Slobodan Miloradović

GORNJA GRANICA FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA I APROKSIMACIJE FUNKCIJA FOURIER-OVIM SUMAMA

- DOKTORSKA DISERTACIJA -

BEOGRAD
1982.

S A D R Ž A J

U V O D

Disertacija je posvećena problemima tačne gornje granice Fourier-ovih koeficijenata i nekih opštijih funkcionala, kao i aproksimaciji 2π - periodičkih funkcija Fourier-ovim sumama.

Rad je podeljen u tri glave. Prva glava sadrži četiri paragrafa, druga jedan, a treća pet paragrafa.

Prvi, drugi i četvrti paragraf prve glave sadrži poznate rezultate o modulima neprekidnosti, klasama funkcija i funkciji Стеклова. Treći paragraf pored poznatih rezultata o najboljoj trigonometrijskoj aproksimaciji $E_n(f)$ sadrži i naš rezultat o proceni veličine

$$K^*(\delta) = \sup_{\substack{f\in C \\ f\neq const}} \frac{E_n(f)}{\omega(f, \frac{\delta}{n})}, \quad 0 < \delta < \pi$$

U drugoj glavi smo odredili suprenum funkcionala

$$\int_{-\infty}^{\infty} f \, d\, F,$$

na klasama $\overline{H}[\delta]$, gde je F zvonasta funkcija (vidi def. 2.1.1.). Rezultat predstavlja proširenje rezultata В. Т. Гаврилюк i С.Б. Стечкина.

Uz pomoć rezultata glave 2 u prvom paragrafu treće glave dokazujemo rezultat o tačnoj gornjoj granici Fourier-ovih koeficijenata na klasi $W^r H\,[\delta]$. Na klasama $W^r H_k[\delta]$ za tačnu gornju granicu Fourier-ovih koeficijenata dobijamo procene s gornje i donje strane i asimptotsku formulu pri $\delta \to 0$, za $k = 2$, dok za kompleksne Fourier-ove koeficijente $C_n(f)$ na klasama $W^r\tilde{H}_k[\delta]$ dobijamo tačan rezultat. U drugom paragrafu rešavamo problem o aproksimaciji fiksirane 2π-periodičke funkcije funkcijama perioda $\frac{2\pi}{k}$ (k - fiksiran prirodan broj koji nije manji od 2). Koristeći ovaj rezultat u trećem paragrafu dobijamo tačan rezultat za supremum Fourier-ovih koeficijenata na klasama $W^rH[\delta]_1$ za $\delta \geqslant \frac{2\pi}{3n}$. Za tačnu gornju granicu Fourier-ovih koeficijenata na klasama $W^rH_k[\delta]_p$ dobijamo procene s gornje i donje strane, dok za $p = 2$ dobijamo tačan rezultat, kao i za kompleksne Fourier-ove koeficijente $C_n(f)$ na svim klasama $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$. Koristeći &3.1. i &3.3. u &3.4. rešavamo problem o tačnim konstantama u nejednakostima tipa

$$|b_n(f)| \leqslant K\,\omega_k(f^{(r)},\delta)_X \quad \text{i} \quad |C_n(f)| \leqslant K\,\omega_k(f^{(r)},\delta)_{\tilde{X}}.$$

U paragrafu &3.5. primenjujemo naš rezultat iz &3.1. na rezultat A. B. Ефимова, o aproksimaciji 2π-periodičkih funkcija Fourier-ovim sumama. Ovde dobijamo asimptotsku formulu za veličinu

$$\sup_{f \neq \text{cont}} \frac{\|f - S_n(f)\|_C}{\omega(f,\delta)}.$$

Rezultati ovog rada saopštavani su na na Medjunarodnim konferencijama iz teorije aproksimacije (Blagoevgrad, 1977; Gdanjsk, 1979; Varna, 1981;), na seminarima iz teorije aproksimacija u Matematičkom institutu B. A. Стеклова AN SSSR i Mehaničko-matematičkom fakultetu MGU kao i na seminaru iz teorije funkcija, u Matematičkom institutu u Beogradu.

Autor

GLAVA 1

$C[a,b]$, kao i obično, označavaće prostor realnih neprekidnih funkcija f na segmentu $[a,b]$ c normom

$$||f||_{C[a,b]} = \max_{a \leqslant t \leqslant b} |f(t)|$$

$L_p[a,b]$ $(1 \leqslant p < \infty,\ -\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty,\ L_1[a,b] = L[a,b])$ je prostor realnih funkcija f na $[a,b]$ gde je $|f|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ integrabilna s normom

$$||f||_{L_p[a,b]} = \left\{ \int_a^b |f(t)|^p \, dt \right\}^{\frac{1}{p}}$$

Paralelno s $C[a,b]$ i $L_p[a,b]$ razmatraćemo i prostore $(b-a)$ -periodičkih funkcija:

C - prostor realnih neprekidnih funkcija f na celoj osi $(-\infty, +\infty)$, perioda $b-a$, s normom

$$||f||_C = \max_t |f(t)|;$$

L_p $(1 \leqslant p < \infty,\ -\infty < a < b < \infty,\ L_1 = L)$ - prostor realnih $(b-a)$ - periodičkih funkcija f tako da je $|f|^p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ integrabilna na $[a,b]$ s normom kao u $L_p[a,b]$;

$\tilde{C}$ - prostor kompleksnih neprekidnih funkcija f na celoj osi $(-\infty, +\infty)$, perioda $b-a$, s normom

$$||f||_{\tilde{C}} = \max_t |f(t)|;$$

$\tilde{L}_p$ - prostor kompleksnih $(b-a)$ - periodičkih funkcija tako da je $|f|^p$ integrabilna na $[a,b]$ s normom kao u L_p.

$\bar{C}$ - će označavati prostor realnih neprekidnih funkcija na celoj osi $(-\infty, +\infty)$.

Period funkcije f označićemo sa $\Omega(f)$. Primetimo da ako $f \in C$ sa $\Omega(f) = b - a$ da tada važi

$$||f||_C = ||f||_{C[a,b]}.$$

Obrnuto, ako $f \in C[a,b]$, tada je

$$||f||_{C[a,b]} = ||f||_C$$

samo ako je $f(a) = f(b)$, jer se jedino tada neprekidna funkcija na $[a,b]$ može periodički produžiti na čitavu realnu osu.

& 1.1. MODULI NEPREKIDNOSTI

Svuda u ovom paragrafu $X[a,b]$ označavaće $C[a,b]$ ili $L_p[a,b]$, a X zamenjivaće oznaku C ili L_p.

1. MODULI NEPREKIDNOSTI PRVOG REDA

Definicija 1.1.1. Modulom neprekidnosti prvog reda ili prosto modulom neprekidnosti funkcije $f \in X[a,b]$ naziva se funkcija

$$(1.1)\quad \omega(f,\delta)_{X[a,b]} = \sup_{|h|\leq\delta} ||f(t+h)-f(t)||_{X[a(h),b(h)]},$$

$$0 \leq \delta \leq b-a,$$

gde je $a(h) = a - \frac{1-\operatorname{sign}h}{2}h$, $b(h) = b - \frac{1+\operatorname{sign}h}{2}h$;

ako pak $f \in X$ modul neprekidnosti je funkcija

$$(1.2)\quad \omega(f,\delta)_X = \sup_{|h|\leq\delta} ||f(t+h)-f(t)||_X, \quad 0 \leq \delta < \infty.$$

Kako je

$$||f(t+h) - f(t)||_{X[a,b-h]} = ||f(t-h) - f(t)||_{X[a+h,b]}$$

$$||f(t+h) - f(t)||_X = ||f(t-h) - f(t)||_X, \quad h \geq 0,$$

to jednakosti (1.1) i (1.2) prelaze u prostije jednakosti:

$$\omega(f,\delta)_{X[a,b]} = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} ||f(t+h)-f(t)||_{X[a,b-h]}, \quad 0 \leqslant \delta \leqslant b-a,$$

$$(1.3) \quad \omega(f,\delta)_X = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} ||f(t+h) - f(t)||_X, \quad 0 \leqslant \delta < +\infty,$$

koje su pogodnije za efektivno odredjivanje odgovarajućih modula neprekidnosti.

Radi jednostavnosti $\omega(f,\delta)_{C[a,b]}$ i $\omega(f,\delta)_C$ označavaćemo prosto sa $\omega(f,\delta)$ a $\omega(f,\delta)_{L_p[a,b]}$ i $\omega(f,\delta)_{L_p}$ sa $\omega(f,\delta)_p$. Tako je po definiciji za $f \in C$

$$\omega(f,\delta) = \sup_{|h|\leqslant\delta} \max_t |f(t+h)-f(t)| = \sup_{|t'-t''|\leqslant\delta} |f(t')-f(t'')|.$$

Funkciju $\omega(f,\delta)_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$ ponekad nazivaju integralnim modulom neprekidnosti.

<u>Primedba 1.1.2.</u> Neka je $f \in X$ (sa $\Omega(f) = b-a$). Ako je $\delta > \frac{b-a}{2}$ tada za svako h za koje je $0 \leqslant |h| \leqslant \delta$ postoji ceo broj k ili nula tako da je $h = k(b-a) + h_1$, $|h_1| \leqslant \frac{b-a}{2}$ i prema tome

$$\omega(f,\delta)_X = \sup_{|h|\leqslant\delta} ||f(t+h) - f(t)||_X = \sup_{|h_1|\leqslant\frac{b-a}{2}} ||f(t+k(b-a)+h_1)-$$

$$- f(t)||_X = \sup_{|h_1|\leqslant\frac{b-a}{2}} || f(t+h_1)-f(t)||_X = \omega(f, \tfrac{b-a}{2})_X.$$

Specijalno, ako je $\Omega(f) = 2\pi$ tada je za $\delta \geqslant \pi$ $\omega(f,\delta)_X = \omega(f,\pi)_X$.

<u>Primedba 1.1.3.</u> Ako je za neko $\delta \in [0,\pi]$

$$\omega(f,\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} ||f(t+h)-f(t)||_C = |f(t_0+h_0)-f(t_0)|,$$

gde je $0 \leqslant h_0 \leqslant \pi$, to zbog $\Omega(f) = 2\pi$ možemo smatrati da $t_0 \in [0,2\pi]$ i prema tome $t_0+h_0 \in [0,3\pi]$. Otuda je jasno da prilikom odredjivanja modula neprekidnosti 2π-periodičke funkcije f dovoljno je ograničiti se na segment $[0,3\pi]$ ili na bilo koji drugi segment dužine 3π, ne uzimajući u obzir periodičnost funkcije f. Na segmentu manjem od 3π modul neprekidnosti 2π-periodične funkcije f, za $\delta \leq \pi$, kako pokazuje primer 1.1.4., uopšte govoreći, razlikuje se od modula neprekidnosti funkcije f na celoj osi $(-\infty, +\infty)$.

Primer 1.1.4. Neka je za $0 < \varepsilon < \frac{1}{3}$

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{-t}{\pi - 2\varepsilon}, & t \in [0, \pi - 2\varepsilon], \\ \dfrac{1}{2\varepsilon}(t-\pi), & t \in [\pi - 2\varepsilon, \pi], \\ \dfrac{1}{\pi-\varepsilon}(t-\pi), & t \in [\pi, 2\pi - \varepsilon], \\ -\dfrac{1}{\varepsilon}(t-2\pi), & t \in [2\pi - \varepsilon, 2\pi], \end{cases}$$

i neka je $f(t) = \varphi(t - [\frac{t}{2\pi}]2\pi)$ - 2π - periodično produženje funkcije φ na celu osu $(-\infty, +\infty)$. Tada ako funkciju

$$f(t) = \begin{cases} \varphi(t), & t \in [0, 2\pi] \\ -\dfrac{t - 2\pi}{\pi - 2\varepsilon}, & t \in [2\pi, 3\pi - 3\varepsilon] \end{cases}$$

razmotrimo na segmentu $[0, 3\pi - 3\varepsilon]$, dužine $3\pi - 3\varepsilon < 3\pi$, dobijamo da je

$$\omega(f, \delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{\varepsilon}\,\delta, & \delta \in [0, \varepsilon], \\ 1 + \dfrac{\delta - \varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}, & \delta \in [\varepsilon, \pi - 2\varepsilon], \\ 1 + \dfrac{\pi - 3\varepsilon}{\pi - 2\varepsilon}, & \delta \in [\pi - 2\varepsilon, \pi - \dfrac{\varepsilon^2}{\pi - 2\varepsilon}], \\ 1 + \dfrac{\delta - 2\varepsilon}{\pi - \varepsilon}, & \delta \in [\pi - \dfrac{\varepsilon^2}{\pi - 2\varepsilon}, \pi + \varepsilon], \\ 2, & \delta \in [\pi + \varepsilon, 3\pi - 3\varepsilon], \end{cases}$$

to jest, modul neprekidnosti funkcije f na $[0, 3\pi - 3\varepsilon]$, za $\delta \in [0, \pi]$ u tački π ne dostiže svoju najveću vrednost i prema tome razlikuje se od modula neprekidnosti te funkcije na celoj osi $(-\infty, +\infty)$ za $\delta \in [0, \pi]$.

Teorema 1.1.5. Modul neprekidnosti (1.2) funkcije $f \in X$ ima sledeća osnovna svojstva:

1) $\omega(f,0)_X = 0$;

2) $\omega(f,\delta)_X$ ne opada na $[0, +\infty)$;

3) Modul neprekidnosti (1.2) je poluaditivna funkcija, to jest,

$$(1.4) \quad \omega(f,\delta_1+\delta_2)_X \leq \omega(f,\delta_1)_X+\omega(f,\delta_2)_X, \quad \delta_1 > 0; \delta_2 > 0;$$

4) $\omega(f,\delta)_X$ je neprekidna funckija na $[0, +\infty)$.

Dokaz. Svojstva 1)i 2)odmah slede iz definicije modula neprekidnosti. Da bi smo dokazali nejednakost (1.4) dovoljno je, usled (1.3), fiksirajući $\delta_1 > 0$ i $\delta_2 > 0$, dokazati nejednakost

$$||f(t + h) - f(t)||_X \leq \omega(f,\delta_1)_X + \omega(f,\delta_2)_X$$

za svako h koje zadovoljava uslov $0 \leq h \leq \delta_1 + \delta_2$. Ako je $h < \delta_1$ ili $h < \delta_2$ onda je to očevidno. Neka je

$$\max (\delta_1,\delta_2) < h \leq \delta_1 + \delta_2.$$

Tada je $|h - \delta_2| = h - \delta_2 \leq \delta_1$ i

$$||f(t + h) - f(t)||_X \leq ||f(t + h) - f(t + \delta_2)||_X +$$

$$+ ||f(t + \delta_2) - f(t)||_X \leq \omega(f,\delta_1)_X + \omega(f,\delta_2)_X$$

što je i trebalo dokazati.

Da bi smo dokazali svojstvo 4)primetimo, da jednakost

$$(1.5) \quad \lim_{\delta\to+0} \omega(f,\delta)_X = 0$$

za X=C,sledi iz ravnomerne neprekidnosti $f \in C$ na celoj osi $(-\infty,+\infty)$, a za $X = L_p$ $(1\leq p < \infty)$, iz teoreme Lebesque-a ([59], str. 500). Prema tome u tački $\delta = 0$ funkcija $\omega(f,\delta)_X$ je neprekidna s desne strane. Za $0 < \delta < +\infty$, $\eta + \delta \geq 0$, usled (1.4) i svojstva 2),

$$|\omega(f,\delta + \eta)_X - \omega(f,\delta)_X| \leq \omega(f, |\eta|)_X$$

i s obzirom na (1.5)

$$\omega(f, \delta+\eta)_X \to \omega(f,\delta)_X \text{ kada } \eta \to 0.$$

Teorema 1.1.5. važi i za $f \in X[a,b]$.

U slučaju $X = C$ ili $X = C[a,b]$ svojstva 1)-4) modula neprekidnosti $\omega(f,\delta)$ karakteristična su u tom smislu što svaka funckija $\omega(\delta)$, koja ih poseduje, je modul neprekidnosti neke funkcije f. Na tu činjenicu, u slučaju C, ukazao je Lebesgue [27], a u slučaju $C[a,b]$ Никольский [39].

Neka $\omega(\delta)$, $\delta \in [0,b-a]$ zadovoljava uslove 1)- 4). Uverimo se da postoji f iz $C[a,b]$ tako da je $\omega(f,\delta) = \omega(\delta)$. Zaista funkcija $f(t) = \omega(t-a)$, $t \in [a,b]$ je iz $C[a,b]$ i

$$\omega(\delta) = f(\delta+a)-f(a) \leqslant \omega(f,\delta) = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} ||f(t+h)-$$
$$-f(t)||_{C[a,b-h]} = \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} ||\omega(t-a+h)-\omega(t-a)||_{C[a,b-h]} \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{0\leqslant h\leqslant\delta} \omega(h) = \omega(\delta),$$

to jest, $\omega(f,\delta) = \omega(\delta)$.

Za funkciju $\omega(\delta)$, $\delta \geqslant 0$, koja poseduje svojstva 1)-4) i $\omega(\delta) = \omega(\pi)$ za $\delta \geqslant \pi$, postoji f iz C tako da je $\omega(f,\delta) = \omega(\delta)$. Naime, lako je proveriti, da je jedna takva funckija definisana jednakostima:

$$f(t) = \omega(|t|),\ 0 \leqslant t \leqslant \pi,\ f(t + 2\pi) = f(t).$$

Zbog toga je celishodno uvesti pojam modula neprekidnosti uopšte, ne vezujući taj pojam s bilo kojom funkcijom f.

Definicija 1.1.6. Svaka funkcija $\omega(\delta)$ koja zadovoljva uslove 1)-4) naziva se modul neprekidnosti.

Inače uslove 1)-4) možemo kraće zapisati kao

$$\lim_{\delta\to+0} \omega(\delta) = 0,\ 0 \leqslant \omega(\delta_2) - \omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2-\delta_1)\,(0\leqslant\delta_1\leqslant\delta_2).$$

Primetimo da su karakterizaciju modula neprekidnosti funkcija iz L_2 dali O. B. Бесов i C. Б. Стечкин [9].

Primedba 1.1.7. Da bi smo proverili svojstvo poluaditivnosti funkcije $\omega(\delta)$, koje je od svih svojstava 1)-4) i najteže, dovoljno je utvrditi da funkcija $\frac{\omega(\delta)}{\delta}$ ne raste.

Zaista, za svako $\delta_1, \delta_2 > 0$ iz $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \downarrow$ sledi da je

$$\omega(\delta_1+\delta_2) = \delta_1\frac{\omega(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2} + \delta_2\frac{\omega(\delta_1+\delta_2)}{\delta_1+\delta_2} \leqslant \delta_1 \frac{\omega(\delta_1)}{\delta_2} + \delta_2\frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2} =$$

$$= \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$$

Primedba 1.1.7. nam dozvoljava da navedemo sledeće važne primere modula neprekidnosti.

Primer 1.1.8. Sve funkcije oblika $M\delta^\alpha$ $(\delta \geqslant 0)$, gde je $M = \text{const} \geqslant 0$ i $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ su moduli neprekidnosti.

Primer 1.1.9. Za $0<\alpha<1$ funkcija

$$\omega(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 0 \\ \delta^\alpha \ln\frac{1}{\delta}, & \delta \in (0, e^{-\frac{1}{\alpha}}) \\ \frac{1}{\alpha e}, & \delta \geqslant e^{-\frac{1}{\alpha}} \end{cases}$$

je modul neprekidnosti.

Primer 1.1.10. Za $0 \leqslant \alpha < 1$ funkcija

$$\omega(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 0 \\ \dfrac{\delta^\alpha}{\ln\frac{1}{\delta}}, & \delta \in \left[0, e^{\frac{1}{\alpha-1}}\right], \\ (1-\alpha)\, e^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}, & \delta \geqslant e^{\frac{1}{\alpha-1}}, \end{cases}$$

je modul neprekidnosti.

Iz poluaditivnosti modula neprekidnosti $\omega(f,\delta)_X$ sledi da je za svako $n \in N$

$$(1.6) \qquad \omega(f, n\delta)_X \leqslant n\, \omega(f,\delta)_X$$

Zaista, za $n = 1$ (1.6) je tačno, a pretpostavka da je (1.6) tačno za $n = k$ daje

$$\omega(f, (k+)\delta)_X \leqslant \omega(f, k\delta)_X + \omega(f,\delta) \leqslant k\omega(f,\delta)_X + \omega(f,\delta)_X =$$

$$= (k + 1)\, \omega(f,\delta)_X.$$

Ako je pak λ - bilo koji pozitivan broj, tada umesto (1.6) možemo napisati

$$(1.7) \qquad \omega(f,\lambda\delta)_X \leqslant [\lambda+1]\, \omega\, (f,\delta)_X \leqslant (\lambda+1)\, \omega(f,\delta)_X,$$

jer, označivši s $[\lambda]$ ceo deo od λ, usled monotonosti $\omega(f,\delta)_X$ i (1.6) dobijamo

$$\omega(f,\lambda\delta)_X \leqslant \omega(f,[\lambda+1]\,\delta)_X \leqslant [\lambda+1]\,\omega(f,\delta)_X \leqslant (\lambda+1)\omega(f,\delta)_X.$$

Nejednakosti (1.6) i (1.7) važe i u prostoru $X[a,b]$.

Primetimo da nejednakost $\omega(f,\lambda\delta) < [\lambda+1]\ \omega\ (f,\delta)_X$, to jest, prva nejednakost u (1.7), za $X = C$ ili $X = C[a,b]$, je tačna u tom smislu što u njoj množitelj $[\lambda+1]$ je nemoguće umanjiti. Da bi smo to pokazali dovoljno je navesti jedan modul neprekidnosti za koji pri svakom necelom $\lambda > 0$ za neko δ gornja nejednakost prelazi u jednakost.

Ne umanjujući opštost ograničimo se slučajem $1 < \lambda < 2$ i stavimo

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{\lambda - 1}, & 0 \leqslant t \leqslant \lambda - 1 \\ 1, & \lambda - 1 \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 + \dfrac{1}{\lambda - 1}(t-1), & 1 \leqslant t \leqslant \lambda, \\ 2, & t \geqslant \lambda. \end{cases}$$

Tada je, očevidno, $\omega(f,\delta) = f(\delta)$ i prema tome za $\delta = 1$

$$\omega(f,\lambda\delta) = \omega(f,\lambda) = f(\lambda) = 2 = [\lambda+1]\ f(1) = [\lambda+1]\ \omega(f,\delta).$$

Koristeći (1.7) za svaki modul neprekidnosti $\omega(\delta) \not\equiv 0$ i za svako $\delta \in [0,b-a]$ može se pokazati de je

$$(1.8) \qquad \omega(\delta) \geq \frac{\omega(b-a)}{2.(b-a)}\delta.$$

Zaista, za svako $\delta\in(0,\ b-a]$ imamo

$$\omega(b-a) = \omega\left(\frac{b-a}{\delta}\ \delta\right) \leq \left(\frac{b-a}{\delta}+1\right)\omega(\delta) = \frac{b-a}{\delta}\left(1+\frac{\delta}{b-a}\right)\omega(\delta) \leq 2\frac{b-a}{\delta}\omega(\delta),$$

odakle i sledi (1.8).

Primer modula neprekidnosti

$$\omega(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\ \delta, & \delta\in[0,\ \varepsilon], \\ 1\ , & \delta\in[\varepsilon,\ 1-\varepsilon], \\ 2+\frac{\delta-1}{\varepsilon}, & \delta\in[1-\varepsilon,\ 1], \end{cases}$$

pokazuje, da konstanta $\frac{\omega(b-a)}{2(b-a)}$ u desnoj strani (1.8) se ne može uvećati.

Definicija 1.1.11. Funkcija $f(t)$, $t\in[a,b]$, je konveksna ako je za svako t_1, $t_2\in[a,b]$ i $\alpha_1>0, \alpha_2>0$, $\alpha_1+\alpha_2 = 1$ ispunjena nejednakost

$$(1.9) \qquad \alpha_1 f(t_1) + \alpha_2 f(t_2) \leq f(\alpha_1 t_1 + \alpha_2 t_2).$$

Teorema 1.1.12. Svaka neprekidna, neopadajuća i konveksna funkcija $\omega(\delta)$ na $[0,a]$, $\omega(0) = 0$, je modul neprekidnosti.

Dokaz. Neka je $0 < \delta_1 < \delta_2$. Prema (1.9) i pretpostavci $\omega(0) = 0$ je

$$\omega(\delta_1) = \omega\left(\frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2}\cdot 0 + \frac{\delta_1}{\delta_2}\cdot\delta_2\right) \geqslant \frac{\delta_2-\delta_1}{\delta_2}\,\omega(0) + \frac{\delta_1}{\delta_2}\,\omega(\delta_2) = \frac{\delta_1}{\delta_2}\,\omega(\delta_2)$$

odakle je

$$\frac{\omega(\delta_1)}{\delta_1} \geqslant \frac{\omega(\delta_2)}{\delta_2},$$

to jest, $\frac{\omega(\delta)}{\delta} \downarrow$. S obzirom na primedbu 1.1.7 $\omega(\delta)$ je poluaditivna funkcija i prema tome $\omega(\delta)$ je modul neprekidnosti.

Lako je dokazati da za svaki konveksni modul neprekidnosti $\omega(\delta)$ nejednakost (1.6) važi za svako $\lambda > 1$, to jest,

$$(1,10) \qquad \omega(\omega\delta) \leqslant \lambda\,\omega(\delta).$$

Definicija 1.1.13. Neka je ω-proizvoljni modul neprekidnosti na segmentu $[0,a]$. Funkciju ω^*, definisanu formulom

$$(1.11) \qquad \omega^*(\delta) = \sup_{0\leqslant x_1\leqslant\delta\leqslant x_2\leqslant a} \frac{(\delta-x_1)\omega(x_2) + (x_2-\delta)\omega(x_1)}{x_2 - x_1},$$

nazivaćemo najmanjom konveksnom majorantom modula neprekidnosti ω.

Grafik funkcije ω^* je kriva koja s gornje strane ograničava najmanju konveksnu oblast koja u sebi sadrži oblast $\{0 \leqslant \delta \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant \omega(\delta)\}$. Očevidno, ω^* je konveksni modul neprekidnosti.

Na vezu izmedju konveksnih i nekonveksnih modula neprekidnosti ukazao je С. Б. Стечкин (v. [15], str. 78).

Lema 1.1.14. Za bilo koji modul neprekidnosti $\omega(\delta) \not\equiv 0$ važi nejednakost

$$(1.12) \qquad \omega(\delta) \leqslant \omega^*(\delta) < 2\,\omega(\delta),\quad 0 < \delta \leqslant a,$$

gde se konstanta 2 u desnoj strani nejednakosti (1.12) ne može smanjiti.

<u>Dokaz</u>. Iz (1.11) za $\delta > 0$ je

$$(1.13)\quad \omega^*(\delta) = \max(\omega(\delta), \sup_{0\leq x_1<\delta<x_2\leq a} \frac{(\delta-x_1)\omega(x_2)+(x_2-\delta)\omega(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

S obzirom da je

$$\frac{(\delta-x_1)\omega(x_2)+(x_2-\delta)\omega(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{1}{x_2-x_1}((\delta-x_1)(\frac{x_2}{\delta} + 1)+(x_2-\delta))\omega(\delta) \leq$$

$$\leq (1 + \frac{x_2(\delta-x_1)}{\delta(x_2-x_1)})\omega(\delta) = (1 + \frac{1-\frac{x_1}{\delta}}{1-\frac{x_1}{x_2}})\,\omega(\delta) < 2\omega(\delta),$$

to iz (1.13) sledi (1.12).

Kako je za modul neprekidnosti

$$\omega(\delta) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon}\,\delta, & 0 \leq \delta \leq \varepsilon, \\ 1, & \varepsilon \leq \delta \leq 1, \\ \frac{1}{\varepsilon}\,(\delta-1+\varepsilon), & 1 \leq \delta \leq 1+\varepsilon, \\ 2, & 1+\varepsilon \leq \delta \leq 2, \end{cases}$$

$$\frac{\omega^*(1)}{\omega(1)} = 2 - \varepsilon$$

to se konstanta 2 u (1.12) ne može smanjiti.

2. *MODULI NEPREKIDNOSTI VIŠEG REDA*

U nizu slučajeva radi potpunog opisa strukturnih svojstava funkcija odredjene klase, paralelno s modulima neprekidnosti prvog reda izučavaju se i moduli neprekidnosti višeg reda, koje je inače prvi uveo Бернштейн [7].

Prvo ćemo definisati i navesti osnovna svojstva k-tih razlika funkcije f.

Definicija 1.1.15. Neka je funkcija f definisana na segmentu $[a,b]$. Tada za svako $k \in N$ i za svako $t \in [a(h), b(h)] = [a - \frac{1-\operatorname{sign} h}{2} k h, b - \frac{1+\operatorname{sign} h}{2} k h]$, k-tom razlikom funkcije f u tački t s korakom h naziva se funkcija

$$\Delta_h^k (f,t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(t+ih),$$

a za $t \in [\dot{a}(h), \dot{b}(h)] = [a + \frac{k|h|}{2}, b - \frac{k|h|}{2}]$

k-tom simetričnom razlikom funkcije f naziva se funkcija

$$\dot{\Delta}_h^k (f,t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(t - \frac{kh}{2} + ih) = \Delta_h^k(f, t - \frac{kh}{2}).$$

U slučaju da je $\Omega(f) = b - a$ tada su funkcije $\Delta_h^k(f,t)$ i $\dot{\Delta}_h^k(f,t)$ definisane za svako $t \in (-\infty, +\infty)$ kao i sama funkcija f.

Teorema 1.1.15. Za svako $j, k \in N$

1. $\Delta_h^{j+k} (f,t) = \Delta_h^j[\Delta_h^k (f,t)]$,

2. $\Delta_{jh}^k (f,t) = \sum_{i_1=0}^{j-1} \sum_{i_2=0}^{j-1} \cdots \sum_{i_k=0}^{j-1} \Delta_h^k(f, t+i_1 h + \ldots + i_k h)$,

3. Ako $f^{(k)} \in L[a,b]$ ili L tada je

$$\Delta_h^k (f,t) = \int_0^h du_1 \int_0^h du_2 \ldots \int_0^h f^{(k)}(t+u_1+u_2 \ldots +u_k)\, du_k .$$

Dokaz se lako izvodi indukcijom što se može videti u [7].

Definicija 1.1.16. Modulom neprekidnosti k-tog reda funkcije $f \in X[a,b]$ naziva se funkcija, definisana na $[0, \frac{b-a}{k}]$,

$$(1.14) \quad \omega_k(f,\delta)_{X[a,b]} = \sup_{|h| \leq \delta} ||\Delta_h^k (f,t)||_{X[a(h),b(h)]} =$$

$$= \sup_{|h| \leq \delta} ||\dot{\Delta}_h^k (f,t)||_{X[\dot{a}(h),\dot{b}(h)]} .$$

Ako pak $f \in X$ modul neprekidnosti k-tog reda funkcije f je funkcija

$$(1.15)\quad \omega_k(f,\delta)_X = \sup_{|h|\le\delta} ||\Delta_h^k(f,t)||_X = \sup_{|h|\le\delta} ||\dot{\Delta}_h^k(f,t)||_X,\quad 0\le\delta<\infty.$$

Isto kao i kod modula neprekidnosti prvog reda jednakosti (1.14) i (1.15) dobijaju prostije oblike

$$\omega_k(f,\delta)_{X[a,b]} = \sup_{0<h\le\delta} ||\Delta_h^k(f,t)||_{X[a,b-kh]} =$$

$$= \sup_{0\le h\le\delta} ||\dot{\Delta}_h^k(f,t)||_{X[a+\frac{kh}{2},\frac{b-kh}{2}]},\quad 0\le\delta\le\frac{b-a}{k},$$

$$\omega_k(f,\delta)_X = \sup_{0\le h\le\delta} ||\Delta_h^k(f,t)||_X = \sup_{0\le h\le\delta} ||\dot{\Delta}_h^k(f,t)||_X, 0\le\delta<+\infty.$$

koje su pogodnije prilikom efektivnog odredjivanja modula neprekidnosti konkretne funkcije f.

Radi jednostavnosti pisanja $\omega_k(f,\delta)_{C[a,b]}$ i $\omega_k(f,\delta)_C$ označavaćemo prosto sa $\omega_k(f,\delta)$ a $\omega_k(f,\delta)_{L_p[a,b]}$ i $\omega_k(f,\delta)_{L_p}$ sa $\omega_k(f,\delta)_p$.

Primedba 1.1.3. važiće i za $\omega_k(f,\delta)_X$. Naime

$$\omega_k(f,\delta)_X = \omega_k(f,\frac{b-a}{2})_X,\quad \delta\ge\frac{b-a}{2}.$$

Specijalno ako je $\Omega(f) = 2\pi$, tada je

$$\omega_k(f,\delta)_X = \omega_k(f,\pi)_X \text{ za } \delta\ge\pi.$$

Da bi smo efektivno izračunali modul neprekidnosti $\omega_k(f,\delta)$ 2π-periodične funkcije dovoljno je izračunati njen modul neprekidnosti na bilo kom intervalu dužine $2\pi+k\pi$ ne uzimajući u obzir njenu periodičnost.

Teorema 1.1.17. Ako $f \in C[a,b]$ ili C tada je:

1) $\omega_k(f,0) = 0$;

2) $\omega_k(f,\delta)$ je monotono rastuća funkcija;

3) $\omega_k(f,\delta)$ je neprekidna funkcija;

4) Za svako $n \in N$ važi tačna nejednakost

$$\omega_k(f,n\delta) \leqslant n^k \omega_k(f,\delta),$$

a pri svakom $\lambda > 0$ - nejednakost

$$\omega_k(f,\lambda\delta) \leqslant [\lambda+1]^k \omega_k(f,\delta) \leqslant (\lambda+1)^k \omega_k(f,\delta);$$

5) Za svako $\delta \in [0, \frac{b-a}{k}]$ ispunjena je nejednakost

$$\omega_k(f,\delta) \geqslant A_k \delta^k, \quad A_k = \omega_k(f, \frac{b-a}{k}) \left[\frac{k}{2(b-a)}\right]^k ;$$

6) Ako funkcija f ima svuda na $[a,b]$ neprekidne izvode do $(r-1)$-reda, i pri tom $(r-1)$-i izvod $f^{(r-1)} \in Lip\ 1$, onda je

$$\omega_{k+r}(f,\delta) \leqslant \delta^r \omega_k(f^{(r)},\delta);$$

7) Za svako δ_1, $\delta_2 > 0$ je

$$\omega_k(f,\delta_1+\delta_2) \leqslant 2^k (\omega_k(f,\delta_1) + \omega_k(f,\delta_2)).$$

Dokaz teoreme može se videti u [11]. Više o modulima neprekidnosti višeg reda se nalazi u [53], [29], [5], [49] i [50].

& 1.2. SPECIJALNE KLASE FUNKCIJA

1. Neka je $\omega(\delta)$ modul neprekidnosti. Klasu funkcije f za koje je $\omega(f,\delta) \leqslant \omega(\delta)$ označavaćemo sa H_1^ω. Ravnopravno s H_1^ω koristićemo i oznaku H^ω.

Kao što smo već napomenuli, za svako $f \in C$ ili $C[a,b]$, $\omega(f,\delta) \to 0$ pri $\delta \to 0$. Precizirajući brzinu kojom $\omega(\delta) \to 0$ pri $\delta \to 0$, dolazimo do specijalnih klasa u C i $C[a,b]$:

1^o Lipschitz-ovu klasu H_1^α, $0<\alpha\leqslant 1$, obrazuju funkcije f kod kojih je

$$\omega(f,\delta) \leqslant M\ \delta^\alpha.$$

Ako želimo naročito da istaknemo konstantu M u ovoj nejednakosti, pišemo MH_1^α.

Pod H_1^0 podrazumevamo klasu ograničenih funkcija koju ćemo obeležavati sa B.

Funkcija koja zadovoljava Lipschitz-ov uslov pri $\alpha>1$ svodi se na konstantu. Od naročitog je interesa klasa H_1^1: $f\in H_1^1$ tada i samo tada ako je apsolutno neprekidna i $|f'(x)|\leqslant$ $\leqslant M$ skoro svuda.

2^o Klasu W obrazuju funkcije f za koje je

$$\omega(f,\delta) \leqslant M\delta|\log\delta|.$$

Izmedju klase W i Lipschitz-ovih klasa H_1^α postoji striktna inkluzija

$$H_1^1 \subset W \subset H_1^\alpha \quad \text{za } \alpha\in(0,1).$$

Zygmund-ovu klasu [58] obrazuju funkcije f za koje je

$$\omega_2(f,\delta) \leqslant M\delta^\alpha.$$

Za $0<\alpha<1$ klase H_1^α i H_2^α se poklapaju ([56], t. I, str. 76) Medjutim, $H_1^1 \neq H_2^1$; naime, funkcije klase H_1^1 imaju skoro svuda ograničen izvod, dok klasi H_2^1 pripadaju i funkcije koje nigde nemaju izvod [56]. Preciznije

$$(1.16)\qquad f\in H_2^1 \Rightarrow \omega(f,\delta) \leqslant M\delta|\log\delta|$$

([56], t. I str. 77) i ova se procena ne može poboljšati. Prema tome, $H_1^1\subset H_2^1\subset W$, gde je i drugi znak inkluzije u striknom smislu.

Analogno klasi H^ω definiše se klasa H_k^ω. Naime, funkcija $f\in H_k^\omega$ ako je $\omega_k(f,\delta)\leqslant\omega_k(\delta)$, gde je $\omega_k(\delta)$ dati modul neprekidnosti k-tog reda neke funkcije iz C ili $C[a,b]$.

U prostoru L_p ili $L_p[a,b]$ definiše se klasa $H_k^{\alpha,p}$ sa

$$\omega_k(f,\delta)_p \leqslant M\delta^{\alpha}.$$

Klase $H_1^{\alpha,p}$ i $H_2^{\alpha,p}$, $0<\alpha\leqslant 1$, su različite samo za $\alpha=1$. Primetimo da nasuprot iskazu (1.16) u prostoru $C(C[a,b])$, koji je tu najbolje mogući, u prostoru L_p važi

$$f \in H_2^{1,p},\ 1<p<\infty \Longrightarrow \omega(f,\delta)_p \leqslant \begin{cases} M\ \delta|\log\delta|^{1/p}, & 1\leqslant p\leqslant 2; \\ M\ \delta|\log\delta|^{1/2}, & p\geqslant 2; \end{cases}$$

i ova se procena ne može poboljšati (v. [54] za $p = 2$ i [57] za $p \neq 2$).

2. Jedna od klasa koja se najčešće susreće je klasa funkcija koje imaju ograničen r-ti izvod, to jest, $|f^{(r)}(x)| \leqslant M$ za svako x. W^r $(r = 1,2,\ldots)$ je klasa funkcija koje imaju apsolutno neprekidan $(r-1)$-ti izvod a r-ti izvod im je skoro svuda ograničen, to jest,

$$||f^{(r)}||_B = \sup_t \mathrm{ess}\ |f^{(r)}(t)| \leqslant M.$$

Kombinujući klase definisane izvodom i one definisane modulom neprekidnosti, mogu se formirati složene klase:

$W^r H_1^{\omega}$ je klasa funkcija koje imaju apsolutno neprekidne $(r-1)$-ve izvode a r-ti izvodi $f^{(r)} \in H_1^{\omega}$ $(f^{(0)} = f)$. Specijalno ako je $\omega(\delta) = \delta^{\alpha}$, $0<\alpha<1$, dobijamo klasu $W^r H_1^{\alpha}$. Za $\alpha = 1$, $W^r H_1^1 = W^{r+1}$.

$W^r H_2^{\omega}$ je klasa funkcija koje imaju apsolutno neprekidne $(r-1)$-ve izvode a r-ti izvodi $f^{(r)} \in H_2^{\omega}$.

Na analogan način se definišu odgovarajuće klase u prostorima L_p $(p \geqslant 1)$.

Koristeći Weyl-ov izvod (v. [56], gl. XII, &8 i &9) možemo definisati klase koje su opštije od klasa $W^r H_i^{\omega}$ $(i = 1,2)$ i njihovih analogona u L_p $(p \geqslant 1)$.

3. Neka je $f \in L$, srednje vrednosti jednake nuli, i neka je

$$S[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

njen Fourier-ov red. Konjugovani red ovome je

$$\tilde{S}[f] = \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \sin \nu x - b_\nu \cos \nu x).$$

Za skoro svako x postoji ([56], gl. II, &5)

$$\tilde{f}(x) = -\frac{2}{\pi} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}} dt;$$

$\tilde{f}$ je konjugovana funkcija funkciji f. Opravdanje za ove nazive leži u tome što postoji izvestan paralelizam izmedju f i $S[f]$ s jedne i $\tilde{f}$ i $\tilde{S}[f]$ s druge strane, koji nije potpun. Naime, $\tilde{f}$ ne mora biti L-integrabilna, niti ograničena ili neprekidna ako ja takva f.

Neka je data klasa funkcija P. Njoj konjugovanu klasu $\overline{P}$ obrazuju one funkcije f čije konjugovane funkcije $\tilde{f} \in P$. Operacija konjugovanja klase ne dovodi uvek do nove klase, to jest, ova može biti refleksivna. Iskazi "$\overline{M} = M$" su stavovi Привалов-ljeva tipa.

И. И. Привалов [42] je pokazao da

$$f \in H_1^\alpha,\ 0 < \alpha < 1, \Rightarrow \tilde{f} \in H_1^\alpha.$$

Kako je $(\tilde{\tilde{f}}) = -f$, to važi i obrnuti iskaz, to jest,

$$(1.17) \quad \overline{H}_1^\alpha = H_1^\alpha \quad \text{za} \quad 0 < \alpha < 1.$$

Za $\alpha = 1$ ovo više nije tačno, to jest, klase H_1^1 i $\overline{H}_1^1$ su neuporedive. Medjutim, klasa H_2^1 je refleksivna [58], to jest, $f \in H_2^1 \Leftrightarrow \tilde{f} \in H_2^1$, što zajedno s (1.17) daje $\overline{H}_2^\alpha = H_2^\alpha$ za $0 < \alpha \leqslant 1$.

Iz izloženog sledi da su klase $W^r H_1^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ i $W^r H_2^\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, refleksivne, dok to nije slučaj sa klasama W^r.

Postojanje nesvojstvenih integrala

$$A_1 = \int_0^1 \frac{\omega(t)}{t}\, dt \quad i \quad A_2 = \int_0^1 \frac{\omega_2(t)}{t}\, dt$$

obezbedjuje postojanje konjugovane funkcije za svaku funkciju iz H_1^ω odnosno H_2^ω.

4. Klasu 2π-periodičkih funkcija f iz C za koje je za fiksirano $\delta > 0$, $\omega_k(f,\delta) \leq M$, gde je M kao i ranije neka fiksirana pozitivna konstanta, označavaćemo sa $M\, H_k\,[\delta]$. U slučaju da je $M = 1$, $1\, H_k[\delta] = H_k\,[\delta]$. Ako je pak $k = 1$ klasu $M\, H_1[\delta]$označavaćemo sa $M\, H\,[\delta]$. Sa $M\, W^r\, H_k[\delta]$ označavaćemo klasu funkcija f čiji su $(r-1)$-vi izvodi apsolutno neprekidni a $f^{(r)} \in MH_k\,[\delta]$. Kao i gore za $1 \cdot W^r\, H_k[\delta]$ i $MW^r H_1[\delta]$ koristićemo se oznakama $W^r\, H_k[\delta]$ odnosno $MW^r H[\delta]$.

U prostoru L_p 2π-periodičkih funkcija klasa $M\, H_k[\delta]_p$ sadrži one funkcije za koje je za fiksirano $\delta>0$, $\omega_k(f,\delta)_p \leq M$. $MW^r H_k[\delta]_p$ je klasa funkcija f za koje su $(r-1)$-vi izvodi apsolutno neprekidni a $f^{(r)} \in MH_k[\delta]_p$. Klase $MH_1[\delta]_p$, $1 \cdot H_k[\delta]_p$, $MW^r H_1\,[\delta]_p$, $1 \cdot W^r H_k[\delta]_p$ ćemo redom kraće obeležavati sa $MH[\delta]_p$, $H_k[\delta]_p$, $MW^r H[\delta]_p$, $W^r H_k[\delta]_p$.

U prostoru $\overline{C}$ klasu $\overline{H}[\delta]$ definišemo jednakošću

$$\overline{H}[\delta] = \left\{ f \in \overline{C} :\ |f(x_2)-f(x_1)| \leq 1,\ |x_2 - x_1| \leq \delta \right\}$$

gde je δ fiksiran pozitivan broj.

Na analogan način kao u C i L_p definišemo klase 2π-periodičkih funkcija u $\tilde{C}$ i $\tilde{L}_p$: $M\tilde{H}_k[\delta]$, $MW^r\tilde{H}_k[\delta]$, $M\tilde{H}_k[\delta]_p$, $MW^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ s istim primedbama kao i gore za slučajeve $M = 1$ i $k = 1$.

& 1.3. NAJBOLJA TRIGONOMETRIJSKA APROKSIMACIJA FUNKCIJE I TRIGONOMETRIJSKE APROKSIMACIJE POSEBNIM POSTUPCIMA

1. Neka je $f \in C$, $\Omega(t) = 2\pi$, i neka je H_n skup trigonometrijskih polinoma T reda ne većeg od n-1. Uzevši proizvoljni trigonometrijski poligon $T \in H_n$ stavimo

$$\Delta_C(f,T) = \max_t |f(t) - T(t)| = ||f-T||_C.$$

Veličinu $\Delta_C(f,T)$ zvaćemo aproksimacijom funkcije f polinomom T. Ako svakom polinomu T iz H_n pridružimo veličinu $\Delta_C(f,T)$ dobijamo skup $\{\Delta_C(f,T)\}_{T \in H_n}$. Tačna donja granica toga skupa, to jest,

$$E_n = E_n(f) = \inf_{T \in H_n} \Delta_C(f,T)$$

naziva se najbolja aproksimacija funkcije f polinomima iz H_n. E. Borel [10] je pokazao da za svako n postoji u H_n polinom $T_n^*(f)$ takav da je

$$\Delta_C(f, T_n^*) = E_n(f)$$

i time opravdao uvedenu terminologiju. Iz Чебышев-ljevih rezultata [35] sledi da svako n postoji samo jedan takav $T_n^*(f)$ u H_n. Niz $T_n^*(f)$, $n = 1,2,\dots$, je niz trigonometrijskih polinoma najbolje aproksimacije reda ne većeg od n-1. Iz

$$\{\Delta_C(f,T)\}_{T \in H_1} \subset \{\Delta_C(f,T)\}_{T \in H_2} \subset \dots \subset \{\Delta_C(f,T)\}_{T \in H_n} \dots$$

je jasno da niz E_n ne raste sa n, a iz Weierstrass-ovog stava sledi da $E_n \to 0$ kada $n \to \infty$.

Na analogan način se definiše najbolja aproksimacija funkcije $f \in L_p$, $\Omega(f) = 2\pi$, $p \geqslant 1$:

$$E_n(f)_{L_p} = \inf_{T \in H_n} \Delta_{L_p}(f,T) = \inf_{T \in H_n} ||f-T||_{L_p}.$$

2. Od D. Jackson-a ([19],[20]) potiču prve procene najbolje aproksimacije, to jest, ako $f \in C$ ima modul neprekidnosti $\omega(f,\delta)$, tada je (1.18) $E_n(f) \leq K\omega(f, \frac{1}{n})$, gde je K pozitivna konstanta. Odavde specijalno sledi:

$$(1.19) \quad f \in H_1^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-\alpha}),$$

$$(1.20) \quad f \in W \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-1} \log n).$$

Opštije, ako f ima neprekidan r-ti izvod $f^{(r)}$, $r = 1,2,\dots$, tada je

$$(1.21) \quad E_n(f) \leq K_r\, n^{-r}\omega(f^{(r)}, \frac{1}{n}),$$

i specijalno

$$f^{(r)} \in H_1^\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow E_n(f) = O(n^{-r-\alpha}).$$

Ove rezultate preneo je u prostor L_p, $p \geq 1$. E.S. Quade [43]. On je pokazao da ako f ima izvod $f^{(r)}$ u L_p da je tada

$$(1.22) \quad E_n(f)_{L_p} \leq \frac{K_{r,p}}{n^r}\, \omega(f^{(r)}, \frac{1}{n})_p, \quad r = 0,1,2,\dots,$$

i specijalno

$$f \in H_1^{\alpha,p},\ p \geq 1,\ 0 < \alpha \leq 1 \Rightarrow E_n(f)_{L_p} = O(n^{-\alpha}).$$

Pokazalo se da je nejednakosti (1.21) i (1.22) celishodnije zapisivati u obliku

$$E_n(f) \leq K'\, \omega(f, \frac{\pi}{n}), \text{ odnosno}$$

$$E_n(f)_{L_p} \leq \frac{K'_{r,p}}{n^r}\, \omega(f^{(r)}, \frac{\pi}{n})_p, \quad n = 1,2,\dots$$

Н. П. Корнейчук [26] je pokazao da je $K' = 1$ tačna konstanta, a Н. И. Черных [46] da je $K'_{0,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ takodje tačna konstanta. U proceni

$$E_n(f)_X \leq \frac{K'_r}{n^r}\, \omega(f^{(r)}, \frac{\pi}{n})_X,$$

gde je $X = C$ ili $X = L$, u slučaju neparnih r, А. А. Лигун [28] je dokazao da je

$$K_r^* = \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}$$

tačna konstanta. Za $r = 1$ rezultat pripada В. В. Жуку [44].

С. Б. Стечкин je postavio zadatak naći tačnu konstantu u proceni

$$E_n(f) \leqslant K(\delta)\, \omega(f, \frac{\delta}{n})$$

za svako fiksirano $\delta(0<\delta\leqslant\pi)$, to jest, naći veličinu

$$K^*(\delta) = \sup_{f \neq const} \frac{E_n(f)}{\omega(f, \frac{\delta}{n})}, \quad n = 1,2,\ldots$$

Mi smo u mogućnosti dati procenu konstante $K^*(\delta)$ s gornje strane. Naime važi

Teorema 1.3.1. Za svako $n = 1,2,\ldots,$ i $0<\delta\leqslant\pi$ je

$$(1.23) \qquad K^*(\delta) \leqslant \frac{\pi}{\delta}$$

Dokaz. Ako $f \in C$, $f \not\equiv const$ i $\omega(f,\delta)$-njen modul neprekidnosti u C, usled leme 1.1.14 postoji takav konveksni modul neprekidnosti $\omega^*(\delta)$ da je

$$(1.24) \qquad \omega(f,\delta) \leqslant \omega^*(\delta) < 2\omega(f,\delta) \quad (\delta>0).$$

Prva nejednakost u (1.24) označava da $f \in H^{\omega^*}$ i zato je

$$(1.25) \qquad E_n(f) \leqslant \frac{1}{2}\, \omega^*(\frac{\pi}{n}) \quad \text{(vidi [25] str. 208)},$$

odakle je s obzirom na nejednakost (1.10)

$$(1.26) \qquad E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{2\delta}\, \omega^*(\frac{\delta}{n})$$

Uzimajući u obzir drugu nejednakost u (1.24) dobijamo iz (1.26) da je

$$E_n(f) \leqslant \frac{\pi}{\delta}\, \omega(f, \frac{\pi}{n}), \quad (n = 1,2,\ldots)$$

odakle sledi (1.23).

Lako možemo pokazati da je za funkcije koje imaju konveksne module neprekidnosti $K^*(\delta) = \frac{\pi}{2\delta}$.

3. Jackson-ovi stavovi zaključuju iz diferencijalnih osobina funkcija o njenoj najboljoj aproksimaciji $E_n(f)$. С.Н. Бернштейн ([7] i [8]) je, obrnuto, polazeći od najbolje aproksimacije funkcije zaključio o njenim diferencijalnim osobinama. On je pokazao da

$$E_n(f)=O(n^{-\alpha}) \Rightarrow \begin{cases} f \in H_1^{\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ f \in W, & \alpha = 1, \end{cases}$$

i opštije, da

$$E_n(f)=O(n^{-r-\alpha}), r=1,2,\dots, \Rightarrow \begin{cases} f^{(r)} \in H_1^{\alpha}, & 0 < \alpha < 1, \\ f^{(r)} \in W, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Inverzne stavove u kojima se zaključuje o modulu neprekidnosti ili njenog izvoda dao je De La Vallée Poussin [55].

4. Neka je $T_n(f)$ $(n = 1,2,\dots)$ neki postupak aproksimacije koji svakoj funkciji $f \in C, \Omega(f)=2\pi$, pridružuje odredjeni trigonometrijski polinom $T_n(f,t)$ reda ne većeg od n. Takav postupak aproksimacije je, na primer, niz delimičnih suma $S_n(f)$ i niz aritmetičkih sredina $\sigma_n(f)$ Fourier-ovog reda ili niz trigonometrijskih polinoma najbolje aproksimacije $T^*_{n-1}(f)$ funkcije f.

Za odredjeni postupak aproksimacije $T_n(f)$, veličina

$$\Delta_C(f,T_n) = ||f-T_n(f)||_C = \max_t |f(t)-T_n(f,t)|$$

je aproksimacija funkcije f polinomom $T_n(f)$.

Neka je $M \in C$. Skup aproksimacija

$$(1.27) \qquad \{\Delta_C(f, T_n(f))\}_{f \in M}$$

karakteriše postupak aproksimacije $T_n(f)$ u odnosu na klasu M u celini. U vezi sa ovim skupom može se postaviti zadatak, da se za odredjeni postupak aproksimacije $T_n(f)$ i datu klasu funkcija M, skup (1.27) oceni s gornje strane. Takav iskaz tipa

$$f \in M \Rightarrow \Delta_C(f,T_n) \leq K\varphi(n)$$

zove se direktan stav.

Kod direktnih stavova postavlja se pitanje, takozvane, tačne konstante K za odredjenu klasu M, ili što je isto da se odredi veličina

$$E_C\left[M, T_n(f)\right] = \sup_{f\in M} \Delta_C\,(f, T_n(f)).$$

$E_C\left[M, T_n(f)\right]$ je najbolja aproksimacija klase M postupkom $T_n(f)$. Samo izuzetno moguće je ovu tačno izračunati te se zato pribegava odredjivanju njenog asimptotskog ponašanja ili njenog reda veličine kada $n \to \infty$.

& 1.4. FUNKCIJA СТЕНЛОВА

Definicija 1.4.1. Ako $f \in L$, funkcija f_h odredjena jednakošću

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt \quad (h > 0)$$

naziva se funkcijom Стенлова za funkciju f.

Očevidno da se $f_h(x)$ može zapisati takodje i u obliku

$$f_h(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt,$$

odakle se vidi da je f_h apsolutno neprekidna i, prema tome, skoro svuda je

$$(1.28)\qquad [f_h(x)]' = \frac{1}{2h}\,[f\,(x+h) - f(x-h)].$$

Primetimo da ako je sama funkcija f apsolutno neprekidna, onda $f' \in L$ i

$$[f'(x)]_h = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f'(t)dt = \frac{1}{2h}[f(x+h)-f(x-h)],$$

to jest, s obzirom na (1.28) s tačnošću do skupa mere nula

$$[f_h(x)\,]' = [f'(x)]_h,$$

i možemo u ovom slučaju pisati $f_h'(x)$, dopuštajući da se operacije diferenciranja i prelaz k funkciji Steklova mogu izvoditi bilo kojim redom.

Teorema 1.4.2. Ako $f \in L_p$ $(1 \leqslant p < \infty)$, onda je

$$(1.29) \qquad \|f_h\|_{L_p} \leqslant \|f\|_{L_p},$$

$$(1.30) \qquad \lim_{h\to 0} \|f_h - f\|_{L_p} = 0.$$

Dokaz. Usled uopštene nejednakosti Minkovskoga (v. [25], str. 299)

$$\|f_h\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt\right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} <$$

$$< \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} dt =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \|f\|_{L_p} \, dt = \|f\|_{L_p},$$

i nejednakost (1.29) je dokazana. Ponovo, koristeći uopštenu nejednakost Minkovskoga imaćemo

$$\|f_h - f\|_{L_p} = \left\{ \int_0^{2\pi} |f_h - f|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} = \left\{ \int_0^{2\pi} \left|\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} |f(x+t) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(x)| \, dt\right|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \left\{ \int_0^{2\pi} |f(x+t)-f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \|f(x+t) - f(x)\|_{L_p} \, dt.$$

Odmah dobijamo (1.30) ako iskoristimo teoremu Lebesque-a, dobro poznatu u teoriji funkcija, koja utvrdjuje da za, bilo koju funkciju $f \in L_p$ (vidi [59] str. 500),

$$\lim_{t\to 0} \|f(x+t) - f(x)\|_{L_p} = 0.$$

Na kraju ukažimo na neke procene funkcije Стеклова vezane s modulom neprekidnosti.

Teorema 1.4.3. Ako $f \in L_p$ $(1 \leq p < \infty)$ i f_h - funkcija Steklova za f, onda je

$$(1.31) \qquad \|f-f_h\|_{L_p} \leq \omega(f,h)_p,$$

$$(1.32) \qquad \|f_h'\|_{L_p} \leq \frac{1}{h}\omega(f,h)_p.$$

Dokaz. Nejednakost (1.31) sledi iz dobijene nejednakosti

$$\|f-f_h\|_{L_p} \leq \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \|f(x+t) - f(x)\|_{L_p} dt,$$

prilikom dokaza teoreme 1.4.3. i definicije modula neprekidnosti $\omega(f,\delta)_p$. Dalje, kako je

$$f_h'(x) = \frac{1}{2h} [f(x+h) - f(x-h)]$$

to usled (1.2) i (1.6)

$$\|f_h'\|_{L_p} = \frac{1}{2h} \|f(x+h)-f(x-h)\|_{L_p} \leq \frac{1}{2h} \omega(f,2h)_p \leq \frac{1}{h} \omega(f,h)_p$$

to jest, dobija se (1.32).

G L A V A 2

Osnovni rezultat radova [16] i [17] В. Т. Гаврилюн С.Б. Стечнина glasi:

Neka je $a < c < b$, $\varphi(t)$ - sumabilna funkcija na $[a,b]$, $\varphi(t) \geqslant 0$ na $[a,c]$, $\varphi(t) \leqslant 0$ na $[c,b]$,

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t)dt, \qquad F(b) = 0$$

$$(2.1) \quad M(\varphi,\delta) = \sup_{f \quad H[\delta]} \left| \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt \right|.$$

Tada za bilo koje δ, $\frac{1}{2}(b-a) \leqslant \delta \leqslant b-a$, važi jednakost

$$M(\varphi,\delta) = \max\,(\eta, F(c))$$

gde je

$$\eta = \max_{a \leqslant x \leqslant b-\delta} (F(x)+F(x+\delta)).$$

Mi ćemo u ovoj glavi gornji rezultat uopštiti u dva pravca. Tačnu gornju granicu (supremum) vrednosti funkcionala

$$L(f) = L_F(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ d\,F(x)$$

na klasi $\overline{H}[\delta]$ odredićemo za svako $\delta > 0$ i za zvonaste funkcije F (v. def. 2.1.i), pri čemu ćemo integral podrazumevati kao nesvojstveni apsolutno konvergentan Riemann-Stieltjes-ov integral (v. [22]).

& 2.1. O GORNJOJ GRANICI FUNKCIONALA

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\, F$$

Definicija 2.1.1. Funkciju F, definisanu na brojnoj pravoj $(-\infty, +\infty)$, $F(x) = \frac{F(x+0)+F(x-0)}{2}$, zvaćemo zvonastom ako postoji takav broj a da je F monotona na poluintevalima $(-\infty, a]$ i $[a, +\infty)$ (ne obavezno strogo), i $F(x) \to 0$ za $|x| \to +\infty$.

Teorema 2.1.2. Neka je F(x) - zvonasta funkcija i δ bilo koji fiksiran pozitivan broj. Tada je

$$(2.2) \qquad \sup\left\{ \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dF(x) \right| : f \in \overline{H}[\delta] \right\} = \sup_{x} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(x+\nu\delta)|$$

Dokaz. Pretpostavimo da je ispunjen uslov

$$(2.3) \qquad \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(\nu)| < +\infty$$

Primetimo da u (2.3) stoji znak apsolutne vrednosti jer po definiciji funkcija F može biti svuda pozitivna ili svuda negativna. Kako je F -zvonasta funkcija, to je uslov (2.3) potreban i dovoljan da di supremum na desnoj strani u (2.2) bio konačan. Ako (2.3) nije ispunjeno onda za funkciju $f(x) = \frac{x}{\delta}$, koja, očevidno pripada $\overline{H}[\delta]$ je

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\, F(x) \right| = +\infty ,$$

i leva i desna strana u (2.2) su istovremeno jednake $+\infty$, i teorema i u tom slučaju važi.

Ograničićemo se na funkcije $f \in \overline{H}[\delta]$ za koje je $f(0) = 0$, jer ako je, recimo, $f(0) = c$, tada za funkciju $g(x) = f(x) - c$ je $g(0) = 0$, $g \in \overline{H}[\delta]$ i zbog $\int_{-\infty}^{\infty} dF = 0$ je

$$\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\, F = \int_{-\infty}^{\infty} g\, d\, F.$$

Isto tako, ne ograničavajući opštost, smatraćemo da je

$$(2.4)\qquad F(x) \leqslant 0 \quad i \quad \min_x F(x) = F(0).$$

Ako je F prekidna zvonasta funkcija, tada je očevidno funkcija Стеклова F_h:

$$F_h(x) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} F(x+t)\, dt,$$

neprekidna funkcija. Funkcija G_h definisana jednakošću

$$G_h(x) = \begin{cases} F_h(x), & |x| > h \\ \frac{1}{2h}(F_h(-h)(h-x) + F_h(h)(h+x), & |x| \leqslant h \end{cases}$$

je neprekidna funkcija, a da je uz to i zvonasta vidi se iz implikacije

$$F_h'(x) = \frac{1}{2h}\,(F(x+h) - F(x-h)) \Longrightarrow$$

$$\operatorname{sign} F_h'(x) = \operatorname{sig} n\, F'(x), \quad |x| > h,$$

i njene linearnosti za $|x| \leqslant h$.

Jasno je da je

$$\lim_{h\to 0} G_h = F(x),$$

odakle je

$$(2.5)\quad \lim_{h\to 0} \max_x \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |G_h(x+\nu\delta)| = \sup_x \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(x+\nu\delta)|.$$

Kako je

$$\lim_{h\to 0} \operatorname{var}\, (F_h - G_h : x \in (-\infty, +\infty)) = 0$$

onda je za svako $f \in \overline{H}\,[\delta]$

$$(2.6)\quad \lim_{h\to 0} \Big(\int_{-\infty}^{\infty} f\, d\, G_h - \int_{-\infty}^{\infty} f\, d\, F_h \Big) = 0.$$

Uslov (2.3) je ekvivalentan uslovu

$$(2.7) \quad \int_{\infty}^{\infty} |x d F(x)| < +\infty,$$

odakle sledi da se za svako $\varepsilon > 0$ može naći takav broj $a > 0$ da je

$$(2.8) \quad \frac{1}{\delta} \int_{|x|>a} |x \, d \, F(x)| < \varepsilon.$$

Imajući u vidu da funkcija $g = f - f_h \in \overline{H}[\delta]$, $g(0) = 0$, $|g(x)-g(0)| \leqslant |\frac{x}{\delta}|$ i

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, d \, F_h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) \, d \, F(x)$$

dobijamo iz (2.7), pri proizvoljnom $h \in (0,1)$, da je

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d \, F(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) d \, F_h(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, d \, F(x) - \right.$$

$$\left. - \int_{-\infty}^{\infty} f_h(x) \, d \, F(x) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - f_h(x)) dF(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |(f(x) -$$

$$- f_h(x)) dF(x)| = \int_{|x| \leqslant a} |(f(x) - f_h(x)) dF(x)| + \int_{|x|>a} |(f_h(x) -$$

$$- f_h(x)) dF(x)| \leqslant ||f - f_h||_{C[-a,a]} \text{ var } (F(x) \colon x \in [-a,a]) + \varepsilon.$$

S obzirom da je

$$\lim_{h \to 0} ||f - f_h||_{C[-a,a]} = 0,$$

a ε proizvoljno to je

$$(2.9) \quad \lim_{h \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dF_h(x) \right) = 0.$$

Iz (2.6) i (2.9) dobijamo

$$(2.10) \quad \lim_{h \to 0} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dF(x) - \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dG_h(x) \right) = 0.$$

Jednakosti (2.5) i (2.10) dozvoljavaju nam da pri dokazu zvonastu funkciju F možemo smatrati neprekidnom.

Neka je $M[\delta]$ klasa neopadajućih (radi odredjenosti neprekidnih s desna) funkcija g na osi $(-\infty, +\infty)$ koje zadovoljavaju sledeće uslove:

$$(2.11)\qquad dg(x+\delta) = dg(x),\ \operatorname{var}\{g:[x,x+\delta)\} \leqslant 1,\quad x \in (-\infty, +\infty).$$

Ako $g \in M[\delta]$, onda stavljajući

$$\Phi(x) = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(x+\nu\delta) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(x+\nu\delta)|$$

i uzimajući u obzir (2.11) dobijamo

$$(2.12)\qquad -\int_{\infty}^{\infty} F(x)dg(x) = -\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{(\nu-\frac{1}{2})\delta}^{(\nu+\frac{1}{2})\delta} F(x)dg(x) =$$

$$= \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})} F(\nu\delta+x)\, dg(\nu\delta+x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})} F(\nu\delta+x)dg(x) =$$

$$= \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})} \Big(-\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu\delta+x)\Big)dg(x) = \int_{[-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2})} \Phi(x)dg(x) \leqslant$$

$$\leqslant \max_x \Phi(x)\ \operatorname{var}\Big\{g:\ [-\tfrac{\delta}{2},\ \tfrac{\delta}{2})\Big\} \leqslant \max_x \Phi(x).$$

Iz $g \in M[\delta]$ proizilazi da je $g(x) = O(x)$ pri $|x| \to \infty$, što zajedno s (2.3) daje procenu

$$g(x)\ F(x) = O(|x|\ F(x)) \to 0\ (|x| \to \infty).$$

Otuda i iz (2.12), koristeći se parcijalnom integracijom (vid. [36]), dobijamo

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\ d\,F(x) \leqslant \max_x \Phi(x).$$

Fiksiramo sada neku funkciju $f \in \bar{H}[\delta]$, za koju je kao što smo već na početku rekli $f(0) = 0$, i procenimo integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\, F(x).$$

Neka je

$$f^{+} = \max\,(f,0),\quad f^{-} = \min\,(f,0)$$

i

$$f^{*}(x) = \begin{cases} f^{+}(x) \text{ za } x \geqslant 0 \\ f^{-}(x) \text{ za } x < 0 \end{cases}$$

Očevidno f^* je neprekidna funkcija i za svako x_1, x_2

$$|f^*(x_1) - f^*(x_2)| \leqslant |f(x_1) - f(x_2)|,$$

to jest $f^* \in \bar{H}[\delta]$. Jasno je da važi nejednakost

$$(2.13)\qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)dF(x).$$

Neka je

$$g(x) = \left[\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2}\right] + h\left(x - \left[\frac{x}{\delta} + \frac{1}{2}\right]\delta\right),$$

gde je

$$h(x) = \begin{cases} \max\left\{f^{+}(t):\ 0 \leqslant t \leqslant x\right\},\ x \in \left[0, \frac{\delta}{2}\right), \\ \min\left\{f^{-}(t):\ x \leqslant t \leqslant 0\right\},\ x \in \left[-\frac{\delta}{2}, 0\right], \end{cases}$$

a $[y]$ označava ceo deo broja y.

Kako je neprekidna funkcija h monotona rastuća i

$$|h(x_2) - h(x_1)| \leqslant 1,\quad x_1, x_2 \in \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right),$$

to je s obzirom na definiciju funkcije g, $g \in M[\delta]$.

Dokažimo da je

$$(2.14)\qquad g(x) \geqslant f^{+}(x)\ (x \geqslant 0);\ g(x) \leqslant f^{-}(x)\ (x < 0).$$

Uslov (2.14) je očevidno ispunjen na otsečku $\left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right)$. Razmotrimo slučaj kada je $x \geqslant \frac{\delta}{2}$. Pri tome možemo smatrati da je

$f^+(x) = f(x)$ jer u suprotnom slučaju $f^+(x) = 0$ i procena $g(x) \geq 0 = f^+(x)$ je očevidna. Neka je prirodan broj ν odredjen iz uslova $x \in [(\nu - \frac{1}{2})\delta, (\nu + \frac{1}{2})\delta)$. Tada je

$$g(x)-f^+(x) = \nu+h(x-\nu\delta)-f(x) = (\nu + f(\xi)-f(\xi+\nu\delta)) + (h(\xi)-f(\xi))$$

gde je $\xi = x-\nu\delta$. Oba izraza u zagradama poslednje jednakosti na desnoj strani su nenegativni; prvi zbog $f \in \overline{H}[\delta]$ i nejednakosti

$$|f(\xi+\nu\delta) - f(\xi)| = |f(\xi+\nu\delta) - f(\xi+(\nu-1)\delta) + \ldots + f(\xi+\delta) - f(\delta)| \leq$$
$$\leq |f(\delta+\nu\delta) - f(\xi+(\nu-1)\delta)| + \ldots + |f(\xi+\delta) - f(\delta)| \leq \nu,$$

a drugi, jer $\xi \in [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$ povlači

$$h(\xi) \geq f^+(\xi) \geq f(\xi).$$

Prema tome $g(x) \geq f^+(x)$ za $x \geq 0$. Analogno se dokazuje da je

$$g(x) \leq f^-(x) \text{ pri } x < 0.$$

Imajući u vidu (2.14) nejednakost

$$(2.15) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)\, d\,F(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\,F(x).$$

je očevidna.

Iz (2.13) i (2.15) sledi

$$(2.16) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, d\,F(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} g(x) dF(x) \leq \max_x \Phi(x).$$

S druge strane, neka je ξ bilo koja tačka u kojoj $\Phi(x)$ dostiže maksimum. Funkcija g definisana jednakošću

$$g(x) = \left[\frac{x-\xi}{\delta}\right]$$

očevidno pripada $M[\delta]$ i koristeći parcijalnu integraciju dobijamo (v. [3] i [36]).

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, d\, F(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dg(x) =$$

$$= - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu\delta+\xi)(g(\nu\delta+\xi+0) - g(\nu\delta+\xi-0)) =$$

$$= - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(\nu\delta+\xi) = \Phi(\xi) = \max_x \Phi(x).$$

Ispravljajući funkciju $g(x)$ možemo dobiti neprekidnu funkciju

$$f_\eta(x) = \begin{cases} \nu-1, x \in [\xi+(\nu-1)\delta,\ \xi+\nu\delta-\varepsilon) \\ \frac{1}{\eta}(-\xi-\nu\delta)+\nu,\ x \in [\xi+\nu\delta-\varepsilon,\ \xi+\nu\delta),\ 0<\eta<\delta, \nu\in D, \end{cases}$$

koja pripada $\overline{H}\,[\delta]$. Kako se za svako $\varepsilon > 0$ može naći takvo $\eta>0$ da je

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\, [f_\eta(x) - g(x)] > -\varepsilon$$

to je koristeći parcijalnu integraciju

$$(2.17) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f_\eta(x)\, d\, F(x) = - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d\, f_\eta(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, d(f_\eta(x)-g(x)) - \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\, dg(x) \geqslant$$

$$\geqslant \Phi(\xi) - \varepsilon = \max_x \Phi(x) - \varepsilon.$$

Usled proizvoljnosti ε iz (2.16) i (2.17) sledi tvrdjenje teoreme 2.1.1.

<u>Primedba 2.1.2.</u> Neka je $F(x)$ - neprekidna zvonasta funkcija koja zadovoljava uslov (2.3) i neka je

$$E = E(F,\delta) = \left\{ x:\ \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(x+\nu\delta)| = \max_t \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} |F(t+\nu\delta)| \right\}.$$

Tada je supremum na levoj strani u (2.2) "dostignut" za svaku funkciju $g(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$ koja monotono neopada, neprekidna je s desna i zadovoljava uslove

$$d\, g(x+\delta) = d\, g(x), \quad \operatorname{var}\left\{ g:\ [x,\ x+\delta) \right\} = 1$$

$$\operatorname{supp} d\, g(x) \subset E.$$

Iskazi В. Т. Гаврилюк i С. Б. Стечкина i naše Teoreme 2.1.1. imaju različite oblike. Dokažimo da iz tvrdjenja teoreme 2.1.1. slede njihovi rezultati.

Produžavajući funkciju

$$F(x) = \int_a^x \varphi(t)\,dt, \quad F(b) = 0$$

na celu brojnu pravu tako da je

$$F(x) \equiv 0 \text{ za } x \in (-\infty, a) \cup (b, \infty),$$

ona postaje neprekidna zvonasta funkcija i (2.1) dobija oblik

$$M(\varphi,\delta) = \sup_{f\, H[\delta]} \left| \int_a^b f(t)\,\varphi(t)\,dt \right| = \sup_{f\, \overline{H}[\delta]} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dF(t) \right|,$$

odakle je s obzirom na teoremu 2.1.1.

$$M(\varphi,\delta) = \max_x \sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} F(x+\nu\delta).$$

Kako je za svako δ, $\frac{1}{2}(b-a) \leq \delta \leq b-a$, i za svako $x \in [a,b]$ $x+\nu\delta \notin [a,b]$ za $|\nu| \geq 2$ to je

$$M(\varphi,\delta) = \max_{x\in[a,b]} (F(x-\delta) + F(x) + F(x+\delta)).$$

Imajući u vidu da je za $x \in [a, b-\delta]$ $x-\delta \leq a$, za $x \in [a+\delta, b]$, $x+\delta \geq b$, za $x \in [b-\delta, a+\delta]$ $x-\delta \leq a$ i $x+\delta \geq a$ i da funkcije

$$F(x-\delta) + F(x) \quad (x\in[a+\delta,b]), \quad F(x+\delta)+F(x)(x \in [a,b-\delta])$$

uzimaju iste vrednosti to je

$$M(\varphi,\delta) = \max \Big[\max_{x\in[a,b-\delta]} (F(x-\delta)+F(x)+F(x+\delta)),$$

$$\max_{x\in[b-\delta,a+\delta]} (F(x-\delta)+F(x)+F(x+\delta)), \quad \max_{x\in[a+\delta,b]} (F(x-\delta)+F(x)+F(x+\delta))\Big] =$$

$$= \max\Big[\max_{x\in[a,b-\delta]}(F(x)+F(x+\delta)),\ \max_{x\in[b-\delta,a+\delta]}F(x),$$

$$\max_{x\in[a+\delta,b]}(F(x-\delta)+F(x))\Big] =$$

$$= \max\Big[\max_{x\in[a,b-\delta]}(F(x)+F(x+\delta),\ \max_{x\in[b-\delta,a+\delta]}F(x)\Big].$$

Ako $c \in [b-\delta,\ a+\delta]$ tada je

$$\max_{x\in[b-\delta,a+\delta]} F(x) = F(c),$$

a u slučaju da $c \in [a,\ b-\delta]$

$$\max_{x\in[a,b-\delta]}(F(x) + F(x+\delta)) \geq F(c)$$

i

$$M(\varphi,\delta) = \max(\max_{x\in[a,b-\delta]}(F(x)+F(x+\delta),\ F(c)) = \max\ (n,\ F(c))$$

čime je dokaz završen.

Ilustracija Teoreme 2.1.1. predstavlja

Primer 2.1.3. Neka je $[x]$ - ceo deo broja x, $\{x\} = x - [x]$, a $<x> = \min(\{x\}, 1-\{x\})$, rastojanje x od njemu najbližeg celog broja. Ako je

$$F(x) = \begin{cases} \cos x \ \text{pri}\ |x| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \quad \text{pri}\ |x| \geq \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

tada je

$$(2.18)\qquad \sup_{f\ \overline{H}[\delta]} \Big| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dF(x) \Big| = \begin{cases} \dfrac{\cos(\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} >)}{\sin\frac{\delta}{2}} & \text{pri } 0<\delta\leq \frac{2\pi}{3}, \\ 1 & \text{pri } \quad \delta\geq \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $0 < \delta \leqslant \pi$ i

$$\Phi(x) = \Phi_\delta(x) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} F(x + \nu\delta).$$

Prostom transformacijom dobijamo

$$(2.19)\quad (2 \sin \tfrac{\delta}{2})\, \Phi_\delta(x - \tfrac{\pi}{2}) = 2 \sin \tfrac{\delta}{2} \sum_{\nu:\, 0 \leqslant x+\nu\delta \leqslant \pi} \sin(x+\nu\delta) =$$

$$= \cos(x - ([\tfrac{x}{\delta}] + \tfrac{1}{2}\delta) - \cos(x + ([\tfrac{\pi - x}{\delta}] + \tfrac{1}{2})\delta) =$$

$$= \cos \delta(\left\{\tfrac{x}{\delta}\right\} - \tfrac{1}{2}) + \cos\delta(\left\{\tfrac{\pi - x}{\delta}\right\} - \tfrac{1}{2}) =$$

$$= 2 \cos(\tfrac{\delta}{2}\, l(x)) \cos(\tfrac{\delta}{2}\, m(x)),$$

gde je

$$l(x) = \left\{\frac{x}{\delta}\right\} + \left\{\frac{\pi - x}{\delta}\right\} - 1, \quad m(x) = \left\{\frac{x}{\delta}\right\} - \left\{\frac{\pi - x}{\delta}\right\}.$$

Lako je videti da je $l(x)$ - jednostavna funkcija (v. [3], str. 125) koja uzima najviše dve različite vrednosti: $\left\{\frac{\pi}{\delta}\right\}$ i $\left\{\frac{\pi}{\delta}\right\} - 1$, pri čemu u sredini svakog intervala gde je $l(x)$ konstanta, funkcija $m(x)$ uzima vrednost nula. Otuda i iz (2.19) dobijamo

$$\sin \tfrac{\delta}{2} \max_x \Phi_\delta(x - \tfrac{\pi}{2}) = \cos(\tfrac{\delta}{2} \min(\left\{\tfrac{\pi}{\delta}\right\}, 1 - \left\{\tfrac{\pi}{\delta}\right\}) = \cos(\tfrac{\delta}{2} < \tfrac{\pi}{\delta} >),$$

što usled teoreme 2.1.1. i dokazuje (2.18) pri $0 < \delta \leqslant \frac{2\pi}{3}$. Kako je pri $\frac{2\pi}{3} \leqslant \delta \leqslant \pi$, $< \frac{\pi}{\delta} > = \frac{\pi}{\delta} - 1$ to je $\cos \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} > = \sin \frac{\delta}{2}$. S obzirom na teoremu 2.1.1. dobijamo (2.18) i pri $\frac{2\pi}{3} \leqslant \delta \leqslant \pi$.

Ako je pak $\delta > \pi$, onda je $\Phi_\delta(x) = F(x)$, $x \in [-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2})$. Kako je $\max_x F(x) = 1$ to iz teoreme 2.1.2. sledi (2.18) i za $\delta > \pi$.

Primedba 2.1.4. Neka je $0 < \delta \leq \pi$ i ξ - jedan od brojeva koji zadovoljava dve jednačine:

$$\left\{\frac{\xi}{\delta} - \frac{\pi}{2\delta}\right\} - \left\{\frac{\xi}{\delta} + \frac{\pi}{2\delta}\right\} = 0, \quad \left\{\frac{\xi}{\delta} - \frac{\pi}{2\delta}\right\} + \left\{\frac{\xi}{\delta} + \frac{\pi}{2\delta}\right\} = 1 + \left\langle\frac{\pi}{\delta}\right\rangle .$$

Tada je s obzirom na primedbu 2.1.2. supremum u levoj strani (2.18) "dostignut" za funkciju oblika

$$g(x) = \left[\frac{x - \xi}{\delta}\right] + C$$

gde je C proizvoljna konstanta.

G L A V A 3

& 3.1. O GORNJOJ GRANICI FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA KLASA $W^rH_k[\delta]$ I $W^r\tilde{H}_k[\delta]$

1. Neka funkcija $f \in C$ a

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\, dx,$$

n fiksiran prirodan broj, njeni Fourier-ovi koeficijenti. Ako $f \in W^rH_1^\omega$, $r = 0,1,\ldots$, lako se pokazuje da je

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos \left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) dx,$$

(3.1)

$$b_n(f) = \frac{1}{\pi n^r} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin \left(nx + \frac{r\pi}{2}\right) dx.$$

Lebesque [27] je 1910. godine za Lipschitz-ovu klasu H_1^α dokazao da je

$$\sup_{f \in H_1^\alpha} a_n(f) = \sup_{f \in H_1^\alpha} b_n(f) = \frac{2^{1+\alpha}}{\pi n^\alpha} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^\alpha \sin x\, dx$$

Iz njegovog rezultata i iz (3.1), ako je $\omega(\delta)$ konveksni modul neprekidnosti, sledi da je

$$\sup_{f \in H_1^\omega} a_n(f) = \sup_{f \in H_1^\omega} b_n(f) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx$$

i

$$\sup_{f \in W^r H_1^\omega} a_n(f) = \sup_{f \in W^r H_1^\omega} b_n(f) = \frac{2}{\pi n^r} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx.$$

С. М. Никольский je u radu [39] dokazao da je za bilo koji modul neprekidnosti $\omega(\delta)$ za $n = 1,2,\ldots$, $r = 0,1,2,\ldots$, ispunjena jednakost:

$$(3.2) \quad \sup_{f \in W^r H_1^\omega} a_n(f) = \sup_{f \in W^r H_1^\omega} b_n(f) = \frac{2}{\pi n^r} \theta_n \int_0^{\pi} \omega\left(\frac{2x}{n}\right) \sin x \, dx$$

gde je $\frac{1}{2} \leq \theta_n \leq 1$, a u radu А. В. Ефимова [13] granice za θ_n u ovoj proceni su poboljšane i pokazano je da je $\frac{2}{3} \leq \theta_n \leq 1$. Uz to u [13] utvrdjeno je, da se granica $\frac{2}{3}$ ne može zameniti većom i da se upravo dostiže za modul neprekidnosti $\omega^*(\delta)$ koji ima oblik Kantorove stepenaste funkcije.

А. В. Ефимов je, specijalno, za klasu $2\,H_2^1$ u [14] dokazao da je

$$\sup_{f \in 2 \cdot H_2^1} a_n(f) = \frac{4}{\pi n} C_0 \,(n = 1,2,\ldots,),$$

gde je $1{,}1335 < C_0 < 1{,}255$.

Na klasama $H[\delta]$, mi ćemo tačno izračunati gornje granice Fourier-ovih koeficijenata:

$$A_n(\delta) = \{\sup a_n(f) : \ f \in H[\delta]\}$$

$$B_n(\delta) = \{\sup b_n(f) : \ f \in H[\delta]\}$$

za svako $\delta > 0$.

Naime, mi ćemo ovde dati novi bitno kraći dokaz rezultata Teoreme 1 iz ([31], gl. 3) koji će se zasnivati na Teoremi 2.1.1 odnosno primeru 2.1.3. Inače dokaz u [31] je elementaran u kome smo koristili osobine Dirihleovog, i njemu sličnog, jezgra, pri čemu smo vrednosti za δ razbijali na četiri disjunktne klase.

Primetimo da je Lebesque u [27] dokazao da su veličine $A_n(\frac{\pi}{n})$ i $B_n(\frac{\pi}{n})$ jednake $\frac{2}{\pi}$.

Teorema 3.1.1. Neka je n fiksiran prirodan broj. Tada je

$$A_n(\delta) = B_n(\delta) = \varphi(n\delta) \tag{3.3}$$

gde je

$$\varphi(\delta) = \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{\delta}{2}<\frac{\pi}{\delta}>}{\pi\sin\frac{\delta}{2}}, & 0 < \delta \leq \frac{2\pi}{3} \\ \dfrac{2}{\pi}, & \delta > \frac{2\pi}{3} \end{cases} \tag{3.4}$$

Dokaz. Iz identičnosti

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-\frac{\pi}{2n})\sin nx\,dx$$

i činjenice da iz $f(x)\in H[\delta]$ sledi da $f(x-\frac{\pi}{2n})\in H[\delta]$ dobija se jednakost

$$A_n(\delta) = B_n(\delta) \tag{3.5}$$

Ako funkcija $f\in H[\delta]$ tada je i funkcija

$$f_1(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n})$$

iz $H[\delta]$. Zaista, iz $|x_1-x_2|\leq\delta$ se dobija

$$|f_1(x_1)-f(x_2)| = \frac{1}{n}\Big|\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_1+\frac{2k\pi}{n})-f(x_2+\frac{2k\pi}{n})\Big|\leq$$

$$\leq \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\Big|f(x_1+\frac{2k\pi}{n})-f(x_2+\frac{2k\pi}{n})\Big|\leq\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}1=1,$$

to jest, $f_1\in H[\delta]$.

Kako je

$$f_1(x+\frac{2\pi}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2\pi}{n}+\frac{2k\pi}{n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n}) = f_1(x),$$

to je $f_1(x)$ $\frac{2\pi}{n}$ - periodička funkcija.

Imajući u vidu da je

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{n}\int_{-\pi}^{\pi}(\sum_{k=0}^{n-1} f(x+\frac{2k\pi}{n}))\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx,$$

to ćemo se prilikom odredjivanja veličine $B_n(\delta)$ ograničiti na $\frac{2\pi}{n}$ - periodične funkcije. Kako je s $\frac{2\pi}{n}$ - periodičkom funkcijom f i funkcija $f(x)\sin nx$ $\frac{2\pi}{n}$ - periodička to je

$$(3.6)\qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{n}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{n}}^{\frac{\pi}{n}} f(x)\sin nx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\frac{x}{n})\sin x\,dx.$$

Iz $|x_1 - x_2| \leqslant n\delta$ sledi $|\frac{x_1}{n} - \frac{x_2}{n}| \leqslant \delta$, što pokazuje da funkcija $f(\frac{x}{n})$ pripada klasi $H[n\delta]$. Imajući to u vidu i jednakost (3.6) dobijamo

$$B_n(f) = \sup_{f\in H[\delta]} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \sup_{f\in H[n\delta]}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx,$$

to jest,

$$(3.7)\qquad B_n(\delta) = B_1(n\delta).$$

Time smo problem sveli na izračunavanje supremuma prvog Fourier-ovog koeficijenta $b_1(f)$. Dalje, pri odredjivanju $B_1(\delta)$ dovoljno je ograničiti se na neparne funkcije $f \in H[\delta]$. Jer, ako $f \in H[\delta]$ tada je funkcija

$$f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

iz $H[\delta]$, neparna je i

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(x)\sin x\,dx.$$

Kako je

$$b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)\sin x\,dx$$

to je

$$(3.8)\qquad \sup_{f\in H[\delta]} b_1(f) \leqslant \sup_{f\in H[\delta]} \frac{1}{\pi}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\sin x\,dx\right| +$$

$$+\sup_{f\in H[\delta]}\left|\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x+\pi)\sin x\,dx\right|.$$

S obzirom da s funkcijom $f(x)\in H[\delta]$ i funkcija $f(x+\pi)\in H[\delta]$, nejednakost (3.8) i primer 2.1.3. daju

$$(3.9)\qquad B_1(\delta) \leqslant \varphi(\delta).$$

S druge strane, neka je 2π - periodička funkcija h definisana na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ jednakostima

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x\in[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \\ -g(x-\pi), & x\in[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}], \end{cases}$$

gde je (vid. primedbu 2.1.4.)

$$g(x) = \left[\frac{x-\xi}{\delta}\right] - \left[\frac{-\xi}{\delta}\right].$$

Prema tome usled primedbe 2.1.4.

$$(3.10) \qquad \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} h(x)\sin x\,dx = \varphi(\delta).$$

Iz (3.9) i (3.10) sledi tvrdjenje teoreme 3.1.1.

Primedba 3.1.2. Funkcija φ može biti napisana u sledećem obliku

$$(3.11)\ \varphi(\delta)\begin{cases} \dfrac{2\sin(s+\frac{1}{2})\delta}{\pi\sin\frac{\delta}{2}} & \text{za } \dfrac{2\pi}{4s+3} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{2\pi}{4s+1},\ s\in N, \\ \dfrac{2\sin s\delta}{\sin\frac{\delta}{2}} & \text{za } \dfrac{2\pi}{4s+1} \leqslant \delta \leqslant \dfrac{2\pi}{4s-1},\ s\in N, \\ \dfrac{2}{\pi} & \text{za } \delta \geqslant \dfrac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

kao što je to učinjeno u([31], str. 32) i [32].

Zaista, ako je $\frac{2\pi}{4s+3} \leqslant \delta \leqslant \frac{2\pi}{4s+2}$ onda je $2s+1 \leqslant \frac{\pi}{\delta} \leqslant 2s+\frac{3}{2}$, $[\frac{\pi}{\delta}] = 2s+1$, $\{\frac{\pi}{\delta}\} = \frac{\pi}{\delta} - 2s - 1 \leqslant \frac{1}{2}$, $1-\{\frac{\pi}{\delta}\} = 2s+2-\frac{\pi}{\delta} \geqslant \frac{1}{2}$ i

$$(3.12) \qquad \cos\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} > = \sin(s+\frac{1}{2})\delta;$$

za $\frac{2\pi}{4s+2} < \delta \leqslant \frac{2\pi}{4s+1}$ je $2s+\frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{\delta} < 2s+1$, $[\frac{\pi}{\delta}] = 2s$, $\{\frac{\pi}{\delta}\} = \frac{\pi}{\delta} - 2s \geqslant \frac{1}{2}$, $1-\{\frac{\pi}{\delta}\} = 2s+1-\frac{\pi}{\delta} \leqslant \frac{1}{2}$, $<\frac{\pi}{\delta}> = 2s+1-\frac{\pi}{\delta}$ i

$$(3.13) \qquad \cos\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} > = \sin(s+\frac{1}{2})\delta;$$

za $\frac{2\pi}{4s+1} \leqslant \delta \leqslant \frac{2\pi}{4s}$ je $2s \leqslant \frac{\pi}{\delta} \leqslant 2s+\frac{1}{2}$, $[\frac{\pi}{\delta}] = 2s$, $\{\frac{\pi}{\delta}\} = \frac{\pi}{\delta} - 2s \leqslant \frac{1}{2}$,

$1-\{\frac{\pi}{\delta}\} = 2s+1-\frac{\pi}{\delta} \geqslant \frac{1}{2}$, $<\frac{\pi}{\delta}> = \frac{\pi}{\delta} - 2s$ i

$$(3.14) \qquad \cos\frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} > = \sin s\delta;$$

za $\frac{2\pi}{4s} < \delta \leqslant \frac{2\pi}{4s-1}$ je $2s - \frac{1}{2} \leqslant \frac{\pi}{\delta} < 2s$, $\left[\frac{\pi}{\delta}\right] = 2s - 1$, $\left\{\frac{\pi}{\delta}\right\} = \frac{\pi}{\delta} - 2s + 1 \geqslant \frac{1}{2}$,

$1 - \left\{\frac{\pi}{\delta}\right\} = 2s - \frac{\pi}{\delta} \leqslant \frac{1}{2}$, $< \frac{\pi}{\delta} > = 2s - \frac{\pi}{\delta}$ i

$$(3.15) \qquad \cos \frac{\delta}{2} < \frac{\pi}{\delta} > = \sin s\delta .$$

Iz (3.12), (3.13), (3.14) i (3.15) se dobija (3.11).

Teorema 3.1.3. Za fiksiran prirodan broj n važi asimptotska jednakost

$$(3.16) \qquad A_n(\delta) = B_n(\delta) \simeq \frac{4}{\pi n \delta}, \quad \delta \to 0.$$

Dokaz. Kako je za svako $\delta > 0$, $0 < \frac{\pi}{n\delta} \leqslant \frac{1}{2}$ to $\frac{n\delta}{2} < \frac{\pi}{n\delta} > \to 0$ za $\delta \to 0$. Otuda i iz teoreme 3.1.1. dobijamo da je

$$\lim_{\delta\to 0} \frac{B_n(\delta)}{\frac{4}{\pi n \delta}} = \lim_{\delta \to 0} \frac{\dfrac{2\cos\frac{n\delta}{2} < \frac{\pi}{n\delta} >}{\pi \sin \frac{n\delta}{2}}}{\frac{4}{\pi n\delta}} = 1,$$

to jest, važi (3.16).

Za veličine

$$A_n^r(\delta) = \sup\left\{ a_n(f) : f \in W^r H[\delta]\right\}$$

$$B_n^r(\delta) = \sup\left\{ b_n(f) : f \in W^r H[\delta]\right\}$$

važi

Teorema 3.1.4. Neka su n i r fiksirani prirodni brojevi. Tada je za svako $\delta > 0$.

$$(3.17) \qquad A_n^r(\delta) = B_n^r(\delta) = n^{-r}\ \varphi(n\delta),$$

gde je φ funkcija definisana jednakošću (3.4).

Dokaz. S obzirom da Fourier-ovi koeficijenti iz klase $W^r H[\delta]$ imaju reprezentaciju (3.1) iz teoreme 3.1.1. direktno se dobija (3.17).

Na isti način kao i teorema 3.1.3. dokazuje se

Teorema 3.1.5. Ako su n i r fiksirani prirodni brojevi tada važi asimptotska jednakost

$$A_n^r(\delta) = B_n^r(\delta) \simeq \frac{4}{\pi\,\delta\, n^{r+1}}, \quad \delta \to 0.$$

Primedba 3.1.6. Na početku smo rekli da je za bilo koji nekonveksni modul neprekidnosti A. B. Ефимов utvrdio da je u (3.2) $\frac{2}{3} \leq \theta_n \leq 1$ i da se donja granica $\frac{2}{3}$ dostiže za modul neprekidnosti $\omega^*(\delta)$ koji ima oblik Kantorove stepenaste funkcije. Tu činjenicu sada možemo izvesti iz teoreme 3.1.3. Za to je dovoljno razmotriti "prekidni modul neprekidnosti"

$$\Omega(\delta) = \begin{cases} 0, & \delta = 0 \\ 1, & \delta \in \left(0, \frac{2\pi}{3n}\right] \\ 2, & \delta > \frac{2\pi}{3n}. \end{cases}$$

Kako je $H^\Omega = H\left[\frac{2\pi}{3n}\right]$, a

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx = \frac{3}{2},$$

to usled teoreme 3.1.3. je

$$B_n^r\left(\frac{2\pi}{3n}\right) = \frac{2}{\pi n^r} = \frac{2}{\pi n^r}\cdot\frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Omega\left(\frac{2x}{n}\right)\sin x\,dx,$$

odakle sledi da je za modul neprekidnosti Ω, $\theta_n = \frac{2}{3}$.

Na klasama $H_k\,[\delta]$ odredićemo procene s gornje i donje strane za tačnu gornju granicu Fourier-ovih koeficijenata:

$$A_n^k(\delta) = \sup\left\{a_n(f):\ f \in H_k\,[\delta]\right\}$$

$$B_n^k(\delta) = \sup\left\{b_n(f):\ f \in H_k\,[\delta]\right\}.$$

Naime važi

Teorema 3.1.7. Neka je n - fiksiran prirodan broj. Tada je

$$(3.18)\qquad A_n^k(\delta) = B_n^k(\delta) = B_1^k(n\delta),\ \text{a}$$

$$(3.19)\qquad \frac{1}{2^k \sin^k \frac{\delta}{2}} \leqslant B_1^k(\delta) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k \sin \frac{\delta}{2}},\quad 0<\delta\leqslant\pi,$$

$$(3.20)\qquad \frac{1}{2^k} \leqslant B_1^k(\delta) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k},\quad \delta>\pi.$$

Dokaz. Na isti način kao i u teoremi 3.1.1. dokazuje se (3.18), čime smo problem sveli na razmatranje prvog Fourier-ovog koeficijenta $b_1(f)$.

Iz definicije 1.1.15. simetrične k-te razlike funkcije f,

$$\dot{\Delta}_h^k (f,t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f\left(t - \frac{kh}{2} + ih\right)$$

lako se proverava da je

$$(3.21)\qquad (-1)^k\ \dot{\Delta}_h^k(f,t) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f\left(t + \frac{kh}{2} - ih\right),$$

$$(3.22)\qquad \dot{\Delta}_h^k(\sin,t) = 2^k \sin^k \frac{h}{2} \sin\left(t + \frac{k\pi}{2}\right)$$

i

$$(3.23)\qquad \dot{\Delta}_h^k\left(\sin,t + \frac{k\pi}{2}\right) = (-1)^k\, 2^k \sin^k \frac{h}{2} \sin t.$$

Za $0 < \delta \leqslant \pi$, s obzirom na periodičnost funkcije f i jednakosti (3.21), (3.22) i (3.23)

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f,t) \sin\left(t + \frac{k\pi}{2}\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f\left(t - \frac{k\delta}{2} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + i\delta\right) \sin\left(t + \frac{k\pi}{2}\right)\right)dt = \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i}\binom{k}{i} f(t)\sin\left(t + \frac{k\pi}{2} + \frac{k\delta}{2} - i\delta\right)\right)dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (-1)^k\ \dot{\Delta}_\delta^k\left(\sin,t + \frac{k\pi}{2}\right)f(t)dt = 2^k\sin^k \frac{\delta}{2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt,$$

odakle je

(3.24) $$b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,dt = \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f,t)\sin(t + \frac{k\pi}{2})\,dt.$$

Iz ove jednakosti se dobija

$$b_1(f) \leqslant |b_1(f)| = \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\left|\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f,t)\sin(t + \frac{k\pi}{2})\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\Delta}_\delta^k(f,t)|\,|\sin(t + \frac{k}{2})|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\omega_k(f,\delta)}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} |\sin(t + \frac{k}{2})|\,dt = \frac{4\,\omega_k(f,\delta)}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}},$$

odakle sledi da je

(3.25) $$B_1^k(\delta) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \pi,$$

Za funkciju $g_1(t) = \dfrac{\sin t}{2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}$ je $\omega_k(g_1,\delta) = 1$, $0 < \delta \leqslant \pi$, to jest,

$$g_1 \in H_k[\delta],\ a$$

$$b_1(g_1) = \frac{1}{2^k \sin^k\frac{\delta}{2}},$$

što daje nejednakost

(3.26) $$B_1^k(\delta) \geqslant \frac{1}{2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}.$$

Iz (3.25) i (3.26) sledi (3.19).

Ako je $\delta > \pi$ tada $|t_1 - t_2| \leqslant \pi$ povlači $|t_1 - t_2| \leqslant \delta$, to jest, $H_k[\delta] \subset H_k[\pi]$. Prema tome za $\delta > \pi$

(3.27) $$B_1^k(\delta) \leqslant B_1^k(\pi) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k}.$$

Za $\delta > \pi$ i funkciju $g_2(t) = \frac{\sin t}{2^k}$, $\omega_k(g_2,\delta) = 1$, a

$$(3.28) \qquad b_1(g_2) = \frac{1}{2^k}.$$

Iz (3.27) i (3.28) dobija se procena (3.20).

Asimptotske formule za $B_n^k(\delta)$ i $A_n^k(\delta)$ kada $\delta \to 0$ u mogućnosti smo da damo samo u slučaju $k = 2$. Naime važi

Teorema 3.1.8. Ako je n fiksiran prirodan broj tada je

$$(3.29) \qquad A_n^2(\delta) = B_n^2(\delta) \simeq \frac{4}{\pi n^2 \delta^2}, \quad \delta \to 0.$$

Dokaz. Za 2π - periodičnu funkciju h definisanoj na $[-\pi,\pi]$ jednakošću

$$2\delta^2 h(t) = \begin{cases} t(t+\pi), t \in [-\pi, 0] \\ t(\pi - t), t \in [0, \pi] \end{cases}$$

je za $0 < \delta \leq \pi$, $\omega_2(h,\delta) = 1$, što se proverava ne kratkim računom. Kako je za funkciju $h \in H_2[\delta]$

$$b_1(h) = \frac{4}{\pi \delta^2}$$

to je s obzirom na jednakost (3.18)

$$(3.30) \qquad \frac{4}{\pi n^2 \delta^2} \leq A_n^2(\delta) = B_n^2(\delta), \qquad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}.$$

Iz jednakosti (3.18) i nejednakosti (3.19) dobijamo

$$A_n^2(\delta) = B_n^2(\delta) \leq \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{n\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}$$

što zajedno s (3.30) daje procenu

$$(3.31) \qquad \frac{4}{\pi n^2 \delta^2} \leq A_n^2(\delta) = B_n^2(\delta) \leq \frac{1}{\pi \sin^2 \frac{n\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}.$$

Lako se proverava da iz (3.31) sledi (3.29).

Neka je sada

$$A_n^{k,r}(\delta) = \sup\{a_n(f): \ f \in W^r H_k[\delta]\},$$

$$B_n^{k,r}(\delta) = \sup\{b_n(f): \ f \in W^r H_k[\delta]\}.$$

Za ove veličine važi

Teorema 3.1.9. Neka su n i r fiksirani prirodni brojevi. Tada je

$$A_n^{k,r}(\delta) = B_n^{k,r}(\delta) = n^{-r} B_1^{k,o}(n\delta)$$

$$\frac{1}{2^k \sin^k \frac{\delta}{2}} \leqslant B_1^{k,o}(\delta) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k \sin^k \frac{\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leqslant \pi,$$

$$\frac{1}{2^k} \leqslant B_1^{k,o}(\delta) \leqslant \frac{4}{\pi 2^k}, \quad \delta > \pi.$$

Dokaz se izvodi koristeći teoremu 3.1.7. i reprezentaciju (3.1) Fourier-ovih koeficijenata iz klasa $W^r H_k[\delta]$.

2. Neka su

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt.$$

kompleksni Fourier-ovi koeficijenti funkcija $f \in \tilde{C}$, a

$$C_n^{k,r}(\delta) = \sup\{|C_n(f)|: \ f \in W^r \tilde{H}_k[\delta]\}.$$

Za veličine $C_n^{k,r}(\delta)$ važi

Teorema 3.1.10. Ako su n i k fiksirani prirodni brojevi, a r fiksiran prirodni broj ili nula, tada je

$$C_n^{k,r}(\delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^k n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{2^k n^r}, & \delta > \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Dokaz. Uzimajući u obzir (3.21) i jednakost

$$\dot{\Delta}_h^k(e^{-int},t) = (-2i)^k \, e^{-int} \sin^k \frac{nh}{2}$$

imamo, usled periodičnosti funkcije $f \in W^r\tilde{H}_k[\delta]$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_h^k(f,t) \, e^{-int} \, dt = \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t - \frac{kh}{2} + jh)\Big) e^{-int} \, dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(t)\Big) e^{-in\,(t + \frac{kh}{2} - jh)} dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-1} \binom{k}{j} e^{-in(t + \frac{kh}{2} - jh)}\Big) f(t) dt =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (2i)^k \, e^{-int} \sin^k \frac{nh}{2} \, f(t) \, dt,$$

to jest, za $0 < \delta \leq \frac{\pi}{n}$,

$$(3.22) \quad C_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} \, dt = \frac{1}{2\pi (2i)^k \sin^k \frac{n\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f,t) e^{-int} dt$$

Kako $f \in W^r\tilde{H}_k[\delta]$ to parcijalnom integracijom dobijamo da je

$$C_n(f) = \frac{1}{2\pi (in)^r} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(r)} \, e^{-int} \, dt,$$

što zajedno s (3.32) daje

$$(3.33) \quad C_n(f) = \frac{1}{2\pi \, (2i)^k \, (in)^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k \, (f^{(r)},t) e^{-int} \, dt,$$

odakle je

$$(3.34) \quad |C_n(f)| \leq \frac{1}{2^k \, n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \, .$$

Funkcija

$$\varphi(t) = \frac{e^{int}}{(2i)^k (in)^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n},$$

je iz $W^r \tilde{H}_k [\delta]$ jer je $\omega_k(\varphi^{(r)},\delta)_{\tilde{C}} = 1$, a

$$c_n(\varphi) = \frac{1}{(2i)^k (in)^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},$$

to jest,

$$(3.35) \qquad |c_n(\varphi)| = \frac{1}{2^k n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}.$$

Iz (3.34) i (3.35) sledi prvi deo tvrdjenja teoreme 3.1.10.

Kako je za $\delta > \frac{\pi}{n}$ $W^r \tilde{H}_k [\delta] \subset W^r \tilde{H}_k [\frac{\pi}{n}]$, to je za $f \in W^r \tilde{H}_k [\delta]$

$$(3.36) \qquad |c_n(f)| \leqslant \frac{1}{2^k n^r}.$$

Funkcija

$$\varphi_1(t) = \frac{e^{int}}{(2i)^k (in)^r}$$

je za $\delta > \frac{\pi}{n}$ iz $W^r\tilde{H}_k [\delta]$ jer je $\omega_k(\varphi_1^{(r)},\delta)_{\tilde{C}} = 1$, a

$$c_n(\varphi_1) = \frac{1}{(2i)^k (in)^r},$$

to jest,

$$(3.37) \qquad |c_n(\varphi_1)| = \frac{1}{2^k n^r}.$$

Iz (3.36) i (3.37) sledi i drugi deo tvrdjenja teoreme 3.1.10.

& 3.2. APROKSIMACIJE 2π - PERIODIČKIH FUNKCIJA FUNKCIJAMA KRAĆE PERIODE

U ovom paragrafu rešićemo zadatak o aproksimaciji 2π - periodičke funkcije u metrici C, funkcijama periode $\frac{2\pi}{k}$ (k je fiksiran prirodan broj veći od jedan), koji će nam biti potreban u & 3.3. prilikom odredjivanja

$$\sup\left\{b_n(f):\quad f\in W^rH\,[\delta]_{1}\right\}.$$

Drugim rečima, ako su φ neprekidne $\frac{2\pi}{k}$ - periodičke i f fiksirana neprekidna 2π - periodička funkcija, zadatak se sastoji u tome da se ispita veličina

$$\inf_{\varphi}\|f-\varphi\|_C.$$

Napomenimo, da ako su dve funckije različitih perioda, da bi smo našli njihovo rastojanje, u metrici C, dovoljno je naći njihovo rastojanje na najmanjem intervalu u kome se periode funkcija sadrže ceo broj puta. Tako, na primer, ako je $\Omega(f) = 2\pi$, $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}$, l i k su uzajamno prosti prirodni brojevi, tada je

$$\|f - \|_C = \|f - \|_{C[0,2\pi l]}.$$

Lema 3.2.1. Neka $f\in C$, $\Omega(f) = 2\pi$ i

$$\bar{f}_k(x) = \max_{0\leqslant s\leqslant k-1} f\left(x+\frac{2\pi}{k}s\right),\quad \underline{f}_k(x) = \min_{0\leqslant s\leqslant k-1} f\left(x+\frac{2\pi}{k}s\right),\ k,s\in N, k\geqslant 2.$$

Tada su $\bar{f}_k$ i $\underline{f}_k$ iz C i $\Omega(\bar{f}_k) = \Omega(\underline{f}_k) = \frac{2\pi}{k}$.

Dokaz. Činjenica da $f\in C$ ekvivalentna je tome da svakom $\varepsilon > 0$ odgovara $\delta(\varepsilon) > 0$ tako da

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon) \Longrightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

S obzirom na jednakost

$$\left|\left(x' + \frac{2\pi}{k}s\right) - \left(x'' + \frac{2\pi}{k}s\right)\right| = |x' - x''|$$

$$|\bar{f}_k(x') - \bar{f}_k(x'')| = |\max_{0\leq s\leq k-1} f(x' + \frac{2\pi}{k} s) - \max_{0\leq s\leq k-1} f(x'' + \frac{2\pi}{k})| \leq$$

$$\leq \max_{0\leq s\leq k-1} |f(x' + \frac{2\pi}{k} s) - f(x'' + \frac{2\pi}{k} s)| < \varepsilon ,$$

što znači da $\bar{f}_k \in C$. Kako je $\max f(x) = \min(-f(x))$, na isti način se utvrdjuje i da $\underline{f}_k \in C$.

Kako je $\Omega(f) = 2\pi$, to je

$$\bar{f}_k(x + \frac{2\pi}{k}) = \max_{0\leq s\leq k-1} f(x + \frac{2\pi}{k} + \frac{2\pi}{k} s) = \max_{0\leq s\leq k-1} f(x + \frac{2\pi}{k}(s+1)) =$$

$$= \max_{0\leq s\leq k-1} f(x + \frac{2\pi}{k} s) = \bar{f}_k(x),$$

to jest, $\Omega(\bar{f}_k) = \frac{2\pi}{k}$. Analogno je $\Omega(\underline{f}_k) = \frac{2\pi}{k}$.

<u>Teorema 3.2.2.</u> Ako $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, $d = \dfrac{\bar{f}_k - \underline{f}_k}{2}$ tada je

$$(3.38) \qquad \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} = ||d||_{C[0,\frac{2\pi}{k}]} .$$

<u>Dokaz.</u> Na osnovu leme 3.2.1. funkcije

$$d = \frac{\bar{f}_k - \underline{f}_k}{2} \quad i \quad \varphi^* = \frac{\bar{f}_k + \underline{f}_k}{2}$$

su iz C i $\Omega(d) = \Omega(\varphi^*) = \frac{2\pi}{k}$. Kako je za svako $x \in [0,2\pi]$

$$f(x) - \varphi^*(x) \leq \bar{f}_k(x) - \varphi^*(x) = d(x),$$

$$f(x) - \varphi^*(x) \geq \underline{f}_k(x) - \varphi^*(x) = -d(x),$$

to je

$$|f(x) - \varphi^*(x)| \leq |d(x)|$$

i

$$(3.39) \; ||f - \varphi^*||_{C[0,2\pi]} \leq ||d||_{C[0,\frac{2\pi}{k}]} .$$

S obzirom da je d neprekidna funkcija na zatvorenom intervalu to postoji $x_0 \in [0, \frac{2\pi}{k}]$ da je $d(x_0) = ||d||$. Za bilo koju funkciju $\varphi \in C$, $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}$ je

$$||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} \geq \max_{0\leq s\leq k-1} |f(x_0 + \frac{2\pi}{k} s) - (x_0 + \frac{2\pi}{k} s)| =$$

$$= \max_{0\leq s\leq k-1} |f(x_0 + \frac{2\pi}{k} s) - \varphi(x_0)| =$$

$$= \max_{0\leq s\leq k-1} (\max((f(x_0 + \frac{2\pi}{k}s) - \varphi(x_0)), \varphi(x_0) - f(x_0 + \frac{2\pi}{k}s))) =$$

$$= \max (\max_{0\leq s\leq k-1} f(x_0 + \frac{2\pi}{k}s) - \varphi(x_0), \varphi(x_0) - \min_{0\leq s\leq k-1} f(x_0 + \frac{2\pi}{k}s))$$

$$= \max (\bar{f}_k(x_0) - \varphi(x_0), \varphi(x_0) - \underline{f}_k(x_0)) \geq d(x_0) = ||d||_{C[0,\frac{2\pi}{k}]}$$

to jest.

$$(3.40) \quad ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} \geq ||d||_{C[0,\frac{2\pi}{k}]}.$$

Iz (3.39) i (3.40) dobija se (3.38).

<u>Posledica 3.2.3.</u> Ako $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, $M = \max_x f(x)$, $m = \min_x f(x)$ tada je

$$(3.41) \quad \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} \leq \frac{M - m}{2}.$$

Znak jednakosti u (3.41) postiže se za takvu funkciju f za koju postoji tačka x_0 u kojoj je $M = \bar{f}_k(x_0)$ i $m = \underline{f}_k(x_0)$

<u>Posledica 3.2.4.</u> Ako $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, tada je

$$\lim_{k\to\infty} \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} = \frac{M - m}{2}.$$

Niz $(\inf_{\omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]})_{k=2}^{\infty}$, uopšte govoreći, nije monoton što sledi iz primera na kraju paragrafa. Bilo bi od interesa opisati klasu funkcije $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, za koje bi gornji niz bio monoton.

Ako su funkcije $\varphi \in C$ perioda $\frac{2\pi l}{2}$, gde su l i k fiksirani prirodni, uzajamno prosti, brojevi, s kojima aproksimiramo fiksiranu funkciju $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, tada stavljajući

$$\dot{f}_k(x) = \max_{0 \leq s \leq k-1} f(x + \frac{2\pi l}{k} s), \quad \underset{\cdot}{f}_k(x) = \min_{0 \leq s \leq k-1} f(x + \frac{2\pi l}{k} s),$$

$$d^* = \frac{\dot{f}_k - \underset{\cdot}{f}_k}{2},$$

uz pomoć leme 3.2.1. analogno teoremi 3.2.2. dokazuje se

<u>Teorema 3.2.5.</u> Ako $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, tada je

$$(3.42) \qquad \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi l]} = ||d^*||_{C[0,\frac{2\pi l}{k}]} .$$

S obzirom da iz $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}$ sledi da je $\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}$ to je

$$\left\{\varphi :\ \Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}\right\} \subset \left\{\varphi :\ \Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}\right\}$$

i za $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$,

$$(3.43) \qquad \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} \geq \inf_{\Omega(\varphi) = \frac{2\pi l}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi l]} .$$

Realno bi bilo očekivati da je u (3.43) stroga nejednakost. Medjutim, dokazaćemo da su aproksimacije na levoj i desnoj strani u 3.4.3. jednake. Za to nam je potrebna

<u>Lema 3.2.6.</u> Neka su l i k uzajamno prosti prirodni brojevi i neka je dat niz

(3.44) $1.2,.,\ \ldots,\ k-1.$

Ako se svi članovi niza

(3.45) $l, 2l,\ \ldots,\ (k-1)l,$

redom podele s k tada se dobija niz ostataka

(3.46) $r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_{k-1},$

koji je permutacija niza (3.44).

Dokaz. Jasno je da pri deljenju s k bilo kog člana niza (3.45) dobija se ostatak koji je manji od k, kao i da je broj članova niza (3.46) k-1. Prema tome da bi smo dokazali da je niz (3.46) permutacija niza (3.44) dovoljno je dokazati da medju članovima niza (3.46) nema jednakih. Pretpostavimo suprotno, to jest, da medju članovima niza (3.45) postoje dva člana ml i nl, $n < m \leq k - 1$, koji pri deljenju s k daju jednake ostatke:

$$nl = kp + r_m$$

$$ml = kg + r_m, \; p, \; g \in N \cup \{0\}, \; r_m < k, \; r_m \in N.$$

Oduzimajući od druge jednakosti prvu dobija se

$$(m - n)l = k(g - p),$$

iz koje, s obzirom da je $m - n < k$, sledi da je k delilac broja l, što je suprotno pretpostavci da su l i k uzajamno prosti brojevi. Otuda sledi tvrdjenje leme 3.2.6.

Teorema 3.2.7. Ako $f \in C$, $\Omega(f) = 2\pi$, k i l uzajamno prosti prirodni brojevi, tada je

$$(3.47) \qquad \inf_{\Omega(\varphi)=\frac{2\pi}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi]} = \inf_{\Omega(\varphi)=\frac{2\pi l}{k}} ||f - \varphi||_{C[0,2\pi l]}$$

Dokaz. Na osnovu leme 3.2.6. $l \cdot s = q_s k + r_s$, $g_s \in N \cup \{0\}$, gde je $(r_s)_{s=1}^{k-1}$ permutacija niza (3.44), i imajući u vidu da je $\Omega(f) = 2\pi$ dobijamo

$$\dot{f}_k(x) = \max_{0 \leq s \leq k-1} f(x + \frac{2\pi l}{k} s) = \max_{0 \leq s \leq k-1} f(x + 2\pi g_s + \frac{2\pi}{k} r_s) =$$

$$= \max_{0 \leq s \leq k-1} f(x + \frac{2\pi}{k} s) = \ddot{f}_k(x)$$

Takodje je $\underset{.}{f}_k(x) = \underset{..}{f}_k(x)$ i $\Omega(\dot{f}) = \Omega(\underset{.}{f}) = \frac{2\pi}{k}$. Prema tome $\Omega(d) = \Omega(d^*)$ i za svako $x \in [0, \frac{2\pi}{k}]$ $d(x) = d^*(x)$, to jest,

$$(3.48) \qquad \|d\|_{C[0,\frac{2\pi}{k}]} = \|d^*\|_{C[0,\frac{2\pi}{k}\,1]}.$$

Iz (3.38), (3.42) i (3.48) sledi (3.47).

Ako je $1>k$ tada je $\Omega(\varphi)>2\pi$ to teorema 3.2.5. daje rezultat o aproksimaciji funkcije $f\in C$, $\Omega(f)=2\pi$, i funkcijama periode duže od 2π. No, teorema 3.2.7. utvrdjuje da je aproksimacija 2π - periodičke funkcije f funkcijama duže periode od 2π ekvivalentna aproksimaciji funkcijama perioda kraćih od 2π što i opravdava naslov paragrafa.

Primer 3.2.8. Neka je $f(x)=\cos x$. Tada je

$$\inf_{\Omega(\varphi)=\frac{2\pi}{k}} \|f-\varphi\|_{C[0,2\pi]} = \begin{cases} 1, & k=2s,\ s\in N, \\ \cos\frac{\pi}{2k}, & k=2s+1,\ s\in N. \end{cases}$$

Dokaz. Neka je $k=2s$, $s\in N$. Kako je $f(x)=\cos x$ to je

$$\bar f_k(x) = \begin{cases} \cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2s}\right] \\ \cos\left(x+\frac{2s-1}{s}\pi\right), & x\in\left[\frac{\pi}{2s},\frac{\pi}{s}\right], \end{cases}$$

$$\underline{f}_k(x) = \begin{cases} \cos(x+\pi), & x\in\left[0,\frac{\pi}{2s}\right] \\ \cos\left(x+\frac{s-1}{s}\pi\right), & x\in\left[\frac{\pi}{2s},\frac{\pi}{s}\right], \end{cases}$$

$$d(x) = \begin{cases} \cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2s}\right], \\ \cos\left(x-\frac{\pi}{2s}\right), & x\in\left[\frac{\pi}{2s},\frac{\pi}{s}\right], \end{cases}$$

i $\|d\|_{C[0,\frac{2\pi}{k}]}=1$. S obzirom na teoremu 3.2.2. dobijamo prvi deo jednakosti (3.49).

Ako je pak $k=2s+1$, $s\in N$, tada je

$$\bar f_k(x) = \begin{cases} \cos x, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2s+1}\right] \\ \cos x\left(x+\frac{4\pi s}{2s+1}\right), & x\in\left[\frac{\pi}{2s+1},\frac{2\pi}{2s+1}\right], \end{cases}$$

$$\underline{f}_k(x) = \cos\left(x+\frac{2\pi s}{2s+1}\right),\ x\in\left[0,\frac{2\pi}{2s+1}\right],$$

$$d(x) = \begin{cases} \sin\left(x+\frac{\pi s}{2s+1}\right)\cos\frac{\pi}{2(2s+1)}, & x\in\left[0,\frac{\pi}{2s+1}\right], \\ \sin\left(x+\frac{\pi(s-1)}{2s+1}\right)\cos\frac{\pi}{2(2s+1)}, & x\in\left[\frac{\pi}{2s+1},\frac{2\pi}{2s+1}\right], \end{cases}$$

i $\|d\|_{C[0,\frac{2\pi}{2s+1}]}=\cos\frac{\pi}{2(2s+1)}$, čime je dokazan i drugi deo jednakosti (3.49).

& 3.3. O GORNJOJ GRANICI FOURIER-OVIH KOEFICIJENATA KLASA $W^rH_k[\delta]_p$ I $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$

U ovom paragrafu ćemo kao i u & 3.1. razmatrati supremum-e Fourier-ovih koeficijenata, s tom razlikom što ćemo to ovde činiti na odgovarajućim klasama $W^rH_k[\delta]_p$ i $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ prostora L_p odnosno $\tilde{L}_p$.

1. Neka je $p = 1$. Za veličine

$$A_n(\delta)_1 = \sup\left\{a_n(f): f\in H[\delta]_1\right\};\ B_n(\delta)_1 = \sup\left\{b_n(f):\ f\in H[\delta]_1\right\}$$

važi sledeća

Teorema 3.3.1. Ako je n-fiksiran prirodan broj tada je

$$(3.50)\qquad A_n(\delta)_1 = B_n(\delta)_1 = B_1(n\delta)_1,$$

$$(3.51)\qquad \frac{1}{\pi\delta} \leqslant B_1(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{2\pi\sin\frac{\delta}{2}},\quad 0 < \delta < \frac{2\pi}{3},$$

$$(3.52)\qquad B_1(\delta)_1 = \frac{1}{2\pi},\quad \delta \geqslant \frac{2\pi}{3}.$$

Dokaz. Jednakost (3.50) se utvrdjuje na isti način kao i u teoremi 3.1.1. Neka je $0 < \delta < \frac{2\pi}{3}$. Kako je

$$b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\ \sin t\, dt = \frac{1}{2\pi\sin\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi}\left(f(t+\tfrac{\delta}{2})-f(t-\tfrac{\delta}{2})\right)\cos t\, dt$$

to je

$$b_1(f) \leqslant \frac{1}{2\pi\sin\frac{\delta}{2}},$$

$$(3.53)\qquad B_1(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{2\pi\sin\frac{\delta}{2}}$$

Za funkciju $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sign}\sin nt}{4\delta}$,

$$\omega(\varphi,\delta)_1 = \sup_{|h|\leqslant\delta}\int_{-\pi}^{\pi}|\ (t+h)-\varphi(t)|\,dt = \sup_{|h|\leqslant\delta}\frac{4t}{4\delta} = 1,\ \text{to jest},$$

$\varphi \in H[\delta]_1$. Iz

$$b_1(\varphi) = \frac{1}{4\pi\delta} \int_{-\pi}^{\pi} |\sin t|\,dt = \frac{1}{\pi\delta}$$

sledi da je

$$(3.54) \qquad B_1(\delta)_1 \geq \frac{1}{\pi\delta} .$$

Iz (3.53) i (3.54) sledi (3.51).

Neka je sada $\delta = \frac{2\pi}{3}$. Kao i kod teoreme 3.1.1. pri izračunavanju gornje granice $B_1(\delta)_1$ možemo se ograničiti na neparne funkcije f za koje je

$$f(t) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu(f) \sin \nu t.$$

Tada je

$$f(t+\tfrac{\pi}{3}) - f(t-\tfrac{\pi}{3}) \sim \sum_{\nu=1}^{\infty} 2b_\nu(f) \sin\frac{\nu\pi}{3} \cos \nu t.$$

Ako je $\nu = 3j$, $j = 1,2,\ldots$, onda je

$$f(t+\tfrac{\pi}{3}) - f(t-\tfrac{\pi}{3}) \sim \sum_{\nu\neq 3j}^{\infty} 2b_\nu(f) \sin\frac{\nu\pi}{3} \cos \nu t$$

i za bilo koju neprekidnu 2π - periodičku funkciju

$$\varphi(t) = \frac{a_0(\varphi)}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (a_j(\varphi)\cos jx + b_j(\varphi)\sin jx),$$

$$b_1(f) = \frac{1}{2\pi\sin\frac{\pi}{3}} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t+\tfrac{\pi}{3}) - f(t-\tfrac{\pi}{3}))(\cos t - \varphi(3t))\,dt$$

odakle je

$$|b_1(f)| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t+\tfrac{\pi}{3}) - f(t-\tfrac{\pi}{3})|\,dt\right) \inf_{\varphi} \| \cos t -$$

$$-\varphi(3t)\|_{C[0,2\pi]}.$$

Kako je $\Omega(\varphi(3t)) = \frac{2\pi}{3}$ to je s ibzirom na primer 3.2.8.

$$\inf_{\varphi} \|\cos t - \varphi(3t)\|_{C[0,2\pi]} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

i gornja nejednakost na klasi $H[\frac{2\pi}{3}]_1$ dobija oblik

$$|b_1(f)| \leqslant \frac{1}{\pi\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2\pi},$$

to jest

$$(3.55) \qquad B_1(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{2\pi}.$$

Za funkciju $g(t) = \frac{1}{4}(\Delta(t - \frac{\pi}{2}) - \Delta(t + \frac{\pi}{2}))$, gde je Δ Dirakova uopštena funckija, je $\omega(g, \frac{2\pi}{3})_1 = 1$, a

$$(3.56) \qquad b_1(g) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\Delta(t - \frac{\pi}{2}) - \Delta(t + \frac{\pi}{2}))\sin t\,dt = \frac{1}{2\pi}.$$

Iz (3.55) i (3.56) sledi da je

$$(3.57) \qquad B_1(\frac{2\pi}{3})_1 = \frac{1}{2\pi}.$$

Kako je za $\delta > \frac{2\pi}{3}$, $\omega(g, \delta)_1 = 1$, $b_1(g) = \frac{1}{2\pi}$ to je zbog inkluzije $H[\delta]_1 \subset H[\frac{2\pi}{3}]_1$

$$(3.58) \qquad B_1(\delta) = \frac{1}{2\pi}.$$

Iz (3.57) i (3.58) se dobija (3.52).

Za veličine

$$A_n^r(\delta)_1 = \sup\left\{a_n(f):\ f\in W^r H[\delta]_1\right\}, \quad B_n^r(\delta)_1 = \left\{\sup\ b_n(f):\ f\in W^r H[\delta]_1\right\}$$

važi.

<u>Teorema 3.3.2.</u> Ako su n i r fiksirani prirodni brojevi tada je

$$(3.59) \qquad \frac{1}{n^{r+1}\pi\delta} \leqslant A_n^r(\delta)_1 = B_n^r(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{2n^r\pi\sin\frac{n\delta}{2}}, \quad 0 < \delta < \frac{2\pi}{3n}$$

$$(3.60) \qquad A_n^r(\delta)_1 = B_n^r(\delta)_1 = \frac{1}{2n^r\pi}, \quad \delta \geqslant \frac{2\pi}{3n}.$$

Dokaz. Fourier-ovi koeficijenti imaju reprezentaciju (3.1). Imajući to u vidu relacije (3.59) i (3.60) dobijaju se na analogan način kao i u teoremi 3.3.1.

Teorema 3.3.3. Ako je n fiksiran prirodan broj, a r fiksiran prirodan broj ili nula, tada je

$$(3.61)\qquad A_n^r(\delta)_1 = B_n^r(\delta)_1 \simeq \frac{1}{n^{r+1}\pi\delta} \quad za \quad \delta \to 0.$$

Dokaz. Deleći nejednakost (3.59) s $\frac{1}{n^{r+1}\pi\delta}$ i puštajući da $\delta \to 0$ dobijamo (3.61).

Neka su sada

$$A_n^{k,r}(\delta)_p = \sup\left\{a_n(f):\ f\in W^r H_k[\delta]_p\right\}, \quad B_n^{k,r}(\delta)_p =$$

$$= \sup\left\{b_n(f):\ f\in W^r H_k[\delta]_p\right\}, \quad p \geq 1.$$

Za veličine $A_n^{k,o}(\delta)_1$ i $B_n^{k,o}(\delta)_1$ važi

Teorema 3.3.4. Ako je n fiksiran prirodan broj tada je

$$(3.62)\qquad A_n^{k,o}(\delta)_1 = B_n^{k,o}(\delta)_1 = B_1^{k,o}(n\delta)_1,$$

$$(3.63)\qquad \frac{1}{2^{k+2}\sin^k\frac{\delta}{2}} \leq B_1^{k,o}(\delta)_1 \leq \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}, \quad 0<\delta\leq\pi$$

$$(3.64)\qquad \frac{1}{2^{k+2}} \leq B_1^{k,o}(\delta)_1 \leq \frac{1}{\pi 2^k}, \quad \delta > \pi.$$

Dokaz. Jednakost (3.62) se dokazuje na isti način kao i u teoremi 3.1.1. Iz (3.24) za $0 < \delta \leq \pi$ i $f \in H_k[\delta]_1$ je

$$b_1(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin t\,dt = \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f,t)\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)dt \leq$$

$$\leq \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}}\int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\Delta}_\delta^k(f,t)|\,dt \leq \frac{\omega_k(\delta)_1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}} \leq \frac{1}{\pi 2^k \sin^k\frac{\delta}{2}},$$

to jest,

(3.65) $\qquad B_1^{k,o}(\delta)_1 \leqslant \dfrac{1}{\pi 2^k \sin^k \frac{\delta}{2}}$.

Za funkciju $\varphi(t) = \dfrac{\sin t}{2^{k+2} \sin^k \frac{\delta}{2}}$, $\omega_k(\varphi,\delta)_1 = 1$, $0 < \delta \leqslant \pi$ a,

$$b_1(\varphi) = \frac{1}{2^{k+2}\sin^k \frac{\delta}{2}},$$

to jest,

(3.66) $\qquad B_1^{k,o}(\delta)_1 \geqslant \dfrac{1}{2^{k+2} \sin^k \frac{\delta}{2}}$.

Iz (3.65) i (3.66) dobija se (3.63).

Ako je $\delta>\pi$ to s obzirom na inkluziju $H_k[\delta]_1 \subset H_k[\pi]_1$ dobijamo

(3.67) $\qquad B_1^{k,o}(\delta)_1 \leqslant \dfrac{1}{\pi 2^k}$.

Za funkciju $g(t) = \dfrac{\sin t}{2^{k+2}}$, $\omega_k(g,\delta)_1 = 1$, $\delta > \pi$ i

(3.68) $\qquad b_1(g) = \dfrac{1}{2^{k+2}}$.

Iz (3.67) i (3.68) dobija se (3.64).

Koristeći reprezentaciju (3.1) Fourier-ovih koeficijenata iz klase $W^r H_k[\delta]_1$ i teoremu 3.3.4. lako se dokazuje

Teorema 3.3.5. Ako su n i r fiksirani prirodni brojevi tada je

$$\frac{1}{n^r 2^{k+2}\sin^k \frac{\delta}{2}} \leqslant A_n^{k,r}(\delta)_1 = B_n^{k,r}(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{n^r \pi 2^k \sin^k \frac{\delta}{2}}, \quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n},$$

$$\frac{1}{n^r 2^{k+2}} \leqslant A_n^{k,r}(\delta)_1 = B_n^{k,r}(\delta)_1 \leqslant \frac{1}{\pi n^r 2^k}, \quad \delta > \frac{\pi}{n}.$$

<u>Teorema 3.3.6.</u> Ako su n i k fiksirani prirodni brojvi tada je za $p>1$

$$(3.69)\qquad A_n^{k,o}(\delta)_p = B_n^{k,o}(\delta)_p = B_1^{k,o}(n\delta)_p ,$$

$$(3.70)\qquad \frac{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k}\sin^k\frac{\delta}{2}} \leqslant B_1^{k,o}(\delta)_p \leqslant \frac{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t dt\right)^{\frac{p-1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k-2}\pi\sin^k\frac{\delta}{2}},\quad 0<\delta\leqslant\pi,$$

$$(3.71)\qquad 2^{-\frac{2}{p}-k}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t dt\right)^{-\frac{1}{p}} \leqslant B_1^{k,o}(\delta)_p \leqslant \pi^{-1}\, 2^{-\frac{2}{p}-k+2}\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t dt\right)^{\frac{p-1}{p}},\quad \delta>\pi .$$

<u>Dokaz</u>. Jednakost (3.69) dokazuje se isto kao kod teoreme 3.1.1. Ako je $0<\delta\leqslant\pi$, koristeći (3.24) i Holderovu nejednakost za $f\in H_k[\delta]_p$ dobijamo

$$|b_1(f)| = \left|\frac{1}{\pi 2^k\sin^k\frac{\delta}{2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\dot{\Delta}_\delta^k(f,t)\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi 2^k\sin^k\frac{\delta}{2}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\dot{\Delta}_\delta^k(f,t))\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)|dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi 2^k\sin^k\frac{\delta}{2}}\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\dot{\Delta}_\delta(f,t)|^p dt\right\}^{\frac{1}{p}}\cdot\left\{\int\limits_{-\pi}^{\pi}|\sin\left(t+\frac{k\pi}{2}\right)|^{\frac{p}{p-1}}dt\right\}^{\frac{p-1}{p}}$$

$$\leqslant \frac{\left(\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{p}{p-1}} t\, dt\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi\, 2^{\frac{2}{p}+k-2}\sin^k\frac{\delta}{2}} ;$$

to jest,

$$(3.72) \qquad B_1^{k,o}(\delta)_p \leq \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi 2^{\frac{2}{p}+k-2} \sin^k \frac{\delta}{2}}.$$

Za funkciju $\varphi(t) = \dfrac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{k+\frac{1}{p}} \sin^k \frac{\delta}{2}} \sin t$ je $\omega_k(\varphi,\delta)_p = 1$,

$$b_1(\varphi) = \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k} \sin^k \frac{\delta}{2}}, \text{ to jest,}$$

$$(3.73) \qquad B_1^{k,o}(\delta)_p \geq \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k} \sin^k \frac{\delta}{2}}.$$

Iz (3.72) i (3.73) dobija se (3.70)

Kako je za $\delta>\pi$ $H_k[\delta]_p \subset H_k[\pi]_p$ to je s obzirom na (3.72)

$$(3.74) \qquad B_1^{k,o}(\delta)_p \leq \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi\, 2^{\frac{2}{p}+k-2}}, \quad \delta > \pi.$$

Za funkciju $g(t) = \dfrac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k}} \sin t$, $\omega_k(g,\delta)_p = 1$, $\delta > \pi$,

$$b_1(g) = \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{\frac{2}{p}+k}}, \text{ to jest,}$$

$$(3.75)\qquad B_1^{k,o}(\delta)_p \geqslant \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{2^{k+\frac{2}{p}}} .$$

Iz (3.74) i (3.75) sledi (3.71).

Kako za Fourier-ove koeficijente važi jednakost (3.1) i za funkcije iz $W^r H_k[\delta]_p$ to iz teoreme 3.3.6. se dobija

Teorema 3.3.7. Ako su n i r fiksirani prirodni brojevi tada je

$$(3.76)\qquad \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{n^r\, 2^{k+\frac{2}{p}} \sin^k \frac{n\delta}{2}} \leqslant A_n^{k,r}(\delta)_p =$$

$$= B_n^{k,r}(\delta)_p \leqslant \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi n^r\, 2^{\frac{2}{p}+k-2} \sin^k \frac{n\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

$$(3.77)\qquad \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p t\,dt\right)^{-\frac{1}{p}}}{n^r\, 2^{k+\frac{2}{p}}} \leqslant A_n^{k,r}(\delta)_p = B_n^{k,r}(\delta)_p \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{p}{p-1}} t\,dt\right)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi n^r\, 2^{\frac{2}{p}+k-2}},\quad \delta > \frac{\pi}{n}.$$

Teorema 3.3.8. Ako su n i k fiksirani prirodni brojevi a r fiksiran prirodan broj ili nula, tada je

$$(3.78)\quad A_n^{k,r}(\delta)_2 = B_n^{k,r}(\delta)_2 = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r 2^k \sin^k \frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}, \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r 2^k}, & \delta > \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Dokaz. Lako se proverava da su gornje i donje granice u (3.76) i (3.76), za $p=2$, jednake veličini $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r 2^k \sin^k \frac{n\delta}{2}}$ za $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$ odnosno $\dfrac{1}{\sqrt{\pi} n^r\, 2^k}$ za $\delta > \frac{\pi}{n}$, odakle sledi tvrdjenje teoreme 3.3.8. Ekstremalna funkcija za koju se postiže jednakost (3.78) definisana je jednakošću

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin t}{\sqrt{\pi} 2^k n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}, \\[2ex] \dfrac{\sin t}{\sqrt{\pi} 2^k n^r}, & \delta > \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

2. Neka je

$$C_n^{k,r,p}(\delta) = \sup \left\{ |C_n(f)| : \ f \in W^r \tilde{H}_k[\delta]_p \right\}$$

gde je $p \geqslant 1$. Za veličine $C_n^{k,r,p}(\delta)$ važi sledeća

Teorema 3.3.9. Ako su n i k fiksirani prirodni brojevi, a r fiksiran prirodan broj ili nula, $p \geqslant 1$, tada je

$$(3.79)\quad C_n^{k,r,p}(\delta) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}\, \pi^{\frac{1}{p}}\, n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}\, \pi^{\frac{1}{p}}\, n^r}, & \delta > \frac{\pi}{n}. \end{cases}$$

Dokaz. Ako f $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ to je kao i u (3.32) za $0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$

$$(3.80)\quad C_n(f) = \frac{1}{2\pi(2i)^k(in)^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k(f^{(r)},t)e^{-int}\,dt,$$

odakle se za p = 1 dobija

$$|C_n(f)| = \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \left|\int_{-\pi}^{\pi} \dot{\Delta}_\delta^k (f^{(r)},t)e^{-int}\,dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\Delta}_\delta^k(f^{(r)},t)e^{-int}|\,dt =$$

$$= \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\Delta}_\delta^k(f^{(r)},t)|\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},$$

to jest,

$$(3.81)\quad C_n^{k,r,1}(\delta) \leqslant \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Funkcija

$$\varphi(t) = \frac{e^{int}}{2\pi(in)^r(2i)^k \sin^k \frac{n\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$$

je iz $W^r\tilde{H}_k[\delta]_1$ jer je $\omega_k(f^{(r)},\delta)_{\tilde{1}} = 1$. Kako je

$$C_n(\varphi) = \frac{1}{2\pi(in)^r(2i)^k \sin^k \frac{n\delta}{2}},\ \text{a}$$

$$|C_n(\varphi)| = \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},$$

to je

$$(3.82)\qquad C_n^{k,r,1}(\delta) \geqslant \frac{1}{2^{k+1}\pi n^r \sin^k \frac{\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}.$$

Iz (3.81) i (3.82) dobija se za $p = 1$ prvi deo tvrdjenja teoreme 3.3.9. Kako je za $\delta > \frac{\pi}{n}$ $W^r\tilde{H}_k[\delta]_1 = W^r\tilde{H}_k[\delta]_1$, to je za $f \in W^r\tilde{H}_k[\delta]_1$ i $\delta > \frac{\pi}{n}$.

$$(3.83)\qquad |C_n(f)| \leqslant \frac{1}{\pi 2^{k+1} n^r}.$$

Funkcija

$$\varphi_1(t) = \frac{e^{int}}{2\pi (in)^r (2i)^k}$$

je za $\delta > \frac{\pi}{n}$ iz $W^rH_k[\delta]_1$ jer je $\omega_k(\varphi_1, \delta)_1 = 1$. S obzirom da je $C_n(\varphi_1) = \frac{1}{2\pi(in)^r(2i)^k}$ a $|C_n(\varphi_1)| = \frac{1}{\pi 2^{k+1} n^r}$, to je

$$(3.84)\qquad C^{k,r,1}(\delta) \geqslant \frac{1}{\pi 2^{k+1} n^r}.$$

Iz (3.83) i (3.84) sledi, za $p = 1$, i drugi deo tvrdjenja teoreme 3.3.9.

Neka je sada $p > 1$. Iz (3.80) koristeći Holderovu nejednakost za $f \in W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ i $0 < \delta < \frac{\pi}{n}$ dobija se

$$|C_n(f)| \leqslant \frac{1}{\pi n^r 2^{k+1} \sin^k \frac{n\delta}{2}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |\Delta_\delta^k(f,t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |e^{-int}|^{\frac{p}{p-1}} dt \right)^{\frac{p-1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{(2\pi)^{\frac{p-1}{p}}}{\pi 2^{k+1} n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}} = \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}} n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},$$

to jest,

$$(3.85)\qquad C_n^{k,r,p}(\delta) \leqslant \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}} \pi^{\frac{1}{p}} n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}.$$

Funkcija

$$g(t) = \frac{e^{int}}{(in)^r (2i)^k (2\pi)^{\frac{1}{p}} \sin^k \frac{\delta}{2}},\quad 0 < \delta \leqslant \frac{\pi}{n}$$

je iz $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ jer je $\omega_k(g^{(r)}, \delta)_{\tilde{p}} = 1$.

Kako je

$$C_n(g) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}(2i)^k(in)^r \sin^k \frac{n\delta}{2}},$$

to je i

(3.86) $$C_n^{k,r,p}(\delta) \geq \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}\,\pi^{\frac{1}{p}}\,n^r \sin^k \frac{n\delta}{2}}.$$

Iz (3.85) i (3.86) sledi i prvi deo tvrdjenja teoreme 3.3.9.

Neka je sada $\delta > \frac{\pi}{n}$. Kako je $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p \subset W^r\tilde{H}_k[\frac{\pi}{n}]_p$ to je za $f \in W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$, $\delta > \frac{\pi}{n}$,

(3.87) $$|C_n(f)| \leq \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}\,\pi^{\frac{1}{p}}\,n^r}.$$

Funkcija

$$g_1(t) = \frac{e^{int}}{(2\pi)^{\frac{1}{p}}(2i)^k(in)^r}$$

je za $\delta > \frac{\pi}{n}$ iz $W^r\tilde{H}_k[\delta]_p$ jer je $\omega_k(g_1^{(r)},\delta)_{\tilde{p}} = 1$.

Kako je

$$|C_n(g_1)| = \frac{1}{2^{k+\frac{1}{p}}\,\pi^{\frac{1}{p}}\,n^r},$$

to otuda i iz (3.87) sledi i drugi deo tvrdjenja teoreme 3.3.9. za $p > 1$.

& 3.4. O TAČNIM KONSTANTAMA U NEJEDNAKOSTIMA $|b_n(f)| < K\omega_k(f^{(r)},\delta)_X$ I $|C_n(f)| < K\omega_k(f^{(r)},\delta)_{\tilde{X}}$

U [4, str. 221], [6, str. 80][56, str. 79 i 80] ustanovljene su neke od nejednakosti tipa

(3.88) $$|b_n(f)| < K_n(\delta)_X\ \omega_k(f^{(r)},\delta)_X,\quad r=0,1,\dots,k=1,2,\dots,$$

(3.89) $$|C_n(f)| < K_n(\delta)_{\tilde{X}}\ \omega_k(f^{(r)},\delta)_{\tilde{X}},\quad r=0,1,\dots,k=1,2,\dots,$$

koje daju procenu apsolutnih vrednosti Fourier-ovih koeficijenata $b_n(f)$ i $C_n(f)$ u prostorima X odnosno $\widetilde{X}$ pomoću vrednosti modula neprekidnosti k-tog od $f^{(r)}$ u fiksiranoj tački $\delta = \frac{\pi}{n}$. Od interesa je odrediti najmanje konstante $K_n(\delta)_X$ odnosno $K_n(\delta)_{\widetilde{X}}$, za koje će nejednakosti (3.88) odnosno (3.89) važiti za sve f iz X odnosno $\widetilde{X}$ i za svako $\delta > 0$. Odredjivanje takvih konstanata, koje uobičajeno nazivaju tačnim, svodi se na izračunavanje veličina

$$\sup_{f \neq const} \frac{|b_n(f)|}{\omega_k(f^{(r)},\delta)_X} = K_n^*(\delta,r,k)_X$$

$$\sup_{f \neq const} \frac{|C_n(f)|}{\omega_k(f^{(r)},\delta)_{\widetilde{X}}} = K_n^*(\delta,r,k)_{\widetilde{X}}$$

koje pored n, δ i X odnosno $\widetilde{X}$ zavise još i od r i k.

Koristeći rezultate & 3.1. i & 3.3. u mogućnosti smo izračunati tačne konstante $K_n^*(\delta,r,k)_X$ za:

1. $X = C$, $k = 1$, $r = 0,1,2,\dots$, i svakom $\delta > 0$;
2. $X = L$, $k = 1$, $r = 0$ i svakom $\delta > \frac{2\pi}{3n}$;
3. $X = L_2$, $k = 1,2,\dots$, $r = 0,1,2,\dots$, i svakom $\delta > 0$,

dok konstantu $K_n^*(\delta,r,k)_{\widetilde{X}}$ možemo izračunati i za $\widetilde{X} = \widetilde{C}$ i za $\widetilde{X} = \widetilde{L}_p$, $k = 1,2,\dots$, $r = 0,1,\dots$, i svakom $\delta > 0$.

Neka je $f \in C$, $f \neq const$ i $\delta > 0$. Funkcija $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{\omega(f,\delta)} \in H[\delta]$. Koristeći jednakost

$$f(x) = \frac{f(x)}{\omega(f,\delta)}\,\omega(f,\delta) = \varphi(x)\,\omega(f,\delta) \tag{3.90}$$

i teoremu 3.1.1. dobijamo

$$K_n^*(\delta,0,1)_C = \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{n\delta}{2}\left<\frac{\pi}{n\delta}\right>}{\pi \sin\frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leq \dfrac{2\pi}{3n} \\[2ex] \dfrac{2}{\pi}, & \delta > \dfrac{2\pi}{3n}. \end{cases}$$

Analogno je za svako $r = 1,2,\ldots,$ s obzirom na teoremu 3.1.4.

$$K_n^*(\delta,r,1)_C = \begin{cases} \dfrac{2\cos\frac{n\delta}{2}\,\frac{\pi}{n\delta}}{\pi n^r \sin\frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \dfrac{2\pi}{3n}, \\[2ex] \dfrac{2}{\pi n^r}, & \delta > \dfrac{2\pi}{3n}. \end{cases}$$

Iz analogne jednakosti (3.90) i iz teoreme 3.3.1. i teoreme 3.3.2. sledi da je za svako $r = 0,1,2,\ldots,$ i svako $\delta \geqslant \frac{2\pi}{3n}$

$$K_n^*(\delta,r,k)_L = \frac{1}{2\pi n^r};$$

a iz teoreme 3.3.8. za svako $r = 0,1,2,\ldots,$ i $k = 1,2,\ldots,$ sledi da je

$$K_n^*(\delta,r,k)_{L_2} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r 2^k \sin^k\frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, n^r 2^k}, & \delta > \dfrac{\pi}{n} \end{cases}$$

Iz teoreme 3.1.10. odnosno teoreme 3.3.9. koristeći analognu jednakost (3.90) sledi da je za svako $r = 0,1,2,\ldots,$ $k = 1,2,\ldots,$

$$K_n^*(\delta,r,k)_{\tilde{C}} = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{k+1} n^r \sin^k\frac{n\delta}{2}}, & 0 < \delta \leqslant \dfrac{\pi}{n}, \\[2ex] \dfrac{1}{2^{k+1} n^r}, & \delta > \dfrac{\pi}{n}, \end{cases}$$

odnosno

$$K_n^*(\delta,r,k)_{\tilde{L}_p} = \begin{cases} \dfrac{1}{n^r 2^{k+\frac{1}{p}}\, \pi^{\frac{1}{p}} \sin^k\frac{n\delta}{2}}, & 0<\delta\leqslant \dfrac{\pi}{n} \\[2ex] \dfrac{1}{n^r 2^{k+\frac{1}{p}}\, \pi^{\frac{1}{p}}}, & \delta > \dfrac{\pi}{n}. \end{cases}$$

U svim ostalim slučajevima za tačne konstante važe iste procene kao i za odgovarajuće Fourir-ove koeficijente klasa $W^r H_k[\delta]_X$.

& 3.5. APROKSIMACIJE FUNKCIJA FOURIER-OVIM SUMAMA

Neka je

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x)$$

Fourier-ov red funkcije $f \in X$, a

$$S_n = S_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(x),\ n = 0,1,\ldots,$$

niz njegovih parcijalnih suma.

Prve procene aproksimacija

$$||f(x) - S_n(f,x)||_X \leq K_n \varphi(n),\ K_n > 0,$$

funkcije f parcijalnim sumama njenog Fourier-ovog reda, gde je $X=C$ ili $X=L_p$ a φ neka od karakteristika funckije, recimo modul neprekidnosti ili najbolja aproksimacija, potiču od Lebesque-a [27] i bile su preokupacija niza matematičara kao što su: Aléxits G. i Krălik D. [1], Доронин Т. Я. [12], Ефимов А. В. [13], Ниш О. [21], Kolmogoroff, A.H. [23], Гукевич В. О. [18], Меньшов Д. Е. [30], Натансон Г. И. [37], Никольскии С. М. [39], ОснолковН. И. [40], Селиванова С. Г. [47], Соколов И. Г. [48], Стечнин С. Б. [49], Quade E. S [43], Жук В. В. [45], Коревар Ж. (v. [41], str. 185), Теляновсний С. А. [52],... . Detaljnije o rezultatima navedenih autora može se videti u [31].

Tačna konstanta pri aproksimacijama funkcija f njihovim Fourier-ovim sumama $S_n(f,x)$ nije do danas odredjena ni za jednu specijalnu klasu funkcija. Velikom broju autora kao što se može videti, na primer, u [23],[37], [40], [47], [48],[41] uspelo je da nadje asimptotsko ponašanje tačne konstante za neke specijalne klase funkcija. Tako je A. B. Ефимов u [13] dokazao sledeću asimptotsku formulu:

$$(3.91)\quad E_c[W^r H^\omega, S_n] = \frac{C_1^{(n)}(\omega)}{\pi} \frac{\ln n}{n^r} + O\left(\frac{1}{n^r}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

za svako $r = 0,1,2,\ldots,$ gde je

$$C_1^{(n)}(\omega) = \sup_{f \in H^\omega} b_n(f).$$

Na klasama $W^r H[\delta]$ mi možemo dokazati sledeću teoremu.

<u>Teorema 3.5.1.</u> Ako je $r = 0,1,\ldots,$ n fiksiran prirodan broj tada je

$$(3.92)\quad E_c[W^r H[\delta], S_n] = \frac{2\ln n}{\pi^2 n^r}\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{n\delta}{2} < \frac{\pi}{n\delta} >}{\sin\frac{n\delta}{2}}, & 0<\delta<\dfrac{2\pi}{3n} \\ 1, & \delta \geqslant \dfrac{2\pi}{3n} \end{cases} + \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n^{r+1}\delta}\right), & \delta < \dfrac{1}{n}, \\ O\left(\dfrac{1}{n^r}\right), & \delta \geqslant \dfrac{1}{n}. \end{cases}$$

<u>Dokaz.</u> Rezultat (3.91) A. B. Ефимова bez izmene dokaza prenosi se na ograničene izmerljive funkcije (ne obavezno neprekidne). Imajući to u vidu i činjenice da je $H[\delta] = H^{\omega^*}$ gde je

$$\omega^*(t) = \begin{cases} [\frac{t}{\delta}] + 1, & (k-1)\delta<t<k\delta, \\ k-1, & t = (k-1)\delta,\ k\ N,\ 0\leqslant t\leqslant\pi; \end{cases}$$

$$\omega^*\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \omega^*(\delta) \leqslant 1,\ \delta \geqslant \frac{1}{n},$$

$$\omega^*\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \left(\frac{1}{n\delta} + 1\right)\omega^*(\delta) \leqslant \frac{1}{n\delta} + 1 \leqslant \frac{2}{n\delta},\ \delta < \frac{1}{n},$$

iz rezultata teoreme 3.1.1. i (3.91) sledi (3.92).

Koristeći teoremu 3.1.3 iz teoreme 3.5.1. dobija se.

Posledica 3.5.2. Ako je $r = 0,1,2,\ldots$, a n fiksiran prirodan broj tada je

$$E_C\,[W^r H[\delta],\, S_n] \simeq \frac{4\ \ln n}{\pi^2 n^{r+1}}\,\delta + O\left(\frac{1}{n^{r+1}}\,\delta\right),\quad \delta \to 0$$

Mnogi autori, počev od Lebesgue-a [27], utvrdjivali su procene oblika

$$||f - S_n(f)||_C \leqslant K_n\,\omega\,(f,\delta_n),\ \text{za svako } f \in C,$$

gde je

$$K_n = K_n(S_n,\, \delta_n),\qquad \delta_n > 0,$$

pri raznim izborima nizova (δ_n). Opštiji problem, koji je postavio С. Б. Стечкин, sastoji se u ispitivanju karakteristike

$$K^*(S_n,\delta) = \sup_{\substack{f\in C\\ f\neq \text{const}}} \frac{||f - S_n(f)||_C}{\omega(f,\delta)},\quad n = 0,1,2,\ldots$$

В. Т. Гаврилюк i С. Б. Стечкин su u [16] pokazali da je

$$K^*\left(S_n, \frac{2\pi}{3(n+\frac{1}{2})}\right) = \frac{||S_n||_C + 1}{2}$$

gde su $||S_n||_C$ konstante Lebesgue-a.

Koristeći teoremu 3.5.1. u mogućnosti smo da odredimo asimptotsku formulu za $K_n^*(S_n,\delta)$ i svako $\delta > 0$. Naime važi

Teorema 3.5.3. Ako je n fiksiran prirodan broj tada je

$$K^*(S_n,\delta) = \frac{2\ \ln n}{\pi^2}\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{n\delta}{2}\left\langle\frac{\pi}{n\delta}\right\rangle}{\sin\frac{n\delta}{2}}, & 0<\delta\leqslant \dfrac{2\pi}{3n},\\[2ex] 1, & \delta \geqslant \dfrac{2\pi}{3n},\end{cases} + \begin{cases} O\left(\dfrac{1}{n\delta}\right), & \delta < \dfrac{1}{n},\\[2ex] O(1), & \delta \geqslant \dfrac{1}{n}.\end{cases}$$

Dokaz. Ako je $f \in C$, $f \neq \text{const}$, tada funkcija

$\varphi(t) = \frac{f(t)}{\omega(f,\delta)} \in H[\delta]$. Uzimajući u obzir linearnost operatora S_n i teoremu 3.5.1., za slučaj $r = 0$, dobijamo da je

$$(3.93)\qquad \frac{\|f-S_n(f)\|_C}{\omega(f,\delta)} < \frac{2\ln n}{\pi^2}\begin{cases} \dfrac{\cos\frac{n\delta}{2}<\frac{\pi}{n\delta}>}{\sin\frac{n\delta}{2}}, & 0<\delta\leqslant\frac{2\pi}{3n} \\ 1, & \delta\geqslant\frac{2\pi}{3n}. \end{cases} + \begin{cases} O(\frac{1}{n\delta}), & \delta<\frac{1}{n}, \\ O(1), & \delta\geqslant\frac{1}{n}. \end{cases}$$

Kako teorema 3.5.1. važi i za podklasu

$$H_1^{1}[\delta] = \left\{ f \in H[\delta] : \omega(f,\delta) = 1 \right\}$$

to je

$$(3.94)\qquad \sup_{\substack{f \neq \text{const} \\ f \in C}} \frac{\|f-S_n(f)\|_C}{\omega(f,\delta)} \geqslant \sup_{f \in H_1^{1}[\delta]} \frac{\|f-S_n(f)\|_C}{\omega(f,\delta)} .$$

Iz (3.93) i (3.94) sledi tvrdjenje teoreme 3.5.3.

Iz teoreme 3.5.3. dobija se.

Posledica 3.5.4. Ako je n fiksiran prirodan broj tada je

$$K^*(S_n,\delta) \simeq \frac{4\ln n}{\pi^2 n\delta} + O(\frac{1}{n\delta}), \quad \delta \to 0.$$

LITERATURA

[1] Alexits G., Králik D. Über die Approximation mit starken de la Velleé - Poussinschen Mitteln. - Acta math. sci. Hung., 1965, 16, 43-49.

[2] Aljančić S. O nekim novijim rezultatima iz trigonometrijske aproksimacije. - Iz zbornika SANU LXIX. mat. inst. SANU knj. 8. 1960, 9-52.

[3] Aljančić S. Uvod u realnu i funkcionalnu analizu. - Gradjevinska knjiga, Beograd 1968.

[4] Ахиезер Н. И. Лекции по теории апроксимации. - Издат. "Наука", Москва 1965.

[5] Бари Н. К. и Стечкин С. Б. Наилучшие приближения и диференциальные свойства двух сопряженных функций. - Труды Моск. мат. общ. 5(1956), 483-522.

[6] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. - Физматгиз, Москва 1961.

[7] Бернштейн С. Н. О наилучшем приближений непреривных функций посредством многочленов данной степении. - Сооб. хар. общ. (2) 13 (1912), 49-194.

[8] Бернштейн С. Н. Sur l´ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynomes de degre donne. - Met. Acad. Roy. Belgique (2), 4 (1912), 1-104

[9] Бесов И. В. и Стечкин С. Б. Описание модулей непрерывности в L_2. - Труды мат. инст. А. Н. СССР. 1975, т. 134, стр. 23-25.

[10] Borel E. Lesons sur les fonctions des variables reelles. - Paris 1905.

[11] Дзядык В. К. Бдение в теорию ровномерного приближения функций полиномами. - Москва, "Наука", 1977.

[12] Доронин Т. Я. Некоторые неравенства вля приближении тригонометрическами полиномами. - ДАН СССР, 1949, 69. 487-490.

[13] Ефимов А. В. Проближение непрерывных периодических функций сумами фурье. - Известия АН СССР, сер. мат. 24 (1960), 243-299.

[14] Ефимов А. В. О коэффициентах фурье функций класса [illegible] Успехи мат. наук, т. XII вып 3 (75), 1957, 303-31[illegible].

[15] Ефимов А. В. Линейные меиоды приближения некоторых классов непрерывных периодических функций, мат. сб. 54 № [illegible] (1961), 51-90.

[16] Гаврилюк В. Т. и Стечкин С. Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами фурье.- ДАН СССР, 1978, 241, № 3, стр. 525-527.

[17] Гаврилюк В. Т. и Стечкин С. Б. Приближение непрерывных периодических функций суммами фурье .- АН УССР, 1979, препринт 79. 1., Киев.

[18] Гукевич В. О. Остаток ряду фурье функций, [illegible] похыдна задовольняе умовь. Ліпшіца.- Вєб < теор. и [illegible] мат > > Вып. I Львов, Львовск. ун-т, 1958, 3-15[illegible].

[19] Jackson D. The theory of approximation. - American, Math. Coll. Publ. XI (1930).

[20] Jackson D. Über die Cenauigkeit der Annäherung stetiger Functionen durch ganze rationale Funktionen [illegible] benen Grades und trigonometrische Summen gegebener [illegible] ung. - Göttingen, 1911.

[21] Киш О. Оценка отклонения частных сумм ряда [illegible] -"Acta math. Acad. sci Hung". 1971, 22 № -1-2,173-1[illegible].

[22] Колмогоров А. Н. и Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - Изд. "Наука" Москва 1976.

[23] Kolmogoroff A. N. Zur Grössenordnung des Restgliedes Fouriercher Reihen differenzierbarer Funktionen. - Ann. of Math. 36 (1935), 521-526.

[24] Номинар В. Т. Ряд фурье непрерывной функций ограниченной вариации. - В сб.< ислед по саврем. пробл. конструктивной теории функций > М. Физматгиз, 1961, 197-201.

[25] Корнейчук Н. П. Экспе ремальные задачи теорий приближения. - Изд. "Наука" Москва 1976.

[26] Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона наилучшем равномерном приближений непрерывных периодических функций. - ДАН СССР 145, (1962), 514-515.

[27] Lebesgue H. Sur le représentation trigonometrique approchée des fonctions satisfaisant á une condition de Lipschitz. - Bull. Soc. Math. France, 1910, 38, 184-210.

[28] Лигун А. А. О точных константах приближения дифференцируемых периодических функций. - Мат. заметни, т. 14, (1973), 21-30.

[29] Marchand A. - Sur les derivées et sur les différences des fonctions des variables réelles. - Journ. Math. pures et appl. (9) 6 (1927), 337-425.

[30] Меньшов Д. Е. Sur les sommes partie Ues des series de Fourier des fonctions continues. - Matem. 15 (57) (1944) 385 - 432.

[31] Miloradović S. Aproksimacije funkcija Fourier-ovim sumama i gornja granica Fourier-ovih koeficijenata. - Magistarski rad, Beograd, 1977.

[32] Милорадович С. Верхная грань коеффициентов фурье. - Конструнтивная теория функций´77 София. 1980. с. 109-110.

[33] Милорадович С. О коэффициентах Фурье класса $W^r H[\delta_0]_L$. - Publications de l´institut mathématique nouvelle série, tome 28 (42), 1980, pp 129-134.

[34] Милорадович С. - О верхних гранях нщэффициентов фурье и некоторых более общих функционалов. - Мат. замешки, Москва (u štampi).

[35] Натансон И. П. Конструктивная теория функций. - Москва - Ленинград, 1949.

[36] Натансон И. П. Теория функций вещественной переменой. - - Изд. "Наука", Москва 1974,

[37] Натансон Г. И. Некоторые случай, когда суммы Фурье дают приближение порядка налучшего. - <Докл АН СССР > 1968, 183, №-6 1254-1257.

[38] Никольский С. М. Приближение функции тригонометрическими многочленами. - Труды мат. инст. Стеклова 15 (1945), 1-76.

[39] Никольский С. М. Ряд фурье функций с данным модулем непрерывности. - Доклады АН СССР, 52 (1946), 191-194.

[40] Осколков К. И. К неровенстве Лебега в равномерной метрике и на множестве полной меры. - Мат. заметки, Т. 18., №-4, 1975, 515-526.

[41] On Aproximation Theory. - Proc. Conf. Oberwolfach, Basel, Stuttgart, Birk häser - Verlog, 1946.

[42] Privaloff I.I. Sur les fonctions conjuguess. - Bull. 20 Soc. Math. France 44 (1916), 100-103.

[43] Quade E. S. Trigonometric approximation in the meak. - Duke Math. Jour. 3 (1937), 529-543.

[44] Жук В. В. О некоторых соотношениях между модулями непрерывнрсти и функционалами заданными на множестве периодических функций. - Изв. вузов, Математика, № 5 (1970), 24-33.

[45] Жук В. В. О точности представления непрерывной периодичесной функций при помощи частных суми ее ряда фурье. - Вест Ленинград ун-та > 1977, № 7, 14-22.

[46] Черных Н. И. О неравенстве Дженсона в L_2. - Труды МИАН 88 (1967), 71-74.

[47] Селимова С. Г. Приближение суммами фурье функций имеющих производную удовлетворяющую условию Липщица. - Доклады АН СССР, 105 (1955) 909-912.

[48] Сонолов И. Г. Остаточний член ряда Фурье д... ...ерицци-руемых функций. Доклады АН СССР 103 (195... ...3-26,

[49] Стечкин С. Б. О приближений непрерывных фу...ний сумма-ми Фурье. - Успехи мат. наук, VII, вып. 4 ...) (1952), 139-141.

[50] Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближе... напреры-вных функций. - Известия 15 (1955), 221-24... .

[51] Стечкин С. Б. О найлучшем приближений некс...ых классов функций тригонометрическими полиномами. - ...естия 20 (1956) 643-648.

[52] Теляковский С. А. - Приближение дифференци...емых функ-ций частными сумами их рядов Фурье. - Мат. ...аметки, 1968. 4 № - 3, 291-306.

[53] Тиман А. Ф. Теория приближения функций дей...ительного переменого. - Москва, 1960.

[54] Тиман А. Ф. и Тиман М. Ф. Обобщенный модул ...епрерывности ш наилучшее приближение в среднем. - Докл. - Н СССР, № 1 (1950), 17-20.

[55] Vallée - Poussin, J. De la. Lesons sur l'a...oximations des fonctions d'une variable réalle. - Par..., 1919.

[56] Зигмунд А. Тригонометрические ряды, т. 1, ... - Москва "Мир" 1965.

[57] Zigmund A. A remark on the integral module... of continuity. - Univ. Nac. Tucuman Revista A-7 (1950), 2...-269.

[58] Zigmund A. Smooth functions. - Dukle Math. ...ournal 12 (1945), 47-76.

[59] Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы ф...ционального анализа. - Москва "Наука" 1965.