je α_2 automorfizam grupe $(Q,+)$ a R_2 je aditivna infinitarna kvazigrupa nad $(Q,+)$.

Iz (6.23) i (6.24) se dobija

$$R(z_1^{\infty}) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + R_2(z_3^{\infty}).$$

Produžujući ovaj postupak posle n koraka dobija se

$$R(z_1^{\infty}) = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n + R_n(z_{n+1}^{\infty}), \tag{6.25}$$

pa se može formuli ati

Teorema 6.3. Svaka aditivna infinitarna kvazigrupa (Q,R) nad Abelovom grupom $(Q,+)$ može se predstaviti u obliku (6.25), gde je n proizvoljan prirodan broj, α_i, $i=1,2,\dots,n$, automorfizmi grupe $(Q,+)$ a (Q,R_n) aditivna infinitarna kvazigrupa nad $(Q,+)$.

Razmotrićemo sada funkcionalnu jednačinu

$$A(B_1(x_1^{\infty}),B_2(y_1^{\infty}))=C(D_1(x_1,y_1),D_2(x_2,y_2),\dots), \tag{6.21}$$

gde su A,D_i, $i=1,2,\dots$, binarne kvazigrupe a B_1,B_2,C infinitarne kvazigrupe tipa ω, sve definisane na istom nepraznom skupu Q.

Ako su i,j proizvoljni različiti prirodni brojevi (pretpostavljamo da je $i<j$, postupak je analogan ako je $i>j$), zamenimo u jednačini (6.21) promenljive x_1^{i-1}, $x_{i+1}^{j-1}, x_{j+1}^{\infty}, y_1^{i-1}, y_{i+1}^{j-1}, y_{j+1}^{\infty}$ redom fiksiranim elementima a_1^{i-1}, $a_{i+1}^{j-1}, a_{j+1}^{\infty}, b_1^{i-1}, b_{i+1}^{j-1}, b_{j+1}^{\infty}$ skupa Q. Dobijamo

$$A(B'(x_i,x_j),B_2'(y_i,y_j))=C'(D_i(x_i,y_i),D_j(x_j,y_j)), \tag{6.26}$$

gde je $B_1'(x_i,x_j)=B_1(a_1^{i-1},x_i,a_{i+1}^{j-1},x_j,a_{j+1}^{\infty})$, $B_2'(y_i,y_j)= B_2(b_1^{i-1},y_i,b_{i+1}^{j-1},y_j,b_{j+1}^{\infty})$, $C'(x,y) = C(D_1(a_1,b_1),\dots,D_{i-1}(a_{i-1},b_{i-1}),x,D_{i+1}(a_{i+1},b_{i+1}),\dots \dots,D_{j-1}(a_{j-1},b_{j-1}),y,D_{j+1}(a_{j+1},b_{j+1}),\dots)$. Jednačina (6.26) je funkcionalna jednačina opšte entropije na binarnim kvazigrupama pa je tada na osnovu [5]

(6.27) $$A(x,y) = \alpha x + \beta y,$$

(6.28) $$D_i(x,y) = \varphi_i^{-1}(\gamma_i x + \theta_i y),$$

(6.29) $$D_j(x,y) = \varphi_j^{-1}(\gamma_j x + \theta_j y),$$

gde je $(Q,+)$ Abelova grupa a $\alpha, \beta, \varphi_i, \varphi_j, \gamma_i, \gamma_j, \theta_i, \theta_j$ permutacije skupa Q. Ova Abelova grupa zavisi od i i j. Birajući neka druga dva prirodna broja k i m umesto i i j, analognim postupkom dobijamo da postoji Abelova grupa $(Q,\oplus)$ takva da je

(6.27') $$A(x,y) = \alpha' x \oplus \beta' y,$$

gde su α', β' permutacije skupa Q. Iz (6.27) i (6.27') je

$$\alpha x + \beta y = \alpha' x \oplus \beta' y,$$

pa su $+$ i $\oplus$ izotopne grupe tj. (na osnovu poznate teoreme Alberta) te grupe su izomorfne. Prema tome u jednakostima (6.27),(6.28),(6.29) za svako i,j Abelova grupa $(Q,+)$ je fiksirana.

Iz (6.26),(6.27),(6.28) i (6.29) je

(6.30) $$\alpha B_1(x_1^\infty) + \beta B_2(y_1^\infty) = C(\{\varphi_i^{-1}(\gamma_i x_i + \theta_i y_i)\}_{i=1}^\infty).$$

Stavljajući $\gamma_i^{-1} x_i$ umesto x_i, $\theta_i^{-1} y_i$ umesto y_i, i uvodeći izotope (definicija izotopije infinitarnih kvazigrupa, analogna definiciji izotopije n-arnih kvazigrupa, i neke osobine te izotopije navedene su u odeljku 6.6., t. 3°, str. 85)

(6.31) $$B_1^{(\alpha^{-1}, \{\gamma_i^{-1}\}_{i=1}^\infty)} = \bar{B}_1, \quad B_2^{(\beta^{-1}, \{\theta_i^{-1}\}_{i=1}^\infty)} = \bar{B}_2,$$

dobija se

(6.32) $$\bar{B}_1(x_1^{\infty}) + \bar{B}_2(y_1^{\infty}) = C(\{\varphi_i^{-1}(x_i+y_i)\}_{i=1}^{\infty}).$$

Ako uvedemo izotop

$$C^{(\epsilon, \{\varphi_i^{-1}\}_{i=1}^{\infty})} = \bar{C},$$

biće

(6.33) $$\bar{B}_1(x_1^{\infty}) + \bar{B}_2(y_1^{\infty}) = \bar{C}(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}).$$

Fiksirajući u (6.23) najpre $y_i=0$, $i=1,2,\dots$, a zatim $x_i = 0$, $i=1,2,\dots$, sledi

(6.34) $$\bar{B}_1(x_1^{\infty}) + a = \bar{C}(x_1^{\infty}),$$

(6.35) $$\bar{B}_2(y_1^{\infty}) + b = \bar{C}(y_1^{\infty}),$$

gde je $\bar{B}_2(\overset{\infty}{0}) = a$, $\bar{B}_1(\overset{\infty}{0}) = b$, pa je na osnovu (6.33)

(6.36) $$\bar{C}(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}) = \bar{C}(x_1^{\infty}) + \bar{C}(y_1^{\infty}) - c,$$

gde je $c = a + b$.

Stavljajući

(6.37) $$\bar{C}(x_1^{\infty}) - c = R(x_1^{\infty}),$$

iz (6.36) sledi da je R aditivna infinitarna kvazigrupa nad $(+)$ tj.

(6.38) $$R(\{x_i+y_i\}_{i=1}^{\infty}) = R(x_1^{\infty}) + R(y_1^{\infty}).$$

Izrazimo B_1, B_2 i C pomoću R. Iz (6.31),(6.34) i (6.37) dobijamo

$$B_1(x_1^{\infty}) = \alpha^{-1}\bar{B}_1(\{\gamma_i x_i\}_{i=1}^{\infty}),$$

$$\bar{B}_1(x_1^{\infty}) = \bar{C}(x_1^{\infty}) - a = R(x_1^{\infty}) + c - a = R(x_1^{\infty}) + b.$$

Dakle,

(6.39) $$B_1(x_1^{\infty}) = \alpha^{-1}(R(\{\gamma_i x_i\}_{i=1}^{\infty}) + b) .$$

nalogno je

(6.40) $$B_2(x_1^{\infty}) = \beta^{-1}(R(\{\theta_i x_i\}_{i=1}^{\infty}) + a) .$$

Kako je $C = \overline{C}^{(\varepsilon, \varphi_1^{\infty})}$, sledi

(6.41) $$C(x_1^{\infty}) = \overline{C}(\{\varphi_i x_i\}_{i=1}^{\infty}) = R(\{\varphi_i x_i\}_{i=1}^{\infty}) + c .$$

Na osnovu prethodnih rezultata možemo formulisati ledeću teoremu:

<u>Teorema 6.4.</u> Sva rešenja funkcionalne jednačine 6.21) data su jednakostima (6.27),(6.28),(6.29),(6.39), 6.40),(6.41) gde je $(Q,+)$ proizvoljna Abelova grupa, $Q,R)$ proizvoljna aditivna infinitarna kvazigrupa tipa ω ad $(Q,+)$, $\alpha, \beta, \gamma_i, \theta_i, \varphi_i$, $i=1,2,\dots$, proizvoljne per- utacije skupa Q, a, b, c proizvoljni elementi skupa Q akvi da je $a+b=c$.

Da su uslovi teoreme potrebni pokazano je u prethod- om.Da su oni i dovoljni jednostavno se proverava.Zaista,

$$A(B_1(x_1^{\infty}),B_2(y_1^{\infty})) = \alpha B_1(x_1^{\infty}) + \beta B_2(y_1^{\infty}) =$$

$$= R(\{\gamma_i x_i\}_{i=1}^{\infty}) + b + R(\{\theta_i y_i\}_{i=1}^{\infty}) + a =$$

$$= R(\{\gamma_i x_i + \theta_i y_i\}_{i=1}^{\infty}) + c .$$

$$C(D_1(x_1,y_1),D_2(x_2,y_2),\dots) =$$

$$= R(\{\varphi_i D_i(x_i,y_i)\}_{i=1}^{\infty}) + c = R(\{\gamma_i x_i + \theta_i y_i\}_{i=1}^{\infty}) + c .$$

6.6. Neka pitanja teorije infinitarnih kvazigrupa

1° Uveli smo ∞-kvazigrupe dva tipa: ω i $\omega+k$. vo nas navodi na dalje generalizacije ∞-kvazigrupa.Koritićemo notaciju i neke rezultate iz [80] i [56].Oznake α, Y_β, Z_γ itd. upotrebljavaćemo za totalno uređene niove rednih tipova α, β, γ respektivno.Neka je Q proizvojan neprazan skup.Skup svih nizova rednog tipa α elemeata iz Q označavaćemo sa Q^α. Ako je A preslikavanje : $Q^\alpha \to Q$ onda uređen par (Q,A) nazivamo operativ tipa α i pišemo $A(X_\alpha) = y$, gde je X_α skup promenljivih ipa α. Rećićemo da je operacija A tipa α i to ćemo ozačavati sa $|A| = \alpha$.

Uvedimo sada pojam kvazigrupe tipa α. Neka je α totalno uređen niz promenljivih tipa α, i neka je proizvoljna promenljiva iz X_α.Neka je X_{α_1} skup svih romenljivih iz X_α koje su manje od x a X_{α_2} skup lemenata iz X_α koji su veći od x. I X_{α_1} i X_{α_2} su otalno uređeni i imaju redne tipove α_1 i α_2 respektivno. akle, α se može prikazati u obliku $\alpha_1 + 1 + \alpha_2$. Operaiv (Q,A) tipa α je kvazigrupa ako jednačina

$$A(C_{\alpha_1}, x, C_{\alpha_2}) = b, \tag{6.42}$$

de su C_{α_1} i C_{α_2} proizvoljni totalno uređeni nizovi z Q^{α_1} i Q^{α_2} respektivno, b proizvoljan elemenat iz), uvek ima jedinstveno rešenje.

Definicije ∞-kvazigrupa tipova ω i $\omega + k$ su pecijalni slučajevi prethodne definicije.

2^o Tip ∞-kvazigrupe uopštava pojam arnosti finitarne operacije.Pitanje koje se postavlja u infinitarnom slučaju je koje operacije smatramo jednakim.Prirodno je uzeti da su dve operacije A i B, definisane na istom skupu Q, jednake ako su istog tipa α i $A(C_\alpha) = B(C_\alpha)$ za sve nizove C_α iz Q^α.

Ova definicija dovodi do nove vrste parastrofa koji će biti razmotreni kasnije (v. 5^o).

3^o Pojam izotopije može se uvesti na isti način kao što je to učinjeno za n-arne kvazigrupe.To se može učiniti za kvazigrupe bilo kog tipa ali ćemo se mi ograničiti na kvazigrupe tipa ω. Dve kvazigrupe B i A tipa ω definisane na istom skupu Q se nazivaju izotopne ako postoji niz $T = \alpha_o^\infty$ permutacija skupa Q takvih da je $B(x_1^\infty) = \alpha_o^{-1} A(\{\alpha_i x_i\}_{i=1}^\infty)$. Slično kao i ranije uvodimo pojam glavne izotopije, izomorfizam, autotopiju.LP-izotopija se takođe može jednostavno uvesti.Neka je $\bar{a} = a_1^\infty$ neki niz iz Q^ω. Preslikavanje $L_i(\bar{a}) : x \to A(a_1^{i-1}, x, a_{i+1}^\infty)$ se naziva i-ta translacija u odnosu na $\bar{a}$. Očevidno to preslikavnje je permutacija skupa Q. Izotopija $T = \alpha_o^\infty$ gde je $\alpha_o = 1$, $\alpha_i = L_i^{-1}(\bar{a})$ naziva se LP-izotopija.Kao i u finitarnom slučaju možemo dokazati da je svaki LP-izotop kvazigrupe (tipa ω) lupa tipa ω čija je jedinica $e = A(a_1^\infty)$. Poznate teoreme o izotopiji takođe važe u infinitarnom slučaju.

4^o Neka je (Q,A) data kvazigrupa tipa α. Jednačina (6.42) definiše inverznu kvazigrupnu operaciju.Pojam inverzne operacije je očigledniji za kvazigrupe tipa ω.

Posmatramo jednačinu $A(a_1^{i-1},x,a_{i+1}^{\infty}) = b$. Ova jednačina definiše novu operaciju ${}^{(i)}A$ na sledeći način:

$$x = {}^{(i)}A(a_1^{i-1},b,a_{i+1}^{\infty}).$$

Inverzna operacija je specijalan slučaj parastrofa.

Sada ćemo definisati parastrof infinitarne kvazigrupe na drugačiji način od uobičajenog, a koji je u finitarnom slučaju ekvivalentan sa uobičajenom definicijom.

Neka je A ω-kvazigrupa (tj. kvazigrupa tipa ω) definisana na skupu Q. Ako je B kvazigrupa tipa ω definisana sa

$$B(x_1^{\infty}) = A(x_{\sigma 1}^{\sigma n},x_{n+1}^{\infty}),$$

gde je n proizvoljan prirodan broj, σ permutacija skupa $\{1,2,\ldots,n\}$, onda kvazigrupu ${}^{(i)}B$ (tipa ω), gde je i proizvoljan prirodan broj, nazivamo parastrof od A a preslikavanje $A \to {}^{(i)}B$ parastrofija kvazigrupe A. Lako se može videti da poznate osobine parastrofije (i s tim povezanog pojma izostrofije) važe za parastrofiju ω-kvazigrupa.

5° Mogu se takođe posmatrati permutacije beskonačnog skupa promenljivih. Na primer, neka je (Q,A) ω-kvazigrupa, $A(x_1^{\infty}) = y$. Možemo dobiti novu operaciju A' na sledeći način:

$$A'(x_1,x_3,x_5,\ldots,x_2,x_4,x_6,\ldots) = y \,. \tag{6.43}$$

Operacija A' je tipa $\omega+\omega$. Ako uzmemo u obzir našu definiciju jednakosti dve ∞-kvazigrupe ne možemo reći da su A i A' definisana sa (6.43) jednake. Prema tome potrebna je adekvatnija definicija jednakosti dve ∞-operacije. S druge strane možemo reći da je A' parastrof od A. Tako imamo dve vrste parastrofije: jedna koja ne menja tip kvazigrupe i druga koja ga menja.Ova situacija se javlja prilikom razmatranja nekih funkcionalnih jednačina na infinitarnim kvazigrupama.

6^o Posmatrajući funkcionalnu jednačinu (6.8) primećujemo da na obe strane te jednačine imamo superpoziciju operacija.Leva strana se može pisati u sledećem obliku:

$$(A \overset{i}{+} B)(x_1^{i-1}, x_i^{\infty}, y_1^r, y_{r+1}^{\infty})$$

ili

$$(A \overset{i}{+} B)(x_1^{\infty}, y_1^{\infty}).$$

Analogno, desna strana je oblika

$$(C \overset{j}{+} D)(x_1^{\infty}, y_1^{\infty}),$$

tj. jednačina (6.8) se može pisati

$$(A \overset{i}{+} B)(x_1^{\infty}, y_1^{\infty}) = (C \overset{j}{+} D)(x_1^{\infty}, y_1^{\infty}),$$

ili kraće (s obzirom na definiciju jednakosti dve ∞-kvazigrupe),

$$A \overset{i}{+} B = C \overset{j}{+} D .$$

V.D. Belousov je u [25], [13] izučavao pozicione algebre n-arnih kvazigrupa.Elementi te algebre Σ su finitarne operacije definisane na nekom skupu Q a operacije definisane na Σ su superpozicije $(\overset{i}{+})$, i=1,2,... .

Pojam pozicione algebre može se proširiti na infinitarni slučaj.Međutim, aksiomi ove algebre moraju se promeniti.Na primer, prvi aksiom pozicione algebre razmatrane u [25], str. 11, glasi:

$$|A \overset{i}{+} B| = |A| + |B| - 1 , \tag{6.44}$$

gde je, kao što je poznato, sa $|A|$ označena arnost od A. Ako se ograničimo na infinitarne operacije čiji su tipovi redni tipovi dobro uređenih skupova, onda (6.44) treba zameniti sa sledeća četiri aksioma. Neka je $|A|=\alpha$, $|B|=\beta$. α i β su tipovi (u infinitarnom slučaju) ili arnosti (u finitarnom slučaju) od A i B respektivno. Imamo

1) $|A \overset{i}{+} B| = |B| + |A|$, ako je $\alpha, \beta \geq \omega$,

2) $|A \overset{i}{+} B| = |B| + |A| - i$, ako je $\alpha < \omega, \beta \geq \omega$;

3) $|A \overset{i}{+} B| = |A|$, ako je $\alpha \geq \omega, \beta < \omega$,

4) $|A \overset{i}{+} B| = |A| + |B| - 1$, ako je $\alpha < \omega, \beta < \omega$.

Dokažimo da važi relacija 1). Po definiciji ($\overset{i}{+}$) biće

(6.45) $$A(x_1^{i-1}, B(X_\beta), Y_\alpha) = (A \overset{i}{+} B)(x_1^{i-1}, X_\beta, Y_\alpha),$$

gde su X_β i Y_α dobro uređeni nizovi tipova β i α respektivno. Iz (6.45) sledi

$$|A \overset{i}{+} B| = (i-1) + \beta + \alpha = \beta + \alpha,$$

$$|A| = (i-1) + 1 + \alpha = \alpha,$$

$$|B| = \beta.$$

Dakle, $|A \overset{i}{+} B| = \beta + \alpha = |B| + |A|$. Napominjemo da se ovde ne može pisati $|A \overset{i}{+} B| = |A| + |B|$ jer beskonačni tipovi α β ne komutiraju.

Dokaz 2)-4) je sličan.

Superpozicije na beskonačnom mestu takođe se mogu razmatrati.

Na kraju ćemo formulisati neke probleme o ∞-kva-
igrupama:

1. Rešiti funkcionalnu jednačinu $A \overset{i}{+} B = C \overset{j}{+} D$
ada su tipovi različiti od $\omega + k$.

2. Ispitati oba pojma parastrofije data u 5°.

3. Definisati (i,j)-asocijativnost za ∞-kva-
igrupe tipova različitih od ω i naći njihovu strukturu
aravno ukoliko postoje).

4. Naći druge primere ∞-kvazigrupa. Napomi-
jemo da primer iz odeljka 6.2. nije efektivan.

5. Postoje li ∞-kvazigrupe koje zadovoljavaju
eke poznate identitete? Primer ∞-lupe dat u 6.2., koja
a osobinu da su svi elementi jedinice, zadovoljava zakone
$(\overset{k}{x}, y, \overset{\infty}{x}) = y$, za svako $x,y \in Q$, $k=1,2,\ldots$.

6. Konstruisati teoriju pozicionih algebri u
finitarnom slučaju.

L I T E R A T U R A

1. A c z é l J., Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York and London, 1966.
2. A c z é l J., Nekotorie obščie metodi v teorii funkcional'nih uravnenij odnoj peremenoj. Novie primenenija funkcional'nih uravnenij, UMN 11, vyp.3(69)(1956),3-68.
3. A c z é l J., Some unsolved problems in the theory of functional equations, Arch.Math.16,1964,435-444.
4. A c z é l J., Quelques problèmes non-résolus dans la theorie des équations fonctionelles, Mat.Bibl.,25(1963), 149-152.
5. A c z é l J., B e l o u s o v V. D., H o s s z ú M., Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups, Acta Math.Sci.Hung. 11,No.1-2 (1960),127-136.
6. A c z é l J., P i c k e r t G., R a d ó F., Nomogramme, Gewebe und Quasigruppen,Mathematica, 2(25)(1960),5-24.
7. A l b e r t A. A., Quasigroups I, Trans.Amer.Math.Soc. No.54(1943),507-519.
8. A l b e r t A. A., Quasigroups II, Trans.Amer.Math.Soc. No.55(1944),401-419.
9. A l i m p i ć B., Izotopija jedne klase kvazigrupa, Disertacija, Beograd, 1972.
10. A l i m p i ć B., Uravnoteženi zakoni na kvazigrupama, Mat. vesnik, 9(24),1972,249-255.
11. B e l o u s o v V. D., Osnovi teorii kvazigrupp i lup, Nauka, Moskva, 1967.
12. B e l o u s o v V. D. Algebraičeskie seti i kvazigruppi, Kišinev , 1971.
13. B e l o u s o v V. D., n-arnie kvazigruppi, Kišinev, 1972.

B e l o u s o v V. D., Associativnie sistemi kvazigrupp, UMN 13, vyp.3(1958),243.

B e l o u s o v V. D., O strukture D-kvazigrupp, Naučn. dokl. vysš. školi, fiz.-matem. nauki, No.6(1958),8-13.

B e l o u s o v V. D., Tranzitivnie v celom sistemi kvazigrupp, Izv. Mold. fil. ANSSSR, No.10, 76(1960) 221-30.

B e l o u s o v V. D., O strukture distributivnih kvazigrupp, Matem. sb. 50(92) : 3(1960), 267-298.

B e l o u s o v V. D., Associativnie v celom sistemi kvazigrupp, Matem. sb. 55(97) : 2(1961), 221-236.

B e l o u s o v V. D., Ob odnom klasse levodistributivnih kvazigrupp, Izv. vysš. učebn. zav., Matematika, No.1, 32(1963), 16-20.

B e l o u s o v V. D., Sistemi kvazigrupp s obobščenim toždestvami, UMN XX, vyp. 1(121)(1965),75-146.

B e l o u s o v V. D., Uravnovešennie toždestva v kvazigruppah, Matem. sb. 70(112)(1966), 55-97.

B e l o u s o v V. D., Some Remarks on the Functional Equation of Generalized Distributivity, Aeq. Math., Vol.I, fasc. 1/2, 1968, 54-65.

B e l o u s o v V. D., O funkcional'nom uravnenii obščei associativnosti, Matem. zap. t.7, Sverdlovsk 1970.

B e l o u s o v V. D., K funkcional'nomu uravneniju Mufang, Voprosi teorii kvazigrupp i lup, Kišinev,1970,11-20.

B e l o u s o v V. D., Balanced identities in algebras of quasigroups, Aeq.math.,vol.8,fasc 1/2,1972,1-73.

B e l o u s o v V. D., S a n d i k M. D., n-arnie kvazigruppi i lupi, Sib. matem. ž. VII,No.1(1966),31-54.

B e l o u s o v V. D., H o s s z ú M., Some reduction theorems on the functional equation of the generalized distributivity, Publ. Math. Debrecen 12(1965),175-180.

B e l o u s o v V. D., H o s s z ú M., Some problems on ternary quasigroups, Mat. vesnik, 1(16),4 (1964),319-324.

'. B e l o u s o v V. D., S t o j a k o v i ć Z., On generalized (i,j)-modular quasigroups, Publ.Inst.Math. t.16(30),1973,43-47.

. B e l o u s o v V. D., S t o j a k o v i ć. Z., On infinitary quasigroups, Publ.Inst.Math. t.16(30),1973, 31-42.

. B o l G., Gewebe und Gruppen, Math. Ann. 114,1937,414-431.

. B r u c k R. H., A Survey of Binary Systems, Berlin-Heidelberg-Götingen, 1958.

. B r u c k R. H., Some results in the theory of quasigroups, Trans.Amer.Math.Soc.,1944,55,19-52.

. B r u c k R. H., Contributions to the theory of loops, Trans.Amer.Math.Soc.,No.60,(1946),245-354.

. B r u c k R. H., An extension theory for a certain class of loops, Bull.Amer.Math.Soc.,1951,57,11-26.

. Č e b a n M. A., Sistemi kvazigrupp s obobščenim toždestvom Bola, Voprosi teorii kvazigrupp i lupp, Kišinev, 1970, 160-170.

. Č u n i h i n S. A., K teorii neassocíativnih n-grupp s postulatom K, Dokl.Akad.Nauk SSSR,48,No.1(1945),7-10.

. Č u p o n a G., Za relacijata distributivnosti megu algebarskite operacii,God.zb.fil.fak.un. Skopje,Prir.-mat. otd., 9 (1956-1958),23-29.

. Č u p o n a G., Za finitarnite operacii, Godišen zb. un-t Skopje, Prir.-mat. fak. 12,No.1(1959-1961),7-49.

, Č u p o n a G., Za distributivnite sistemi, Godišen zb. un-t Skopje, Prir.-mat. fak. 13(1960),5-15.

. Č u p o n a G., Za n-arnite polugrupi,Bilten na društvoto na mat. i fiz. od Makedonija, kn. 12(1961),5-13.

, Č u p o n a G., Finitarne asocijativne operacije, Mat. bibl. sv. 39 (1969),Beograd, 135-149.

. D e v i d é V., Über eine Klasse von Gruppoiden, Glasnik mat.fiz. i astronomski 10(1955),265-285.

. D ö r n t e W., Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegriff, Math.Zeits. 29(1928),1-19.

. E u l e r L., Commentationes arithmeticae collectae, Peterburg, 1849.

. E v a n s T., A note on the associative law, J.London Math.Soc. 25(1950),196-201.

. G a r r i s o n G. N., Quasigroups, Ann. of Math.,1940, 41, 474-487.

. G a r r i s o n G. N., Note on invariant complexes of quasigroup, Ann.of Math.,1946,(2)47, 50-55.

. H o s s z ú M., On a theorem of Belousov and some of its applications, Magyar Tud.Akad.Matem. es Fiz.,Oszt. Közl. 9(1959),51-56.

. H o s s z ú M., On the explicit form of n-group operations, Publ.math. 10, no.1-4(1963),88-92.

. H o s s z ú M., Algebrai rendszereken értelmezett függrényegyenlétek,II.Az asszociativitás függrényegyenlétek általánositásai, Magyar Tud.Akad.Mat.Fiz.Oszt.Közl. 13 (1963),1-15.

. H o s s z ú M., R a d ó F., Über eine Klasse von ternaren Quasigruppen, Acta Math.Hung. 15,No.1-2(1964),20-36.

. H o l l M., Teorija grupp, Moskva, IL, 1962.

. H o l l M., Kombinatornij analiz, Moskva, IL, 1962.

. K r a m a r e v a R. F., O gomotopii n-kvazigrupp, Voprosi teorii kvazigrupp i lupp, Kišinev, 1970, 76-91.

. K u r e p a Đ., Teorija skupova, Zagreb, 1951.

. K u r e p a Đ., Viša algebra I i II, ŠK, Zagreb, 1965.

. K u r o š A. G., Lekcii po obščej algebre, Moskva, FM, 1962.

. K u r o š A. G., Teorija grupp, Moskva, 1967.

. M a d e v s k i Ž., T r p e n o v s k i B., Č u p o n a G., Za infinitarnite asocijativni operaciji, Bilten Društ. matem. i fiz. SRM, XV (1964), 19-22.

. M i l i ć S., O jednoj klasi kvazigrupnih operacija asocijativnog tipa, Mat. vesnik, 8(23)(1971),281-285.

. M i l i ć S., A new proof of Beolusov's theorem for a special law of quasigroupoperations, Publ. Inst. Math. t.11(25)(1971),89-91.

. M i l i ć S., On GD-groupoids with application to n-ary quasigroups,Publ. Inst. Math.,t.13(27),1972,65-76.

, M i l i ć S., On modular systems of quasigroups,Mathematica Balkanica, 2(1972),143-150.

. M i l i ć S., Prilog teoriji kvazigrupa, Disertacija, Beograd, 1971.

. M o u f a n g R., Zur struktur von Alternativ Körpern, Math. Ann. 110(1935), 416-430.

. M u r d o c h D. C., Quasigroups which satisfy certain generalized associative laws, Amer. J. Math., 1939, 61, 509-522.

. M u r d o c h D. C.,Structure of abelian quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 49(1941), 392-409.

. M u r d o c h D. C., Note on normality in quasigroups, Bull. Amer. Math. Soc., 1941, 47, 134-138.

. P o s t E. L., Polyadic Groups, Trans. Amer. Math. Soc., 48(1940), 208-350.

, P r e š i ć S., Zbirka zadataka iz algebre, PMF, Beograd, 1962.

. P r o d a n N. I., O gomotopnom i gomomorfnom otobraženii grupoidov s deleniem, Issl. po teor. kvazigrupp i lup, Kišinev, 1973, 145-151.

. P r o d a n N. I.,Nekotorie rezul'tati teorii grupoidov s deleniem, Voprosi teorii kvazigrupp i lup, Kišinev, 1970, 104-110.

. R a d ó F., Generalizarea tesuturilor spatiale pentru structuri algebrice, Studie Univ. "Babes-Bolyai" Math.-phys., No1(1960), 41-55.

S a d e A., Quasigroupes obéissant a certains lois, Rev. Fac. Sci. Univ. Istambul 22(1959), 151-184.

S a d e A., Entropie demosienne de multigroupoides et de quasigroupes, Soc. Sci.Bruxelles, ser.1,73(1959),302-309.

S a d e A., Théorie des systémes demosiens de groupoides, Pacif. Journ. Math. 10 No.2(1960),625-660.

S a d e A., Demosian systems of quasigroups, Amer. Math. Montly 68,No.4(1961),329-337.

S c h a u f f l e r R., Die Assoziativität im Ganzen besonders bei Quasigruppen, Math.Zeitschr. 67,No.5(1957), 428-435.

S i e r p i ń s k i W., Cardinal and ordinal numbers, Warsawa, 1958.

S o k o l o v E. I., Gomomorfizmi n-kvazigrupp, Issl. po obščej algebre, vyp. 1, 1958, 54-70.

S o k o l o v E. I., O privodimosti (i,j)-asociativnih n-kvazigrupp, Izvestija AN MSSR, 1969, No.3.

S t e i n S. K., On the foundation of quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 85,No1(1957),228-256.

S t e i n S. K., Left-distributive quasigroups, Proc. Amer. Math.Soc. 10,No.4(1959), 577-578.

S t o j a k o v i ć Z., Generalized entropy on GD-groupoids with applications to quasigroups of varous arities, Mat. vesnik 9(24),1972, 159-166.

S t o j a k o v i ć Z., Uravnovešennie toždestva na ternarnih kvazigruppah, Mat. Issledovanija, t. IX, vyp.1, (u štampi).

S u s c h k e v i s c h A., On generalization of the associative law,Trans.Amer.Math.Soc.31(1929),204-214.

S u š k e v i č A., Teorija obobščenih grupp, Kiev,1937.

T o y o d a K., On axioms of mean transformations and automorphic transformations of abelian groups, Tohoku Math. Journ., 46(1940),239-251.

T o y o d a K., On axioms of linear functions, Proc. Imp. Acad. Tokyo 17(1941), 221-227.

T r p e n o v s k i B., n-polugrupi što možat da se popolnat so neutralni elementi, Bilten na Društvoto na matemat. i fiz. od SR Makedonija, kn. XV, 1964.

T r p e n o v s k i B., Č u p o n a G., Finitarni asoeativni operaciji so neutralni elementi, Bilten na Društvoto na matem. i fiz. od NR Makedonija, kn. XII (1961), 15-24.

U š a n J. Obobščenie teoremi V. D. Belousova o četireh kvazigrupah na ternarnij slučaj, Bilten na Društ. na mat. i fiz. od SRM, kn. XX, (1969) 13-17.

U š a n J., Associativnie v celom sistemi ternarnih kvazigrupp, Mathematica Balkanica, 1(1971), 273-281.

U š a n J., n-arnij analogon teoremi Belousova o četireh kvazigruppah i nekotorie ee sledstvia, Bilt. na Društ. na mat. i fiz. od SRM, kn.XXI, 1970, 5-17.

U š a n J., Ob odnoj sisteme funkcional'nih uravnenij n-arnoj assocativnosti na algebre n-arnih kvazigrupp, Matem. Balkanica, 26 (1972), 288-295.

U š a n J., O jednoj klasi kvázigrupa, Disertacija, Beograd, 1971.

V e d e l' J. J., Gomotopija kvazigrupp, Mat. vesnik, 7(22), sv.4, (1970), 493-506.