UNIVERZITET U BEOGRADU
PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

MIODRAG PEROVIĆ

GLOBALNA SVOJSTVA KVAZIKONFORMNIH PRESLIKAVANJA I PRESLIKAVANJA KVAZIKONFORMNA U SREDNJEM

(DOKTORSKA DISERTACIJA)

BEOGRAD, 1978. GOD.

SADRŽAJ

UVOD

Pojam kvazikonformnog preslikavanja, mada ne i sam naziv, uveo je H. Grötzsch 1928. godine. Pošto ne postoji konformno preslikavanje koje kvadrat preslikava na pravougaonik, prevodeći tjemena u tjemena, Grötzsch je tražio takvo preslikavanje koje je najbliže konformnom. Uvodeći mjeru odstupanja preslikavanja od konformnog on je napravio prvi korak u osnivanju teorije kvazikonformnih preslikavanja. Rad Grötzscha, iako primljen s interesovanjem, nije našao sljedbenike u tom trenutku.

Kvazikonformna preslikavanja su se ponovo pojavila 1935. godine u jednom radu M.A. Lavrentjeva, u vezi sa sistemima parcijalnih diferencijalnih jednačina koji su uopštenje sistema Cauchy - Riemanna.

Medjutim, teorija kvazikonformnih preslikavanja se dalje razvila iz praktične potrebe da se nadje elastičniji radni instrumenat nego što su to konformna preslikavanja u ravni. L. Ahlfors je 1936. godine, iste godine dobio je i Fildsovu medalju, u svojoj teoriji pokrivajućih površi koristio kvazikonformna preslikavanja i od tada je pojam kvazikonformnog preslikavanja postao široko poznat. Već 1937. godine O. Teichmüller je pomoću kvazikonformnih preslikavanja dobio važne rezultate u teoriji Riemannovih površi . Teorija kvazikonformnih preslikavanja u ravni je zatim doživjela svoj puni razmah.

Usavršavajući metod koji je koristio Grötzsch u svojim radovima, Ahlfors i Beurling su došli do vrlo moćnog i danas široko primijenjenog metoda modula. Lavrentjev je takodje riješio osnovni problem u svom pristupu teoriji kvazikonformnih preslikavanja dokazavši teoremu egzistencije.

Prvi put je kvazikonformna preslikavanja oblasti u prostoru razmatrao Lavrentjev /11/ 1938. godine. Značajno u tom radu nije bilo prirodno uopštenje definicije za dvodimenzioni slučaj, već što je tada postala jasna suštinska razlika prostornog od ravnog slučaja. Do 1941. godine izišli su još po jedan rad A.I. Markuševiča i M. A. Krejnesa i teorija je za narednih osamnaest godina praktično bila zaboravljena.

Osnovna poteškoća koja se pojavljuje u prostornom slučaju, na što je ukazao sam Lavrentjev, može se iskazati činjenicom da su sistemi parcijalnih diferencijalnih jednačina kojima se opisuju kvazikonformna preslikavanja preodredjeni, za razliku od ravnog slučaja, i tim više preodredjeni što je dimenzija prostora veća. S druge strane, ogromni i široko korišćeni aparat teorije konformnih preslikavanja ovdje nije mogao da bude iskorišćen, jer je teorija konformnih preslikavanja u suštini dvodimenzionalna - klasu konformnih preslikavanja u prostoru, kako je to pokazao još J. Liouville, čine samo Möbiusove transformacije, to jest superpozicije translacija, rotacija, homotetija i inverzija. Trivijalnost klase konformnih preslikavanja u prostoru je istovremeno bila i razlog povećanog interesovanja za relativno bogatu klasu kvazikonformnih preslikavanja.

Od 1959. godine n - dimenzionalna ($n \geqslant 3$) kvazikonformna preslikavanja, vrlo aktivno su izučavali matematičari više zemalja, naročito SSSR-a, SAD-a i Finske. Važan korak, koji je omogućio nagli razvoj teorije, bilo je 1957. godine B. Fugledeovo /5/ uopštenje pojma modula na prostorni slučaj. B. V. Šabat /38/ je 1959. godine prvi put iskoristio metod modula u izučavanju kvazikonformnih preslikavanja u prostoru. Važni i uticajni radovi F. W. Gehringa /7,8/ i J. Väisäle /39,40/ iz 1961. i 1962. godine su konačno utvrdili metod modula kao geometrijski prilaz u izučavanju kvazikonformnih preslikavanja.

Ju. G. Rešetnjak /25,26/ i V. A. Zorič /46,47/ prvi put izučavaju nehomeomorfna kvazikonformna preslikavanja. Kako se metod modula univerzalno koristi jedino za homeomorfna preslikavanja oblasti u prostoru R^n, Rešetnjak pri izučavanju svojih preslikavanja sa ograničenom deformacijom primjenjuje veoma širok analitički aparat. Zorić dokazuje da u prostoru ne postoji prelikavanje analogno preslikavanju $z \mapsto e^z$ u ravni, to jest da lokalno homeomorfno kvazikonformno preslikavanje cijelog prostora R^n u sebe, pri $n > 2$ je automatski homeomorfizam i pritom na cio prostor R^n. (Ovaj rezultat, koji je u teoriji kvazikonformnih preslikavanja poznat kao Teorema Zoriča, je iskazan kao hipoteza u pomenutom pionirskom radu Lavrentjeva, trideset godina prije nego što je dokazan). Radovi Rešetnjaka i Zoriča imali su veliki uticaj na dalji razvoj teorije.

Finski matematičari O. Martio, J. Väisälä i S. Rickman /15,17/ su dokazali da su topološka i metrička svojstva preslikavanja sa ograničenom deformacijom, (u njihovoj terminologiji, koju ćemo i mi koristiti, kvaziregularna preslikavanja), takva da se može smatrati da su u prostoru baš ta preslikavanja ono što su analitičke funkcije u ravni. (Kvazikonformna preslikavanja, grubo govoreći, predstavljaju n-dimenzionalno uopštenje konformnih preslikavanja u ravni).

G. D. Mostow /18/ i J. L. Ferrand /12/ su primijenili n - dimenzionalna kvazikonformna preslikavanja za dokaze važnih teorema u topologiji n - dimenzionalnih mnogostrukosti i tako opet potvrdili važnost kvazikonformnih preslikavanja u primjeni.

Razmotrimo sada u najkraćim crtama predmet izučavanja ovog rada. Gering /8/ je još na početku razvoja teorije kvazikonformnih preslikavanja dokazao da je geometrijska definicija, koja koristi modul, ekvivalentna sa metričkom u kojoj se kvazikonformnost izražava preko mjere deformacije u svakoj tački. Znači, kvazikonformnost je lokalno svojstvo. Razjasnimo smisao ove primjedbe i ilustrujmo primjenu metoda modula.

Saglasno definiciji Gehringa, koja je najbliža izvornim definicijama Grötzscha i Lavrentjeva, homeomorfizam $f: G \longrightarrow G'$ se naziva kvazikonformnim preslikavanjem, (k - kvazikonformnim), ako je takozvana dilatacija

$$k(x_0, f) = \limsup_{r \to 0} \frac{\max\limits_{|x - x_0| = r} |f(x) - f(x_0)|}{\min\limits_{|x - x_0| = r} |f(x) - f(x_0)|}, \quad (x_0 \in G),$$

ograničena u G, (i $k(x,f) \leqslant k$ s.s., $1 \leqslant k < \infty$).

Modul je neka funkcija definisana na familijama krivih prostora R^n, sa vrijednostima u R^1_+. Osnovni značaj te funkcije sastoji se u tome, što ako se ima k - kvazikonformno preslikavanje oblasti G, onda je za proizvoljnu familiju krivih Γ u G i njenu sliku Γ' sa datim preslikavanjem

$$k^{-(n-1)} M(\Gamma) \leqslant M(\Gamma') \leqslant k^{n-1} M(\Gamma), \qquad (1)$$

gdje su $M(\Gamma)$ i $M(\Gamma')$ moduli familija Γ i Γ'. Tako je modul invarijanta konformnog, a kvaziinvarijanta kvazikonformnog preslikavanja. Osim toga, modul u potpunosti karakteriše kvazikonformno preslikavanje jer, ako je za neko homeomorfno preslikavanje zadovoljena relacija (1) za svaku familiju krivih u preslikavanoj oblasti, može se dokazati da je takvo preslikavanje kvazikonformno. Geometrijska definicija kvazikonformnog preslikavanja, koristeći relaciju (1), počiva na toj karakterizaciji, pri čemu k na odredjen način mjeri odstupanje preslikavanja od konformnog, (1 - kvazikonformno preslikavanje je konformno).

Iz relacije (1) slijedi, da ako, naprimjer želimo da dokažemo da ne postoji kvazikonformno preslikavanje oblasti G na G', dovoljno je da nadjemo neku familiju krivih u G čiji modul je konačan, odnosno nula, a modul familije koja bi morala da bude slika izabrane familije beskonačan, odnosno različit od nule. (Jasno je da se u rečenom mogu zamijeniti G i G').

Ovaj posebni primjer istovremeno ilustruje metod modula: nakon izbora familije krivih, koja je karakteristična za dati problem, opisuje se njena moguća ili stvarna slika, pa nakon što se sračuna ili ocijeni sa potrebne strane modul originala i modul slike, koristi se relacija (1).

Zbog toga dokazi većine svojstava kvazikonformnih preslikavanja počivaju samo na činjenici da su $M(\Gamma)$ i $M(\Gamma')$ jednovremeno konačni (jednaki nuli) ili jednovremeno beskonačni.

Ograničenost dilatacije k(x,f) u definiciji kvazikonformnog preslikavanja ukazuje, kao što smo već rekli, da je kvazikonformnost lokalno svojstvo. Iz rečenog o odnosu modula i kvazikonformnog preslikavanja slijedi da ako dilatacija $k(x,f)$ nije ograničena u G, onda relacija (1) nije ispunjena za svaku familiju Γ u G. Ali to još ne znači da u mnogim teoremama o kvazikonformnim preslikavanjima, pod nekim manje strogim uslovima od uslova u definiciji kvazikonformnog preslikavanja kojima bi se podvrgla dilatacija $k(x,f)$, ne postoji isti kvalitativni odnos izmedju veličina $M(\Gamma)$ i $M(\Gamma')$ za familiju Γ korišćenu pri dokazu konkretne teoreme.

U našem radu /49/ je bilo dokazano da je niz svojstava kvazikonformnih preslikavanja u vezi, ne s lokalnom strukturom preslikavanja i ograničenošću dilatacije u svakoj tački preslikavane oblasti, već s integralnom, odnosno kvazikonformnošću u srednjem, to jest u vezi sa uniformnom ograničenošću srednjih vrijednosti Lebesguevog integrala funkcije $k(x,f)$ na ograničenim podoblastima oblasti koja se preslikava.

Ovaj rad je u izvjesnom smislu i nastavak i uopštenje prostijeg slučaja obradjenog u /49/. Naime, sada se razmatraju nehomeomorfna preslikavanja kvazikonformna u srednjem i tako se uopštava aktuelna teorija kvazikonformnosti. Naziv rada, "Globalna svojstva kvazikonformnih preslikavanja i preslikavanja kvazikonformna u srednjem", ističe uzajamnu vezu ovih dviju klasa preslikavanja:svako svojstvo preslikavanja kvazikonformnih u srednjem otkriva da je to svojstvo u suštini globalno za odgovarajuća kvazikonformna preslikavanja, (homeomorfna ili nehomeomorfna).

Rad se sastoji iz ovog Uvoda i četiri glave.

Glava I posvećena je definiciji preslikavanja kvazikonformnih u srednjem. Najprije se daju tačne definicije prethodnih pojmova. Specijalno, definišu se kvazikonformna i kvaziregularna preslikavanja, poslije čega se lakše shvata definicija preslikavanja kvazikonformnih u srednjem. S nekoliko primjera ilustruje se ta definicija i pokazuje da je klasa preslikavanja kvazikonformnih u srednjem šira od prethodne dvije.

U Glavi II se dokazuju neka diferencijabilna svojstva preslikavanja kvazikonformnih u srednjem. Naprimjer, dokazuje se da su preslikavanja kvazikonformna u srednjem diferencijabilna skoro svuda i da imaju svojstvo (N) Luzina. Takodje se govori o tome kakva svojstva imaju preslikavanja kvazikonformna u srednjem ako zadovoljavaju uslov ograničenosti indeksa u smislu /29/. Dokazuju se i neka pomoćna tvrdjena koja se koriste u narednim glavama, te i uslovi pod kojima je preslikavanje kvazikonformno u srednjem konformno.

Glava III posvećena je važnom tehničkom aparatu, modulu familije krivih, te odnosu modula i preslikavanja kvazikonformnih u srednjem. Dokazuje se jedno opšte tvrdjenje koje omogućuje da se i kod ovih preslikavanja u mnogim slučajevima primijeni metod modula.

Glava IV i po sadržaju i po obimu je najvažniji dio rada. U njoj se dokazuje da teorema Zoriča važi i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem. U prvom paragrafu ove glave (paragraf 9) razmatra se odnos lokalni homeomorfizam - pokrivanje, to jest ono što se o odnosu ova dva pojma u opštem slučaju,saznalo pri dokazu same teoreme. Time se takodje vrši priprema za neka uopštenja teoreme Zoriča koja se izražavaju jezikom teorije homotopija, (pokrivajućih prostora). U drugom paragrafu (paragraf 10) se dokazuju četiri leme, pomoću kojih se tehnički uprošćavaju dokazi teorema koje slijede i dobija na jasnosti ideje i konstrukcije dokaza, a i veza sa predhodnim paragrafom se lakše ostvaruje. Neke od tih lema su takodje interesantne i kao posebni rezultati. Zatim se formuliše nekoliko teorema, medju njima i teorema Zoriča. Teorema koja tvrdi da se lokalni homeomorfizam šuplje okoline beskonačno daleke tačke, ako je kvazikonforman u srednjem, može produžiti do preslikavanja koje je homeomorfno u nekoj punoj okolini te tačke, iskorišćena je u sledećem paragrafu, gdje je ustanovljeno pod kojim uslovima je izolovani singularitet otklonjiv za preslikavanja kvazikonformna u srednjem. Četvrti paragraf sadrži dva kontraprimjera: U Glavi IV, kvazikonformnim u srednjem nazvali smo preslikavanja čija srednja dilatacija zadovoljava nešto slabije uslove od onih u definiciji Glave I. Tražilo se da za preslikavanje $f:G \longrightarrow R^n$ u slučaju neograničene oblasti G bude $\int^{\infty} \frac{dr}{r k(r)} = \infty$, pri čemu je $k^{n-1}(r) = \frac{1}{m(B^n(r))} \int_{B^n(r) \cap G} k^{n-1}(x, f)\, dm$, $B^n(r) = B^n(x_0, r)$, a $x_0 \in R^n$ proizvoljna tačka (to jest da srednja dilatacija ne raste suviše brzo na beskonačnosti). Prvi primjer, koji je dao još Zorič /47/, pokazuje da uslov $\int^{\infty} \frac{dr}{r k(r)} = \infty$ ne može biti oslabljen. Drugi primjer je konstruisan da se pokaže da jedno uopštenje teoreme Zoriča koje su dali O. Martio, S. Rickman i J. Väisälä u radu /17/, ne važi za preslikavanja kvazikonformna u srednjem. Taj primjer istovremeno pokazuje da preslikavanja iste oblasti k - kvazikonformna u srednjem nijesu u opštem slučaju podjednako neprekidna.

Pojedini djelovi Glave IV ovog rada izlagani su na Seminaru Šabata i Zoriča u Moskvi, na Svesaveznoj konferenciji iz kvazikonformnih preslikavanja i njihovih uopštenja u Novosibirsku

1976. godine i na Rumunsko - Finskom seminaru u Bukureštu 1976. godine.

U radovima /50,51,52/ su takodje objavljeni neki rezultat te glave.

G L A V A I

DEFINICIJA PRESLIKAVANJA KVAZIKONFORMNIH U SREDNJEM

U v o d

Ova glava je uvodna i ima za cilj da dâ definiciju preslikavanja kvazikonformnih u srednjem, kao uopštenja kvazikonformnih i kvaziregularnih preslikavanja. U prvom paragrafu se najprije dokazuju neke nejednakosti za linearno preslikavanje koje leže u osnovi definicija kvazikonformnog i kvaziregularnog preslikavanja, a zatim se daju te definicije. U drugom paragrafu se definišu preslikavanja kvazikonformna u srednjem. Nekoliko primjera u trećem paragrafu treba da ilustruju najprostije, no dovoljno tipične slučajeve nepravilnosti koje se pojavljuju kod ovih preslikavanja, a takodje da pokažu da je klasa preslikavanja kvazikonformnih u srednjem šira od prethodnih dviju.

Navedimo neke pojmove i oznake koje će biti korišćene. Za oblast D kaže se da je kompaktna ako je $\bar{D}$ kompaktan skup. Ako je D kompaktna oblast i $\bar{D}\subset G$ kazaćemo da je D kompaktna podoblast oblasti G. Oznaka $f:G\longrightarrow R^n$ uključuje pretpostavku da je G oblast u R^n. Ako je D kompaktna podoblast od G, f neprekidno i $y\in Cf(\partial D)$, onda je $\mu(y,f,D)$ topološki stepen trojke (y,f,D), /23,str.125/. $\mu(y,f,D)$ je konstantno na svakoj povezanoj komponenti od $R^n\setminus f(\partial D)$. Ako za $x\in G$ postoji kompaktna podoblast D oblasti G za koju je $\bar{D}\cap f^{-1}(f(x))=\{x\}$, onda $\mu(f(x),f,D)$ ne zavisi od izbora takve oblasti D i označava se sa $i(x,f)$. f čuva orjentaciju ako je $\mu(y,f,D)>0$ za svaku kompaktnu podoblast D i $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$. f mijenja orjentaciju ako je $\mu(y,f,D)<0$ za svaku takvu trojku (y,f,D).

Skup B_f svih tačaka u kojima neprekidno preslikavanje $f:G\longrightarrow R^n$ nije lokalni homeomorfizam naziva se skup tačaka grananja preslikavanja f. f je diskretno ako je za svako $y\in R^n$, inverzna slika $f^{-1}(y)$ diskretan skup, to jest $f^{-1}(y)$ se sastoji od izolovanih tačaka. Ako je $f:G \longrightarrow R^n$ diskretno, onda /4/ je dim $B_f \leqslant n-2$. Odavde slijedi da je $G \setminus B_f$ oblast,a na osnovu maloprije rečenog $i(x,f)$ ima konstantnu vrijednost u $G \setminus B_f$ i iznosi +1 ili -1. U prvom slučaju f čuva orjentaciju, u drugom f mijenja orentaciju.

Za oblast D kaže se da je normalna za preslikavanje $f:G \longrightarrow R^n$, ako je $\bar{D} \subset G$ i $f(\partial D) = \partial f(D)$. Normalna okolina tačke $x \in G$ je normalna oblast D takva da je $D \cap f^{-1}(f(x)) = \{x\}$. Ako je f otvoreno preslikavanje, onda je uvijek $\partial f(D) \subset f(\partial D)$, te uslov $f(\partial D) = \partial f(D)$, to jest $f(\partial D) \subset \partial f(D)$, znači da je preslikavanje f zatvoreno na D.

1. Kvazikonformna i kvaziregularna preslikavanja

1.1. Razmotrimo najprije neka svojstva linearnog preslikavanja.

Neka je $A:R^n \longrightarrow R^n$ linearno preslikavanje n - dimenzinalnog euklidskog prostora u n dimenzionalni euklidski prostor. Ako je $\det A \neq 0$, A koncentrične kugle preslikava u slične elipsoide. Interesuje nas koeficijent deformacije $k(A)$ koji je jednak odnosu najveće i najmanje poluose tih elipsoida. $k(A) = 1$ ako i samo ako je $A = \lambda P$, gdje je $\lambda \neq 0$ realan broj, a P ortogonalne preslikavanje prostora R^n. S druge strane invertibilno linearno preslikavanje čuva uglove,s tačnošću do znaka, ako i samo ako je $A = \lambda P$, $\lambda \neq 0$. Zato se $k(A)$ naziva koeficijentom kvazikonformnosti linearnog preslikavanja A.

Neprekidna funkcija (Ax,Ax) na jediničnoj sferi $(x,x)=1$, dostiže svoju najveću i najmanju vrijednost. Kako je

$$(Ax,Ax) = (x,A^*Ax) \geqslant 0, \qquad (1)$$

a preslikavanje A^*A je samokonjugovano, to su sopstvene vrijednosti preslikavanja A^*A nenegativne, pri čemu su najmanja i najveća sopstvena vrijednost redom najmanja i najveća vrijednost kvadratne forme (1) na jediničnoj sferi $(x,x)=1$. Neka vektori $e_1,\dots, e_n$ čine ortonormirani sistem od n sopstvenih vektora preslikavanja A^*A, $A^*Ae_i=\lambda_i^2 e_i$, $\lambda_1^2 \leqslant \lambda_2^2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n^2$. Ako je $\det A \neq 0$ i uzmemo $\lambda_1 > 0$, onda je

$$k(A) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} .$$

Neka je sada u R^n fiksiran Dekartov ortonormirani koordinatni sistem i matricu preslikavanja A označimo takodje sa A. Ako je $A=(a_{ij})$, onda je

$$T_r(A^*A) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2 ,$$

$$\det A^*A = \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 \cdots \lambda_n^2 \quad i \quad |\det A| = \lambda_1 \cdots \lambda_n .$$

Kako je

$$\frac{\lambda_1^2 + \dots + \lambda_n^2}{n} \geqslant \sqrt[n]{\lambda_1^2 \cdots \lambda_n^2} = \sqrt[n]{(\det A)^2}$$

slijedi da je

$$T_r(A^*A) \geqslant n\,(\det A)^{2/n}$$

odnosno

$$T_r^{\frac{n}{2}}(A^*A) \geqslant n^{\frac{n}{2}} |\det A| . \qquad (2)$$

Geometrijska sredina je jednaka aritmetičkoj ako i samo ako su svi sabirci jednaki, te u (2) važi jednakost ako i samo ako je

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \dots = \lambda_n^2 = \lambda^2,$$

odnosno ako i samo ako je $A^*A=\lambda^2 I$, što je ekvivalentno uslovu

$$A=\lambda P.$$

Ako je $\det A\neq 0$ moguće je $Tr^{n/2}(A^*A)$ ocijeniti s gornje strane koristeći $k(A)$ i $\det A$:

$$Tr^{\frac{n}{2}}(A^*A)\leq(\lambda_1^2+\cdots+\lambda_n)^{\frac{n}{2}}\leq(n\lambda_n^2)^{\frac{n}{2}}\leq n^{\frac{n}{2}}\cdot k^{n-1}(A)\cdot\lambda_1\cdot\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

to jest

$$Tr^{\frac{n}{2}}(A^*A)\leq n^{\frac{n}{2}}\,k^{n-1}(A)\,|\det A|. \qquad (3)$$

Pritom u relaciji (3) važi znak jednakosti ako i samo ako je $A=\lambda P$.

U docnijim razmatranjima biće nam nužna sledeća

1.1.1. L e m a. Neka su $A:R^n\longrightarrow R^n$ i $B:R^n\longrightarrow R^n$ nesingularna linearna preslikavanja. Tada je $k(BA)\leqslant k(A)k(B)$.

D o k a z. Neka su x_1 i x_2 takvi vektori da je $|x_1|=|x_2|=1$ i $|BA|=|BAx_1|$, $\ell(BA)=|BAx_2|$, a $y_1=Ax_1$, $y_2=Ax_2$. Tada je

$$\frac{|BA|}{\ell(BA)}=\frac{|BAx_1|}{|BAx_2|}=\frac{|By_1|}{|By_2|}=\frac{\left|B\frac{y_1}{|y_1|}\right|}{\left|B\frac{y_2}{|y_2|}\right|}\cdot\frac{|y_1|}{|y_2|}\leq\frac{|B|}{\ell(B)}\cdot\frac{|Ax_1|}{|Ax_2|}\leqslant\frac{|B|}{\ell(B)}\cdot\frac{|A|}{\ell(A)}$$

to jest

$$k(BA)\leq k(A)\cdot k(B),$$

što je trebalo dokazati. ////

1.1.2. L e m a /25/. Ako je $\det A\neq 0$ i $Tr^{\frac{n}{2}}(A^*A)\leq n^{\frac{n}{2}}K\,|\det A|$, onda je $K\geqslant 1$ i $k(A)\leqslant K+\sqrt{K^2-1}$. ////

1.2. M e t r i č k a d e f i n i c i j a k v a z i k o n f o r m n o g p r e s l i k a v a nj a. Ako je preslikavanje $f:D\longrightarrow R^n$ diferencijabilno u tački $x\in D$, neka je $|f'(x)|$ diferencijal od f, to jest

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + |h|\mathcal{E}(x,h),$$

pri čemu $\mathcal{E}(x,h) \longrightarrow o$ kad $h \longrightarrow o$ i $\det f'(x) = J(x,f)$. Ako je $J(x,f) \neq o$, (tada je $f'(x): R^n \longrightarrow R^n$ bijektivno preslikavanje), veličina

$$k(x,f) = k(f'(x)) = \frac{\max\limits_{|h|=1} |f'(x)h|}{\min\limits_{|h|=1} |f'(x)h|}, \qquad (1)$$

naziva se koeficijentom kvazikonformnosti ili dilatacijom preslikavanja f u tački $x \in G$, (vidjeti 1.1.). $k(x,f)$ može se odrediti i kao /8/

$$k(x,f) = \limsup_{r \to o} \frac{\max\limits_{|x'-x|=r} |f(x') - f(x)|}{\min\limits_{|x'-x|=r} |f(x') - f(x)|}, \qquad (2)$$

s tim što u tom obliku ima smisla i bez ograničenja $J(x,f) \neq o$, ako f nije konstantno u nekoj okolini tačke x i ako se računa da je $a/o = \infty$ za $a \in R$.

1.2.1. D e f i n i c i j a. Homeomorfizam $f: G \longrightarrow G'$ naziva se k-kvazikonformnim preslikavanjem, ako je dilatacija $k(x,f)$ ograničena u G i $k(x,f) \leqslant k$ s.s. u G, $1 \leqslant k < \infty$. f se naziva kvazikonformnim preslikavanjem ako je k - kvazikonformno za neko $k \geqslant 1$.

1 - kvazikonformno preslikavanje u smislu ove definicije je konformno, to jest 1 - kvazikonformno preslikavanje je Möbiusova transformacija /8/.

Uslov ograničenosti dilatacije $k(x,f)$ homeomorfizma $f: G \longrightarrow G'$ čini da f ima uopštene parcijalne izvode u smislu Soboljeva čiji su n-ti stepeni lokalno integrabilni, ($f \in W_n^1$), te da je f skoro svuda diferencijabilno sa jakobijanom skoro svuda različitim od nule. Osim toga f zadovoljava uslov (N) /8/.

1.2.2. T e o r e m a /8/. Homeomorfizam $f:G \longrightarrow G'$ je kvazikonformno preslikavanje ako i samo ako su ispunjeni sledeći uslovi:

(1) $f \in W_n^1$,

(2) $|f'(x)|^n \leqslant k|J(x,f)|$ s.s. u G, $(k \geqslant 1)$. ////

Kako se unaprijed ne zna da je f diferencijabilno s.s., to se pod $f'(x)$ u teoremi podrazumijeva formalni diferencijal, to jest $f'(x):R^n \longrightarrow R^n$ je linearno preslikavanje odredjeno sa $f'(x)e_i = \partial_i f(x)$, $1 \leqslant i \leqslant n$, a $J(x,f) = \det f'(x)$. (Neprekidna preslikavanja iz klase W_n^1 imaju s.s. parcijalne izvode koji su Borelove funkcije. Detaljnije vidjeti vidjeti paragraf 4).

1.3. D e f i n i c i j a k v a z i r e g u l a r n o g p r e s l i k a v a nj a. Ispuštanjem uslova o homeomorfnosti preslikavanja f u gornjoj teoremi, dolazimo do definicije kvaziregularnog preslikavanja /26,15/.

1.3.1. D e f i n i c i j a. Preslikavanje $f:G \longrightarrow R^n$ je kvaziregularno, ako je $f \in W_n^1$ i postoji konstanta $k \geqslant 1$ takva da je

$$|f'(x)|^n \leqslant k\, J(x,f)$$

za s.s. $x \in G$.

f(x) i J(x,f) u definiciji 1.3.1. imaju isti smisao kao i u teoremi 1.2.2. .

Iz teoreme 1.2.2. slijedi, da klasu kvazikonformnih preslikavanja (koja čuvaju orjentaciju) čine topološka kvaziregularna preslikavanja. Nekonstantna 1-kvaziregularna preslikavanja su Möbiusove transformacije /27/.

U radovima /26,28,29/ Rešetnjaka, dokazano je da važi sledeća (važna) teorema.

1.3.2. T e o r e m a. Neka je $f:G\longrightarrow R^n$ kvaziregularno preslikavanje. Tada:

(1) f je konstantno ili je f neprekidno preslikavanje koje je diskretno i otvoreno i čuva orjentaciju,

(2) f je diferencijabilno s.s.,

(3) f zadovoljava uslov (N). ////

1.3.3. T e o r e m a. Ako kvaziregularno preslikavanje $f:G\longrightarrow R^n$ nije konstantno, onda je k(x,f) ograničena funkcija na svakoj kompaktnoj podoblasti oblasti G.

D o k a z. Neka je $f:G\longrightarrow R^n$ nekonstantno kvaziregularno preslikavanje. Onda /15, teor. 4.5./ za svako $x\in G$ je $k(x,f)\leqslant C<\infty$, gdje C zavisi samo od n i od i(x,f)k (k je odredjeno sa 1.3.1). Iz /15, 2.1o/ slijedi da kao diskretno i otvoreno preslikavanje, za svako $x\in G$, f ima proizvoljno malu normalnu okolinu tačke x koju možemo računati povezanom (vidjeti Uvod), pa kako /29/ f zadovoljava uslov ograničenosti indeksa (to jest topološki stepen je ograničen na svakoj kompaktnoj podoblasti oblasti G), slijedi da je i(x,f), a time i k(x,f), lokalno ograničeno. ////

Što se tiče obrnutog rezultata, važi

1.3.4. T e o r e m a /15, 4.3/. Neprekidno preslikavanje $f: G \to R^n$, koje nije konstantno, je kvaziregularno ako i samo ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(1) f čuva orjentaciju, diskretno je i otvoreno,

(2) $k(x,f)$ je lokalno ograničeno u G,

(3) Postoji $a < \infty$ tako da je $k(x,f) \leq a$ za s.s. $x \in G \setminus B_f$.///

Uslov (2), uz prisustvo uslova (1), obezbjedjuje da je $f \in W_n^1$.

2. P r e s l i k a v a nj a k v a z i k o n f o r m n a u s r e d nj e m

Mi ćemo izučavati kvazikonformnost u srednjem i lokalnu karakteristiku $k(x,f)$ zamijeniti srednjom integralnom karakteristikom. Sledeći primjer pokazuje da se bez uslova $f \in W_n^1$ ne mogu izbjeći slučajevi patoloških preslikavanja.

2.1. P r i m j e r. Neka je $f: I_1 \to I_2$ preslikavanje kuba $I_1 = \{(x_1,\dots,x_n) \mid 0 < x_i < 1,\ i=1,\dots,n\}$ na kub $I_2 = \{(x_1,\dots,x_n) \mid 0 < x_1 < 2,\ 0 < x_i < 1,\ i=2,\dots,n\}$ odredjeno sa

$$x=(x_1,\dots,x_n) \longmapsto f(x)=(x_1+g(x_1),x_2,\dots,x_n),$$

gdje je $g: [0,1] \to R^1$ monotono rastuća funkcija, $g(0)=0$, $g(1)=1$ i $g'(t)=0$ s.s. u $[0,1]$. Očigledno, f je homeomorfizam diferencijabilan s.s. i $f'(x)=\ell(f'(x))=J(x,f)=1$ s.s. u I_1. Zato je $k(x,f)=1$ s.s. u I_1. Srednja vrijednost Lebesguevog integrala funkcije $k^{n-1}(x,f)$, (vidjeti donju definiciju), je takodje jednaka 1. Medjutim, f nije iz klase W_n^1. Zato će preslikavanje kvazikonformno u srednjem biti po definiciji iz te klase, kako bi se izbjegli slučajevi preslikavanja kao u ovom primjeru.

2.2. Proširimo najprije pojam dilatacije uveden u 1.2. Ako je $f:G\to R^n$ neprekidno preslikavanje iz klase W_n^1, onda (kao što je već rečeno u 1.2.2.) f ima za s.s. $x\in G$ parcijalne izvode koji su Borelove funkcije, i može se govoriti o formalnom diferencijalu $f'(x)$ kao o linearnom preslikavanju odredjenom sa $f'(x)e_i=\partial_i f$ i jakobijanu $J(x,f)=\det f'(x)$. Dilatacijom preslikavanja f u tački $x\in G$ zvaćemo veličinu $k(x,f)$ definisanu s.s. u G na sledeći način: $k(x,f)=|f'(x)|/\ell(f'(x))$ ako je $J(x,f)\neq 0$, $k(x,f)=1$ ako je f konstantno u nekoj okolini tačke x, $k(x,f)=\infty$ ako je $|f'(x)|\neq 0$ i $\ell(f'(x))=0$. Iz izloženog u tački 1 ovog paragrafa lako se vidi da je ovako definisana dilatacija $k(x,f)$ jednaka onoj za slučaj kvazikonformnih i kvaziregularnih preslikavanja odredjenoj relacijom (2) u 1.2.

Kako je skup tačaka što imaju okolinu u kojoj je f konstantno, otvoren, a funkcije $\ell(f'(x))$, $|f'(x)|$ i $J(x,f)$ mjerljive, $k(x,f)$ je mjerljiva funkcija. (Strogo govoreći, $k(x,f)$ je definisano samo s.s. u G i ekvivalentno je nekoj na G mjerljivoj funkciji).

2.3. D e f i n i c i j a. Za neprekidno preslikavanje $f:G\longrightarrow R^n$ reći ćemo da je kvazikonformno u srednjem, ako je $f\in W_n^1$, $J(x,f)\geq 0$ s.s. u G i postoji konstanta $k\geq 1$, tako da je za svako iscrpljenje $\{D_m\}$ oblasti G (D_m je kompaktna oblast, $\bar{D}_m\subset G$, $D_m\subset D_{m+1}$, $\bigcup_{m=1}^{\infty} D_m=G$)

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{1}{m(D_m)}\int_{D_m} k^{n-1}(x,f)\,dm\leq k^{n-1}, \qquad (1)$$

pri čemu $k(x,f)$ ima smisao odredjen u 2.2 .

Najmanju od svih konstanti k u prethodnoj definiciji zvaćemo srednjom dilatacijom preslikavanja f u oblasti G i obilježavati sa k(G,f). Ako je k(G,f)=k govorićemo da je f k - kvazikonformno u srednjem.

Ako je oblast G ograničena, onda $\mathrm{mes}D_m \longrightarrow \mathrm{mes}G$ za proizvoljno iscrpljenje $\{D_m\}$, te primjenjujući lemu Lebesguea lako nalazimo da je za slučaj ograničene oblasti G

$$k^{n-1}(G) = \frac{1}{m(G)} \int_G k^{n-1}(x,f)\, dm . \qquad (2)$$

U /5o/ smo primjerom pokazali da u opštem slučaju izraz na lijevoj strani relacije (1) u gornjoj definiciji zavisi od iscrpljenja $\{D_m\}$, a takodje smo našli, rešavajući problem Grötzscha u n - dimenzionalnom slučaju,da je pod integralom prirodno uzeti $k^{n-1}(x,f)$.

3. Nekoliko primjera

Svako kvaziregularno (kvazikonformno) preslikavanje je kvazikonformno u srednjem. Primjeri 3.1 i 3.2 pokazuju da obrnuti odnos ne važi.

3.1. Neka je $B^3(1/e)$ lopta poluprečnika 1/e, a f preslikavanje koje tu loptu preslikava u jediničnu loptu $B^3(1)$,definisano sa

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\ln|x|}\,\dfrac{x}{|x|}, & 0<|x|<\dfrac{1}{e} \\ 0, & x=0 . \end{cases}$$

Očigledno $f \in W_n^1$, $|f'(x)| = -\frac{1}{|x| \ln |x|}$, $\ell(f'(x)) = -\frac{1}{\ln |x|}$,

$$k(x,f) = -\frac{1}{|x| \ln |x|} \; . \; k^2(B^3(1/e),f) = \frac{1}{m(B^3(1/e))} \int_{B^3(1/e)} k^2(x,f)\,dm \text{, pa}$$

$$k^2(B^3(1/e),f) = \frac{1}{\frac{4}{3}\frac{\pi}{e^3}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{1/e} \frac{d|x|}{|x| \ln^2 |x|} = \frac{3}{2} e^3 .$$

f je homeomorfizam kvazikonforman u srednjem, koji nije kvaziregularno preslikavanje, jer ne postoji konstanta k za koju bi bilo

$$\frac{1}{|x| \ln^2 |x|} \leqslant k \frac{1}{|x|^2 \ln^2 |x|} .$$

Lako je konstruisati analogan primjer za slučaj proizvoljnog n.

3.2. Neka je ponovo $n=3$, (analogan primjer se lako konstruiše za $n > 3$), $f: R^3 \setminus \{0\} \longrightarrow R^3$ tako da za $x \in B^3(1) \setminus \{0\}$, $f(x) \in B^3(1) \setminus B^3(R)$, $0 < R < 1$ i $f(x) = (R + (1-R)|x|)x/|x|$, $(|x| < 1)$; $f(x) = x$ za $|x| \geqslant 1$. Imamo da je $f \in W_n^1$ i za $|x| < 1$,

$$|f'(x)| = \frac{R + (1-R)|x|}{|x|} , \qquad \ell(f'(x)) = 1 - R ,$$

$$k(x,f) = 1 + \frac{R}{(1-R)|x|} \text{ za } |x| < 1 \text{ i } k(x,f) = 1 \text{ za } |x| > 1 .$$

Zato je

$$\int_{B^3(1) \setminus \{0\}} k^2(x,f)\,dm = (1 + R + R^2)/(1 - R^2) .$$

(Ograničenje f na $B^3(1) \setminus \{0\}$ je kvazikonformno u srednjem, ali nije kvaziregularno). Primijetimo da f " razduvava" tačku x=o u sferu poluprečnika R i da je f,1 - kvazikonformno u srednjem u $R^3 \setminus \{0\}$, a da nije konformno.

3.3. Konstruišimo primjer analogan preslikavanju $f(z) = z^m$, $m \geqslant 2$, u ravni. Neka je $n=3$, (ponovo radi očiglednosti), $m \geqslant 2$ prirodan broj, a $f:R^3 \longrightarrow R^3$ odredjeno sa $x=(r,\varphi,x_3)\longmapsto f(x)=(r,m\varphi,x_3)$ gdje su r,φ, x_3 cilindrične koordinate. Očigledno, $f\in W_n^1$,

$$|f'(x)|=\frac{r\,m\Delta\varphi}{r\,\Delta\varphi}=m\,,\quad l(f'(x))=1\,,\qquad k(x,f)=m\,,$$

pa je f preslikavanje kvazikonformno u srednjem. Kako je za $r>0$ $J(x,f)=m$, slijedi da je $|f'(x)|^3=m^2J(x,f)$, to jest f je takodje kvaziregularno. $r=0$ je prava čije su sve tačke, tačke granjanja preslikavanja f, tako da f nije ni homeomorfizam ni lokalni homeomorfizam. Dalje, topološka dimenzija skupa tačaka grananja je 1, odnosno za analogan primjer u n -dimenzionalnom slučaju n-2.

3.4. Neka je $f:R^3\setminus\{0\}\longrightarrow R^3$ preslikavanjae iz primjera 3.2 , a $g:R^3\longrightarrow R^3$ preslikavanje iz primjera 3.3. Tada je gf preslikavanje kvazikonformno u srednjem, koje nije kvaziregularno i čiji skup tačaka granaja ima topološku dimenziju jednaku 1, odnosno n-2 u odgovarajućem n - dimenzionalnom primjeru.

3.5. Primjer u /32/ pokazuje da kod kvaziregularnog, te i kod preslikavanja kvazikonformnog u srednjem, nema gornje granice za lokalni stepen preslikavanja koja bi bila izražena preko dilatacije k(x,f), a takodje da dilatacija k(x,f) zavisi u opštem slučaju od lokalnog stepena preslikavanja.

G l a v a   II

DIFERENCIJABILNA SVOJSTVA PRESLIKAVANJA KVAZIKONFORMNIH U SREDNJEM

U v o d

Pripadnost klasi W_n^1 garantuje preslikavanju odredjena diferencijabilna svojstva. Naprimjer, skoro svuda postoje obični parcijalni izvodi /35/, a takodje ako je $f \in W_n^1$, ono je diferencijabilno skoro svuda u smislu metrike W_n^1 /31/. Ako preslikavanje zadovoljava još neke dodatne topološke uslove, naprimjer ako je f homeomorfizam ili je f takozvano monotono preslikavanje, onda iz $f \in W_n^1$ slijedi da je f diferencijabilno skoro svuda /24,31/. Da bi dokazao da su kvaziregularna preslikavanja, koja su po definiciji iz klase W_n^1, diferencijabilna skoro svuda i da zadovoljavju uslov (N) Luzina, Rešetnjaku /26/ je bio nužan veoma širok analitički aparat. Koristeći varijacioni metod on je dokazao da kvaziregularna preslikavanja zadovoljavaju uslov ograničenosti indeksa /28,29/, to jest da je topološki stepen kvaziregularnog preslikavanja ograničen na svakoj kompaktnoj podoblasti preslikavane oblasti. To je zatim iskoristio za dokaz da su kvaziregularna preslikavanja otvorena i disretna /26/, odakle automatski slijedi odredjena pravilnost skupa tačaka grananja /15/. Medjutim, u mnogim od dokaza koje je dao Rešetnjak, kvaziregularnost je korišćena samo u ograničenoj mjeri. Naprimjer za dokaz da je preslikavanje diferencijabilno skor svuda, korišćena je činjenica da skoro svuda gdje je $J(x,f)=o$, svi parcijalni izvodi kvaziregularnog preslikavanja su jednaki nuli. Kako je to tačno i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem, to su i ova preslikavanja diferencijabilna skoro svuda.

Ista primjedba važi i za još nekoliko važnih teorema čiji pregled dajemo u prva dva paragrafa ove glave (paragrafi 4 i 5). (Izmedju ostalog, preslikavanja kvazikonformna u srednjem zadovoljavaju uslov (N)). U radu sa kvazikonformnim preslikavanjima i njihovim uopštenjima zadatak se često uprošćava pomoću dopunske Möbiusove transfomacije ili kvazikonformnog preslikavanja. Jedna lema koja utvrdjuje kvazikonformnost u srednjem kompozicije tog tipa, dokazana je takodje u paragrafu 5.

U paragrafu 6 se govori o tome kad je preslikavanje 1 - kvazikonformno u srednjem Möbiusova transformacija.

4. O klasi W_n^1

4.1. Uopšteni izvod i klasa W_p^{ℓ}, $p \geq 1, \ell \geq 1$.

Za funkciju $\underline{u}$ definisanu u oblasti $D \subset R^n$ kazaćemo da je lokalno L^p integrabilna u D, $(p \geq 1)$, ako za svaki kompaktan skup $A \subset D$ postoji i konačan je integral

$$\int_A |u(x)|\, dm \quad .$$

U slučaju p=1 kazaćemo da je funkcija $\underline{u}$ lokalno integrabilna u D. Uvodimo oznaku

$$\|u\|_{L_p(A)} = \left\{ \int_A |u(x)|^p\, dm \right\}^{1/p} .$$

Neka je $k=(k_1,\dots,k_n)$ vektor čije su kordinate nenegativni cijeli brojevi. Uvedimo sledeći diferencijalni operator

$$D^k = \frac{\partial^{|k|}}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \ldots \partial x_n^{k_n}},$$

gdje je $|k| = k_1 + k_2 + \ldots + k_n$. Neka su funkcije φ i χ definisane i lokalno integrabilne u oblasti $D \subset R^n$. Ako je za svaku finitnu, to jest sa kompaktnim nosačem u D, ℓ puta neprekidno diferencijabilnu funkciju ψ

$$\int_D \chi(x)\psi(x)\,dm = (-1)^{\ell} \int_D \varphi(x)\, D^k\psi(x)\,dm,$$

gdje je $k=(k_1,\ldots,k_n)$, $|k| = \ell$, tada sefunkcija χ naziva uopštenim D^k izvodom funkcije φ u oblasti D.

Klasu svih funkcija koje su definisane u oblasti D i imaju sve uopštene do reda ℓ, lokalno L^p integrabilne $(p \geqslant 1)$ izvode u oblasti D označavaćemo sa $W_p^{\ell}(D)$.

Neka je $f: D \longrightarrow R^n$ preslikavanje oblasti D R^n. Kazaćemo da je preslikavanje f iz klase $W_p(D)$ ako je svaka komponenta vektor funkcije $f=(u_1,\ldots,u_n)$ iz te klase.

Nas će posebno interesovati slučaj $\ell = 1$, to jest klase W_p^1 $(p \geqslant 1)$. Neprekidna preslikavanja klase W_p^1 mogu se okarakterisati takozvanim ACL^p svojstvom.

4.1.1. Za preslikavanje $f: D \longrightarrow R^m$ oblasti $D \subset R^n$ kaže se da je ACL (apsolutno neprekidno na linijama) ako je f neprekidno i ako na svim stranicama $E_i = \{x \in Q \mid x_i = o\}$ svakog n - kuba $Q = \{x \in R^n \mid a_i \leqslant x \leqslant b_i\}$ koji leži u D, skup tačaka $x \in E_i$ za koje preslikavanje $t \longmapsto f(x+te_i)$ nije apsolutno neprekeidno na intervalu $[a_i, b_i]$ ima (n-1) - dimenzionalnu mjeru jednaku nuli $(i=1,2,\ldots,n)$.

Lako je vidjeti da ako je $f:D\longrightarrow R^n$ ACL, onda f s.s. u D ima parcijalne izvode, koji su Borelove funkcije /42,26.4/.

Za preslikavanje $f:D\longrightarrow R^n$ oblasti $D\subset R^n$ kaže se da je ACL^p, $p\geqslant 1$, ako je f ACL i parcijalni izvodi od f su lokalno L^p integrabilne funkcije.

4.1.2. T e o r e m a /35, str. 344/. f je ACL^p u D ako i samo ako je f neprekidno preslikavanje iz klase W_p^1 $(p\geqslant 1)$. ////

Sledeća teorema daje još jednu karakterizaciju neprekidnih preslikavanja klase W_p^1.

4.1.3. T e o r e m a /42,27.7/. Neka je $f:D\longrightarrow R^n$ ACL^p preslikavanje oblasti $D\subset R^n$. Tada postoji niz preslikavanja $g_j:D\longrightarrow R^n$ takav da

(1) $g_j\in C^1$,

(2) $g_j\longrightarrow g$ uniformno na kompaktima u D,

(3) Za svaki kompaktan skup $F\subset D$ i svako $1\leqslant i\leqslant n$,

$\partial_i g_j\longrightarrow \partial_i g$ u metrici $L^p(F)$. ////

Iako su preslikavanja kvazikonformna u srednjem po definiciji neprekidna, mi smo usvojili oznaku W_p^1, a ne ACL^p, zbog toga što su u radovima Rešetnjaka /24,...,31/ koje često citiramo u ovoj glavi, izučavana preslikavanja klasa W_p, pa je bilo pogodno zadržati istu oznaku.

4.2. D i f e r e n c i j a b i l n a s v o j s t v a p r e s l i k a v a nj a k l a s e W_p^1. Za funkciju $\underline{u}$ pisaćemo $\underline{u}\in W_p^1(B^n)$

ako je $u \in W_p^1(D)$ u nekoj oblasti $D \supset B^n$ i koristiti oznaku

$$\|u\|_{W_p^1(B^n)} = \sum_{0 \leq |k| \leq l} \|D^k u\|_{L^p(B^n)} ,$$

gdje $D^k u$ i $k=(k_1,\ldots,k_n)$ imaju smisao odredjen u 4.1 . Analogno za vektor funkciju $f=(u_1,\ldots,u_n)$ biće $\|f\|_{W_p^1(B^n)} = \sup_{1 \leq i \leq n} \|u_i\|_{W_p^1(B^n)}$

4.2.1. Neka je $D \subset R^n$ oblast, $f:D \longrightarrow R^n$ preslikavanje iz klase $W_p^1(D)$ i $L:R^n \longrightarrow R^n$ linearno preslikavanje. Za $x \in D$ neka je

$$\delta(h) = \left\| \frac{f(x+hX)-f(x)}{h} - L(X) \right\|_{W_p^1(B^n)} ,$$

gdje se norma odnosi na promjenjivu X iz jedinične lopte B^n $(X \in B^n)$. Linearno preslikavanje L se naziva potpunim diferencijalom preslikavanja f u tački x u smislu konvergencije W_p^1, ako $\delta(h) \to 0$ kad $h \to 0$.

Na standardan način se dokazuje da preslikavanje f u tački $x \in D$ nema više od jednog potpunog diferencijala u smislu konvergencije u W_p^1.

Neka je $x \in D$ tačka u kojoj su definisani svi parcijalni izvodi $\partial f/\partial x_i$, $i=1,2,\ldots,n$, funkcije $f \in W_p^1(D)$. Linearno preslikavanje $f'(x)$ odredjeno sa

$$f'(x)(X) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\, X_i$$

naziva se formalnim diferencijalom preslikavanja f u tački $x \in D$.

4.2.2. T e o r e m a /31/. Za svako preslikavanje $f:D \longrightarrow R^n$ iz klase W_p^1 oblasti $D \subset R^n$ i s.s. $x \in D$, formalni diferencijal $f'(x)$ je potpuni diferencijal preslikavanja f u tački x u smislu konvergencije u W_p^1. ////

4.2.3. Neka je $f: D \longrightarrow R^n$ proizvoljno preslikavanje, $x \in D$ i L linearni operator. Neka je dalje

$$\gamma(h, X) = \left| \frac{f(x+hX)-f(x)}{h} - LX \right|$$

gdje je $h > o$. Ako je

$$\liminf_{h \to o} \gamma(h) = 0,$$

gdje je $\gamma(h) = \sup_{|X|=1} \gamma(h, X)$, onda se L naziva slabim potpunim diferencijalom preslikavanja f u tački x.

4.2.4. T e o r em a /26/. Neka je $f: D \longrightarrow R^n$ preslikavanje oblasti $D \subset R^n$ iz klase $W_p^1(D)$, pri čemu je $p > n-1$. Ako je linearno preslikavanje $L: R^n \longrightarrow R^n$ potpuni diferencijal preslikavanja f u tački $x \in D$ u smislu konvergencije u W_p^1, tada je L slabi potpuni diferencijal preslikavanja f u tački x. ////

4.2.5. T e o r e m a (Calderona) /26/. Ako je $p > n$ i $f: D \longrightarrow R^n$ preslikavanje iz klase W_p^1 onda f ima s.s. u D potpuni diferencijal. ////

U opštem slučaju o diferencijabilnosti preslikavanja klase W_n^1, u izvjesnom smislu, ne može biti rečeno više, jer su Calderon i Cezari dali primjer koji pokazuje da uslov $p > n$ u prethodnoj teoremi ne može biti oslabljen.

Za $p = n$ su diferencijabilna s.s. takozvana monotona preslikavanja klase W_n^1.

4.3. M o n o t o n a p r e s l i k a v a nj a. Neka je D pro- proizvoljna oblast u R^n, $u: D \longrightarrow R^1$ realna funkcija. Kazaćemo da je funkcija u monotona u D, ako je za svaku tačku $x_o \in D$ i za svako $r \in (o, d(x_o, \partial D))$

$$\sup_{x \in S^{n-1}(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x) = \sup_{x \in B^n(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x) \quad , \quad \inf_{x \in S^{n-1}(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x) = \inf_{x \in B^n(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x) .$$

4.3.1. L e m a. Neka je $u: D \longrightarrow R^1$ monotona funkcija u oblasti $D \subset R^n$. Ako je $u \in W_n^1(D)$ onda je u neprekidna i ima s.s. potpuni diferencijal.

D o k a z. $\varphi(r) = \operatorname{osc}_{S^{n-1}(x_o,r)} u = \sup_{x \in S^{n-1}(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x) - \inf_{x \in S^{n-1}(x_o,r)} \operatorname{ess} u(x)$ je monotona funkcija od r. Može se dokazati /7,18/ da je za $R_{x_o}(a,b) = \{ x \mid a < |x - x_o| < b \ , \ a,b \in (o, d(x_o, \partial D)) \}$,

$$\int_a^b \varphi^n(r) \frac{dr}{r} \leq A \int_{R_{x_o}(a,b)} |\nabla u|^n \, dm ,$$

gdje je A konstanta kaja zavisi samo od dimenzije n. Neka je $\varphi(o) = \lim_{r \to o} \varphi(r)$. Očigledno,

$$\left(\int_a^b \frac{dr}{r} \right) \varphi(o) \leq const$$

za proizvoljne a i b, otkuda slijedi da je $\varphi(o) = o$, to jest da je u neprekidna u x_o. Diferncijabilnost funkcije u sada se može dokazati kao u /31/ (ili /41/). ////

Kaže se da je preslikavanje $f: D \longrightarrow R^n$ oblasti $D \subset R^n$ monotono ako su mu sve koordinatne funkcije monotone u D. Kao posljedicu prethodne leme imamo da važi sledeća

4.3.2. T e o r e m a. Neka je $f: D \longrightarrow R^n$ monotono preslikavanje oblasti $D \subset R^n$. Ako je $f \in W_n^1$ onda je f diferencijabilno s.s. u D.////

5. N e k a d i f e r e n c i j a b i l n a s v o j s t v a

5.1. D i f e r e n c i j a b i l n o s t s k o r o s v u d a. Preslikavanja kvazikonformna u srednjem su iz klase W_n^1. Iz teoreme 4.3.2 slijedi da je za dokaz da su ova preslikavanja diferencijabilna s.s. dovoljno ustanoviti da su monotona. Razjasnimo najprije topološki smisao pojma monotonosti.

5.1.1. L e m a. Neka je $f:G \longrightarrow R^n$ neprekidno preslikavanje oblasti $G \subset R^n$. Ako za svaku kompaktnu podoblast D od G skup $f(D)$ nema zajedničkih tačaka sa spoljašnjom oblasti skupa $f(\partial D)$, onda je f monotono preslikavanje. (Ona, jedina, komponenta skupa $R^n \setminus f(\partial D)$ koja je neograničena naziva se spoljašnjom oblasti skupa $f(\partial D)$).

D o k a z. Neka je $x_o \in G$, a $r \in (o, d(x_o, D))$. Neka jedalje Q_r najmanji zatvoreni n - dimenzionalni paralelepiped takav da je $f(S^{n-1}(r)) \subset Q$. Tada se na svakoj stranici od Q nalazi bar jedna tačka skupa $f(S^{n-1}(r))$, a sve tačke koje se nalaze izvan Q su iz spoljašnje oblasti skupa $f(S^{n-1}(r)) = f(\partial B^n(r))$. Ako postoji tačka x u $B^n(x_o, r)$ u kojoj se dostiže supremum (infimum), recimo koordinatne funkcije f_1, onda tačka f(x) po uslovu teoreme ne može biti izvan kuba Q, odnosno s obzirom na to kako je kub Q izabran slijedi da f(x) mora biti na granici kuba Q, na kojoj ima i tačaka iz $f(S^{n-1}(r))$. Time je dokaz leme završen. ////

5.1.2. L e m a. Neka je $f:G\longrightarrow R^n$ neprekidno preslikavanje oblasti $G\subset R^n$. Neka je dalje $f\in W_n^1$ i $J(x,f)\geqq o$ s.s. . Ako su s.s. gdje je $J(x,f)=o$ svi parcijalni izvodi preslikavanja f jednaki nuli, onda za svaku kompaktnu podoblast D oblasti G u kojoj f nije konstantno preslikavanje i za svako $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$ je $\mu(y,f,D)\geqslant 1$.

D o k a z. f je ACL, pa ako su u nekoj oblasti parcijalni izvodi preslikavanja f jednaki nuli s.s., onda je f konstantno preslikavanje u toj oblasti. Uz ovu primjedbu može se dokaz naše leme sprovesti na isti način kao i dokaz leme 7 u /26/ koja se odnosi na kvaziregularna preslikavanja. Mi ćemo se ograničiti samo ovom primjedbom. ////

5.1.3. T e o r e m a. Preslikavanje $f:G\longrightarrow R^n$kvazikonformno u srednjem u oblasti G diferencijabilno je s.s. .

D o k a z. Kako se svaka oblast može pretstaviti kao prebrojiva unija ograničenih oblasti, iz definicije 2.4 preslikavanja kvazikonformnog u srednjem slijedi da je $k(x,f)\neq\infty$ s.s. u G, te da su svi parcijalni izvodi preslikavanja f jednaki nuli s.s. gdje je $J(x,f)=o$. Znači, zadovoljeni su uslovi prethodne leme, pa za svaku kompaktnu podoblast D od G i $y\in f(D)\setminus f(\partial D)$, $\mu(y,f,D)\geqslant 1$. Dokažimo sada da je f monotono preslikavanje. $f(\bar{D})$ je kompakt i zato spoljašnja oblast od $f(\partial D)$ ne može biti dio od $f(\bar{D})$. S druge strane, topološki stepen je konstantan na svakoj pov zanoj komponenti skupa $R^n\setminus f(\partial D)$, te f(D) ne može imati zajedničkih tačaka sa spoljašnjom oblašću skupa $f(\partial D)$, jer bi u tim tačkama, a time i u cijeloj spoljašnjoj oblasti skupa $f(\partial D)$ bilo $\mu(y,f,D) \geqslant 1$. Iz leme 5.1.1 sada slijedi da je preslikavanje f monotono, te je diferencijabilnost s.s. posljedica teoreme 4.3.2 . ////

5.2. U s l o v (N) i t r a n s f o r m a c i j a i n t e g r a l a. Svojevremeno je pokazano da kvazikonformna preslikavanja zadovoljavaju uslov (N), /7/, /39/. Rešetnjak je dokazao /24/ da svi homeomorfizmi, a ne samo kvazikonformni, iz klase W_n^1 zadovoljavaju taj uslov. U /26/ je potom dokazao da uslov (N) zadovoljavaju i kvaziregularna preslikavanja.

5.2.1. T e o r e m a. Preslikavanja kvazikonformna u srednjem zadovoljavaju uslov (N).

D o k a z. Pri dokazu teoreme 5.1.3 smo vidjeli da preslikavanje kvazikonformno u srednjem zadovoljavaju uslove leme 5.1.2 . Kako je pri dokazu da kvaziregularna preslikavanja zadovoljavaju uslov (N) (teorema 9 u /26/) kvaziregularnost korišćena samo u vidu leme 5.1.2 i teoreme 5.1.3 taj dokaz se može prenijeti i na preslikavanja kvazikonformna u srednjem. ////

5.2.2. U opštem slučaju, ako neprekidno preslikavanje $f:G \longrightarrow R^n$ zadovoljava uslov (N), onda je za svaki po Lebesgueu mjerljiv skup A, $f(A)$ takodje mjerljiv /34/.

Navedimo još jednu teoremu o transformaciji integrala, koja važi i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem, /23, paragraf V.3 /.

5.2.3. T e o r e m a. Neka je $f:G \longrightarrow R^n$ neprekidno preslikavanje koje s.s. u G ima slabi potpuni diferencijal, zadovoljava uslov (N) i $J(x,f)$ je lokalno integrabilan u G. Tada za svaku kompaktnu oblast D je

$$\int_D |J(x,f)|\, dm(x) = \int_{R^n} N(y,f,G)\, dm(y) ,$$

gdje je $N(y,f,D)$ broj elemenata skupa $f^{-1}(y) \cap D$ (dopušta se vrijednost $N(y,f,D)=\infty$).

Ako je $m(\partial D)=o$, tada za s.s. $y \in R^n$ je $|\mu(y,f,D)| \leq N(y,f,D)$ i

$$\int_D J(x,f)\, dm(x) = \int_{R^n} \mu(y,f,D)\, dm(y) .$$

Dalje, ako je $u(y)$ takvva funkcija u R^n da je $N(y,f,D)u(y)$ integrabilna funkcija, tada

$$\int_D u(f(x))\, |J(x,f)|\, dm(x) = \int_{R^n} u(y)\, N(y,f,D)\, dm(y).$$

U slučaju da je $m(\partial D)=o$

$$\int_D u(f(x))\, J(x,f) = \int_{R^n} u(y) \mu(y,f,D)\, dm(y) . \quad ////$$

Ova teorema važi i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem, jer su ona diferencijabilna s.s. (teorema 5.1.3), zadovoljavaju uslov (N) (teotema 5.2.1), a lokalna integrabilnost jakobijana lako slijedi iz pripadnosti klasi W_n^1 i nejednakosti Höldera.

5.3. O uslovu ograničenosti indeksa. Rešetnjak je dokazao da je kvaziregularno preslikavanje ili konstantno ili je otvoreno i diskretno (vidjeti paragraf 1). Dokaz tih važnih svojstava baziran je na vaijacionim osobinama /28/ kvaziregularnih preslikavanja, koja su najprije iskoriščena za dokaz da je inverzna slika tačke pri nekonstantnom kvaziregularnom preslikavanju skup čiji je kapacitet /26/ jednak nuli /29/, a potom da ta preslikavanja zadovoljavaju uslov ograničenosti indeksa (topološki stepen $\mu(y,f,D)$ je ograničen na svakoj kompaktnoj podoblasti preslikavane oblasti G). Ako bi se dokazalo da ova dva svojstva imaju i preslikavanja kvazikonformna u srednjem, lako bi se dokazala još neka (osim otvorenosti i diskretnosti), u suštini diferencijabilna svojstva naših preslikavanja. Naprimjer, skup B_f tačaka grananja bi imao topološku dimenziju bar za dva manju od dimenzije prostora u kome se nalazi preslikavana oblast /4/, a takodje da je $m(B_f)=o$, te i $m(f(B_f))=o$ /15/.

5.4. Kompozicija preslikavanja. U radu sa preslikavanjima kvazikonformnim u srednjem ponekad je od koristi sledeća lema, koju dajemo na ovom mjestu,jer je za njen dokaz bila nužna činjenica da je preslikavanje kvazikonformno u srednjem diferencijabilno s.s.

5.4.1. Lema. Neka je $f:G\longrightarrow G_1$ preslikavanje k_1 - kvazikonformno u srednjem, a $g:G_1\longrightarrow R^n$ k_2-kvazikonformno preslikavanje iz klase C^1. Tada je preslikavanje $g\circ f:G\longrightarrow R^n$ k_1k_2 kvazikonformno u srednjem.

D o k a z. Za s.s. $x \in G$, f je diferencijabilno u x, pa je $g \circ f$ takodje s.s. diferencijabilno preslikavanje i

$$\frac{\partial g_k \circ f}{\partial x_i}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_j}(f(x)) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x) .$$

Kako su parcijalni izvodi difeomorfizma g lokalno ograničeni, a parcijalni izvodi preslikavanja f lokalno L^n integrabilni, slijedi da su i parcijalni izvodi preslikavanja $g \circ f$ lokalno L^n integrabilni. Osim toga g lokalno zadovoljava uslov Lipschitza, pa je $g \circ f$ lokalno, (a time i globalno) ACL. Zato su parcijalni izvodi od $g \circ f$ istovremeno uopšteni izvodi preslikavanja $g \circ f$ (s tačnošću do pripadnosti klasi ekvivalencije). Znači, $g \circ f$ je iz klase W_n^1.

Ako je u $x \in G$ $J(x,f) \neq o$, onda je linearno preslikavanje $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x)$ nesingularno (g je difeomorfizam), te na osnovu leme 1.1.1 slijedi da je

$$k(x, g \circ f) \leqslant k(x,f)\ k(f(x),g) \leqslant k_2 k(x,f) . \qquad (1)$$

Dalje, $J(x, g \circ f)=o$ ako i samo ako $J(x,f)=o$, pa iz 2.3 slijedi da ako je $k(x,g\ f)=\infty$, onda mora biti i $k(x,f)=\infty$, te da je (1) tačno s.s. u G. Zato je i $k(G, g \circ f) \leqslant k_2 k(G,f)$, što je i trebalo dokazati. ////

6. P r e s l i k a v a nj e 1 - k v a z i k o n f o r m n o u s r e d nj e m

Još 1850. godine, J. Liouville je dokazao metodom diferencijalne geometrije /54/ da se klasa konformnih preslikavanja u prostoru (to jest preslikavanja koja čuvaju uglove), iscrpljuje grupom koju generišu inverzije u odnosu na sfere i refleksije u odnosu na (n-1) - dimenzionalne ravni u R^n - takozvanom grupom Möbiusovih transformadija. Liouvilleu je, doduše, bila potrebna pretpostavka da su razmatrana preslikavanja iz klase C^3. Dugo se taj dopunski uslov nije mogao oslabiti. Gehring /8/ je dokazao da je svako 1 - kvazikonformno preslikavanje Möbiusova transformacija. Rešetnjak /27/ je dao analitički dokaz teoreme Liouvillea pri minimalnim uslovima regularnosti.

6.1. D e f i n i c i j a. Preslikavanje $f:G\longrightarrow R^n$ oblasti $G\subset R^n$ se naziva uopštenim konformnim preslikavanjem, ako je $f\in W^1_n$, $J(x,f)\geqslant 0$ s.s. u G i za s.s. $x\in G$ formalni diferencijal $f'(x)$ ima oblik $f'(x)=\alpha(x)P(x)$, gdje je $\alpha(x)$ realan broj, a $P(x)$ ortonalno preslikavanje prostora R^n.

6.1.1. T e o r e m a /27/. Svako uopšteno konformno preslikavanje, ili je konstantno ili je Möbiusova transformacija. ////

6.2. Primjer 3.2 pokazuje da 1 - kvazikonformno u srednjem preslikavanje ne mora da bude konformno. Medjutim, nepravilnost tog tipa nije suštinska. Radi se, ustvari, o tome da u nekom dijelu D neograničene oblasti može da bude $\int_D k^{n-1}(x,f)dm$ ograničen, pa ako je u ostalom dijelu oblasti $k(x,f)=1$, slijedi da ako je preslikavana oblast "dovoljno velike zapremine" f može ti preslikavanje 1 - kvazikonformno u srednjem, a da nije konform Takodje, f može biti i konstantno preslikavanje. Važi medjutim, 6.2.1. T e o r e m a. Nekonstantno preslikavanje $f:G \longrightarrow R^n$ kvazikonformno u srednjem je Möbiusova transformacija ako i samo ako je 1 - kvazikonformno u srednjem u svakoj ograničenoj podoblasti oblasti G.

D o k a z. Neka je $D \subset G$ ograničena oblast. Iz

$$\frac{1}{m(D)} \int_D k^{n-1}(x,f)\,dm = 1,$$

slijedi da je

$$\int_D \left(k^{n-1}(x,f)-1\right) dm = 0,$$

te zbog $k(x,f) \geqslant 1$, $k(x,f)=1$ s.s. u D. Oblast G je prebrojiva unija ograničenih podoblasti,pa je $k(x,f)=1$ s.s. u G. Na osnovu paragrafa 1.1 zaključujemo da je $f'(x)=\alpha(x)P(x)$ s.s. u G. Kako je $f \in W_n^1$, tvrdjenje koje dokazujemo je posljedica teoreme 6.1.1 . ////

G l a v a III

FAMILIJE KRIVIH I PRESLIKAVANJA KVAZIKONFORMNA U SREDNJEM

U v o d

Modul igra osnovnu ulogu pri izučavanju kvazikonformnih preslikavanja. U ovoj glavi ćemo dokazati jednu lemu koja omogućuje da se u mnogim slučajevima i pri izučavanju preslikavanja kvazikonformnih u srednjem primijeni metod modula.

7. M o d u l f a m i l i j e k r i v i h

7.1. K r i v a i i n t e g r a l d u ž k r i v e. Kriva je neprekidno preslikavanje $\gamma:\Delta \longrightarrow \bar{R}^n$, intervala Δ iz R^1. Kriva se naziva zatvorenom ili otvorenom, zavisno od toga da li je interval Δ zatvoren ili otvoren. Podkriva krive γ je restrikcija od γ na podinterval od Δ . Skup $\gamma(\Delta)$ takodje ćemo zvati krivom.

Neka je $A\subset R^n$ Borelov skup i $\varrho: A\longrightarrow \dot{R}^1$ nenegativna Borelova funkcija. Ako je kriva $\gamma :\Delta \longrightarrow A$ rektifibilna ili lokalno rektifibilna, možemo je parametrizovati uzimajući za parametar dužinu s luka /mjerenu od neke tačke krive/. Tada je $\varrho\circ\gamma$ nenegativna Borelova funkcija, pa možemo definisati integral funkcije ϱ duž krive γ kao integral Lebesguea

$$\int_{\gamma} \varrho\,[x(s)]\,ds ,$$

običan ili nesvojstven, zavisno od toga da li je kriva γ rektifibilna ili samo lokalno rektifibilna.

Neka je D oblast u R^n, $f: D \longrightarrow R^n$ neprekidno preslikavanje i $\gamma : \Delta \longrightarrow D$ kriva u D. Tada je $f \circ \gamma$ kriva u R^n. Ako je ta kriva lokalno rektifibilna tada je za nenegativnu Borelovu funkciju $\varrho : \{f \circ \gamma(s)\} \longrightarrow \dot{R}^1_+$ definisan integral duž krive $f \circ \gamma$.

Neka je

$$L(x,f) = \limsup_{h \to 0} \frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|}, \quad x \in D$$

Očigledno $0 \leqslant L(x,f) \leqslant \infty$. Ako je f diferencijabilno u tački x, onda je $L(x,f) = |f'(x)|$. Nije teško dokazati sledeće teoreme, /42, str. 11 i 12/.

7.1.1. T e o r e m a. Funkcija $x \longmapsto L(x,f)$ je Borelova u D. ////

7.1.2. T e o r e m a. Neka je D oblast u R^n i f neprekidno preslikavanje oblasti $D \subset R^n$. Neka je dalje $\gamma : \Delta \longrightarrow D$ lokalno rektifibilna kriva za koju je f apsolutno neprekidno na svakoj zatvorenoj podkrivoj od γ (f je apsolutno neprekidno preslikavanje na krivoj γ ako je $f \circ \gamma(s)$ apsolutno neprekidno preslikavanje dužine luka s). Tada je $f \circ \gamma$ lokalno rektifibilna kriva. Ako je dalje $\varrho : \{ f \circ \gamma(s)\} \longrightarrow \dot{R}^1$ nenegativna Borelova funkcija, tada

$$\int_{f \circ \gamma} \varrho \, ds \leqslant \int_{\gamma} \varrho[f(x)] \, L(x,f) \, |dx| . \qquad ////$$

Primijetimo da ako je f neprekidno diferencijabilno preslikavanje da su tada ispunjeni svi uslovi gornje teoreme.

7.2. D e f i n i c i j a. Neka je Γ familija krivih u $\bar{R}^n$. Označimo sa $F(\Gamma)$ skup svih nenegativnih Borelovih funkcija $\varrho : R^n \longrightarrow \bar{R}^1$ takvih da je

$$\int_\gamma \varrho \, ds \geqslant 1 ,$$

za svaku lokalno rektifibilnu krivu $\gamma \in \Gamma$. Modul familije krivih Γ je

$$M(\Gamma) = \begin{cases} \inf\limits_{\varrho \in F(\Gamma)} \int_{R^n} \varrho^n \, dm , & \text{za } F(\Gamma) \neq \phi \\ \infty , & \text{za } F(\Gamma) = \phi . \end{cases}$$

Funkcije iz $F(\Gamma)$ nazivaju se dopustivim za familiju .

Iz definicije modula neposredno slijedi da je modul familije krivih koje nijesu lokalno rektifibilne jednak nuli.

7.2.1. P r i m j e r. Za $0 \leqslant a \leqslant b$ oblast $R = \{ x \mid a < |x - x_0| < b \} \subset R^n$ naziva se sfernim prstenom. Za slučaj $a > 0$, $b < \infty$, odredimo modul familije krivih Γ_R početne i krajnje tačke kojih pripadaju redom sferama poluprečnika a i b, a sve ostale tačke krivih pripadaju prstenu R. Modul te familije krivih naziva se modulom prstena R /vidjeti 7.3.10/. Neka je $\varrho \in F(\Gamma_R)$ i $\gamma_e : t \longrightarrow te$, gdje je e jedinični vektor, $t \in [a,b]$, a Γ_R pomenuta familija krivih. Primjenom nejednakosti Höldera dobijamo

$$1 \leqslant \left(\int_{\gamma_e} \varrho \, ds \right)^n \leqslant \left(\ln \frac{b}{a} \right)^{n-1} \int_a^b \varrho^n \, t^{n-1} dt .$$

Integraljeći obje strane dobijene relacije po svim pravcima i primjenjujući teoremu Fubinia, slijedi da je

$$\omega_{n-1} \leqslant \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{n-1} \int_{R^n} \varrho^n \, dm , \qquad (*)$$

gdje je ω_{n-1}, $(n-1)$ - dimenzionalna mjera jedinične sfere u R^n. U relaciji $(*)$ jednakost se postiže za funkciju

$$\varrho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\ln \frac{b}{a} |x-x_0|} & , \text{ za } x \in R \\ 0 & , \text{ za } x \notin R \end{cases}$$

koja je, očigledno, iz $F(I_R)$. Zato,

$$M(R) = \omega_{n-1} \left(\ln \frac{b}{a}\right)^{1-n}.$$

7.2.2. Ako je $M(\Gamma) = \int_{R^n} \varrho^n$ i $\varrho \in F(\Gamma)$, ϱ se naziva ekstremalnom funkciom za familiju Γ.

7.3. O s n o v n a   s v o j s t v a   m o d u l a. Navodimo samo ona svojstva koja će kasnije biti korišćena (dokazi se mogu naći u /5/ i /42/).

7.3.1. Modul je spoljna mjera na prostoru svih krivih u R^n, to je

(1) $M(\emptyset)=0$,

(2) Ako je $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ onda je $M(\Gamma_1) \leqslant M(\Gamma_2)$,

(3) $M(\bigcup_{i=1}^{\infty} \Gamma_i) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} M(\Gamma_i)$.

7.3.2. Iz monotonosti i subaditivnosti modula slijedi da je

$$M(\Gamma \cup \Gamma_o)=M(\Gamma),$$

ako je $M(\Gamma_o)=o$.

7.3.3. Kaže se " skoro svaka kriva" umjesto "sve krive izuzev familije čiji je modul nula".

7.3.4. Skoro svaka kriva u R^n je rektifibilna.

7.3.5. Kaže se da familija Γ_1 minorira familiju Γ_2 i označava sa $\Gamma_1 < \Gamma_2$, ako svaka kriva iz Γ_2 ima za podkrivu krivu iz Γ_1.

7.3.6. Ako je $\Gamma_1 < \Gamma_2$ onda je $M(\Gamma_1) \geqslant M(\Gamma_2)$.

Primijetimo da je svojstvo (2) u 7.3.1. samo specijalan slučaj svojstva 7.3.6. .

7.3.7. Familije Γ_i nazivaju se separiranim ako postoje disjunktni Borelovi skupovi E_i u R^n, takvi da ako je $\gamma \in \Gamma_i$ lokalno rektifibilna kriva, tada $\int_\gamma \chi_i \, ds = 0$, gdje je χ_i karakteristična funkcija skupa $\underline{C}E_i$.

7.3.8. Ako su Γ_i, $i=1,2,\ldots$ separirane i $\Gamma_i < \Gamma$, onda

$$M(\Gamma)^{\frac{1}{1-n}} \geqslant \sum M(\Gamma_i)^{\frac{1}{1-n}}$$

7.3.9. Neka je G oblast u R^n i $f:G \longrightarrow R^n$ neprekidno preslikavanje iz klase W_n^1. Neka je dalje Γ familija svih lokalno rektifibilnih krivih u G na kojima f nije lokalno apsolutno neprekidno. Tada je $M(\Gamma)=o$.

7.3.10. P r s t e n. Oblast $R \subset \overline{R}^n$ naziva se prstenom, ako $\underline{C}R$ ima tačno dvije komponente C_0 i C_1. Ako je Γ familija krivih početne i krajnje tačke kojih pripadaju redom komponentama C_0 i C_1, a sve ostale tačke krivih pripadaju prstenu R, onda se modul familije Γ naziva modulom prstena R i piše se M(R).

7.3.11. Modul prstena R je jednak nuli ako i samo ako je degenerisan, to jest C_0 ili C_1 je tačka.

8. L e m a o m o d u l u

Sledeća lema je uopštenje odgovarajućih tvrdjenja /8/ i /21/, za kvazikonformna i kvaziregularna preslikavanja.

Ako je $f:G \longrightarrow R^n$ preslikavanje oblasti $G \subset R^n$, γ' kriva u f(G), onda se za krivu γ u G za koju je $f \circ \gamma = \gamma'$ kaže da pokriva krivu γ'.

8.1. L e m a. Neka je $f \in W_n^1(G)$ lokalno homeomorfno preslikavanje oblasti $G \subset R^n$ takvo, da je za svaku podoblast D od G u kojoj je f homeomorfno, obratni homeomorfizam $f_{|D}^{-1} \in W_n^1(f(D))$. Ako je Γ familija krivih u G, $\Gamma' = f(\Gamma)$, pri čemu svaka kriva u Γ' ima podkrivu koja je pokrivena bar m puta krivima iz Γ, onda je

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{1}{m} \int_{R^n} \varrho^n(x)\, k^{n-1}(x,f)\, dm$$

gdje je ϱ proizvoljna dopustiva funkcija za familiju Γ.

D o k a z. G ima prebrojivu bazu, odnosno može se prekriti prebrojivom kolekcijom $\{D_i\}$ oblasti D_i, takvih da je $D_i \subset G$ i $f_i = f_{|D_i}$ homeomorfizam. Neka je

$$L(y, f_i^{-1}) = \limsup_{|h| \to 0} \frac{|f_i^{-1}(y+h) - f(y)|}{|h|},$$

maksimalno rastezanje preslikavanja f_i^{-1} u tački $y \in f(D_i)$. Sve funkcije $L(y, f_i^{-1})$ su nenegativne i mjerljive po Borelu (7.1.1). Neka $\varrho : R^n \longrightarrow \dot{R}^1$ ispunjava uslove leme, to jest neka je ϱ mjerljiva po Borelu nenegativna funkcija koja zadovoljava uslov $\int_\gamma \varrho\, ds \geqslant 1$ za svaku lokalno rektifibilnu krivu $\gamma \in \Gamma$. Definišimo funkciju

$$\varrho'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} \sup\limits_{\substack{(x_{i_1}, \dots, x_{i_{m^*}}) \\ x_{i_k} \in f^{-1}(y),\, m^* = \min\{m, \operatorname{card} f^{-1}(y)\}}} \left\{ \sum_{k=1}^{m^*} \varrho(x_{i_k}) L(y, f_{i_k}^{-1}) \right\}, & y \in f(G) \\ 0, & y \notin f(G) \end{cases}$$

gdje je i_k jednako onom i za koje je $x_{i_k} \in D_i$, ($x_{i_p} \neq x_{i_q}$, za $p \neq q$). ϱ' je takodje nenegativna i mjerljiva po Borelu.

Neka je Γ_i' podfamilija familije Γ' koju čine one krive iz Γ' koje imaju makar jednu podkrivu u $f(D_i)$ na kojoj f_i^{-1} nije lokalno apsolutno neprekidno. Zbog 7.3.6 i na osnovu 7.3.9 i 7.3.1 imamo da je $M(\Gamma_i') = o$ te $M(\bigcup \Gamma_i') = o$ i $M(\Gamma_o') = M(\Gamma')$, gdje je $\Gamma_o' = \Gamma' \setminus \bigcup \Gamma_i'$. Znači, na svakoj krivoj iz Γ_o'; f_i^{-1} su lokalno apsolutno neprekidne, te je svaka kriva $\gamma \in \Gamma$ koja pokriva proizvoljnu lokalno rektifibilnu podkrivu γ' neke krive iz Γ_o' lokalno rektifibilna. Za $\delta > o$ proizvoljno, i za unaprijed izabrane krive $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ koje pokrivaju istu podkrivu γ', gdje je ϱ proizvoljna dopustiva funkcija za familiju Γ.

D o k a z. G ima prebrojivu bazu, odnosno može se prekriti prebrojivom kolekcijom $\{D_i\}$ oblasti D_i, takvih da je $D_i \subset G$ i $f_i = f_{|D_i}$ homeomorfizam. Neka je

$$L(y, f_i^{-1}) = \limsup_{|h|\to 0} \frac{|f_i^{-1}(y+h) - f(y)|}{|h|},$$

maksimalno rastezanje preslikavanja f_i^{-1} u tački $y \in f(D_i)$. Sve funkcije $L(y, f_i^{-1})$ su nenegativne i mjerljive po Borelu (7.1.1). Neka $\varrho : R^n \longrightarrow \dot{R}^1$ ispunjava uslove leme, to jest neka je ϱ mjerljiva po Borelu nenegativna funkcija koja zadovoljava uslov $\int_{\gamma} \varrho\, ds \geq 1$ za svaku lokalno rektifibilnu krivu $\gamma \in \Gamma$. Definišimo funkciju

$$\varrho'(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{m} \sup\limits_{\substack{(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m^*}}) \\ x_{i_\ell} \in f^{-1}(y),\, m^* = \min\{m, \operatorname{card} f^{-1}(y)\}}} \left\{ \sum_{k=1}^{m^*} \varrho(x_{i_k}) L(y, f_{i_k}^{-1}) \right\}, & y \in f(G) \\ 0, & y \notin f(G) \end{cases}$$

gdje je i_k jednako onom i za koje je $x_{i_k} \in D_i$, $(x_{i_p} \neq x_{i_q}$, za $p \neq q)$. ϱ' je takodje nenegativna i mjerljiva po Borelu.

Neka je Γ_i' podfamilija familije Γ' koju čine one krive iz Γ' koje imaju makar jednu podkrivu u $f(D_i)$ na kojoj f_i^{-1} nije lokalno apsolutno neprekidno. Zbog 7.3.6 i na osnovu 7.3.9 i 7.3.1 imamo da je $M(\Gamma_i') = 0$ te $M(\bigcup \Gamma_i') = 0$ i $M(\Gamma_0') = M(\Gamma')$, gdje je $\Gamma_0' = \Gamma' \setminus \bigcup \Gamma_i'$. Znači, na svakoj krivoj iz Γ_0' f_i^{-1} su lokalno apsolutno neprekidne, te je svaka kriva $\gamma \in \Gamma$ koja pokriva proizvoljnu lokalno rektifibilnu podkrivu γ' neke krive iz Γ_0' lokalno rektifibilna. Za $\delta > 0$ proizvoljno, i za unaprijed izabrane krive $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ koje pokrivaju istu podkrivu γ', uzmimo na svakoj od krivih $\gamma_i^* \in \Gamma$ podkrivu α_i takvu da je $f\circ\alpha_i = f\circ\alpha_j$ i $\int_\alpha \rho(x)\,ds > 1-\delta$. Ako je $\alpha\ :[o,1]\longrightarrow R^n$, razbijmo interval $[o,1]$ u podintervale $[a_o,a_1]$, $[a_1,a_2],\dots,$ $[a_{p-1},a_p]$, $a_o < a_1 < \dots < a_p$, $a_o=o$, $a_p=1$, tako da je svaka podkriva $\alpha_i|[a_{\ell-1},a_\ell] = \alpha_i^\ell$ za svako i u nekoj od oblasti D_k. Koristeći 7.1.2 dobijamo da je

$$\int_{\gamma'} \rho' ds' \geqslant \int_{f\circ\alpha} \rho' ds' = \sum_{\ell=1}^{p} \int_{f\circ\alpha^\ell} \rho' ds' \geqslant \sum_{\ell=1}^{p} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i^\ell} \rho(x) L(f(x), f_k^{-1})\, ds$$

$$\geqslant \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \int_{\alpha_i} \rho(x)\, ds \geqslant \min_i \int_{\alpha_i} \rho(x)\, ds > 1-\delta$$

Zbog proizvoljnosti $\delta > o$ je $\int_{\gamma'} \rho' ds' \geqslant 1$, odnosno ρ' je dopustiva funkcija za familiju Γ_o'. Kako je

$$\frac{1}{m^n}\left(\sum_{k=1}^{m^*} a_k\right)^n \leqslant \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m^*} a_k^n ,$$

biće

$$\int_{R^n} \rho'^n(y)\, dm(y) = \int_{f(G)} \rho'^n(y)\, dm(y) = \frac{1}{m} \int_{f(G)} \sup\left\{ \sum_{k=1}^{m^*} \rho^n(x_{i_k}) L(y, f_{i_k}^{-1})\right\} dm$$

Preslikavanje f_i^{-1} je kao homeomorfizam klase W_n^1, za s.s. $x \in f(D_i)$ diferencijabilno i $J(y, f_i^{-1}) \neq o$ /24/. Na osnovu paragrafa 1.1 imamo da je

$$L^n(y, f_i^{-1}) = |(f_i^{-1})'(y)|^n \leqslant k^{n-1}(y, f_i^{-1})\, J(y, f_i^{-1}) \quad \text{s.s. u } f(D_i).$$

Zato

$$\int_{R^n} \rho'^n dm \leqslant \frac{1}{m} \int_{f(G)} \sup\left\{ \sum_{k=1}^{m^*} \rho^n(x_{i_k})\, k^{n-1}(y, f_{i_k}^{-1})\, J(y, f_{i_k}^{-1})\right\} dm$$

$$\leqslant \frac{1}{m} \int_G \rho^n(x)\, k^{n-1}(x, f)\, dm .$$

U poslednjem prelazu je korišćena teorema 5.2.3 o transformaciji integrala (f_i^{-1} kao homeomorfizam iz klase W_n^1 zadovoljava uslov (N) /24/) i odnos $k(y,f_i^{-1})=k(x,f)$ za $f_i^{-1}(y)=x$. ////

Primijetimo da u slučaju kad je f konformno preslikavanje u (1) se ostvaruje jednakost, a za $k(x,f) \leqslant k$ dobija se specijalan slučaj rezultata /21/, $M(\Gamma') \leqslant k^{n-1}/m \quad M(\Gamma)$.

8.2. Kad se primjenjuje dokazana lema, onda se zavisno od razmatranog problema za ϱ uzima pogodna dopustiva funkcija. Najčešće je to ekstremalna funkcija familije Γ. Tako će biti učinjeno pri primjeni leme 8.1 u Glavi IV. Napomenimo još, da već kod kvaziregularnih preslikavanja ne postoji u opštem slučaju analogna ocjena modula familije originala, (vidjeti i naš primjer 3.1).

Glava IV

TEOREMA O GLOBALNOM HOMEOMORFIZMU

Uvod

U ovoj glavi se razmatraju lokalni homeomorfizmi i dokazuje se da je teorema o globalnom homeomorfizmu za kvazikonformna preslikavanja, tačna i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem.

Najprije se u paragrafu 9 razjašnjava razlika izmedju lokalnog homeomorfizma i pokrivanja. Osvjetljava se značaj ponašanja lokalnog homeomorfizma u okolini beskonačno daleke tačke i tako je ovaj paragraf u izvjesnom smislu ishodni za ostale paragrafe ove glave.

U paragrafu lo se dokazuje da lokalno homeomorfno preslikavanje prostora R^n koje je kvazikonformno u srednjem mora biti homeomorfizam i pritom na cio prostor, rezultat koji je pod imenom teorema Zoriča dobro poznat za kvazikonformna preslikavanja. Dokazuju se, ustvari, neka homotopska svojstva preslikavanja, čiji je specijalan slučaj teorema Zoriča. Istovremeno se ukazuje i tačna asimptotika srednje dilatacije na beskonačnosti pri kojoj teorema još uvijek važi.

Na osnovu toga što je beskonačno daleka tačka otklonjiv singularitet, u paragrafu 11 je formulisana tvrdjenje u kome se daje najbolji dovoljan uslov, izražen preko integralne - srednje karakteristike, pod kojim je izolovani singularitet otklonjiv.

Jedan dio rezultata ove glave je sadržan u našim radovima /5o/, /51/ i /52/.

9. Lokalni homeomorfizam i pokrivanje

9.1. Lokalni homeomorfizam. Preslikavanje $f:X\longrightarrow Y$ topološkog prostora X u topološki prostor Y se naziva lokalnim homeomorfizmom, ako za proizvoljnu tačku $x\in X$ postoji okolina $U(x)$ takva da je restrikcija $f_{|U(x)}: U(x)\longrightarrow f(U(x))$ homeomorfizam.

U opštem slučaju $f(U(x))$ ne mora da bude okolina tačke $f(x)$ u prostoru Y, to jest u opštem slučaju lokalni homeomorfizam nije otvoreno preslikavanje.

Na osnovu teoreme Browera /55/, homeomorfizam dvaju skupova koji leže u mnogostrukostima, odnosno euklidskim prostorima iste dimenzije, svakoj unutrašnjoj tački jednog skupa pridružuje unutrašnju tačku drugog skupa. Drugim riječima, svakom otvorenom skupu jedne mnogostrukosti pri topološkom preslikavanju odgovara otvoreni skup druge. Zato je i lokalni homeomorfizam $f:D\longrightarrow R^n$ otvorenog skupa $D\subset R^n$ u euklidski prostor R^n otvoreno preslikavanje. Kako su naša razmatranja posvećena preslikavanjima oblasti u istom euklidskom prostoru, imaćemo u vidu ovu činjenicu i u daljem ćemo pretpostavljati da je lokalni homeomorfizam po definiciji otvoreno preslikavanje.

Da bi lokalno homeomorfno preslikavanje bilo homeomorfno, ono treba da zadovoljava prilično stroge uslove pravilnosti.

9.2. P o k r i v a nj e. Neprekidno preslikavanje f povezanog prostora $\tilde{X}$ na povezani lokalno linearno povezani prostor X, naziva se pokrivanjem, a prostor $\tilde{X}$ pokrivajućim prostorom za prostor (bazu) X, ako svaka tačka $x \in X$ ima takvu otvorenu linearno povezanu okolinu U da je svaka komponenta povezanosti skupa $f^{-1}(U)$ otvorena i pomoću preslikavanja f se homeomorfno preslikava na U, (pretpostavlja se da je $f^{-1}(U)$ neprazan skup). Proizvoljna takva okolina U naziva se elementarnom okolinom tačke x.

Iz definicije pokrivanja neposredno slijedi da je i prostor $\tilde{X}$ lokalno linearno povezan.

Neka je $f:\tilde{X}\longrightarrow X$ pokrivanje i α put u prostoru X. Kaže se da put $\tilde{\alpha}$ u prostoru $\tilde{X}$ pokriva put α ako $f\circ\tilde{\alpha}(t)=\alpha(t)$. Ako je α dati put u X, a $\tilde{x}$ data tačka u $\tilde{X}$ koja zadovoljava uslov $f(\tilde{x})=\alpha(o)=x$, tada u $\tilde{X}$ postoji i pritom jedinstveni put $\tilde{\alpha}$ koji pokriva put α, a počinje u tački $\tilde{x}$. Ako se dalje put α koji počinje u fiksiranoj tački x neprekidno deformiše (to jest ako je data homotopija $F(t,s):I\times I\longrightarrow X$, tako da je $F(t,o)=\alpha(t)$, $F(1,s)=\alpha(o)$) tada se pokrivajući put $\tilde{\alpha}$ koji počinje u fiksiranoj tački $\tilde{x}$ takodje neprekidno deformiše (to jest postoji pokrivajuća homotopija $\tilde{F}(t,s):I\times I\longrightarrow X$, tako da je $\tilde{F}(t,o)=\tilde{\alpha}(t)$, $\tilde{F}(1,s)=\tilde{\alpha}(o)$ i $f\circ\tilde{F}=F$). Ako je pri deformaciji puta α njegova krajnja tačka nepomična, onda i pokrivajući put $\tilde{\alpha}$ pri deformaciji ne mijenja svoju krajnju tačku.

Ako su prostori $\tilde{X}$ i X linearno povezani, onda kod pokrivanja $f:\tilde{X}\longrightarrow X$, moć skupa $f^{-1}(y)$ je ista za svako $x\in X$. Ako je osim toga $\tilde{X}$ prostopovezan prostor, onda je f homeomorfizam. (Dokaz pobrojanih svojstava može se naći u /56/ str. 358 - 36o). Pokrivanje zadovoljava i aksiomu o pokrivajućoj homotopiji /lo/.

Primijetimo još, da su oblasti jedini otvoreni povezani i lokalno linearno povezani skupovi u R^n.

9.3. Jasno je da je svako pokrivanje lokalni homeomorfizam. S druge strane, lako je dati primjer lokalnog homeomorfizma koji je preslikavanje na, a koji nije pokrivanje. Ako se naprimjer u našem primjeru lo.9.2 namotava samo dio cilindra konačne dužine (bez baza), tako da restrikcija takodje bude na, imaćemo lokalni homeomorfizam koji nije pokrivanje. Naime, ako pokrivanje $p:R^1\longrightarrow S^1$, $p(x)=e^{ix}$ razmotrimo na intervalu (a,b) čija je dužina $b-a$ veća od 2π i $b-a$ nije djeljivo sa 2π, dobićemo lokalni homeomorfizam koji nije pokrivanje. Opštije, ako je $f:\tilde{X}\longrightarrow X$ pokrivanje, U otvoren povezan pravi podskup od $\tilde{X}$ takav da je $f(U)=X$, $f_{|U}$ će biti lokalni homeomorfizam, no ne i pokrivanje.

Nas će u paragrafu lo interesovati uslovi pod kojima je lokalni homeomorfizam neograničenih oblasti u R^n homeomorfno preslikavanje. S tim ciljem, najprije treba ispitati kada je lokalni homeomorfizam pokrivanje.

9.3.1. Neka su G i G_1 oblasti u R^n. Lokalni homeomorfizam $f:G\longrightarrow G_1$ naziva se sopstvenim, ako je za svaki otvoren povezan skup $V\subset G_1$ za koji je $\bar{V}\cap\partial G_1=\emptyset$, za proizvoljnu povezanu komponentu U skupa $f^{-1}(V)$, $\bar{U}\cap\partial G=\emptyset$.

Ako je $f:G \longrightarrow G_1$ sopstveni lokalni homeomorfizam, onda se ne mogu pojaviti trivijalni slučajevi,kao oni u prethodnom primjeru, zbog kojih lokalni homeomorfizam nije pokrivanje. Tada unutar oblasti G_1 nema tačaka koje odgovaraju konačnim graničnim tačkama oblasti G u koje se f može neprekidno produžiti i ponašanje preslikavanja u okolini beskonačno daleke tačke je opredjeljujuće za f.

9.3.2. L e m a. Neka su G i G_1 oblasti u R^n i $f:G \longrightarrow G_1$ sopstveni lokalni homeomorfizam. Ako za put α u G_1 nema pokrivajućeg puta u G sa početkom u tački $x \in f^{-1}(\alpha(o))$, onda je povezana komponenta $\tilde{\alpha}_x$ skupa $f^{-1}(\alpha)$ neograničen skup.

D o k a z. Neka je α put u G_1 sa početkom u tački $y \in G_1$, $x \in f^{-1}(y)$ i $\tilde{\alpha}_x$ ograničen skup. Tada je skup J svih tačaka $t \in [o,1]$ takvih da put $\alpha_{|[o,t]} : [o,1] \longrightarrow G_1$, $s \longmapsto \alpha(st)$, ima pokrivajući put sa početkom u x, neprazan, otvoren i zatvoren u $[o,1]$. Neprazan i otvoren jer je f lokalni homeomorfizam, zatvoren jer je $\tilde{\alpha}_x$ kompaktan skup koji leži u G, a f neprekidno preslikavanje. Dakle, $J=[o,1]$, čime je završen dokaz leme. ////

9.3.3. Za lokalni homeomorfizam važi i lema monodromi. Zaista, ako putevi $\tilde{\alpha}_1$ i $\tilde{\alpha}_2$ imaju zajednički početak i obadva pokrivaju put α, onda je skup onih $t \in [o,1]$ za koje je $\tilde{\alpha}_1(t)=\tilde{\alpha}_2(t)$ zatvoren, (jer su $\tilde{\alpha}_1$ i $\tilde{\alpha}_2$ neprekidna preslikavanja) i otvoren, (jer je f lokalni homeomorfizam), to jest jednak cijelom intervalu $[o,1]$.

9.3.4. Ako kod sopstvenog lokalnog homeomorfizma $f: G \longrightarrow G_1$, za svaki put α i svako $x \in f^{-1}(\alpha(o))$ postoji put u G sa početkom u x koji pokriva α, onda se, s obzirom na jedinstvenost pokrivajućeg puta, može na standardan način (vidjeti naprimjer /9, str. lool/) pokazati da se inverzna slika svake prostopovezane okoline u G_1 raspada na disjunktne okoline u G koje se sa f preslikavaju homeomorfno, to jest može se pokazati da je u tom slučaju lokalni homeomorfizam pokrivanje. U narednom paragrafu ćemo koristiti sledeće tvrdjenje.

9.3.5, L e m a. Neka su G i G_1 oblasti u $\bar{R}^n$, a $f: G \longrightarrow G_1$ lokalni homeomorfizam. Ako za svaku tačku $y \in G_1$ postoji zatvorena okolina $\bar{V} \subset G_1$, čija se inverzna slika raspada na kompaktne podoblasti od G, onda je f pokrivanje. Ako je, osim toga, G_1 prostopovezana oblast, f je homeomorfizam.

D o k a z. Neka je U povezana komponenta inverzne slike $f^{-1}(V)$ prostopovezanog lokalno linearno povezanog skupa V, tako da je $\bar{U} \subset G$, $x_o \in U$, $f(x_o)=y_o$. Kao i pri dokazu u 9.3.2 svaki put u V sa početkom u y_o možemo na jedinstven način (9.3.3) pokriti putem u U sa početkom u x_o i tako dobiti da je $f(U)=V$. Za $y \in V$, $f^{-1}(y) \cap U$ je konačan skup, jer je f lokalni homeomorfizam, (a $\bar{U}$ kompaktan skup), Tačke $x_i \in f^{-1}(y) \cap U$ razdvojimo disjunktnim okolinama $U_i \subset U$ u kojima je f homeomorfno. Tada je $\bigcap f(U_i) \setminus f(\bar{U} \setminus \bigcup U_i)$ okolina u V tačke y, čija se inverzna slika raspada u disjunktne okoline u U koje se sa f na nju homeomorfno preslikavaju. Zamjenjujući eventualno tu okolinu sa njenom linearno povezanom komponentom koja sadrži tačku y, zaključujemo da je $f_{|U}: U \longrightarrow V$ pokrivanje. Zbog toga što je V prostopovezan skup, slijedi da je $f_{|U}$ homeomorfizam. Po uslovu teoreme, svaka tačka y u G_1 ima loptastu, to jest prostopovezanu lokalno linearno povezanu okolinu $\bar{B}^n(y)$ čija inverzna slika je unija kompaktnih oblasti u G, pa na osnovu provedenog razmatranja dobijamo da je $f:G\longrightarrow G_1$ pokrivanje. Poslednji dio tvrdjenja je poznato svojstvo pokrivanja. ////

9.3.6. P o s l e d i c a. Ako je $f:R^n\longrightarrow R^n$ lokalni homeomorfizam, takav da je $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, onda je f homeomorfizam i $f(R^n)=R^n$.

D o k a z. Inverzna slika svake lopte $\bar{B}^n(r)$ je kompakt, u protivnom ne bi bio zadovoljen uslov $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, pa su zadovoljeni svi uslovi prethodne leme. ////

9.4. L e m a /46/,/9/. Ako je lokalno homeomorfno preslikavanje $f:G\longrightarrow G_1$ homeomorfno na nekom zatvorenom skupu $K\subset G$, tada je f homeomorfno i na nekom otvorenom skupu koji sadrži skup K.

////

10. T e o r e m a o g l o b a l n o m h o m e o m o r f i z m u

Osnovni rezultat ovog paragrafa, (a i cijele Glave IV), je dokaz da je teorema Zoriča o globalnom homeomorfizmu (za kvazikonformna preslikavanja) tačna i za preslikavanja kvazikonformna u srednjem.

Najprije dokazujemo četiri leme. Lema 1o.3 omogućuje primjenu metoda Zoriča i u tom smislu ima osnovni značaj.

Zbog odredjivanja asimptotike srednje dilatacije u okolini beskonačno daleke začke, pri kojoj teorema o globalnom homeomorfizmu (kao i ostale teoreme ovog paragrafa) još uvijek važi, pojam kvazikonformnosti u srednjem (da bi skratili pisanje),do do kraja ove glave koristićemo u nešto širem smislu nego u definiciji 2.3 .

1o.1. Neka je $G \subset R^n$ neograničena oblast, $f: G \longrightarrow R^n$ lokalni homeomorfizam, $x_o \in R^n$, $B^n(x_o, r) = B^n(r)$ lopta radiusa $r > o$ s centrom u x_o, $G_r = G \cap B^n(r)$. Veličinu $k(r)$ definisanu za $m(G_r) \neq o$ i odredjenu sa

$$k^{n-1}(r) = \frac{1}{m B^n(r)} \int_{G_r} k^{n-1}(x, f)\, dm , \qquad (1)$$

gdje je $m(B^n(r)) = \Omega_n r^n$ Lebesgueova mjera lopte $B^n(r)$, zvaćemo srednjom dilatacijom preslikavanja f u oblasti G_r, odnosno indeksom rasta srednje dilatacije.

Označimo sa $\int^{\infty} \frac{dr}{r k(r)}$ bilo koji od integrala $\int_{r_o}^{\infty} \frac{dr}{r k(r)}$, $m(G_{r_o}) \neq o$, ističući tako da nas interesuje samo konvergencija tih integrala. Ta konvergencija ne zavisi od izbora tačke $x_o \in R^n$. Zaista, neka su $k_o(r)$ i $k_1(R)$ indeksi računati redom u odnosu na tačke x_o i x_1. Birajući najprije zavisnost $R = r + d$, $d = |x_1 - x_o|$, lako dovodimo u medjusobnu zavisnost konvergencije odgovarajućih integrala:

$$k_o^{n-1}(r) \cdot r^n \leq k_1^{n-1}(R)\, R^n ,$$

$r < R$ i $r/R \to 1$, pa za svako $c \in (o,1)$ postoji $a > o$, tako da je

$$\int_a^\infty \frac{dr}{r\,k_o(r)} \geqslant c \int_a^\infty \frac{dr}{r\,k_1(r+d)} = c\int_{a+d}^\infty \frac{dR}{(R-d)\,k_1(R)}$$

$$\geqslant c\int_{a+d}^\infty \frac{dR}{R\,k_1(R)} .$$

Analogno, za $r=R+d$

$$\int_b^\infty \frac{dR}{R\,k_1(R)} > c' \int_{b+d}^\infty \frac{dr}{r\,k_o(r)} ,$$

čime je ekvikonvergentnost integrala $\int^\infty \frac{dR}{R\,k_1(R)}$ i $\int^\infty \frac{dr}{r\,k_o(r)}$ dokazana.

lo.1.1. Neka je G neograničena oblast u R^n, $f:G \longrightarrow G_1$ lokalni homeomorfizam iz klase W_n^1 i za svaku oblast $D \subset G$ u kojoj je f homeomorfizam $f^{-1}_{|D} \in W_n^1(f(D))$. Govorićemo (u ovoj glavi) da je f preslikavanje kvazikonformno u srednjem, ako je

$$\int^\infty \frac{dr}{r\,k(r)} = \infty . \qquad (2)$$

Primijetimo, što funkcija $g(r)=m(G_r)$ sporije raste kad r teži ∞, $k(x,f)$ može biti veće u oblasti G (pri uslovu (2)).

lo.2. L e m a. Neka je G oblast u R^n, $x_o \in G$, $a > o$, $R=\{x \mid a<|x-x_o|<b\}$ prsten, a Γ familija krivih γ koje u $R \cap G$ povezuju granične sfere prstena R (to jest $\gamma : [o,1] \longrightarrow \bar{R}$, $|\gamma(o)-x_o|=a$, $|\gamma(1)-x_o|=b$, $\gamma(t) \in R \cap G$, $o<t<1$). Neka je dalje f lokalni homeomorfizam oblasti G iz klase W_n^1, takav da je za svaku oblast $D \subset G$ u kojoj je f homeomorfizam $f^{-1}_{|D} \in W_n^1(f(D))$. Ako je

$\Gamma' = f(\Gamma)$, tada

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{\Omega_n}{(\ln\frac{b}{a})^n}\left[k^{n-1}(b) - k^{n-1}(a) + n\int_a^b \frac{k^{n-1}(t)}{t}\,dt\right], \tag{3}$$

gdje je Ω_n n-dimenzionalna Lebesgueova mjera jedinične lopte $B^n(1)$, a $k(r)$ odredjeno relacijom (1) u 10.1 .

D o k a z. Ako je $k(b)=\infty$ nejednakost (3) je trivijalno ispunjena. Dokažimo da je ona tačna i pri $k(b)\neq\infty$. Na osnovu leme 8.1 je

$$M(\Gamma') \leqslant \int_{R\cap G} \rho^n(x)\, k^{n-1}(x,f)\,dm,$$

gdje je ρ proizvoljna dopustiva funkcija familije Γ. Ako za ρ uzmemo ekstremalnu funkciju prstena R (vidjeti 7.2.1 i 7.2.2) dobijamo

$$M(\Gamma') \leqslant \frac{1}{(\ln\frac{b}{a})^n}\int_{R\cap G} \frac{k^{n-1}(x,f)}{|x-x_0|^n}\,dm . \tag{4}$$

Neka je

$$g(t) = \int_{R_t\cap G} \frac{k^{n-1}(x,f)}{|x-x_0|^n}\,dm, \quad h(t) = \int_{G_t} k^{n-1}(x,f)\,dm, \tag{5}$$

gdje je $R_t = \{x \mid a < |x-x_0| < t\}$. Ako su $r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ polarne koordinate, $\xi = (r, \theta_1, \dots, \theta_{n-1})$, $x = x(\xi)$ smjena promjenjivih, a $d\mu = dr\, d\theta_1\, d\theta_2 \dots d\theta_{n-1}$, onda je funkcija φ integrabilna po mjeri dm ako i samo ako je $\varphi(x(\xi))\,|J(x(\xi))|$ integrabilna po mjeri $d\mu$ i tada važe formule prelaza $\int_{D'} \varphi(x(\xi))\,|J(x(\xi))|\,d\mu = \int_D \varphi\, dm$.

Pošto je $k^{n-1}(x,f)/|x-x_0|^n$ integrabilna funkcija u $R_t \cap G$ (i $k^{n-1}(x,f)$ u G_t), jer je $k(b)\neq\infty$, imamo da je

$$g(t)=\int_{R_t}\frac{\chi_D(x)\,k^{n-1}(x,f)}{|x-x_0|}=\int_a^t\frac{dr}{r^n}\int_{S^{n-1}(r)}\chi_D(x(\xi))\,k^{n-1}(x(\xi),f)\,d\sigma$$
$$=\int_a^t\frac{f(r)}{r^n}\,dr$$
$$h(t)=\int_{G_t}k^{n-1}(x,f)\,dm=\int_{B(x_0,r)}+\int_a^t f(r)\,dr\,.$$

Vodeći računa o tome da su g i h apsolutno neprekidne funkcije i da je $h'(t)=t^n g'(t)$ s.s. u $[a,b]$, nakon parcijalne integracije dobijamo

$$g(b)=\frac{h(b)}{b^n}-\frac{h(a)}{b^n}+n\int_a^b\frac{h(t)-h(a)}{t^{n+1}}\,dt\,,$$

to jest

$$g(b)=\frac{h(b)}{b^n}-\frac{h(a)}{a^n}+n\int_a^b\frac{h(t)}{t^{n+1}}\,dt\,.$$

S obzirom da je $h(t)=\Omega_n t^n k^{n-1}(t)$, dobijamo

$$g(b)=\Omega_n\left[k^{n-1}(b)-k^{n-1}(a)+n\int_a^b\frac{k^{n-1}(t)}{t}\,dt\right]. \qquad (6)$$

Iz (6), (5) i (4) slijedi (3), što je i trebalo dokazati. ////

1o.3. L e m a. Neka je G neograničena oblast u R^n, Γ familija krivih u G, od kojih je svaka kao skup u R^n neograničena. Neka je $f:G\longrightarrow G_1$ homeomorfizam takav da su f i f^{-1} iz klase W_n^1 i neka je $\Gamma'=f(\Gamma)$. Ako je modul $M(\Gamma')$ familije Γ pozitivan, tada je $\int^{\infty}\frac{dr}{r\,k(r)}<\infty$, gdje je $k(r)$ indeks rasta srednje dilatacije preslikavanja f, odredjen relacijom (1) u 1o.1 .

D o k a z. Ako je $k(r_o)=\infty$ za neko r_o, $o<r_o<\infty$, tvrdjenje leme je trivijalno. Zato ćemo u daljem pretpostaviti da je $k(r)$ svuda konačna funkcija.

Razmotrimo najprije specijalan slučaj, kada sve krive familije Γ sijeku neku sferu $S(i_o)=\{x \mid |x-x_o|=i_o\}$, gdje je i_o pozitivan cijeli broj. Neka je $R^1_{i_o}=[i_o,\infty)$. Razmotrimo niz

$$F_m=\left\{r\in R^1_{i_o} \mid k^{n-1}(r+\Delta r)-k^{n-1}(r)\leq n\int_r^{r+\Delta r}\frac{k^{n-1}(t)}{t}\,dt,\ \text{za}\ o<\Delta r\leq\frac{1}{m}\right\}, \tag{1}$$

$m=1,2,\ldots$. Očigledno, F_m je zatvoren skup za svako $m=1,2,\ldots$. Zato je skup

$$F=\limsup F_m$$

$$=\left\{r\in R^1_{i_o} \mid \exists\varepsilon(r)>o,\ \forall\Delta r,\ o<\Delta r<\varepsilon(r),\ k^{n-1}(r+\Delta r)-k^{n-1}(r)\leq n\int_r^{r+\Delta r}\frac{k^{n-1}(t)}{t}dt\right\}, \tag{1'}$$

mjerljiv. Želimo da dokažemo da je

$$M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma')\geq\frac{1}{2\omega_{n-1}}\int_F\frac{dr}{r\,k(r)}\ , \tag{2}$$

i da je $\int_F\frac{dr}{r\,k(r)}$ ekvikonvergentan sa $\int_{R_{i_o}}\frac{dr}{r\,k(r)}$.

Neka je χ_m karakteristična funkcija skupa F_m, a χ karakteristična funkcija skupa F. Očigledno, $\chi_m(r)\longrightarrow\chi(r)$ kad $m\longrightarrow\infty$. Zato je, na osnovu Fatouove leme dovoljno dokazati da je relacija (2) zadovoljena za svaki od skupova F_m. Neka je m fiksirano. Ako je F_m skup mjere nula nejednakost (2) je ispunjena. Ako je $m(F_m)\neq o$, neka je $I=[i_o, R]$ gdje je $R>i_o$ izabrano tako da je $m(F_m\cap I)\neq o$ i ako je $R\in F_m$ tada u svakoj poluokolini $(R-\varepsilon, R)$, $\varepsilon>o$, postoji bar jedna tačka iz F_m. Uzmimo opadajući niz $\{\Delta_s\}$, $s=o,1,\dots$, $o<\Delta_s\leq 1/m$, takav da $\Delta_s\to o$ kad $s\to\infty$. Za svako s izaberimo sistem zatvorenih intervala $\{I_j^s\}$, $j=1,\dots,p_s$ koji zadovoljava sledeće uslove: 1) $F_m\cap I\subset\bigcup I_j^s\subset I$; 2) $I_{j_1}^s\cap I_{j_2}^s=\emptyset$ ako je $j_2\neq j_1+1$; 3) I_j^s i I_{j+1}^s mogu imati najviše jednu zajedničku tačku ; 4) $o<m(I_j^s)\leq\Delta_s$; 5) počeci intervala I_j^s su tačke iz $F_m\cap I$. Dogovorimo se još, ako je izabran sistem intervala sa indeksom s, onda ćemo sistem sa indeksom s+1 birati tako, da početak svakog intervala I_j^s bude početak i nekog intervala iz sistema sa indeksom s+1. Intervalu $I=[i_o,R]$ i intervalima $I_j^s=[r_j^s, r_j^s+\Delta_j^s]$, $j=1,\dots,p_s$, pridružimo sferne prstene

$$A=\{x\,|\,i_o<|x-x_o|<R\}\ ,\quad A_j^s=\{x\,|\,r_j^s<|x-x_o|<r_j^s+\Delta_j^s\}\ ,$$

$j=1,2,\dots,p_s$. Svakom takvom prstenu pridružimo familiju krivih, koje su podkrive krivih iz polazne familije Γ, a spajaju u granicama posmatranog prstena njegove granične sfere. Tako dobijamo familije Γ_I i Γ_j^s, $j=1,\dots,p_s$. Familije Γ_j^s leže u disjunktnim oblastima $G_j^s=G\cap A_j^s$, pri čemu za svaku krivu iz Γ_I i svako $j=1,\dots,p_s$ postoji kriva iz Γ_j^s koja je njena podkriva. U tom istom odnosu nalaze se i slike tih familija. Zato, na osnovu 7.3.8 i 7.3.6,

$$M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma')\geq M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma_I')\geq\sum_{j=1}^{p_s}M(\Gamma_j^{s\prime})\qquad(3)$$

za svako $s=o,1,\dots$. Dalje, na osnovu leme 10.2 je

$$M(\Gamma_j^{s'}) \leqslant \frac{2\omega_{n-1}}{\left(\ln \frac{r_j^s+\Delta_j^s}{r_j^s}\right)^n} \int_{r_j^s}^{r_j^s+\Delta_j^s} \frac{k^{n-1}(t)}{t}\, dt$$

S obzirom da je $r_j^s \in F_m$ i $\Delta_j^s \leqslant 1/m$ iz (1) dobijamo da je

$$M(\Gamma_j^{s'}) \leqslant \frac{2\omega_{n-1}}{\left(\ln \frac{r_j^s+\Delta_j^s}{r_j^s}\right)^n} \quad k^{n-1}(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s) \ln \frac{r_j^s+\Delta_j^s}{r_j^s},$$

$0 \leqslant \theta_j^s < 1$ i zato

$$M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma_j^{s'}) \geqslant \frac{1}{2\omega_{n-1}} \quad \frac{\ln \frac{r_j^s+\Delta_j^s}{r_j^s}}{k(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s)} .$$

Nakon zamjene u (3) nalazimo

$$\begin{aligned} M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma') &\geqslant \frac{1}{2\omega_{n-1}} \sum_{j=1}^{p_s} \frac{\ln \frac{r_j^s+\Delta_j^s}{r_j^s}}{k(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s)} \\ &= \frac{1}{2\omega_{n-1}} \sum_{j=1}^{p_s} \int_{r_j^s}^{r_j^s+\Delta_j^s} \frac{dr}{r\, k(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s)} \\ &= \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_I \left(\sum_{j=1}^{p_s} \frac{\chi_j^s(r)}{k(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s)} \right) \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_I \frac{\chi^s(r)}{r}\, dr \end{aligned}$$

gdje je χ_j^s karakteristična funkcija intervala I_j^s, a

$$\chi^s = \sum_{j=1}^{p_s} \frac{\chi_j^s(r)}{k(r_j^s+\theta_j^s\Delta_j^s)} .$$

S obzirom da je (za $r \in I$)

$$\liminf_{s \to \infty} \chi^s(r) \geqslant \chi_m(r) / k(r) ,$$

na osnovu Fatouove leme imamo da je

$$M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma') \geqslant \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_I \frac{\chi_m(r)}{k(r)} = \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{F_m \cap I} \frac{dr}{r\,k(r)} .$$

Uzimajući u obzir da pri izboru intervala $I=[i_o,R]$, R može biti izabrano proizvoljno veliko, dobijamo traženu nejednakost

$$M^{\frac{1}{1-n}}(\Gamma') \geqslant \frac{1}{2\omega_{n-1}} \int_{F_m} \frac{dr}{r\,k(r)} .$$

Da bi završili dokaz leme u razmatranom specijalnom slučaju, ostaje da se provjeri da je $\int_F \frac{dr}{r\,k(r)} < \infty$ ako i samo ako $\int_{R^1_{i_o}} \frac{dr}{r\,k(r)}$. Kako je k(r) apsolutno neprekidna funkcija, iz (1′) imamo sledeći odnos

$$\frac{n-1}{n} \frac{dk(r)}{k(r)} \leq \frac{dr}{r}$$

s.s. u F pri dr > o,

$$\frac{n-1}{n} \frac{dk(r)}{k(r)} \geqslant \frac{dr}{r}$$

s.s. u $E=R_{i_o}-F$, pri dr>o i

$$\int_E \frac{dr}{r\,k(r)} \leq \frac{n-1}{n} \int_E \frac{dk(r)}{k^2(r)} \leq \frac{n-1}{n} \frac{1}{k(i_o)} < \infty .$$

Kako je integral aditivna funmcija skupa, ovim je dokaz specijalnog slučaja završen. Da bi se oslobodili učinjene pretpostavke, da sve krive iz Γ sijeku sferu $S(x_o,i_o)$, postupimo kao u /47/. U opštem slučaju polaznu familiju Γ razložimo u niz familija Γ_m , pri čemu se Γ_m sastoji iz onih krivih familije Γ, koje sijeku sferu $S(x_o,m)$ i pri m> 1 ne sijeku sferu $S(x_o,m-1)$. Pošto je $\Gamma' = \bigcup \Gamma'_m$ na osnovu 7.3.1 je $M(\Gamma') \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} M(\Gamma'_m)$, te bar jedna familija Γ'_m takodje ima pozitivan modul. Takve fa-

familije Γ_m i Γ'_m ispunjavaju uslove razmatranog specijalnog slučaja, pa je lema tačna i u opštem slučaju. ////

1o.3.1. Iz dokaza leme 1o.3 se vidi da je homeomorfnost preslikavanja iskorišćena jedino pri zaključivanju da su familije $\Gamma_j^{s\prime}$ separirane i da su podfamilije familije Γ'_I. Ako bi preslikavanje f bilo samo lokalno homeomorfno, a familiju Γ činile one neograničene krive na kojima je f homeomorfno preslikavanje, uz ostale pretpostavke leme, uzimajući u obzir monotonost modula sve nejednakosti-koraci u dokazu bi ostale na snazi. Znači, lema važi i u ovom slučaju.

1o.3.2. Ako su Γ i Γ' familije iz 1o.3 ili 1o.3.1 i $\int^{\infty} \frac{dr}{r\,k(r)} = \infty$, onda je $M(\Gamma')=0$.

1o.6. L e m a /46/. Neka je I odsječak u R^n, $n \geqslant 2$, $B_x = B^{n-1}(x,r)$ (n-1)-dimenzionalni disk poluprečnika $r(x) > 0$ s centrom u tački $x \in I$, koji leži u hiperravni $H_x = H_x^{n-1}$ ortogonalnoj na I i E mjerljiv podskup od I. Na granici svakog diska B_x koji odgovara tački $x \in E$, fiksirajmo tačku A_x i označimo sa Γ_x skup svih krivih u B_x koje spajaju tačke x i A_x. Tada za modul familije $\Gamma = \bigcup_{x \in E} \Gamma_x$ važi sledeća ocjena

$$M(\Gamma) \geqslant c(n) \frac{m(E)}{\sup\limits_{x \in E} r(x)}$$

gdje je c(n) pozitivna konstanta koja zavisi samo od dimenzije prostora R^n. ////

1o. 5. L e m a. Neka je $R=\{x \mid 0<a<|x-x_0|<b\}$ sferni prsten. Neka je E mjerljiv skup na jediničnoj sferi S^{n-1} i za svako $y \in E$ na radijalnom otsječku $x_0 + ty$, $a \leqslant t \leqslant b$ data tačka A_y. Označimo sa Γ_y familiju svih krivih u R koje spajaju tačku $x_0 + ay$ sa tačkom A_y. Tada je za modul familije $\Gamma = \bigcup_{y \in E} \Gamma_y$ tačna sledeća ocjena

$$M(\Gamma) \geqslant \frac{m(E)}{(\log \frac{b}{a})^{n-1}},$$

gdje je ω_{n-1} Lebesgueova mjera (n-1) - dimenzionalne jedinične sfere.

D o k a z. Kad bi bilo $A_y=x_0+by$, računajući kao u primjeru 7.2.1 došli bi do jednakosti $M(\Gamma_1) = m(E)/(\log \frac{b}{a})^{1-n}$, pri čemu je $M(\Gamma_1) = M(\Gamma_1')$, gdje Γ_1' čine samo radijalni otsječci iz Γ_1. Ako sa Γ' označimo samo radijalne otsječke iz familije Γ, onda je $\Gamma' < \Gamma_1'$, te $M(\Gamma') \geqslant M(\Gamma_1')$. Kako je modul monotona funkcija familije krivih dobijamo traženu ocjenu. ////

1o.6. L e m a. Neka su G i G_1 oblasti u R^n, $n \geqslant 3$, a $f:G \longrightarrow G_1$ sopstveni lokalni homeomorfizam kvazikonforman u srednjem. Ako tačka $p \in G_1$ nema loptastu okolinu $\bar{B}^n(p,r) \subset G_1$, za koju su sve povezane komponente od $f^{-1}(\bar{B}^n(p,r))$ kompaktne podoblasti oblasti G, onda je p jedinstvena takva tačka u G_1 i za svako $0<r<d(p,\partial G_1)$ postoji tačno jedna komponenta U od $f^{-1}(B^n(p,r))$ čije zatvorenje $\bar{U} \subset G$ nije kompaktna podoblast od G, već šuplja okolina tačke ∞, takva,da se $\bar{U}$ homeomorfno preslikava

na $\bar{B}^n(p,r)\setminus\{p\}$. (Evidentno, f može biti produženo do homeomorfizma pune okoline $\bar{U}\cup\{\infty\}$ na $\bar{B}^n(p,r)$).

D o k a z. Ima se u vidu da je G neograničena oblast, jer u protivnom za sopstveni lokalni homeomorfizam svaka tačka u G_1 ima zatvorenu (loptastu) okolinu čija se inverzna slika sastoji od disjunktnih kompaktnih komponenti. Dovoljno je pretpostaviti da se tačka p nalazi unutar lopte $B^n(y_o,r_o)$, $\bar{B}^n(y_o,r_o)\subset G_1$, da je $x_o\in f^{-1}(y_o)$ tačka za koju je x_o-kompomemta U od $f^{-1}(B^n(y_o,r_o))$ neograničen skup i dokazati da je U šuplja okolina tačke ∞, pri čemu f homeomorfno preslikava $\bar{U}$ na $\bar{B}^n(y_o,r_o)\setminus\{p\}$. Dokaz koji ćemo sprovesti je inspirisan dokazom teoreme 1 u /48/, gdje se koristi metod Zoriča razvijen u /46/.

1) Postoji radius lopte $B^n(y_o,r_o)$, takav da se x_o - komponenta inverzne slike tog radiusa preslikava na njega homeomorfno.

Zaista, neka je $B(r_1)=B^n(y_o,r_1)$ lopta poluprečnika $o<r_1<r_o$, za koju je f homeomorfno na komponenti $\bar{B}^*(r_1)$, (u daljem će na x_o - komponentu inverzne slike ukazivati indeks $*$), i $f(\bar{B}^*(r_1))=\bar{B}(r_1)$. Takva lopta postoji zbog lokalne homeomorfnosti preslikavanja f. U svakoj tački $r_1e\in S(r_1)=S^{n-1}(y_o,r_1)$, $e\in S^{n-1}(1)$, raširujemo interval $[y_o,r_1e]$ do maksimalnog podintervala I_e radiusa $[y_o,r_oe]$, takvog da je f homeomorfno na komponenti I_e^* koja siječe $S^*(r_1)$. I_e^* je, ustvari, onaj dio radiusa $[y_o,r_oe]$ koji kao put ima pokrivajući sa početkom u u x_o, pa na osnovu leme 9.3.2, ako se interval $[y_o,r_1e]$ ne može raširiti do cijelog radiusa $[y_o,r_oe]$, komponenta I_e^* je neograničena. Neka

je $\Gamma = \bigcup_{e\in S^{n-1}(1)} \Gamma^*_e$, $\Gamma' = \bigcup \Gamma_e$. Iz lo.3.1 slijedi da je $M(\Gamma')=o$, te ako lemu lo.5 primijenimo na sferni prsten čije su granice $S^{n-1}(y_o,r_1)$ i $S^{n-1}(y_o,r_o)$ zaključujemo da je za s.s. $e\in S^{n-1}(1)$ radius $[y_o,r_oe]$ u pravcu $\underline{e}$ cio pokriven x_o-komponentom, koja leži u U, i homeomorfno se sa f preslikava na $[y_o,r_oe]$.

2) Fiksirajmo jedan takav radius I i x_o-komponentu I^* njegove inverzne slike. Za svaku tačku $y\in I$, označimo sa K_y maksimalnu sfernu kapu na sferi $S_y=\{y \mid |y-y_o|=r>r_1\}$, s centrom u tački y, za koju se komponenta K^*_y inverzne slike što siječe I^*, preslikava homeomorfno na K_y. Za s.s. $y\in I$ je $K_y=S_y$.

Neka je E skup onih $y\in I$ za koje je $S_y\setminus K_y$ različito od tačke. Dokažimo da je $m_1(E)=o$. Označimo sa s_y onaj dio meridijana koji spaja tačku $y\in E$ sa tačkom na granici od K_y, zbog koje se K_y ne može raširiti. (Pošto je $\overline{K}^*_y\subset G$, zbog 9.4, takav meridijan postoji). Dovoljno je dokazati da je $m_1(E_\varphi)=o$, gdje E_φ čine one tačke $y\in E$ za koje dužina meridijana s_y nije veća od $|y-y_o|\varphi$, $o<\varphi<\pi$. Ako je $\Gamma=\bigcup s^*_y$, $\Gamma'=f(\Gamma)=\bigcup s_y$, s obzirom da su krive s^*_y neograničene kao skupovi (lema 9.3.2), zbog lo.3.1 je $M(\Gamma')=o$, odnosno na osnovu lo.4, $m_1(E_\varphi)=o$. (Za primjenu leme lo.4, treba ustvari, pomoću dopunskog kvazikonformnog preslikavanja, koje se na svakoj sfernoj kapi K_y poklapa sa stereografskom projekcijom iz tačke $\bar{y}$, dijametralno suprotne tački y, kape K_y preslikati na ravne krugove). Na osnovu leme 9.4 u $\bigcup K^*_y$, I^* ulazi zajedno sa nekom svojom okolinom. Ponavljajući prethodni postupak za neki drugi radius I_1 iz odgovarajuće okoline, dobijamo da je $m_1(E_1)=o$, gdje je E_1 skup u I_1 analogan skupu

E u I. Neka je $z_1 \in I \setminus E$, $z_2 \in I_1 \setminus E_1$, $|z_1 - y_o| = |z_2 - y_o|$, $\bar{z}_1$ i $\bar{z}_2$ dijametralno suprotne tačke, redom tačkama z_1 i z_2, $K^*_{z_1}$ i $K^*_{z_2}$ odgovatajuće x_o-komponente, na kojima je (pojedinačno) f homeomorfizam. Očigledno, $K_{z_1} \cap K_{z_2} \supset S \setminus \{\bar{z}_1, \bar{z}_2\}$, $K^*_{z_1} \cap K^*_{z_2} \neq \emptyset$. Neka je $y_o = f(x_o)$, $x_o \in K^*_{z_1} \cap K^*_{z_2}$. Svaku drugu tačku $y \in K_{z_1} \cap K_{z_2}$ možemo spojiti sa tačkom y_o putem čiji je početak u y_o. Taj put ima pokrivajuće puteve u $K^*_{z_1}$ i $K^*_{z_2}$, koji počinju u tački x_o. Iz 9.3.3 slijedi da se ti putevi poklapaju. Zato inverzna slika svake tačke iz $K_{z_1} \cap K_{z_2}$ ima u $K^*_{z_1} \cup K^*_{z_2}$ tačno jedan elemenat. Drugim riječima, f je monomorfno na $K^*_{z_1} \cup K^*_{z_2}$ i tvrdjenje 2) je dokazano.

Primijetimo da je već ovdje iskorišćena specifičnost dimenzije $n \geq 3$, jer u dvodimenzinalnom slučaju, kad se iz sfere izuzmu dvije tačke, dobija se skup koji nije povezan.

3) Neka je $y \in I$, $|y - y_o| > |p - y_o|$, $S_y = K_y$, a B_y lopta čija je granična sfera S_y. Onda je x_o-komponenta $\bar{B}^*_y$ inverzne slike od $\bar{B}_y$, šuplja okolina tačke ∞ i $\bar{B}^*_y$ se homeomorfno preslikava na $\bar{B}_y$.

Neka je z najbliža k radiusu I tačka, takva da u U ne postoji put sa početkom u x_o, koji se homeomorfno preslikava na odsječak $[y_o, z]$. Na osnovu 1) i 2) možemo izabrati loptu B proizvoljno malog poluprečnika, unutar koje se nalazi z, čiji centar je na odsječku $[y_o, z)$, tako da se za graničnu sferu S od B, komponenta S^* koja siječe x_o-komponentu inverzne slike odsječka $[y_o, z)$, preslikava homeomorfno na S. S^*_y (S^*) je topološka sfera i dijeli prostor na ograničenu C_1 (C_2) i neograničenu

E_1 (E_2) oblast. Iz pretpostavke o tački z, slijedi da je $B^* \subset C_2$ neograničen skup, da je zato $S_y^*(ix_o)$ unutar S^*, te da je $B_y^* \setminus B^*$ ograničen skup u kome leži x_o-komponenta inverzne slike radiusa, dijametralno suprotnog radiusu na kojem se nalazi tačka z. Znači, možemo smatrati da je radius I koji je korišćen u 2), bio baš taj radius. Zbog ograničenosti skupa $B_y^* \setminus \bar{B}^*$ iz leme 9.3.2 slijedi da je u konstrukciji sprovedenoj u 2), iscrpljena cijela oblast $B_y \setminus B$. Na osnovu 9.4, za svaku kapu K_y(čija je granica sada krug na sferi S), f je homeomorfno na nekoj okolini komponente K_y^*. To znači da je x_o-komponenta $B_y^* \setminus \bar{B}^*$ inverzne slike od $B_y \setminus \bar{B}$ oblast, koja se sa f homeomorfno preslikava na $B_y \setminus \bar{B}$, (jer ograničenje od f na $B_y^* \setminus \bar{B}^*$ zadovoljava sve uslove leme 9.3.4).

Pomoću iščezavajućeg niza sfera sa svojstvom koje je imala sfera S, raširujemo oblasti $B_y \setminus B$ i $B_y^* \setminus B^*$, i dolazimo do zaključka da je f homeomorfno na B_y^* i $f(B_y^*) = B_y^* \setminus \{p\}$. Kako je G šuplja okolina tačke ∞, B_y^* nema konačnih graničnih tačaka koje nijesu na topološkoj sferi S_y^*, (one bi morale biti unutar G), pa je $\bar{B}_y^*$ šuplja okolina tačke ∞ koja se homeomorfno preslikava na $\bar{B}_y \setminus \{p\}$.

4) Počinjući dokaz sa nešto većim polaznim poluprečnikom $r_o' > r_o$, iz 3) dobijamo da je x_o-komponenta U, inverzne slike skupa $B^n(y_o, r_o)$ šuplja okolina tačke ∞ i da se sa f, $\bar{U}$ homeomorfno preslikava na $\bar{B}^n(y_o, r_o) \setminus \{p\}$.

Time je dokaz leme završen. ////

1o.7. T e o r e m a. Neka su G i G_1 oblasti u R^n, $n \geqslant 3$, a $f: G \longrightarrow G_1$ (u smislu 9.3.1) sopstveni lokalni homeomorfizam kvazikonforman u srednjem. Tada je f pokrivanje ili se može produžiti do pokrivanja oblasti $G \cup \{\infty\}$ na oblast G_1.

D o k a z. Ako G nije šuplja okolina tačke ∞, onda iz leme 1o.6 slijedi da svaka tačka $y \in G_1$ ima loptastu okolinu $\bar{B}^n(y,r) \subset G_1$, takvu da su povezane komponente skupa $f^{-1}(\bar{B}(y,r))$ kompaktne podoblasti od G, te je tvrdjenje teoreme posledica leme 9.3.5 . Ako je G šuplja okolina tačke ∞, a f nije pokrivanje, tada na osnovu pomenute leme 9.3.5 postoji tačka $p \in G_1$ sa svojstvima iz leme 1o.6, pa se f može produžiti do lokalnog homeomorfizma $\tilde{f}: G \cup \{\infty\} \longrightarrow G_1$, $\tilde{f}(\infty) = p$, koji je pokrivanje, (9.3.5). ////

1o.8. T e o r e m a (Zoriča). Ako je $f: R^n \longrightarrow R^n$ lokalni homeomorfizam kvazikonforman u srednjem i $n \geqslant 3$, onda je f homeomorfizam prostora R^n na samog sebe.

D o k a z. Pošto je R^n prostopovezana oblast, dovoljno je dokazati da je f pokrivanje. Ako f nije pokrivanje, onda se na osnovu 1o.7, f može produžiti do pokrivanja $\tilde{f}: \bar{R}^n \longrightarrow R^n$, što je nemoguće, jer je $\tilde{f}(\bar{R}^n)$ otvoren i kompaktan skup u R^n. ////

U suštini, teorema Zoriča je posledica teoreme 11.2, koja utvrdjuje da je tačka ∞ otklonjivi izolovani singularitet za preslikavanja kvazikonformna u srednjem. Naime, uz pomoć te činjenice, neposredno slijedi

1o.8.1. T e o r e m a. Ako je G šuplja okolina tačke ∞, a $f: G \rightarrow G_1$ sopstveni lokalni homeomorfizam kvazikonforman u srednjem koji je pokrivanje (što je uvijek slučaj ako je i G_1 šuplja okolina tačke ∞), onda je f homeomorfizam. ////

10.9. Ovaj paragraf završavamo sa dva primjera. Prvi od njih pokazuje da su teoreme 10.7 i 10.8, u smislu dopustive brzine rasta veličine k(r), tačne. (Podsjetimo se, sva prethodna razmatranja sprovedena su za preslikavanja kod kojih je $\int^{\infty}\frac{dr}{r\,k(r)}=\infty$).

Drugi primjer smo konstruisali da pokažemo, da za preslikavanja kvazikonformna u srednjem ne važi sledeće uopštenje teoreme Zoriča (dokazano u /17/):

Ako je $n\geqslant 3$ i $f:B^n(1)\longrightarrow R^n$ k-kvaziregularni lokalni homeomorfizam, tada je f injektivno u lopti $B^n(\Psi(n,k)r)$, gdje je $\Psi(n,k)$ pozitivan broj koji zavisi samo od n i k (no ne i od preslikavanja f).

10.9.1. P r i m j e r /47/. Neka je $\varphi(r)\geqslant 1$ neopadajuća funkcija za koju je $\int^{\infty}\frac{dr}{r\varphi(r)}<\infty$. Definišimo preslikavanje $f:R^n\longrightarrow R^n$ na sledeći način.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\,\frac{x}{c} & \text{za}\quad |x|\leqslant c\\[2mm] \frac{1}{2}\left[1+\left(\int_c^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}\right)^{-1}\int_c^{|x|}\frac{dt}{t\varphi(t)}\right]\frac{x}{|x|}, & |x|>c,\end{cases}$$

gdje je c pozitivna konstanta, takva da je $\int_c^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}<\frac{1}{2}$.

Koeficijent kvazikknformnosti preslikavanja f u lopti $B^n(o,r)$ za dovoljno veliko r je

$$K(r)=\sup_{x\in B^n(r)}k(x,f)=\left[\int_c^{\infty}\frac{dt}{t\varphi(t)}+\int_c^{r}\frac{dt}{t\varphi(t)}\right]\varphi(r),$$

te $K(r) < \varphi(r)$. Jasno je da je $k(r) < K(r)$ $\left(k^{n-1}(r) = \frac{1}{\Omega_n r^n} \int_{B^n(r)} k^{n-1}(x,t)dm \right)$. Dalje, f je homeomorfizam i $f(R^n) = B^n(1)$. Produžujući sada sa k_0-kvazikonformnim preslikavanjem $g: B^n(1) \longrightarrow R^n$ koje je lokalni homeomorfizam, no ne i homeomorfizam, dobijamo lokalni homeomorfizam prostora R^n na svoj pravi dio. Na osnovu leme 5.4.1 je $\tilde{k}(r) \leqslant k_0 k(r)$, gdje je $\tilde{k}(r)$ srednja dilatacija preslikavanja $g \circ f$.

Znači, za proizvoljnu neopadajuću funkciju za koju je $\int^{\infty} \frac{dr}{r\varphi(r)} < \infty$ može se konstruisati homeomorfno preslikavanje prostora R^n kvazikonformno u srednjem, za koje je $k(r) < \varphi(r)$ i koje nije preslikavanje na, a takodje i lokalni homeomorfizam sa istim tim svojstvom. Dakle, uslov $\int^{\infty} \frac{dr}{r\,k(r)} = \infty$ je najbolji mogući dovoljan uslov, da bi slika prostora R^n pri homeomorfnom preslikavanju bila cio prostor R^n, a takodje najbolji dovoljan uslov da bi lokalni homeomorfizam prostora R^n bio homeomorfizam.

1o.9.2. P r i m j e r. Preslikajmo jediničnu loptu iz trodimenzionalnog euklidskog prostora na torus u trodimenzionalnom prostoru, tako da je za svaku tačku y iz torusa, skup $f^{-1}(y)$ beskonačan. Ostvarićemo to u tri koraka: Möbiusovom transformacijom preslikaćemo loptu u poluprostor, zatim poluprostor kvazikonformnim homeomorfizmom na beskonačni cilindar i na kraju, taj cilindar ćemo periodičnim preslikavanjem namotati na torus.

Neka su e_1, e_2, e_3 koordinatni jedinični vektori u R^3, $B^3 = \{x \mid |x-e_3| < 1\}$ jedinična lopta i $H = \{x \mid x_3 > 0\}$ poluprostor, a $f_1: B^3 \longrightarrow H$ Möbiusova transormacija

$$f_1(x) = -2e_3 - \frac{4(x-2e_3)}{|x-2e_3|^2},$$

koja loptu B^3 preslikava na poluprostor H. Ravni poluprsten $\{x \mid 1 < |x| < e,\ x_1 = o,\ x_3 > o\}$ pomoću funkcije $w = \ln z - \ln 2 - (\pi/2)i$, $z = (x_2, x_3)$, $w = (y_2, y_3)$, preslikajmo na pravougaonik $-\ln 2 < y_2 < 1 - \ln 2$, $-\pi/2 < y_3 < \pi/2$. Rotirajući poluprsten oko ose x_3, a pravougaonik oko ose y_2, dolazimo do preslikavanja poluprstena $\{x \mid 1 < |x| < e,\ x_3 > o\}$ na cilindar $\{y \mid -\ln 2 < y_2 < 1 - \ln 2,\ y_1^2 + y_3^2 < \pi^2/4\}$. Lako je vidjeti da je koeficijent kvazikonformnosti toga preslikavanja jednak $|\theta - \pi/2| \,/\, |\cos\theta| \leqslant \pi/2$, gdje je θ ugao konusa u sfernom koordinatnom sistemu. Ovaj homeomorfizam se može produžiti do homeomorfizma zatvorenog poluprstena na zatvoreni cilindar, pri čemu granične polusfere prelaze u granične baze cilindra. Zato se preslikavanje može produžiti simetrično do preslikavanja f_2 poluprostora H na cilindar $C = \{y \mid |y_2| < \infty,\ y_1^2 + y_3^2 < \pi^2/4\}$. U proizvoljnoj ravni α prostora R^3 uzmimo jednu pravu q, tačku $x_o \in \alpha$ izvan q na rastojanju $p + \pi/2$, $p > o$ i krug $B^2(\pi/2)$ poluprečnika $\pi/2$ s centrom u tački x_o, $B^2 \subset \alpha$. Rotirajući ravan oko prave q, krug B^2 opisuje torus, označimo ga sa T. Odsječak cilindra C dužine $2\pi p$, koji je simetričan u odnosu na ravan $y_2 = o$, "namojtamo" na — u torus T. Uz linearno istezanje lukova na kružnicama poluprečnika većeg od p, postižemo da se odsječak dužine $2p\pi$ preslika na torus T. Produžujući preslikavanje periodično na cio cilindar C, sa periodom $2p\pi$ duž ose y_2, dobijajamo preslikavanje f_3 cilindra C na torus T, za koje je koeficijent kvazikonformnosti $1 + \pi/p$. Preslikavanje $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ je lokalni homeomorfizam, takav da je $k(x,f) \leqslant \pi(1 + \pi/p)/2$. Dakle, f je lokalni homeomorfizam jedinične lopte B^3, kvazikonforman u srednjem.

Prvom namotaju na torusu, odgovara onaj dio lopte B^3 koji se pomoću transformacije f_1 preslikava na poluprsten odredjen sferama poluprečnika $e^{p\pi}$ i $e^{-p\pi}$, to jest sve, sem mali djelovi kod tačaka $N(o,o,1)$ i $S(o,o,o)$ na graničnoj sferi lopte B^3, koji su isječeni iz B^3 odgovarajućim sferama ortogonalnim na $S^3(1)$. Neka su P i Q tačke u kojima te sfere sijeku osu x_3 i $\rho = |N-P| = |Q-S|$. Veličina ρ je reda $e^{-p\pi}$. Tačke P_1 i Q_1, koje se posle sledećeg namotavanja poklope redom sa tačkama P i Q, nalaze se na rastojanju od tačaka N i S za veličinu $\rho_1 = \rho^2$.

Razmotrimo sada preslikavanje

$$f_r(x) = \begin{cases} \frac{R}{r}\, x & , \quad |x| \leq r \\ \left[R + \frac{1-R}{1-r}\,(|x|-r)\right]\frac{x}{|x|} & , \quad |x| > r \end{cases}$$

jedinične lopte u jediničnu loptu, koje loptu poluprečnika $r > o$ "razduvava" duž radiusâ do lopte poluprečnika $R > 1-r$, a ostali dio lopte sabija po radijusima prema granici, koju ostavlja nepomičnu.

Evidentno, što je r manje, veća je deformacija, te je veća i srednja dilatacija, pri čemu je poslednja manja od srednje dilatacije preslikavanja $f_o(x) = \lim_{r \to o} f_r(x)$, koje loptu $B^3(1)$ bez centra preslikava na **sferni** prsten $B^3(1) \setminus B^3(R)$. Na osnovu 3.2 imamo da je $k^2(f_o) = (1+R+R^2)/(1-R)^2$.

Za familiju preslikavanja $F_r = f \circ f_r$, gdje je f malo prije konstruisano preslikavanje jedinične lopte na torus, za koje je

$k(x,f) \leqslant \pi(1+\pi/p)/2$ iz leme 5.4.1 slijedi da je srednja dilatacija preslikavanja F_r,

$$k(F_r) \leq \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{\pi}{p}\right) k(f_o) = K$$

Za proizvoljno malo $r > o$, F_r je lokalni homeomorfizam K-kvazikonforman u srednjem koji ima svojstvo da u lopti poluprečnika r $(o < r < 1)$ koncentričnoj sa loptom $B^3(1)$, obavezno postoje bar dvije tačke koje imaju istu sliku.

Familija preslikavanja F_r pokazuje da se u opštem slučaju za lokalni homeomorfizam lopte koji je K-kvazikonforman u srednjem, ne može tvrditi da postoji donja granica radiusa koncentrične lopte u kojoj je preslikavanje homeomorfno, što je tačno za kvaziregularna (kvazikonformna) preslikavanja. Znači, teorema 2.3 u /17/, ne važi za preslikavanja kvazikonformna u srednjem.

11. Izolovani singularitet preslikavanja kvazikonformnih u srednjem

Primjer 3.2 pokazuje da konačna tačka nije, u opštem slučaju, otklonjivi izolovani singularitet za preslikavanja kvazikonformna u srednjem. Želimo da nadjemo uslove, izražene preko integralne karakteristike, pod kojima je izolovani singularitet otklonjiv.

11.1. L e m a. Neka je G šuplja okolina tačke ∞, a $f:G\longrightarrow G_1$ homeomorfizam kvazikonforman u srednjem (oblasti $G\subset R^n$ na oblast $G_1\subset R^n$). Tada se f može produžiti do homeomorfizma oblasti $G\cup\{\infty\}$ na oblast $G_1\cup\{*\}$, pri čemu je $*$ izolovana tačka granice oblasti $G_1\subset \bar{R}^n$.

D o k a z. Neka je $R=\{x|\ o<a<|x|<\infty\}$ prsten, takav da je $\bar{R}\subset G$. Pri topološkom preslikavanju slika prstena je prsten. Iz 1o.3 i 7.3.11 slijedi da je prsten $f(R)$ degenerisan. Topološka sfera $f(|x|=a)$ je dio jedne komponente komplementa od $f(R)$, te je komponenta koja odgovara tački ∞ (neka) tačka $*$. Odavde neposredno slijedi da je $*$ izolovana tačka granice oblasti G_1 i da je $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=*$, te da je proširenje $\tilde{f}:G\cup\{\infty\}\longrightarrow G_1\cup\{*\}$, $\tilde{f}(\infty)=*$, homeomorfizam. ////

11.2. T e o r e m a. Neka je $G\subset R^n$ šuplja okolina tačke ∞, $n\geqslant 3$, $f:G\longrightarrow R^n$ lokalni homeomorfizam kvazikonforman u srednjem. Tada je f homeomorfno u nekoj šupljoj okolini $\mathring{D}$ tačke ∞, i zato može biti produženo do homeomorfizma pune okoline D.

D o k a z. Bez ograničenja opštosti, možemo smatrati da je $f(G)$ neograničena oblast. Naime, pomoću inverzije u odnosu na sferu čiji je centar u nekoj tački iz skupa koji odgovara tački ∞ pri preslikavanju f, možemo razmatranje svesti na taj slučaj, (lema 5.4.1). Kao i u /48/ dolazimo do sfere $S(a)\subset f(G)$ i komponente S^* njene inverzne slike na kojoj je f homeomorfno, pri čemu je za s.s. ρ na (nekoj) spoljašnjoj neograničenoj normali N sfere $S(a)$, f homeomorfno na N^*-komponenti $S^*(\rho)$ inverzna slike sfere $S(\rho)$. (N^* je put sa početkom na $S^*(a)$, koji pokriva N). Ako se dokazi tih činjenica sprovode analogno dokazu leme 10.6, onda će biti nešto kraći od onog koji je dat u /48/.

Pomoću dopunske inverzije u odnosu na sferu $S(a)$, dobijamo mogućnost da sprovedemo razmatranje kao i u tački 3) dokaza leme 10.6 . Umjesto prilično dugog ponavljanja detalja, mi ćemo se ograničiti ovom skicom dokaza. (Uostalom, uz prisustvo naše leme 10.3 i leme 11.1, dokaz se može sprovesti na potpuno isti način kao i dokaz teoreme 1 u /48/). ////

11.3. T e o r e m a. Neka je $f:G\longrightarrow R^n$, $n\geqslant 3$, lokalno homeomorfno preslikavanje šuplje okoline G tačke $\underline{a}$, takvo da je $f\in W_n^1$ i u svakoj oblasti $D\subset G$ u kojoj je f homeomorfizam $f_D^{-1}\in W_n^1$. Neka je dalje $B^n(a,\rho_0)=B^n(\rho_0)$ lopta, čije sve tačke osim centra pripadaju oblasti G i neka je

$$K^{n-1}(\rho)=\rho^n\int\limits_{B^n(\rho_0)\setminus B^n(\rho)}\frac{k^{n-1}(x,f)}{|x|^{2n}}\,dm .$$

Tada, ako je

$$\int_0\frac{d\rho}{\rho K(\rho)}=\infty , \qquad (1)$$

preslikavanje f je homeomorfno u nekoj šupljoj okolini $\mathring{U}$ tačke $\underline{a}$ i može biti produženo do homeomorfizma pune okoline $U=\mathring{U}\cup\{a\}$ tačke $\underline{a}$.

D o k a z. Neka je $g:R^n\longrightarrow R^n$ Möbiusova transformacija $g(x)=a+\dfrac{x-a}{|x-a|^2}$. Kompozicija $F=f\circ g^{-1}$ je lokalni homeomorfizam šuplje okoline tačke ∞. Kako je $k(y,g)=1$, f diferencijabilno s.s., (teorema 5.1.3), i $J(x,f)\neq 0$ s.s., iz leme 1.1. dobijamo da je $k(x,f)= k(g(x),F)$ s.s. u $B^n(a,o_o)$. Zato je, za oznake vidjeti 10.1,

$$k^{n-1}(r) = \frac{1}{r^n} \int_{B^n(r)\setminus B^n(r_0)} k^{n-1}(y,F)\, dm$$

$$= \varrho^n \int_{B^n(\varrho_0)\setminus B^n(\varrho)} \frac{k^{n-1}(x,f)}{|x|^{2n}}\, dm = K^{n-1}(\varrho).$$

Pomoću smjene promjenjivih $\varrho=1/r$ iz (1) dobijamo da je $\int^{\infty}\frac{dr}{r\,k(r)}=\infty$, pa je tvdjenje koje dokazujemo, sada posledica teoreme 11.2 .

////

Primjer 10.9.1 pokazuje da je uslov (1) najbolji mogući.

L I T E R A T U R A

Ahlfors, L.

/1/ Lekcii po kvazikonformnim otobraženijam, "Mir", Moskva 1969.

Ahlfors, L., and A. Beurling

/2/ Conformal invariants and function - theoretic null - sets, Acta Math., 83, (1950), 101 - 129.

Callender, E. D.

/3/ Hölder contiunity of N-dimensional quasiconformal mappings, Pacif. Jorn. of Math., v 10, N 2, (1960).

Černavskij, A. V.

/4/ Konečnokratnie otkritie otobraženija mnogoobrazij, Mat. sb., 65, (1964), 357 - 369.

Fuglede, B.

/5/ Ekstremal length and functional completion, Acta Math., v.98, NN 3,4 , (1957), 171 - 219.

Fuks, D. B., Fomenko A. T., V. L. Gutenmaher

/6/ Gomotopičeskaja topologija, Izdateljstvo MGU, Moskva 1969.

Gehring, F. W.

/7/ Symetrization of rings in space, Trans. Amer. Math. Soc., v. 101, N 3, (1961), 499 - 519.

/8/ Rings and quasiconformal mappings in space, Trans. Amer. Math. Soc., v. 103, N 3, (1962), 353 -393.

Goldštein, V. M.

/9/ Odno gomotopičeskoe svojstvo otobraženij s ograničenim iskaženiem, Sib. mat. žur., XI, N 5, (1970), 999 - 1008.

Hu, S. T.

/10/ Teorija gomotopij, "Mir", Moskva, 1964.

Lavrentjev, M. A.

/11/ Ob odnom diferencialjnom priznake gomeomorfnosti otobraženij trjohmjernih oblastjej, DAN SSSR,20, N 4, (1938), 241 - 242.

Lelong - Ferand, J.

/12/ Transformations conformes et quasi - conformes des variétes riemanniennes compactes, Memoires d' Acad. royale de Belgique, tom XXXIX, fasc 5, 19

Lehto, O., K.I. Virtanen

/13/ Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer - Verlag,1973

Martio, O.

/14/ A capasity inequality for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn.,AI 474, (1970), 1 - 18.

Martio, O., S. Rickman, J. Väisälä,

/15/ Definitions for quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 448, (1969), 1 - 40.

/16/ Distortions and singularities of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 465, (1970), 1 - 13.

/17/ Topological and metric properties of quasiregular mappings, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 488, (1971), 1 - 31.

Mostow, G. D.

/18/ Quasi-conformal mappings in n-space and rigidity of hiperbplic space forms, Inst. des hautes ètides scientifiques, publications mathematiques, N 34, (1968), 53 - 104.

Ovčinikov, I. S.

/19/ Metričeskie svojstva otobraženij klasa $BL^{3/2}$, DAN SSSR, 161, N3, (1965), 526 - 529.

Ovčinikov, I. S., G. D. Suvorov

/20/ Preobrazovanija integrala Dirihle i prostranstvennie otobraženija, Sib. mat. žurn., VI, N 6, (1965), 1292 - 1314.

Poledkij, E. A.

/21/ Metod modulei dlja negomeomorfnih kvazikonformnih otobraženij, Mat. sbor., 83, (1970), 261 -272.

/22/ O stiranii osobennostej kvazikonformnih otobraženij, Mat. Sbor., 92, N 2, (1973), 242 - 256.

Rado, T., P. V. Reichelderfer,

/23/ Continous transformations in analysis, Springer-Verlag,195[illegible].

Rešetnjak, Ju. G.

/24/ Nekotorie geometričeskie svojstva funkcij i otobraženij s obobščenimi proizvodnimi, Sibir. mat. žur., VII, N 4, (1966), 886 - 919.

/25/ Ocenki modula neprerivnosti dlja nekotorih otobraženij, Sib. mat. žurn., VII, N 5, (1966), 110 - 1114.

/26/ Prostranstvenie otobraženija s ograničenim iskaženiem, Sib. mat. žur., VIII, N 3, (1967), 629 - 658.

/27/ Teorema Liouvillja pri minimaljnih predpoloženijah reguljarnosti, Sib. mat. žur., VIII, N 4, (1967), 835 - 840.

/28/ Otobraženija s ograničenim iskaženiem kak ekstremalji integralov tipa Dirihle, Sib. mat. žur., IX, N , (1968),652-6[illegible].

/29/ Ob uslovii ograničenosti indeksa dlja otobraženij s ograničennim iskaženiem, Sib. mat. žur., IX, N 2, (1968),368-3[illegible].

/30/ Ob ekstremaljnih svojstvah otobraženij s ograničenim iskaženiem, Sib. mat. žur., X, N 6, (1969), 1300 - 1310.

/31/ Obobščennie proizvodnie i diferenciruemost počti vsjudu, Mat. sbor., 75, N3, (1968),323 - 334.

Rickman, S.

/32/ Quasiregular mappings, Proccedings of the Romanian - Finish seminar, Brasov 1969.

/33/ Path lifting for discrete open mappings,

Saks, S.

/34/ Teorija integrala, IL, Moskva,1949.

Smirnov, V. I.

/35/ Kurs viššei matematiki, V, Fizmatgiz, Moskva, 1960.

Stoilow, S.

/36/ Lekcii o topologičeskih principah teorii analitičeskih funkcij, "Nauka", Moskva, 1964.

Suvorov, G. D.

/37/ Semejstva ploskih topologičeskih otobraženij, Novosibirsk, 1965.

Šabat, B. V.

/38/ Metod modulej v prostranstve, DAN SSSR, 130, N 5, (1960), 1210 - 1213.

Väisälä, J.

/39/ On quasiconformal mappings in space, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 294, (1961), 3 - 36.

/40/ On quasiconformal mapping of a ball, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 304, (1961).

/41/ Two new characterizations for quasiconformality, Ann. Acad. Sci. Fenn., AI 362, (1965), 3 - 11.

/42/ Lectures on n-Dimensional Quasiconformal Mappings, Springer - Verlag, 1971.

Zorič, V. A.

/43/ O sotvestii granic pri Q-kvazikonformnih otobraženijah šara, DAN SSSR, 145, N 1, (1962), 31 - 34.

/44/ Sootvestvie granic pri Q-kvazikonformnih otobraženijah šara, DAN SSSR, 145, N 6, (1962), 1209 - 1212.

/45/ Graničnie svojstva odnogo klassa otobraženij v prostranstve, DAN SSSR, N 1, (1963), 23 - 29.

/46/ Teorema M. A. Lavretjeva o kvazikonformnih otobraženijah prostranstva, Mat. sbor., 74, N 3, (1967), 417 - 433.

/47/ O dopustimom porjadke rosta harakteristiki kvazikonformnosti v teoreme M. A. Lavrentjeva, DAN SSSR, 181, N 3, (1968), 530 - 533.

/48/ Izolirovannaja osobennost otobraženij s ograničenim iskaženiem, Mat. sbor., 81, N 4, (1970), 634 - 636.

Perović, M.

/49/ Preslikavanja kvazikonformna u srednjem, Mag. rad, Beograd, 1975.

/50/ O globaljnom gomeomorfizme otobraženij kvazikonformnih v srednjem, DAN SSSR, 230, N4, (1976), 781 - 784.

/51/ Isolated singularity of the mappings quasiconformal in the mean. Proceedings of the III Romanian-Finish Seminar,1976, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag,

/52/ Nekotorie svojstva otobraženij kvazikonformnih v srednjem, (u štampi).

Calderon, A. P.

/53/ On the differentiability of absolutely continous functions, Riv. mat. Univ. Parma, 2, (1951), 203 - 213.

B l a š k e, V.

/54/ Diferencialjnaja geometrija i geometričeskie osnovi teorii otnositeljnosti Einštejna, (prevod s njemačkog), Moskva, 1935.

Pontrjagin, L. S.

/55/ Osnovi kombinatornoj topologii, "Nauka", Moskva, 1976.

/56/ Neprerivnie gruppi, "Nauka", Moskva, 1973.

LISTA SPECIJALNIH SIMBOLA

R^n - n-dimenzionalni euklidski prostor.

$\bar{R}^n=R^n\cup\{\infty\}$ - kompaktifikacija jednom tačkom od R^n.

$\dot{R}^1=R^1\cup\{-\infty,\infty\}$ - kompaktifikacija s dvije tačke od R^1.

R^1_+ - skup nenegativnih realnih brojeva.

$\dot{R}^1_+ = R^1_+\cup\{\infty\}$.

Ako je $A\subset R^n$ (ili $A\subset\bar{R}^n$), $\bar{A}$ je zatvorenje od A,

$\complement A$-komplement od A, ∂A-granica od A.

m(E) - Lebesgueova mjera skupa $E\subset R^n$.

$f:G\longrightarrow R^n$ zadovoljava uslov (N), ako iz $m(A)=0$ slijedi $m(f(A))=0$.

$|x|$ - norma vektora x iz R^n.

$|A|$ - norma linearnog operatora $A:R^n\longrightarrow R^n$

$B^n(x_0,r)=\{x\in R^n \mid |x-x_0|<r\}$.

$S^{n-1}(x_0,r)=\{x\in R^n \mid |x-x_0|=r\}$.

n - dimenzija prostora (uvijek je $n\geqslant 2$).

Ω_n - mjera n-dimenzionalne jedinične lopte.

ω_{n-1} - (n-1)-dimenzionalna mjera jedinične sfere u R^n, $\omega_{n-1}=n\Omega_n$.

$f\in W^\ell_p$ (f je iz klase W_p) znači da f ima uopštene parcijalne izvode reda do ℓ (zaključno), čiji su p-ti stepeni lokalno integrabilni.

$\mu(y,f,D)$ - topološki stepen trojke (y,f,D),(pri čemu je $f:G\longrightarrow\bar{R}^n$ neprekidno preslikavanje oblasti G,a D komp. podoblast od G ($\bar{D}\subset G$)

Riječ "funkcija" upućuje na to, da je kodomen skup $\dot{R}^1$.

Ostale oznake su objašnjene na mjestu korišćenja.