UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Tatjana Ostrogorski

L^p NEJEDNAKOSTI S TEŽINOM NA KONUSIMA U $\mathbb{R}^n$

I

H^p PROSTORI NA POLURAVNI U $\mathbb{C}^n$

\- doktorska disertacija -

Beograd 1986

S A D R Ž A J

U V O D

Mnoge poznate klasične nejednakosti su slične sledećoj Hardyevoj nejednakosti

$$\text{(H)} \qquad \int_0^\infty \left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt\right)^p x^\alpha dx \leqslant C \int_0^\infty f^p(x)x^\alpha dx$$

gde je $\alpha < p-1$ i f pozitivna funkcija. U ovoj nejednakosti se ustvari tvrdi da je operator $Hf(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$ neprekidan na prostoru $L^p(0,\infty)$, $1 \leq p \leq \infty$, sa težinom x^α.

Ceo ovaj rad je nastao iz pokušaja da se nađe n-dimenzionalna verzija nejednakosti (H). Ono što je za ovu nejednakost karakteristično jeste da ona važi za funkcije definisane na polupravoj, da su težine x^α homogene funkcije i da je jezgro operatora H homogena funkcija. Kada se nađe šta ovim pojmovima odgovara u $\mathbb{R}^n$, onda se lako dobija n-dimenzionalna Hardyeva nejednakost.

Polupravoj odgovara konus u $\mathbb{R}^n$; zbog toga se u prvoj glavi proučavaju osobine homogenih konusa (i, specijalno, osobine grupe njihovih automorfizama). To će nam u narednim glavama omogućiti rad sa funkcijama definisanim na konusima.

Zatim se definišu homogene funkcije, tj. funkcije koje su homogene u odnosu na automorfizme konusa, i definišu se homogeni operatori. Pokazuje se da su ovi operatori slični Hardyevom, i da za njih važi slična nejednakost, tj. da su oni ograničeni u nekim L^p prostorima (sa težinama, koje su homogene funkcije). Ove nejednakosti se dokazuju u glavi 2.

Ispostavlja se da u homogene operatore spadaju mnogi klasični operatori, tako da se na njih mogu primeniti rezultati glave 2; time se bavimo u glavi 3.

U glavi 4 se neki od dobijenih rezultata primenjuju na proučavanje izvesnih prostora analitičkih funkcija u C^n. Pos traju se oblasti T_V u C^n koje predstavljaju uopštenje poluravni (T_V je direktan proizvod R^n i konusa V, na sličan način kao što je poluravan u C^1 proizvod R^1 i poluprave $(0,\infty)$). Definišu se Hardyevi i Bergmanovi prostori na T_V, zatim se po matraju neki integralni operatori na ovim prostorima i pokazu da su ograničeni. Dokazuju se teoreme Paley-Wienerovog tipa za Bergmanove prostore s težinom i za Hardyeve prostore s težinom. Na osnovu toga se za Bergmanov prostor $B^2_\alpha(T_V)$ nalazi reprodukciono jezgro. U dokazu ovih tvrđenja se koriste neke nejednakosti dobijene u drugoj i trećoj glavi.

+ + +

Zahvaljujem se profesoru Slobodanu Aljančiću na pomoći koju mi je kao mentor pružio tokom pisanja ovog rada. Zahvaljujem se, takođe, dr Miodragu Mateljeviću sa kojim sam vodil brojne i veoma korisne razgovore, što mi je naročito pomoglo pri pisanju drugog dela ovog rada.

1. H O M O G E N I K O N U S I

Ova prva glava je uvodna. U odeljku 1.1 se uvode osnovni pojmovi. Definišu se homogeni konusi i njihovi automorfizmi. Na homogenim konusima se posmatraju homogene funkcije (odeljak 1.3). One će igrati važnu ulogu u celom radu. Pošto homogenih funkcija nema mnogo (one se jednoznačno određuju svojim stepenom - Lema 1.1), onda se jednakosti među homogenim funkcijama lako proveravaju. To će naročito biti korišćeno u glavi 2 i 3 za izračunavanje nekih integrala od homogenih funkcija.

U ovoj glavi detaljnije proučavamo svojstva konusa koja će nam omogućiti rad na njima.

U odeljku 1.4 se definiše jedna funkcija na konusu za koju će se pokazati da je involucija. Navode se neke njene osobine i veza sa homogenim funkcijama i automorfizmima konusa (v. [26]).

U 1.5 se iz grupe automorfizama izdvaja jedna prosto tranzitivna podgrupa (za svake dve tačke postoji jedinstven automorfizam koji ih povezuje). Ovim se ustvari uspostavlja uzajamno jednoznačna korespondencija između tačaka konusa i njegovih automorfizama.

U 1.6 se navode primeri homogenih samoadjungovanih konusa i za svaki primer pokazuje kako izgledaju pojmovi koje smo definisali u ovoj glavi.

1.1. Definicije i oznake

Neka je $\mathbb{R}^n$ n-dimensionalni euklidski prostor. Tačke u $\mathbb{R}$ se obeležavaju sa $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n),\ldots$; skalar proizvod sa $x\cdot y = \sum x_i y_i$, norma sa $|x| = (x\cdot x)^{1/2}$. Neka je $\Sigma = \{x\in\mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ jedinična sfera u $\mathbb{R}^n$; njeni elementi se obel žavaju sa $x', y', \ldots$, dakle $x' = x/|x| \in \Sigma$.

Podskup $V \subseteq \mathbb{R}^n$ se zove <u>konus</u> ako iz $x\in V$ sledi $\lambda x \in V$, za sv $\lambda > 0$. Za konus V ćemo uvek pretpostaviti da je konveksan, otv ren i da ne sadrži pravu (tj. iz $x\in V$ sledi $-x\notin V$; ovakvi konusi se zovu oštri).

<u>Automorfizam</u> konusa je linearni operator na $\mathbb{R}^n$ koji pres kava V na V. Svi automorfizmi konusa V čine grupu $G(V)$, koja podgrupa opšte linearne grupe $GL(\mathbb{R}^n)$. Konus V se naziva <u>homog</u> ako grupa njegovih automorfizama deluje tranzitivno, tj. ako z svake dve tačke $x,y\in V$ postoji neki $A\in G(V)$ tako da je $y = Ax$.

<u>Dualni</u> (<u>adjungovani</u>) <u>konus</u> konusa V je skup $V^* = \{x\in\mathbb{R}^n : x\cdot y > 0,\ y\in\overline{V}\setminus\{0\}\}$ (pri čemu $\overline{V}$ označava zatvorenje skupa V). Ko V se naziva <u>samoadjungovan</u>, ako je jednak svom dualnom konusu: $V = V^*$.

Ako je A linearni operator u $\mathbb{R}^n$, njegov <u>adjungovani oper tor</u> A' se definiše sa $A'x\cdot y = x\cdot Ay$ (matrica operatora A' je tra ponovana matrica A). Kada je A automorfizam konusa V, tada je A' automorfizam konusa V^*. Štaviše preslikavanje $A \to A'^{-1}$ daj izomorfizam grupe $G(V)$ u grupu $G(V^*)$.

Obeležićemo sa I identični operator; tada transformacije oblika λI, $\lambda>0$, čine grupu (grupu dilatacija), koja je, na osnovu definicije konusa, podgrupa grupe $G(V)$, za svaki konus V.

Svaki konus definiše parcijalno uređenje u $\mathbb{R}^n$ na sledeći način: $x <_V y$ ako i samo ako $y - x \in V$. Obeležićemo sa $\langle a,b\rangle$ <u>interval</u> u odnosu na ovo uređenje: $\langle a,b\rangle = \{x\in\mathbb{R}^n: a<_V x <_V b\} = (a+V)\cap(b-V)$. Pisaćemo i $\langle a,\infty\rangle$ umesto $a+V$.

Automorfizmi konusa čuvaju poredak, tj. iz $x <_V y$ sledi $Ax <_V Ay$, za svaki $A\in G(V)$. Ovo se lako dobija iz linearnosti operatora A.

1.2. Uvodne napomene

U ovoj glavi se ispituju neke osobine konusa koje omogućuju da se na konusima posmatraju funkcije (i operatori na prostorima funkcija) analogno funkcijama na polupravoj $(0,\infty) = \mathbb{R}_+$. Ulogu poluprave igra konus, a ulogu multiplikativne grupe na $(0,\infty)$, grupa automorfizama konusa. Pokazuje se da je na konusu moguće definisati analogon stepenih funkcija - to će biti funkcije homogene u odnosu na grupu automorfizama. Ove funkcije će naslediti mnoge osobine običnih stepenih funkcija. Zatim se na osnovu stepene funkcije na konusu definiše jedna involucija, koja će igrati ulogu funkcije $x \to 1/x$ (jedne promenljive) - inverznog elementa u odnosu na množenje.

Grupa automorfizama ima centralno mesto u svim razmatranjima, stoga će svi konusi sa kojima radimo biti homogeni. Pretpostavićemo, takođe, da su konusi i samoadjungovani, što će pojednostaviti neke probleme u tretiranju involucije. Ovim dvema pretpostavkama se klasa posmatranih konusa veoma sužava. Poznato j naime, da postoje samo 4 vrste samoadjungovanih homogenih konus (v. 1.6.). Oni se nekad nazivaju i oblasti pozitivnosti ili klasične oblasti. Ove oblasti su proučavali Koecher [16] i Rothe [26]. Mi ćemo, naročito u odeljku 1.4, najviše slediti Rothause Vinberg [30] i Gindinkin [14] posmatrali su opštije homogene konus (koji nisu obavezno samoadjungovani), čak su u [14] i [27] dati postupci za konstrukciju svih homogenih konusa. S obzirom da je naš prvenstveni cilj ispitivanje nekih integralnih operator (glava 2), nećemo težiti najvećoj mogućoj opštosti u određivan oblasti na kojima oni deluju, pa ćemo se ograničiti navedenim specijalnim slučajem samoadjungovanih konusa.

Sve navedene i sledeće definicije mogu se naći napr. u [ili [30].

1.3. Homogene funkcije

Sada ćemo posmatrati funkcije definisane na konusu V.

Definicija. Neka je V homogen konus. Funkcija $f\colon V\to R_+$ se zov homogena (u odnosu na V) stepena $\alpha\in R$ ako je

(1) $$f(Ax) = |A|^{\alpha} f(x)$$

za svako $A\in G(V)$ i svako $x\in V$. Pritom je $|A|$ apsolutna vrednost determinante matrice A.

Očigledno, sve funkcije homogene u odnosu na konus su ho gene i u običnom smislu, jer kao što je pomenuto, svaka grupa G(V) sadrži grupu dilatacija, dakle iz (1) sledi $f(\lambda x) = \lambda^{n} f($ za $\lambda>0$ (jer je $|\lambda I| = \lambda^{n}$).

Kao primere homogenih funkcija posmatramo

(2) $s(x) = \int_{\langle 0,x\rangle} dy$

(3) $h(x) = \int_V e^{-x\cdot y} dy$.

Funkcija s je ustvari zapremina intervala $\langle 0,x\rangle$. Ona se zove <u>stepena funkcija</u> konusa, zato što će se njeni stepeni $s^{\alpha}(x)$ ponašati u mnogim situacijama kao funkcija $x \to x^{\alpha}$ jedne promenljive. Funkcija h se ponekad naziva karakteristična funkcija konusa. Pošto je konus samoadjungovan, onda $x\cdot y > 0$ i to će učiniti da integral (3) konvergira (v. Lemu 3.5).

Obe funkcije (2) i (3) su homogene: s je homogena stepena 1, što se uviđa uvođenjem smene $y = Au$ u integral i korišćenjem monotonije automorfizma A: ako $y <_V x$ tada $Ay <_V Ax$. Funkcija h je homogena stepena -1; to se dobija uvođenjem smene $y = A^{*-1}u$ u integral (3). Iz sledeće leme će se videti da su ove funkcije povezane bliže, nego što bi se moglo zaključiti iz njihovih izraza (2) i (3).

Očigledno je s^{α}, sa $\alpha \in \mathbb{R}$, homogena stepena α. Ispostavlja se da su ovo jedine homogene funkcije.

Neka je D skup svih tačaka iz V za koje je $s(x) = 1$, tj.

(4) $D = \{x \in V:\ s(x) = 1\}$.

LEMA 1.1. *Neka je V homogen konus. Neka je $f: V \to \mathbb{R}_+$ homogena funkcija stepena $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada postoji konstanta $C > 0$, tako da je*

a) $f(x) = C$, *za* $x \in D$.

b) $f(x) = C\, s^{\alpha}(x)$, *za* $x \in V$.

Tvrđenje b) je n-dimenzionalni analogon činjenice da su

Ct^{α} jedine homogene funkcije na $\mathbb{R}_+$.

Dokaz. Tvrdimo pre svega: ako je $A \in G(V)$ takvo da $AD = D$, tada je $|A| = 1$. Zaista, ako su $x_1, x_2 \in D$ i $Ax_1 = x_2$, tada pošto je s homogena stepena 1 važi

$$s(x_2) = s(Ax_1) = |A| s(x_2)$$

i pošto je $s(x_1) = s(x_2) = 1$, sledi $|A| = 1$. Dakle, za svake dve tačke $x_1, x_2 \in D$, postoji, zbog homogenosti konusa $A \in G(V)$ tako da je $Ax_1 = x_2$, i prema prethodnom je $|A| = 1$. Stoga za homogenu funkciju f važi

$$f(x_2) = f(Ax_1) = |A|^{\alpha} f(x_1) = f(x_1)$$

što znači da je f konstantna na D, a to je tvrđenje a).

Sada, ako je $x \in V$ proizvoljno, i ako stavimo $\lambda = s^{1/n}(x)$, biće $\bar{x} = x/\lambda \in D$, jer je $s(\bar{x}) = s(x/\lambda) = \lambda^{-n} s(x) = 1$. Sada koristimo homogenost funkcije f i a):

$$f(x) = f(\lambda \bar{x}) = \lambda^{\alpha n} f(\bar{x}) = s^{\alpha}(x) \cdot C.$$

Time je lema dokazana.

Primedba. Vrednost konstante C određena je vrednošću funkcije u nekoj tački $a \in D$, tj. $f(x) = f(a) s^{\alpha}(x)$, što znači da je homogena funkcija u potpunosti određena svojim stepenom i vrednošću u jednoj tački. Pošto nas neće interesovati tačne vrednosti konstanti koje se javljaju u raznim formulama, pisaćemo isto slovo C (eventualno sa indeksima) i kada se radi o različitim konstantama.

POSLEDICA 1.1. $h(x) = C\, s^{-1}(x)$.

U [16] se funkcije homogene stepena 1 nazivaju i normama konusa. Dakle, s i $1/h$ su dva primera normi. Mi ćemo najviše koristiti funkciju s; pisaćemo nekad i s_V kada bude potrebno da se istakne o kome je konusu reč. Posledica 1.1 nam omogućuje da po potrebi koristimo bilo koji od izraza (2) i (3). Iz (2) se, naprimer, lako vidi da je funkcija s neprekidna i strogo pozitivna na V i da $s(x)$ teži 0, kad x teži (konačnom) rubu konusa. Dalje, funkcija s je logaritamski konkavna, ali to se lakše vidi iz oblika (3), kao što će biti pokazano na početku sledećeg odeljka.

1.4. Involucija na konusu

U ovom odeljku ćemo, prema [26], definisati jednu važnu funkciju na konusu i navesti niz njenih osobina.

Funkcija h, definisana u (3) je logaritamski konveksna na V, tj. za svake dve tačke $x_1, x_2 \in V$ i $x = x_1/p + x_2/p'$ (gde je $p > 1$ i $p' = p/(p-1)$) važi

$$h(x) \leq h(x_1)^{1/p} h(x_2)^{1/p'}$$

što se lako proverava pomoću Hölderove nejednakosti

$$h(x) = \int_V e^{-(x_1/p + x_2/p')\cdot t} dt \leq \left(\int_V e^{-x_1\cdot t} dt\right)^{1/p} \left(\int_V e^{-x_2\cdot t} dt\right)^{1/p'}$$

Dakle, pošto je funkcija $\log h(x)$ konveksna, onda je matrica

$$(5) \qquad H(x) = \left(\frac{\partial^2 \log h(x)}{\partial x_i \, \partial x_j}\right)$$

pozitivno definitna za svako $x \in V$. Pošto je funkcija h homogena u odnosu na automorfizme konusa, onda za svaki $A\in G(V)$ važi

(6) $A'H(Ax)A = H(x).$

<u>Definicija</u>. Funkcija $*: V \to V$ se definiše sa

(7) $x^* = -\operatorname{grad} \log h(x).$

S obzirom da je za svako $y\in V$

$$x^*\cdot y = -y\cdot\frac{1}{h(x)}\operatorname{grad} h(x) = \frac{1}{h(x)}\int_V y\cdot t\, e^{-x\cdot t}dt > 0$$

(zbog samoadjungovanosti konusa), vidi se da je $x^*\in V$, što pokazuje da je definicija korektna.

Funkcija $*$ ima razne zanimljive osobine.

(8) $x\cdot x^* = n$.

Ovo sledi iz tzv. Eulerove jednačine za homogene funkcije. Funkcija h je homogena stepena $-n$ (u običnom smislu, tj. $h(\lambda x) = \lambda^{-n}h(x)$, $\lambda>0$), pa zadovoljava jednakost

$$x\cdot\operatorname{grad} h(x) = -n\, h(x)$$

odnosno

$$-x\cdot\operatorname{grad} \log h(x) = n$$

a to je (8).

Iz definicije (5) matrice $H(x)$ i iz (7) neposredno sledi

(9) $H(x) = -\left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\right)$

i odatle, da je $|H(x)|$ ustvari jakobijan transformacije $x\to x^*$

(10) $dx^* = |H(x)|\, dx$.

Međutim, iz (8) je lako dobiti da važi i više

(11) $\quad x^* = H(x)x$.

Zaista, diferencirajući (8) po x_j imamo $0 = x_j^* + x\cdot\frac{\partial x^*}{\partial x_j}$ a to je upravo (11).

Na osnovu ovoga i (6) lako se dobija veza funkcije $*$ i automorfizama konusa. Naime, za svake $x,y\in V$ i $A\in G(V)$ važi

(12) $\quad (Ay)\cdot(Ax)^* = y\cdot x^*$.

Jednakost (12) znači da je funkcija $(x,y)\longrightarrow y\cdot x^*$ invarijantna u odnosu na grupu $G(V)$. Da bismo dokazali (12) primetimo da na osnovu (6) za svaki $u,v\in V$ važi

$$u\cdot A'H(Ax)Av = u\cdot H(x)v$$

tj. $\quad Au\cdot H(Ax)Av = u\cdot H(x)v$ i kad se stavi specijalno $v = x$ i iskoristi (11) sledi $Au\cdot(Ax)^* = u\cdot x^*$, a to je (12). Ovaj poslednji izraz je ekvivalentan sa

$$u\cdot A'(Ax)^* = u\cdot x^*$$

i pošto to važi za svako $u\in V$, onda je $A'(Ax)^* = x^*$, što daje formulu

(13) $\quad (Ax)^* = A'^{-1}x^*$.

Sem toga, formulu (6) možemo da iskoristimo da pokažemo da je funkcija $f(x) = |H(x)|$ homogena. Uzimajući determinante imamo $|A||H(Ax)||A| = |H(x)|$, što znači da važi $f(Ax) = |A|^{-2}f(x)$ pa ako primenimo Lemu 1.1 slediće $f(x) = C\,s^{-2}(x)$, odnosno

(14) $\quad |H(x)| = C\,s^{-2}(x)$.

Sad iz (10) sledi

(15) $$dx^* = C\, s^{-2}(x)dx\ .$$

Na sličan način pokazujemo i sledeće jednakosti

(16) $$h(x)h(x^*) = C$$

(17) $$s(x)s(x^*) = C.$$

Zaista, pokazaćemo da je funkcija $f(x) = h(x)h(x^*)$ homogena ste-pena nula, koristeći (13) i homogenost h:

$$f(Ax) = h(Ax)h((Ax)^*) = h(Ax)h(A'^{-1}x^*) = |A|h(x)|A|^{-1}h(x) = f$$

Jednakost (17) se dokazuje na isti način.

Sada dolazimo do najvažnije osobine funkcije $*$.

LEMA 1.2. [26] Funkcija $*$ je involucija na konusu, tj. $x^{**} = x$

Dokaz. Prema (16) imamo

$$\log h(x) + \log h(x^*) = C\ .$$

Diferenciranjem ove jednakosti se dobija

$$0 = \mathrm{grad}_x \log h(x) + \mathrm{grad}_x \log h(x^*) = -x^* + \left(\frac{\partial x_i^*}{\partial x_j}\right)\mathrm{grad}_{x^*}\log h(x$$

$$= -x^* + H(x)x^{**}$$

prema definiciji $*$ (7) i formuli (9) za matricu $H(x)$. Dakle, $x^* = H(x)x^{**}$, što zajedno sa (11) daje

$$H(x)x = H(x)x^{**}$$

i pošto je matrica $H(x)$ nesingularna, sledi tvrđenje leme.

Primetimo da na osnovu ove leme sledi i

(18) $$H(x)H(x^*) = I\ .$$

LEMA 1.3. [26] Involucija ima fiksnu tačku.

Dokaz. Pošto je funkcija $-\log h(x)$ konkavna, ona dostiže maksimum u nekoj tački (kompaktnog) skupa $x \cdot x = n$. (To će biti tačka u unutrašnjosti konusa, jer, kao što je pokazano na kraju odeljka 1.3, $h(x) \to \infty$, kad x teži granici konusa.)

Lagrangeovim metodom se dobija maksimum funkcije $-\log h(x)$ pri uslovu $x \cdot x = n$, kao rešenje jednačine

$$\mathrm{grad}_x(-\log h(x) - \lambda(x \cdot x - n)) = 0 .$$

Dakle

$$x^* - \lambda x = 0 . \tag{19}$$

Iz ovoga i uslova $x \cdot x = n$ se dobija $x \cdot x^*/\lambda = n$, što prema (8) daje $\lambda = 1$, tako da iz (19) sledi da je dobijena fiksna tačka involucije.

LEMA 1.4. [26] Fiksna tačka involucije je jedinstvena.

Jedinstvenu fiksnu tačku funkcije $*$, čije je postojanje utvrđeno ovom lemom, ćemo ubuduće stalno obeležavati slovom a.

Skica dokaza. Dokaz ove leme se zasniva na sledećem pomoćnom tvrđenju: ako $H(x) = H(y)$, tada $x = y$. Ovo tvrđenje sledi iz formule

$$(x + y)^* = x^* - H(x)(x^* + y^*)^*$$

koju nećemo ovde izvoditi, pošto je nećemo više koristiti.

Sada je dokaz leme jednostavan. Naime, za svaku fiksnu tačku x važi $H(x) = I$. Ovo se dobija iz formule (18) koja tvrdi da je za $x = x^*$, $H^2(x) = I$, a kako je $H(x)$ pozitivno definitna i simetrična, tada i $H(x) = I$. Sada jedinstvenost fiksne tačke sledi na osnovu navedenog tvrđenja.

1.5. Grupa automorfizama

Sada ćemo detaljnije proučiti grupu G(V) automorfizama konusa V. Pokazaće se da ova grupa sadrži jednu podgrupu koja je prosto tranzitivna na V, što znači da za svake dve tačke kon sa postoji jedinstven automorfizam iz te podgrupe koji vezuje t dve tačke. Pošto je za utvrđivanje homogenosti nekog konusa očito dovoljno poznavati neku njegovu tranzitivnu grupu, mi ćem se ubuduće, umesto da posmatramo sve automorfizme konusa, ogran čiti samo na pomenutu podgrupu; to što je ona prosto tranzitivn će veoma uprostiti neke formule.

Neka je a jedinstvena fiksna tačka involucije (v. Lemu 1 i neka je G_a skup svih automorfizama iz G(V) koji ostavljaju a invarijantnim. Očigledno je G_a podgrupa grupe G(V); ona se zo stacionarna grupa tačke a. Dakle za svako $A \in G_a$ važi $Aa = a$. Posmatrajmo sada kvocijent grupu $G(V)/G_a$. Svaki element (kose $G(V)/G_a$ je oblika AG_a, gde je A neki automorfizam koji preslik tačku a u neku tačku x; pritom je taj koset određen na jedinst način tačkom x. Sada je jasno da je $G(V)/G_a$ prosto tranzitivn podgrupa koju smo tražili. Obeležićemo opet ovu (kvocijent) grupu sa G(V) i ubuduće uvek pod grupom automorfizama konusa p razumevati ovu podgrupu; drugim rečima smatraćemo da je grupa konusa prosto tranzitivna.

Obeležimo sada sa A(x) onaj automorfizam iz G(V) koji pr slikava a u datu tačku x. Dakle A(x) je definisan uslovom

$$(20) \qquad A(x)a = x \,.$$

LEMA 1.5. Neka je $A(x) \in G(V)$ definisan uslovom (20). Tada važ

$$(21) \qquad |A(x)| = C\, s(x)$$

(22) $A(x^*) = A^{\prime -1}(x)$

(23) <u>ako</u> $A(y)x = z$, <u>tada</u> $A(z) = A(y)A(x)$.

<u>Dokaz</u>. Za dokaz (21) dovoljno je pokazati da je funkcija $f(x) = |A(x)|$ homogena i zatim primeniti Lemu 1.1. Ako je B proizvoljan element iz G(V), tada je $Bx = y$, za neko $y \in V$ i tada $B \cdot A(x)$ preslikava a u y, dakle, prema definiciji (20)

$$B \cdot A(x) = A(y) = A(Bx)$$

i kad se pređe na detrminante, dobije se $|B|f(x) = f(Bx)$, tako da je funkcija f homogena stepena 1, i time je (21) dokazano.

Prema (20) važi $x^* = (A(x)a)^*$, pa se primenom (13) dobija $(A(x)a)^* = A^{\prime -1}(x)a^* = A^{\prime -1}(x)a$, što znači da $A^{\prime -1}(x)$ preslikava a u x^*, i zbog jedinstvenosti ovog preslikavanja sledi (22).

Dokaz (23) se dobija slično, takođe na osnovu jedinstvenosti $A(x)$.

<u>LEMA 1.6.</u> [26] <u>Stacionarna grupa G_a se sastoji iz svih automorfizama konusa koji su ortogonalna preslikavanja.</u>

<u>Dokaz</u>. Zaista, ako $W \in G_a$, tada je ovaj automorfizam oblika $A(a)$, i ako stavimo $x = x^* = a$ u (22), vidimo da je inverzno preslikavanje jednako transponovanom.

Obratno, neka važi $W \cdot W' = I$ i neka je $Wa = c$, za neko $c \in V$, tj. $W = A(c)$. Tada je prema (22) W' automorfizam koji preslikava c^* u a, pa onda $W \cdot W'$ preslikava c^* u c, i kako je po pretpostavci to preslikavanje identično, važi $c^* = c$. Kako je fiksna tačka involucije jedinstvena, sledi $c = a$, i onda $W \in G_a$.

LEMA 1.7. [26] Svaki automorfizam $A\in G(V)$ predstavlja se na jedinstven način u obliku $A = W\cdot B$, gde je $W\in G_a$, i B simetrično pozitivno definitno preslikavanje.

Dokaz. Preslikavanje $A\cdot A'$ je automorfizam konusa (jer, pošto je V samoadjungovan, A' pripada $G(V)$ zajedno sa A), koji je simetričan i pozitivno definitan. Zato je dovoljno za B uzeti pozitivni kvadratni koren iz $A\cdot A'$. Tada, ako se stavi $W = A\cdot B^{-1}$ biće $W\cdot W' = AB^{-1}(AB^{-1})' = AB^{-1}B^{-1}A' = B^{-2}AA' = I$, prema prethodnoj lemi, $W\in G_a$. Time je lema dokazana.

1.6. Primeri konusa

U ovom odeljku navodimo primere homogenih samoadjungovanih konusa (v. [30], [23]).

1) $\mathbb{R}^n_+ = \{x\in\mathbb{R}^n : x_1>0,\dots,x_n>0\}$ - pozitivni oktant u $\mathbb{R}^n$. Ovaj konus je direktan proizvod konusa niže dimenzije. Na primeru ovog konusa će se videti kako se neke osobine prenose sa sabiraka na direktan zbir. Očigledno je ovaj konus samoadjungovan. Grupa njegovih automorfizama sa sastoji iz operatoraoblika $A = D\cdot P$, gde je D dijagonalna matrica sa pozitivnim elementima na dijagonali, a P matrica koja permutuje promenljive. Grupa sastavljena samo od dijagonalnih matrica je prosto tranzitivna. Zaista, ako su x i y dve tačke iz $\mathbb{R}^n_+$, dovoljno je za A uzeti matricu sa elementima y_i/x_i $(i = 1,\dots,n)$ na dijagonali. Biće onda $y = Ax$.

Stepena funkcija (norma) (2) ovog konusa je $s_{R^n_+}(x) = x_1\dots x_n$ (jednaka je proizvodu normi sabiraka). Involucija (7) se dobija kao $x^* = (1/x_1,\dots, 1/x_n)$. Fiksna tačka involucije je $a = (1,1,\dots,1)$. Stacionarna grupa fiksne tačke G_a se sastoji iz permutacija koordinata.

2) $V^n = \{x\in R^n:\ x_1>0,\ x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2>0\}$ - <u>svetlosni konus budućnosti</u> (kružni konus). Za $n>2$ ovaj konus je nesvodljiv na konuse niže dimenzije. I ovaj konus je samoadjungovan. Grupa automorfizama sadrži one linearne transformacije koje održavaju kvadratnu formu

(24) $\quad x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_n^2$

i pravac x_1 ose ("vremenske" ose). Obeležimo sa H matricu kvadratne forme (24). Pri transformaciji sa matricom A, matrica H se transformiše u $A'HA$, dakle, $A\in G(V^n)$ ako važi $A'HA = H$ i $Ax_1>0$. (Iz prvog uslova sledi $|A| = \pm 1$.) Lako se vidi da ova preslikavanja čine grupu - to je tzv. Lorentzova grupa (v. [11]). Poznato je da je Lorentzova grupa tranzitivna na svakom "hiperboloidu" $x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2 = c>0$. Odatle sledi da je grupa automorfizama V^n, sastavljena iz Lorentzove grupe i grupe dilatacija, tranzitivna na V^n.

Stepena funkcija za ovaj konus je jednaka $s_{V^n}(x) = C\,(x_1^2-x_2^2-\dots-x_n^2)^{n/2}$. Involucija se zadaje sa $x^* = s^{-1}(x)(x_1,-x_2,\dots,-x_n)$. Fiksna tačka je $a = (1,0,\dots,0)$. Grupa G_a se sastoji iz podgrupe Lorentzove grupe za koju je kvadratna forma $x_2^2+\dots+x_n^2$ invarijantna.

3) Konus $\mathbb{P}_m$ realnih simetričnih pozitivno definitnih matrica reda m. Prostor svih realnih simetričnih matrica reda m se može identifikovati sa $\mathbb{R}^n$, gde je $n = m(m+1)/2$. Pozitivno definitne matrice čine konus u ovom prostoru. Grupa automorfizama ovog konusa je ekvivalentna potpunoj linearnoj grupi $GL(\mathbb{R}^m)$. Zaista, svakoj nesingularnoj transformaciji $A \in GL(\mathbb{R}^m)$ odgovara automorfizam konusa $\mathbb{P}_m$ koji preslikava $X \in \mathbb{P}_m$ u $A'XA$. Pošto se svaka pozitivno definitna matrica $X \in \mathbb{P}_m$ može predstaviti u obliku $X = A'A = A'IA$, ge je A neka nesingularna matrica vidi se da se svaki $X \in \mathbb{P}_m$ može dobiti iz I nekim automorfizmom konusa. Odatle sledi da je grupa automorfizama tranzitivna. Napomenimo da je skalarni proizvod u $\mathbb{R}^n$ jednak $tr(XY)$ (trag matrice XY).

Stepena funkcija u $\mathbb{P}_m$ je $s_{\mathbb{P}_m}(X) = |X|^{(m+1)/2}$. Involucija se zadaje sa $X^* = X^{-1}$ (inverzna matrica). Fiksna tačka involucije je $a = I$. Njena stacionarna grupa se može identifikovati sa $O(m)$, grupom svih ortogonalnih transformacija u $\mathbb{R}^m$; to su transformacije za koje važi $W'W = I$.

4) Konus $\mathbb{H}_m$ kompleksnih hermitskih pozitivno definitnih matrica reda m. Prostor svih kompleksnih hermitskih matrica reda m se može identifikovati sa $\mathbb{R}^n$, gde je $n = m^2$. Skup tačaka koje odgovaraju pozitivno definitnim matricama čini konus. Slično kao za $\mathbb{P}_m$, grupa automorfizama konus $\mathbb{H}_m$ se identifikuje sa potpunom kompleksnom linearnom grupom $GL(\mathbb{C}^m)$, pri čemu svakoj matrici $A \in GL(\mathbb{C}^m)$ odgovara automorfizam konusa

$X \to A^*XA$, gde je A^* hermitski spregnuta matrica. Kao i malopre i ova grupa je tranzitivna.

Stepena funkcija je $s_{H_m}(X) = |X|^m$, involucija je data sa $X^* = X^{-1}$. Fiksna tačka involucije je $a = I$. Stacionarna podgrupa ove tačke se identifikuje sa $U(m)$, unitarnim transformacijama u $GL(\mathbb{C}^m)$.

5) Konus $\mathbb{K}_m$ kvaternionskih hermitskih pozitivno definitnih matrica reda m. To je konus u prostoru svih kvaternionskih hermitskih matrica reda m; ovaj prostor se identifikuje sa $\mathbb{R}^n$, gde je $n = 2m^2 - m$. Ovde se grupa automorfizama $G(\mathbb{K}_m)$ predstavlja potpunom kvaternionskom grupom $GL(Q_m)$, pri čemu $A \in GL(Q_m)$ generiše automorfizam $X \to A^*XA$ (A^* je kvaternionski spregnuta). Ova grupa je tranzitivna.

Stepena funkcija je data sa $s_{K_m}(X) = |X|^{2m-1}$. Involucija je $X^* = X^{-1}$. Fiksna tačka je opet $a = I$, a njena stacionarna podgrupa je ortogonalna kvaternionska grupa reda m (simplektička grupa).

1.7. Primedbe

U ovoj glavi smo dobili razne osobine konusa V, koji će biti osnovni skup na kome su definisane sve funkcije, u celom radu. Postojanje tranzitivne grupe automorfizama čini da V ima mnoge osobine nasleđene od poluprave $(0,\infty)$. Sve sledeće formule, na primer, su n-dimenzionalna uopštenja jednostavnih jednodimenzionalnih jednakosti: Lema 1.1 b), Posledica 1.1, (7), (10), (11), (12), (13), (15), (16), (17), Leme 1.2, 1.3, 1.4, 1.5. Prosto tranzitivna grupa automorfizama koju smo posmatrali u 1.5 indukuje "množenje" na konusu, v. formulu (23).

U vezi sa definicijom homogene funkcije, primetimo da je ona specijalan slučaj mnogo opštije definicije (v. napr. [2 u kojoj se posmatra neka opštija oblast D, grupa njenih automorfizama G i funkcija f na D koja zadovoljava uslov $f(gx) = (j_g(x))\, f(x)$, za svako g G; pritom je $j_g(x)$ jakobijan trans formacije $x \to gx$. (Ovakve (analitičke) funkcije zovu se i automorfne forme). U našem slučaju su svi automorfizmi linea ni, tako da jakobijani ne zavise od tačke. Kada se pređe na prosto tranzitivnu grupu automorfizama, kao u 1.5, biće sve determinante matrica pozitivne, zbog toga pišemo samo |A u (1).

Kao što smo već napomenuli, osnovna literatura za svojstva konusa je [14], [16], [26], [27], [30]. Koecher [16] je prvi definisao involuciju (7). Rothaus [26] je detaljnije ispitao ovu funkciju i našao razne njene osobine, koje smo naveli u odeljku 1.4.

Raznim problemima na konusima matrica bavili su se, na primer, Bochner [6], Garding [9], Mitchell [18], v. i knjige [11], [31], [29]. Tu se mogu naći osobine konuse, koje smo naveli u 1.6.

2. O P E R A T O R I N A K O N U S U

U ovoj glavi dokazujemo neprekidnost jedne klase operatora na nekim L^p prostorima (definisanim na konusu) Operatori K su definisani u prvom odeljku kao integrali sa jezgrom koje je homogeno u odnosu na grupu konusa. U prvom odeljku se pokazuje kako se računaju vrednosti operatora K (i adjungovanog operatora) na stepenim funkcijama s^α.

U drugom odeljku se najpre definišu L^p prostori s težinom na konusu. Težine će biti stepene funkcije s^α Zatim se nalazi opšti oblik nejednakosti s težinama za operator K, odnosno veza između parametara p, q, μ i ν tak da je K neprekidan kao operator iz prostora L^p u prostor L^q.

Zatim se dokazuje opšta teorema (2.3) u kojoj je pokazano da takva nejednakost važi za K, pod uslovom da je ovaj operator primenljiv na s^α, za neko α. Dokazani su i neki specijalni slučajevi Teoreme 2.3 (Teoreme 2.1 i 2.2).

Teorema 2.3 ima centralno mesto u celom radu. U glavi 3 ćemo ovu teoremu primeniti na niz konkretnih operatora. Neke od ovih nejednakosti će zatim biti korišćene u glavi 4, koja se bavi prostorima analitičkih funkcija.

Primedba: Formule su numerisane u svakoj glavi posebno. Kada se u tekstu budemo pozivali na neku formulu iz prethodnih glava, pisaćemo u zagradi i broj glave. Na primer, (1.20) znači formula (20) iz glave 1.

2.1. Operatori sa homogenim jezgrom

U ovoj glavi posmatramo integralne operatore definisane na sledeći način

(1) $$Kf(x) = \int_V k(x,y)f(y)dy$$

gde je $k: V\times V \to \mathbb{R}_+$ data funkcija, koja se naziva jezgro operatora a f neka pozitivna funkcija na V. Ako za neko f integral (1) konvergira, kazaćemo da je operator K primenljiv na funkciju f.

U sledećem odeljku ćemo pokazati da su operatori oblika (1) neprekidni u nekim L^p prostorima s težinom. Pritom ćemo pretpostaviti da je K homogen operator, tj. da mu je jezgro k homogeno; tada je lako ovaj operator primeniti na homogene funkcije.

Definicija. Neka je V homogen konus. Jezgro $k: V\times V \to \mathbb{R}_+$ je homogeno stepena $\varkappa$ ako je

$$k(Ax, Ay) = |A|^{\varkappa} k(x,y)$$

za svako $A\in G(V)$.

Adjungovani operator operatora K se definiše sa

(2) $$K'f(y) = \int_V k(x,y)f(x)dx .$$

Očigledno su K i K' istovremeno homogeni i istog stepena. Sledeća jednostavna lema pokazuje kako homogeni operatori deluju na homogene funkcije.

LEMA 2.1. *Neka je V homogen konus. Neka je K homogen oper stepena $\varkappa$ i neka je K primenljiv na funkciju s^{α}, za neko $\alpha\in\mathbb{R}$. Tada*

(3) $$Ks^{\alpha} = C\, s^{\alpha+\varkappa+1}\,.$$

Dokaz. Dokazaćemo da je funkcija Ks^{α} homogena stepena $\alpha+\varkappa+1$, tj. da važi

(4) $$Ks^{\alpha}(Ax) = |A|^{\alpha+\varkappa+1}Ks^{\alpha}(x)$$

za svaki $A\in G(V)$. Tada će (3) slediti iz Leme 1.1.

Ako se u integral koji definiše $Ks^{\alpha}(Ax)$ uvede smena $y =$ biće

$$Ks^{\alpha}(Ax) = \int_V k(Ax,y)s^{\alpha}(y)dy = |A|\int_V k(Ax,Au)s^{\alpha}(Au)du\,.$$

Pošto je jezgro k homogeno i s^{α} homogena funkcija, dalje sled

$$Ks^{\alpha}(Ax) = |A|\,|A|^{\varkappa}|A|^{\alpha}\int_V k(x,u)s^{\alpha}(u)du = |A|^{\varkappa+\alpha+1}Ks^{\alpha}(x)$$

a to je (4). Time je lema dokazana.

Sad posmatramo vezu između operatora K i K'.

LEMA 2.2. *Neka je V homogen samoadjungovan konus. Neka je K homogen operator stepena $\varkappa$. Tada je operator K primenljiv na s^{α}, za neko $\alpha\in\mathbb{R}$, ako i samo ako je K' primenljiv na $s^{-\alpha-\varkappa-2}$.*

Dokaz. Treba pokazati da istovremeno konvergiraju integrali

$$Ks^{\alpha}(x) = \int_V k(x,y)s^{\alpha}(y)dy \quad \text{i} \quad K's^{-\alpha-\varkappa-2}(x) = \int_V k(y,x)s^{-\alpha-\varkappa-2}$$

za svako $x\in V$. Zbog homogenosti konusa i obeju funkcija dovol je to dokazati za samo jednu tačku $x = a$. Pokazaćemo

(5) $$\int_V k(a,y)s^{\alpha}(y)dy = C\int_V k(y,a)s^{-\alpha-\varkappa-2}(y)dy$$

pod uslovom da bar jedan integral konvergira. Dakle, pretpostavimo da integral na levoj strani (5) konvergira. Koristićemo osobine automorfizama $A(x)$, koji su bili uvedeni u odeljku 1.5. Prema definiciji (1.20) (formula (20) u glavi 1.) imamo $y = A(y)a$ i, prema (1.22), $a = A(y)A(y^*)a = A(y)y^*$. Zamenimo to u (5)

(6) $\int_V k(a,y)s^\alpha(y)dy = \int_V k(A(y)y^*, A(y)a)s^\alpha(y)dy$.

Pošto je k homogeno jezgro, integral (6) je jednak

$$\int_V |A(y)|^\varkappa k(y^*,a)s^\alpha(y)dy$$

i koristeći (1.21) dobijamo da je ovo dalje jednako

(7) $$C\int_V k(y^*,a)s^\varkappa(y)s^\alpha(y)dy \ .$$

Sada ćemo u ovaj integral uvesti smenu $u = y^*$; prema (1.15) jakobijan ove transformacije je jednak $C\, s^{-2}(u)$. Dakle, integral (7) je jednak

$$C\int_V k(u,a)s^{\varkappa+\alpha}(u^*)s^{-2}(u)du \ .$$

Ako još iskoristimo (1.17), dobićemo da je poslednji integral jednak

(8) $$C\int_V k(u,a)s^{-\varkappa-\alpha-2}(u)du$$

a ovo je upravo integral s desne strane (5). Pošto su svi integrali redom od (6) do (8) jednaki, time je dokazano (5) i time je dokaz leme završen.

2.2. (L^p, L^q) nejednakosti s težinom

Osnovini cilj ove glave je ispitivanje neprekidnosti hom genih operatora (1) u nekim L^p prostorima s težinom. To su prostori definisani na sledeći način.

Neka je $1 \leq p \leq \infty$ i neka je $\mu \in \mathbb{R}$. Prostor svih funkcija $f: V \longrightarrow \mathbb{R}$, za koje važi da je

$$(9) \qquad \int_V |f(x)|^p s^{\mu p-1}(x)dx < \infty$$

obeležavaćemo sa $L^p(V)$. Ovo je Banachov prostor sa normom

$$(10) \qquad \|f\|_{p,\mu} = \left(\int_V |f(x)|^p s^{\mu p-1}(x)dx\right)^{1/p}.$$

Za $p = \infty$ se, kao i obično, podrazumeva da je umesto (10)

$$\|f\|_{\infty,\mu} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in V} |f(x)|\, s^{\mu}(x)$$

Funkcija $s^{\mu p-1}$ u (9) se naziva težina. Stepen se uzima u ovom obliku samo zato što će to pojednostaviti neke kasnije oznake. Razlog tome je što je mera $s^{-1}(x)dx$ invarijantna u odnosu na automorfizme konusa.

Kad nema težina, tj. kada je $\mu = 1/p$, pisaćemo samo $L^p($ i $\|f\|_p$; dakle, $\|f\|_p = \|f\|_{p,1/p}$.

Naš osnovni cilj je određivanje indeksa p,q,μ,ν za koj će operator K biti neprekidan iz prostora $L^p_\mu(V)$ u prostor $L^q_\nu($ tj. nalaženje indeksa za koje će važiti nejednakost

$$(11) \qquad \|Kf\|_{q,\nu} \leq C\, \|f\|_{p,\mu}.$$

Kako je operator K homogen, lako je naći jedan neophodan uslov koji p,q,μ,ν moraju da zadovoljavaju da bi važilo (11).

<u>LEMA 2.3.</u> <u>Neka je</u> V <u>homogen konus</u>. <u>Neka je</u> K <u>homogen operator stepena</u> $\varkappa$. <u>Ako za</u> K <u>važi nejednakost</u> (11), <u>tada je</u>

(12) $$\varkappa + 1 + \nu - \mu = 0$$

<u>Primedba.</u> U uslovu (12) samo prividno ne učestvuju p i q; njihove vrednosti su određene time što su težine uzete u specijalnom obliku $s^{\mu p-1}$ i $s^{\nu q-1}$.

<u>Dokaz.</u> Neka je $A \in G(V)$. Obeležimo sa τ_A "dilataciju" $\tau_A \circ f(x) = f(Ax)$. Tada važi

(13) $$\|\tau_A \circ f\|_{p,\mu} = |A|^{-\mu}\|f\|_{p,\mu} .$$

Zaista, po definiciji je

$$\|\tau_A \circ f\|^p_{p,\mu} = \int_V |f(Ax)|^p s^{\mu p-1}(x)dx .$$

Uvedemo smenu $Ax = u$ i iskoristimo homogenost funkcije s, biće

$$\|\tau_A \circ f\|^p_{p,\mu} = |A|^{-(\mu p-1)-1} \int_V |f(u)|^p s^{\mu p-1}(u)du$$

a to je (13). Analogna jednakost važi, naravno, i za $L^q_\nu(V)$.

Dalje, na sličan način, samo koristeći homogenost jezgra k, može se pokazati

(14) $$K(\tau_A \circ f) = |A|^{-\varkappa-1}\tau_A \circ Kf .$$

Primetimo još da je inverzan operator operatora τ_A jednak τ_A^{-1} i prema tome relacije slične (13) i (14) važe i za ovaj operator. Na osnovu (14) predstavlja se operator K u obliku

$$Kf = |A|^{\varkappa+1}\tau_A^{-1} \circ K(\tau_A \circ f) .$$

Primenom (13) na τ_A^{-1} (sa $p = q$, $\mu = \nu$) dobijamo iz poslednje jednakosti

(15) $$\|Kf\|_{q,\nu} = |A|^{\varkappa+1}|A|^{\nu}\|K(\tau_A\circ f)\|_{q,\nu} .$$

Sad koristimo pretpostavku da K zadovoljava nejednakost (11). Slediće iz (15)

$$\|Kf\|_{q,\nu} \leq C\ |A|^{\varkappa+1+\nu}\|\tau_A\circ f\|_{p,\mu}$$

i, najzad, još jednom primenom (13) dobijamo

(16) $$\|Kf\|_{q,\nu} \leq C\ |A|^{\varkappa+1+\nu-\mu}\|f\|_{p,\mu} .$$

Tako smo iz uslova (11) dobili da važi (15) za svako $A\in G(V)$. Kako po pretpostavci konstanta C u (11) ne zavisi od A, mora biti $\varkappa+1+\nu-\mu = 0$, a to je (12). Time je lema dokazana.

Sada ćemo još pokazati da je u nejednakosti (11) nemoguće $p > q$.

LEMA 2.4. *Neka je K homogen operator stepena $\varkappa$ za koji važ (11). Ako je $p > q$, tada je $Kf = 0$, za svako f.*

Dokaz. Posmatramo τ_A, dilataciju definisanu u dokazu prethod leme, u specijalnom slučaju $A = \lambda I$; stavimo $f_\lambda = \tau_{\lambda I}\circ f$. Tada prema (13)

$$\|f_\lambda\|_{p,\mu} = \lambda^{-n\mu}\|f\|_{p,\mu} .$$

Ako stavimo $g = f + f_\lambda$, tada je $\|g\|^p_{p,\mu} = \|f\|^p_{p,\mu} + \|f_\lambda\|^p_{p,\mu}$, d

(17) $$\|g\|_{p,\mu} = (1 + \lambda^{-n\mu p})^{1/p}\|f\|_{p,\mu} .$$

Na sličan način, koristeći (14), dobićemo da je

$$(18)\qquad \|Kg\|_{q,\nu} = \|Kf\|_{q,\nu}(1+\lambda^{-nq(\varkappa+\nu+1)})^{1/q}\ .$$

Primetimo da su ispunjeni uslovi prethodne leme i da onda važi $\varkappa+\nu+1=\mu$. Iz (18) sledi $\|Kf\|_{q,\nu} = \|Kg\|_{q,\nu}(1+\lambda^{-nq\mu})^{-1/q}$.
Na ovo primenimo pretpostavku (11), a zatim (17); biće

$$\|Kf\|_{q,\nu} \leq C\ \|g\|_{p,\mu}(1+\lambda^{-nq\mu})^{-1/q} = C\cdot\|f\|_{p,\mu}(1+\lambda^{-nq\mu})^{1/p-1/q}$$

Ako pustimo da $\lambda\to 1$, biće

$$\|Kf\|_{q,\nu} \leq C\ 2^{1/p-1/q}\ \|f\|_{p,\mu}\ .$$

Tako smo iz pretpostavke da važi (11) sa konstantom C, dobili da važi ista nejednakost sa konstantom Cd, gde je $d = 2^{1/p-1/q} < 1$. Ponavljanjem postupka dobija se da nejednakost važi i sa konstantom Cd^k, za svaki k, i pošto $d^k\to 0$, kad $k\to\infty$, dobija se da je operator K trivijalan. Time je lema dokazana.

Dosada smo pokazali da je za homogen operator K moguća samo nejednakost oblika

$$(19)\qquad \left(\int_V\left(\frac{Kf(x)}{s^{\varkappa+1}(x)}\right)^q s^{\mu q-1}(x)dx\right)^{1/q} \leq C\left(\int_V f^p(x)s^{\mu p-1}(x)dx\right)^{1/p}$$

gde je $1\leq p\leq q\leq\infty$. (Primetimo da je, pošto je operator K pozitivan, dovoljno posmatrati samo pozitivne funkcije f.) Ovo je dobijeno samo na osnovu homogenosti operatora K. Sada će biti dobijeni dovoljni uslovi koje K treba da zadovoljava da bi za neke p, q i μ važilo (19). Ovi uslovi zavise od toga za koje su $\alpha\in\mathbb{R}$ operatori K i K′ primenljivi na funkciju s^α.

Najpre ćemo (19) dokazati u najprostijem obliku p = q i bez težina (Teorema 2.1). Zatim ćemo iz ovog slučaja izvesti slučaj $p < q$, još uvek bez težina (Teorema 2.2) i na kraju ćemo pokazati kako se iz nejednakosti bez težina lako dobijaju nejednakosti s težinama (Teorema 2.3).

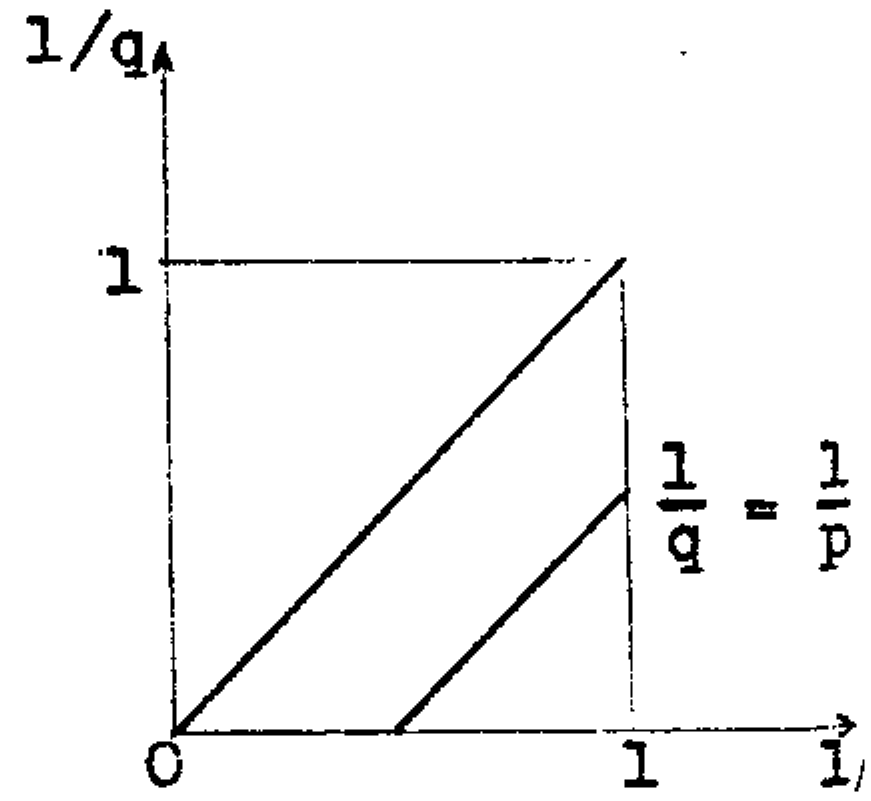
Da bi se izgubila težina u (19) treba da bude $-(\kappa+1)q + \mu q - 1 = 0$ i $\mu p - 1 = 0$, a odatle sledi $-(\kappa+1)q + q/p - 1 = 0$ tj.

(20) $$\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \kappa - 1 .$$

To znači da je (20) neophodan uslov za

(21) $$\|Kf\|_q \leq C \|f\|_p .$$

Pošto je $0 \leq 1/p \leq 1$ i $0 \leq 1/q \leq 1$ i $p \leq q$, sledi $-1 \leq 1/q - 1/p \leq 0$, dakle $-1 \leq \kappa \leq 0$. To znači da parovi tačaka $(1/p, 1/q)$ za koje važi (21) pripadaju odsečku prave (20) koji je sadržan u jediničnom kvadratu, kao na slici.



Kako je $p \leq q$, dolaze u obzir samo ovakve prave ispod glavne dijagonale. Slučaj $p = q$ je ekvivalentan sa $\kappa = -1$, što znači da samo homogeni operatori stepena -1 mogu da zadovoljavaju (L^p, L^p) nejednakost bez težina. Ovaj ćemo slučaj prvo razmotriti.

TEOREMA 2.1. *Neka je V homogen samoadjungovan konus. Neka je* $1 \leq p \leq \infty$. *Neka je K homogen operator stepena* -1. *Ako*

(22) $$\int_V k(a,y)s^{-1/p}(y)dy < \infty$$

onda

(23) $$\|Kf\|_p \leq C \|f\|_p .$$

<u>Dokaz</u>. Prema Lemi 2.2 (v. (5)) uslov (22) je ekvivalentan sa

$$(24)\qquad \int_V k(y,a)s^{1/p+1-2}(y)dy = \int_V k(y,a)s^{-1/p'}(y)dy < \infty .$$

Na osnovu Leme 2.1 pošto je, prema (22) operator K primenljiv na $s^{-1/p}$, imamo da je

$$(25)\qquad Ks^{-1/p}(x) = \int_V k(x,y)s^{-1/p}(y)dy = C\, s^{-1/p}(x) .$$

I slično, iz (24) i Leme 2.1 sledi da je

$$(26)\qquad K's^{-1/p'}(x) = \int_V k(y,x)s^{-1/p'}(y)dy = C\, s^{-1/p'}(x) .$$

Neka je prvo $1<p<\infty$. Primenićemo na izraz kojim se definiše Kf Hölderovu nejednakost, na sledeći način

$$Kf(x) = \int_V k(x,y)f(y)dy = \int_V k^{1/p}\; f\; s^{1/pp'}\; k^{1/p'}\; s^{-1/pp'}$$

$$\leq \left(\int_V k(x,y)f^p(y)s^{1/p'}(y)dy\right)^{1/p}\left(\int_V k(x,y)s^{-1/p}(y)dy\right)^{1/p'}$$

Sada se na poslednji integral primeni (25). Tada će slediti

$$Kf(x) \leq C\, s^{-1/pp'}(x)\ \left(\int_V k(x,y)f^p(y)s^{1/p'}(y)dy\right)^{1/p}.$$

Ako se ova nejednakost stepenuje sa p i integrali po V, biće

$$\int_V (Kf(x))^p dx \leq C \int_V s^{-1/p'}(x)\int_V k(x,y)f^p(y)s^{1/p'}(y)dydx .$$

Sad primenimo Fubinijevu teoremu na dvostruki integral

$$\int_V (Kf(x))^p dx \leq C \int_V f^p(y)s^{1/p'}(y)\ \int_V k(x,y)s^{-1/p'}(x)dx\, dy .$$

Konačno na unutrašnji integral primenimo (26) (gde su x i y zamenili mesta), pa će slediti

$$\int_V (Kf(x))^p dx \leq C \int_V f^p(y) s^{1/p'}(y) s^{-1/p'}(y) dy = C \int_V f^p(y) dy.$$

Time je (23) dokazano.

Neka je $p = 1$. Uslov (26), koji je, kao što smo videli, ekvivalentan sa (22), postaje

(27) $$\int_V k(y,x)dy = C .$$

Prema tome, samo primenom Fubinijeve teoreme dobije se

$$\int_V Kf(y)dy = \int_V \int_V k(y,t)f(t)dt\, dy = \int_V f(t) \int_V k(y,t)dy\, d$$

$$\leq C \int_V f(t)dt .$$

(Primedba: Ovde se lako vidi i da je uslov (27) neophodan. Zaista, da bi poslednja nejednakost važila za svako $f \in L^1(V)$ potrebno je i dovoljno, zbog dualnosti prostora L^1 i L^∞, da funkcija $\int_V k(y,t)dy \in L^\infty(V)$, a to je (27).)

Neka je $p = \infty$. Sada ćemo uzeti uslov (25), koji glasi

$$\int_V k(x,y)dy = C .$$

Imamo prostu ocenu

$$Kf(x) \leq \sup|f(y)| \int_V k(x,y)dy \leq C \|f\|_\infty .$$

Odavde sledi tvrđenje. Time je teorema dokazana.

TEOREMA 2.2. *Neka je V homogen i samoadjungovan konus. Neka je $1 \leq p \leq q \leq \infty$ i neka je K homogen operator stepena $\varkappa$ i neka važi $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \varkappa - 1$. Ako*

(28) $$\int_V k^{-1/\varkappa}(a,y) s^{1/\varkappa q}(y)dy < \infty$$

tada

(29) $$\|Kf\|_q \leq C \|f\|_p .$$

Dokaz. Slučaj $p = q$ je sadržan u prethodnoj teoremi; treba, dakle, dokazati samo za $p < q$.

Neka je prvo $1 \leq p < q < \infty$ ili $1 < p < q \leq \infty$; tada je $-1 < \varkappa < 0$.

Stavimo

$$(30) \qquad \alpha = -\frac{1}{\varkappa}$$

tada je $\alpha > 1$ i $\frac{1}{\alpha'} = 1 + \varkappa$, dakle

$$(31) \qquad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha'} .$$

Sada ćemo primeniti Hölderovu nejednakost sa stepenom α na sledeći izraz

$$(32) \qquad \begin{aligned} Kf(x) &= \int_V k(x,y) f^{p/q}(y) f^{1-p/q}(y)dy \\ &\leq \left(\int_V k^{\alpha}(x,y) f^{p\alpha/q}(y)dy\right)^{1/\alpha} \left(\int_V f^{(1-p/q)\alpha'}(y)dy\right)^{1/\alpha'}. \end{aligned}$$

Prema (31) eksponent u poslednjem integralu je jednak $(1-p/q)\alpha'$ $= p(1/p-1/q)\alpha' = p(1/\alpha')\alpha' = p$, pa (32) postaje

$$(33) \qquad Kf(x) \leq \left(\int_V k^{\alpha}(x,y) f^{p\alpha/q}(y)dy\right)^{1/\alpha} \|f\|_p^{p/\alpha'}.$$

Ako sad obeležimo operator sa jezgrom k^{α} sa K_{α}, vidimo da je K_{α} homogen stepena $\varkappa\alpha = -1$ (prema (30)), pa ćemo na ovaj operator primeniti Teoremu 2.1 ako još dokažemo da je uslov (22) ispunjen. Na osnovu (28), koji se prema (30) može napisati kao

$$\int_V k^{\alpha}(a,y) s^{-\alpha/q}(y)dy < \infty$$

vidimo da je uslov (22) (u kome umesto p stoji $r = q/\alpha$) ispunjen za operator K_{α}. Dakle sad primenimo Teoremu 2.1. (sa $p = r$) i dobijemo

$$(34) \qquad \|K_{\alpha} g\|_r \leq C \|g\|_r .$$

Vratimo se sada na (33). Ako stavimo $f^{p\alpha/q} = g$, onda je $g^r = g^{q/\alpha} = f^p$ i otuda

(35) $$\|g\|_r^r = \|f\|_p^p \,.$$

Sa uvedenim oznakama nejednakost (33) postaje

$$Kf(x) \leq \left(K_\alpha g(x)\right)^{1/\alpha} \|f\|_p^{p/\alpha'}.$$

Ovu nejednakost stepenujemo sa q i integralimo po V

(36) $$\int_V (Kf(x))^q dx \leq \|f\|_p^{pq/\alpha'} \int_V (K_\alpha g(x))^{q/\alpha} dx = \|f\|_p^{pq/} \|K_\alpha g\|_r^r$$

(jer je $q/\alpha = r$). Sad primenimo redom (34) i (35) na (36):

$$\|Kf\|_q^q \leq C \|f\|_p^{pq/\alpha'} \|g\|_r^r = C \|f\|_p^{pq/\alpha'} \|f\|_p^p$$

i kako je $pq/\alpha' + p = pq(1/\alpha' + 1/q) = pq/p$, prema (31), onda j poslednja nejednakost ustvari

$$\|Kf\|_q^q \leq C \|f\|_p^q$$

i time je (29) dokazano.

Ostao je još slučaj $p = 1$, $q = \infty$. Tada je $-\varkappa = 0$ i (28) treba interpretirati na uobičajeni način: pošto je $-1/\varkappa = \infty$, onda (2 postaje

(37) $$\operatorname*{ess\,sup}_{y \in V} k(a,y) = C$$

Pošto je $\varkappa = 0$, onda iz (37) sledi i $k(x,y) \leq C$, za sve $x,y \in V$. Odatle se lako dobija

$$\|Kf\|_\infty \leq C \|f\|_1 \,.$$

Time je teorema dokazana.

Na kraju još ostaje da se dokaže nejednakost sa težinom. Ona će lako slediti na osnovu dokazanog, pomoću sledeće leme.

LEMA 2.5. *Za operator* K *sa jezgrom* k *važi sledeća nejednakost s težinama*

(38) $$\|Kf\|_{q,\beta} \leq C\,\|f\|_{p,\alpha}$$

ako i samo ako za operator K_1 *sa jezgrom*

$$k_1(x,y) = \frac{k(x,y)s^{\beta-1/q}(x)}{s^{\alpha-1/p}(y)}$$

važi nejednakost bez težina

(39) $$\|K_1 f\|_q \leq C\,\|f\|_p \,.$$

Dokaz. Ako u (38) uvedemo smenu $f^p s^{\alpha p-1} = g^p$ dobićemo da važi

$$\|K_1 g\|_q \leq C\,\|g\|_q$$

a to je (39). Time je lema dokazana.

TEOREMA 2.3. *Neka je* V *homogen samoadjungovan konus. Neka je* $1 \leq p \leq q \leq \infty$. *Neka je* K *homogen operator stepena* $\varkappa$. *Stavimo* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$. *Ako za* μ *važi*

(40) $$\int_V k^r(a,y)s^{-r\mu+r-1}(y)dy < \infty$$

tada

(41) $$\|Kf\|_{q,\mu-\varkappa-1} \leq C\,\|f\|_{p,\mu}\,.$$

Dokaz. Pre svega, primetimo da je (41) ustvari nejednakost (19), dakle prema diskusiji koja je prethodila (19), jedini mogući oblik (L^p, L^q) nejednakosti.

Prema Lemi 2.5 nejednakost (41) je ekvivalentna sa

(42) $$\|K_1 f\|_q \leq C\,\|f\|_p$$

pri čemu je jezgro operatora K_1 jednako

(43) $$k_1(x,y) = \frac{k(x,y)s^{\mu-\kappa-1-1/q}(x)}{s^{\mu-1/p}(y)}$$

pa je stoga dovoljno dokazati (42). Primetimo da je stepen homogenosti jezgra k_1 jednak

(44) $$\kappa_1 = \kappa+\mu-\kappa-1-1/q-\mu+1/p = -1-1/q-1/p' = -1/r\ .$$

Ako u uslov (40) zamenimo (43) biće

$$\infty > \int_V k^r(a,y)s^{-r\mu+r-1}(y)dy = C\int_V k_1^r(a,y)s^{r(\mu-1/p)}(y)s^{-r\mu+r-1}$$

odnosno, pošto je $r(\mu-1/p)-r\mu+r-1 = r(-1/p+1-1/r) = r(1/p'-1/r$ $= r(-1/q)$, onda je

$$\int_V k_1^r(a,y)s^{-r/q}(y)dy < \infty .$$

To znači, s obzirom da je , prema (44), $r = -1/\kappa_1$, gde je stepen homogenosti jezgra k_1, da jezgro k_1 zadovoljava uslov (28) Teoreme 2.2 (a prema (44) važi i $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \kappa_1 - 1$), pa prim nom te teoreme na operator K_1 dobijamo da važi (42), a to je, kao što je rečeno, ekvivalentno sa (41). Time je teorema dokazana.

2.3. Primedbe

Osnovni cilj ove glave bio je da pokaže šta se može zaključiti o obliku nejednakosti za neki operator, samo na osnovu njegove homogenosti. Iz dobijenog sledi, naprimer, da operatori sa istim stepenom homogenosti zadovoljavaju slične nejednakosti (v. i glavu 3).

Ideja korišćenja homogenosti u Lemama 2.3.i 2.4 je dobro poznata za "običnu" homogenost (v. napr. [8, §53]).

Teorema 2.1, za $n = 1$, je klasična; nalazi se u knjizi Hardy, Littlewood, Polya [15].

Metod dokaza teorema iz ove glave je izuzetno jednostavan (svodi se na primenu Hölderove nejednakosti), pa su teoreme ovog tipa dokazane,za razne specijalne operatore, na veoma mnogo mesta u literaturi i primenjuju se u najrazličitijim situacijama. Samo za Hardyevu nejednakost (odeljak 3.2), naprimer, postoji obimna literatura (v. [19]).

Specijalan slučaj $p = q$ Teoreme 2.3 posmatrali smo u [21].

3. PRIMERI OPERATORA

U ovoj glavi će opšta teorema (2.3) iz prethodne glave biti primenjena na neke specijalne operatore. Za to je potrebno proveriti da ovi operatori zadovoljavaju uslov (2.40) pomenute teoreme, tj. treba pokazati da konvergiraju neki integrali (od homogenih funkcija na konusu). To će biti učinjeno u prvom odeljku. Biće prikazan postupak kojim se navedeni integrali po konusu svode na obične uzastopne integrale; pa se onda lako određuju vrednosti parametra α, za koje integral konvergira.

Pokazuje se da ove vrednosti zavise od ranga konusa V (koji je, grubo govoreći, jednak dimenziji maksimalnog mnogougaonog konusa sadržanog u V). Ova činjenica će imati posledice u celom daljem radu: sve nejednakosti koje dobijamo zavisiće od ranga konusa. Pritom, kad je rang jednak n (kad je konus mnogougaoni), onda će uslovi biti uvek isti kao u jednodimenzionalnom slučaju.

U svim ostalim odeljcima ove glave posmatraju se primeri operatora i za svaki dobija odgovarajuća nejednakost s težinama (kao direktna posledica Teoreme 2.3).

Svi ovi operatori predstavljaju n-dimenzionalna uopštenja nekih klasičnih operatora i sve dobijene nejednakosti se za $n = 1$ svode na poznate nejednakosti.

3.1. Izračunavanje nekih integrala

U prethodnoj glavi su dobijene izvesne opšte nejednakosti za operatore (2.1) sa homogenim jezgrom (Teorema 2.3). Pokazano je da su takvi operatori neprekidni u nekim L^p prostorima, pod uslovom da su primenljivi na neki stepen funkcije s^α, tj. pod uslovom da konvergira integral (2.40)[1] (v. i (2.22) i (2.28)).

U ovom odeljku pokazujemo kako se računaju ti integrali. Dakle, posmatraćemo integral oblika

$$(1) \qquad \int_V k(a,x)s_V^\alpha(x)dx$$

pri čemu je jezgro k "dovoljno dobro" (ne utiče na konvergenciju integrala), i naći za koje α ovaj integral konvergira. U oznaci s_V ističemo da se radi o normi konusa V (v. definiciju (1.2)), s obzirom da ćemo raditi sa više različitih konusa istovremeno.

Najprostiji slučaj je, očito, $V = \mathbb{R}^n_+$. Norma ovog konusa je $s_n(x) = x_1 \ldots x_n$ (gde smo stavili s_n umesto $s_{\mathbb{R}^n}$), fiksna tačka a je $a_o = (1,1,\ldots,1)$, pa integral (1) izgleda

$$(2) \qquad \int_{\mathbb{R}^n_+} k(a_o,x)(x_1 \ldots x_n)^\alpha dx \quad .$$

Jasno je da ovaj integral konvergira za $\alpha > -1$ (pod uslovom da je k dovoljno dobro jezgro). Pokazaće se da u opštem slučaju pri izračunavanju integrala (1) osnovnu ulogu igra oblik grupe

[1] formula (40) iz glave 2 (v. Primedbu na str. 22)

automorfizama konusa. Napomenimo zato da je $\mathbb{R}^n_+$ primer konusa čija je grupa G(V) sastavljena iz samih pozitivno definitnih transformacija. Biće štaviše matrice A(x) dijagonalne sa elementima $x_1,\dots,x_n$, pa je G(V) abelova.

Drugi jednostavan primer je mnogougaoni konus, dobijen iz $\mathbb{R}^n_+$ nekom rotacijom U, tj. $V = U\mathbb{R}^n_+$ (pošto posmatramo samo samoadjungovane konuse, ne može se umesto ortogonalne transfo: macije U uzeti neka opštija). Integral (1) se računa smenom promenljive $x = Ut$. Primetimo da je $s_V(x) = s_n(U'x)$ i da je $a = Ua_o$, tako da integral (1) postaje

$$(3) \qquad \int_{\mathbb{R}^n_+} k(Ua_o,Ut)(t_1\dots t_n)^\alpha dt \ .$$

Ovaj integral je istog oblika kao (2), dakle konvergira za $\alpha >$ Pošto se automorfizmi konusa $V = U\mathbb{R}^n_+$ dobijaju kao $UA(x)U'$, gd $A(x)\in G(\mathbb{R}^n_+)$, i grupa G(V) se sastoji samo od pozitivno definit transformacija. To je ujedno i jedini konus sa ovom osobinom Primetimo da je u ovom slučaju grupa G_a stabilnosti fiksne ta trivijalna (tačnije konačna - sastoji se iz permutacija ivica konusa).

Sada posmatramo opšti slučaj konusa sa netrivijalnom gr G_a. Pokazaćemo kako se integral (1) svodi na integral istog po mnogougaonom konusu manje dimenzije.

Pre svega, pošto je G_a netrivijalna, onda se dejstvom t grupe sve tačke konusa mogu dovesti u jedan potprostor $\mathbb{R}^m$, gd je $m < n$. Minimalno m za koje ovo važi naziva se rang konusa Fiksirajmo jedan potprostor $\mathbb{R}^m$ sa navedenom osobinom i obelež: $V_m = \mathbb{R}^m \cap V$. Primetimo da je $a \in V_m$. Konus V_m ćemo nazivati (maksimalni) mnogougaoni potkonus konusa V. Opravdanje za tc je u sledećoj lemi.

<u>LEMA 3.1.</u> <u>Grupa automorfizama konusa V_m se sastoji iz pozitivno definitnih transformacija. Drugim rečima, V_m je mnogougaoni konus.</u>

<u>Dokaz.</u> Neka je $A = A(x)$ automorfizam konusa V. Prema Lemi 1.7. A se predstavlja kao $A(x) = W(x)B(x)$, gde je $W(x) \in G_a$ i $B(x)$ pozitivno definitna. S druge strane, prema definiciji V_m, za svako $x \in V$ postoji $\bar{x} \in V_m$ i neka rotacija $\bar{W}(x) \in G_a$ tako da je $\bar{x} = \bar{W}(x)x$.

$$(4) \qquad \bar{x} = \bar{W}(x)x .$$

Prema tome $\bar{x} = \bar{W}(x)A(x)a = \bar{W}(x)W(x)B(x)a$ što se može napisati i u obliku

$$\bar{x} = \bar{W}(x)W(x)B(x)W'(x)\bar{W}'(x)a$$

(s obzirom da je $W'\bar{W}' \in G_a$, tj. $W'\bar{W}'a = a$), odnosno

$$(5) \qquad \bar{x} = \bar{B}(x)a$$

gde smo stavili $\bar{B} = (\bar{W}W)B(\bar{W}W)'$. Pošto je $\bar{W}W \in G_a$, dakle rotacija, onda je sa B i transformisana matrica $\bar{B}$ pozitivno definitna. Prema (5) vidimo da je ustvari $\bar{B}(x) = A(\bar{x})$. Nije teško videti da sopstvene vrednosti pozitivno definitnog automorfizma pripadaju izvodnicama konusa (ili su na njih ortogonalne), tako da je potprostor određen sa V_m invarijantan za sve automorfizme (4), pa restrikcije ovih preslikavanja na V_m čine tranzitivnu grupu automorfizama na V_m. Dakle, V_m ima tranzitivnu grupu sastavljenu iz pozitivno definitnih matrica i iz toga sledi da je V_m mnogougaoni konus.

U sledećoj lemi se vidi odnos između restrikcije norme s_V konusa V na potkonus V_m i norme s_{V_m} tog potkonusa.

<u>LEMA 3.2.</u> *Neka je V konus ranga m u $\mathbb{R}^n$ i neka je V_m njegov mnogougaoni potkonus. Tada za svako $\bar{x}\in V_m$ važi*

(6) $$s_V(\bar{x}) = C(s_{V_m}(\bar{x}))^{n/m}.$$

<u>Dokaz.</u> Primetimo da se izborom konstante u (5) mogu obe norm s_V i s_{V_m} normirati tako da bude $s_V(a) = s_{V_m}(a) = 1$. Tada za neko $\bar{x}\in V_m$ važi $s_V(\bar{x}) = 1$ ako i samo ako je $s_{V_m}(\bar{x}) = 1$. To sledi iz homogenosti obeju funkcija: $s_V(\bar{x}) = |A(\bar{x})|\, s_V(a)$ i $s_{V_m}(\bar{x}) = |A(\bar{x})|\, s_{V_m}(a)$. Sada za $\bar{x}\in V_m$ stavimo $\lambda = (s_{V_m}(\bar{x}))^{1/m}$: $\bar{x}_o = \bar{x}/\lambda$. Tada je $s_{V_m}(\bar{x}_o) = 1$ i onda važi

$$s_V(\bar{x}) = s_V(\lambda\bar{x}_o) = \lambda^n s_V(\bar{x}_o) = \lambda^n = (s_{V_m}(\bar{x}))^{n/k}$$

(jer je prema pokazanom, $s_V(\bar{x}_o) = 1$). Time je lema dokazana.

Sada smo spremni da računamo integral (1) za proizvoljn (homogeni samoadjungovani) konus.

<u>LEMA 3.3.</u> *Neka je V konus ranga m u $\mathbb{R}^n$ i neka je V_m njegov mnogougaoni potkonus. Tada je integral*

(1) $$\int_V k(a,x)s_V^{\alpha}(x)dx$$

ekvikonvergentan sa

(7) $$\int_{V_m} k(a,\bar{x})(s_{V_m}(\bar{x}))^{\alpha n/m}d\bar{x}$$

i ekvikonvergentan sa

(8) $$\int_{\mathbb{R}_+^m} k(Ua_o,Ut)(t_1\ldots t_m)^{\alpha n/m}dt$$

gde je U rotacija koja preslikava $\mathbb{R}_+^m$ u V_m.

Primedba. Iz ove leme se vidi da će integral (1) konvergirati (kada je k dovoljno dobro) za $\alpha > -m/n$. Uvedimo oznaku

$$(9) \qquad \tau = \tau(V) = \frac{m}{n} = \frac{\mathrm{rang}V}{n}$$

za ovaj broj koji će se često javljati. Napomenimo da, pošto je očigledno $2 \leq m \leq n$, onda je $2/n \leq \tau \leq 1$. Slučaj $\tau = 1$ odgovara mnogougaonom konusu, a slučaj $\tau = 2/n$ svetlosnom konusu. Za sve matrične konuse je rang jednak m, tako da je

$\tau(P_m) = 2/(m+1)$, $\tau(H_m) = 1/m$ i $\tau(K_m) = 1/(2m-1)$.

Dokaz. Kao što je pokazano u odeljku 1.5 funkcija $A: x \to A(x)$ definisana u (1.20) uspostavlja uzajamno jednoznačnu korespondenciju između tačaka konusa V i elemenata njegove grupe automorfizama G(V) (koja je prosto tranzitivna). Tako da se V može identifikovati sa grupom G(V) i umesto integracije po V posmatrati integracija po grupi G(V). Prema (4) se svaka tačka $x \in V$ predstavlja u obliku $x = W\bar{x}$, gde $\bar{x} \in V_m$, a W je neka rotacija iz G_a. Tada integral (1) možemo pisati u obliku

$$(10) \quad \int_V k(a,x)s_V^\alpha(x)dx = \int_{V_m}\int_{G_a} k(a,W\bar{x})s_V^\alpha(W\bar{x})dW\, d\bar{x}$$

gde je dW invarijantna mera na grupi G_a (notacija nije sasvim dosledna; integraciju po grupi pozitivno definitnih automorfizama V_m smo predstavili kao integraciju po V_m).

Podintegralna funkcija u (10) je invarijantna u odnosu na grupu G_a. Zaista, pošto je s_V homogena funkcija i k homogeno jezgro (stepena $\varkappa$, recimo), važi

$$k(a,W\bar{x})s_V^\alpha(W\bar{x}) = k(Wa,W\bar{x})s_V^\alpha(W\bar{x}) = |W|^{\varkappa+\alpha}k(a,\bar{x})s_V^\alpha(\bar{x}) = k(a,\bar{x})s_V^\alpha(\bar{x})$$

jer je $|W| = 1$. Stoga je

$$\int_{G_a} k(a,W\bar{x})s_V^{\alpha}(W\bar{x})dW = k(a,\bar{x})s_V^{\alpha}(\bar{x})$$

i kad to zamenimo u (10), biće

$$\int_V k(a,x)s_V^{\alpha}(x)dx = \int_{V_m} k(a,\bar{x})s_V^{\alpha}(\bar{x})d\bar{x}$$

Sad zamenimo restrikciju funkcije s_V (na V_m) njenim izrazom (6) iz Leme 3.2 i dobijemo upravo integral (7). Konačno, integral (7) po mnogougaonom konusu se svodi na integral (8) po pozitivnom oktantu E_+^m pomoću rotacije U, na isti način kao što je na početku ovog odeljka integral (1) sveden na (3). Time je lema dokazana.

3.2. Hardyev operator

Kao prvi primer operatora (2.1) posmatramo Hardyev operator

(11) $$Hf(x) = \int_{\langle 0,x\rangle} f(t)dt$$

(gde se, v. definiciju u 1.1, integral uzima po intervalu u odnosu na uređenje indukovano konusom V). Ovaj operator ima jezgro

$$k(x,y) = \begin{cases} 1 & y <_V x \\ 0 & \text{inače} \end{cases}$$

Ovo jezgro je homogeno stepena 0. Zaista, za svako A G(V), pošto automorfizmi čuvaju uređenje, važi

$$k(Ax,Ay) = 1 \Leftrightarrow Ay <_V Ax \Leftrightarrow y <_V x \Leftrightarrow k(x,y) = 1 .$$

Sada ćemo primeniti Teoremu 2.3 da bismo videli kada je ovaj operator neprekidan u nekim L^p prostorima s težinom. Treba pokazati da je uslov (2.40) te teoreme ispunjen. To će slediti iz sledeće leme ($\tau = \tau(V)$ je definisan u (9)).

LEMA 3.4. *Ako je* $\alpha > -\tau$, *tada integral*

$$\int_{\langle 0,x\rangle} s^{\alpha}(y)dy$$

konvergira. Odatle sledi $Hs^{\alpha}(x) = C\, s^{\alpha+1}(x)$.

Primetimo da je za konus $\mathbb{R}^n_+$, kada je $\tau = 1$, uslov u lemi isti kao za jednodimenzionalan slučaj; za sve druge konuse - sa manjim rangom - biće donja granica za α veća (veća od -1). Ovakva situacija javljaće se kao pravilo i u mnogim sličnim slučajevima.

Pošto će Lema 3.4 slediti kao specijalan slučaj iz Leme 3.6 (v. odeljak 3.4) nećemo je sada dokazivati. Uopšte, Hardyev operator (integralni operator prvog reda) je specijalan slučaj Riemann-Liouvilleovog operatora (integralnog operatora reda $\alpha\in\mathbb{R}$), koji ćemo posmatrati u odeljku 3.4. Hardyev operator smo ovde izdvojili samo zbog njegove jednostavnosti i zbog toga što je Hardyeva nejednakost (jednodimenzionalna verzija sledeće teoreme, v. [19] i [7]) prototip svih nejednakosti koje posmatramo u ovom radu.

TEOREMA 3.1. *Neka je* V *homogen samoadjungovan konus ranga* m. *Neka je* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *i neka je* $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$. *Ako je* μ *takvo da* $r\mu - r + 1 < \tau$, *tada*

$$\|Hf\|_{q,\mu-1} \leq C\, \|f\|_{p,\mu}.$$

Dokaz. Pokazaćemo da operator H zadovoljava uslove Teoreme 2. Zaista, pošto je u ovom slučaju $k^r(x,y) = k(x,y)$, uslov (2.40) ove teoreme se svodi na

$$(12) \qquad \int_{\langle 0,a\rangle} s^{-r\mu+r-1}(y)dy < \infty$$

i prema Lemi 3.4, pošto je po pretpostavci $-r\mu + r - 1 > -\tau$, (12) je zadovoljeno. Time je teorema dokazana.

3.3. Laplaceov operator

Laplaceov operator se definiše sa

$$(13) \qquad Lf(x) = \int_V e^{-x^* \cdot y} f(y)dy$$

To je operator oblika (2.1) sa jezgrom $k(x,y) = e^{-x^* \cdot y}$. Na osnovu (1.13) sledi da je $k(Ax,Ay) = k(x,y)$, za svaki automorfizam $A \in G(V)$, što znači da je L homogen operator stepena 0.

LEMA 3.5. Neka je $\alpha > -\tau$. Tada integral

$$(14) \qquad \int_V e^{-a \cdot y} s^{\alpha}(y)dy$$

konvergira. Otuda $Ls^{\alpha}(x) = C\, s^{\alpha+1}(x)$.

Dokaz. Za izračunavanje integrala (14) iskoristićemo Lemu 3. Prema toj lemi ovaj integral je ekvikonvergentan sa

$$(15) \qquad \int_{R_+^m} k(Ua_o, Ut)(t_1 \dots t_m)^{\alpha n/m} dt$$

i pošto je u ovom slučaju

$$k(Ua_o, Ut) = e^{-Ua_o \cdot Ut} = e^{-a_o \cdot t} = e^{-t_1 - \dots - t_m}$$

jer je skalarni proizvod invarijantan u odnosu na rotaciju U, i $a_0 = (1,1,\dots,1)$. Tako da je integral (15) jednak

$$\int_{\mathbb{R}_+^m} e^{-t_1-\dots-t_m}(t_1\dots t_m)^{\alpha n/m}dt$$

a ovaj integral očito konvergira za $\alpha n/m > -1$. Time je dokazano da (14) konvergira za $\alpha > -\tau$. Drugi deo leme sledi, na osnovu ovoga, iz Leme 2.1.

TEOREMA 3.2. Neka je V homogen samoadjungovan konus ranga m. Neka je $1 \leq p \leq q \leq \infty$ i $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$. Neka je μ takvo da $r\mu - r + 1 < \tau$. Tada

$$\|Lf\|_{q,\mu-1} \leq C\,\|f\|_{p,\mu}.$$

Dokaz. I ova teorema je neposredna posledica Teoreme 2.3. Treba samo proveriti da je uslov (2.40) te teoreme ispunjen. Kako je za operator L jezgro $k^r(x,y) = e^{-rx^*\cdot y}$ navedeni uslov postaje

$$\int_V e^{-ra\cdot y}\, s^{-r\mu+r-1}(y)dy < \infty$$

a to je prema uslovu teoreme ispunjeno na osnovu Leme 3.5. Time je teorema dokazana.

Primetimo da Hardyev i Laplaceov operator zadovoljavaju isti tip nejednakosti. To je, naravno, posledica toga što oba operatora imaju isti stepen homogenosti 0, i što su primenljivi na s^α, za iste vrednosti α (prema Lemama 3.4 i 3.5).

3.4. Riemann-Liouvilleov operator

Operator koji posmatramo u ovom odeljku je uopštenje Riemann-Liouvilleovog integrala za polupravu.

Neka je $\beta > -\tau$, gde se, kao i dosada, pretpostavlja da je V konus ranga m i τ je definisano u (9). Stavimo

$$R_\beta f(x) = \int_{\langle 0,x\rangle} s^\beta(x-y)f(y)dy \ . \tag{16}$$

I ovaj operator je oblika (2.1) sa jezgrom

$$k_\beta'(x,y) = s^\beta(x-y)\theta_{\langle 0,x\rangle}(y) \tag{17}$$

(θ_B obeležava karakterističnu funkciju skupa B). Za $\beta = 0$ ovaj operator se svodi na Hardyev operator, a za celobrojne β na iteracije Hardyevog operatora. Jezgro k_β je očito homogeno stepena β.

LEMA 3.6. *Neka je $\beta > -\tau$ i $\alpha > -\tau$. Tada je integral*

$$\int_{\langle 0,a\rangle} s^\beta(a-y)s^\alpha(y)dy \tag{18}$$

konvergentan. Sem toga $R_\beta s^\alpha(x) = C\, s^{\alpha+\beta+1}(x)$.

Dokaz. Za izračunavanje integrala (18) iskoristićemo opet Lemu 3.3. Za to nam je potrebno da znamo kako izgleda restrikcija jezgra (17) na potkonus V_m. Prema Lemi 3.2 biće ova restrikcija jednaka

$$k_\beta(\bar{x},\bar{y}) = (s_{V_m}(\bar{x}-\bar{y}))^{\beta n/m}\theta_{\langle 0,\bar{x}\rangle}(\bar{y})$$

gde je sada $\langle 0,\bar{x}\rangle$ interval u odnosu na konus V_m i $\bar{x},\bar{y}\in V_m$.

Dakle, ako sad primenimo Lemu 3.3, dobijamo prema formuli (7) te leme, da je integral (18) ekvikonvergentan sa

$$\int_{\langle 0,a\rangle} (s_{V_m}(a-y))^{\beta n/m} (s_{V_m}(y))^{\alpha n/m} dy .$$

Dalje, prema formuli (8) iste leme, pošto kad primenimo rotaciju U imamo $s_{V_m}(Ut) = s_m(t)$ (gde je $s_m(t)$ norma na konusu $\mathbb{R}^m_+$), integral (19) je ekvikonvergentan sa

$$\int_{\langle 0,a_o\rangle} (s_m(a_o-t))^{\beta n/m} (s_m(t))^{\alpha n/m} dt$$

$$= \int_0^1 \cdots \int_0^1 (1-t_1)^{\beta n/m} \cdots (1-t_m)^{\beta n/m} (t_1 \cdots t_m)^{\alpha n/m} dt_1 \cdots dt_m$$

a ovaj integral očito konvergira za $\beta > -m/n$ i $\alpha > -m/n$.

Ostatak leme sledi na osnovu Leme 2.1. Time je lema dokazana.

TEOREMA 3.3. Neka je V homogen samoadjungovan konus ranga m. Neka je $1 \leq p \leq q \leq \infty$ i $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$ i neka je $\beta > -\tau/r$ i $r\mu - r + 1 < \tau$. Tada

$$\| R_\beta f \|_{q,\mu-\beta-1} \leq C \, \| f \|_{p,\mu} .$$

Dokaz. Tvrđenje će slediti prema Teoremi 2.3 ako dokažemo da je zadovoljen uslov

$$\int_{\langle 0,a\rangle} s^{r\beta}(a-y) s^{-r\mu+r-1}(y) dy < \infty .$$

Prema Lemi 3.6 ovaj uslov je zadovoljen za $r\beta > -\tau$ i $-r\mu+r-1 > -\tau$ što je, prema uslovima teoreme, ispunjeno. Time je teorema dokazana.

3.5. Hilbertov operator

Hilbertov operator se definiše sa

(19) $$Tf(x) = \int_V \frac{f(y)}{s(x+y)}\, dy$$

Ovo je integralni operator sa jezgrom $k(x,y) = 1/s(x+y)$, koje je homogeno stepena -1. Primenljivost ovog operatora se dobij iz sledeće leme.

LEMA 3.7. *Neka je* $\alpha > -\tau$ *i* $\beta > \alpha + \tau$. *Tada je integral*

(20) $$\int_V \frac{s^\alpha(y)}{s^\beta(x+y)}\, dy$$

konvergentan i važi $Ts^\alpha(x) = C\, s^\alpha(x)$.

Dokaz. Opet ćemo primeniti Lemu 3.3 na izračunavanje integrala (20). Prema formuli (7) te leme, (20) se svodi na

(21) $$\int_{V_m} (s_{V_m}(\bar{y}))^{\alpha n/m} (s_{V_m}(a+\bar{y}))^{-\beta n/m} d\bar{y}$$

(gde smo opet primenili i Lemu 3.2). Kad se primeni rotacija U koja preslikava R_+^m u V_m (i opet iskoristi da je $s_{V_m}(Ut) = s_m(t)$ i da je $Ua = a_o = (1,\dots,1)$) onda se (21) svodi na

$$\int_{R_+^m} (s_m(t))^{\alpha n/m} (s_m(a_o+t))^{-\beta n/m} dt$$

$$= \int_0^\infty \dots \int_0^\infty (t_1 \dots t_m)^{\alpha n/m} (1+t_1)^{-\beta n/m} \dots (1+t_m)^{-\beta n/m} dt_1 \dots d$$

Poslednji integral konvergira za $\alpha > -m/n = -\tau$ i $\beta - \alpha > \tau$. Ostatak leme se dobija primenom Leme 2.1.

<u>TEOREMA 3.4.</u> <u>Neka je</u> V <u>homogen samoadjungovan konus ranga</u> m. <u>Neka je</u> $1 \leq p \leq q \leq \infty$ <u>i</u> $\frac{1}{r} = \frac{1}{p'} + \frac{1}{q}$ <u>i neka je</u> $\tau - r < r\mu - r + 1 < \tau$. <u>Tada</u>

$$\|Tf\|_{q,\mu} \leq C\,\|f\|_{p,\mu}.$$

<u>Dokaz</u>. Da bismo primenili Teoremu 2.3 na Hilbertov operator proveravamo da je ispunjen uslov (2.40) koji u ovom slučaju glasi

$$\int_V s^{-r}(a+y)s^{-r\mu+r-1}(y)dy < \infty .$$

Prema prethodnoj lemi ovaj uslov je ispunjen ako je $-r\mu+r-1 > -\tau$ i $r > (-r\mu+r-1)+\tau$, što je zadovoljeno, po pretpostavkama teoreme. Time je teorema dokazana.

3.6. Stieltjesov operator

Sledeći operator se (u jednodimenzionalnom slučaju) obično naziva Stieltjesov operator

$$S_\lambda f(x) = \int_V \frac{f(y)}{s^\lambda(x+y)}\,dy \tag{22}$$

Jezgro ovog operatora je homogeno stepena $-\lambda$. Za $\lambda = 1$ svodi se na Hilbertov operator koji smo razmatrali u prethodnom odeljku. Jasno je da se i za operator (22) može dobiti (L^p, L^q) nejednakost s težinama. Mi ćemo odmah posmatrati i jedan opštiji operator, koji će nam trebati kasnije (u glavi 4).

(23) $$S_{\lambda,\gamma} f(x) = \int_V \frac{f(y)}{s^{\lambda}(x+y)}\, s^{\gamma}(y)dy.$$

Za ovaj uopšteni Stieltjesov operator jezgro je $k(x,y) = s^{\gamma}(y)s^{-\lambda}(x+y)$; ono je homogeno stepena $\gamma-\lambda$.

TEOREMA 3.5. Neka je V homogen samoadjungovan konus ranga m. Neka je $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1/r = 1/p' + 1/q$ i neka važi

(24) $$\tau - \lambda r < \mu r - r + 1 - \gamma r < \tau$$

Tada

(25) $$\|S_{\lambda,\gamma} f\|_{q,\mu-\gamma+\lambda-1} \leq C\, \|f\|_{p,\mu}.$$

Dokaz. Tvrđenje će opet slediti iz Teoreme 2.3 kad proverimo da važi uslov (2.40), koji u ovom slučaju glasi

$$\int_V k^r(a,y)s^{-\mu r+r-1}(y)dy = \int_V s^{\gamma r}(y)s^{-\lambda r}(a+y)s^{-\mu r+r-1}(y)dy < \infty$$

Prema Lemi 3.7 poslednji integral konvergira ako važi $\gamma r-\mu r+r-1 > -\tau$ i $\lambda r > \gamma r-\mu r+r-1+\tau$, a to je upravo (24). Time je teorema dokazana.

3.7. Primedbe

Osobine grupe automorfizama konusa, koje se koriste u 3.1 uzete su najviše prema [14] i [26]. Gindikin [14] je računao i integrale opštije nego što je (1). Ipak njegov metod svođenja ovakvih integrala na uzastopne je drukčiji od izloženog ovde (zasniva se na postupku kojim se u [14] konstruišu svi homogeni konusi).

Nejednakosti slične posmatranim u ovoj glavi javljaju se, u jednodimenzionalnom slučaju, u najrazličitijim kontekstima u literaturi, tako da je nemoguće sastaviti neku potpuniju bibliografiju.

Pomenimo poznatu Hardyevu nejednakost. (v. [15], [19], [7]). Hardy je ovu nejednakost dokazao prvo bez težina [15], a zatim sa težinama koje su stepene funkcije - to je slučaj koji odgovara našoj n-dimenzionalnoj nejednakosti. Međutim, za jednu promenljivu je poznato da se mogu uzeti za težine i neke druge funkcije; čak je Muckenhoupt [19] našao neophodne i dovoljne uslove koje funkcije treba da zadovoljavaju da bi bile težine u Hardyevoj nejednakosti. Ali, kao što je pokazao sa Muckenhoupt [20], ovaj metod se ne može primeniti za $n>1$, jer (neposredno) uopštenje Muckenhouptovih uslova za $n>1$ ne daje ni dovojan uslov za težine. Zato možemo smatrati da težine s^{α} predstavljaju prvi korak u nalaženju težina za n-dimenzionalnu Hardyevu nejednakost.

Andersen [1] je posmatrao nejednakosti za Hardyev i Laplaceov operator (za jednu promenljivu) u nekim prostorima funkcija opštijim nego L^p prostori. On je dobio da i u tim prostorima ova dva operatora zadovoljavaju isti tip nejednakosti.

Funkcija (14) se zove i gama funkcija konusa ([16], [14]).

Riemann-Liouvilleov integral je veoma dobro poznat. M. Riesz [24] je definisao ovaj operator za konus $\mathbb{V}^n$. Garding [10] je posmatrao ovaj operator na konusima matrica $\mathbb{P}_m$ i $\mathbb{H}_m$.

Gindikin [14] je definisao ovaj operator za opšte nesamoadjungovane konuse. V. i [31] gde se ovaj operator definiše na prostoru distribucija.

Za Stieltjesov integral (jedne promenljive) je Andersen [2] dobio neophodne i dovoljne uslove za težine, slično kao što je Muckenhoupt dobio za Hardyev operator.

4. HARDYEVI I BERGMANOVI PROSTORI

U ovoj glavi ćemo neke od dosada dobijenih rezultata primeniti na neke preostore analitičkih funkcija. To će biti funkcije definisane na tzv. poluravnima - oblastima $T_V \subseteq \mathbb{C}^n$, koje su oblika $T_V = \mathbb{R}^n + iV$, gde je V konus.

U prvom odeljku se navode neke osobine Laplaceove transformacije, koja će predstavljati vezu između funkcija definisanih na konusu V i analitičkih funkcija na T_V. U Lemi 4.1 se računa Laplaceove transformacija funkcije s^{α}.

U odeljku 4.2 se posmatraju automorfizmi oblasti T_V; oni se lako dobijaju na osnovu automorfizama konusa.

U odeljku 4.3 definišemo Hardyeve i Bergmanove prostore u T_V - n-dimenzionalna uopštenja klasičnih H^p i Bergmanovih prostora u poluravni.

Posle ovih uvodnih odeljaka,u 4.4 posmatramo operatore koji deluju na Bergmanovim prostorima. Pokazaćemo da je operator definisan sa (22) ograničen na nekim Bergmanovim prostorima. To će biti dobijeno na vrlo jednostavan način: prvo se integral po T_V svede na integral po V, a zatim se primenjuje nejednakost za Stieltjesov operator iz 3.6. Na kraju ovog odeljka pokazujemo da je posmatrani operator homogen u odnosu na automorfizme T_V.

U 4.5 detaljnije proučavamo prostor $B^2_\alpha(T_V)$. Za funkcije iz ovog prostora dobijaju se reprezentacije preko Laplaceove transformacije (teorema Paley-Wiener-ovog tipa (4.2.)). Na osnovu te teoreme se u 4.6 nalazi reprodukciono jezgro za prostor $B^2_\alpha(T_V)$.

U poslednjem odeljku 4.7 se posmatraju uopštenja H^p prostora - H^p prostori s težinama. I za ove prostore se dokazuje teorema Paley-Wienera. Dokaz ove teoreme koristi nejednakost za Riemann-Liouvilleov operator iz 3.4.

4.1. Laplaceova transformacija

U ovoj glavi ćemo primeniti neke nejednakosti dobijene dosada na prostore analitičkih funkcija definisane na uopštenim poluravnima u $\mathbb{C}^n$ (n-dimenzionalnom kompleksnom euklidskom prostoru). Uopštene poluravni su oblasti u $\mathbb{C}^n$ oblika $T_V = \mathbb{R}^n + iV$, gde je $V \subseteq \mathbb{R}^n$ konus. Za $n = 1$ oblast T_V se svodi na gornju poluravan u $\mathbb{C}$, pa otuda i njen naziv. Elemente iz T_V ćemo obeležavati sa $z = x + iy = (x_1+iy_1,\dots,x_n+iy_n)$, pri čemu $x,y \in \mathbb{R}^n$ i $y \in V$.

Definisaćemo kompleksnu Laplaceovu transformaciju, koja će igrati veoma važnu ulogu u celoj ovoj glavi. Ona predstavlja vezu između funkcija definisanih na konusu V i funkcija definisanih na uopštenoj poluravni T_V. Preciznije

$$(1) \qquad \mathcal{L}f(z) = \int_V f(t)e^{iz\cdot t}dt$$

gde je f (kompleksna) funkcija sa nosačem u V; (1) se definiše za sve $z \in T_{V^*} = \mathbb{R}^n + iV$. Kako ćemo i dalje posmatrati isključivo samoadjungovane konuse, biće i $T_{V^*} = T_V$. Ako je funkcija f takva da integral (1) apsolutno konvergira, biće $\mathcal{L}f(z)$ analitička funkcija u T_V. U sledećem odeljku ćemo se baviti prostorima analitičkih funkcija koji se dobijaju na ovaj način.

Ako u (1) stavimo $z = iy$, tj. $x = 0$, biće

$$(2) \qquad \mathcal{L}f(iy) = \int_V e^{-y\cdot t} f(t)dt = Lf(y^*)$$

"realna" Laplaceova transformacija, definisana u odeljku 3.3. Relacija (2) će omogućiti da se na analitičke funkcije primene neke ranije dobijene formule, s obzirom da se, prema principu jedinstvenosti za analitičke funkcije, analitička funkcija na T_V jednoznačno određuje svojim vrednostima na iV (v. Lemu 4.1 dole).

Ako u (1) stavimo $f(t) = \theta_V(t)$ (karakteristična funkcija konusa), dobićemo Cauchy-Szegöovo jezgro oblasti T_V

$$(3) \qquad S(z) = \int_V e^{iz\cdot t} dt = \mathcal{L}\theta_V(z)$$

za $z \in T_V$. Pošto iz $z \in T_V$ i $t \in V$ sledi $y\cdot t > 0$, biće integral u (3 apsolutno konvergentan, tj.

$$(4) \qquad |S(z)| \leq \int_V e^{-y\cdot t} dt$$

a ovaj integral je konvergentan prema Lemi 3.5 (u koju stavimo $\alpha = 0$). Odatle sledi da je $S(z)$ analitička funkcija u T_V.

Navešćemo još neke osobine Laplaceove transformacije (v. napr. [29] ili [31]).

Za dve funkcije f i g sa nosačem u konusu V definiše se konvolucija na sledeći način

$$(5) \qquad f*g(x) = \int_{\langle 0,x\rangle} f(x-y)g(y)dy = \int_{\langle 0,x\rangle} g(x-y)f(y)dy .$$

Laplaceova transformacija transformiše konvoluciju u proizvod

$$(6)\qquad \mathcal{L}(f*g)(z) = \mathcal{L}f(z)\mathcal{L}g(z)\ .$$

Iz definicije Laplaceove transformacije se vidi da je ona blisko povezana sa Fourierovom transformacijom. Neka je

$$(7)\qquad \mathcal{F}f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot t}f(t)dt$$

Fourierova transformacija funkcije f. Tada je prema (1)

$$(8)\qquad \mathcal{L}f(x+iy) = \int_V e^{ix\cdot t}e^{-y\cdot t}f(t)dt = \mathcal{F}(f\cdot e_y)(x)$$

gde je uvedena oznaka $e_y(t) = e^{-y\cdot t}$.

Koristićemo dobro poznatu Hausdorff-Youngovu nejednakost. Ako je $1\leq p\leq 2$ i $p' = p/(p-1)$, tada

$$(9)\qquad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p'}dx\right)^{1/p'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p}dx\right)^{1/p}$$

kada je $p = 2$, onda je (9) jednakost i (9) se obično naziva Plancherelova teorema.

Sada ćemo koristiti rezultate iz prethodnih glava za izračunavanje Laplaceove transformacije od stepene funkcije na konusu. Ovu lemu ćemo često koristiti kasnije.

LEMA 4.1. Neka je V homogen samoadjungovan konus. Ako je $\alpha > -\tau$, tada važi

$$(10)\qquad \mathcal{L}s^{\alpha}(z) = C\,S^{\alpha+1}(z)\ ,\quad z\in T_V\ .$$

Dokaz. Pre svega primetimo da je integral

$$\mathcal{L}s^{\alpha}(z) = \int_V e^{iz\cdot t}s^{\alpha}(t)dt$$

apsolutno konvergentan za $\alpha > -\tau$, jer se majorira sa

$$\int_V e^{-y\cdot t}s^{\alpha}(t)dt = \mathcal{L}s^{\alpha}(iy)$$

a ovaj integral je konvergentan, prema Lemi 3.5. Znači da je funkcija $\mathcal{L}s^{\alpha}$ analitička u T_V. Sem toga, kao što smo malopre primetili i Cauchy-Szegöovo jezgro S (4) je analitička funkcij Dakle, (10) je jednakost između dve analitičke funkcije, pa je prema principu jedinstvenosti za analitičke funkcije (v. napr [31]) dovoljno (10) pokazati za $z = iy$, tj. dovoljno je dokaza

$$\mathcal{L}s^{\alpha}(iy) = C\, S^{\alpha+1}(iy)\ . \tag{11}$$

Kao što smo već primetili u (2) leva strana (11) se može izraziti preko realne Laplaceove transformacije

$$\mathcal{L}s^{\alpha}(iy) = Ls^{\alpha}(y^*)$$

i ako iskoristimo Lemu 3.5 dobićemo da je

$$Ls^{\alpha}(y^*) = C\, s^{\alpha+1}(y^*)$$

a to je, prema formuli (1.17) jednako $C\, s^{-\alpha-1}(y)$; dakle

$$\mathcal{L}s^{\alpha}(iy) = C\, s^{-\alpha-1}(y)\ . \tag{12}$$

S desne strane u (11) imamo stepen funkcije

$$S(iy) = \int_V e^{-y\cdot t}dt = \mathcal{L}\theta_V(iy)\ .$$

Da bismo izračunali ovu Laplaceovu transformaciju, stavimo $\alpha = 0$ u (12). Tada $\theta_V = s^0$ i iz (12) sledi $S(iy) = \mathcal{L}\theta_V(iy) = C\, s^{-1}(y)$. Stepenujemo sa $\alpha+1$; biće

$$S^{\alpha+1}(iy) = C\, s^{-\alpha-1}(y) \ . \tag{13}$$

Sada (12) i (13) zajedno daju (11) i time je lema dokazana.

4.2. Homogene funkcije na T_V

U ovom odeljku ćemo posmatrati funkcije koje su homogene u odnosu na grupu automorfizama oblasti T_V. Sva razmatranja će dosta ličiti na odeljak 1.3 gde smo posmatrali funkcije homogene na konusu V. Štaviše, automorfizmi oblasti T_V dobijaju se vrlo jednostavno na osnovu automorfizama konusa. Pre svega, ako je $A\in G(V)$, tada A generiše automorfizam oblasti T_V na sledeći način

$$Az = Ax + iAy \ .$$

Sem toga, translacija za realni vektor očito takođe predstavlja automorfizam oblasti T_V. Zaista, ako je $b\in\mathbb{R}^n$, tada

$$\tau_b z = z + b$$

pripada T_V, kadgod $z\in T_V$.

Ispostavlja se da su to svi mogući analitički automorfizmi oblasti T_V (v.[23]), tj. svi automorfizmi T_V su oblika

$$gz = Az + b \tag{14}$$

gde je $A\in G(V)$ i b realan vektor. Ovo se dokazuje svođenjem na jednodimenzionalan slučaj, gde je dobro poznato da su jedini analitički automorfizmi gornje poluravni linearne funkcije.

Pisaćemo i $g = (A,b)$ kada važi (14) i obeležiti sa $G(T_V)$ grupu automorfizama T_V. Lako je pokazati da je ova grupa tranzitivna.

LEMA 4.2. Grupa $G(T_V)$ je tranzitivna na oblasti T_V.

Dokaz. Neka su dati $z = x + iy$ i $w = u + iv$ u T_V. Treba naći $g \in G(T_V)$ tako da je $gz = w$. Pošto je konus V homogen, postoji $A \in G(V)$ tako da je $Ay = v$. Uzećemo $g = (A, -Ax+u)$. Biće tada

$$gz = Az - Ax + u = Aiy + u = iv + u = w$$

što je i trebalo dokazati. Primedba: g je kompozicija tri preslikavanja $g = \tau_u \circ A \circ \tau_{-x}$.

Definicija. Funkcija $f: T_V \to \mathbb{R}_+$ je homogena stepena $\alpha \in \mathbb{R}$ ako za svaki $g \in G(T_V)$, $g = (A,u)$ važi

(15) $$f(gz) = |A|^{2\alpha} f(z) .$$

Primedba. Ovde je $|A|$ determinanta matrice A, a $|A|^2$ kompleksni jakobijan, tj. jakobijan transformacije $z \to gz = Az + a$.

LEMA 4.3. Ako je f homogena funkcija stepena α na homogenoj oblasti T_V, tada je

$$f(z) = C\, s^{\alpha}(y) .$$

Dokaz. Pre svega, koristeći invarijantnost funkcije f u odnosu na translacije, pokazujemo da je $f(z) = f(iy)$. Zaista, ako za dato z uzmemo $g = (I,-x)$ (gde je I identični operator), biće $z = g(iy)$ i onda je $f(z) = f(giy) = |I|^{\alpha} f(iy) = f(iy)$; dakle, funkcija f ne zavisi od x.

Sada možemo posmatrati restrikciju funkcije f na V. Za nju važi, prema (15)

$$f(Ay) = |A|^{\alpha} f(y)$$

i onda, prema Lemi 1.1 imamo $f(y) = C\, s^{\alpha}(y)$, što je i trebalo dokazati.

4.3. Definicije prostora analitičkih funkcija u T_V

U ovom odeljku ćemo dati definicije raznih prostora analitičkih funkcija definisanih u T_V. Ovi prostori će biti uopštenja klasičnih Hardyevih i Bergmanovih prostora na poluravni.

Za funkciju F, analitičku u T_V, definisaćemo njenu "srednju vrednost" reda p, $0 < p \leq \infty$

$$M_p F(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx\right)^{1/p} \tag{16}$$

za svako $y \in V$.

Prostor $H^p(T_V)$, Hardyev prostor, se sastoji iz svih funkcija analitičkih u T_V za koje važi

$$\sup_{y \in V} M_p F(y) < \infty . \tag{17}$$

Ako je $1 \leq p \leq \infty$, onda je prostor $H^p(T_V)$ Banachov.

Ako se umesto supremuma (L^{∞} norme) u (17) uzme L^p norma, dobićemo uslov

$$(18)\qquad \left(\int_V |M_pF(y)|^p dy\right)^{1/p} = \left(\int_V\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dxdy\right)^{1/p}$$

Prostor svih funkcija za koje važi (18) se naziva Bergmanov prostor i obeležava sa $B^p(T_V)$. Ako je $p\geqslant 1$, izraz (18) predstavlja normu, koju ćemo obeležavati sa $|||F|||_p$, da bi se razlikovala od norme $\| \ \|_p$ u prostoru $L^p(V)$, uvedene u odeljku 2.2. Imamo dakle

$$(19)\qquad |||F|||_p = \|M_pF\|_p .$$

Opštije, kada se u (18) umesto L^p uzme neka druga norma L^q, dobijaju se Bergmanovi prostori sa mešovitom normom

$$(20)\qquad \left(\int_V |M_pF(y)|^q dy\right)^{1/q} = \left(\int_V\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx\right)^{q/p} dy\right)^{1/q}$$

Prostor funkcija za koje važi (20) obeležavaćemo sa $B^{p,q}(T_V)$. Normu definisanu u (20) ćemo obeležavati sa $|||F|||_{p,q}$. Kao i u (19) važi $|||F|||_{p,q} = \|M_pF\|_q$.

Sem toga, očigledno važi $B^{p,p}(T_V) = B^p(T_V)$ i $B^{p,\infty}(T_V) = H^p(T_V)$ i slično važi za odgovarajuće norme: $|||F|||_{p,p} = |||F|||_p$, a $|||F|||_{p,\infty} = \|M_pF\|_\infty$ bi bila norma za Hardyev prostor. Ipak, ovu poslednju oznaku nećemo mnogo koristiti.

Kao poslednje uopštenje, posmatraćemo navedene prostore s težinama. Pošto su, prema Lemi 4.3, jedine homogene funkcije u T_V funkcije $s^\alpha(y)$, uzećemo njih za težinske funkcije.

Bergmanov prostor mešovite norme sa težinom $B^{p,q}_\alpha(T_V)$ se definiše uslovom

$$(21)\qquad |||F|||_{p,q,\alpha} = \left(\int_V\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx\right)^{q/p} s^{\alpha q-1}(y)dy\right)^{1/q} < \infty$$

Uvešćemo još oznaku $L^{p,q}_{\alpha}(T_V)$ za prostor (merljivih) funkcija definisanih na T_V (ne obavezno analitičkih) za koje važi (21). Upotrebljavaćemo istu oznaku (21) i za normu u tom prostoru, i slične oznake za neke specijalne slučajeve; naprimer, $L^{p,p}_{\alpha}(T_V) = L^p_{\alpha}(T_V)$. Očigledno su Bergmanovi prostori zatvoreni potprostori odgovarajućih L^p prostora. U sledećem odeljku posmatramo neke operatore koji su ograničeni iz L^p u neki Bergmanov prostor - operatore koji su ograničene projekcije na potprostore analitičkih funkcija.

4.4. Ograničene projekcije na $B^{p,q}_{\alpha}(T_V)$

Sada ćemo posmatrati operatore koji su definisani na funkcijama na T_V na sledeći način

$$P_{\beta,\gamma}f(z) = \int_{T_V} S^{\beta}(z-\bar{w})f(w)s^{\gamma}(v)dw \tag{22}$$

za $z\in T_V$. Ovde, kao i ranije pišemo $z = x + iy$, gde $x\in\mathbb{R}^n$ i $y\in V$ i slično $w = u + iv$, gde $u\in\mathbb{R}^n$ i $v\in V$; $\bar{w}$ je kompleksno konjugovani vektor $u - iv$.

Pošto je funkcija $S(z-\bar{w})$ analitička po z, predstavljaće (22) (pod uslovom da integral konvergira) analitičku funkciju. Zato je zanimljivo ispitivati kada je operator (22) ograničen na nekom prostoru $L^p(T_V)$: tada će on predstavljati ograničenu projekciju na neki Bergmanov prostor.

Navedimo prvo neke specijalne slučajeve (23). Funk $S^2(z-\bar{w})$ predstavlja <u>reprodukciono</u> <u>jezgro</u> na prostoru $B^2(T_V$ (v. [26]), tj. ako $F\in B^2(T_V)$ onda

$$F(z) = \int_{T_V} S^2(z-\bar{w})F(w)dw \ .$$

Sem toga, operator

$$P_{2,0}f(z) = \int_{T_V} S^2(z-\bar{w})f(w)dw$$

je ograničen na $L^p(T_V)$ za $1<p<\infty$, ali nije ograničen na L^1 Zbog toga je od interesa posmatrati neke opštije operatore. Naprimer, operator

$$P_{\gamma+2,\gamma}f(z) = \int_{T_V} S^{\gamma+2}(z-\bar{w})f(w)s^{\gamma}(v)dw \tag{23}$$

je, kao što će se videti iz Posledice 4.2, ograničen, čim je $\gamma+\tau > 1/p$; tako je nađena ograničena projekcija i za prost $L^1(T_V)$. U odeljku 4.6 ćemo pokazati da je funkcija $S^{\gamma+2}(z-\bar{w}$ reprodukciono jezgro za prostor $B^2_\gamma(T_V)$.

U Teoremi 4.1 ćemo pokazati da je operator (22) ograni na nekim Bergmanovim prostorima. Pre toga, u sledećoj lemi ćemo izračunati neke integrale u kojima učestvuje jezgro operatora (22). Zatim ćemo, na osnovu toga u Lemi 4.5 naći ocen za M_pF (v. (16)); u ovoj oceni će se pojaviti Stieltjesov ope tor iz odeljka 3.6, tako da će se dokaz teoreme svesti na pri nejednakosti za Stieltjesov operator.

LEMA 4.4. Ako je $\beta > 2 - \tau$, tada

a) $$\int_{\mathbb{R}^n} |S(z)|^{\beta} dx = C\, s^{-\beta+1}(y)$$

b) $$\int_{\mathbb{R}^n} |S(z-\overline{w})|^{\beta} du = C\, s^{-\beta+1}(v+y) .$$

Dokaz. Prema Lemi 4.1 (u kojoj stavimo $\alpha = \beta/2 - 1 > -\tau/2 > -\tau$) biće

$$S^{\beta/2}(z) = \int_V e^{iz\cdot t} s^{\beta/2-1}(t)dt .$$

Primenićemo Plancherelovu jednakost ((9) za p = 2) na ovu funkciju

$$(24) \qquad \int_{\mathbb{R}^n} |S^{\beta}(x+iy)| dx = \int_V |e^{-y\cdot t} s^{\beta/2-1}(t)|^2 dt.$$

Sada na poslednji integral primenimo Lemu 3.5 (sa $\alpha = \beta-2 > -\tau$); dobićemo

$$(25) \qquad \int_V e^{-2y\cdot t} s^{\beta-2}(t)dt = C\, s^{\beta+1}(2y^*) = C\, s^{-\beta+1}(y)$$

gde smo za poslednju jednakost iskoristili formulu (1.17). Iz (24) i (25) sledi tvrđenje a) leme.

b) Pre svega primetimo da integral ne zavisi od $x = \operatorname{Re} z$. Zaista

$$\int_{\mathbb{R}^n} |S(z-\overline{w})|^{\beta} du = \int_{\mathbb{R}^n} |S(x-u+i(y+v))|^{\beta} du = \int_{\mathbb{R}^n} |S(t+i(y+v))|^{\beta} dt$$

i, prema a), sledi b).

POSLEDICA 4.1.

a) Ako $\beta > 2-\tau$, tada $\quad \sup\limits_{v\in V} \int_{\mathbb{R}^n} |S(z-\overline{w})|^{\beta} du \leq C\, s^{-\beta+1}(y)$.

b) Ako $\beta > 2-\tau$ i $-\tau < \alpha < \beta - 1 - \tau$, tada

$$\int_{T_V} |S(z-\overline{w})|^{\beta} s^{\alpha}(v) du dv = C\, s^{\alpha-\beta+2}(y).$$

Dokaz. a) Pošto je funkcija s monotono rastuća u odnosu na poredak koji definiše konus (tj. ako $x <_V y$ onda $s(x) < s(y)$), i pošto je $-\beta+1 < -1+\tau \leq 0$, onda je $s^{-\beta+1}(v+y) \leq s^{-\beta+1}(y)$, tako da tvrđenje sledi iz prethodne leme, pod b).

b) Ako jednakost b) prethodne leme pomnožimo sa $s^{\alpha}(v)$ i integralimo po V biće

$$(26) \quad \int_V s^{\alpha}(v)\int_{\mathbb{R}^n}|S(z-\bar{w})|^{\beta}du\,dv = C\int_V s^{\alpha}(v)s^{-\beta+1}(v+y)dv$$

Poslednji integral je, prema odeljku 3.6, Stieltjesova transformacija funkcije s^{α}, i prema Lemi 3.7 ovaj integral konvergira za $\alpha > -\tau$ i $\beta-1 > \alpha+\tau$, i jednak je $s^{\alpha-\beta+2}(y)$, što zajedno sa (26) dokazuje tvrđenje posledice.

Sada ćemo dokazati lemu koja predstavlja osnovni korak u dokazu Teoreme 4.1.

LEMA 4.5. Ako je $\beta > 2-\tau$, tada

$$M_p(P_{\beta,\gamma}f)(y) \leq \int_V M_pf(v)s^{-\beta+1}(v+y)s^{\gamma}(v)dv .$$

Dokaz. Prvo ćemo u integral (22) koji definiše $P_{\beta,\gamma}f$

$$P_{\beta,\gamma}f(z) = \int_V\int_{\mathbb{R}^n} S^{\beta}(x+iy-u+iv)f(u+iv)du\; s^{\gamma}(v)dv$$

uvesti smenu $x-u = t$; biće

$$P_{\beta,\gamma}f(z) = \int_V\int_{\mathbb{R}^n} S^{\beta}(t+i(y+v))f(x-t+iv)dt\; s^{\gamma}(v)dv .$$

Da bismo dobili $M_p(P_{\beta,\gamma}f)$ primenimo na poslednji integral nejednakost Minkowskog

$$M_p(P_{\beta,\gamma}f)(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n}|P_{\beta,\gamma}f(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}$$

(27)

$$\leq \int_V\int_{\mathbb{R}^n}|S^{\beta}(t+i(y+v))|\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-t+iv)|^p dx\right)^{1/p} dt\ s^{\gamma}(v)dv$$

Unutrašnji integral ne zavisi od t i jednak je

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}|f(x-t+iv)|^p dx\right)^{1/p} = M_p f(v)$$

pa iz (27) sledi

$$M_p(P_{\beta,\gamma}f)(y) \leq \int_V M_p f(v) s^{\gamma}(v)\left(\int_{\mathbb{R}^n}|S^{\beta}(t+i(y+v))|dt\right)dv.$$

Prema Lemi 4.4 b) (v. i dokaz), unutrašnji integral je jednak $C\, s^{-\beta+1}(v+y)$ i kad se to zameni, dobijamo tvrđenje leme.

Sada dolazimo do glavne teoreme ovog odeljka u kojoj se tvrdi da je operator (22) ograničena projekcija.

TEOREMA 4.1. *Ako je* $1 \leq p \leq q \leq \infty$ *i* $1/r = 1/p' + 1/q$ *i ako je* $\beta > 2-\tau$ *i* μ *takvo da*

(28) $$\tau - (\beta-1)r < \mu r - r + 1 - \gamma r < \tau$$

tada

(29) $$\left(\int_V\left(\int_{\mathbb{R}^n}|P_{\beta,\gamma}f(x+iy)|^p dx\right)^{q/p} s^{(\mu-\varkappa-2)q-1}(y)dy\right)^{1/q}$$

$$\leq C\left(\int_{T_V}|f(x+iy)|^p s^{\mu p-1}(y)dxdy\right)^{1/p}$$

gde smo stavili $\varkappa = \gamma-\beta$.

Primedba. Nejednakost (29) može se kratko napisati, koristeći oznake iz 4.3

(29) $$|||P_{\beta,\gamma}f|||_{p,q,\mu-\varkappa-2} \leq C\,|||f|||_{p,\mu}.$$

Dokaz. Prema Lemi 4.5 važi

(30) $$M_p(P_{\beta,\gamma}f)(y) \leq \int_V M_pf(v) \frac{s^{\gamma}(v)}{s^{\beta-1}(y+v)} dv$$

što se, s obzirom na definiciju uopštene Stieltjesove transformacije (3.23), može napisati kao

(31) $$M_p(P_{\beta,\gamma}f)(y) \leq S_{\beta-1,\gamma}(M_pf)(y) .$$

Sada ćemo iskoristiti Teoremu 3.5 za Stieltjesov operat Pošto su, prema (28), uslovi te teoreme zadovoljeni, onda važi

$$\| S_{\beta-1,\gamma}(M_pf)\|_{q,\mu-\gamma+\beta-2} \leq C \| M_pf\|_{p,\mu}$$

i kad se to zameni u (31), biće

$$\| M_p(P_{\beta,\gamma}f)\|_{q,\mu-\kappa-2} \leq C \| M_pf\|_{p,\mu}.$$

Ali, prema (19), poslednja nejednakost je isto što i

$$|||P_{\beta,\gamma}f|||_{p,q,\mu-\kappa-2} \leq C |||f|||_{p,\mu}$$

a to je upravo (29). Time je teorema dokazana.

POSLEDICA 4.2. Neka je $1 \leq p \leq \infty$.

a) Ako je $\tau-\beta+1 < \mu-\gamma < \tau$, onda

$$|||P_{\beta,\gamma}f|||_{p,\mu-\kappa-2} \leq C |||f|||_{p,\mu}.$$

b) Ako je $\beta = \gamma+2$ i

(32) $$\tau-1 < \mu < \tau+\gamma$$

tada

$$|||P_{\gamma+2,\gamma}f|||_{p,\mu} \leq C |||f|||_{p,\mu}.$$

c) <u>Ako je</u>

(33) $$1/p < \gamma + \tau$$

<u>tada</u>

$$|||P_{\gamma+2,\gamma} f|||_p \le C|||f|||_p .$$

Svako od tvrđenja u posledici je specijalan slučaj prethodnog; a) se dobija iz Teoreme 4.1 kad se stavi $p = q$; b) se dobija iz a) kad se stavi $\beta = \gamma + 2$, tada je $\varkappa = -2$; c) se dobija iz b) kad se stavi $\mu = 1/p$; to je slučaj bez težina.

Kao što smo već napomenuli oblast T_V je n-dimenzionalni analogon poluravni. U klasičnoj teoriji H^p prostora se paralelno posmatraju ovi prostori za funkcije definisane na gornjoj poluravni i za funkcije definisane na jediničnom disku u $\mathbb{C}^1$ (v. napr. [9]). I u n-dimenzionalnom slučaju ovi prostori su razmatrani na raznim oblastima u $\mathbb{C}^n$; ipak, najviše je proučena jedinična kugla B u $\mathbb{C}^n$ (to je skup $B = \{z \in \mathbb{C}^n : |z| < 1\}$) - teorija funkcija na B je izložena u knjizi Rudina [28]. U glavi 7 te knjige se razmatraju ograničene projekcije za Bergmanove prostore. Posledica 4.2 c) predstavlja analogon poznate teoreme Rudina-Forellia, jer je operator $P_{\gamma+2,\gamma}$ (23) na isti način dobijen iz reprodukcionog jezgra $S^2(z-\overline{w})$, kao što je i operator Rudina-Forellia dobijen iz reprodukcionog jezgra odgovarajućeg Bergmanovog prostora na B. Sem toga, uslov pri kojem važi ova teorema na B je jednak (33), ako stavimo $\tau = 1$; dakle uslovi su isti za jediničnu kuglu i za oblast T_V, čija je osnova mnogougaoni konus.

Posledica 4.2 b) za jediničnu kuglu su dokazali Beatrou i Burbea [3]; njihov uslov (u našim oznakama) glasi $0 < \mu < \gamma$ što se opet svodi na (32) kad stavimo $\tau = 1$.

Dokaz Teoreme 4.1 je tako jednostavan zahvaljujući tome što je oblast T_V jednaka direktnom proizvodu $\mathbb{R}^n$ i V. Zahvalju- jući tome se, po pravilu, rezultati za T_V dobijaju lakše nego odgovarajući rezultati za B (kad već znamo osobine konusa V). Naprimer, grupa automorfizama ima mnogo jednostavniji oblik za T_V, nego za B (v. [28]).

Možda je zanimljivo da ukažemo još jedan metod dokazivanja teorema tipa Teoreme 4.1. Ovaj metod ne koristi specijalan oblik oblasti T_V (svođenje na direktan proizvod), nego se sas- ji u imitiranju dokaza teorema iz odeljka 2.2. Lako je videti da način na koji smo dokazali Teoremu 2.1, naprimer, uopšte ne zavisi od toga što je oblast integracije konus, ili što je jezgro operatora homogeno. Jedino što se tu koristi jeste da se operator, za koji dokazujemo da je ograničen na nekom L^p pr- storu s težinom, može primeniti na te težinske funkcije i da ih na neki način reprodukuje (v. (2.25), i da slično važi za adju- govani operator (2.26)). Ostatak dokaza je Hölderova nejednakost. Ali mi već znamo da slične relacije važe za operator (22). Posledica 4.1 b) pokazuje da operator $P_{\beta,\gamma}$ primenjen na težin- funkciju $s^{\alpha-\gamma}$(ovde se mora uzeti apsolutna vrednost jezgra, je- operator nije pozitivan), daje $s^{(\gamma-\beta+2)+\alpha-\gamma}$. Adjungovani operator operatora $P_{\beta,\gamma}$ ima jezgro $S^{\beta}(w-\bar{z}) = \overline{S^{\beta}(z-\bar{w})}$, tako da Posledica 4.1 b) istovremeno daje i potrebnu relaciju za adjun- govani operator. Sada je jasno da se Teorema 4.1 za $p = q$

može dokazati na sličan način kao Teorema 2.1. Primetimo da je upravo na taj način dokazana odgovarajuća teorema za jediničnu kuglu (teorema Rudina-Forellia, v. [28]). Analog Posledice 4.1 b) (i Leme 4.4 b) je sadržan u Stavu 1.4.10 navedene knjige [28].

Konačno, primetimo da je operator $P_{\beta,\gamma}$ homogen u odnosu na automorfizme oblasti T_V na sličan način kao što je operator (2.1) bio homogen u odnosu na grupu G(V) konusa. Zaista, ako nazovemo <u>homogenim jezgrom</u> u T_V funkciju $k: T_V \times T_V \to \mathbb{R}_+$, za koju važi

$$k(gz,gw) = |A|^{\varkappa} k(z,w)$$

za neko $\varkappa \in \mathbb{R}$ i za svaki automorfizam $g \in G(T_V)$, $g = (A,b)$ (v. 4.2), onda operator $P_{\beta,\gamma}$ ima homogeno jezgro (po apsolutnoj vrednosti).

To se lako vidi, jer je apsolutna vrednost jezgra jednaka $k(z,w) = |S^{\beta}(z-\bar{w})| s^{\gamma}(v)$; za funkciju $s^{\gamma}(v)$ već znamo, prema Lemi 4.3 da je homogena. Da bismo to dokazali za $|S^{\beta}(z-\bar{w})|$, prvo iz $S(gz-g\bar{w}) = S(Az-A\bar{w})$ vidimo da ova funkcija ne zavisi od b. Zatim iz definicije (3) funkcije S sledi

$$S(Az-A\bar{w}) = \int_V e^{i(Az-A\bar{w})\cdot t} dt = \int_V e^{i(z-\bar{w})\cdot A' t} dt = |A|^{-1} S(z-\bar{w}).$$

Iz ovoga sledi da $k(gz,gw) = |A|^{-\beta+\gamma} k(z,w)$, dakle jezgro je homogeno stepena $\varkappa = \gamma - \beta$.

Sada možemo dobiti analogon Leme 2.1 za operator sa homogenim jezgrom na T_V. Neka je operator definisan sa

$$Kf(z) = \int_{T_V} k(z,w) f(w) dw.$$

LEMA 4.6. *Ako je K operator na homogenoj poluravni T_V sa jezgrom homogenim stepena $\varkappa$ i ako je K primenljiv na s^α, za $\alpha \in \mathbb{R}$, onda*

$$Ks^\alpha(z) = C\, s^{\varkappa+\alpha+2}(y) .$$

Dokaz leme se dobija pomoću smene promenljive u integral koji definiše Ks^α. Ako ovu lemu primenimo na operator $P_{\beta,\alpha}$ dobićemo novi dokaz Posledice 4.1 b).

4.5. Bergmanov prostor $B^2_\alpha(T_V)$

U ovom odeljku ćemo dobiti karakterizaciju funkcija iz Bergmanovog prostora sa težinom $B^2_\alpha(T_V)$ kao Laplaceove transfor cije funkcija sa nosačem u konusu. Ovakve teoreme su poznate kao teoreme Paley-Wienerovog tipa, jer su Paley i Wiener prvi dokazali da se funkcije iz H^2 na poluravni mogu reprezentovati kao Laplaceove transformacije funkcija iz $L^2(0,\infty)$. Na osnovu ovakve teoreme reprezentacije lako se dobija postojanje reprodukcionog jezgra za ovaj prostor (Teorema 4.3, odeljak 4.6).

U ovom odeljku biće zgodnije, radi jednostavnijeg pisan da se malo odstupi od notacije uvedene u 4.3. Sa $B^2_\alpha(T_V)$ ćemo obeležavati prostor svih funkcija(analitičkih na T_V) za koje važi

$$\int_{T_V} |F(x+iy)|^2\, s^\alpha(y)\, dxdy < \infty \tag{34}$$

tj. prostor, koji se prema (21) obeležavao sa $B^2_{(\alpha+1)/2}(T_V)$. Takođe ćemo pisati $L^2_{-\alpha-1}(V)$ za prostor funkcija sa

$$(35) \qquad \int_V |f(t)|^2 \, s^{-\alpha-1}(t)dt < \infty$$

dakle prostor, koji se prema (2.10) obeležavao sa $L^2_{-\alpha/2}(V)$.

U sledećoj, osnovnoj teoremi ovog odeljka se pokazuje da Laplaceova transformacija povezuje prostore (34) i (35).

TEOREMA 4.2. *Neka je $\alpha > -\tau$. Funkcija F pripada $B^2_\alpha(T_V)$ ako i samo ako postoji $f \in L^2_{-\alpha-1}(V)$ tako da se F predstavlja kao*

$$F(z) = \mathcal{L}f(z) = \int_V f(t)e^{iz\cdot t}dt .$$

Pritom važi jednakost

$$(36) \qquad \int_{T_V} |F(x+iy)|^2 \, s^{\alpha}(y)dxdy = \int_V |f(t)|^2 \, s^{-\alpha-1}(t)dt .$$

Slična teorema reprezentacije dokazana je u knjizi [29] za prostor $H^2(T_V)$. Dokaz koji ćemo dati u osnovi sledi metod iz [29] koji je već standardan; ipak, postoje neki tehnički problemi vezani za uvođenje težinske funkcije, pa ćemo navesti dosta detaljan dokaz.

Osnovni korak sledi iz činjenice da funkcija iz $B^2_\alpha(T_V)$ teži nuli, kad $|z|\to\infty$, pod uslovom da z ne prilazi granici oblasti T_V. Ovo je svojstvo karakteristično za sve funkcije koje pripadaju raznim Bergmanovim ili Hardyevim prostorima; u Lemi 4.8 ćemo tačno formulisati to svojstvo za funkcije iz $B^2_\alpha(T_V)$.

Prethodno posmatramo funkciju $d(y)$ (rastojanje tačke y od granice konusa), pomoću koje će biti definisane oblasti koje su sadržane unutar T_V (ne prilaze granici T_V). Primetimo da se, za razliku od jednodimenzionalnog slučaja, granica oblasti T_V

sastoji, osim iz $\mathbb{R}^n$, i iz $\mathbb{R}^n + i\partial V$.

Ovde smo sa ∂V označili granicu konusa V: $\partial V = \overline{V} \setminus V$ (konus V je otvoren). Obeležimo sa Σ_V deo jedinične sfere koj je sadržan u V, $\Sigma_V = \Sigma \cap V$.

Neka je $d(y) = d(y, \partial V)$ rastojanje tačke $y \in V$ od granice konusa. Onda, kao što je lako videti, važi

$$d(y) = \inf_{t' \in \Sigma_V} y \cdot t' \tag{37}$$

(v. [31]). Za konus V_1 se kaže da je kompaktno sadržan u V, ak $\overline{V}_1 \subseteq V$; to se kraće piše $V_1 \Subset V$. Za ovakav V_1 postoji konstanta $c > 0$ tako da važi

$$c|y| \leq y \cdot t'$$

za svako $y \in V_1$, uniformno po $t' \in \Sigma_V$ (v. [31]). Odatle sledi

$$d(y) \geq c|y| , \qquad y \in V_1 . \tag{38}$$

<u>LEMA 4.7.</u> <u>Neka je</u> V <u>konus u</u> $\mathbb{R}^n$ <u>i</u> V_1 <u>potkonus takav da</u> $V_1 \Subset V$.

a). $(d(y))^n \leq C_1 s(y) \leq C_2 |y|^n$, <u>za</u> $y \in V$

b) <u>ako</u> $y \in V_1$, <u>onda važi i</u> $|y| \leq C_3\, d(y)$, <u>odnosno</u>

$$(d(y))^n \asymp s(y) \asymp |y|^n .$$

<u>Primedba</u>. Oznaka $f(y) \asymp g(y)$ znači da postoje konstante C_1 i C_2 tako da $C_1 f(y) \leq g(y) \leq C_2 f(y)$.

<u>Dokaz</u>. Prema Posledici 1.1 predstavimo funkciju s u obliku

$$\frac{1}{s(y)} = \int_V e^{-y \cdot t} dt .$$

Ako se u ovaj integral uvedu polarne koordinate $r = t$, $t' = t/r$ a zatim izvrši linearna smena promenljive, biće

(39)
$$\frac{1}{s(y)} = \int_{\Sigma_V} dt' \int_0^\infty e^{-ry\cdot t'} r^{n-1} dr$$
$$= \int_{\Sigma_V} \frac{dt'}{(y\cdot t')^n} \int_0^\infty e^{-\rho}\rho^{n-1} d\rho = (n-1)! \int_{\Sigma_V} \frac{dt'}{(y\cdot t')^n}$$

Pošto je $y\cdot t' \leq |y||t'| = |y|$, onda iz (39) sledi $s(y) \leq C|y|^n$. Sem toga, prema (37), $d(y) \leq y\cdot t'$ i kad se to zameni u (39) dobije se $s(y) \leq C\, d^n(y)$. Time je a) dokazano. Tvrđenje b) sledi neposredno iz (38). Time je lema dokazana.

Sledeća lema nam daje ocene za rast funkcija iz $B^2(T_V)$; od te leme, koja je i sama po sebi zanimljiva, koristićemo u dokazu teoreme tvrđenja b) i d).

Obeležićemo sa $B_{z,r}$ loptu radijusa r u $\mathbb{C}^n$: $B_{z,r} = \{w\in\mathbb{C}^n : |w-z| < r\}$; slično za loptu u $\mathbb{R}^n$: $U_{x,r} = \{u\in\mathbb{R}^n : |x-u| < r\}$. Ako je $z = x + iy$, onda očigledno

(40) $$B_{z,r} \subseteq U_{x,r}\times U_{y,r} .$$

<u>LEMA 4.8.</u> <u>Neka je</u> $\alpha > -2$. <u>Ako</u> $F\in B^2_\alpha(T_V)$, <u>onda</u>

a) $$|F(z)|^2 \leq Cr^{-2n} s^{-\alpha}(y)\int_{U_{y,r}} s^\alpha(v)\int_{U_{x,r}} |F(w)|^2 du\,dv$$

<u>gde je</u> $r = d(y)/2$.

b) <u>Neka je</u> D <u>kompaktan skup u</u> V <u>takav da</u> $d(D,\partial V) > c$. <u>Onda</u>

$$\sup_{y\in D} |F(x+iy)| \to 0 , \quad |x| \to \infty .$$

c) $|F(x+iy)| \leqslant C\, d^{-n}(y) s^{-\alpha/2}(y)\, |||F|||_{2,\alpha}$

d) $\left(\int_{R^n} |F(x+iy)|^2 dx\right)^{1/2} \leqslant C\, d^{-n/2}(y) s^{-\alpha/2}(y)\, |||F|||_{2,\alpha}$.

(Podsetimo da $|||F|||^2_{2,\alpha}$ predstavlja levu stranu jednakosti (36)

Dokaz. Pošto je F analitička funkcija, onda je $|F|^2$ subharmonijska, pa prema teoremi o srednjoj vrednosti imamo

$$|F(z)|^2 \leqslant Cr^{-2n} \int_{B_{z,r}} |F(w)|^2 du\, dv$$

(ako je r dovoljno malo, tako da $B_{z,r} \subseteq T_V$). Prema (40) sledi

(41) $$|F(z)|^2 \leqslant Cr^{-2n} \int_{U_{y,r}} \int_{U_{x,r}} |F(w)|^2 dudv .$$

Stavimo sada $r = d(y)/2$; onda $U_{y,r} \subseteq V$. Štaviše nije teško videti da

$$U_{y,r} \subseteq \left\langle \frac{y}{2}, \frac{3y}{2} \right\rangle$$

Pošto je funkcija s monotona po konusu, onda će za v $U_{y,r}$ važiti $s(y/2) \leqslant s(v) \leqslant s(3y/2)$; odnosno, zbog homogenosti funkcije s:

(42) $$(1/2)^n s(y) \leqslant s(v) \leqslant (3/2)^n s(y) .$$

Sada iz (41) sledi

(43) $$|F(z)|^2 \leqslant Cr^{-2n} s^{-\alpha}(y) \int_{U_{y,r}} s^{\alpha}(v) \int_{U_{x,r}} |F(w)|^2 dudv$$

sa $r = d(y)/2$, pri čemu se za $\alpha > 0$ koristi desna, a za $\alpha < 0$ leva strana nejednakosti (42). Time je a) dokazano.

b) Po pretpostavci $F \in B^2_\alpha(T_V)$, što znači da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći $N > 0$, tako da

$$(44)\qquad \int_V s^{\alpha}(v)\int_{|u|>N}|F(u+iv)|^2 du dv < \varepsilon .$$

Neka je sada $z = u + iv$ takvo da je $U_{x,r} \times U_{y,r}$ (sa $r = d(y)/2$) podskup oblasti integracije u (44), tako da se integral s desne strane (43) majorira sa (44) i onda iz (43) sledi

$$(45)\qquad |F(z)|^2 \leqslant C\varepsilon d^{-2n}(y)s^{-\alpha}(y) .$$

Sada ćemo uzeti supremum u (45) po svim $y \in D$. Kako je D skup koji je odvojen od granice konusa, onda postoji potkonus $V_1 \subseteq V$ koji sadrži D. Prema Lemi 4.7 onada važi da je $s(y) \asymp d^n(y)$ i pošto je $d(y)$ ograničeno odozdo, onda se desna strana (45) može učiniti proizvoljno malom i time je tvrđenje b) dokazano.

c) Tvrđenje sledi neposredno iz a). Pošto je oblast integracije u integralu u a) sadržana u T_V, onda iz nejednakosti a) sledi

$$|F(z)|^2 \leqslant Cd^{-2n}(y)s^{-\alpha}(y)\int_{T_V}|F(w)|^2 s^{\alpha}(v)du dv$$

a to je upravo c).

d) Napisaćemo a) u obliku

$$|F(z)|^2 \leqslant Cr^{-2n}s^{-\alpha}(y)\int_{U_{y,r}} s^{\alpha}(v)\int_{U_{0,r}}|F(u+x+iv)|^2 du dv$$

i integraliti po $x \in \mathbb{R}^n$; biće (posle još jedne smene promenljive)

$$\int_{\mathbb{R}^n}|F(z)|^2 dx \leqslant Cr^{-2n}s^{-\alpha}(y)\int_{U_{0,r}}du\int_{U_{y,r}}s^{\alpha}(v)\int_{\mathbb{R}^n}|F(t+iv)|^2 dt dv$$

a to se, kao i malopre, majorira sa

$$Cr^{-2n}s^{-\alpha}(y)r^n \, |||F|||^2_{2,\alpha} .$$

Time je lema dokazana.

Pre nego što pređemo na dokaz teoreme, navedimo još jedno pomoćno tvrđenje, čiji se dokaz može naći u [29].

Uvedimo oznaku $e_y(t) = e^{-y\cdot t}$.

LEMA 4.9. [29] Ako $fe_y \in L^2(\mathbb{R}^n)$, za svako $y \in V$, onda $fe_y \in L^1(\mathbb{R}^n)$ za svako $y \in V$.

Dokaz Teoreme 4.2.

Dokazaćemo prvo "lakši deo":

(i) Ako $f \in L^2_{-\alpha-1}(V)$, onda $F \in B^2_\alpha(T_V)$.

Pokažimo pre svega da iz uslova $f \in L^2_{-\alpha-1}(V)$ sledi da $fe_y \in L^2(V)$, za svako $y \in V$. Zaista

(46) $$\int_V e^{-2y\cdot t}|f(t)|^2 dt \leqslant \sup_{t\in V} e^{-2y\cdot t} s^{\alpha+1}(t) \int_V |f(t)|^2 s^{-\alpha-1}(t$$

Pošto je, po pretpostavci teoreme, $\alpha+1 > 1-\tau \geqslant 0$, i prema Lemi 4.7 $s(t) \leq |t|^n$, lako je videti da je za svako $y \in V$ funkci $e^{-2y\cdot t} s^{\alpha+1}(t)$ ograničena, pa iz (46) sledi da $fe_y \in L^2(V)$.

Prema Lemi 4.9 funkcija fe_y je integrabilna, tako da integral

(47) $$F(z) = \int_V e^{iz\cdot t} f(t)dt$$

apsolutno konvergira i predstavlja analitičku funkciju. Prema (47) je $F(x+iy) = \mathcal{F}(fe_y)(x)$ i kad primenimo Plancherelovu teoremu (v. (9)) dobijemo

$$\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2 dx = \int_V |e^{-y\cdot t} f(t)|^2 dt .$$

Pomnožimo poslednju jednakost sa $s^\alpha(y)$ i integralimo po V;

slediće, posle primene Fubinieve teoreme

$$\int_{T_V} |F(x+iy)|^2 s^{\alpha}(y)dxdy = \int_V |f(t)|^2 \left(\int_V e^{-2y\cdot t} s^{\alpha}(y)dy\right)dt .$$

Unutrašnji integral je, pošto je $\alpha > -\tau$, prema Lemi 3.5 (i (1.17)) jednak $C\, s^{-\alpha-1}(t)$, tako da dobijemo

$$\int_{T_V} |F(x+iy)|^2 s^{\alpha}(y)dy = C \int_V |f(t)|^2 s^{-\alpha-1}(t)dt$$

a to je upravo (36). Time je prvi deo teoreme dokazan.

(ii) <u>Ako</u> $F \in B^2_{\alpha}(T_V)$, <u>onda postoji</u> $f \in L^2_{-\alpha-1}(V)$ <u>tako da</u> $F = \mathcal{L}f$.

Prvo ćemo pokazati da, ako stavimo

$$f_y(t) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iz\cdot t} F(z)dx \tag{48}$$

onda ova funkcija ne zavisi od y. Ovo će slediti primenom (jednodimenzionalne) Cauchyeve teoreme i Leme 4.8 b). Zaista, dovoljno je dokazati da za neke dve tačke y' i y'' iz V važi

$$f_{y'}(t) = f_{y''}(t) \tag{49}$$

a onda je lako naći skup D koji ih sadrži i zadovoljava uslove Leme 4.8 b). Dalje, možemo uzeti tačke oblika $y' = (y_1', y_2, \ldots, y_n)$ $y'' = (y_1'', y_2, \ldots, y_n)$, jer će se opšti slučaj dobiti iteracijom ovog postupka. Obeležimo sa $G(z_1)$ funkciju jedne promenljive

$$G(z_1) = e^{-i(z_1t_1+z_2t_2+\cdots+z_nt_n)}F(z_1,z_2,\ldots,z_n)$$

pri čemu su sve ostale promenljive fiksirane. Primenom Cauchyeve teoreme na pravougaonik $(-R,R)\times(y_1', y_1'')$ dokazaćemo da

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x_1+iy_1')dx_1 = \int_{-\infty}^{\infty} G(x_1+iy_1'')dx_1 . \tag{50}$$

Za to je dovoljno dokazati da integrali po bočnim stranama pomenutog pravougaonika teže nuli, kad $R \to \infty$. To lako sledi iz Leme 4.8 b) prema kojoj $G(R+iy) \to 0$, kad $R \to \infty$.

Sad (50) integralimo po $x_2, \ldots, x_n$ i dobijemo (49). Dakle, možemo da stavimo $f_y(t) = f(t)$, tj. prema (48)

$$f(t)e^{-y\cdot t} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot t} F(x+iy)dx \tag{51}$$

Pomoću Plancherelove teoreme, zaključujemo iz (51) da, pošto funkcija $F(\cdot+iy)$ $L^2(\mathbb{R}^n)$, za svako $y \in V$, na osnovu Leme 4.8 d), onda i funkcija $fe_y \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Prema Lemi 4.9 sad sledi da je funkcija fe_y integrabilna i stoga se (51) može obrnuti i dobiti

$$F(x+iy) = \mathcal{F}(fe_y)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(t)e^{-y\cdot t}e^{ix\cdot t}dt \tag{52}$$

Na kraju još treba pokazati da za funkciju f važi

$$f(t) = 0 \ , \ \text{s.s. } t \notin V \ .$$

Ako $t_0 \notin V$, onda postoji $y_0 \in V$ tako da je $y_0 \cdot t_0 < 0$. Štaviš postoji okolina tačke t_0, $B(t_0)$, koja ne seče V i takva da za svako $t \in B(t_0)$ važi $t\cdot y_0 \leq -\delta < 0$. Odavde sledi, za $k > 0$

$$kt\cdot y_0 \leq -k\delta < 0 \ . \tag{53}$$

S druge strane, iz (52) sledi prema Plancherelovoj teore

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2y\cdot t}|f(t)|^2dt = \int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^2dx \tag{54}$$

i onda, pomoću (53)

$$\int_{B(t_0)} e^{2k\delta}|f(t)|^2dt \leq \int_{B(t_0)} e^{-2ky_0\cdot t}|f(t)|^2dt \leq$$

$$\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2ky_o\cdot t}|f(t)|^2dt = \int_{\mathbb{R}^n}|F(x+iky_o)|^2dx$$

Poslednji integral se ocenjuje pomoću Leme 4.8 d) sa

$$C\, d^{-n}(ky_o)s^{-\alpha}(ky_o)\,|||F|||^2_{2,\alpha}$$

a ovo je, prema Lemi 4.7 manje od $C\,k^{-n}\,k^{-\alpha n}$. Onda, konačno, dobijamo

$$\int_{B(t_o)}|f(t)|^2dt \leqslant C\,e^{-2k\delta}\,k^{-(\alpha+1)n}$$

za svako $k>0$. Kad pustimo da $k\to\infty$ slediće $f(t)=0$, s.s. $t\in B(t_o)$. Time je dokazano da se oblast integracije u (52) svodi na V, tj. da važi reprezentacija (47). Konačno, na sličan način kao u dokazu dela (i), integraleći obe strane jednakosti (54) (u kojoj je sada s leve strane integral po V) po $s^\alpha(y)dy$, dobijamo da važi formula (36), tj. da $f\in L^2_{-\alpha-1}(V)$. Time je teorema dokazana.

<u>Primedba</u>. Teorema 4.2 može se lako uopštiti da obuhvati slučaj $1\leq p<2$; jedino što bi se u dokazu, na mestu gde se koristi Plancherelova jednakost, morala koristiti Hausdorff-Youngova nejednakost (v. [12], gde su posmatrani Bergmanovi prostori bez težina, v. i odeljak 4.7 gde na sličan način posmatramo H^p prostore). Međutim, za $p<2$ se dobijaju "asimetrični" rezultati, na primer, iz $f\in L^p_{-\alpha-1}(V)$ sledi $\mathcal{L}f\in B^{p',p}_\alpha(T_V)$; sem toga, u sledećem odeljku koristimo samo ovo tvrđenje za $p=2$, tako da se nećemo zadržavati na ovom uopštenju.

4.6. Reprodukciono jezgro za $B^2_\alpha(T_V)$

Na osnovu Teoreme 4.2 lako je naći reprodukciono jezgro za prostor $B^2_\alpha(T_V)$.

TEOREMA 4.3. *Neka je $\alpha > -\tau$. Funkcija $S^{\alpha+2}(z-\bar{w})$ je reprodukciono jezgro za $B^2_\alpha(T_V)$, tj. za $F \in B^2_\alpha(T_V)$ važi*

(55) $$F(z) = \int_{T_V} S^{\alpha+2}(z-\bar{w})F(w)s^\alpha(v)dw$$

Dokaz. Pošto $F \in B^2_\alpha(T_V)$, onda prema Teoremi 4.2 postoji funkcij $f \in L^2_{-\alpha-1}(V)$ tako da je

(56) $$F(z) = \int_V e^{iw\cdot t}f(t)dt = \mathcal{F}h(u)$$

gde smo stavili

(57) $$h(t) = e^{-v\cdot t}f(t)$$

(kao i dosada, $z = x+iy$, $w = u+iv$).

Sem toga, prema Lemi 4.1 imamo

(58) $$S^{\alpha+2}(z-\bar{w}) = C\int_V e^{i(z-\bar{w})\cdot t}s^{\alpha+1}(t)dt = \mathcal{F}g(x-u)$$

gde smo stavili

(59) $$g(t) = e^{-(y+v)\cdot t}s^{\alpha+1}(t) .$$

Sada primenom Plancherelove formule na funkcije $g,h \in L^2($ (ovo se proverava kao u dokazu formule (46)) dobijemo

(60) $$\int_{R^n} S^{\alpha+2}(z-\bar{w})F(w)du = C\int_V e^{ix\cdot t}g(t)h(t)dt =$$

prema formulama (56) i (58), pošto obe funkcije g i h imaju nosač u V. Poslednji integral u (60) je prema oznakama (57) i (59) jednak

$$
\begin{aligned}
&\int_V e^{ix\cdot t}(e^{-(y+v)\cdot t}s^{\alpha+1}(t))(e^{-v\cdot t}f(t))dt \\
(61)\qquad &= C\int_V e^{i(x+iy)\cdot t}e^{-2v\cdot t}s^{\alpha+1}(t)f(t)dt
\end{aligned}
$$

Sad pomnožimo levu stranu (60) sa $s^{\alpha}(v)$ i integralimo po V, biće na osnovu (61)

$$
\begin{aligned}
&\int_{T_V} S^{\alpha+2}(z-\overline{w})F(w)s^{\alpha}(v)dudv \\
(62)\qquad &= C\int_V s^{\alpha}(v)\int_V e^{iz\cdot t}s^{\alpha+1}(t)f(t)e^{-2v\cdot t}dt\,dv
\end{aligned}
$$

Primenimo Fubinievu teoremu na poslednji integral; dobićemo da je on jednak

$$
(63)\qquad C\int_V e^{iz\cdot t}s^{\alpha+1}(t)f(t)\int_V s^{\alpha}(t)e^{-2v\cdot t}dv\,dt
$$

a unutrašnji integral je, prema Lemi 3.5, jednak $C\,s^{-\alpha-1}(t)$ i kad se to zameni u (63), slediće iz jednakosti (62) i (63)

$$
\int_{T_V} S^{\alpha+2}(z-\overline{w})F(w)s^{\alpha}(v)dw = C\int_V e^{iz\cdot t}f(t)dt = F(z)
$$

prema (56). Tako smo dobili jednakost (55) i time je teorema dokazana.

4.7. H^p prostori s težinom

U ovom odeljku ćemo posmatrati jedno uopštenje Hardyevih prostora uvedenih u odeljku 4.3 (v. (17)). Ako je w data analitička funkcija u T_V, Hardyev prostor s težinom $H^p_w(T_V)$ se sastoji iz svih funkcija F analitičkih u T_V za koje važi

$$\sup_{y\in V} \int_{R^n} |F(x+iy)w(x+iy)|^p dx$$

Dokazaćemo da za prostore $H^p_w(T_V)$, $1\leq p\leq 2$, važi teorema Paley Wienerovog tipa (slično kao što je u 4.5 to bilo pokazano za prostor $B^2_\alpha(T_V)$), tj. da se funkcije iz ovog prostora reprezentuju kao Laplaceove transformacije funkcija iz nekih L^p prostora sa težinom.

Za slučaj jedne promenljive teoreme ovog tipa su dokazali: Rooney [25] , za specijalne težine $w(z) = z^\alpha$, i Benedetto i Heinig [4] za opštije težine.

Mi ćemo posmatrati (u n-dimenzionalnom slučaju) samo specijalne težine stepenog oblika (kao kod Rooneya). Pokazaće se da je pogodno izabrati za težinu stepene Cauchy-Szegöovog jezgra.

Kao što je ranije pomenuto odgovarajuće teoreme za $H^p(T_V)$ prostore bez težina su dokazali Stein i Weiss. Navešćemo te teoreme, pošto ćemo iz njih izvesti reprezentaciju za $H^p_w(T_V)$ - prostore sa težinom.

TEOREMA 4.4. [29] Neka je $1 \leq p \leq 2$ i neka $f \in L^p(V)$. Tada funkcija $F = \mathcal{L}f$ pripada $H^{p'}(T_V)$ i važi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \leq c\left(\int_V |f(t)|^p e^{-py\cdot t} dt\right)^{1/p}.$$

TEOREMA 4.5. [29] Neka je $1 \leq p \leq 2$ i neka $F \in H^p(T_V)$. Tada postoji funkcija $f \in L^{p'}(V)$ tako da je $F = \mathcal{L}f$ i da važi

$$\left(\int_V |f(t)|^{p'} e^{-p'y\cdot t} dt\right)^{1/p'} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Primetimo da su u knjizi [29] ove teoreme dokazane samo za $p = 2$, ali je očigledno dokaz za $1 \leq p < 2$ veoma sličan, treba samo umesto Plancherelove jednakosti iskoristiti Hausdorff-Youngovu nejednakost.

Stavimo sada $w(x+iy) = S^{\alpha}(x+iy)$. Pisaćemo $H^p_{\alpha}(T_V)$ umesto $H^p_{S^{\alpha}}(T_V)$. Odgovarajući L^p prostori s težinom biće ovde prostori sa normom

$$\left(\int_V |f(t)|^p s^{\alpha p}(t) dt\right)^{1/p}$$

Obeležićemo ovaj prostor (radi jednostavnije oznake) sa $L^p_{\alpha}(V)$ (to je $L^p_{\alpha+1/p}(V)$ prema definiciji (2.9) iz 2.2.

U sledećim teoremama V je homogen samoadjungovan konus ranga m u $\mathbb{R}^n$, a $\tau = m/n$, kao i ranije.

TEOREMA 4.6. Neka je $1 \leq p \leq 2$. Neka je $2\tau > 1+1/p$ i $1-\tau < \alpha < \tau - 1/p$. Ako $f \in L^p_{\alpha}(V)$, onda $F = \mathcal{L}f \in H^{p'}_{\alpha}(T_V)$ i važi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy) S^{\alpha}(x+iy)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \leq c\left(\int_V |f(t)|^p s^{\alpha p}(t) e^{-py\cdot t} dt\right)^{1/p}.$$

TEOREMA 4.7. Neka je $1 \leq p \leq 2$. Neka je $1-\tau<\alpha$ i $1/p'<\tau$. Ako $F \in H^p_{-\alpha}(T_V)$, onda postoji $f \in L^{p'}_{-\alpha}(V)$ tako da je $F = \mathcal{L}f$ i važi i važi

$$\left(\int_V |f(t)|^{p'} s^{-\alpha p'}(t) e^{-p' y\cdot t} dt\right)^{1/p'} \leq C\left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x+iy) S^{-\alpha}(x+iy)|\right.$$

Primedba. Za konus $\mathbb{R}^n_+$ kada je $\tau = 1$, uslovi koji vezuju τ i p su automatski zadovoljeni, a uslovi za α su isti kao za jednu dimenziju. U opštem slučaju, vrednosti p, za koje teorem važe, zavise od ranga konusa.

Dokaz obeju teorema dobiće se svođenjem na slučaj bez težina - Teoreme 4.4 i 4.5 respektivno.

To ćemo učiniti koristeći Riemann-Liouvilleov integral, koji je uveden u 3.4. Ovaj operator, kao što smo videli, ima homogeno jezgro i na osnovu toga je u odeljku 3.4 bila dokazan nejednakost s težinama. Sem toga, ovaj operator je zadat kao konvolucija i sada ćemo iskoristiti tu osobinu.

Prema definiciji (3.16) Riemann-Liouvilleovog integrala i prema definiciju (4.5) konvolucije, vidimo da je

$$R_\beta f(x) = \int_{\langle 0,x\rangle} s^\beta(x-t) f(t)dt = (f * s^\beta)(x) .$$

Ako na ovu funkciju primenimo Laplaceovu transformaciju, biće prema (4.6)

$$\mathcal{L}(R_\beta f)(z) = \mathcal{L}f(z)\, \mathcal{L}s^\beta(z)$$

i ako sad primenimo Lemu 4.1 dobijamo

$$(64) \qquad \mathcal{L}(R_\beta f)(z) = \mathcal{L}f(z) S^{\beta+1}(z).$$

Ova formula će predstavljati jedan ključni korak u dokazu teorema. Drugi će se dobiti iz nejednakosti za Riemann-Liouvilleov integral. Trebaće nam samo slučaj $p = q$ Teoreme 3.3, ali u malo opštijem obliku; navešćemo taj oblik kao posledicu te teoreme.

POSLEDICA 4.3. Neka je $1 \leq p \leq \infty$. Neka je $\beta > -\tau$ i $\mu < \tau$. Tada

$$(65) \quad \int_V \left|\frac{R_\beta f(x)}{s^{\beta+1}(x)}\right|^p s^{\mu p-1}(x) e^{-py\cdot x} dx \leq C \int_V |f(x)|^p s^{\mu p-1}(x) e^{-py\cdot x} dx.$$

Dokaz. Formula (65) je upravo nejednakost iz Teoreme 3.3 kad stavimo $p = q$, osim što imamo još dodatnu težinu $e^{-py\cdot x}$. Dokazaćemo kako se ovaj slučaj lako svodi na dokazani. To će slediti na osnovu monotonije funkcije $\varphi(x) = e^{-y\cdot x}$: za $t <_V x$ važi $e^{-y\cdot t} \geq e^{-y\cdot x}$. Odatle sledi

$$e^{-y\cdot x} R_\beta f(x) = e^{-y\cdot x} \int_{\langle 0,x\rangle} s^\beta(x-t) f(t)dt \leq \int_{\langle 0,x\rangle} s^\beta(x-t) f(t) e^{-y\cdot t} dt.$$

Sad stavimo $f(t)e^{-y\cdot t} = g(t)$; biće, prema prethodnom,

$$(66) \qquad e^{-y\cdot x} R_\beta f(x) \leq R_\beta g(x).$$

Ako primenimo Teoremu 3.3 (sa $p = q$) na funkciju g, dobićemo (pomoću (66)) upravo tvrđenje posledice.

Primedba. Očigledno je da posledica važi i kad se funkcija $e^{-y\cdot x}$ zameni proizvoljnom monotono opadajućom funkcijom φ.

Dokaz Teoreme 4.6. Prema pretpostavci je $1-\tau < \alpha < \tau - 1/p$, tako da možemo staviti $\beta = \alpha - 1$ i $\mu = \alpha + 1/p$ u Posledicu 4.3 i dobiti da važi

$$\int_V \left| \frac{R_{\alpha-1} f(x)}{s^{\alpha}(x)} \right|^p s^{\alpha p}(x) e^{-py\cdot x} dx \leqslant C \int_V |f(x)|^p s^{\alpha p}(x) e^{-py\cdot x} dx \ .$$

Dakle, ako stavimo $R_{\alpha-1} f = g$ dobili smo

$$\int_V |g(x)|^p e^{-py\cdot x} dx \leqslant C \int_V |f(x)|^p s^{\alpha p}(x) e^{-py\cdot x} dx \ . \tag{67}$$

To znači da se na funkciju $g \in L^p(V)$ može primeniti Teorema 4.4 i dobiti da za Laplaceovu transformaciju $\mathcal{L} g = G$ važi

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x+iy)|^{p'} dx\right)^{1/p'} \leqslant C\left(\int_V |g(x)|^p e^{-py\cdot x} dx\right)^{1/p} . \tag{68}$$

Sada ćemo primeniti (64)

$$G(z) = \mathcal{L} g(z) = \mathcal{L}(R_{\alpha-1} f)(z) = \mathcal{L} f(z) S^{\alpha}(z) = F(z) S^{\alpha}(z)$$

i ako to zamenimo u levu stranu (68) i primenimo i (67), dobićemo tačno tvrđenje teoreme.

Dokaz Teoreme 4.7. Ako $F\ H^p_{-\alpha}(T_V)$, onda, po definiciji $G = FS$ pripada prostoru $H^p(T_V)$, tako da se može primeniti Teorema 4.5 i dobiti da je G Laplaceova transformacija neke funnkcije $g \in L^{p'}(V)$ tako da

$$\left(\int_V |g(x)|^{p'} e^{-p'y\cdot x} dx\right)^{1/p'} \leqslant C \left(\int_{\mathbb{R}^n} |G(x+iy)|^p dx\right)^{1/p} . \tag{69}$$

Ali sada, za $F = GS^{\alpha}$, imamo prema (64)

$$F(z) = G(z)S^{\alpha}(z) = \mathcal{L}g(z)\mathcal{L}s^{\alpha-1}(z) = \mathcal{L}(g * s^{\alpha-1})(z) = \mathcal{L}(R_{\alpha-1}g)(z)$$

i ako stavimo $R_{\alpha-1}g = f$ dobijamo reprezentaciju $F(z) = \mathcal{L}f(z)$ za funkciju F i još je samo ostalo da se dokaže da je $f \in L^{p'}_{-\alpha}(V)$. A to opet sledi iz Posledice 4.3 u koju sad stavimo $\beta = \alpha-1$ i $\mu = 1/p$. Imamo

$$\int_V \left|\frac{R_{\alpha-1}g(x)}{s^{\alpha}(x)}\right|^{p'} e^{-p'y\cdot x}dx \leq C\int_V |g(x)|^{p'} e^{-p'y\cdot x}dx$$

drugim rečima

$$\int_V |f(x)|^{p'} s^{-\alpha p'}(x)e^{-p'y\cdot x}dx \leq C \int_V |g(x)|^{p'} e^{-p'y\cdot x}dx$$

a to, zajedno sa nejednakošću (69) (u koju stavimo $G(z) = f(z)S^{-\alpha}(z)$) dokazuje teoremu.

Primedba. Način dokaza Teorema 4.6 i 4.7 se razlikuje od metoda kojim su u [25] i [4] dokazani odgovarajući rezultati za jednu promenljivu. U tim radovima suuautori koristili uopštenje Hausdorff-Youngove nejednakosti (nejednakost s težinama za Fourierovu transformaciju). Ipak, način naveden ovde je jednostavniji, jer koristi samo nejednakost za Riemann-Liouvilleov operator, koji je pozitivan i prema tome jednostavniji nego Fourierov operator.

4.8. Primedbe

Teoriji klasičnih H^p prostora u poluravni ili na disku posvećeno je mnogo knjiga (v. napr. [9] ili [17]). Prostori koje smo posmatrali u ovoj glavi su n-dimenzionalna uopštenja tih prostora - rezultati koje smo dobili su n-dimenzionalna uopštenja nekih klasičnih teorema.

Laplaceova transformacija na konusima je definisana na primer u [29] ili [31].

O pojmu homogenih oblasti v. na primer 14 ili 23 (gde se posmatraju i opštije oblasti).

Teoremu 4.1 iz odeljka 4.4 u jednodimenzionalnom slučaju (za disk) su dokazali Hardy i Littlewood (v. [9]). Kao što smo već napomenuli, analogne rezultate za jediničnu loptu u $\mathbb{C}^n$ su dobili Rudin i Forelli (v. [28]) i Beatrous i Burbea [3

Klasična teorema Paley-Wienera bila je generalisana na razne načine. Rooney [25] i Benedetto i Heinig [4] su dokazali da važi na H^p prostorima s težinama (za $n = 1$). Genchev [13] je dokazao ovu teoremu za Bergmanove prostore. Za funkcije više promenljivih imamo teoreme Steina i Weissa za $H^p(T_V$ (Teoreme 4.4 i 4.5). Genchev je posmatrao Bergmanove prostore (bez težina) na oblastima $T_G = \mathbb{R}^n + iG$, pri cemu skup G nije obavezno konus. Ovakve oblasti se zovu valjkaste oblasti (tub domains) sa osnovom G.

U ovoj glavi su dokazane Paley-Wienerove teoreme za dve vrste prostore - Bergmanove prostore s težinom (u 4.4) i Hardyeve prostore s težinom (u 4.7; v. i [22]).

O reprodukcionim jezgrima u raznim Hilbertovim prostorima postoji veoma obimna literatura. Bergman [5] je započeo ovu teoriju za prostore analitičkih funkcija. Za oblasti T_V su Rothaus [26] i Gindikin [14] našli reprodukciono jezgro za Bergmanov prostor $B^2(T_V)$. Bochner [6] je posmatrao reprodukciono jezgro za prostore na T_V, gde je V konus od matrica, a Mitchell [18] za neke druge oblasti u prostorima matrica.

B I B L I O G R A F I J A

[1] K.F. ANDERSEN, On Hardy's Inequality and Laplace Transfor in Weighted Rearrangement Invariant Spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 39 (1973), 295-299.

[2] K.F. ANDERSEN, Weighted Inequalities for the Stieltjes Transformation and Hilbert's Double Series, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 86A (1980), 75-84.

[3] F. BEATROUS and J. BURBEA, Sobolev Spaces of Holomorphic Functions in the Ball, preprint.

[4] J.J. BENEDETTO and H.P. HEINIG, Weighted Hardy Spaces and the Laplace Transform, in "Harmonic Analysis", ed. G. Mauceri et al., Lecture Notes in Mathematics 992, 240-277, Springer, 1983.

[5] S. BERGMAN, The Kernel Function and Conformal Mapping, Amer. Math. Soc. Survey V, Second (Revised) Edition, Providence, Rhode Island, 1970.

[6] S. BOCHNER, Group Invariance of Couchy's Formula in Several Variables, Ann. Math. 45 (1944), 686-707.

[7] J.S. BRADLEY, Hardy Inequalities with Mixed Norms, Canad. Math. Bull. 21 (4) (1978), 405-408.

[8] W.F. DONOGHUE, Jr., Distributions and Fourier Transforms, Academic Press, New York, 1969.

[9] P. DUREN, Theory of H^p Spaces, Academic Press, New York, 1970.

[10] L. GÅRDING, The Solution of Cauchy's Problem for Two Totally Hyperbolic Linear Differential Equations by Means of Riesz Integrals, Ann. Math. 48 (1947), 785-826.

[11] И.М. ГЕЛЬФАНД, Р.А. МИНЛОС, З.Я. ШАПИРО, Представления группы вращений и группы Лоренца, Москва, 1958.

[12] T.G. GENCHEV, Integral Representations for Functions Holomorphic in Tube Domains, Comptes rendus Acad. Bulg. Sci. 37 (1984), 717-720.

[13] T.G. GENCHEV, Some Theorems of Paley-Wiener's Type, in "Complex Analysis and Applications", Sofia, 1985.

[14] С.Г. ГИНДИКИН, Анализ в однородных областях, Успехи мат. наук XIX вып. 4(118)(1964), 3-92.

[15] G.H. HARDY, J.E. LITTLEWOOD and G. POLYA, Inequalities, Cambridge University Press, 1967.

[16] M. KOECHER, Positivitätsbereiche im R^n, Amer. J. Math. 79 (1957), 575-596.

[17] P. KOOSIS, Introduction to H_p Spaces, Cambridge University Press, 1980.

[18] J. MITCHELL, The Kernel Function in the Geometry of Matrices, Duke Math. J. 19 (1952), 575-583.

[19] B. MUCKENHOUPT, Hardy's Inequality with Weights, Studia Math. 44 (1972), 31-38.

[20] B. MUCKENHOUPT, Weighted Norm Inequalities for Classical Operators, in "Harmonic Analysis in Euclidean Spaces", Proc. Symp. Pure Math. Vol. 35, 69-83, Amer. Math. Soc. Providence, Rhode Island, 1979.

[21] T. OSTROGORSKI, Weighted Norm Inequalities for Hardy's Operator and Some Similar Operators in R^n, in Proc. "Alfred Haar Memorial Conference", Budapest, 1985.

[22] T. OSTROGORSKI, Weighted H^p Spaces on Homogeneous Half-planes, u štampi.

[23] И.И. ПЯТЕЦКИЙ-ШАПИРО, Геометрия классических областей и теория автоморфных функций, Москва, 1961

[24] M. RIESZ, L'intégrale de Riemann-Liouville et le problème de Cauchy, Acta Math. 81 (1949), 1-223.

[25] P.G. ROONEY, Generalized H^p Spaces and Laplace Transforms in "Abstract Spaces and Approximatio", ed P.L. Butzer et a 258-269, Birkhäuser, 1969.

[26] O. ROTHAUS, Domains of Positivity, Abhandl. Math. Sem. Hamburg, 24 (1960), 189-235.

[27] O. ROTHAUS, The Construction of Homogeneous Convex Cones. Bull. Amer. Math. Soc. 69 (1963), 248-250.

[28] W. RUDIN, Function Theory in the Unit Ball of C^n, Springer, 1980.

[29] E. M. STEIN and G. WEISS, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, Princeton University Press, 1971.

[30] Э.Б. ВИНБЕРГ, Теория однородных выпуклых конусов, Труды москов. мат. общества, 12 (1963), 303-353.

[31] В.С. ВЛАДИМИРОВ, Обобщенные функции в математической физике, Москва, 1979.