UNIVERZITET U BEOGRADU

Sava Krstić

KVADRATNI KVAZIGRUPNI IDENTITETI

doktorska disertacija

Beograd 1985

S A D R Ž A J

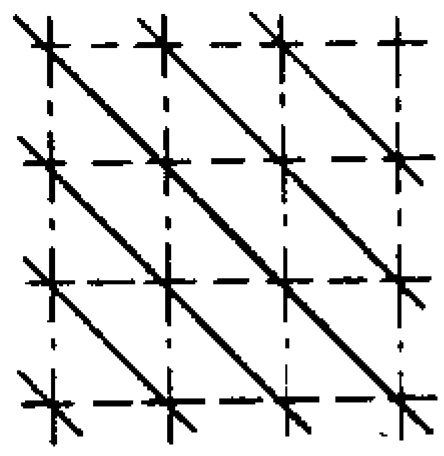
1. UVOD

Čest je slučaj da zdravi matematički objekti svoje zdravlje duguju sopstvenoj "podeljenoj ličnosti". Kakvo god bilo stanje zdravlja kod kvazigrupa, mogu bar reći da "kvazigrupe-latinski kvadrati-rešetke" jesu zanimljivo algebarsko-kombinatorno-geometrijsko trojstvo. Radi podsećanja slučajnog čitaoca slede definicije. Kvazigrupe su grupoidi sa jedinstvenim levim i desnim deljenjem; one čine varijetet, doduše tek u jeziku koji ima i simbole deljenja, sa aksiomama $x\cdot(x\backslash y)=y$, $(x/y)\cdot y=x$, $x\backslash(x\cdot y)=y$ i $(x\cdot y)/y=x$. Latinski kvadrat (nad skupom S) je kvadratna tablica dimenzija $|S|\times|S|$ u kojoj se svaki element od S javlja tačno jednom u svakoj vrsti i u svakoj koloni. Rešetku čine skupovi P (tačke) i L_1,L_2,L_3 (tri klase linija) sa relacijom incidencije koja zadovoljava uslove da svaka tačka pripada tačno jednoj liniji svake od klasa i da se svake dve linije iz različitih klasa seku u tačno jednoj tački.

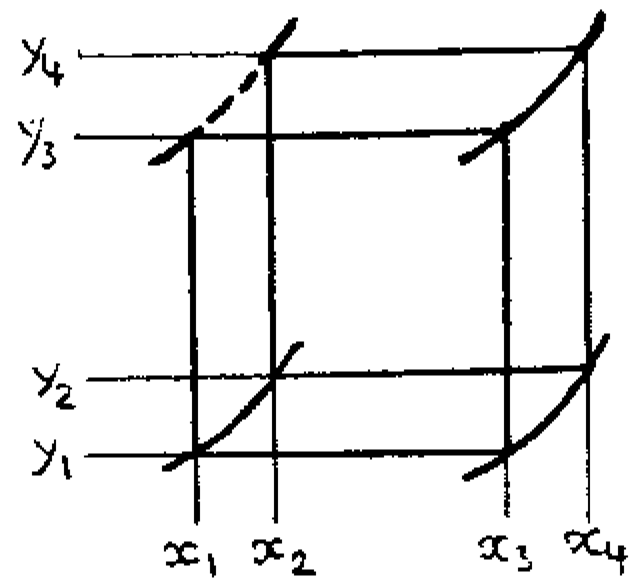
Specifičnost teorije kvazigrupa je u tome što uz izomorfizam ima još prirodno definisanih relacija velike bliskosti. Jer, ako uzmemo $\sigma\in \mathrm{Sym}(S)$ (= grupa svih permutacija skupa S) i u latinskom kvadratu nad S zamenimo svaki element x sa $\sigma(x)$, dobijeni latinski kvadrat se neće mnogo razlikovati od polaznog. Permutacija vrsta ili kolona takodje nije velika promena. Algebarski prevod svega ovoga se zove izotopija i definiše sa: kvazigrupe $(S,\cdot)$ i $(T,*)$ su izotopne ako postoje bijekcije $\xi,\eta,\zeta : S\to T$ takve da važi $\zeta(x\cdot y) = \xi(x)*\eta(y)$. Pogledajmo sad na tren rešetke. Kvazigrupa $(S,\cdot)$ daje nam rešetku u kojoj je $P=\{(x,y,z) \mid x\cdot y=z\}$

i $L_i=\{\ell_x^i \mid x\in S\}$, a incidencija definisana sa $(x,y,z)\in \ell_x^1,\ell_y^2,\ell$
i lako se vidi da izotopne kvazigrupe na ovakav način daju izomorfne rešetke. Zapravo, kvazigrupa je u izvesnom smislu koordinatizacija pridružene joj rešetke. Jer, u svakoj rešetki imamo "množenje" $L_1\times L_2\longrightarrow L_3$ definisano sa: $\ell_1\cdot\ell_2=\ell_3$ akko ℓ_3 sadrži presečnu tačku linija ℓ_1 i ℓ_2. Skupovi L_1,L_2,L_3 su istobrojni, pa ako su $S\xrightarrow{\alpha_i}L_i$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$ bijekcije, tada kvazigrupa $(S,*)$ definisana sa $x*y=z\Leftrightarrow \alpha_1x\cdot\alpha_2y=\alpha_3z$ koordinatizuje polaznu rešetku, što očigledno čini i svaki izotop od $(S,*)$. Dakl rešetke su "kvazigrupe do na izotopiju" i teorija kvazigrupa je na neki način "analitička geometrija" za teoriju rešetaka. Dalje tri klase linija stoje ravnopravno u svakoj rešetki i nema neke razlike medju rešetkama (P,L_1,L_2,L_3) i, na primer, $(P,L_3,L_1,L$ Odgovarajući pojam za kvazigrupe je <u>parastrofija</u> : $(S,\cdot)$ i $(S,*)$ su parastrofne ako je $x_1*x_2=x_3 \Leftrightarrow x_{\sigma 1}\cdot x_{\sigma 2}=x_{\sigma 3}$ za neko $\sigma\in \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$. <u>Izostrofija</u> je, po definiciji, proizvod izotopi i parastrofije; sve tri ove relacije su ekvivalencije na kvazigrupama.

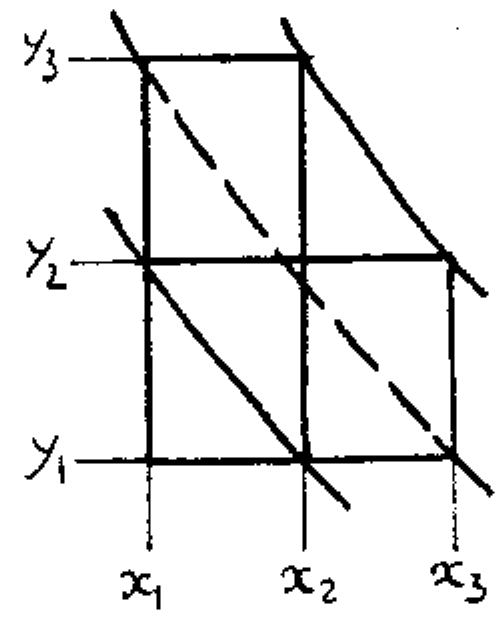
Problemi o kvazigrupama često nastaju algebraizacijom problema o latinskim kvadratima i rešetkama. To se dosta odnosi i na identitete koji su tema ovog istraživanja. Jedan ću primer da navedem dosta detaljno jer je od najranijih, a i centralan je za razmatranja koja će uslediti. Radi se o geometrijskim rešetkama - onima kod kojih je P otvoren skup u ravni, a svaka od linija neprekidna (diferencijabilna) kriva. Ovakve rešetke su tr desetih godina bile intenzivno istraživana tema diferencijalne geometrije [14]. Očigledan primer je rešetka koju čine familije paralelnih pravih, recimo $L_1=\{x=\mathrm{const.}\}$, $L_2=\{y=\mathrm{const.}\}$, $L_3=\{x+y=\mathrm{const.}\}$ (sl.1). Rešetke homeomorfne ovoj nazvane su regularnim. Pitanje karakterizacije regularnih rešetaka rešeno je



sl.1



sl.2



sl.3

na malo iznenadjujući način. Ispostavilo se da je za regularnost neophodno i dovoljno da budu zadovoljeni neki čisto kombinatorni uslovi. Nadjeno ih je više, a nama su ovde posebno važna sledeća dva. Prvi je <u>Reidemeisterov uslov</u> (up. sl.2)

(1-1) $\quad x_1y_1=x_2y_2 \wedge x_3y_1=x_4y_2 \wedge x_3y_3=x_4y_4 \Rightarrow x_1y_3=x_2y_4$,

a drugi <u>Thomsenov uslov</u> (sl.3)

(1-2) $\quad x_1y_2=x_2y_1 \wedge x_2y_3=x_3y_2 \Rightarrow x_1y_3=x_3y_1$.

Ovde x_i označavaju linije iz klase L_1, y_j linije iz klase L_2, a x_iy_j proizvod $L_1 \times L_2 \longrightarrow L_3$. Koordinatna kvazigrupa regularne rešetke mora biti izotopna koordinatnoj kvazigrupi rešetke sa sl.1, tj. aditivnoj grupi realnih brojeva. Nameće se pitanje karakterizacije kvazigrupa koje zadovoljavaju gornje uslove. I ispostavlja se (v. [2] ili odeljak 4 dole) da kvazigrupa zadovoljava uslov (1-1) akko je izotopna grupi, a zadovoljenje uslova (1-2) je ekvivalentno izotopiji sa abelovom grupom.

Crteži poput sl.2 i sl.3 zovu se <u>konfiguracije u rešetkama</u>, a odgovarajući kvaziidentiteti <u>uslovima zatvaranja</u>. Postoji čitava teorija o tome [9,11] u koju ovde nećemo ulaziti.

Zanimljivo je, medjutim, to što su kvaziidentiteti (1-1) i (1-2) kvadratni (u smislu da se svaka promenljiva javlja u njim tačno dva puta), koja ih osobina čini ekvivalentnim nekim, takodje kvadratnim, identitetima. Na primer, antecedentni deo od (1-2) možemo gledati kao $x_2=x_1y_2/y_1 \wedge x_3=x_1y_3/y_1$, pa je (1- ekvivalentno identitetu $E_a = ((xy/z)u=(xu/z)y)$. Slično se mož dobiti da je (1-1) ekvivalentnc sa $E_g = (x(y\backslash((z/u)v))= ((x(y\backslash z))/u)v)$ [8]. Dakle, varijeteti $\underline{\underline{G}}$ i $\underline{\underline{A}}$ svih grupnih izo topa, odnosno svih izotopa abelovih grupa, su definisani jednim kvadratnim identitetom: $\underline{\underline{G}} = \mathrm{var}E_g$, $\underline{\underline{A}} = \mathrm{var}E_a$.

Kvazigrupni varijeteti čine prilično slabo istraženu obla i mi ćemo se ovde baviti skoro isključivo (zbog ograničenosti up trebljene tehnike) kvadratnim varijetetima, tj. onima koji su de finisani kvadratnim identitetima. Već i to je dovoljno netrivijalno. Nije kao kod grupa gde kvadratni varijeteti nisu nikakva zanimljivost. Jer, tamo je svaki kvadratni identitet ekvivalenta jednom od sledeća tri: $x=x$, $xy=yx$ ili $x^2=1$. Nije za čudo da je i varijetet $\underline{\underline{B}}$ svih kvazigrupa izotopnih bulovim grupama (tj grupama u kojima važi $x^2=1$) takodje kvadratni. Naime, lako se dobija da je $\underline{\underline{B}} = \mathrm{var}E_b$, gde je $E_b = (xy/z=xz/y)$. Dokazaćemo (teorema 11.1) da su $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$, uz varijetet svih kvazigrupa, jedini kvadratni kvazigrupni varijeteti zatvoreni u odnosu na izotopiju. Ovaj rezultat ima izvestan značaj, jer je pitanje zat vorenosti za izotopiju fundamentalno za kvazigrupne varijetete.

Poznato je da zadovoljenje netrivijalnog identita često forsira kvazigrupu da bude izotopna grupi. Belousov [8] je istra živao uravnotežene identitete u jeziku $\{\cdot\}$, gde "uravnotežen" znači "svaka promenljiva se javlja tačno jednom na obe strane je nakosti". Njegov je rezultat da svaka kvazigrupa koja zadovoljav bar jedan neskrativ uravnotežen identitet mora biti grupni izotop. Da ne definišemo sad šta neskrativost znači, dovoljna je napomena da to nije jako restriktivan uslov. Nadovezujući se na ovaj rezultat i Taylorovo uopštenje [47] Krapež [26] je najposle dao karakterizaciju uravnoteženih identiteta E takvih da je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$. Posebnu pažnju ovde zaslužuje i rad Ette Falconer [20] gde se razmatra pitanje $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$ za proizvoljne (ne nužno uravnotežene) identitete. Dobijena nešto drukčijim pristupom, inspirisanim ranom Evansovom beleškom [18], teorema 1 iz [20] uopštava kako Belousovljev tako i netrivijalni deo Krapežovog rezultata.

Poznato je dalje da su mnogi uravnoteženi identiteti (na primer medijalni zakon $(xy)(zu)=(xz)(yu)$) zadovoljeni samo izotopima abelovih grupa. Prirodno je pitanje karakterizacije takvih identiteta. Postavio ga je Krapež [26], a parcijalni rezultati mogu se naći u [26,48,49]. Mi ćemo teoremama 10.1, 10.3 i 10.7 dati neophodne i dovoljne uslove koje kvadratni varijetet $\underline{\underline{V}}$ treba da zadovoljava da važi $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ ili $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$. Time će i gornji problem biti rešen.

Iz pomenute teoreme 11.1 sledi da je svaki izotopno invarijantni kvadratni identitet ekvivalentan jednom od identiteta $x=x$, E_g, E_a, E_b. Medjutim, tu ostaje problem neposrednog raspoznavanja izotopno invarijantnih identiteta. Mi ćemo u odeljku 11 definisati koherentne (kvazi)identitete; to će biti oni, poput (1-1) i (1-2), koji su očigledno izotopno invarijantni. Na žalost, koherentnost se neće podudariti sa izotopnom invarijantnošću, ali da postoji duboka veza izmedju ova dva pojma slediće iz teoreme 11.5. Koherentni kvaziidentiteti su zanimljivi i stoga što se javljaju i na sasvim drugom mestu - kod problema utapanja semigrupa u grupe. Klasična Maljcevljeva aksiomatizacija [36] klase utopivih semigrupa je sačinjena od koherentnih kvaziidentiteta posebnog, na vrlo složen način definisanog oblika. Teoremom 12.1 daćemo jednostavnu geometrijsku karakterizaciju ovih kvaziidentit

Svaki se kvazigrupni identitet E može posmatrati kao fur kcionalna jednačina po nepoznatoj kvazigrupnoj operaciji, a varijetet $\mathrm{var}E$ sledstveno kao skup rešenja te jednačine. Ovaj pristup neposredno vodi uopštenju - funkcionalnim jednačinama u kojima se javlja više od jedne kvazigrupne operacije. Dakle, svaki identitet u jeziku $\{*_1, *_2, \ldots, \backslash_1, \backslash_2, \ldots, /_1, /_2, \ldots\}$ može se pos matrati kao funkcionalna jednačina po nepoznatim operacijama $*_1, *_2, \ldots$, gde, naravno, $\backslash_i$ i $/_i$ treba posmatrati kao levo i desno deljenje koje odgovara operaciji $*_i$. Ekstremni slučaj imamo kada za svako i ukupan broj javljanja simbola $*_i$, $\backslash_i$ i $/_i$ je samo jedan. Ispostavilo se da je ovakve jednačine, tradicionalno nazvane generalisanim, najlakše rešavati. Mogućnost rešavanja generalisanih funkcionalnih jednačina ima neposrednu primenu u istraživanju varijeteta. Naime, od datog identiteta (u jeziku $\{*, \backslash, /\}$) odmah se pravi generalisana jednačina $\mathrm{gen}E$ - sve javljanja operacijskih simbola u E treba snabdeti različitim ir deksima. Na primer, ako je $E = ((x/y)*z=x*(y\backslash z))$ tad je $\mathrm{gen}E$ $= ((x/_1y)*_2z=x*_3(y\backslash_4z))$ ili, u pogodnijoj notaciji za generalisane jednačine, $\mathrm{gen}E = (A(B(x,y),z)=C(x,D(y,z)))$. U jednačini $\mathrm{gen}E$ tako učestvuje m operacijskih simbola, gde je m broj javljanja operacijskih simbola u E . Sada, ako znamo opšte rešenje $(*_1, \ldots, *_m)$ za $\mathrm{gen}E$, a ono je obično izraženo u nekakvim parametrima, onda treba "samo" videti kakve veze medju parametrima su neophodne i dovoljne da važi $*_1= \ldots =*_m$.

Ovo je ideja kojom su dobijani rezultati o $\mathrm{var}E$ za uravnotežene idetitete E - primenom prethodno dobijenih informacije o odgovarajućim generalisanim jednačinama. To je ideja koja će i ovde biti primenjena. Rešavaćemo tzv. slobodne kvadratne sisteme (pojam je ekvivalentan generalisanim kvadratnim funkcionalnim jednačinama) pa iz dobijenog opšteg rešenja izvući što se može o kvadratnim varijetetima. Rešavanje slobodnih kvadratnih sistema će nam uzeti najveći deo prostora i predstavlja celinu za sebe koja se nadovezuje na obiman rad znatnog broja autora i u izvesnom smislu ga zaokružuje. Početkom ove male teorije treba smatrati Belousovljevu teoremu o četiri kvazigrupe [7,4] . Ona tvrdi da kvazigrupe koje zadovoljavaju generalisanu jednačinu $A(x,B(y,z)) = C(D(x,y),z)$ moraju biti medjusobno izotopne i još izotopne nekoj grupi. Postoji ogroman broj radova napisanih na temu ove jednačine "uopštene asocijativnosti", up. [3] i reference navedene tu na str. 253. Lista [5,6,8,12,13,24-26,32,33,39,43,44] čini samo izbor iz hrpe radova posvećenih uravnoteženim kvazigrupnim jednačinama. Primenjeni funkcionalno-jednačinski metod je tako postepeno pojačavan dok nije dao rešenja proizvoljnih uravnoteženih jednačina.

Kako se uravnotežene jednačine rešavaju pokušaću sad da opišem u bitnim crtama. (Ideja potiče od Sadea [43].) Recimo da su $A_1,\dots,A_m$ operacijski simboli koji učestvuju u uravnoteženoj generalisanoj jednačini E . Definiše se jedna particija $C_1 \dot\cup \dots \dot\cup C_k$ skupa $\{A_1,\dots,A_m\}$ čije je svojstvo da za svako rešenje $(\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_m)$ kvazigrupe $\underline{A}_i$ i $\underline{A}_j$ su diizotopne kad god su A_i i A_j u istoj klasi particije. Neke od ovih klasa su "grupne" a neke "abelove", u smislu da ako A_i pripada grupnoj (abelovoj) klasi, tada $\underline{A}_i$ mora biti izotopna grupi (abelovoj grupi). Zatim sledi obrat, tj. opšte rešenje od E . Za svaki izbor $\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_k$ kvazigrupa na istom skupu S , uz pretpostavku da je $\underline{Q}_i$ grupa (abelova grupa) ako je C_i grupna (abelova) klasa, postoji rešenje $(\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_m)$ od E takvo da je $\underline{A}_i$ izotopna sa $\underline{Q}_j$, gde $A_i \in C_j$. Skup svih ovakvih rešenja je parametrizovan izvesnim brojem permutacija skupa S . Opšte rešenje od E zapisuje se eksplicitnim formulama po parametrima $\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_k$ i pomenutim permutacijama.

Krapež [27] je ovu šemu pokušao da primeni na slučaj kvadratnih generalisanih jednačina. Manje-više ista se tehnika dala upotrebiti, ali ovaj prelazak na širu klasu jednačina je doneo i neke osobenosti i poteškoće. Na primer, u definiciji particije $C_1\dot{\cup}\dots\dot{\cup}C_k$ datoj gore diizotopija mora biti zamenjena izostrofijom. Krapež je dobio formule opšteg rešenja za slučaj kada je particija trivijalna (k=1).

U odeljcima 3-9 biće dat kompletan tretman rešavanja generalisanih kvadratnih jednačina (doduše, radiće se u pogodnijim terminima slobodnih kvadratnih sistema). Upotrebljeni metod, mada prati gore opisanu šemu, bitno se razlikuje od do sada korišćenog funkcionalno-jednačinskog, a glavna mu je značajka geometričnost. Svakoj kvadratnoj jednačini E biće dodeljen jedan kubni graf $\Gamma(E)$ čiji skup temena je skup $\{A_1,\dots,A_m\}$ operacijskih simbola koji učestvuju u jednačini. Pokazaće se da je particija $C_1\dot{\cup}\dots\dot{\cup}C_k$ jasno geometrijski odredjena - A_i i A_j su u istoj klasi ako i samo ako postoje u $\Gamma(E)$ tri disjunktna puta koja ih spajaju. Definisaćemo nerastavljive jednačine kao one kod kojih je particija trivijalna (k=1 ili k=m); biće to upravo one jednačine čiji su grafovi nerastavljivi u izvesnom jednostavnom geometrijskom smislu. Dekompozicija grafa na nerastavljive faktore daće nam onda i dekompoziciju jednačine u izvestan broj nerastavljivih jednačina. Odredićemo opšte rešenje nerastavljivih jednačina, a potom, koristeći dekompoziciju, i opšte rešenje proizvoljnih jednačina.

Mislim da upotrebljeni geometrijski metod zaslužuje nekoliko posebnih rečenica komentara. (Hvaliti geometrijske dokaze u algebri nije potrebno, najčešće ih je dovoljno uporediti sa odgovarajućim "linearnim".) Dvodimenzioni kompleksi se poslednjih dvadesetak godina već toliko koriste u teoriji grupa da su tamo postali jedan od najmoćnijih metoda, v. [34, glave III i V] . Štaviše, pojavila se i definicija "kombinatorna teorija grupa = topologija u malim dimenzijama". I nema nikakve sumnje da su grupe najpogodnije strukture za ovakvu vrstu geometrizacije (v. odeljak 13). Medjutim, i slabije multiplikativne strukture često dopuštaju geometrizaciju svojih problema, što tek od nedavno postaje jasno. Za semigrupe o tome svedoče radovi [22,28,29,42] , a za kvazigrupe trebalo bi da ova teza bude dovoljno ubedljiva. U svakom slučaju, mislim da geometrizaciju treba imati na umu kad god se radi sa kvadratnim formulama. "Kvadratnost" grafova (svaka ivica je incidentna sa dva temena) ili lokalno planarnih 2-kompleksa (svaka ivica je incidentna sa dve oblasti) može tu biti od koristi. Kvadratne formule (najčešće su u pitanju identiteti i kvaziidentiteti) jesu dosta specijalne, ali možda i ne toliko koliko u prvi mah izgleda. Jer, ako je $\underline{\underline{V}}$ varijetet univerzalnih algebri definisan kvadratnim identitetima, može se dokazati da je svaki kvaziidentitet tačan na $\underline{\underline{V}}$ instanca nekog kvadratnog kvaziidentiteta tačnog na $\underline{\underline{V}}$. Dakle, relacija zavisnosti (kada $u=v$ važi u algebri u kojoj važi $u_1=v_1,\dots,u_n=v_n$) , fundamentalna relacija kada se radi sa algebrama datim generatorima i relatorima, u ovim slučajevima dopušta geometrizaciju. Ovo sve može biti predmet posebnog univerzalno-algebarsko-geometrijskog istraživanja, a kao primer, u odeljku 13 koji sadrži nužnu geometrijsku terminologiju za razmatranja u ovoj tezi, imamo van Kampenovu lemu o vizuelizaciji zavisnosti u grupama.

2. KVADRATNI IDENTITETI I KVAZIIDENTITETI

Ustaljene su oznake $^{-1}\underline{A}$ i $\underline{A}^{-1}$ za levo i desno deljenje koje odgovara kvazigrupnoj operaciji $\underline{A}$. Neka su t_1 i t_2 termi u jeziku koji čine binarni operacijski simboli A_i, $^{-1}A_i$, A_i^{-1} $(1 \leqslant i \leqslant k)$; kazaćemo tada da je $t_1=t_2$ <u>kvazigrupni identitet</u>, ili, što je više u skladu sa tradicijom, <u>kvazigrupna funkcionalna jednačina</u>. Ako su $\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_k$ kvazigrupe na skupu S , jasno je šta znači da je $(S,\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_k)$ <u>rešenje</u> identiteta $t_1=t_2$. Identitet u kom se javlja samo jedan operacijski simbol A_i (zajedno sa $^{-1}A_i$ i A_i^{-1}) zvaćemo <u>prostim identitetom</u> i pisati češće xy, $x\backslash y$ i x/y umesto $A(x,y)$, $^{-1}A(x,y)$ i $A^{-1}(x,y)$. Skup rešenja prostog identiteta je varijetet kvazigrupa. Druga krajnost je kada pretpostavimo da se za svako i najviše jedan od simbola A_i, $^{-1}A_i$, A_i^{-1} javlja u $t_1=t_2$ i to tačno jedanput. Takve identitete zvaćemo <u>slobodnim</u>. Upravo ovakvim identitetima ćemo se na početku i najviše baviti. Prvi koji su se u literaturi javili su

(2-1) $\quad A(x,B(y,z))=C(D(x,y),z)$

(2-2) $\quad A(B(x,y),C(u,v))=D(E(x,u),F(y,v))$

(2-3) $\quad P(Q(x,y),R(y,z))=S(x,z)$,

takozvane generalisane jednačine asocijativnosti, bisimetrije i tranzitivnosti [4].

Najistraženiju klasu identiteta čine <u>uravnoteženi</u> - oni kod kojih se svaka promenljiva javlja tačno po jednom i u t_1 i u t_2 . Uopštenje su <u>kvadratni identiteti</u> kod kojih se zahteva da svaka promenljiva ima tačno dva javljanja, bez zahteva da javljanja budu na raznim stranama jednakosti. Gornji identiteti su svi kvadratni, ali (2-3) nije uravnotežen.

Zajedno sa identitetima zgodno je posmatrati i <u>kvaziidentitete</u>, tj. univerzalne formule oblika $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_o$ gde je svaki φ_i identitet. Rešenje kvaziidentiteta se definiše na očigledan način. Ako je još i svaki od učestvujućih identiteta oblika $A_i(x_p,x_q)=x_r$, gde su x_p,x_q,x_r promenljive, kazaćemo da je kvaziidentitet <u>sveden</u>. Kvaziidentiteti $\psi \wedge A(t_1',t_1'')=t_2 \Rightarrow \varphi_o$ i $\psi \wedge t_1'=y' \wedge t_1''=y'' \wedge A(y',y'')=t_2 \Rightarrow \varphi_o$ su ekvivalentni (ovde su y' i y'' nove promenljive), a takodje su i kvaziidentiteti $\psi \Rightarrow A(t_1',t_1)=t_2$ i $\psi \wedge t_1'=y' \wedge t_1''=y'' \Rightarrow A(y',y'')=t_2$ ekvivalentni. Indukcijom po dužini učestvujućih terma sledi da je svaki (kvadratni) kvaziidentitet, pa, kao specijalan slučaj, i svaki (kvadratni) identitet - ekvivalentan svedenom (kvadratnom) kvaziidentitetu.

Antecedentni deo kvaziidentiteta može sadržavati "suvišne" identitete; najvažniji su, medjutim, oni kod kojih toga nema. Zvaćemo ih povezanim, a definicija je: $\Phi = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_o)$ je <u>povezan</u> ako se skup X svih promenljivih koje se javljaju u Φ ne može razbiti na dva neprazna podskupa X_1 i X_2 tako da za svako i promenljive u φ_i budu sve iz X_1 ili sve iz X_2. Povezanost se čuva pri gornjim dvema ekvivalencijama, pa sledi da je svaki povezan kvaziidentitet ekvivalentan povezanom svedenom kvaziidentitetu. U kvadratnom slučaju imamo i obrat: svaki kvadratni povezan kvaziidentitet je ekvivalentan kvadratnom identitetu. Dokaz ide indukcijom po kardinalnosti antecedentnog dela kvazidentiteta $\Phi = (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_o)$. Zbog povezanosti postoji promenljiva x koja se javlja jednom u φ_o i jednom u nekom φ_i (i nigde više). Tada je φ_o ekvivalentan identitetu oblika $x=t_o$, a φ_i ekvivalentan sa $x=t_i$, pa sledi da je Φ ekvivalentan sa povezanim kvadratnim kvaziidentitetom $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_{i-1} \wedge \varphi_{i+1} \wedge \dots \wedge \varphi_m \Rightarrow t_o=t_i$.

Dakle, veza izmedju kvadratnih identiteta i povezanih svedenih kvadratnih kvaziidentiteta je obostrana. Nije doduše 1-1 ni u jednom smeru, ali i to ćemo docnije raspraviti. Uglavnom, naš izbor će biti svedeni kvaziidentiteti, njih ćemo rešavati zbog toga što izgleda da bolje odslikavaju unutrašnju simetriju problema i što su pogodniji za razne indukcijske argumente. Sada za ilustraciju pogledajmo identitete (2-1) i (2-3). Ekvivalentni kvaziidentiteti su im redom

(2-4) $\quad A(x,u)=w \wedge B(y,z)=u \wedge D(x,y)=v \Rightarrow C(v,z)=w$

(2-5) $\quad P(u,v)=w \wedge Q(x,y)=u \wedge R(y,z)=v \Rightarrow S(x,z)=w$.

Preimenovanjem promenljivih (2-5) postaje

(2-6) $\quad P(u,x)=w \wedge Q(z,y)=u \wedge R(u,v)=x \Rightarrow S(z,v)=w$,

pa sledi da su rešenja identiteta (2-1) i (2-3) u bijektivnoj vezi, zadanoj parastrofijama očiglednim iz (2-5) i (2-6).

Ako već želimo da rešavamo identitete tako što ćemo rešavati pripadne (svedene) kvaziidentitete, može izgledati kao mana postupka (ili gubljenje simetrije) to što pripadni kvaziidentitet nije jednoznačno odredjen. Mogli smo, na primer, kao kvaziidentitet ekvivalentan sa (2-1) dobiti (2-4) , ali sa promenjenim mestima od $A(x,u)=w$ i $C(v,z)=w$. U stvari, mi na simetriji baš dobijamo, jer redosled identiteta u povezanom kvadratnom kvaziidentitetu uopšte nije bitan:

2.1 LEMA. <u>Neka je</u> $\Phi = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_o)$ <u>povezan kvadratni kvaziidentitet. Tada je</u> Φ <u>ekvivalentan svakom od kvaziidentiteta</u> $\Phi_i = (\varphi_o \wedge \varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{i-1} \wedge \varphi_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_i)$.

<u>Dokaz.</u> Neka je x promenljiva koja se javlja u φ_o i φ_i . Pišući φ_o i φ_i u ekvivalentnom obliku $x=t_o$ i $x=t_i$ vi-

dimo da su i Φ i Φ_i ekvivalentni kvaziidentitetu $\varphi_0 \wedge \ldots \wedge \varphi_{i-1} \wedge \varphi_{i+1} \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow t_0 = t_1$. Pošto se $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_m$ mogu nanizati tako da svaka dva uzastopna člana niza sadrže zajedničku promenljivu, sledi da su svi Φ_i ekvivalentni. $\square$

3. SISTEMI KVAZIGRUPNIH RELACIJA I NJIHOVI GRAFOVI

Na putu dalje simetrizacije našeg problema uvodimo sledeći pojam. Kazaćemo, naime, da je ternarna relacija $\underline{Q}$ na skupu S kvazigrupna relacija ako za svako $a,b \in S$ postoje jedinstveni $x,y,z \in S$ takvi da je $\underline{Q}(x,a,b)$, $\underline{Q}(a,y,b)$ i $\underline{Q}(a,b,z)$. Ekvivalencija $\underline{Q}(x,y,z) \Leftrightarrow \underline{A}(x,y)=z$ uspostavlja bijekciju medju kvazigrupnim relacijama i kvazigrupnim operacijama na istom skupu. Kazaćemo u ovakvom slučaju da su $\underline{Q}$ i $\underline{A}$ jedna drugoj pridružene. Za svaku kvazigrupnu relaciju $\underline{Q}$ definišemo njenih šest parastrofa $\underline{Q}^\sigma$, $\sigma \in \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$, sa $\underline{Q}^\sigma(x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow \underline{Q}(x_{\sigma 1},x_{\sigma 2},x_{\sigma 3})$. Takodje, kažemo da su $\underline{Q}_1$ i $\underline{Q}_2$ izotopne ako je $\underline{Q}_1(x,y,z) \Leftrightarrow \underline{Q}_2(\xi x,\eta y,\zeta z)$ za neke $\xi,\eta,\zeta \in \mathrm{Sym}(S)$; konačno, definišemo izostrofiju kao proizvod izotopije i parastrofije.. Očigledno je da su dve kvazigrupne relacije parastrofne/izotopne/izostrofne ako i samo ako su im pridružene operacije u istom odnosu.

Neka je Q ternarni relacijski simbol. Formulu oblika $Q(x,y,z)$, gde su x,y,z promenljive, zvaćemo atomom. Kvadratni sistem kvazigrupnih relacija (ili, kraće, sistem) je, po definiciji, svaki skup $\mathcal{S} = \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ atoma takav da se svaka promenljiv javlja u $\mathcal{S}$ tačno dvaput. Skup promenljivih koje učestvuju u φ_i označavaćemo sa $\mathrm{st}\varphi_i$. Za sistem ćemo reći da je

<u>povezan</u> ako nijedan njegov pravi podskup nije sistem. Rešenje definišemo samo za povezane sisteme. Neka su $\underline{Q}_1,\dots\underline{Q}_n$ svi relacijski simboli koji se javljaju u sistemu $\mathcal{S}$ za koji pretpostavljamo da je povezan. (Dopuštamo $n<m$, tj. da se neki od simbola javljaju u više atoma.) Iz leme 2.1 sledi da su sve formule $\Phi_i = (\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_{i-1}\wedge\varphi_{i+1}\wedge\dots\wedge\varphi_m \Rightarrow \varphi_i)$ ekvivalentne, pa ćemo $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_n)$, gde su $\underline{Q}_i$ kvazigrupne relacije na S , zvati <u>rešenjem</u> sistema $\mathcal{S}$ ako zadovoljavaju neku od formula Φ_i (tj. sve njih). Kad imamo rešenje u kojem je $\underline{Q}_1=\dots=\underline{Q}_n=\underline{Q}$ kazaćemo prosto da $\underline{Q}$ zadovoljava $\mathcal{S}$ ili da je $\underline{Q}$ rešenje od $\mathcal{S}$. Sisteme u kojima se svaki operacijski simbol javlja tačno jednom zvaćemo <u>slobodnim</u> i njima ćemo se i najviše baviti. Kod slobodnog sistema $\mathcal{S}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ uvek ćemo pretpostavljati da je Q_i relacijski simbol koji se javlja u φ_i .

Dva sistema koji se razlikuju samo po redosledu pojavljivanja promenljivih u atomima zvaćemo <u>parastrofnim</u>. Tada su, očigledno, rešenja jednog sistema parastrofi rešenja drugog. Neka je sada $\Phi = (\varphi_1\wedge\dots\wedge\varphi_m \Rightarrow \varphi_o)$ povezan sveden kvaziidentitet. Ako je $\varphi_i = (A_j(x_p,x_q)=x_r)$, definišemo atome $\hat{\varphi}_i = Q_j(x_p,x_q,x_r)$ i pridružen sistem $\mathcal{S}(\Phi) = \{\hat{\varphi}_o,\dots,\hat{\varphi}_m\}$. Tada je $(S,\underline{A}_1,\dots,\underline{A}_n)$ rešenje kvaziidentiteta Φ ako i samo ako je $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_n)$, gde je $\underline{Q}_j$ kvazigrupna relacija pridružena operaciji $\underline{A}_j$, rešenje sistema $\mathcal{S}(\Phi)$. Tako se rešenja svedenih kvadratnih kvaziidentiteta direktno dobijaju iz rešenja odgovarajućih sistema. Prema rečenom u prethodnom odeljku, sledi da se rešenja proizvoljnog povezanog kvadratnog kvaziidentiteta (važan specijalan slučaj su kvadratni identiteti) dobijaju iz rešenja pripadnog sistema. Slobodnim identitetima će, naravno, odgovarati slobodni sistemi. Na primer, sistemi

$$\underline{Ass} = \{A(xuv),B(yzu),C(vzu),D(xyv)\}$$

i $\qquad$ <u>Bis</u> = $\{A(pqt), B(pxy), C(vqu), D(rst), E(vxy), F(vsy)\}$

odgovaraju redom identitetima (2-1) i (2-2) . (Izostavili smo zareze koji razdvajaju promenljive u atomima, što ćemo, kad je bez loših posledica po čitljivost, činiti i dalje.)

Pogledajmo opšte rešenje identiteta (2-1) :

$$\underline{A}(x,y) = \alpha x\cdot\eta y \qquad \underline{B}(x,y) = \eta^{-1}(\beta x\cdot\gamma y)$$

$$\underline{C}(x,y) = \theta x\cdot\gamma y \qquad \underline{D}(x,y) = \theta^{-1}(\alpha x\cdot\beta y) \ .$$

Ovde je $\cdot$ proizvoljna grupna operacija, a $\alpha,\beta,\gamma,\eta,\theta$ proizvoljne permutacije skupa na kom je $\cdot$ definisana [4]. Vidljivo je da je ovo rešenje izvedeno iz najočiglednijeg rešenja $\underline{A}(x,y) = \underline{B}(x,y) = \underline{C}(x,y) = \underline{D}(x,y) = x\cdot y$ dodavanjem pet permutacija na pogodnim mestima. Može se slično, polazeći od ma kog rešenja slobodnog identiteta ili sistema, izvesti čitava klasa novih rešenja koja se od polaznog razlikuju tek na permutacije baznog skupa. Odmah ćemo to formalizovati (za sisteme).

Neka je $\mathcal{S} = \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ povezan slobodan sistem, X skup promenljivih koje učestvuju u njemu i $\mathcal{R} = (S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ jedno njegovo rešenje. Neka je $\Lambda : X \to \mathrm{Sym}(S)$ proizvoljna funkcija. Definišemo $\Lambda\mathcal{R} = (S,\underline{Q}_1',\dots,\underline{Q}_m')$ sa

$$\underline{Q}_i'(x,y,z) \Leftrightarrow \underline{Q}_i'(\Lambda(x_p)x, \Lambda(x_q)y, \Lambda(x_r)z) \ ,$$

gde je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$. Lako se vidi da je i $\Lambda\mathcal{R}$ rešenje od $\mathcal{S}$ i mi ćemo reće da su $\mathcal{R}$ i $\Lambda\mathcal{R}$ <u>slična rešenja</u>. Štaviše, mi ovde imamo dejstvo grupe "sličnosti" $\mathrm{Sim}(\mathcal{S},S) = \mathrm{Sym}(S)^X$ na skupu svih rešenja sistema $\mathcal{S}$ sa baznim skupom S . Orbite ovog dejstva su upravo klase sličnih rešenja.

Svakom se sistemu na prirodan način može pridružiti jedan graf, od čije topologije, ispostaviće se, zavise neke najvažnije osobine sistema. Neka je onda $\mathcal{S} = \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ i $X = \{x_1,\dots,x_n\}$ skup promenljivih koje učestvuju u $\mathcal{S}$; primetimo da je $3m=2n$. Definišemo $\Gamma(\mathcal{S})$ - graf pridružen sistemu $\mathcal{S}$ - kao neorijentisan graf čija temena su $\varphi_1,\dots,\varphi_m$, a ivice $x_1,\dots,x_n$; krajnje tačke ivice x_p su oni φ_i i φ_j u kojima se x_p javlja. (Moguće je $i=j$, u kom slučaju je x_p petlja.) Očigledno, $\Gamma(\mathcal{S})$ je povezan graf ako i samo ako je $\mathcal{S}$ povezan sistem. Očigledno je takodje da je $\Gamma(\mathcal{S})$ kubni graf (svako teme ima stepen tri), te da je svaki kubni graf graf nekog sistema. Štaviše, svaki kubni graf je graf nekog slobodnog sistema - jedinstvenog do na parastrofiju. I još jedna notacijska primedba: kad je $\mathcal{S}$ slobodan sistem, temena grafa $\Gamma(\mathcal{S})$ ćemo radije označavati sa $Q_1,\dots,Q_m$.

Kao primer, na sl.4 imamo prikazane grafove sistema <u>Ass</u> i <u>Bis</u>. Prvi je kompletni graf K_4 sa četiri temena, a drugi je kompletni bipartitni graf $K_{3,3}$.

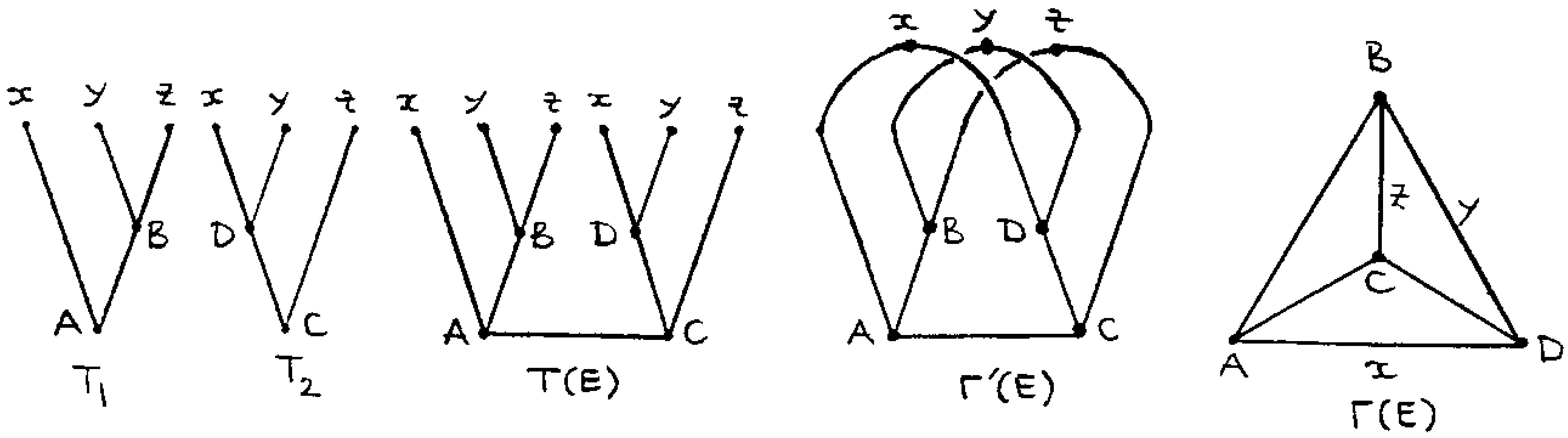
sl.4

Vratimo se načas identitetima. Ako je E kvadratni identitet, tada (odeljak 2) imamo pridružen mu sveden kvaziidentitet Φ a ovome pridružen sistem $\mathcal{S}(\Phi)$. Graf identiteta E je, po definiciji, graf sistema $\mathcal{S}(\Phi)$. On je topološki, tj. do na oznake ivica i temena, jedinstveno odredjen. Ako dva slobodna identiteta E_1 i E_2 imaju homeomorfne grafove, tada su im pridruženi sistemi isti do na parastrofiju. Sledi da su rešenja od E_1

i E_2 u direktnoj bijektivnoj vezi. Tačnije, ako su $A_1,\ldots,A_m$ i $B_1,\ldots,B_{m'}$ operacijski simboli koji se javljaju u E_1 i E_2 respektivno, tada je $m=m'$ i postoje $\sigma \in \mathrm{Sym}\{1,\ldots,m\}$ i $\sigma_1,\ldots,\sigma_m \in \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$ tako da je $(S,\underline{A}_1,\ldots,\underline{A}_m)$ rešenje od E_1 ako i samo ako je $(S,\underline{A}_{\sigma 1}^{\sigma_1},\ldots,\underline{A}_{\sigma m}^{\sigma_m})$ rešenje od E_2. Zvaćemo identitete sa homeomorfnim grafovima <u>ekvivalentnim</u>. Primer su (2-1) i (2-2). Sada, s obzirom da su za uravnotežene slobodne identitete poznate formule opšteg rešenja [32], od važnosti je pitanje da li je svaki kvadratni identitet ekvivalentan uravnoteženom, što bi, ako bi bilo tačno, već završilo posao rešavanja ovih potonjih. To ipak nije tačno, kao što ćemo ubrzo videti. Znatno docnije, doćićemo do suptilnije varijante istog pitanja, a i tu će odgovor biti negativan (v. kraj odeljka 7).

Neka je $E=(t_1=t_2)$ kvadratni identitet; evo kako se može dobiti $\Gamma(E)$, a da se ne traži pridruženi sistem. Neka su T_1 i T_2 drveta koja odgovaraju termima t_1 i t_2. (Termovska drveta su dosta korišćena kod rešavanja kvazigrupnih funkcionalnih jednačina, v. npr. [8,17,27].) U svakom od drveta T_i jedno teme je stepena dva (bazno teme), izvestan broj je stepena jedan (ona su u direktnoj vezi sa javljanjima promenljivih u t_i), a sva ostala temena su stepena tri. Neka je $T(E)$ drvo dobijeno povezivanjem baznih temena od T_1 i T_2 pomoću jedne nove ivice. Ako u $T(E)$ identifikujemo sva temena stepena jedan koja odgovaraju javljanjima iste promenljive (zbog kvadratnosti ova identifikacija ide u parovima) dobićemo graf $\Gamma'(E)$ sa izvesnim brojem temena stepena dva. Najposle, ignorisanjem ovih temena upravo se dobija $\Gamma(E)$. Drugim rečima, $\Gamma'(E)$ je dobijen od $\Gamma(E)$ podelom nekih od ivica na dve. Slika 5 ilustruje sve ovo na primeru identiteta (2-1).

Primetimo da je drvo $T'(E)$ koje dobijamo od $T(E)$ uda-



sl.5

ljavanjem svih ekstremalnih ivica (ivica incidentnih temenu stepena jedan) - maksimalno drvo u $\Gamma(E)$. Ako je E uravnotežen, tada udaljavanjem iz $T'(E)$ ivice koja spaja bazna temena od T_1 i T_2 dobijaju se dva drveta T_1' i T_2' takva da svaka ivica od $\Gamma(E)$ koja nije ivica od T_1' ili T_2' povezuje jedno teme od T_1' sa temenom od T_2' . S druge strane, ako je dat kubni graf Γ , maksimalno drvo T u njemu i ivica e maksimalnog drveta,tada je lako naći identitet E takav da je $\Gamma = \Gamma(E)$, $T = T'(E)$, a e ivica koja spaja bazna temena odgovarajućih drveta T_1 i T_2 . Dakle,

3.1 **STAV.** Identitet E je ekvivalentan uravnoteženom identitetu ako i samo ako postoje poddrveta T_1' i T_2' od $\Gamma(E)$ takva da svaka ivica od $\Gamma(E)$ ili pripada nekom od drveta T_1', T_2' ili spaja teme od T_1' sa temenom od T_2' . □

3.2 **POSLEDICA.** Postoji kvadratni identitet koji nije ekvivalentan nijednom uravnoteženom identitetu.

Dokaz. Primer je svaki E takav da $\Gamma(E)$ sadrži most (ivicu čije udaljavanje raspovezuje $\Gamma(E)$). □

Vraćamo se sistemima kvazigrupnih relacija. Njihovu povezanost ćemo uvek pretpostavljati, i kada je ne pomenemo eksplicitno. Neka je onda $\mathscr{S} = \{\varphi_1,\dots,\varphi_{m}\}$ povezan sistem, $Q_1,\dots,Q_{m'}$ operacijski simboli koji učestvuju u $\mathscr{S}$ i $\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_{m'}$ kvazigrupne relacije na nekom skupu S. Za svaku funkciju $\phi : X \longrightarrow S$, gde je X skup promenljivih koje učestvuju u $\mathscr{S}$, označimo sa φ_i^ϕ vrednost - tačno ili netačno - formule $\underline{Q}_j(\phi(x_p),\phi(x_q),\phi(x_r))$. (Ovde su j,p,q,r takvi da je $\varphi_i = Q_j(x_p,x_q,x_r)$.) Već znamo da je $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_{m'})$ rešenje od $\mathscr{S}$ ako i samo ako za svako $\phi : X \longrightarrow S$ iz tačnosti $m-1$ formula φ_i sledi tačnost one preostale. One funkcije $\phi : X \longrightarrow S$ za koje su sve formule $\varphi_1^\phi,\dots,\varphi_m^\phi$ tačne zvaćemo <u>valuacijama na</u> X <u>u odnosu na</u> $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_{m'})$ ili, kraće, <u>valuacijama na</u> X, kada je nedvosmisleno sa kojim kompletom kvazigrupnih relacija radimo. Sledi važna generalizacija ovog pojma: kažemo da je funkcija $\phi : Y \longrightarrow S$, gde je $Y \subseteq X$, <u>valuacija na</u> Y ako je formula φ_i^ϕ tačna za svako i za koje ima smisla pitati za njenu tačnost, tj. za svako i takvo da je $st\varphi_i \subseteq Y$. Za $Y \subseteq X$ definišemo takodje $\Gamma(Y)$ - minimalan podgraf od $\Gamma(\mathscr{S})$ koji sadrži sve ivice iz Y. Pretpostavimo da teme φ_i ima stepen dva u $\Gamma(Y)$; tada je $st\varphi_i = \{x_p,x_q,x_r\}$, gde $x_q,x_r \in Y$ i $x_p \notin Y$ (moguće je $x_q = x_r$!). Sledi da se svaka valuacija ϕ na Y širi na jedinstven način do funkcije $\hat{\phi} : Y \cup \{x_p\} \longrightarrow S$ za koju je $\varphi_i^{\hat{\phi}}$ tačno. Ova $\hat{\phi}$ će biti valuacija na $Y \cup \{x_p\}$ osim možda u slučaju kad oba temena incidentna ivici x_p imaju stepen dva u $\Gamma(Y)$. Kažemo sada prirodn da je $Y \subseteq X$ <u>zatvoren</u> skup ako $\Gamma(Y)$ nema temena stepena dva. A za svako $Y \subseteq X$ definišemo $Cl(Y)$ - najmanji zatvoren skup koji sadrži Y. Iz prethodnih razmatranja lako sledi

3.3 LEMA. <u>Svaka valuacija na</u> Y <u>ima najviše jedno proširenje na</u> $Cl(Y)$. $\square$

Kazaćemo dalje da je $Y \subseteq X$ <u>nezavisan</u> skup ako je svaka

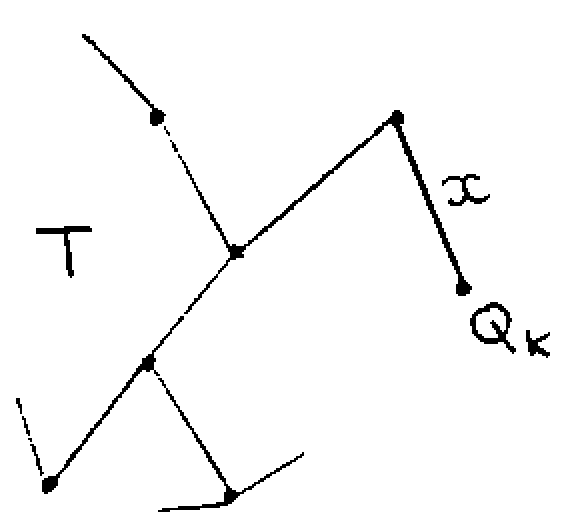
funkcija $Y \subseteq X$ valuacija na Y ; svaki maksimalan nezavisan skup zvaćemo <u>bazom</u> . U sledećoj lemi i dalje koristimo oznaku $Y^c = X - Y$

3.4 LEMA. <u>Skup Y je nezavisan ako i samo ako $\Gamma(Y)$ ne sadrži teme stepena tri, tj. ako i samo ako $\Gamma(Y^c)$ sadrži sva temena od $\Gamma(\mathcal{S})$. Skup Y je baza ako i samo ako je $\Gamma(Y^c)$ maksimalno drvo u $\Gamma(\mathcal{S})$</u> . □

3.5 LEMA. <u>Neka je $Y \subseteq X$ takav da je $\Gamma(Y^c)$ drvo. Tada je $(S, \underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_{m'})$ rešenje sistema $\mathcal{S}$ ako i samo ako se svaka valuacija na Y proširuje do valuacije na X</u> .

<u>Dokaz</u>. Indukcija po $|Y^c|$. Ako je $|Y^c| = 1$, neka je x ivica iz Y^c i φ_i, φ_j incidentna joj temena. Svaka valuacija na Y se jedinstveno proširuje do funkcije $\hat{\phi}: X \to S$ takve da je $\varphi_i^{\hat{\phi}}$ tačno. Obrnuto, svaka funkcija $\hat{\phi}: X \to S$ za koju je $\bigwedge_{k \neq j} \varphi_k^{\hat{\phi}}$ tačno je proširenje neke valuacije na Y . Prema definiciji, $(S, \underline{Q}_1, \ldots, \underline{Q}_{m'})$ je rešenje ako i samo ako je za svaku funkciju $\hat{\phi}: X \to S$ formula $\bigwedge_{k \neq j} \varphi_k^{\hat{\phi}} \Rightarrow \varphi_j^{\hat{\phi}}$ tačna i naše tvrdjenje sledi.

Pretpostavimo sad da je $T = \Gamma(Y^c)$ drvo koje sadrži više od jedne ivice. Neka je x ekstremalna ivica od T , $Y_1 = Y \cup \{x\}$ i $T_1 = \Gamma(Y_1^c)$. Jasno, T_1 je dobijeno odstranjivanjem ivice x iz T . Neka je Q_k ekstremalno teme od T incidentno ivici x (sl.6). Tada je $\{i \mid st\varphi_i \subseteq Y_1\} = \{i \mid st\varphi_i \subseteq Y\} \cup \{Q_k\}$, pa se svaka valuacija ϕ na Y jedinstveno proširuje do valuacije $\hat{\phi}$ na Y_1 . Veza $\phi \longleftrightarrow \hat{\phi}$ uspostavlja bijekciju skupova valuacija na Y i na Y_1 . Prema tome, svaka valuacija na Y se proširuje do valuacije na X ako i samo ako se svaka valuacija na Y_1 proširuje do valuacije na X . Lema sledi po indukciji. □

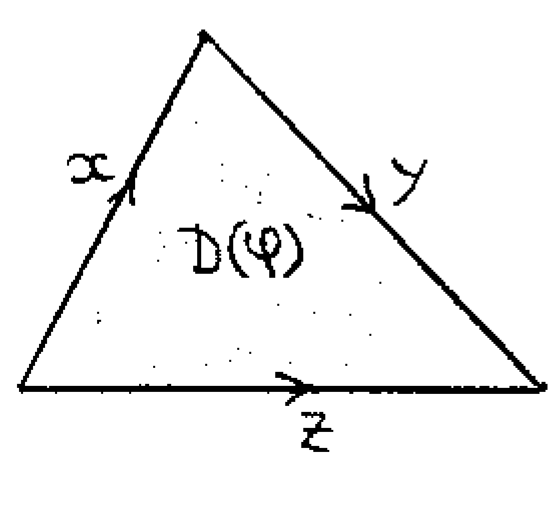


sl.6

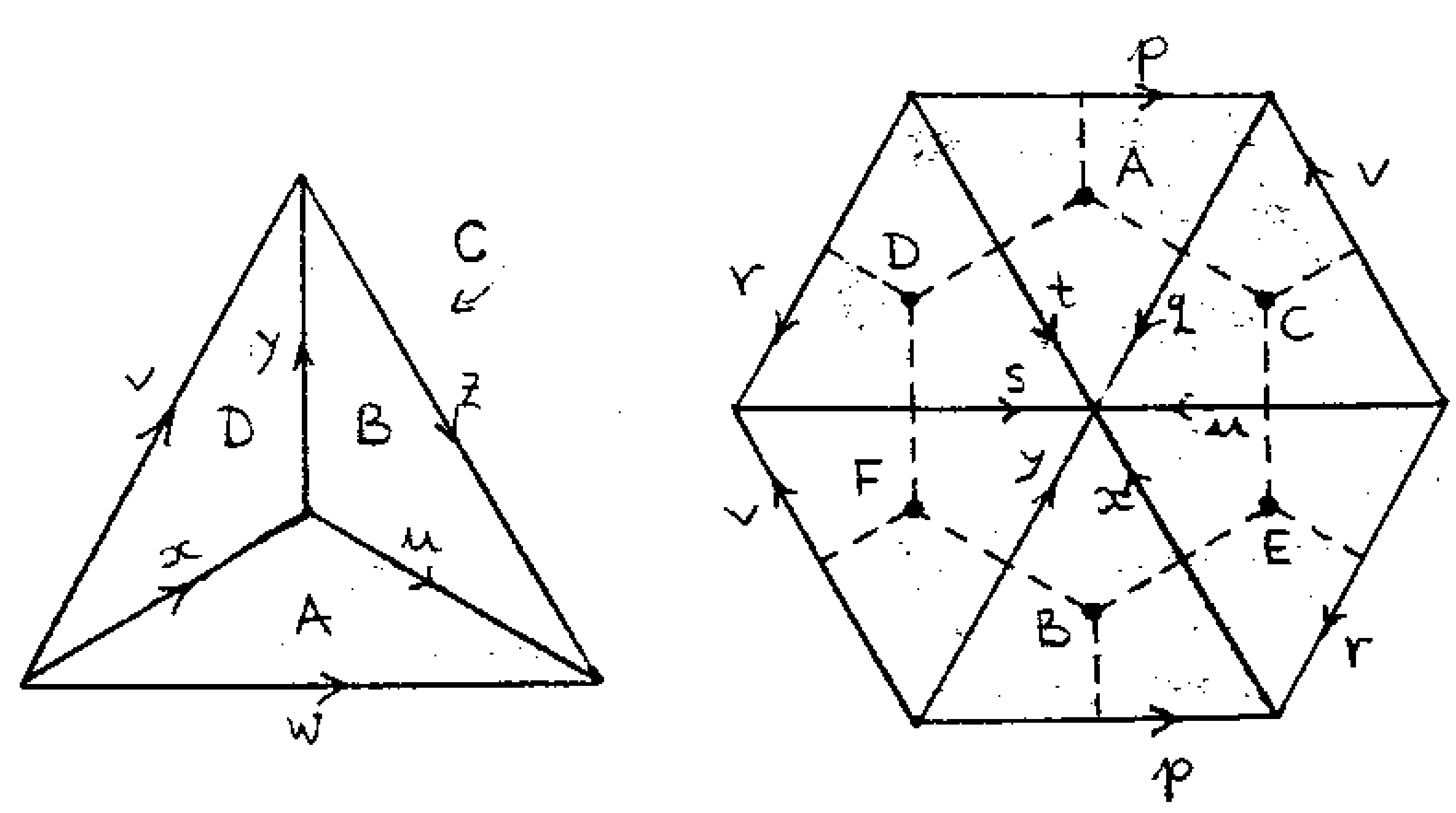
3.6 POSLEDICA. Neka je Y baza sistema $\mathcal{S}$. Tada je $Cl(Y)=X$ i $(S,Q_1,\ldots,Q_m')$ je rešenje od $\mathcal{S}$ ako i samo ako se svaka funkcija $Y \to S$ proširuje do valuacije. □

Na kraju, definisaćemo još jedan geometrijski objekt pridružen sistemu. Ovaj je dvodimenzionalan. Svakom atomu $\varphi = A(x,y,z)$ dodeljujemo trougao $D(\varphi)$ čije ivice su orijentisane i označene sa x,y,z kao na sl.7 . Sad ako je $\mathcal{S}=\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ sistem, uzmimo trouglove $D(\varphi_1),\ldots,D(\varphi_m)$ i identifikujmo jednako označene strane, respektujući njihovu orijentaciju. Identifikacija ide u parovima, pa je kompleks $K(\mathcal{S})$ dobijen na ovaj način zatvorena površ [45, str.69]. Na sl.8 su prikazani $K(\underline{Ass})$ i $K(\underline{Bis})$; prva površ je sfera, a druga je torus. Površ $K(\mathcal{S})$ zvaćemo van Kampenovim dijagramom sistema $\mathcal{S}$ (up. odeljak 13) .

Označimo sa $K^{(1)}(\mathcal{S})$ graf koji obrazuju temena i ivice trouglova $D(\varphi_1),\ldots,D(\varphi_m)$ na površi $K(\mathcal{S})$. Lako se vidi da je graf dualan grafu $K^{(1)}(\mathcal{S})$ upravo $\Gamma(\mathcal{S})$. Graf $\Gamma(\underline{Bis})$ je $K_{3,3}$ i nacrtan je isprekidanom linijom na sl.8 .



sl.7



sl.8

4. REIDEMEISTEROV I THOMSENOV USLOV VS. TEOREME O ČETIRI I ŠEST KVAZIGRUPA

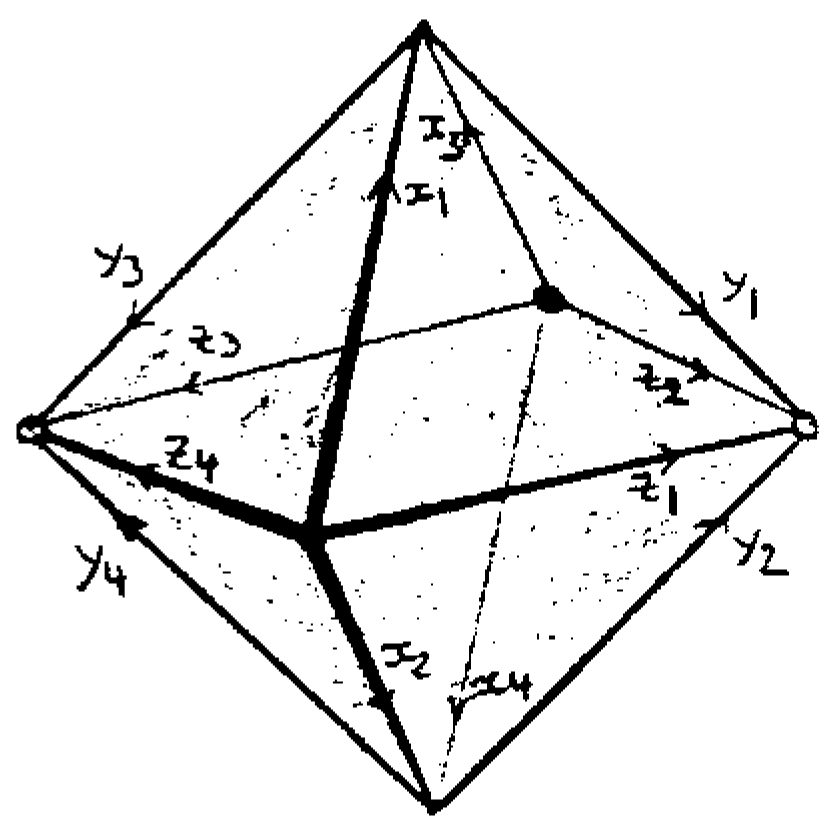
Stavovi koje dokazujemo u ovom odeljku su opštepoznati; čitalac može naći lep prikaz u [2]. Dokazujemo ih ovde radi potpunosti izlaganja. A i stoga što su dokazi nešto različiti od postojećih. Ne može se reći da su dokazi koje nudimo jednostavniji ; izvodjenje stavova o četiri i šest kvazigrupa iz Reidemeisterovog i Tomsenovog uslova zaista izgleda kao egzibicija, ali da ona možda i nije beskorisna svedoči opažanje da su dokazi delova (a) i (b) stava 4.2 toliko slični da jako sugerišu postojanje jednog opšteg tvrdjenja čije bi instance bili i 4.2(a) i 4.2(b). Formulacija i dokaz tog opšteg tvrdjenja ostaju zasad nepoznati.

Pošto ćemo raditi u terminima kvazigrupnih relacija, nužna nam je sledeća definicija. Naime, kazaćemo da je kvazigrupna relacija <u>lupna relacija</u> (<u>grupna relacija</u>, <u>abelova relacija</u>) ako joj je pridružena kvazigrupna operacija lupna (grupna, odnosno grupna i komutativna). Očigledno, kvazigrupna relacija je grupna ako i samo ako zadovoljava sistem <u>Ass</u> (tj. $\underline{A}$ je grupna ako i samo ako je $(S,\underline{A},\underline{A},\underline{A},\underline{A})$ rešenje od <u>Ass</u>). Nije teško videti zatim da je kvazigrupna relacija abelova ako i samo ako zadovoljava sledeći parastrof od <u>Ass</u> : <u>Ass'</u> $= \{A(xuw),B(yzu),C(vzw),D(yxv)\}$. (Jer, kvazigrupa je abelova grupa ako i samo ako zadovoljava identitet $x\cdot yz=yx\cdot z$.) Zapazimo još da je grupna relacija izotopna svakom od svojih parastrofa (npr. $xz=y \Leftrightarrow x^{-1}y=z$), pa stoga pojmovi izotopija i izostrofija znače isto za grupne relacije.

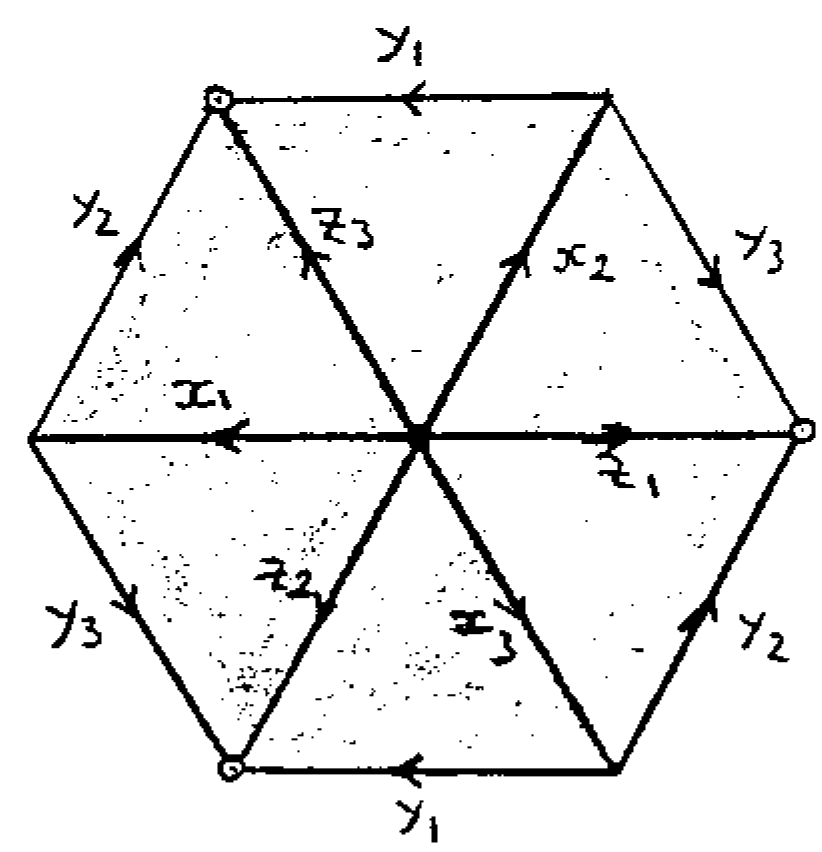
Reidemeisterov uslov (v. uvod) možemo pisati i ovako:

$x_1y_1=z_1 \wedge x_2y_2=z_1 \wedge x_3y_1=z_2 \wedge x_4y_2=z_2 \wedge x_3y_3=z_4 \wedge x_4y_4=z_4 \wedge x_1y_3=z_3$ $\Rightarrow x_2y_4=z_3$, pa definišemo "Reidemeisterov sistem"

Reid = $\{A(x_1y_1z_1), A(x_2y_2z_1), A(x_3y_1z_2), A(x_4y_2z_2), A(x_3y_3z_4),$ $A(x_4y_4z_4), A(x_1y_3z_3), A(x_2y_4z_3)\}$. Graf ovog sistema je "kocka", a van Kampenov dijagram oktaedar (sl.9). Slično nam Thomsenov uslov daje sistem Thom = $\{A(x_1y_2z_3), A(x_2y_1z_3), A(x_2y_3z_1),$ $A(x_3y_2z_1), A(x_3y_1z_2), A(x_1y_3z_2)\}$ čiji graf (sl.10) je $K_{3,3}$, a van Kampenov dijagram torus. Primetimo da se Thom i Bis razlikuju samo po tome što su u Thom svi relacijski simboli jednaki, a u Bis su svi različiti.



sl.9



sl.10

4.1 STAV. Kvazigrupna relacija je izotopna grupnoj relaciji (abelovoj relaciji) ako i samo ako zadovoljava Reid (Thom) .

Dokaz. 1."samo ako" Odmah se vidi da su klase rešenja sistema Reid i Thom zatvorene u odnosu na izotopiju. Dakle, dovoljno je dokazati da svaka grupna relacija zadovoljava Reid i svaka abelova da zadovoljava Thom . Znajući gornje van Kampenove dijagrame, to sledi iz stava 13.2. A može se i neposredno lako proveriti.

2."ako" Neka A zadovoljava Reid . Pošto je Reid zatvoren u odnosu na izotopiju i pošto je svaka kvazigrupna relacija izotopna lupnoj, možemo pretpostaviti da je A lupna relacija, tj. da je $A(1,x,x)$ i $A(x,1,x)$ tačno za svako x . Treba dokazati da $\underline{A}$ zadovoljava Ass . Zaista, ako je Φ implikacija čiji antecedentni deo čini konjunkcija prvih sedam atoma sistema Reid, a konsekventni deo je osmi atom tog sistema, tada $\underline{A}$ zadovoljava Φ . Uvrštavanjem $x_3=y_2=1$, $x_1=x$, $x_4=y_1=z_2=y$, $y_4=z$, $x_2=z_1=v$, $y_3=z_4=u$, $z_3=w$ u Φ dobija se $\underline{A}(xuw) \wedge \underline{A}(yzu) \wedge \underline{A}(xyv) \Rightarrow \underline{A}(vzw)$. Slično se dokazuje i da lupna relacija koja zadovoljava Thom mora zadovoljavati Ass′ . □

4.2 STAV. (Teorema o četiri i o šest kvazigrupa.)

(a) Ako je $(S,\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D})$ rešenje sistema Ass , tada su $\underline{A},\underline{B},\underline{C}$ i $\underline{D}$ izotopne jednoj istoj grupnoj relaciji.

(b) Ako je $(S,\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D},\underline{E},\underline{F})$ rešenje sistema Bis , tada su $\underline{A},\underline{B},\underline{C},\underline{D},\underline{E}$ i $\underline{F}$ izotopne jednoj istoj abelovoj relaciji.

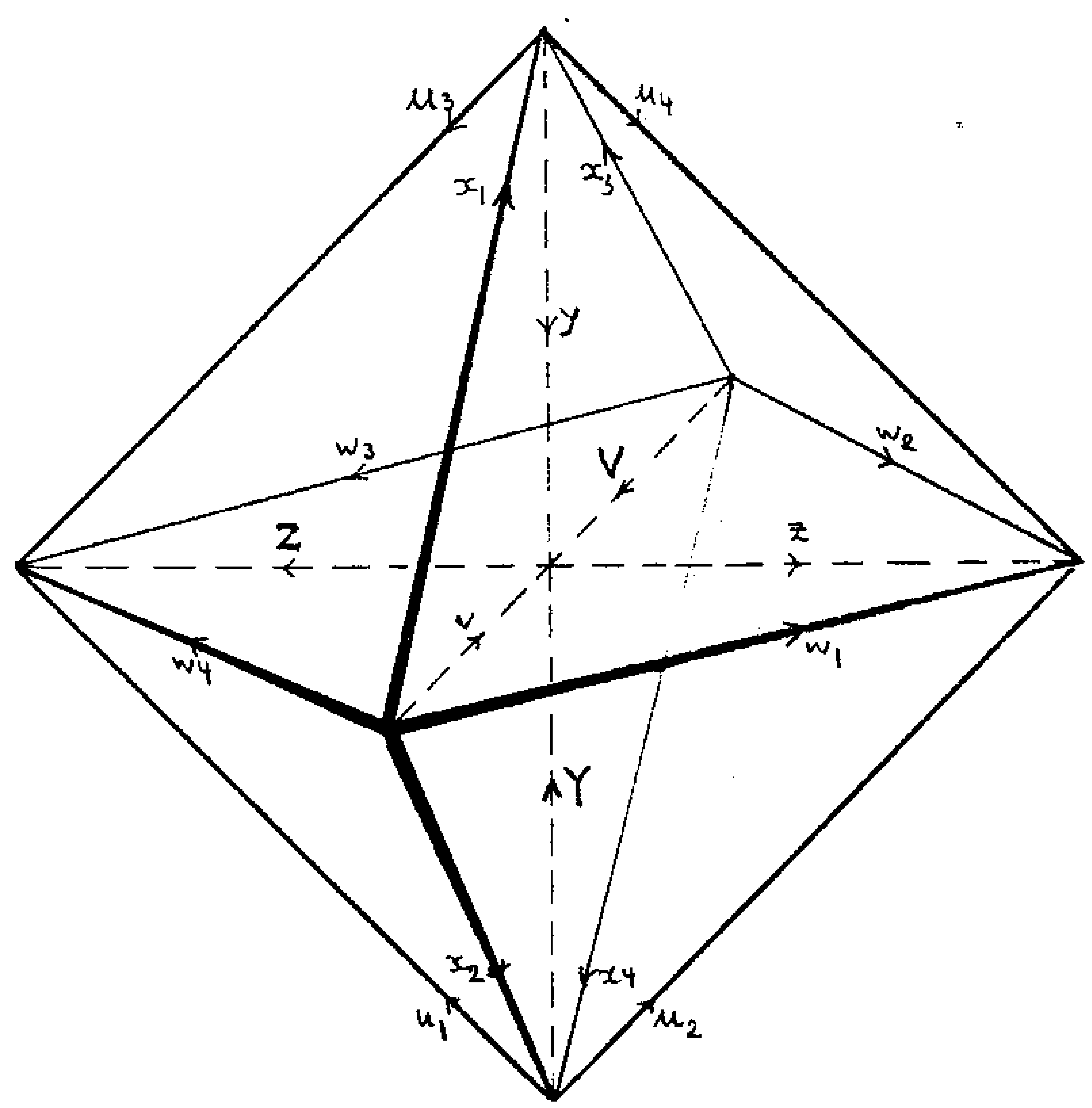
Dokaz. Izotopnost svih učestvujućih kvazigrupnih relacija u svakom od rešenja lako se proverava, pa izostavljamo taj deo dokaza. Uostalom, kasnije ćemo dokazati mnogo opštije tvrdjenje (posledica 5.6). Dokazujemo sad samo teži deo stava - izotopnost grupnoj, odnosno abelovoj relaciji. Naime, za (a) pokazaćemo da $\underline{A}$ koje učestvuje u rešenju od Ass mora zadovoljavati Reid , i slično za (b): $\underline{A}$ iz rešenja od Bis mora da zadovoljava Thom . Stav onda sledi na osnovu stava 4.1.

(a) Pogledajmo tablicu

1.	$A(x_1u_1w_1)$	$B(yzu_1)$	$C(vzw_1)$	$D(x_1yv)$
2.	$A(x_2u_2w_1)$	$B(Yzu_2)$	$C(vzw_1)$	$D(x_2Yv)$
3.	$A(x_3u_1w_2)$	$B(yzu_1)$	$C(Vzw_2)$	$D(x_3yV)$
4.	$A(x_4u_2w_2)$	$B(Yzu_2)$	$C(Vzw_2)$	$D(x_4YV)$
5.	$A(x_3u_3w_4)$	$B(yZu_3)$	$C(VZw_4)$	$D(x_3yV)$
6.	$A(x_4u_4w_4)$	$B(YZu_4)$	$C(VZw_4)$	$D(x_4YV)$
7.	$A(x_1u_3w_3)$	$B(yZu_3)$	$C(vZw_3)$	$D(x_1yv)$
8.	$A(x_2u_4w_3)$	$B(YZu_4)$	$C(vZw_3)$	$D(x_2Yv)$.

Četiri atoma svake od osam vrsta čine sistem <u>Ass</u> . U prvoj koloni vidimo sistem <u>Reid</u> , dok svaka od preostale tri kolone sadrži po četiri atoma koji se javljaju dvaput. Sl.11 prikazuje tablicu u preglednijem obliku : oktaedar (van Kampenov dijagram sistema <u>Reid</u>) kao "sumu" osam tetraedara (van Kampenovih dijagrama od <u>Ass</u>) .

Neka su sada elementi $\phi(x_i)$, $\phi(u_i)$, $\phi(w_i)$ $(1 \leq i \leq 4)$ od S takvi da su svi atomi u prvoj koloni zadovoljeni osim osmog, tj. da je $\underline{A}(\phi(x_1),\phi(u_1),\phi(w_1)),\ldots,\underline{A}(\phi(x_1),\phi(u_3),\phi(w_3))$. Dovoljno je dokazati da je i osmi atom tad zadovoljen. Definišimo $\phi(y)$ proizvoljno. Lako se vidi da onda postoje (jedinstveni) $\phi(Y),\phi(z),\phi(Z),\phi(v),\phi(V) \in S$ takvi da svi atomi iz druge, treće i četvrte kolone postaju tačni. Sad su tri atoma poslednje kolone zadovoljeni, pa mora biti zadovoljen i onaj preostali. Dakle, $\underline{A}(\phi(x_2),\phi(u_4),\phi(w_3))$ jeste tačno.



sl.11

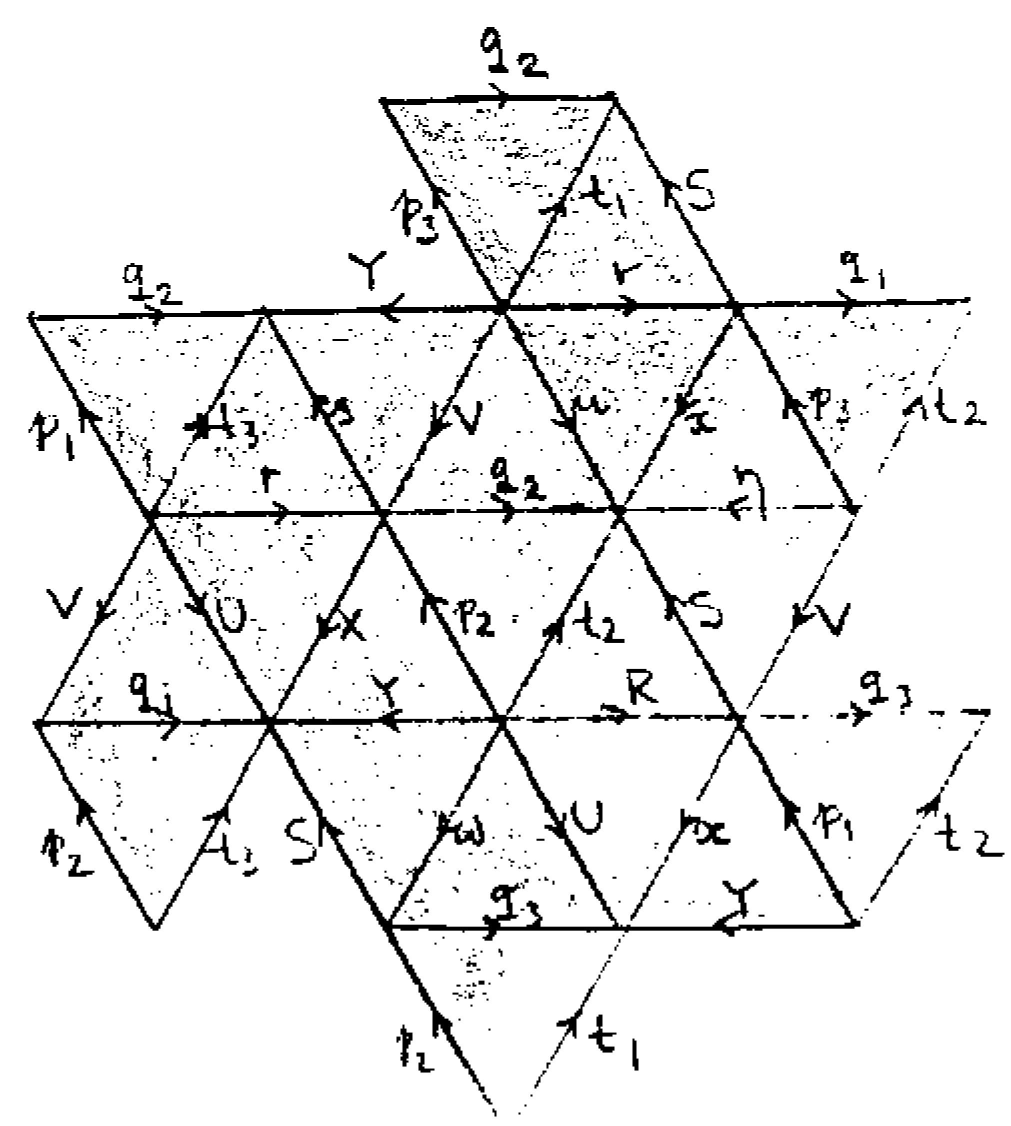
(b) Tablica koju ovde gledamo je sledeća:

1.	$A(p_1q_2t_3)$	$B(p_1xY)$	$C(Vq_2u)$	$D(rst_3)$	$E(rxu)$	$F(VsY)$
2.	$A(p_2q_1t_3)$	$B(p_2XY)$	$C(Vq_1U)$	$D(rst_3)$	$E(rXU)$	$F(VsY)$
3.	$A(p_1q_3t_2)$	$B(p_1xY)$	$C(vq_3U)$	$D(RSt_2)$	$E(RxU)$	$F(vSY)$
4.	$A(p_3q_1t_2)$	$B(p_3xy)$	$C(Vq_1U)$	$D(RSt_2)$	$E(RxU)$	$F(VSy)$
5.	$A(p_2q_3t_1)$	$B(p_2XY)$	$C(vq_3U)$	$D(rSt_1)$	$E(rXU)$	$F(vSY)$
6.	$A(p_3q_2t_1)$	$B(p_3xy)$	$C(Vq_2u)$	$D(rSt_1)$	$E(rxu)$	$F(VSy)$.

Prva kolona je sistem <u>Thom</u> , a svaka vrsta je sistem <u>Bis</u> . Mutatis mutandis, dokaz iz (a) se ponavlja. □

Za slučaj (b) nemamo tako jasnu ilustraciju kao što je sl.11 bila za (a). Razlog je što su van Kampenovi dijagrami sistema <u>Thom</u> i <u>Bis</u> torusi. Ipak, pogledajmo sl.12. Tu je 21 trougao ; sve jednako označene ivice treba identifikovati - dobijeni kompleks označimo sa K . Za svako i , $0 \leqslant i \leqslant 6$, ima na sl.12 šest trouglova koji nose oznaku i (svaki trougao je tu označen sa dva broja). Tih šest trouglova čine u K podkompleks T_i koji je torus za svako i . Tačnije, za $1 \leqslant i \leqslant 6$, T_i je van Kampenov dijagram sistema kojeg čine atomi iz i-te vrste, dok je T_o van Kampenov dijagram sistema sačinjenog od atoma prve kolone naše tablice. Kompleks K predstavlja T_o kao "sumu" torusa $T_1,\dots,T_6$.

sl.12



5. PODREDJENI SISTEMI

Ovaj i naredna tri odeljka posvećeni su rešavanju slobodnih sistema. Atribut "slobodan" ćemo tu podrazumevati za svaki sistem koji pomenemo. Neka je, dakle, $\mathcal{S}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ slobodan sistem i X skup promenljivih koje učestvuju u njemu. Pretpostavljamo da je Q_i relacijski simbol koji se javlja u atomu φ_i. Prirodno je definisati sledeće relacije na skupu $\{Q_1,\dots,Q_m\}$. Prva je relacija nužne izostrofije, to je ekvivalencija $\sim$ definisana sa : $Q_i \sim Q_j$ ako i samo ako su u svakom rešenju $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ od $\mathcal{S}$ relacije $\underline{Q}_i$ i $\underline{Q}_j$ izostrofne. Sledeće dve relacije su unarne. Kazaćemo da je Q_i grupno teme (abelovo teme) sistema $\mathcal{S}$ (odnosno grafa $\Gamma(\mathcal{S})$) ako i samo ako je u svakom rešenju $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ od $\mathcal{S}$ relacija $\underline{Q}_i$ izostrofna grupnoj relaciji (abelovoj relaciji). U ovom odeljku dobićemo geometrijski izražene dovoljne uslove za $Q_i \sim Q_j$, "biti grupno teme" i "biti abelovo teme". Kasnije će se ispostaviti da su ti uslovi i neophodni. Sva tri rezultata se dobijaju kao posledice opšte teoreme 5.5 koja je centralni rezultat odeljka. Prethodi joj nešto notacije i dve leme.

Kao obično, ivicu e u grafu Γ zvaćemo mostom ako je graf $\Gamma - e$ nepovezan. Takodje, rećićemo da je par ivica $\{e_1,e_2\}$ dvojni most u Γ ako ni e_1 ni e_2 nisu mostovi, a $\Gamma-(e_1\cup e_2)$ je nepovezan graf. U narednim lemama sistem $\mathcal{S}$, $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$ i rešenje $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ od $\mathcal{S}$ su fiksirani.

5.1 **LEMA.** *Neka je Y baza od $\mathcal{S}$ i $x\in X-Y$. Neka je Y_x skup svih $y\in Y$ takvih da najkraći put u drvetu $\Gamma(Y^c)$ koji povezuje temena incidentna sa y sadrži x. Tada, za svaku* valuaciju ϕ na X , vrednost $\phi(x)$ je odredjena restrikcijom $\phi\restriction Y_x$.

Dokaz. Graf $\Gamma(Y^c-\{x\})$ je disjunktna unija dva drveta T_1 i T_2. Skup Y se razbija na tri skupa Y_1,Y_2 i Y_x , gde je Y_i $(i=1,2)$ skup svih ivica iz Y za koje oba incidentna im temena pripadaju drvetu T_i . Lako se vidi da $x\in Cl(Y_1\cup Y_x)$, pa iz leme 3.3 sledi da je $\phi(x)$ odredjeno sa $\phi\restriction Y_1\cup Y_x$. Simetrično, $\phi(x)$ je odredjeno sa $\phi\restriction Y_2\cup Y_x$. Kako se, po posledici 3.6 , svaka funkcija $Y=Y_1\cup Y_2\cup Y_x\rightarrow S$ proširuje do valuacije na X , sledi da $\phi(x)$ ne zavisi ni od $\phi\restriction Y_1$ ni od $\phi\restriction Y_2$. Dakle, $\phi(x)$ je odredjeno sa $\phi\restriction Y_x$. $\square$

5.2 POSLEDICA. Ako je x most u Γ tada postoji $a\in S$ takav da je $\phi(x)=a$ za svaku valuaciju ϕ na X . Opštije, ako je $Z\subseteq X$, $\Gamma(Z)$ povezan, x most u $\Gamma(Z)$ i ϕ valuacija na Z^c , tad postoji $a\in S$ takav da je $\hat{\phi}(x)=a$ za svaku valuaciju $\hat{\phi}$ na X koja proširuje ϕ . $\square$

5.3 LEMA. Neka je $Z\subseteq X$, $\Gamma(Z)$ povezan graf, $\{x,y\}$ dvojni most u $\Gamma(Z)$ i ϕ valuacija na Z^c . Tada postoji $\lambda\in Sym(S)$ tako da je $\hat{\phi}(x)=\lambda\hat{\phi}(y)$ za svaku valuaciju $\hat{\phi}$ na X koja proširuje ϕ .

Dokaz. Neka je T' maksimalno drvo u $\Gamma(Z)$ koje sadrži x , a ne sadrži y . Neka je T maksimalno drvo u Γ koje sadrži T' i $Y\subseteq X$ skup svih ivica koje nisu u T . Ako je Y_x kao u lemi 5.1 , imamo $Y_x\cap Z=\{y\}$, jer je $\{x,y\}$ dvojni most u $\Gamma(Z)$. Iz posledice 5.2 sledi da je $\hat{\phi}(x)$ odredjeno sa $\hat{\phi}\restriction Y_x$, pa kako je $\hat{\phi}\restriction Y_x\cap Z^c = \phi\restriction Y_x\cap Z^c$ fiksirano, sledi da je $\hat{\phi}(x) = \lambda\hat{\phi}(y)$ za neku funkciju $\lambda:S\rightarrow S$. Simetrično se dobija $\hat{\phi}(y) = \mu\hat{\phi}(x)$ za neko $\mu:S\rightarrow S$. Očigledno su λ i μ

jedna drugoj inverzi, pa $\lambda \in \mathrm{Sym}(S)$ sledi. $\square$

5.4 POSLEDICA. Ako je $\{x,y\}$ dvojni most u Γ onda postoji $\lambda \in \mathrm{Sym}(S)$ tako da $\phi(x) = \lambda\phi(y)$ važi za svaku valuaciju ϕ na X. $\square$

Neka su sada $\mathcal{S}$ i $\mathcal{S}_1$ dva sistema i $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$, $\Gamma_1 = \Gamma(\mathcal{S}_1)$ odgovarajući grafovi. Rećićemo da je $\mathcal{S}$ podredjen sistemu $\mathcal{S}_1$ ako se Γ može homeomorfno utopiti u Γ_1. Ako je $f:\Gamma \to \Gamma_1$ takvo utapanje, jasno je da je slika temena od Γ teme od Γ_1 i da je slika ivice od Γ luk u Γ_1.

5.5 TEOREMA. Neka je f homeomorfno utapanje grafa $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ u graf $\Gamma_1 = \Gamma(\mathcal{S}_1)$ i neka su $Q_1,\dots,Q_m$ i $R_1,\dots,R_m$, temena od Γ i Γ_1 respektivno takva da je $R_i = f(Q_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Ako je $(S,\underline{R}_1,\dots,\underline{R}_m)$ rešenje od $\mathcal{S}_1$ tada postoji rešenje $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ od $\mathcal{S}$ tako da je $\underline{Q}_i$ izostrofna sa $\underline{R}_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$.

Dokaz. Neka je α_p luk $f(x_p)$ u Γ_1. Ako $x_p \in \mathrm{st}Q_i$, označimo sa x_{pi} ivicu od Γ_1 koja pripada α_p i incidentna je sa R_i. (U slučaju da je x_p petlja, umesto x_{pi} imamo dve ivice x'_{pi} i x''_{pi}.) Neka su X i X_1 skupovi ivica od Γ i Γ_1, i neka je $Z \subseteq X_1$ skup svih ivica grafa $f(\Gamma)$. Za svaku ivicu x_p od Γ fiksirajmo jednu ivicu x'_p od Γ_1 koja pripada α_p. Neka je Y baza u Γ, tj. $\Gamma(Y^c) = \Gamma - Y$ je maksimalno drvo u Γ. Tada je $T'_1 = \Gamma_1(Z) - Y'_1$ maksimalno drvo u $\Gamma_1(Z)$, gde je $Y'_1 = \{x'_p \mid x_p \in Y\}$. Neka je T_1 maksimalno drvo u Γ_1 koje sadrži T'_1 i neka je $Y_1 = X_1 -$"ivice od T_1" odgovarajuća baza u Γ_1.

Lako je videti da je skup Z^c zatvoren i, štaviše, $Z^c = \mathrm{Cl}(Y_1 - Y'_1)$. Uzmimo proizvoljnu funkciju $Y_1 - Y'_1 \to S$; neka je ϕ valuacija na Z^c koja proširuje ovu funkciju. Tvrdimo da za svaki par (p,i) takav da $x_p \in stQ_i$ postoji $\lambda_{pi} \in Sym(S)$ tako da je $\hat{\phi}(x_{pi}) = \lambda_{pi}\,\hat{\phi}(x'_p)$ za svaku valuaciju $\hat{\phi}$ na X_1 koja proširuje ϕ. (Opet, ako je x_p petlja, imamo λ'_{pi} i λ''_{pi} umesto λ_{pi}.) Ako je $x_{pi}=x'_p$ ovo je tvrdjenje očigledno tačno. U suprotnom, $\{x_{pi},x'_p\}$ je dvojni most u $\Gamma_1(Z)$ ili su i x_{pi} i x'_p mostovi u $\Gamma_1(Z)$ (potonje se dešava ako i samo ako je x_p most u Γ.) U prvom slučaju tvrdjenje je tačno na osnovu leme 5.3. U drugom slučaju, iz posledice 5.2 sledi da su $\hat{\phi}(x_{pi})$ i $\hat{\phi}(x'_p)$ elementi od S nezavisni od proširenja $\hat{\phi}$, pa tvrdjenje sledi trivijalno.

Neka je $\mathcal{S}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ i $\mathcal{S}'=\{\psi_1,\dots,\psi_{m'}\}$. Menjajući $\mathcal{S}'$ do na parastrofiju, možemo pretpostaviti da ako je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$, tada je $\psi_i = R_i(x_{pi},x_{qi},x_{ri})$, $1\leq i\leq m$. Definišemo $\underline{Q}_i$ sa

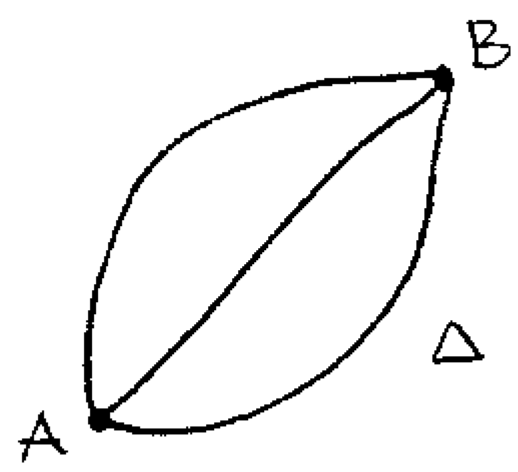
$$(5\text{-}1)\qquad \underline{Q}_i(x,y,z) \Leftrightarrow \underline{R}_i(\lambda_{pi}x,\lambda_{qi}y,\lambda_{ri}z)$$

i ostaje da dokažemo da je $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ rešenje od $\mathcal{S}$.

Neka je onda $\tau : Y \to S$ proizvoljna funkcija. Definišemo $\tau_1 : Y'_1 \to S$ sa $\tau_1(x'_p) = \tau(x_p)$. Prema posledici 3.6, funkcija $\phi_1 : Y_1 \to S$ definisana sa $\phi_1 \restriction Y'_1 = \tau_1$ i $\phi_1 \restriction Y_1 - Y'_1 = \phi \restriction Y_1 - Y'_1$, proširuje se do valuacije $\hat{\phi}: X_1 \to S$. Kako je $Z^c = Cl(Y_1-Y'_1)$, sledi da $\hat{\phi}$ proširuje ϕ i tako imamo $\underline{R}_i(\lambda_{pi}\hat{\phi}(x'_p),\ \lambda_{qi}\hat{\phi}(x'_q),\ \lambda_{ri}\hat{\phi}(x'_r))$. Definišemo $\hat{\tau}: X \to S$ sa $\hat{\tau}(x_p) = \hat{\phi}(x'_p)$; iz (5-1) dobijamo onda $\underline{Q}_i(\hat{\tau}(x_p),\hat{\tau}(x_q),\hat{\tau}(x_r))$ i ovo važi za svako i, $1\leq i\leq m$, gde je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$. Dakle, $\hat{\tau}$ je valuacija na X, pa pošto ona očigledno proširuje τ, dokaz je završen. □

Preostaje nam dedukcija već pomenutih važnih posledica teoreme 5.5. U obema se pretpostavlja da je $\mathcal{S}$ slobodan sistem i da su $Q_1,\dots,Q_m$ temena od $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$.

5.6 POSLEDICA. Ako u Γ postoje tri puta sa disjunktnim unutrašnjostima koji povezuju Q_i sa Q_j , tada je $Q_i \sim Q_j$.



sl.13

Dokaz. Neka je Δ graf koji čine dva temena A,B i tri ivice koje ih povezuju (sl. 13). Iz pretpostavke imamo da postoji utapanje $f:\Delta \to \Gamma$ takvo da je $f(A)=Q_i$ i $f(B)=Q_j$. Kako je Δ graf sistema $\{A(x,y,z),B(x,y,z)\}$, zaključak sledi iz teoreme 5.5 . □

5.7 POSLEDICA. Neka je $f:K_4 \to \Gamma$ $(f:K_{3,3} \to \Gamma)$ homeomorfno utapanje. Onda je f-slika svakog temena od K_4 $(K_{3,3})$ grupno (abelovo) teme u Γ .

Dokaz. Sledi odmah iz teoreme 5.5 i teorema o četiri i šest kvazigrupa. Jer, grafovi sistema Ass i Bis su upravo K_4 i $K_{3,3}$. □

6. FAKTORIZACIJA KUBNIH GRAFOVA

Da je povezanost u grafu $\Gamma(\mathcal{S})$ vrlo bitna za odredjivanje klasa nužne izostrofije u $\mathcal{S}$, jasno je na osnovu posledice 5.6. Za svaki kubni graf Γ definišimo relaciju $\approx$ na skupu temena od Γ sa: $Q_i \approx Q_j$ ako i samo ako je $i=j$ ili postoje tri puta u Γ koja spajaju Q_i sa Q_j i imaju disjunktne unutrašnjosti. Posledica 5.6 kaže da za $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ imamo $Q_i \approx Q_j \Rightarrow Q_i \sim Q_j$. U ovom odeljku istražujemo relaciju $\approx$. Radićemo, dakle, samo sa grafovima, a primene na sisteme će slediti u narednim odeljcima.

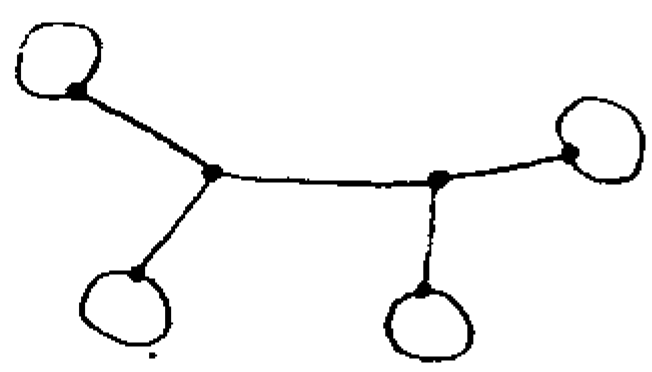
Prvo što se možemo pitati je kada su u kubnom grafu svaka dva temena $\approx$-ekvivalentna. Odgovor dobijamo iz varijante Mengerove teoreme iz teorije grafova [21, teorema 5.11] koja kaže da svaka dva temena u grafu Γ (ne nužno kubnom) mogu biti spojena sa najmanje $c(\Gamma)$ puteva, pri čemu svaka dva od tih puteva imaju nuldimenzioni presek. Ovde $c(\Gamma)$ označava minimalan broj ivica od Γ čijim se odstranjivanjem Γ raspovezuje. Za kubni graf Γ uvek imamo $c(\Gamma) \leqslant 3$; $c(\Gamma)=1$ važi ako i samo ako Γ ima most, a $c(\Gamma)=2$ važi ako i samo ako Γ nema mostova, a ima dvojni most. Pretpostavljaćemo nadalje da je Γ povezan kubni graf.

6.1 STAV. <u>Uslov</u> $c(\Gamma)=3$ <u>je neophodan i dovoljan da svaka dva temena od</u> Γ <u>budu</u> $\approx$<u>-ekvivalentna</u>.

<u>Dokaz</u>. Ako je $c(\Gamma) < 3$, tada je lako naći par temena koja ne mogu biti povezana sa tri puta disjunktnih unutrašnjosti. Tvrdjenje u suprotnom smeru sledi iz gore navedene Mengerove teoreme i činjenice da u kubnom grafu dva puta imaju nuldimenzioni

ako i samo ako imaju disjunktne unutrašnjosti. Da bismo dokazali ovu činjenicu, pretpostavimo da tačka P pripada unutrašnjosti puteva α i β. Ako je $\alpha\cap\beta$ nuldimenzionalan, tada za neke okoline α' i β' od P u α i β imamo $\alpha'\cap\beta'=\{P\}$, pa sledi da je P teme stepena $\geqslant 4$ - apsurd. □

Ostaje nam da ispitujemo relaciju $\approx$ na grafovima sa $c(\Gamma)<3$. Ako je x most u Γ i Q_i teme incidentno sa x, tada je $\mathrm{st}Q_i=\{x,y_1,y_2\}$ i imamo sledeće mogućnosti : ili je $y_1=y_2$ petlja, ili su y_1 i y_2 mostovi, ili je $\{y_1,y_2\}$ dvojni most. Sledi da svaki Γ koji ima most mora imati i dvojni most, osim u slučaju kada je svaka ivica od Γ most ili petlja - u kom slučaju ćemo reći da je Γ <u>drvolik</u>. Očigledno, Γ je drvolik ako i samo ako je graf dobijen odstranjivanjem svih petlji iz Γ drvo (sl.14).

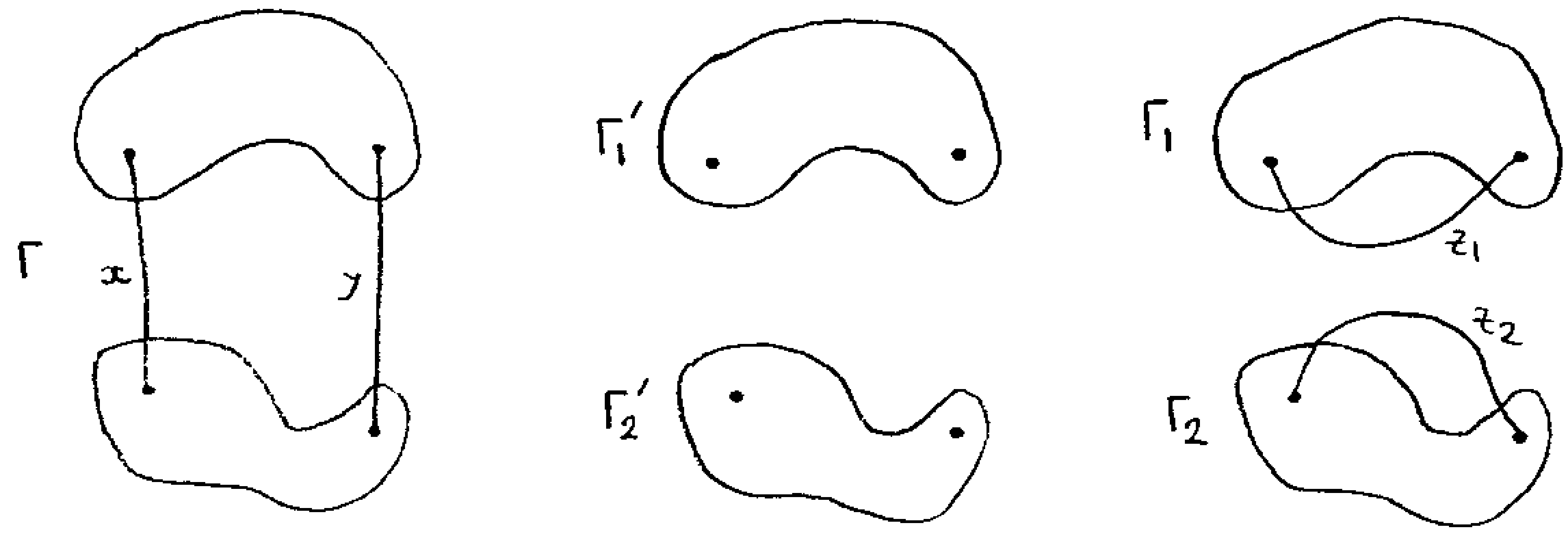


sl.14

6.2 STAV. <u>U drvolikom grafu</u> $Q_1\approx Q_2$ <u>važi ako i samo ako je</u> $Q_1=Q_2$.

<u>Dokaz</u>. Trivijalan. □

Definišemo da je Γ <u>nerastavljiv</u> ako i samo ako je Γ drvolik ili je $c(\Gamma)=3$. Sledstveno, Γ je rastavljiv ako i samo ako ima dvojni most. Na redu je da se opiše rastavljanje rastavljivih grafova. Pretpostavimo onda da je $\{x,y\}$ dvojni most u Γ i neka su Γ_1' i Γ_2' komponente od $\Gamma-(x\cup y)$. Neka je Γ_i $(i=1,2)$ graf dobijen od Γ_i' dodavanjem nove ivice z_i koja povezuje temena od Γ_i' incidentna sa x i y (sl. 15). Jasno, Γ_1 i Γ_2 su povezani kubni grafovi. U ovakvoj situaciji kazaćemo da je Γ <u>povezana suma</u> grafova Γ_1 i Γ_2 i koristiti za to oznaku $\Gamma=\Gamma_1\#\Gamma_2$. Ako je $\Gamma=\Gamma_1\#\Gamma_2$, onda očigledno



sl.15

postoje utapanja $f_i\colon \Gamma_i \to \Gamma$ takva da je preslikavanje $f=f_1 \dot\cup f_2\colon \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2 \to \Gamma$ bijektivno na temenima, a restrikcija $\mathrm{res}(f)\colon \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2 - (z_1 \cup z_2) \to \Gamma - (x \cup y)$ homeomorfizam.

6.3 LEMA. <u>Neka je</u> $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ <u>i</u> $f\colon \Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2 \to \Gamma$ <u>kao gore</u>. <u>Tada je</u> $Q_1 \approx Q_2$ <u>u</u> $\Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2$ <u>ako i samo ako je</u> $f(Q_1) \approx f(Q_2)$ <u>u</u> Γ

<u>Dokaz</u>. Ako je $Q_1 \approx Q_2$ u $\Gamma_1 \dot\cup \Gamma_2$ tada Q_1 i Q_2 pripadaju istom Γ_i, pa pošto je $f_i\colon \Gamma_i \to \Gamma$ utapanje, sledi $f(Q_1) \approx f(Q_2$
Za obrat pretpostavimo $Q_1 \approx Q_2$ u Γ. Tada su Q_1 i Q_2 oba u Γ_1' ili oba u Γ_2', recimo da važi prvi slučaj. Neka su α, β i γ tri puta disjunktnih unutrašnjosti koji povezuju Q_1 sa Q_2. Tada najviše jedan od njih ima zajedničkih tačaka sa Γ_2'. Ako nema nijednog takvog, tada je $Q_1 \approx Q_2$ u Γ_1', pa je i $f^{-1}(Q_1) \approx f^{-1}(Q_2)$ u Γ_1. Pretpostavimo stoga da su β i γ u Γ_1' i da je α unija tri puta $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, gde su α_1 i α_3 u Γ_1', a "središnji" put α_2 povezuje temena od Γ_1' incidentna sa x i y i ima unutrašnjost disjunktnu sa Γ_1'. Tada $f^{-1}(\alpha_1)$, $f^{-1}(\alpha_2)$ i z_1 čine put koji povezuje $f^{-1}(Q_1)$ sa $f^{-1}(Q_2)$ u Γ_1; ostala dva su $f^{-1}(\beta)$ i $f^{-1}(\gamma)$. □

Ako u $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ nisu oba sabirka nerastavljiva, tada se rastavljanje može nastaviti, pa imamo, recimo, $\Gamma =$

$(\Gamma_1' \# \Gamma_1'') \# \Gamma_2$. Itd. možemo ići sve dotle dok ne predstavimo Γ kao sumu nerastavljivih grafova. Dakle, možemo dobiti nerastavljive grafove $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ i preslikavanje $f: \Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_k \to \Gamma$ koje je bijektivno na temenima i čija je restrikcija na svaki Γ_i utapanje. Iz leme 6.3 odmah dobijamo

6.4 POSLEDICA. $Q_1 \approx Q_2$ <u>u</u> $\Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_k$ <u>važi ako i samo ako je</u> $f(Q_1) \approx f(Q_2)$ <u>u</u> Γ . □

Nerastavljive grafove $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$ zajedno sa preslikavanjem $f: \Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_k \to \Gamma$, dobijene višekratnim rastavljanjem Γ u povezanu sumu zvaćemo <u>faktorizacijom</u> od Γ ; svaki Γ_i zvaćemo (nerastavljivim) <u>faktorom</u> od Γ . Relacija $\approx$ je već odredjena na nerastavljivim grafovima (stavovi 6.1 i 6.2) , pa sa 6.4 odmah dobijamo karakterizaciju relacije $\approx$ na proizvoljnim grafovima :

6.5 TEOREMA. <u>Neka je</u> $f: \Delta_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Delta_k \dot\cup \Gamma_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_\ell \to \Gamma$ <u>faktorizacija od</u> Γ , <u>gde su</u> $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ <u>drvoliki, a</u> $c(\Gamma_1) = \ldots = c(\Gamma_\ell) = 3$. <u>Tada, za različita temena</u> Q_1 <u>i</u> Q_2 <u>od</u> Γ , $Q_1 \approx Q_2$ je tačno ako i samo ako $Q_1, Q_2 \in f(\Gamma_i)$ za neko $i \in \{1, \ldots, \ell\}$

6.6 POSLEDICA. $\approx$ <u>je relacija ekvivalencije. Teme od</u> Γ <u>čini jednoelementnu</u> $\approx$<u>-klasu ako i samo ako pripada</u> $f(\Delta_1 \dot\cup \ldots \dot\cup \Delta_k)$. □

Gore opisano rastavljanje grafa Γ očigledno zavisi od izbora dvojnog mosta kojeg činimo na svakom koraku. Zato se trenutno ne može mnogo reći o jedinstvenosti faktora. Ono što se može izvesti iz 6.5 je da za svaku drugu faktorizaciju $f': \Delta_1' \dot\cup \ldots \dot\cup \Delta_{k'}' \dot\cup \Gamma_1' \dot\cup \ldots \dot\cup \Gamma_{\ell'}' \to \Gamma$ mora biti $\ell = \ell'$ i, do na promenu redosleda faktora, skupovi temena od $f(\Gamma_i)$ i $f'(\Gamma_i')$ se podudaraju za svako i, $1 \leqslant i \leqslant \ell$. U stvari, teorema jedinstvenosti se ipak može dokazati, čak i sa "slabijim" pojmom faktorizacije. Naime, definisaćemo da je $f: \Gamma_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Gamma_k \to \Gamma$ <u>slaba faktorizacija</u> od Γ ako je: (i) f bijektivno na temenima, (ii) svaki Γ_i nerastavljiv, (iii) svako $\mathrm{res}(f): \Gamma_i \to \Gamma$ utapanje i (iv) $Q_1 \approx Q_2$ važi u $\Gamma_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Gamma_k$ ako i samo ako $f(Q_1) \approx f(Q_2)$ važi u Γ. Sledeću teoremu ostavljamo bez dokaza, jer je u daljnjem nećemo koristiti.

6.7 TEOREMA. <u>Ako su</u> $f: \Gamma_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Gamma_k \to \Gamma$ <u>i</u> $f': \Gamma_1' \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Gamma_{k'}' \to \Gamma$ <u>dve slabe faktorizacije, tada je</u> $k=k'$ <u>i, posle promene redosleda faktora, postoje homeomorfizmi</u> $\nu_i: \Gamma_i \to \Gamma_i'$ <u>takvi da je</u> $f(Q) = f'\nu_i(Q)$ <u>za svako teme</u> Q od Γ_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. $\square$

Razume se da nije jednostavno videti $\approx$-klase temena tek bacivši pogled na graf. Sledeći stav tvrdi da se bar jednoelementne klase lako uočavaju.

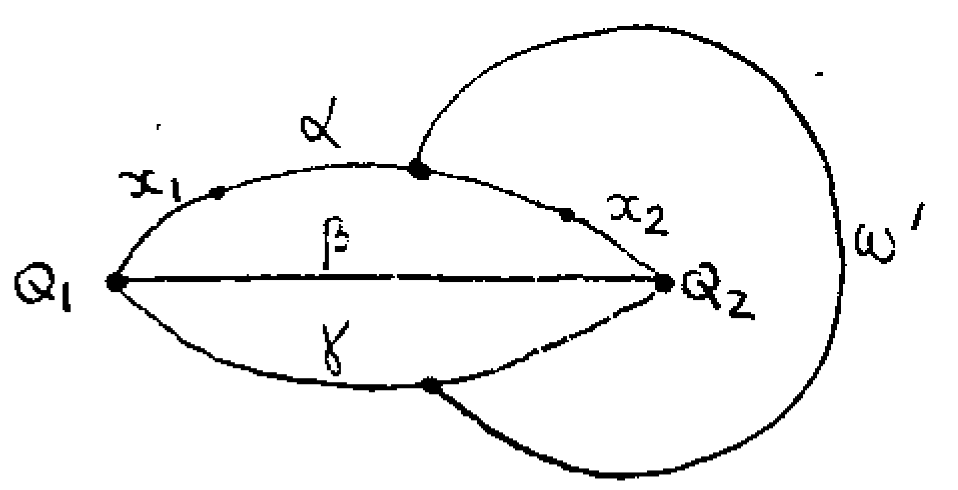
6.8 STAV. <u>Neka je</u> $f: \Delta_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Delta_k \dot{\cup} \Gamma_1 \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Gamma_\ell \to \Gamma$ <u>faktorizacija od</u> Γ <u>kao u teoremi</u> 6.5. <u>Neka je</u> Δ_i^* <u>maksimalno drvo u</u> Δ_i (<u>dobijeno odstranjivanjem petlji iz</u> Δ_i) <u>i neka je</u> X_0 <u>skup svih mostova u</u> Γ. <u>Tada je</u> $\mathrm{res}(f): \Delta_1^* \dot{\cup} \ldots \dot{\cup} \Delta_k^* \to \Gamma(X_0)$ <u>homeomorfizam. Sledstveno, teme od</u> Γ <u>čini jednoelementnu</u> $\approx$<u>-klasu ako i samo ako je incidentno nekom mostu</u>.

<u>Dokaz</u>. Neka je $\Gamma = \Gamma' \# \Gamma''$ i $f: \Gamma' \dot{\cup} \Gamma'' \to \Gamma$ odgovarajuće preslikavanje. Ako su X_0' i X_0'' skupovi mostova u Γ' i Γ'', lako je videti da je $\mathrm{res}(f): \Gamma'(X_0') \dot{\cup} \Gamma''(X_0'') \to \Gamma(X_0)$ homeomorfizam, pa možemo ići indukcijom. $\square$

Završavamo ovaj odeljak kratkim pregledom topologije nerastavljivih grafova sa $c(\Gamma)=3$; o drvolikim i nije potrebno reći išta više od definicije. Imajući u vidu posledicu 5.7 , od posebnog je interesa pitanje kad je K_4 , odnosno $K_{3,3}$, utopiv u Γ . Najjednostavniji graf sa $c(\Gamma)=3$ je sačinjen od dva temena i tri ivice (graf Δ u posledici 5.6). Za složenije grafove imamo sledeću lemu.

6.9 LEMA. <u>Ako Γ ima više od dva temena i ako je</u> $c(\Gamma)=3$, <u>tada se K_4 utapa u Γ</u> .

<u>Dokaz</u>. Neka su Q_1 i Q_2 proizvoljna temena od Γ i α,β,γ putevi disjunktnih unutrašnjosti koji ih povezuju. Pošto je Γ povezan i ima još temena pored Q_1 i Q_2 , sledi da barem jedan od puteva α,β,γ (recimo α) sadrži teme različito od Q_1 i Q_2 . Tako α sadrži bar dve ivice; neka



sl.16

su mu x_1 i x_2 ekstremne ivice (sl. 16). Skup $\alpha' = \alpha - (x_1 \cup x_2)$ je neprazan. Kako je $\Gamma - (x_1 \cup x_2)$ povezan, sledi da postoji put ω koji povezuje α' sa $\beta\cup\gamma$. Lako je videti da ω sadrži podput ω' koji povezuje α' sa $\beta\cup\gamma$ i čija unutrašnjost ne seče $\alpha\cup\beta\cup\gamma$. Sledi da je graf $\alpha\cup\beta\cup\gamma\cup\omega'$ homeomorfan sa K_4 . $\square$

Sledeća lema važi za proizvoljne kubne grafove.

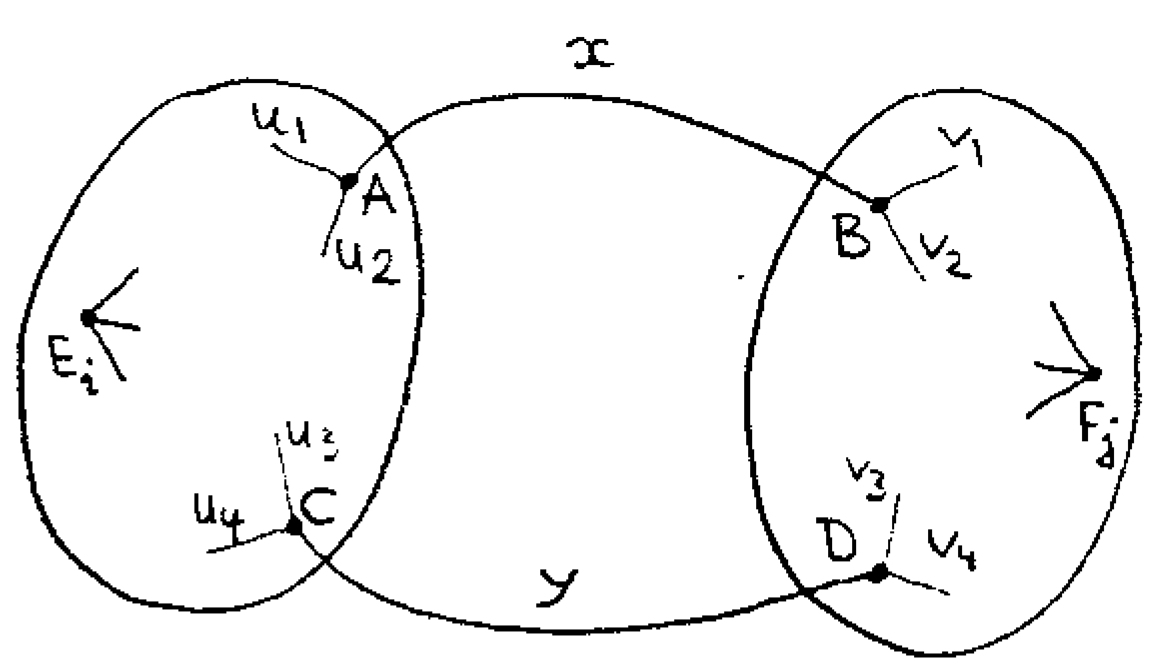
6.10 LEMA. $K_{3,3}$ <u>se utapa u</u> Γ <u>ako i samo ako</u> Γ <u>nije planaran</u>.

<u>Dokaz</u>. Prema teoremi Kuratowskog [21, teorema 11.13] , graf

je neplanaran ako i samo ako se neki od grafova $K_{3,3}$ ili K_5 (kompletan graf sa pet temena) može u njega utopiti. Stepen svakog temena od K_5 je četiri, pa se K_5 nikad ne utapa u kubni graf i lema sledi. $\square$

7. POVEZANA SUMA SISTEMA

Sistem $\mathcal{S}$ zvaćemo <u>nerastavljivim</u> ako je $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$ nerastavljiv graf. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ rastavljiv i $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$; u ovom odeljku dokazaćemo da se svako rešenje od $\mathcal{S}$ dobija od rešenja sistema $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ takvih da je $\Gamma(\mathcal{S}_i) = \Gamma_i$.



sl.17

Neka je $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ rastavljanje izvršeno u odnosu na dvojni most $\{x,y\}$ u Γ i neka je $f: \Gamma_1 \dot{\cup} \Gamma_2 \longrightarrow \Gamma$ odgovarajuće preslikavanje. Temena od $f(\Gamma_1)$ incidentna sa x i y označimo redom sa A i B ; slično, neka C i D budu temena od $f(\Gamma_2)$ incidentna sa x i y . Preostala temena od $f(\Gamma_1)$ označimo sa $E_1, \dots, E_k$, a $F_1, \dots, F$ neka budu temena od $f(\Gamma_2)$ različita od C i D (sl. 17) . Označimo sa u_i, v_i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ ivice incidentnte sa A,B,C,D kao na sl. 17. Možemo pisati $\mathcal{S} = \{\alpha, \beta, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \gamma, \delta, \psi_1, \dots, \psi_\ell\}$, gde je (uz izostrofiju sistema, po potrebi) $\alpha = A(x,u_1,u_2)$, $\beta = B(y,u_3,u_4)$, $\gamma = C(x,v_1,v_2)$, $\delta = D(y,v_3,v_4)$, a E_i i F_j relacijski simboli koji učestvuju u φ_i i ψ_j respektivno.

Neka su z_1 i z_2 ivice od Γ_1 i Γ_2 koje povezuju A sa B, odnosno C sa D. Neka je X skup ivica od Γ, a X_1 i X_2 podskupovi od X takvi da je X_i skup ivica od $f(\Gamma_i - z_i)$. Tada je $X = X_1 \cup X_2 \cup \{x,y\}$. Možemo identifikovati temena od Γ_1 i Γ_2 sa $A,B,E_1,\dots,E_k$ i $C,D,F_1,\dots,F_\ell$ respektivno, a skupove ivica od Γ_1 i Γ_2 sa $X_1 \cup \{z_1\}$ i $X_2 \cup \{z_2\}$. Sistemi $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ takvi da je $\Gamma(\mathcal{S}_i) = \Gamma_i$ su dati sa $\mathcal{S}_1 = \{\alpha^*, \beta^*, \varphi_1, \dots, \varphi_k\}$ i $\mathcal{S}_2 = \{\gamma^*, \delta^*, \psi_1, \dots, \psi_\ell\}$, gde je $\alpha^* = A(z_1,u_1,u_2)$, $\beta^* = B(z_1,u_3,u_4)$, $\gamma^* = C(z_2,v_1,v_2)$ i $\delta^* = D(z_2,v_3,v_4)$.

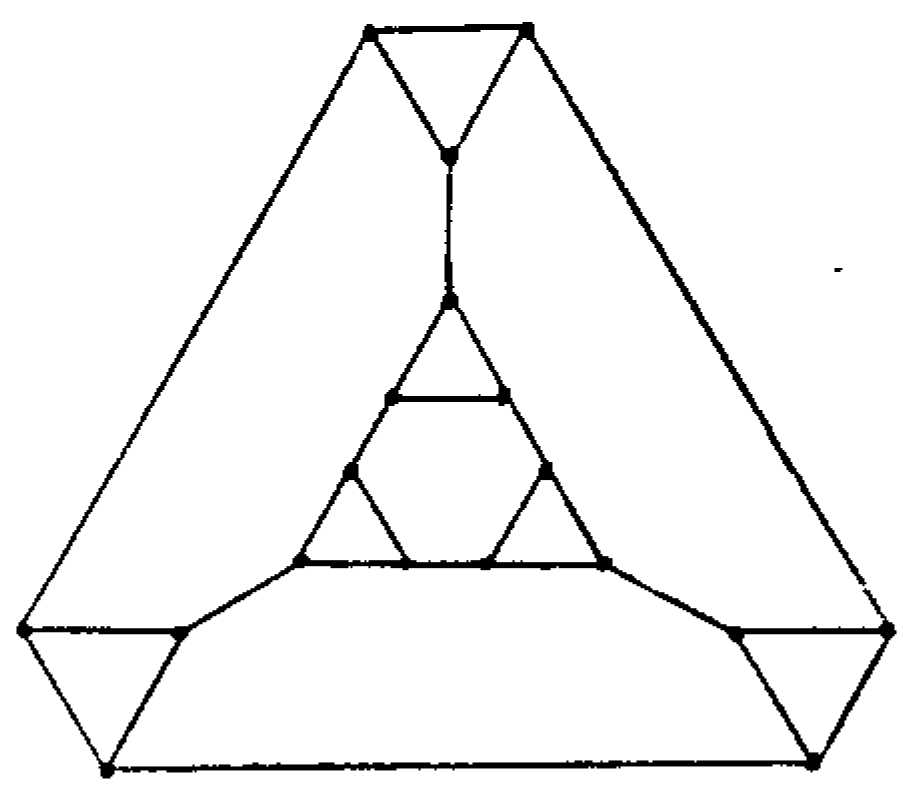
Definišimo za svaku kvazigrupnu relaciju $\underline{Q}$ na S i za svako $\lambda \in \mathrm{Sym}(S)$ kvazigrupnu relaciju $\underline{Q}_\lambda$ sa $\underline{Q}_\lambda(x,y,z) \Longleftrightarrow \underline{Q}(\lambda x, x, z)$.

7.1 TEOREMA. <u>Uz notaciju kao gore, opšte resenje od $\mathcal{S}$ je dato sa</u> $(S, \underline{A}_\lambda, \underline{B}, \underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k, \underline{C}_\lambda, \underline{D}, \underline{F}_1, \dots, \underline{F}_\ell)$, gde su $(S, \underline{A}, \underline{B}, \underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k)$ <u>i</u> $(S, \underline{C}, \underline{D}, \underline{F}_1, \dots, \underline{F}_\ell)$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ <u>i</u> $\mathcal{S}_2$ <u>respektivno</u>.

<u>Dokaz</u>. Neka su $\mathcal{R}_1 = (S,A,B,E_1,\dots,E_k)$ i $\mathcal{R}_2 = (S,C,D,F_1,\dots,F_k)$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ i $\lambda \in \mathrm{Sym}(S)$. Neka je ϕ valuacija na $X_1 \cup X_2 \cup \{y\}$ u odnosu na $\mathcal{R} = (S, \underline{A}_\lambda, \underline{B}, \underline{E}_1, \dots, \underline{E}_k, \underline{C}_\lambda, \underline{D}, \underline{F}_1, \dots, \underline{F}_\ell)$ Funkcije $\phi \restriction X_1$ i $\phi \restriction X_2$ su valuacije u odnosu na $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ respektivno, pa se mogu proširiti do valuacija $\hat{\phi}_i : X_i \cup \{z_i\} \longrightarrow S$ $(i=1,2)$. Iz $\underline{B}(\hat{\phi}_1(z_1), \hat{\phi}_1(u_3), \hat{\phi}_1(u_4))$, $\underline{D}(\hat{\phi}_2(z_2), \hat{\phi}_2(v_3), \hat{\phi}_2(v_4))$, $\underline{B}(\phi(y), \phi(u_3), \phi(u_4))$, $\underline{D}(\phi(y), \phi(v_3), \phi(v_4))$ i $\hat{\phi}_1(u_i) = \phi(u_i)$, $\hat{\phi}_2(v_i) = \phi(v_i)$ $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ sledi $\hat{\phi}_1(z_1) = \hat{\phi}_2(z_2) = \phi(y)$. Iz $\underline{A}(\hat{\phi}_1(z_1), \hat{\phi}_1(u_1), \hat{\phi}_1(u_2))$ i $\underline{C}(\hat{\phi}_2(z_2), \hat{\phi}_2(v_1), \hat{\phi}_2(v_2))$ dobijamo onda $\underline{A}_\lambda(\lambda^{-1}\phi(y), \phi(u_1), \phi(u_2))$ i $\underline{C}_\lambda(\lambda^{-1}\phi(y), \phi(v_1), \phi(v_2))$. Dakle, proširenje $\hat{\phi}$ od ϕ definisano sa $\hat{\phi}(x) = \lambda^{-1}\phi(y)$ jeste valuacija, pa je $\mathcal{R}$ rešenje od $\mathcal{S}$.

Za dokaz u suprotnom smeru pretpostavimo da je $(\underline{A},\underline{B},\underline{E}_1,\ldots,\underline{E}_k,\underline{C},\underline{D},\underline{F}_1,\ldots,\underline{F}_\ell)$ rešenje od $\mathcal{S}$. Iz posledice 5.4 dobijamo $\lambda \in \mathrm{Sym}(S)$ takvo da je za svaku valuaciju ϕ na S $\phi(x)=\lambda\phi(y)$. Sada je lako videti da su $(\underline{A}_\lambda,\underline{B},\underline{E}_1,\ldots,\underline{E}_k)$ i $(\underline{C}_\lambda,\underline{D},\underline{F}_1,\ldots,\underline{F}_\ell)$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. □

Na osnovu upravo dokazane teoreme, da bi se mogli rešavati proizvoljni sistemi, dovoljno je znati rešavati nerastavljive sisteme. Sada je opet na mestu pitanje koliko su kvadratni sistemi zaista netrivijalno uopštenje uravnoteženih. Naime, sistem sa drvolikim grafom sigurno nije ekvivalentan uravnoteženom sistemu, kao što smo već zabeležili u odeljku 3. Medjutim, to ćemo brzo videti, sistemi sa drvolikim grafom su i najtrivijalniji, pa kada bi svaki sistem $\mathcal{S}$ za koji je $c(\Gamma(\mathcal{S}))=3$ bio ekvivalentan uravnoteženom, stajao bi zaključak da prelazak na kvadratne sisteme donosi malo suštinski novoga. Ali ovo ipak nije tačno. Za primer može služiti sistem čiji graf Γ je prikazan na sl. 18. Ovaj je graf očigledno nerastavljiv sa $c(\Gamma)=3$, a može se pokazati da on nije graf nijednog uravnoteženog sistema.



sl.18

8. REŠENJE NERASTAVLJIVIH SISTEMA

Prisetimo se (str. 15) da je svako rešenje generalisane jednačine asocijativnosti (tj. sistema <u>Ass</u>) slično njenom očiglednom rešenju. To će nam biti strategija i u rešavanju proizvoljnih slobodnih sistema. Naime, za svaki sistem naćićemo njegova najjednostavnija rešenja (zvaćemo ih glavnim), a potom ćemo dokazati da je svako rešenje slično nekom glavnom. U ovom odeljku to radimo samo za nerastavljive sisteme ; sinteza uz pomoć teoreme 7.1 će slediti u narednom. Već iz do sada izloženog jasno je da ćemo morati da odvojeno razmatramo nekoliko slučajeva, zavisno od tipa nerastavljivog sistema.

Neka je $\mathcal{S} = \{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ nerastavljiv sistem i $\Gamma = \Gamma(\mathcal{S})$. Slučajevi koje ćemo razlikovati su:

1. Γ je drvolik ;
2. $c(\Gamma)=3$ i Γ ima samo dva temena ;
3. $c(\Gamma)=3$ i Γ je planaran sa više od dva temena ;
4. Γ nije planaran .

U svakom od ovih slučajeva definisaćemo šta je <u>glavno rešenje</u> od $\mathcal{S}$ i dokazaćemo sledeću teoremu.

8.1 TEOREMA. <u>Neka je $\mathcal{S}$ nerastavljiv sistem. Njegovo opšte rešenje na skupu S dato je sa $\Lambda\mathcal{P}$, gde je $\mathcal{P}$ glavno rešenje sistema $\mathcal{S}$ na S i $\Lambda \in \mathrm{Sim}(\mathcal{S},S)$.</u>

<u>Slučaj 1.</u> Fiksirajmo element $1 \in S$ i neka su $*_1,\dots,*_m$ proizvoljne lupne operacije na S sa jedinicom 1 . Ako je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$, neka je

$$(8\text{-}1) \qquad \underline{Q}_i(x,y,z) \Leftrightarrow \begin{cases} x *_i y = z \ , \text{ kad je } x_p \neq x_q \\ x *_i z = y \ , \text{ kad je } x_p \neq x_q \end{cases} .$$

Svako $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ dobijeno na ovaj način zvaćemo <u>glavnim rešenjem</u> sistema $\mathcal{S}$ na S ; pisaćemo $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m) = \mathcal{R}(*_1,\dots,*_m)$.

<u>Dokaz teoreme 8.1</u>. Proveravamo prvo da je $\mathcal{R}(*_1,\dots,*_m)$ zaista rešenje. Neka je Y skup petlji u Γ ; $T=\Gamma(Y^c)$ je (jedinstveno) maksimalno drvo u Γ . Neka je $\phi : Y \to S$ proizvoljna funkcija. Na osnovu posledice 3.6 dovoljno je da pokažemo da je $\hat{\phi}: X \to S$, definisana sa $\hat{\phi} \restriction Y = \phi$ i $\hat{\phi}(x)=1$ za $x \notin Y$, valuacija. Zaista, ako je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$ i x_p, x_q, x_r svi različiti, tada oni pripadaju Y^c i $\varphi_i^{\hat{\phi}}$ se svodi na $1 *_i 1 = 1$. Ako je $x_p = x_q$, tada $x_r \in Y^c$, pa je $\varphi_i^{\hat{\phi}} \Leftrightarrow \hat{\phi}(x_p) *_i \hat{\phi}(x_r) = \hat{\phi}(x_q)$ tačno zbog $\hat{\phi}(x_r)=1$. Preostali slučajevi $x_p = x_q$ i $x_q = x_r$ slede na isti način.

Pretpostavimo sad da je $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ proizvoljno rešenje, pa da pokažemo da je ono slično nekom glavnom. Iz posledice 5.2 sledi da za svaku ivicu $x \notin Y$ postoji element $c(x) \in S$ takav da je $\phi(x)=c(x)$ za svaku valuaciju ϕ na X . Sledi da možemo pretpostaviti da je $c(x)=1$ za svako $x \notin Y$ (jer očiglednom sličnošću se svako rešenje prevodi u rešenje sa ovom osobinom). Da završimo dokaz potrebna nam je sledeća lema koja je manje-više reformulacija elementarnog fakta da je svaka kvazigrupa glavni izotop neke lupe [30, str.42] .

8.2 LEMA. <u>Neka je $\underline{Q}$ kvazigrupna relacija na</u> S <u>i</u> $\underline{Q}(1,1,1)$. Tada za svako $\alpha \in \mathrm{Sym}(S)$ takvo da je $\alpha(1)=1$ <u>postoje</u> $\beta,\gamma \in \mathrm{Sym}(S)$ <u>takvi da je</u> $\beta(1)=\gamma(1)=1$ <u>i da je operacija</u> $*$ <u>definisana sa</u> $x*y=z \Leftrightarrow \underline{Q}(\alpha x,\beta y,\gamma z)$ <u>lupa sa je-</u>

<u>dinicom</u> 1 . <u>Štaviše</u>, <u>ako je</u> $\underline{Q}(1,a,a)$ <u>tačno za svako</u> $a \in S$, <u>može se imati</u> $\beta=\gamma$. □

Da bismo završili dokaz, preostaje da za svako $x_p \in X$ nadjemo $\lambda_p \in \mathrm{Sym}(S)$ tako da operacije $*_1,\dots,*_m$ na S definisane sa

$$(8\text{-}2)\qquad x *_i y=z \Leftrightarrow \begin{cases} \underline{Q}_i(\lambda_p x,\lambda_q y,\lambda_r z), & \text{gde je } \varphi_i=Q_i(x_p,x_q,x_r) \text{ i } p\neq q \\ \underline{Q}_i(\lambda_p x,\lambda_q z,\lambda_r y), & \text{gde je } \varphi_i=Q_i(x_p,x_q,x_r) \text{ i } p=q \end{cases}$$

budu sve lupe sa jedinicom 1 .

Neka je Q_1 proizvoljno teme od Γ i neka je V_k $(k=0,1,\dots)$ skup svih temena od Γ čije rastojanje do Q_1 ne premašuje k ; $V_o=\{Q_1\}$. Neka je $X_k = \bigcup\{stQ_i \mid Q_i \in V_k\}$. Pretpostavimo da su $\lambda_p \in \mathrm{Sym}(S)$ već izabrani za svako $x_p \in X_k$ tako da su operacije $*_i$ definisane sa (8-2) lupe sa jedinicom 1 za svako $Q_i \in V_k$. Neka je sad, uz ove pretpostavke, Q_i teme od $V_{k+1} - V_k$ i $\varphi_i=Q_i(x_p,x_q,x_r)$. Tačno jedna od ivica x_p,x_q,x_r je u X_k - neka je to x_p (ostali slučajevi su analogni) . Mora biti $p\neq q,r$. Ako je $q\neq r$, tada, pošto je $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ rešenje, imamo $\underline{Q}_i(1,1,1)$ i, na osnovu leme 8.2 postoje λ_q,λ_r tako da je operacija $*_i$ definisana sa $x *_i y=z \Leftrightarrow \underline{Q}_i(\lambda_p x,\lambda_q y,\lambda_r z)$ lupa. U preostalom slučaju $q=r$ treba nam $\lambda_q=\lambda_r$ što takodje dobijamo iz leme 8.2 ako $\underline{Q}_i(1,a,a)$ važi za svako $a \in S$. A ovo važi zaista, jer x_q je petlja, pa $x_q \in Y$ i pošto se svaka funkcija $\phi : Y \rightarrow S$ širi do valuacije $\hat{\phi}$ na X , možemo uzeti $\phi(x_q)=a$ pa dobiti $\underline{Q}_i(\hat{\phi}(x_p),a,a)$, tj. $\underline{Q}_i(1,a,a)$ (zbog $\hat{\phi}(x_p)=c(x_p)=1$) . Primenom istog ovog postupka za svako teme iz $V_{k+1} - V_k$ dobijamo λ_p za svako $x_p \in X_{k+1}$ (primetimo da se svako $x_p \in X_{k+1} - X_k$ javlja u stQ_i za tačno jedno $Q_i \in V_k$) . Ovo završava dokaz, jer imamo $X_k=X$ za dovoljno veliko k . □

Slučaj 2. U ovom (trivijalnom) slučaju imamo $\mathcal{S} = \{A(x_1,x_2,x_3$ $B(x_{\sigma 1},x_{\sigma 2},x_{\sigma 3})\}$ za neko $\sigma \in \mathrm{Sym}\{1,2,3\}$. Glavno rešenje od je $(S,\underline{A},\underline{B})$ takvo da je $\underline{A}(x_1,x_2,x_3) \Leftrightarrow x_1 * x_2 = x_3 \Leftrightarrow \underline{B}(x_{\sigma 1},x_{\sigma 2},x_\sigma$ za neku lupnu operaciju $*$. Pošto je svaka kvazigrupna operacij izotopna lupnoj, teorema 8.1 sledi neposredno.

Slučaj 3. Iz posledice 5.6 sledi da su sad u svakom rešenju $(S,\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m)$ sve kvazigrupne relacije $\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m$ medjusobno izostrofne. Štaviše, iz posledice 5.7 i leme 6.9 sledi da su one sve izostrofne nekoj grupnoj relaciji.

Utopimo Γ u 2-sferu S^2 ; neka je $\Gamma^* \subseteq S^2$ graf dualan grafu Γ (v. odeljak 13) . Ivicu od Γ^* koja seče ivicu x_p označimo sa ξ_p . Svaka komponenta od $S^2 - \Gamma^*$ sadrži jedno teme od Γ ; te ćemo komponente zvati oblastima od Γ^* i označiti ih sa $D_1,\ldots,D_m$, gde $Q_i \in D_i$. Orijentišimo Γ^* na proizvoljan način. Pošto je Γ kubni graf, svaka oblast D_i je "trougaona", tj. incidentna sa tri ivce. Tačnije, ako je $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$, tada su ξ_p,ξ_q,ξ_r ivice na granici od D_i ; štaviše, postoje jedinstveni $\varepsilon_{pi},\varepsilon_{qi},\varepsilon_{ri} \in \{-1,1\}$ takvi da je $\partial D_i = \xi_p^{\varepsilon_{pi}} \xi_q^{\varepsilon_{qi}} \xi_r^{\varepsilon_{ri}}$ granični cikl oblasti D_i .

Neka je $\cdot$ proizvoljna grupna operacija na S sa jedinicom 1 . Za $\varphi_i = Q_i(x_p,x_q,x_r)$ definišimo

$$\text{(8-3)} \qquad \underline{Q}_i(x,y,z) \Leftrightarrow x^{\varepsilon_{pi}} \cdot y^{\varepsilon_{qi}} \cdot z^{\varepsilon_{ri}} = 1 ,$$

gde x^{-1} označava inverz od x u grupi $(S,\cdot)$. Svako $(S,\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m)$ dobijeno na ovaj način zvaćemo glavnim rešenjem od $\mathcal{S}$ i označavati sa $\mathcal{R}(\cdot)$. Vredi pomena da $\mathcal{R}(\cdot)$ nije odredjeno samom operacijom $\cdot$, već i utapanjem $\Gamma \hookrightarrow S^2$ i orijentacijom grafa Γ^* . Ovo utapanje i orijentaciju možemo fiksirati za svaki sistem , a lako je videti da promena utapanja i orijentacije menja glavna rešenja u njima slična.

Dokaz teoreme 8.1. Dokazaćemo prvo da je svako glavno rešenje zaista rešenje. Gledajmo ξ_p kao promenljive ; tada je $\Phi=(\bigwedge_{1\leq i<m} \partial D_i \Rightarrow \partial D_m)$ kvaziidentitet u grupnom jeziku i mi treba samo da pokažemo da $(S,\cdot)$ zadovoljava Φ . Medjutim, dekompozicija sfere grafom Γ^* i oblastima $D_1,\ldots,D_m$ čini upravo van Kampenov dijagram za Φ (odeljak 13) i iz stava 13.2 sledi da je Φ tačan na svakoj grupi.

Ostaje nam da dokažemo da je svako rešenje slično nekom glavnom. Počinjemo malom izmenom u formulama (8-3) glavnog rešenja. Naime, definišimo $\mathrm{sgn}Q_i=1$ ako cikl ∂D_i obilazi granicu od D_i u pozitivnom smeru gledano sa spoljašnje strane sfere S^2 , a $\mathrm{sgn}Q_i=-1$ u suprotnom slučaju. Lako je videti da $\varepsilon_{pi}\mathrm{sgn}Q_i + \varepsilon_{pj}\mathrm{sgn}Q_j = 0$ važi kad god su Q_i i Q_j temena incidentna ivici x_p . Otuda, zamenjujući u (8-3) svako ε_{pi} sa $\varepsilon_{pi}\mathrm{sgn}Q_i$ dobijamo sledeći oblik glavnog rešenja za $\mathcal{S}$:

$$(8\text{-}4)\qquad \underline{Q}_i(x,y,z) = \begin{cases} x^{\varepsilon_{pi}}\cdot y^{\varepsilon_{qi}}\cdot z^{\varepsilon_{ri}} = 1 & \text{za } \mathrm{sgn}Q_i=1 \\ z^{\varepsilon_{ri}}\cdot y^{\varepsilon_{qi}}\cdot x^{\varepsilon_{pi}} = 1 & \text{za } \mathrm{sgn}Q_i=-1 \end{cases},$$

u kojem $\varepsilon_{pi}+\varepsilon_{pj}=0$ važi za svako p $(1\leq p\leq n)$ i odgovarajuće i,j .

Neka je sad $(S,\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m)$ proizvoljno rešenje od $\mathcal{S}$. Već smo videli da postoji grupa $(S,\cdot)$ takva da su sve kvazigrupne operacije pridružene relacijama $\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m$ izostrofne operaciji $\cdot$. Odmah sledi da postoje $\lambda_{pi}\in \mathrm{Sym}(S)$ tako da važi

$$\underline{Q}_i(x,y,z) \Leftrightarrow$$

$$(8\text{-}5)\qquad \begin{cases} (\lambda_{pi}x)^{\varepsilon_{pi}}\cdot(\lambda_{qi}y)^{\varepsilon_{qi}}\cdot(\lambda_{ri}z)^{\varepsilon_{ri}} = 1 & \text{za } \mathrm{sgn}Q_i=1 \\ (\lambda_{ri}z)^{\varepsilon_{ri}}\cdot(\lambda_{qi}y)^{\varepsilon_{qi}}\cdot(\lambda_{pi}x)^{\varepsilon_{pi}} = 1 & \text{za } \mathrm{sgn}Q_i=-1 \end{cases},$$

gde je $\varphi_i=Q_i(x_p,x_q,x_r)$, a "epsiloni" kao u (8-4) .

Permutacije λ_{pi} ovde nisu jedinstveno odredjene (npr. $x\cdot y\cdot z=1 \Leftrightarrow (x\cdot a)\cdot(a^{-1}\cdot y)\cdot z=1$) i čitav problem koji preostaje da se reši pa da nam dokaz bude gotov je u tome da se ove permutacije mogu tako izabrati da važi $\lambda_{pi}=\lambda_{pj}$ za svako p i odgovarajuće i i j . Zato ćemo definisati da je kolekcija $\{\lambda_{pi}\}$ permutacija za koje važe formule (8-5) <u>sredjena na</u> Y ($Y\subseteq X$) ako je $\lambda_{pi}=\lambda_{pj}$ za svako $x_p\in Y$. Označimo sa Σ kompleks dat dekompozicijom sfere grafom Γ^* , a sa Σ_Y ($Y\subseteq X$) kompleks dobijen sečenjem Σ duž svih ivica ξ_p takvih da $x_p\in Y$. Ako ovakvo ξ_p pripada granici oblasti D_i i D_j (što biva ako i samo ako x_p spaja Q_i i Q_j u Γ) tada označimo odgovarajuće dve orijentisane ivice od Σ_Y sa ξ_{pi} i ξ_{pj} . Tako je Σ_Y načinjen od trouglova čije ivice su ξ_p ($x_p\notin Y$) i ξ_{pi} ($x_p\in Y$) .

Neka je Y podskup od X najmanje kardinalnosti takav da : (i) naše se rešenje $(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ može napisati u obliku (8-5) sa kolekcijom $\{\lambda_{pi}\}$ sredjenom na Y^c , i (ii) Σ_Y je povezan i prosto povezan. Treba da dokažemo da je $Y=\emptyset$.

Pre svega dokazujemo da Y sa svojstvima (i) i (ii) postoji. Za to nam treba

8.3 LEMA. <u>Neka je</u> $stQ_i=\{x_p,x_q,x_r\}$ <u>i</u> $stQ_j=\{x_p,x_s,x_t\}$. <u>Tada postoje</u> $\lambda'_{sj}, \lambda'_{tj}$ Sym(S) <u>takvi da</u> (8-5) <u>ostaje da važi posle zamenjivanja</u> $\lambda_{pj}, \lambda_{sj}, \lambda_{tj}$ <u>redom sa</u> $\lambda_{pi}, \lambda'_{sj}, \lambda'_{tj}$.

<u>Dokaz</u>. Ova je lema pojačana varijanta posledice 5.6. Neka su Δ i utapanje $f:\Delta\to\Gamma$ kao u dokazu od 5.6. Označimo ivice od Δ sa y_1,y_2,y_3 tako da je $f(y_1)=x_p$. Svakom y_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$

imamo pridružene permutacije $\lambda_{i1}, \lambda_{i2}$ (vidi dokaz teoreme 5.5) i izostrofija medju $\underline{Q}_i$ i $\underline{Q}_j$ je data u terminima ovih šest permutacija, v. (5-1) . Ostaje samo da se primeti da se krajnje ivice luka $f(y_1)$ poklapaju, pa je stoga $\lambda_{11}=\lambda_{12}$. □

Jasno je da oblasti $D_1,\ldots,D_m$ možemo preindeksirati tako da za svako i $(2\leqslant i\leqslant m)$ D_i i $D_1\cup\ldots\cup D_{i-1}$ imaju najmanje jednu zajedničku ivicu ; ne smanjujući opštost možemo pretpostaviti da je ova ivica ξ_i . (Radi se, zapravo, o izboru maksimalnog drveta u Γ .) Neka je $Y = X - \{x_2,\ldots,x_m\}$; lako se vidi da je Σ_Y disk. S druge strane, iz leme 8.3 sledi da možemo naše rešenje napisati u obliku (8-5) sa kolekcijom $\{\lambda_{pi}\}$ sredjenom na $\{x_2,\ldots,x_m\}$. Ovim je dokazana egzistencija skupa Y sa svojstvima (i) i (ii) .

Neka je sad Y skup najmanje kardinalnosti za koji važi (i) i (ii) . Pretpostavimo da je $Y\neq\emptyset$, u kom slučaju Σ_Y mora biti disk. Neka je ω granični cikl od Σ_Y ; ω je proizvod u kom se javljaju $\xi_{pi}^{\varepsilon_{pi}}$ $(x_p\in Y)$ svaki po jednom. Označimo sa $\partial' D_i$ granični cikl oblasti D_i u Σ_Y ; $\partial' D_i$ se dobija od ∂D_i zamenom svakog ξ_p za koji $x_p\in Y$ sa ξ_{pi} . Neka je K kompleks dobijen "lepljenjem" jednog diska D duž ω . Tada je K dekompozicija sfere i $\partial D=\omega$. Gledajući ξ_p, ξ_{pi} kao promenljive, iz posledice 13.3 dobijamo da je kvaziidentitet

(8-6) $\quad \bigwedge_{1\leqslant i\leqslant m} \partial' D_i \Rightarrow \omega$

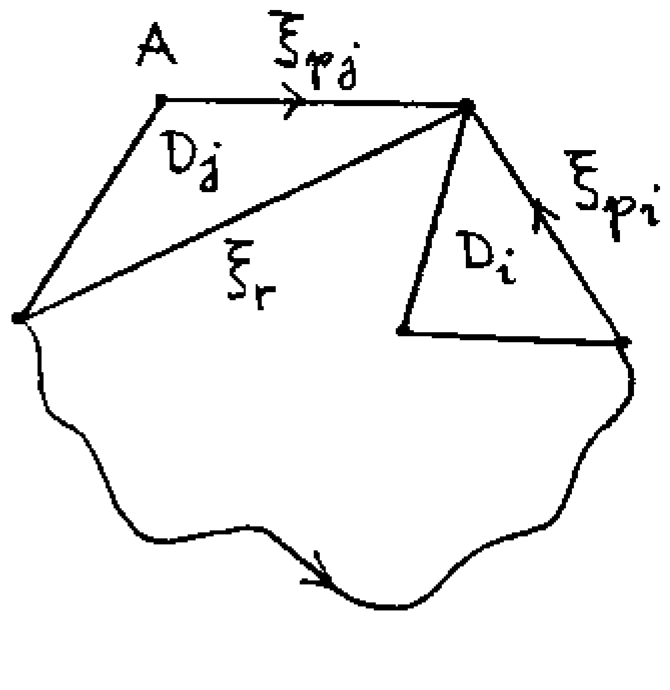
tačan na svakoj grupi.

Graf $\Gamma(Y^c)$ sadrži sva temena od Γ i povezan je (jer je Σ_Y povezan) . Dakle, $\Gamma(Y^c)$ sadrži maksimalno drvo od Γ . Iz leme 3.5 onda sledi da se svaka valuacija $\phi : Y\to S$ proširuje do valuacije $\hat{\phi}: X\to S$. Definišimo onda označavanje ψ

ivica od K sa $\psi(\xi_p)=\lambda_p(\hat{\phi}(x_p))$ za $x_p\in Y^c$ i $\psi(\xi_{pi})=\lambda_{pi}(\hat{\phi}(x_p))$ za $x_p\in Y$. (Za $x_p\in Y^c$ imamo $\lambda_{pi}=\lambda_{pj}$, što je ovde jednostavno označeno sa λ_p.) Pošto je $\hat{\phi}$ valuacija na X sledi da je $\psi(\partial'D_1)=\ldots=\psi(\partial'D_m)=1$. Iz (8-6) onda dobijamo $\psi(\omega)=1$.

Primetimo sada da se za neko p $\xi_{pi}^{\varepsilon_{pi}}\xi_{pj}^{\varepsilon_{pj}}$ javlja kao podreč od ω. (Npr. razmišljajmo o Σ_Y kao dobijenom uzastopnim rezanjem duž ivica ξ_p, $x_p\in Y$; neka je ξ_p poslednja ivica koja je razrezana.) Ne smanjujući time opštost, možemo pretpostaviti da je $\varepsilon_{pi}=1$ i $\varepsilon_{pj}=-1$, tako da imamo $\omega=\omega'\xi_{pi}\xi_{pj}^{-1}\omega''$, pa stoga i $\psi(\xi_{pj})\psi(\xi_{pi})^{-1}=\psi(\omega''\omega')$, gde je ψ gornje označavanje. Leva strana ove jednakosti zavisi samo od $\phi(x_p)$, dok desna strana zavisi samo od $\{\phi(x_q)\mid x_q\in Y-\{x_p\}\}$. Tako dobijamo $\psi(\xi_{pj})=a\cdot\psi(\xi_{pi})$ za neko $a\in S$. Prema tome, $\lambda_{pj}(x)=a\cdot\lambda_{pi}(x)$ važi za svako x.

Dodajmo ovome još da $\omega=\xi_{pi}\xi_{pj}^{-1}$ povlači $a=1$, tj. $\lambda_{pi}=\lambda_{pj}$, što protivreči minimalnosti od Y. Zato možemo pretpostavljati nadalje da je bar jedna od reči ω',ω'' neprazna.



sl.19

Neka je A početno teme od ξ_{pj} i N broj oblasti od Σ_Y incidentnih sa A. Ako je $N=1$ tad imamo (sl. 19) $\omega=\omega'\xi_{pi}\xi_{pj}^{-1}\xi_{qj}^{\varepsilon_{qj}}\omega'''$. Takodje, do na cikličnu permutaciju, $\partial'D_j=\xi_{pj}^{-1}\xi_{qj}^{\varepsilon_{qj}}\xi_r^{\varepsilon_{rj}}$, pa možemo pisati $\lambda_{pj}(x)^{-1}\cdot\lambda_{qj}(y)^{\varepsilon_{qj}}\cdot\lambda_{rj}(z)^{\varepsilon_{rj}}=1$ ako i samo ako $\lambda_{pi}(x)^{-1}(a.\lambda_{qj}(y)^{\varepsilon_{qj}}).\lambda_{rj}(z)^{\varepsilon_{rj}}=1$. Sledi da u (8-5) možemo zameniti λ_{pj} i λ_{qj} sa λ_{pi} i λ'_{qj} respektivno, gde je

$$\lambda'_{qj}(x) = \begin{cases} a\cdot\lambda_{qj}(x) & , \text{ za } \varepsilon_{qj}=1 \\ \lambda_{qj}(x)\cdot a^{-1} & , \text{ za } \varepsilon_{qj}=-1 \end{cases} .$$

Tako smo dobili naše rešenje zapisano u obliku (8-5) sa kolekcijom permutacija sredjenom na $Y^c \cup \{x_p\}$. Pošto je $\Sigma_{Y-\{x_p\}}$ kompleks koji se dobija od Σ_Y identifikacijom ivica ξ_{pi} i ξ_{pj} , sledi da je taj kompleks takodje disk. Dakle, $Y-\{x_p\}$ zadovoljava uslove (i) i (ii) . Kontradikcija, jer je Y najmanji takav skup.

Ovo je bilo za $N=1$. Završavamo dokaz indukcijom po N . Za $N>1$ imamo (sl. 20) $\partial' D_j = \xi_{pj}^{-1}\xi_{qj}^{\varepsilon_{qj}}\xi_r^{\varepsilon_{rj}}$. Koristeći isti

sl.20

trik kao malopre, možemo promeniti naše formule (8-5) izmenom $\lambda_{pj}, \lambda_{qj}$ tako da postignemo sredjenost na $Y' = Y \cup \{x_p\} - \{x_q\}$. Kompleks $\Sigma_{Y'}$ je dobijen od Σ_Y identifikacijom ξ_{pi} i ξ_{pj} , pa onda sečenjem duž ξ_q , i sledi da je on takodje disk (sl. 20) . Staviše, pošto su početna temena od ξ_{pi} i ξ_{pj} različita (jer $\omega \neq \xi_{pi}\xi_{pj}^{-1}$!), broj N za $\Sigma_{Y'}$ je smanjen za jedinicu. $\square$

Za potrebe odeljka 10 izvešćemo jednu posledicu (zapravo uopštenje) teoreme 8.1 u ovom slučaju. Pretpostavimo da je $\mathcal{S}$ proizvoljan (rastavljiv) sistem takav da je $\Gamma(\mathcal{S})$ planaran. Zanimaju nas ona rešenja $(S,\underline{Q}_1,\ldots,\underline{Q}_m)$ kod kojih su sve relacije

Q_i izotopne, i to izotopne nekoj grupnoj relaciji. Zvaćemo takva rešenja ujednačenim . Jasno je da $c(\Gamma(\mathcal{S}))=3$ povlači da su sva rešenja ujednačena. Medjutim, i u rastavljivom slučaju mi možemo utopiti $\Gamma(\mathcal{S})$ u sferu, načiniti dualni graf, obaviti već sve kao što smo radili na početku razmatranja slučaja 3 , zaključno sa definisanjem formula (8-3) glavnog ujednačenog rešenja . Tada gornji dokaz teoreme 8.1 gotovo bez ikakvih izmena daje i dokaz za naredno tvrdjenje.

8.4 POSLEDICA. Svako ujednačeno rešenje sistema sa planarnim grafom je slično nekom glavnom ujednačenom rešenju. □

Slučaj 4. Slično kao u prethodnom slučaju, sada iz posledica 5.6 i 5.7 i iz leme 6.10 sledi da su u svakom rešenju $(S,Q_1,\ldots,Q_m)$ sve relacije $Q_1,\ldots,Q_m$ izotopne i izotopne nekoj abelovoj relaciji. Pa i čitavo izlaganje može teći kao u slučaju 3 : utopimo $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$ u orijentabilnu površ najmanjeg mogućeg roda (v. odeljak 13) , napravimo dualni graf Γ^* , orijentišemo ga i definišemo glavno rešenje formulama (8-3) , uz pretpostavku da je $\cdot$ množenje u nekoj abelovoj grupi. Svi se argumenti prenose jednostavno, a često se i uprošćavaju, pošto u ovom slučaju ne treba da obraćamo pažnju na redosled elemenata u proizvodu. Umesto "sfernog" dela posledice 13.3 ovde bismo koristili njen "orijentabilni" deo.

Čitava se diskusija u ovom slučaju može, medjutim, obaviti i bez ikakvog utapanja u površi. Umesto "orijentabilnog" dela posledice 13.3 treba koristiti ekvivalentnu i jednostavniju lemu 13.4 . Naime, za svaku ivicu x_p od Γ i svako incidentno joj teme Q_i definišemo ε_{pi} kao što je učinjeno pred lemom 13.4 . Glavno rešenje našeg sistema $\mathcal{S}$ definišemo onda formulama

$$\underline{Q}_i(x,y,z) \Leftrightarrow x^{\varepsilon_{pi}} \cdot y^{\varepsilon_{qi}} \cdot z^{\varepsilon_{ri}} = 1 \quad (1 \leqslant i \leqslant m) ,$$

gde je $\varphi_i = Q_i(x_p, x_q, x_r)$. Pretpostavlja se, naravno, da je ovde $(S,\cdot)$ abelova grupa. Dokaz teoreme 8.1 i sad bi išao imitiranjem dokaza iz slučaja 3 , samo je neuporedivo lakši.

9. REŠENJE PROIZVOLJNIH SISTEMA

U ovom odeljku uopštavamo pojam glavnog rešenja na proizvoljne sisteme i dokazujemo odgovarajuće proširenje teoreme 8.1 . Pretpostavimo onda da je $\mathcal{S}$ rastavljiv sistem i $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ sistemi kao u odeljku 7 takvi da je $\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{S}_1) \# \Gamma(\mathcal{S}_2)$. Ako su $\mathcal{R}_1 = (S, \underline{A}, \underline{B}, \underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k)$ i $\mathcal{R}_2 = (S, \underline{C}, \underline{D}, \underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_\ell)$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, tada iz teoreme 7.1 sledi da je $\mathcal{R} = (S, \underline{A}, \underline{B}, \underline{E}_1, \ldots, \underline{E}_k, \underline{C}, \underline{D}, \underline{F}_1, \ldots, \underline{F}_\ell)$ rešenje od $\mathcal{S}$. Kažemo u ovakvom slučaju da je $\mathcal{R}$ <u>povezana suma</u> rešenja $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ i pišemo $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2$. Iz teoreme 7.1 imamo takodje i da je svako rešenje od $\mathcal{S}$ oblika $\Lambda(\mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2)$, gde su $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, a Λ neka sličnost.

Sad možemo induktivno definisati <u>glavno rešenje</u> za svaki sistem. Ako je sistem nerastavljiv, već imamo definiciju u prethodnom odeljku. A ako je $\mathcal{S}$ rastavljiv, kazaćemo da je njegovo rešenje $\mathcal{R}$ glavno rešenje ako se $\mathcal{S}$ može rastaviti u $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ i ako je $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2$ za neka glavna rešenja $\mathcal{R}_1$ i $\mathcal{R}_2$ od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. (Definicija je korektna, jer je broj nerastavljivih faktora od $\mathcal{S}_i$ manji od broja nerastavljivih faktora od $\mathcal{S}$.)

Sledeća lema tvrdi da je skup glavnih rešenja invarijantan u odnosu na dijagonalno dejstvo od $\mathrm{Sym}(S)$.

9.1 LEMA. *Neka je* $\alpha \in \mathrm{Sym}(S)$, *a* $\Lambda_\alpha \in \mathrm{Sim}(\ ,S)$ *definisano sa* $\Lambda_\alpha(x) = \alpha$ *za svako* $x \in X$. *Ako je* $\mathcal{P}$ *glavno rešenje sistema* $\mathcal{S}$ *na* S , *tada je i* $\Lambda_\alpha \mathcal{P}$ *glavno rešenje od* $\mathcal{S}$ *na* S .

Dokaz. Ako je $*$ binarna operacija na S , definišimo operaciju $*^\alpha$ sa $x *^\alpha y = z \Leftrightarrow \alpha x * \alpha y = \alpha z$. Primetimo da su $(S,*)$ i $(S,*^\alpha)$ izomorfni grupoidi, te da je 1 jedinica za $*$ ako i samo ako je $\alpha^{-1}1$ jedinica za $*^\alpha$.

Pošto je $\Lambda_\alpha(\mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2) = \Lambda_\alpha(\mathcal{R}_1) \# \Lambda_\alpha(\mathcal{R}_2)$, dovoljno je dokazati lemu samo za slučaj kad je $\mathcal{S}$ nerastavljiv. Ako je $\mathcal{S}$ drvolik (slučaj 1 u odeljku 8) i $\mathcal{P}$ glavno rešenje od $\mathcal{S}$, tad je $\mathcal{P}$ dato formulama (8-1) sa parametrima $*_1, \dots, *_m$ (lupe sa zajedničkom jedinicom 1) . Sad je jasno da je rešenje $\Lambda_\alpha \mathcal{P}$ dato istim formulama, samo sa parametrima $*_1^\alpha, \dots, *_m^\alpha$. Slično, u slučajevima 2, 3 i 4 glavno rešenje $\mathcal{P}$ je odredjeno jednom operacijom $*$ (koja je, zavisno od slučaja, lupa, grupa ili abelova grupa) , a $\Lambda_\alpha \mathcal{P}$ je istim formulama odredjeno operacijom $*^\alpha$. □

9.2 TEOREMA. *Opšte rešenje povezanog sistema je dato sa* $\Lambda \mathcal{P}$, *gde je* $\mathcal{P}$ *glavno rešenje i* Λ *sličnost*.

Dokaz. Da je svako glavno rešenje zaista rešenje, to za nerastavljive sisteme znamo iz odeljka 8 . A za rastavljive to onda sledi iz teoreme 7.1 .

Indukcijom po broju nerastavljivih faktora sada dokazujemo da je svako rešenje od $\mathcal{S}$ oblika $\Lambda \mathcal{P}$. Za nerastavljive sisteme to važi prema teoremi 8.1 . Zato pretpostavimo da je

$\mathcal{S}$ rastavljiv, $\mathcal{R}$ njegovo rešenje i $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ takvi da je $\Gamma(\mathcal{S}) = \Gamma(\mathcal{S}_1) \# \Gamma(\mathcal{S}_2)$. Koristimo notaciju iz odeljka 7 i pišemo $\mathcal{R}=(S,\underline{A}_\lambda,\underline{B},\underline{E}_1,\dots,\underline{E}_k,\underline{C}_\lambda,\underline{D},\underline{F}_1,\dots,\underline{F}_\ell)$, gde su $\mathcal{R}_1 = (S,\underline{A},\underline{B},\underline{E}_1,\dots,\underline{E}_k)$ i $\mathcal{R}_2 = (S,\underline{C},\underline{D},\underline{F}_1,\dots,\underline{F}_\ell)$ rešenja od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Zbog jedne očigledne sličnosti možemo pretpostaviti da je $\lambda=\mathrm{id}_S$, tj. da je $\mathcal{R}= \mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2$. Indukcijska pretpostavka nam daje $\mathcal{R}_1 = \Lambda_1\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{R}_2 = \Lambda_2\mathcal{P}_2$ za neka glavna rešenja $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_2$ od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Ovde su Λ_1 i Λ_2 funkcije sa $X_1\cup\{z_1\}$ i $X_2\cup\{z_2\}$ respektivno u $\mathrm{Sym}(S)$. Uz pretpostavku $\Lambda_1(z_1)=\Lambda_2(z_2)$ sad bismo odmah imali $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \# \mathcal{R}_2 = \Lambda(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2)$, gde je $\Lambda : X_1\cup X_2\cup\{x,y\} \longrightarrow \mathrm{Sym}(S)$ dato sa $\Lambda(x)=\Lambda(y)=\Lambda_1(z_1)$ i $\Lambda\restriction X_1 = \Lambda_1\restriction X_1$, $\Lambda\restriction X_2 = \Lambda_2\restriction X_2$.

Ostaje nam slučaj $\Lambda_1(z_1)\neq\Lambda_2(z_2)$. Pa neka je $\alpha=\Lambda_2(z_2)^{-1}\Lambda_1(z_1)$, $\mathcal{P}_2'=\Lambda_\alpha\mathcal{P}_2$ i $\Lambda_2'=\Lambda_2\Lambda_\alpha^{-1}$. Tada će, prema lemi 9.1 , $\mathcal{P}_2'$ glavno rešenje od $\mathcal{S}_2$ i imamo $\mathcal{R}_2=\Lambda_2'\mathcal{P}_2'$ i $\Lambda_2'(z_2)=\Lambda_1(z_1)$. Sada, kao malopre u slučaju $\Lambda_2(z_2)=\Lambda_1(z_1)$, dobijamo da je $\mathcal{R}$ slično glavnom rešenju $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2'$. $\square$

Do sada se nismo uopšte bavili pitanjem jedinstvenosti naših rešenja i u tom pogledu zadovoljićemo se sa nekoliko narednih zapažanja. Sve uz napomenu da potpuna analiza (ne)jedinstvenosti ostaje otvoreno pitanje.

Počnimo, na primer, od opšteg rešenja nerastavljivog sistema $\mathcal{S}$ sa $c(\Gamma(\mathcal{S}))=3$ (slučajevi 3 i 4 - oni su i najzanimljiviji). Parametri u zapisu ovog opšteg rešenja su operacija $*$ na S i $\Lambda:X\to\mathrm{Sym}(S)$. Tako za svaki par $(*,\Lambda)$ imamo jedinstveno odredjeno rešenje $\mathcal{R}(*,\Lambda)$ i prirodno je sada pitati se kada je $\mathcal{R}(*_1,\Lambda_1) = \mathcal{R}(*_2,\Lambda_2)$ za različite parove $(*_1,\Lambda_1)$ i $(*_2,\Lambda_2)$. Jasno da $*_1$ i $*_2$ moraju biti izomorfne. Jasno je još da, sa datim izomorfnim operacijama $*_1$ i $*_2$ i sa datim

Λ_1 , može se naći Λ_2 tako da je $\mathcal{R}(*_1,\Lambda_1) = \mathcal{R}(*_2,\Lambda_2)$. Štaviše, iz lako dokazive jednakosti $\mathcal{R}(*,\Lambda) = (*^{\alpha},\Lambda_{\alpha}^{-1}\Lambda)$ sledi da se, za svako $x_0 \in X$ i $\lambda_0 \in \mathrm{Sym}(S)$, svako rešenje od $\mathcal{S}$ na S može napisati u obliku $\mathcal{R}(*,\Lambda)$, gde je $\Lambda(x_0)=\lambda_0$. (Uporedi sa opštim rešenjem jednačine (2-1) datim u odeljku 3 ; u tom rešenju učestvuje pet permutacija, šesta je fiksirana identiteta.) Ista činjenica može se dokazati i za proizvoljne sisteme. Pominjemo još da problem karakterizacije jednakosti $\mathcal{R}(*,\Lambda_1) = \mathcal{R}(*,\Lambda_2)$ mora uključiti u razmatranje automorfizme operacije $*$. Uostalom, u nekim specijalnim slučajevima, kao što su jednačine (2-1) i (2-2) ovaj je problem rešen [4

U proizvoljnom sistemu imamo $k \geqslant 1$ klasa nužne izostrofije i naša su rešenja parametritovana sa k operacija $*_1,\ldots,*_k$ na istom skupu S i sa $\Lambda: X \to \mathrm{Sym}(S)$. Medjutim (za $k > 1$) , sada nije legitimno pisati $\mathcal{R}(*_1,\ldots,*_k,\Lambda)$ jer rešenje je dobijeno induktivno, zaviseći od dekompozicije sistema. Sa malo više truda se ipak može dokazati da $*_1,\ldots,*_k$ i Λ zaista jedinstveno odredjuju rešenje sistema. Za to se može, na primer, koristiti teorema 6.7 koja tvrdi da su nerastavljivi faktori kubnog grafa jednoznačnoodredjeni samim grafom (nezavisno od korak-po-korak dekompozicije). Dakle, svaki sistem jednoznačno odredjuje nerastavljive faktor-sisteme u čiju se povezanu sumu rastavlja. Može se pokazati da, ako su $\mathcal{P}_1,\ldots,\mathcal{P}_k$ glavna rešenja faktor-sistema $\mathcal{S}_1,\ldots,\mathcal{S}_k$ sistema $\mathcal{S}$, tada je $\mathcal{P}_1 \# \ldots \# \mathcal{P}_k$ glavno rešenje od $\mathcal{S}$, nedvosmisleno napisano.

Ima, medjutim, i direktniji način da se zapiše rešenje $\mathcal{R}(*_1,\ldots,*_k,\Lambda)$. Naime, neka su $C_1,\ldots,C_k$ sve $\approx$-klase temena od $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$. Rećićemo da je C_t $(1 \leqslant t \leqslant k)$ klasa tipa 1, 2, 3 ili 4 , zavisno od tipa (odeljak 8) odgovarajućeg nerastavljivog faktora. Jasno, C_t je tipa 1 ako i samo ako je $|C_t|=1$, tj. ako i samo ako je $C_t=\{Q_i\}$ za neko Q_i koje je incidentno nekom mostu u Γ (stav 6.8). Takodje, C_t je tipa 2 ako i samo ako je $|C_t|=2$.

Neka su dalje $*_1,\dots,*_k$ proizvoljne lupne relacije na skupu S takve da je $*_t$ grupna relacija ako je C_t tipa 3, a $*_t$ je abelova ako je C_t tipa 4. Neka je 1_t jedinica za $*_t$. Zahtevamo još da bude $1_s=1_t$ kad god je $C_s=\{Q_i\}$ i $C_t=\{Q_j\}$, a Q_i i Q_j su incidentni istom mostu u Γ. Sa ovako definisanim parametrima definišemo rešenje $\mathcal{P}(*_1,\dots,*_k)=(S,\underline{Q}_1,\dots,\underline{Q}_m)$ sistema $\mathcal{S}=\{\varphi_1,\dots,\varphi_m\}$ na sledeći način. Utopimo $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$ u orijentabilnu površ Σ najmanjeg mogućeg roda, načinimo dualni graf Γ^* i orijentišimo ga na proizvoljan način. Za svaku oblast D_i (komponentu od $\Sigma-\Gamma^*$) definišemo granični cikl $\partial D_i=\xi_p^{\varepsilon_{pi}}\xi_q^{\varepsilon_{qi}}\xi_r^{\varepsilon_{ri}}$ kao u odeljku 8, slučaj 3. Da definišemo $\underline{Q}_i$ $(1\leq i\leq m)$ pretpostavimo da je $\varphi_i=Q_i(x_p,x_q,x_r)$ i $Q_i\in C_t$.

Ako je C_t tipa 1, stavimo

$$\underline{Q}_i(x,y,z)\iff\begin{cases} x*_t y=z & \text{, kad je } x_p \text{ ili } x_q \text{ most}\\ x*_t z=y & \text{, inače (tj. kad je } x_r \text{ most)}\end{cases}.$$

Ako je C_t tipa 2, tada je $C_t=\{Q_i,Q_j\}$, pa zajedno definišemo $\underline{Q}_i$ i $\underline{Q}_j$:

$$\underline{Q}_i(x,y,z)\iff x*_t y=z\ ,\qquad \underline{Q}_j=\sigma\underline{Q}_i\ ,$$

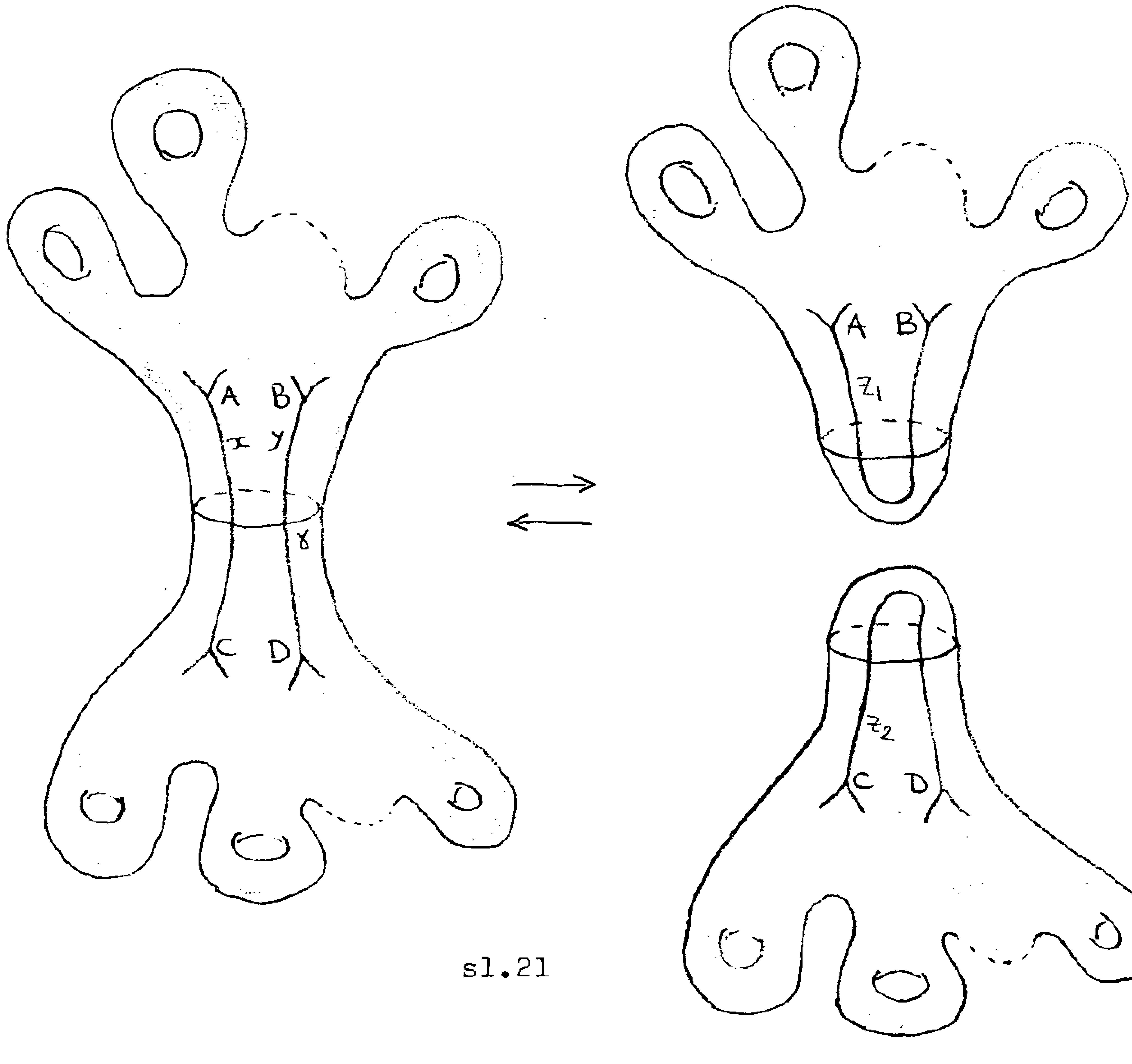
gde je σ parastrofija odredjena sa tri puta koji povezuju Q_i sa Q_j u Γ.

Konačno, ako je C_t tipa 3 ili 4, tada

$$\underline{Q}_i(x,y,z)\iff x^{\varepsilon_{pi}}*_t y^{\varepsilon_{qi}}*_t z^{\varepsilon_{ri}}=1_t\ .$$

9.3 STAV. *Rešenje je glavno ako i samo ako se može napisati u obliku* $\mathcal{P}(*_1,\dots,*_k)$.

Dokaz. Indukcija po broju nerastavljivih faktora sistema. Početni slučaj su nerastavljivi sistemi i za njih se stav neposredno proverava. Pretpostavimo onda da je $\mathcal{S}$ rastavljiv na sisteme $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$ (oznake su kao u odeljku 7). Identifikujući relacijske simbole koji se javljaju u $\mathcal{S}$ sa onima koji se javljaju u $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$, možemo pretpostaviti da su $C_1,\dots,C_t$ sve $\approx$-klase od $\mathcal{S}$, te da su $C_1,\dots,C_\ell$ i $C_{\ell+1},\dots,C_t$ redom sve $\approx$-klase od $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$. Neka su $*_1,\dots,*_k$ odgovarajuće lupne operacije i $\mathcal{P}(*_1,\dots,*_k)$ rešenje odredjeno njima i utapanjem grafa $\Gamma=\Gamma(\mathcal{S})$ u površ Σ . Neka je $\{x,y\}$ dvojni most u odnosu na koji se $\mathcal{S}$ rastavlja na $\mathcal{S}_1$ i $\mathcal{S}_2$.



sl.21

Neka su Γ' i Γ'' komponente grafa $\Gamma-(x\cup y)$; lako se dokazuje da postoji prosta zatvorena linija γ u Σ takva da Γ' i Γ'' pripadaju dvema komponentama od $\Sigma-\gamma$. Može se pretpostaviti da γ seče Γ u samo dve tačke od kojih jedna pripada ivici x , a druga ivici y . Neka su Σ_1 i Σ_2 površi dobijene od dveju komponenata od $\Sigma-\gamma$ lepljenjem diska duž γ (sl. 21) . Povezivanjem krajnjih tačaka "poluivica" x i y u svakom od Σ_1 i Σ_2 dobijamo utapanja grafa $\Gamma(\mathcal{Y}_i)$ u Σ_i $(i=1,2)$. Sad se pravolinijski dokazuje da je $\mathcal{P}(*_1,\ldots,*_k)=\mathcal{P}(*_1,\ldots,*_\ell)\#$ $\mathcal{P}(*_{\ell+1},\ldots,*_k)$, gde su $\mathcal{P}(*_1,\ldots,*_\ell)$ i $\mathcal{P}(*_{\ell+1},\ldots,*_k)$ rešenja od $\mathcal{Y}_1$ i $\mathcal{Y}_2$ odredjena utapanjima u Σ_1 i Σ_2 . Ova dva rešenja jesu glavna - to je indukcijska pretpostavka. Sledi da je i $\mathcal{P}(*_1,\ldots,*_k)$ glavno..

Sasvim slično ide i dokaz u suprotnom smeru. Ako su $\mathcal{P}(*_1,\ldots,*_\ell)$ i $\mathcal{P}(*_{\ell+1},\ldots,*_k)$ rešenja odredjena navedenim lupnim operacijama i utapanjima grafova $\Gamma(\mathcal{Y}_1)$ i $\Gamma(\mathcal{Y}_2)$ u površi Σ_1 i Σ_2 , tada dobijamo površ Σ i utapanje grafa $\Gamma(\mathcal{Y})$ u Σ tako što prvo isečemo iz Σ_i mali disk koji seče z_i , pa onda zalepimo dve dobijene površi duž granica isečenih diskova (sl.21) . $\square$

10. KVADRATNI KVAZIGRUPNI VARIJETETI

Napuštamo sada slobodne sisteme (tj. slobodne kvazigrupne identitete) i prelazimo na razmatranje drugog ekstrema - identiteta u kojima se javlja samo jedan operacijski simbol (uz svoje levo i desno deljenje). Tako ćemo od ovog odeljka pa nadalje termin "kvazigrupni identitet" rezervisati za identitete u jeziku $\{\cdot,\backslash,/\}$. Drugim rečima, zanimaćemo se varijetetima kvazigrupa. Koristićemo oznaku $\mathrm{var}\{E_1,E_2,\ldots\}$ za klasu (varijetet) svih kvazigrupa koje zadovoljavaju identitete $E_1,E_2,\ldots$. Ako su svi ovi identiteti kvadratni, rećićemo da je $\mathrm{var}\{E_1,E_2,\ldots\}$ <u>kvadratni varijetet</u>. Prva tri primera kvadratnih varijeteta su kvadratni varijeteti grupa $\underline{\underline{G}}_o$, $\underline{\underline{A}}_o$ i $\underline{\underline{B}}_o$ (grupe, abelove grupe i bulove grupe). Sa $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$ označimo varijetete kvazigrupa izotopnih grupama/abelovim grupama/bulovim grupama. Oni su takodje kvadratni (v. uvod) .

Tvrdjenje da je svaka kvazigrupa koja zadovoljava identitet E izotopna grupi pisaćemo radije kao $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$. U ovom odeljku su dati neophodni i dovoljni uslovi za $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$, gde je $\underline{\underline{V}}$ kvadratni varijetet. U dokazima će se bitno koristiti rezultati prethodnih odeljaka. Ako je E kvadratni identitet, označavaćemo sa $\mathrm{gen}E$ slobodni identitet koji se dobija od E zamenom svih javljanja operacijskih simbola u E različitim operacijskim simbolima. Jasno, $(S,\cdot) \in \mathrm{var}E$ važi ako i samo ako je $(S,\cdot,\ldots,\cdot)$ rešenje od $\mathrm{gen}E$.

10.1 TEOREMA. <u>Neka je</u> $\underline{\underline{V}} = \mathrm{var}\{E_1,E_2,\ldots\}$ <u>kvadratni varijetet. Tada</u> $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$ <u>važi ako i samo ako se za neko</u> i <u>graf</u> K_4 <u>homeomorfno utapa u</u> $\Gamma(E_i)$.

Dokaz. Ako se K_4 utapa u $\Gamma(E_i)$ i ako su $*_1,\ldots,*_m$ operacijski simboli koji učestvuju u genE_i, tada postoji j tako da je u svakom rešenju $(S,*_1,\ldots,*_m)$ kvazigrupa $(S,*_j)$ grupni izotop. Ovo se dobija neposredno iz posledice 5.7. Sledi onda da je svako rešenje $(S,*)$ od E_i grupni izotop i otuda da je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$.

Neka je $\underline{\underline{S}}$ varijetet totalno simetričnih lupa, tj. lupa koje zadovoljavaju $x\backslash y=x/y=x\cdot y=y\cdot x$. Za dokaz dela "samo ako" teoreme dovoljno je dokazati da $\underline{\underline{S}} \not\subseteq \underline{\underline{G}}$ i da $\underline{\underline{S}} \subseteq$ var$E$ za svako E takvo da se K_4 ne utapa u $\Gamma(E)$. Prvo od ovih tvrdjenja sledi iz opažanja da je svaka totalno simetrična grupa bulova, pa joj je red stepen od dva ; dok, s druge strane, postoje totalno simetrične lupe i drugih redova (npr. reda 10 [16, str. 74]). Za drugo tvrdjenje primetimo da je slobodan sistem koji odgovara identitetu E takvom da se K_4 ne utape u $\Gamma(E)$ povezana suma drvolikih sistema i dvoatomnih sistema (slučajevi 1 i 2 u odeljku 8). Bez teškoća se proverava da svaka totalno simetrična lupna relacija (tj. relacija pridružena totalno simetričnoj lupi) zadovoljava svaki ovakav sistem. Sledi onda iz teoreme 7.1 da svaka totalno simetrična lupna relacija zadovoljava svaki sistem čiji graf ne sadrži homeomorfnu kopiju od K_4 . □

10.2 POSLEDICA. <u>Neka je</u> E <u>kvadratni identitet. Tada</u> var$E \subseteq \underline{\underline{G}}$ <u>važi ako i samo se</u> K_4 <u>utapa u</u> $\Gamma(E)$. □

Napominjemo da su gornji rezultati manje-više poznati, doduše u nešto drukčijoj formulaciji. Recimo, deo "ako" posledice 10.2 se može izvesti iz [20, teorema 1]. Za uravnotežene identitete ova se posledica svodi naneophodan i dovoljan uslov dat u [26, teoreme 4.3 i 4.4].

Prelazimo sad na razmatranje uslova za $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ i potrebno nam je malo nove notacije. Naime, svaki kvazigrupni identitet se neposredno prevodi u grupni identitet (u jeziku $\{\cdot, {}^{-1}, 1\}$) zamenom podterma oblika u/v $(u\backslash v)$ sa uv^{-1} $(u^{-1}v)$ Možemo to malo uopštiti, pa za svako $\alpha, \beta \in \{-1,1\}$ i svaki kvazigrupni identitet E definisati grupni identitet $E^{\alpha\beta}$ interpretirajući $u\cdot v$, u/v i $u\backslash v$ redom kao $u^{\alpha}\cdot v^{\beta}$, $u^{\alpha}\cdot v^{-\beta}$ i $u^{-\alpha}\cdot v^{\beta}$ Jasno je da ako je bar jedan od identiteta $E^{\alpha\beta}$ trivijalan (tj. tačan na svim grupama ; setimo se da je svaki grupni identitet ekvivalentan sa $x=x$, $xy=yx$ ili $x^2=1$) , tada $\mathrm{var}E$ sadrži izotop svake grupe. Iz sledećeg rezultata će slediti da ovde važi i obrat (uz stalnu pretpostavku da je E kvadratni).

10.3 TEOREMA. Neka je $\underline{\underline{V}} = \mathrm{var}\{E_1, E_2, \ldots\}$ kvadratni varijetet. Tada je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ ako i samo ako je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$ i za svaki par α, β $\in \{-1,1\}$ postoji i tako da je E_i netrivijalan grupni identitet.

10.4 POSLEDICA. Neka je E kvadratni identitet. Tada $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{A}}$ važi ako i samo ako je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$ i svi identiteti $E^{\alpha\beta}$ su trivijalni.

Dokaz. Posledica 10.4 je specijalan slučaj teoreme 10.3 , kad je $\underline{\underline{V}} = \mathrm{var}E$. Deo "samo ako" je trivijalan. Pretpostavimo onda da je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$ i da su svi $E^{\alpha\beta}$ netrivijalni grupni identiteti. Ako je $\Gamma(E)$ neplanaran, tada $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{A}}$ dobijamo lako iz leme 6.10 i posledice 5.7. Dakle, pretpostavimo, dakle, još da je $\Gamma(E)$ planaran i da , idući ka kontradikciji, E ima rešenje izotopno neabelovoj grupi $(G,\cdot)$.

Opet nam treba slobodan identitet $\mathrm{gen}E$. Iz posledice

8.4 sledi da je svako njegovo ujednačeno rešenje $(G,*_1,\dots,*_m)$ u kojem su sve kvazigrupe $(G,*_i)$ izotopne grupi $(G,\cdot)$ dato formulama

$$(10\text{-}1)\quad x*_i y=z \Leftrightarrow (\lambda_p(x))^{\varepsilon_{pi}}\cdot(\lambda_q(y))^{\varepsilon_{qi}}\cdot(\lambda_r(z))^{\varepsilon_{ri}}=1 \quad (1\le i\le m)\ ,$$

gde su $p,q,r\in\{1,\dots,n\}$ i $\varepsilon_{pi}\in\{-1,1\}$ odredjeni grafom $\Gamma(E)$ i njegovim utapanjem u sferu. Označimo ovo rešenje sa $\mathcal{R}(\Lambda)$, $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$. Sledeća lema nam je potrebna za razmatranje uslova koje Λ treba da zadovoljava pa da $\mathcal{R}(\Lambda)$ bude rešenje od E (tj. da bude $*_1=\dots=*_m$). Prethodno definišemo $H\subseteq \mathrm{Sym}(G)$ kao skup svih ψ takvih da je $\psi(x)=\phi(x)\cdot a$ za neko $a\in G$ i $\phi\in \mathrm{Aut}(G,\cdot)$; lako je videti da je H podgrupa od $\mathrm{Sym}(G)$.

10.5 **LEMA.** <u>Neka su</u> $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in \mathrm{Sym}(G)$ <u>takvi da</u> $x\cdot y\cdot z=1$ <u>važi ako i samo ako važi</u> $\psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)=1$. <u>Tada</u> $\psi_1,\psi_2,\psi_3\in H$.

<u>Dokaz</u>. Uslov $x\cdot y\cdot z=1 \Leftrightarrow \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z)=1$ je funkcionalna jednačina Pexiderovog tipa i lako se rešava. Up. [1]. □

Označimo involuciju $(x\mapsto x^{-1})\in \mathrm{Sym}(G)$ sa Ω . Formule (10-1) pišemo u novom obliku

$$(10\text{-}2)\quad x*_i y=z \Leftrightarrow \Omega^{\zeta_{pi}}\lambda_p(x)\cdot\Omega^{\zeta_{qi}}\lambda_q(y)\cdot\Omega^{\zeta_{ri}}\lambda_r(z)=1 \quad (1\le i\le m)\ ,$$

gde je $\zeta_{pi}=\frac{1}{2}(1-\varepsilon_{pi})\in\{0,1\}$.

Definišemo relaciju $\sim$ na $\mathrm{Sym}(G)$ sa $\psi\sim\theta \Leftrightarrow \psi\theta^{-1}\in H$. Sada za svaki par $i,j\in\{1,\dots,m\}$ iz leme 10.5 dobijamo

$$\Omega^{\zeta_{pi}}\lambda_p\sim\Omega^{\zeta_{p'j}}\lambda_{p'}\ ,\quad \Omega^{\zeta_{qi}}\lambda_q\sim\Omega^{\zeta_{q'j}}\lambda_{q'}\ ,\quad \Omega^{\zeta_{ri}}\lambda_r\sim\Omega^{\zeta_{r'j}}\lambda_{r'}$$

gde je $*_i$ kao u (10-2) , a $*_j$ dato istom formulom sa $p',q',r',\zeta_{p'j},\zeta_{q'j},\zeta_{r'j}$ umesto (redom) $p,q,r,\zeta_{pi},\zeta_{qi},\zeta_{ri}$. Tako za svaki par i,j dobijamo tri uslova oblika $\Omega^{\zeta}\lambda_p\sim\Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$ koje mora zadovoljavati svaka n-torka $\Lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$ koja daje rešenje sa $*_1=\dots=*_m$. (Primetimo da su ovi uslovi odredjeni samim identitetom E i ne zavise od izbora grupe $(G,\cdot)$.) Zadovoljenje ovih uslova nije u opštem slučaju dovoljno da rešenje $\mathcal{R}(\Lambda)$ bude rešenje za E . Ali, ako je Λ takvo da da za svaki od od gornjih uslova $\Omega^{\zeta}\lambda_p \sim \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$ važi $\Omega^{\zeta}\lambda_p = \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$, tada imamo jednu istu formulu na desnim stranama svih m ekvivalencija u (10-2) , pa je $\mathcal{R}(\Lambda)$ u ovakvom slučaju zaista rešenje od E .

Pokazaćemo sad da postoji n-torka $\bar{\Lambda}=(\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n)$ sa $\bar{\lambda}_1,\dots,\bar{\lambda}_n \in \{id_G,\Omega\}$ takva da $\Omega^{\zeta}\bar{\lambda}_p = \Omega^{\zeta'}\bar{\lambda}_{p'}$ važi za svaki od gornjih uslova $\Omega^{\zeta}\lambda_p \sim \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$. Sa obezbedjenom egzistencijom ovakve n-torke možemo završiti dokaz na sledeći način. Neka su $\varepsilon_i \in \{0,1\}$ takvi da je $\bar{\lambda}_i=\Omega^{\varepsilon_i}$. U rešenju $\mathcal{R}(\bar{\Lambda})$ slobodnog identiteta genE imamo $*_1=\dots=*_m=*$, pa iz (10-2) (za, recimo, i=1) dobijamo

$$x*y=z \Leftrightarrow \Omega^{\zeta_{p1}+\varepsilon_p}(x)\cdot\Omega^{\zeta_{q1}+\varepsilon_q}(y) = \Omega^{\zeta_{r1}+1+\varepsilon_r}(z) .$$

Možemo pretpostaviti da je $\zeta_{r1}+1+\varepsilon_r=0 \pmod 2$, jer u suprotnom slučaju možemo uzeti $\bar{\Lambda}'$ sa $\bar{\lambda}'_p=\Omega^{1-\varepsilon_p}$ ("dualno rešenje") . Tako dobijamo $x*y=\Omega^{\alpha}(x)\cdot\Omega^{\beta}(y)$, gde je $\alpha=(\zeta_{p1}+\varepsilon_p) \pmod 2$ i $\beta=(\zeta_{q1}+\varepsilon_q) \pmod 2$. Sledi da $(G,\cdot)$ zadovoljava $E^{\alpha\beta}$, pa pošto $(G,\cdot)$ nije abelova, identitet $E^{\alpha\beta}$ mora biti trivijalan, suprotno pretpostavci načinjenoj na početku dokaza.

Preostaje nam dokaz egzistencije za $\bar{\Lambda}$. Neka je $\approx$ relacija ekvivalencije na skupu $\{0,1\}\times\{1,\dots,n\}$ generisana sa $(\zeta,p)\approx(\zeta',p')$ i $(1-\zeta,p)\approx(1-\zeta',p')$, za svaki uslov $\Omega^{\zeta}\lambda_p \sim \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$. Za svako $\psi,\theta \in Sym(G)$ imamo $\psi\sim\theta$ ako i samo ako je $\Omega\psi\sim\Omega\theta$; otuda $(\zeta,p)\approx(\zeta',p')$ povlači $\Omega^{\zeta}\lambda_p \sim \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$ za svako rešenje $\mathcal{R}(\Lambda)$ koje je rešenje od E . Naša je pretpostavka da takvo rešenje postoji nad neabelovom grupom $(G,\cdot)$. Za neabelove grupe imamo $\Omega \notin H$ što povlači $(0,p) \not\approx (1,p)$ za svako p . Sledi da ako je $C=\{(\zeta_1,p_1),\ldots,(\zeta_i,p_i)\}$ jedna $\approx$-klasa, tada je $\overline{C}=\{(1-\zeta_1,p_1),\ldots,(1-\zeta_i,p_i)\}$ takodje $\approx$-klasa, i to različita od C . Neka su onda $C_1,\ldots,C_k,\overline{C}_1,\ldots,\overline{C}_k$ sve $\approx$-klase. Za svako p jedna od dvojki $(0,p)$, $(1,p)$ pripada $C_1\cup\ldots\cup C_k$, a druga pripada $\overline{C}_1\cup\ldots\cup\overline{C}_k$. Neka onda ε_p bude takvo da $(\varepsilon_p,p)\in C_1\cup\ldots\cup C_k$ i definišimo $\overline{\lambda}_p=\Omega^{\varepsilon_p}$ $(1\leqslant p\leqslant n)$. Za svaki uslov $\Omega^{\zeta}\lambda_p \sim \Omega^{\zeta'}\lambda_{p'}$ imamo $(\zeta,p)\approx(\zeta',p')$, pa mora biti $\zeta=\varepsilon_p$ i $\zeta'=\varepsilon_{p'}$, ili $\zeta=1-\varepsilon_p$ i $\zeta'=1-\varepsilon_{p'}$. Očigledno da u oba slučaja imamo $\Omega^{\zeta}\overline{\lambda}_p=\Omega^{\zeta'}\overline{\lambda}_{p'}$.

Dokaz za slučaj $\underline{V} = \mathrm{var}E$ je završen. Opšti slučaj $\underline{V} = \mathrm{var}\{E_1,E_2,\ldots\}$ ne donosi nikakvih novih principijelnih teškoća, jedino je notacijski složeniji, što je i bio razlog da prvo dc kažemo specijalni slučaj. Ovde umesto sa (10-1) moramo početi sa formulama ujednačenih rešenja $(G,*_{k1},\ldots,*_{kn_k})$ nad $(G,\cdot)$ za sve identitete $\mathrm{gen}E_k$ $(k=1,2,\ldots)$

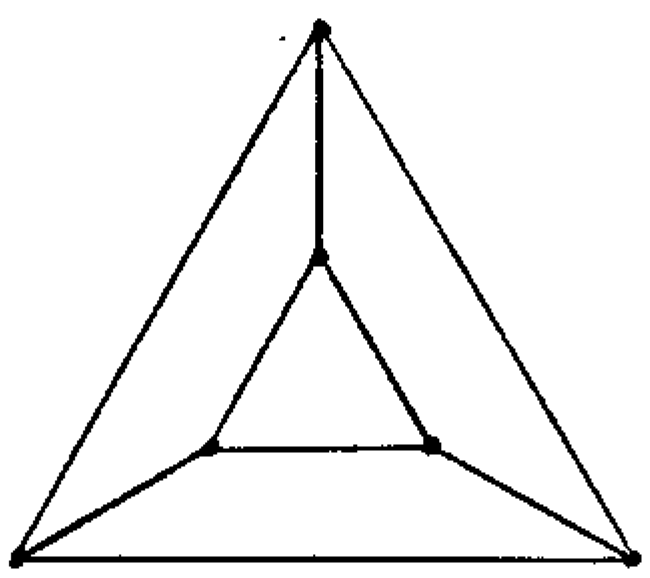
$$(10\text{-}3)\qquad x*_{ki}y=z \Leftrightarrow (\lambda_p^k(x))^{\varepsilon_{pi}^k}\cdot(\lambda_q^k(y))^{\varepsilon_{qi}^k}\cdot(\lambda_r^k(z))^{\varepsilon_{ri}^k}=1 .$$

Sada svako $\Lambda=(\lambda_p^k \mid 1\leqslant p\leqslant n_k\ ,\ k\geqslant 1)$ odredjuje rešenja svih identiteta $\mathrm{gen}E_k$. Nas zanimaju oni Λ za koje je $*_{ki}=*_{\ell j}$ za svako k,ℓ i svako i,j $(1\leqslant i\leqslant m_k\ ,\ 1\leqslant j\leqslant m_\ell)$. Svake dve ekvivalencije $x*_{ki}y=z \Leftrightarrow \ldots$ i $x*_{\ell j}y=z \Leftrightarrow \ldots$ iz (10-3) daju po tri uslova tri uslova na permutacije iz Λ , baš kao i ranije što smo imali. I čitav dokaz ide dalje na isti način, sve do nalaženja $\alpha,\beta\in\{-1,1\}$ takvih da $(G,\cdot)$ zadovoljava $E_k^{\alpha\beta}$ za svako k , tj. do kontradikcije. $\square$

10.6 POSLEDICA. <u>Ako je $\underline{V}$ kvadratni varijetet, ako je $\underline{V}\subseteq\underline{G}$ i ako $\underline{V}$ sadrži izotop neke neabelove grupe, tada $\underline{V}$ sadrži</u>

izotop svake grupe. $\square$

Preostaje nam razmatranje "bulovog" slučaja. Posledica 10.4 sugeriše sledeći analogan test za $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{B}}$: $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{B}}$ ako i samo ako je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$ i svaki grupni identitet $E^{\alpha\beta}$ je ekvivalentan sa $x^2=1$. Medjutim, ovo nije tačno, što će pokazati sledeći primer. Uzmimo $E = (xz\cdot tx=yt\cdot zy)$. Graf $\Gamma(E)$ sadrži K_4 (sl. 22) , pa prema posledici 10.2 imamo $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{G}}$. Jasno je da je $E^{1,1}=E$ ekvivalentan sa $x^2=1$, a takvi su i identiteti $E^{1,-1} = (xz^{-1}xt^{-1}=yt^{-1}yz^{-1})$, $E^{-1,1} = (z^{-1}xt^{-1}x=t^{-1}yz^{-1}y)$ i $E^{-1,-1} = (zx^2t=ty^2z)$. Iz posledice 10.4 dobijamo $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{A}}$. Ali $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{B}}$ nije tačno jer, na primer, operacija $*$ definisana na skupu kompleksnih brojeva sa $x*y=x+iy$ zadovoljava E .



sl.22

Može se još pokazati da nijedan izotop ciklične grupe reda tri ne zadovoljava E , pa ni analogon "ako je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{A}}$ i ako $\mathrm{var}E$ sadrži izotop neke nebulove grupe, tada $\mathrm{var}E$ sadrži izotop svake abelove grupe" posledice 10.6 nije tačan.

Iz prethodnog primera jasno je da se ne može očekivati velika analogija medju uslovima koji karakterišu $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$. Štaviše, ostaje problem jednostavne karakterizacije relacije $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$ (ili samo $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{B}}$) . Najbolje što sad možemo ponuditi je naredna teorema 10.7 koja tvrdi da $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$ važi ako i samo ako je jedna posebna abelova grupa asocirana sa $\underline{\underline{V}}$ - bulova. Opet nam treba malo nove notacije.

Neka je F slobodna grupa sa dva slobodna generatora X i Y. Neka je $\mathbb{Z}F$ grupna algebra nad F, tj. skup svih konačnih suma $\sum_{u\in F} a_u u$ $(a_u \in \mathbb{Z})$ koje se sabiraju pokomponentno i množe po pravilu $(\sum_{u\in F} a_u u)\cdot(\sum_{u\in F} b_u u) = \sum_{u\in F}(\sum_{v\in F} a_v b_{v^{-1}u})u$. Za svaki kvazigrupni term t (term načinjen od promenljivih $x_1,\dots,x_n$ i operacijskih simbola $\cdot, \backslash$ i $/$) definišemo trag $tr_i(t)$ od x_i u t induktivno sa

$$tr_i(x_j) = \delta_{ij} \quad \text{(Kroneckerov simbol)}\ ,$$

$$tr_i(t_1\cdot t_2) = Xtr_i(t_1) + Ytr_i(t_2)\ ,$$

$$tr_i(t_1\ t_2) = X^{-1}tr_i(t_1) - X^{-1}Ytr_i(t_2)\ ,$$

$$tr_i(t_1\ t_2) = -Y^{-1}Xtr_i(t_1) + Y^{-1}tr_i(t_2)\ .$$

Ako je $E = (t_1=t_2)$ kvazigrupni identitet i ako su $x_1,\dots,x_n$ sve promenljive koje se u njemu javljaju, definišemo ideal $I(E)$ od $\mathbb{Z}F$ kao najmanji ideal koji sadrži $tr_i(t_1) - tr_i(t_2)$ za svako $i \in \{1,\dots,n\}$. Opštije, za svaki kvazigrupni varijetet $\underline{\underline{V}}$ definišemo $I(\underline{\underline{V}})$ kao najmanji ideal koji sadrži $I(E_1)$, $I(E_2),\dots$.

10.7 TEOREMA. Neka je $\underline{\underline{V}}$ kvadratni kvazigrupni varijetet. Tada $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$ važi ako i samo ako je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ i aditivna grupa od $\mathbb{Z}F/I(\underline{\underline{V}})$ je bulova.

10.8 POSLEDICA. Neka je E kvadratni kvazigrupni identitet. Tada $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{B}}$ važi ako i samo ako je $\mathrm{var}E \subseteq \underline{\underline{A}}$ i aditivna grupa od $\mathbb{Z}F/I(E)$ je bulova.

Dokaz. Posledica 10.8 je specijalan slučaj teoreme 10.7. Zbog notacijskih pogodnosti mi ćemo dokazati sad samo ovaj specijalni slučaj. Izmene koje treba izvršiti u dokazu pa da on važi i u opštem slučaju minorne su i bile bi očigledne svakome ko se razabere u specijalnom slučaju.

Dokazujemo prvo dve leme, iz njih će posle 10.8 slediti jednostavno.

10.9 LEMA. *Neka je* E *kvazigrupni identitet,* $(A,+)$ *abelova grupa,* $\xi,\eta \in \mathrm{Aut}(A,+)$ *i* $*$ *operacija na* A *definisana sa* $x*y=\xi(x)+\eta(y)$. *Tada* $(A,+)\in \mathrm{var}E$ *ako i samo ako se funkcija* $X\mapsto\xi$, $Y\mapsto\eta$ *proširuje do homomorfizma* $\mathbb{Z}F/I(E)\longrightarrow \mathrm{End}(A,$

Dokaz. Svakom kvazigrupnom termu t u kom učestvuje n promenljivih odgovara n-arna operacija $t^*:A^n\longrightarrow A$ dobijena interpretiranjem simbola $\cdot$ operacijom $*$, a $\backslash$ i $/$ odgovarajućim levim i desnim deljenjem u $(A,*)$. Neka je $\phi:\mathbb{Z}F\longrightarrow \mathrm{End}(A,+)$ homomorfizam definisan sa $X\mapsto\xi$ i $Y\mapsto\eta$. Iz $x*y=\xi(x)+\eta(y)$, $x /_* y=\xi^{-1}(x)-\xi^{-1}\eta(y)$ i $x\backslash_* y=-\eta^{-1}\xi(x)+\eta^{-1}(y)$ dobijamo $t^*(x_1,\dots,x_n) = \sum_{1\leq i\leq n}\phi(tr_i(t))x_i$. Tako $*$ zadovoljava $E = (t_1=t_2)$ ako i samo ako je $\phi(tr_i(t_1)) = \phi(tr_i(t_2))$ za svako i , tj. ako i samo ako je $\phi(I(E))=0$. $\square$

10.10 LEMA. *Neka je* E *kvadratni kvazigrupni identitet i* $(A,+)$ *abelova grupa. Ako* $\mathrm{var}E$ *sadrži kvazigrupu izotopnu sa* $(A,+)$, *tada za neko* $\xi,\eta\in \mathrm{Aut}(A,+)$ $\mathrm{var}E$ *sadrži* $(A,*)$, *gde je* $x*y = \xi(x)+\eta(y)$.

Dokaz. Ponovo posmatramo slobodni identitet $\mathrm{gen}E$ i pišemo kao u dokazu teoreme 10.3 njegovo opšte ujednačeno rešenje nad $(A,+)$:

$$(10\text{-}4)\qquad x*_i y=z \Leftrightarrow \Omega^{\zeta_{pi}}\lambda_p(x)+\Omega^{\zeta_{qi}}\lambda_q(y)+\Omega^{\zeta_{ri}}\lambda_r(z)=0 \qquad (1\leqslant i\leqslant m) .$$

Uvedimo oznake $\rho_{i1}=\Omega^{\zeta_{pi}}\lambda_p$, $\rho_{i2}=\Omega^{\zeta_{qi}}\lambda_q$, $\rho_{i3}=\Omega^{\zeta_{ri}}\lambda_r$ tako da (10-4) postaje

(10-5) $x *_i y=z \Leftrightarrow \rho_{i1}(x) + \rho_{i2}(y) + \rho_{i3}(z) = 0 \quad (1\leqslant i\leqslant m)$.

Pošto se svako λ_p javlja dvaput u (10-4) , mi imamo da permutacije ρ zadovoljavaju n uslova oblika $\rho_{i\nu}=\rho_{j\mu}$ ili $\rho_{i\nu}=\Omega\rho_{j\mu}$. Označimo sa C skup svih ovih uslova. (Ovaj je skup odredjen samim identitetom E , tj. nezavisno od izbora (A,+) .) Sa druge strane, svaki skup $P=\{\rho_{i\nu}\in \mathrm{Sym}(A) \mid 1\leqslant i\leqslant m,\ 1\leqslant \nu\leqslant 3\}$ koji zadovoljava C daje nam formulama (10-5) jedno rešenje $(A,*_1,\dots,*_m)$ identiteta genE , koje označavamo sa $\mathcal{R}(P)$. Rećićemo da je $\mathcal{R}(P)$ normalizovano rešenje ako je $\rho_{i\nu}(0)=0$ za svako i,ν . Svako rešenje $\mathcal{R}(P)$ daje i jedno normalizovano rešenje $\mathcal{R}(\hat{P})$, gde je $\hat{P}$ definisano sa $\hat{\rho}_{i\nu}(x)=\rho_{i\nu}(x)-\rho_{i\nu}(0)$. Trivijalno se proverava da $\hat{P}$ zadovoljava C i da je $\mathcal{R}(\hat{P})$ normalizovano rešenje. Takodje, lako sledi da ako je $\mathcal{R}(P)$ rešenje od E (tj. ako je $*_1=\dots=*_m$ u $\mathcal{R}(P)$) , tad je i $\mathcal{R}(\hat{P})$ rešenje od E . Dakle, možemo pretpostaviti da je $\mathcal{R}(P)$, dato formulama (10-5) sa sabiranjem u (A,+) , normalizovano rešenje od E .

Vratimo se načas lemi 10.5 i primetimo da dodatni uslov $\psi_1(1)=\psi_2(1)=\psi_3(1)=1$ u njoj povlači $\psi_1=\psi_2=\psi_3$ Aut(G,·) . U našoj situaciji to ima za posledicu da za svako i,j $(1\leqslant i,j\leqslant m)$ $\rho_{i1}\rho_{j1}^{-1} = \rho_{i2}\rho_{j2}^{-1} = \rho_{i3}\rho_{j3}^{-1} = \varphi_{ij}\in \mathrm{Aut}(A,+)$.

Neka je sad $\approx$ relacija ekvivalencije na $\{1,2,3\}$ generisana sa svim $\nu\approx\mu$ takvim da C sadrži uslov oblika $\rho_{i\nu}=\rho_{j\mu}$ ili $\rho_{i\nu}=\Omega\rho_{j\mu}$ (za neko i,j) . Neka su ψ_1,ψ_2,ψ_3 proizvoljni elementi od Sym(A) takvi da važi $\psi_1(0)=\psi_2(0)=\psi_3(0)$ i $\psi_\nu=\psi_\mu$ kad god je $\nu\approx\mu$ .NNeka je $\rho'_{i\nu}=\rho_{i\nu}\psi_\nu$; tada $P'=\{\rho'_{i\nu}\}$ očigledno zadovoljava C i daje nam tako normalizovano rešenje $\mathcal{R}(P')$

od genE koje je, zbog $\rho'_{i\nu}(\rho'_{j\nu})^{-1}=\rho_{i\nu}\rho_{j\nu}^{-1}=\varphi_{ij}$, rešenje od E .

Sad se lako proverava da ako je ψ_ν izabrano tako da $\rho'_{i\nu}\in \mathrm{Aut}(A,+)$, tada je za svako j i $\mu\approx\nu$ $\rho'_{j\mu}\in \mathrm{Aut}(A,+)$. Izbor permutacija ψ činimo (npr.) na sledeći način. Uzmimo $\psi_3=\rho_{13}^{-1}$, tj. $\rho'_{13}=\Omega$. Ako je $1\approx 2\approx 3$, tada $\xi=\rho'_{11}=\rho_{11}\rho_{13}^{-1}\Omega$ i $\eta=\rho'_{12}=\rho_{12}\rho_{13}^{-1}\Omega$ su automorfizmi od $(A,+)$ i iz (10-5) imamo (za $i=1$) $x*y=\xi(x)+\eta(y)$. Ako je $2\not\approx 3$, možemo uzeti $\psi_2=\rho_{12}^{-1}$ i dobiti $x*y=\xi(x)+y$. Slično, u slučaju $1\not\approx 3$ dobijamo $x*y=x+\eta(y)$. $\square$

Sad možemo dokazati 10.8. Za deo "ako" pretpostavimo, idući ka apsurdu, da je aditivna grupa od $\mathbb{Z}F/I(E)$ bulova i da E ima rešenje izotopno nebulovoj grupi $(A,+)$. Iz leme 10.10 onda sledi da E ima rešenje $(A,*)$ sa $x*y=\xi(x)+\eta(y)$ i $\xi,\eta\in \mathrm{Aut}(A,+)$. Lema 10.9 nam onda daje homomorfizam $\mathbb{Z}F/I(E)\to \mathrm{End}(A,+)$. Iz $2=0$ u $\mathbb{Z}F/I(E)$ sledi $\Omega=\mathrm{id}_A$ u $\mathrm{End}(A,+)$, pa $(A,+)$ mora biti bulova, što je očigledan apsurd.

Za deo "samo ako" dovoljno je da pokažemo da varE sadrži neki izotop od $(\mathbb{Z}F/I(E),+)$. Definišimo stoga $*$ na $\mathbb{Z}F/I(E)$ sa $x*y=Xx+Yy$. Pravolinijski se proverava da je ovo korektna definicija, da su $x\mapsto Xx$ i $y\mapsto Yy$ automorfizmi od $(\mathbb{Z}F/I(E),+)$ i najposle da $(\mathbb{Z}F/I(E),*)$ zadovoljava E . $\square$

Alternativno, uslov za $\underline{\underline{V}}\subseteq\underline{\underline{B}}$ može se dati i u terminima teorije grupa. Definišimo G kao direktan proizvod slobodne grupe $F=\langle X,Y\rangle$ i dvoelementne ciklične grupe $\langle Z\mid Z^2=1\rangle$. Pretpostavljajući da je $E=(t_1=t_2)$ kvadratni kvazigrupni identitet, mi za svako i imamo $tr_i(t_1)-tr_i(t_2)=\alpha_i u_i+\beta_i$

gde su $u_i, v_i \in F$ i $\alpha_i, \beta_i \in \{-1,1\}$. Definišemo elemente $w_1,\dots,w_n$ od G sa $w_i = Z^{\alpha_i+\beta_i} u_i v_i^{-1}$ i neka je $N(E)$ normalna podgrupa od G generisana sa $w_1,\dots,w_n$. Opštije, za svaki kvadratni varijetet $\underline{\underline{V}} = \mathrm{var}\{E_1, E_2, \dots\}$ definišemo normalnu podgrupu $N(\underline{\underline{V}})$ od G kao proizvod svih $N(E_k)$. Imamo sad sledeću varijantu teoreme 10.7. Ona zamenjuje testiranje da li je $2=0$ u $\mathbb{Z}F/I(\underline{\underline{V}})$ testiranjem da li je $Z=1$ u $G/N(\underline{\underline{V}})$.

10.11 TEOREMA. <u>Neka je $\underline{\underline{V}}$ kvadratni kvazigrupni varijetet. Tada $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{B}}$ važi ako i samo ako je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{A}}$ i</u> $Z \in N(\underline{\underline{V}})$.

<u>Dokaz</u>. Ako je $(A,+)$ abelova grupa čiji je neki izotop sadržan u $\underline{\underline{V}}$, tada iz "pojačane" leme 10.10 sledi da $\underline{\underline{V}}$ sadrži $(A,*)$, gde je $x*y = \xi(x)+\eta(y)$ i $\xi, \eta \in \mathrm{Aut}(A,+)$. Sada se neposredno proverava da jezgro homomorfizma $G \to \mathrm{Aut}(A,+)$ definisanog sa $X \mapsto \xi$, $Y \mapsto \eta$ i $Z \mapsto \Omega$ sadrži sve podgrupe $N(E_k)$, pa tako daje homomorfizam $G/N(\underline{\underline{V}}) \to \mathrm{Aut}(A,+)$. Pa ako $Z \in N(\underline{\underline{V}})$, tada $(A,+)$ mora biti bulova.

Za drugi deo tvrdjenja primetimo prvo da izotop $x*y = Xx+Yy$ aditivne grupe od $\mathbb{Z}(G/N(\underline{\underline{V}}))/(1+Z)$ zadovoljava sve E_k, pa stoga pripada $\underline{\underline{V}}$. (Ovo se neposredno proverava.) Tako ostaje da se dokaže da ova aditivna grupa nije bulova kad god je $Z \neq 1$ u $G/N(\underline{\underline{V}})$. Zaista, pošto je $1+Z$ centralni element u $\mathbb{Z}(G/N(\underline{\underline{V}}))$ i $Z^2=1$ sledi da je $a=aZ$ za svako $a \in (1+Z)$. Ali $2=2Z$ ne važi u $\mathbb{Z}(G/N(E))$ kad je $Z \neq 1$. $\square$

11. ZATVORENOST U ODNOSU NA IZOTOPIJU

Dva su pitanja koja se prirodno nameću. Prvo je: koji su kvazigrupni varijeteti zatvoreni u odnosu na izotopiju? A drugo je: koji su kvazigrupni identiteti izotopno invarijantni? Identitet E je izotopno invarijantan ako i samo ako je varE zatvoren u odnosu na izotopiju, što naravno ne znači da rešenje prvog problema daje odgovor i za drugi. U stvari, mi ćemo dati potpun odgovor na prvo pitanje za kvadratni slučaj, dok će drugo pitanje ostati kao problem čak i samo za kvadratne identitete. Neke parcijalne rezultate ćemo ipak i tu dati.

Već smo videli tri primera izotopno zatvorenih kvadratnih varijeteta : $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$. Možemo im dodati i jedan trivijalan - varijetet $\underline{\underline{Q}}$ svih kvazigrupa. Ispostavlja se da drugih i nema :

11.1 TEOREMA. <u>Jedini kvadratni kvazigrupni varijeteti zatvoreni u odnosu na izotopiju su</u> $\underline{\underline{Q}}$, $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{A}}$ i $\underline{\underline{B}}$.

<u>Dokaz (prvi deo)</u>. Neka je $\underline{\underline{V}} = \mathrm{var}\{E_1, E_2, \ldots\}$. Pretpostavimo da je $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$. Neka je $\underline{\underline{L}}$ varijetet svih lupa iz $\underline{\underline{V}}$; lako se proverava da je $\underline{\underline{V}}$ klasa svih kvazigrupa izotopnih nekoj lupi iz $\underline{\underline{L}}$ (up. [19, teorema 3.2]). Pošto je svaka lupa izotopna grupi i sama grupa (Albertova teorema, v. [30, str. 43]) , iz naše pretpostavke $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$ sledi da je $\underline{\underline{L}}$ kvadratni varijetet grupa. Jedine mogućnosti za $\underline{\underline{L}}$ su onda $\underline{\underline{G}}_0$, $\underline{\underline{A}}_0$ i $\underline{\underline{B}}_0$, pa sledi da je $\underline{\underline{V}}$ jedan od varijeteta $\underline{\underline{G}}$, $\underline{\underline{A}}$ ili $\underline{\underline{B}}$.

Pretpostavimo sada da nije $\underline{\underline{V}} \subseteq \underline{\underline{G}}$, tj. (teorema 10.1) da se K_4 ne utapa ni u jedan od grafova $\Gamma(E_1)$, $\Gamma(E_2)$,...

Idući ka apsurdu možemo pretpostaviti da je $\underline{V} \neq \underline{Q}$, tj. da bar jedan od identiteta $E_1, E_2, \ldots$ nije tačan na svim kvazigrupama. Pošto svaka bulova grupa zadovoljava sve kvadratne identitete, sledi da nam je za završetak dokaza teoreme 11.1 dovoljno da dokažemo sledeće : <u>Ako je E kvadratni identitet koji nije tačan na svim kvazigrupama i ako se K_4 ne utapa u $\Gamma(E)$, tada postoji izotop neke bulove grupe na kojem E nije tačan</u>. Dokaz ćemo nastaviti nakon neophodnih preliminarnih razmatranja o izotopima bulovih grupa. □

Izotopi bulovih grupa koji će nam služiti u završetku dokaza teoreme 11.1 su sledećeg oblika. Pretpostavimo da je $\underline{B} = (S,+)$ bulova grupa i $\xi,\eta,\zeta \in \mathrm{Aut}(\underline{B})$. Sa $\underline{B}_{\xi\eta\zeta}$ označavemo izotop $(S,*)$ u kom je množenje definisano sa $x*y=z \Leftrightarrow \xi(x)+\eta(y)+\zeta(z)=0$. Sledećom lemom daćemo neophodan i dovoljan uslov koji ξ,η,ζ treba da zadovoljavaju pa da $\underline{B}_{\xi\eta\zeta}$ zadovoljava dati identitet E . (Uporedi sa lemom 10.9 gde je to uradjeno za sve abelove grupe. Uslov dat tamo je, medjutim, nepogodan za našu trenutnu svrhu.)

Posmatraćemo umesto identiteta odgovarajuće im kvaziidentitete, dakle, svedene povezane kvaziidentitete (odeljak 2). Podsetimo se da svedenost od $\Phi=(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_{m-1} \Rightarrow \varphi_m)$ znači da je svaki φ_i oblika $x_p \cdot x_q = x_r$. Umesto grafa $\Gamma(\Phi)$ koristićemo baricentričku podelu $\mathrm{sd}\Gamma(\Phi)$, tj. graf dobijen podelom svake ivice od $\Gamma(\Phi)$ novim temenom na dve ivice. Skup temena od $\mathrm{sd}\Gamma(\Phi)$ ćemo identifikovati sa $X \cup \{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$, gde je $X=\{x_1,\ldots,x_n\}$ skup promenljivih u Φ . Ivice su e_{ih} , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq h \leq 3$. Incidencija je definisana na sledeći način : ako je $\varphi_i=(x_p \cdot x_q=x_r)$, tada e_{i1}, e_{i2}, e_{i3} povezuju φ_i redom sa x_p, x_q i x_r . Orijentišimo $\mathrm{sd}\Gamma(\Phi)$ tako da je φ_i početno teme svih ivica e_{ih} , $1 \leq h \leq 3$.

Neka je F slobodna grupa sa tri slobodna generatora $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$ i $\tilde{Z}$. Svakoj ivici e_{ih} od $sd\Gamma(\Phi)$ dodeljujemo oznaku $\lambda(e_{ih})$ na sledeći način: $\lambda(e_{i1})=\tilde{X}$, $\lambda(e_{i2})=\tilde{Y}$, $\lambda(e_{i3})=\tilde{Z}$, za svako i. Proširimo λ multiplikativno na sve puteve u $sd\Gamma(\Phi)$ i neka je $N(\Phi)$ najmanja normalna podgrupa od F koja sadrži $\lambda(\omega)$ za svaki cikl ω u $sd\Gamma(\Phi)$.

Ako je $\underline{B}=(S,+)$ bulova grupa i $\xi,\eta,\zeta \in Aut(\underline{B})$, označimo sa $f_{\xi\eta\zeta}:F\to Aut(\underline{B})$ homomorfizam definisan sa $X\mapsto\xi$, $Y\mapsto\eta$, $Z\mapsto\zeta$.

11.2 LEMA. <u>Kvazigrupa</u> $\underline{B}_{\xi\eta\zeta}$ <u>zadovoljava</u> Φ <u>ako i samo ako je</u> $N(\Phi)\subseteq Kerf_{\xi\eta\zeta}$.

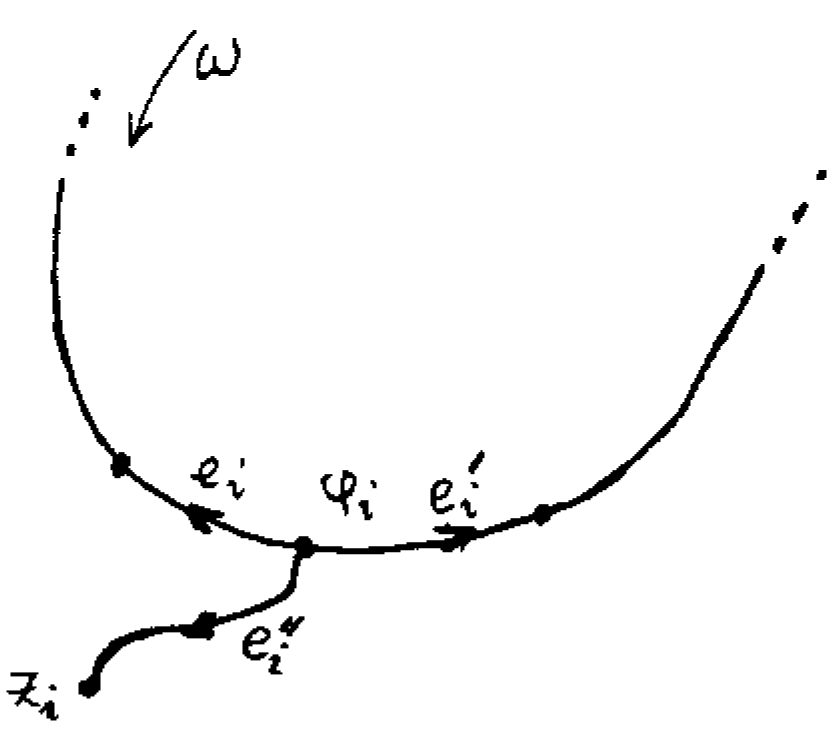
<u>Dokaz</u>. Označimo kompoziciju $f_{\xi\eta\zeta}\circ\lambda$ sa f. Recimo da su ciklovi ω_1 i ω_2 konjugovani ako postoji put σ takav da je $\omega_1=\sigma\omega_2\sigma^{-1}$. Svaki cikl u grafu je proizvod konjugata prostih ciklova. Dakle, uslov $N(\Phi)\subseteq Kerf_{\xi\eta\zeta}$ je ekvivalentan sa : $f(\omega)=1$ za svaki prost cikl ω.

Pretpostavimo da $\underline{B}_{\xi\eta\zeta}$ zadovoljava Φ i neka je ω prost cikl u $\Gamma'=sd\Gamma(\Phi)$. Neka su $x_1,\varphi_1,\ldots x_k,\varphi_k$ temena od ω napisana u redosledu njihovog pojavljivanja na ω. Pošto ω nema samopreseka, udaljavanjem dveju ivica incidentnih temenu x_1 iz ω dobija se drvo. Svako drvo u Γ' se širi do maksimalnog drveta, pa sledi (lema 3.4) da postoji baza Y za Φ koja sadrži x_1, a ne sadrži $x_2,\ldots,x_k$. Definišemo $\theta_b:Y\to S$ sa $\theta_b(x_1)=b$ i $\theta_b(y)=0$ za $y\neq x_1$. Iz posledice 3.6 sledi da postoji valuacija $\hat{\theta}_b$ na X koja proširuje θ_b. Pošto je $Cl(Y-\{x_1\}) = X-\{x_1,\ldots,x_k\}$, sledi da je $\hat{\theta}_b(x)=0$ za $x\neq x_1,\ldots,x_k$.

Neka su e_i i e_i' ivice od Γ' koje povezuju φ_i

sa x_i i x_{i+1} respektivno (uzeti $i+1$ po modulu k). Neka je e_i'' treća ivica incidentna sa φ_i, a z_i njeno završno teme (sl. 23). Iz toga što je $\hat{\theta}_b$ valuacija dobijamo $f(e_i)\hat{\theta}_b(x_i) + f(e_i')\hat{\theta}_b(x_{i+1}) + f(e_i'')\hat{\theta}_b(z_i) = 0$. Kako je $\hat{\theta}_b(z_i)=0$, to sledi

$\hat{\theta}_b(x_i)=f(e_i^{-1}e_i')\hat{\theta}_b(x_{i+1})$, $1 \leqslant i \leqslant k$.



sl.23

Konačno, iz ovih jednakosti, iz $\omega=e_1^{-1}e_1'\ldots e_k^{-1}e_k'$ i iz $\hat{\theta}_b(x_1)=b$ sledi $f(\omega)b=b$. Otuda je $f(\omega)=1$, jer b je uzeto proizvoljno. Ovim je završen dokaz dela "samo ako".

Za dokaz u suprotnom smeru počnimo sa pretpostavkom $f(\omega)=1$ za svaki cikl ω u Γ'. Izaberimo bazu Y od Φ i funkciju $\theta : Y \longrightarrow S$. Za svako $y \in Y$ definišemo $\theta_y : Y \longrightarrow S$ sa $\theta_y(y)=\theta(y)$ i $\theta_y(y')=0$ za $y' \neq y$. Dovoljno će biti da pokažemo da se svako θ_y proširuje do valuacije na X. Jer, ako je $\hat{\theta}_y$ $(y \in Y)$ valuacija na X koja proširuje θ_y, tada je $\hat{\theta} = \sum_{y \in Y} \hat{\theta}_y$ valuacija koja proširuje θ. Fiksirajmo $y \in Y$. Tvrdimo da postoji prost cikl ω za koji je $x_1=y$ i $x_2,\ldots,x_k \notin Y$ (notaciju u vezi sa ω uzimamo kao u prvom delu dokaza). Jer, ako je T maksimalno drvo u Γ' čija ekstremalna temena su elementi od Y, ako je zatim e_1 ivica incidentna sa y koja ne pripada T i ako je ω_1 prost put u T koji spaja početno i završno teme od y - mi možemo uzeti $\omega=e_1^{-1}\omega_1$. Definišemo $\hat{\theta}_y$ sa $\hat{\theta}_y(x)=0$ za $x \neq x_1,\ldots,x_k$ i $\hat{\theta}_y(x_i)=f(e_{i-1}^{-1}e_{i-1}'\ldots e_1^{-1}e_1')\theta_y(x_1)$ $(2 \leqslant i \leqslant k)$. Slično kao u prvom delu dokaza sada sledi, korišćenjem $f(\omega)=1$, da je $\hat{\theta}_y$ valuacija na X. □

11.3 POSLEDICA. <u>Ako je</u> $N(\Phi) \neq \{1\}$, <u>tada postoji izotop bulove grupe koji ne zadovoljava</u> Φ .

<u>Dokaz</u>. Na osnovu leme 11.2 , sve što treba da uradimo je da za svaku netrivijalnu grupnu reč $W(\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z})$ po $\tilde{X},\tilde{Y},\tilde{Z}$ nadjemo bulovu grupu $\underline{B}$ i $\xi,\eta,\zeta \in \mathrm{Aut}\underline{B}$ tako da bude $W(\xi,\eta,\zeta)\neq 1$. Uzmimo za $\underline{B}$ aditivnu grupu beskonačno-dimenzionog vektorskog prostora nad dvoelementnim poljem. Svakoj permutaciji fiksirane baze odgovara jedan automorfizam od $\underline{B}$; dakle, $\mathrm{Aut}(\underline{B})$ sadrži beskonačnu simetričnu grupu, pa stoga i kopiju slobodne grupe F . Tako dobismo i više nego što nam treba - da postoje $\xi,\eta,\zeta \in \mathrm{Aut}(\underline{B})$ takvi da $\underline{B}_{\xi\eta\zeta}$ ne zadovoljava nijedan Φ sa $N(\Phi) \neq \{1\}$ (up. sa stavom 11.7 dole) . $\square$

<u>Dokaz teoreme 11.1 (drugi deo)</u>. Neka je $\Phi=(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_0)$ povezan sveden kvadratni kvaziidentitet. Pretpostavimo da se graf K_4 ne može utopiti u $\Gamma(\Phi)$ i da je $N(\Phi) = \{1\}$. Iz zaključne rečenice prvog dela dokaza teoreme 11.1 i iz posledice 11.3 sledi da je dovoljno dokazati da je Φ tačan na svakoj kvazigrupi.

Da pokažemo prvo da je svaki $\mathrm{st}\varphi_i$ troelementni skup. Pretpostavljajući suprotno, imali bismo dve ivice e_1 i e_2 koje povezuju φ_i sa x_p (za neke i,p). Ove dve ivice moraju imati različite oznake, pa za cikl $e_1e_2^{-1}$ imamo $\lambda(e_1e_2^{-1}) = \lambda(e_1)(\lambda(e_2))^{-1} \neq 1$ - kontradikcija.

I dalje ćemo raditi sa grafom $\Gamma'=\mathrm{sd}\Gamma(\Phi)$. Za podskup A od X rećićemo da je <u>rez</u> u Φ ako A ima najviše dva elementa i ako $\Gamma'-A$ ima tačno dve komponente povezanosti. Očigledno da svakom rezu odgovara jedan most ili dvojni most, i obrnuto. Iz leme 6.9 sledi da rez postoji u svakom grafu Γ'

koji ne sadrži K_4 i koji ima više od dva temena stepena tri.

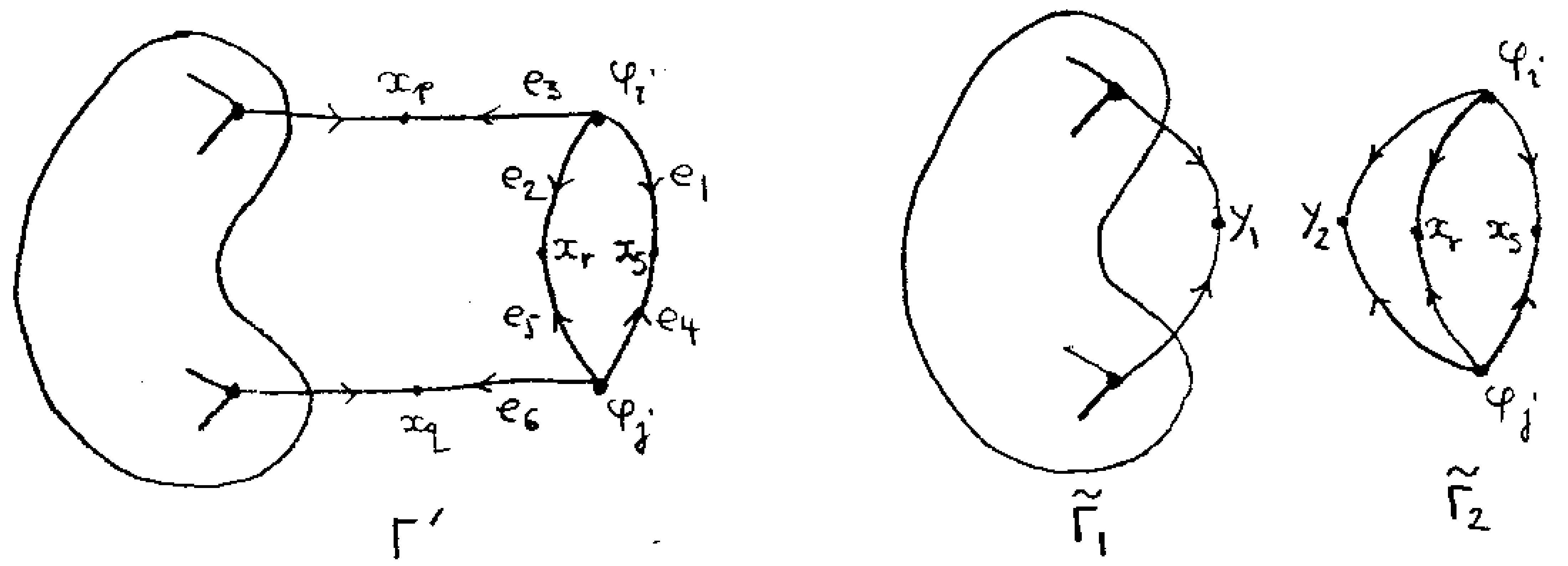
Završavamo dokaz indukcijom po m. Ako je $m=1$, tad je $\Phi=(\varphi_1 \Rightarrow \varphi_o)$, pa se neposredno vidi da je koincidencija φ_o i φ_1 neophodan i dovoljan uslov kako za $N(\Phi) = \{1\}$, tako i za to da je Φ tačan na svim kvazigrupama. Zato pretpostavimo da je $m>1$, što nam obezbedjuje egzistenciju reza u Γ'. Za svaki rez A neka $\nu(A)$ bude minimum brojeva temena stepena tri u dvema komponentama od $\Gamma'-A$. Neka je A_o rez sa najmanjom mogućom ν-vrednošću. Neka su Γ_1 i Γ_2 komponente od $\Gamma'-A_o$ i $\nu(A_o)$ = "broj temena stepena tri u Γ_2 ".

Dokažimo da A_o ima dva elementa. U suprotnom je $A_o=\{x_p\}$ za neko p, pa neka je φ_i teme od Γ_2 incidentno sa x_p. Tada je $st\varphi_i=\{x_p,x_q,x_r\}$, pa pošto je $q\neq r$, sledi da je jedan od skupova $\{x_q\}$ ili $\{x_q,x_r\}$ rez sa manjom ν-vrednošču od $\nu(A_o)$ - kontradikcija.

Neka je onda $A_o=\{x_p,x_q\}$ i neka su φ_i i φ_j temena od Γ_2 takva da je $x_p \in st\varphi_i$ i $x_q \in st\varphi_j$. Mora biti $\varphi_i\neq\varphi_j$, jer bi inače treći element x_r od $st\varphi_i$ činio rez i bilo bi $\nu(\{x_r\})<\nu(A_o)$. Gledajući x_p i x_q kao temena i od Γ_1 i od Γ_2, neka $\tilde{\Gamma}_1$ i $\tilde{\Gamma}_2$ budu grafovi dobijeni identifikacijom x_p i x_q u Γ_1 i Γ_2 respektivno. Označimo novodobijena temena sa y_1 i y_2 (sl. 24). Očigledno da su i $\tilde{\Gamma}_1$ i $\tilde{\Gamma}_2$ grafovi oblika $sd\Gamma(-)$ i da se K_4 ne utapa u njih. Tvrdimo da $\tilde{\Gamma}_2$ ne sadrži drugih temena stepena tri osim φ_i i φ_j. U suprotnom, postojao bi rez A_1 u $\tilde{\Gamma}_2$. Ako $A_1 \not\ni y_2$, tada je A_1 rez u Γ' sa $\nu(A_1)<\nu(A_o)$. A ako je $A_1=\{y_2,x_s\}$, tada je $A_1'=\{x_p,x_s\}$ rez u Γ' sa $\nu(A_1')<\nu(A_o)$.

Sad imamo $st\varphi_i=\{x_p,x_r,x_s\}$ i $st\varphi_j=\{x_q,x_r,x_s\}$ za neko x_r i x_s. Možemo pretpostaviti $i,j>0$, inače bismo mesto Φ

mogli razmatrati ekvivalentan mu kvaziidentitet $\Phi_k = (\bigwedge_{\ell\neq k}\varphi_\ell \Rightarrow \varphi_k)$, $k\neq i,j$. Kvaziidentitet Φ' dobijen odstranjivanjem φ_i i φ_j iz Φ sadrži jedno javljanje svake od promenljivih x_p i x_q . Neka je Φ_1 dobijen zamenom x_p i x_q u Φ' sa y_1 . Tada je Φ_1 kvadratni, povezan, sadrži promenljive $X - \{x_p,x_q,x_r,x_s\}\cup\{y_1\}$ i $\tilde{\Gamma}_1=\mathrm{sd}\Gamma(\Phi_1)$.



sl.24

Neka su $e_1,\dots,e_6$ ivice od Γ' označene na slici 24. Iz $\lambda(e_1)\neq\lambda(e_2)$, $\lambda(e_4)\neq\lambda(e_5)$ i $\lambda(e_1e_4^{-1}e_5e_2^{-1})=1$ sledi $\lambda(e_1)=\lambda(e_4)$ i $\lambda(e_2)=\lambda(e_5)$, pa onda i $\lambda(e_3)=\lambda(e_6)$. Dakle, φ_j se dobija zamenom x_p sa x_q u φ_i , pa je $\varphi_i\wedge\varphi_j \Rightarrow x_p=x_q$ implikacija tačna na svim kvazigrupama. Sledi da je Φ posledica od Φ_1 , pa ako je Φ_1 tačan na svim kvazigrupama, mora biti i Φ .

Ostaje još samo da se dokaže $N(\Phi_1) = \{1\}$. Ako je ω cikl u $\tilde{\Gamma}_1=\mathrm{sd}\Gamma(\Phi_1)$ koji ne prolazi kroz y_1 , tada je ω cikl u Γ' , pa je $\lambda(\omega)=1$. A ako ω prolazi kroz y_1 , možemo pretpostaviti da ω počinje u y_1 , pa je ili $\omega e_6^{-1}e_4e_1^{-1}e_3$ ili $\omega e_3^{-1}e_1e_4^{-1}e_6$ cikl u Γ' . Zbog $\lambda(e_6^{-1}e_4e_1^{-1}e_3) = \lambda(e_3^{-1}e_1e_4^{-1}e_6)=1$ sledi $\lambda(\omega)=1$ i u ovom slučaju. $\square$

Predjimo sada na razmatranje izotopne invarijantnosti kvadratnih identiteta. Opet nam je pogodnije da radimo sa ekvivalentnim pojmom svedenih povezanih kvadratnih kvaziidentiteta.

Sledeća se definicija prirodnò nameće. Rećićemo da je sveden kvaziidentitet $\Phi=(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_m\Rightarrow\varphi_o)$ <u>koherentan</u> ako se skup X promenljivih koje se javljaju u Φ može razbiti na tri skupa X_1,X_2,X_3 takva da za svako i, $\varphi_i=(x_p\cdot x_q=x_r)$, imamo $x_p\in X_1$, $x_q\in X_2$ i $x_r\in X_3$. Očigledno da je koherentnost uži pojam od izotopne invarijantnosti.

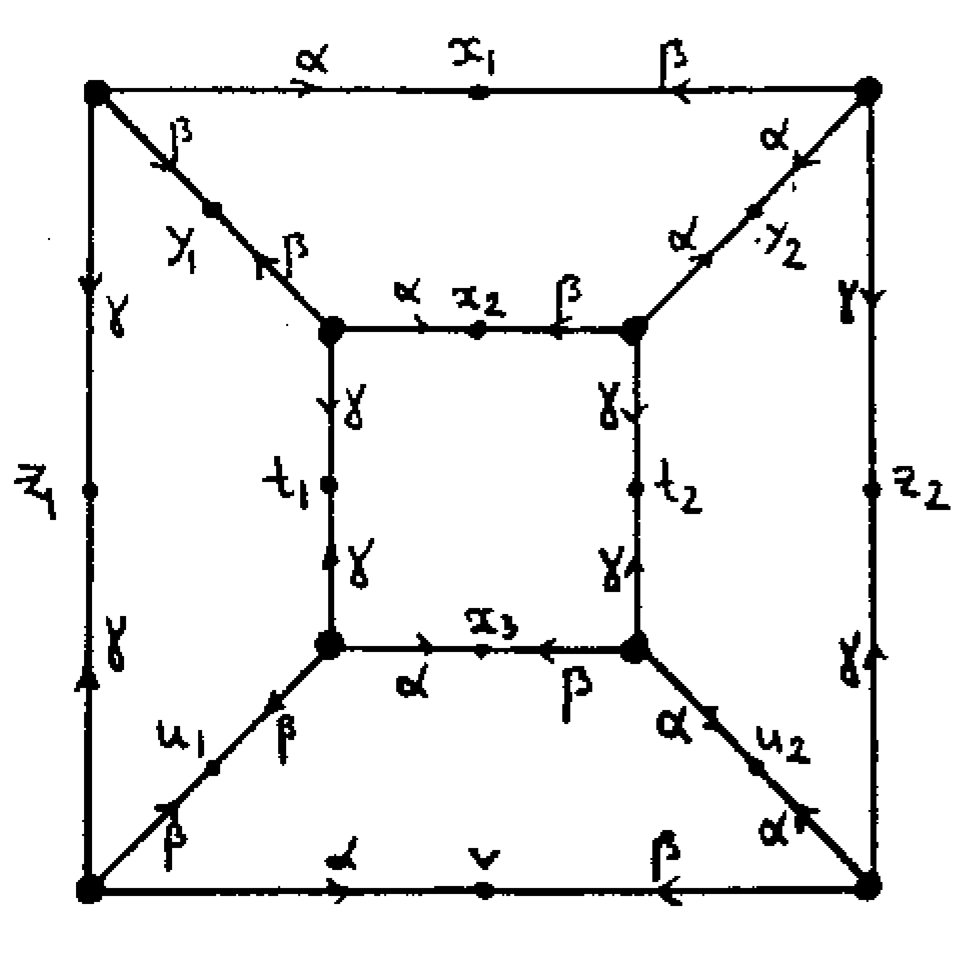
11.4 STAV. <u>Neka je Φ povezan sveden kvadratni kvaziidentitet u jeziku $\{\cdot\}$. Ako je Φ koherentan, tada je izotopno invarijantan. Ako je Φ izotopno invarijantan, tada je $N(\Phi)=\{1\}$. Nijedna od ovih implikacija nije ekvivalencija.</u>

<u>Dokaz</u>. Za prvu implikaciju već rekosmo da je očigledna. Drugu smo dokazali dokazujući teoremu 11.1 (drugi deo dokaza). Minimalni primeri da konverzije ne važe su sledeći:

$$\Phi_1=(x_1y=u\wedge x_2y=u\wedge zx_1=v\Rightarrow zx_2=v),$$

$$\Phi_2=(x_1y_1=z_1\wedge x_2y_1=t_1\wedge x_3u_1=t_1\wedge vu_1=z_1\wedge y_2x_1=z_2\wedge y_2x_2=t_2\wedge u_2x_3=t_2\Rightarrow u_2v=z_2).$$

Za Φ_1 imamo da je tačan na svim kvazigrupama (jer je ekvivalentan sa $x_1y=x_2y\Rightarrow zx_1=zx_2$), a očigledno nije koherentan (x_1 i x_2 se "različito" javljaju.)



sl.25

Graf $sd\Gamma(\Phi_2)$ je dat na sl. 25. Sa slike se već može videti da je $N(\Phi_2)=\{1\}$. Φ_2 je ekvivalentan identitetu $x_1y_1/(x_3\backslash x_2y_1)=(y_2x_2/x_3)\backslash y_2x_1$ koji važi na svim abelovim grupama. Medjutim, izotop aditivne grupe realnih brojeva definisan sa $x*y=x+\sqrt[3]{y}$ ne zadovoljava ovaj identitet, pa sledi da Φ_2 nije izotopno invari jantan. $\square$

Uprkos gornjem primeru Φ_1 (koji je, uostalom, krajnje trivijalan) ostaje utisak da je koherentnost od odlučujeg značaja za izotopnu invarijantnost. Sledeća teorema bi trebalo da podrži takav utisak, ali kompletan tretman ove problematike još uvek ne postoji.

11.5 TEOREMA. <u>Neka je Φ sveden povezan kvadratni kvaziidentitet i neka je</u> $c(\Gamma(\Phi))=3$. <u>Tada : Φ je izotopno invarijantan ako i samo ako je koherentan</u>.

<u>Dokaz</u>. Neka je $\Phi=(\varphi_1 \cdot \ldots \varphi_{m-1} \Rightarrow \varphi_m)$ i neka je $X=\{x_1,\ldots,x$ skup promenljivih koje se javljaju u Φ . Ako je $\varphi_i=(x_p \cdot x_q=x_r)$ rećićemo da se x_p, x_q i x_r javljaju redom na prvom, drugom i trećem mestu u φ_i .Za svaki par α,β , $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant 3$, označimo sa $X_{\alpha\beta}$ skup svih promenljivih čija dva javljanja u $\{\varphi_1,\ldots,\varphi_m\}$ su na mestima α i β . Tako imamo $X=\dot{\cup}X_{\alpha\beta}$ i Φ je koherentan ako i samo ako je $X_{\alpha\beta}=\emptyset$ za $\alpha\neq\beta$.

Teorema je trivijalna u jednom smeru. Za netrivijalni deo ("samo ako") pretpostavimo da Φ nije koherentan, tj. (ovo ne smanjuje opštost) da je $X_{12}\neq\emptyset$. Neka je $X_{12}=\{x_1,\ldots,x_k$ Za svako i $(1 \leqslant i \leqslant m$, $\varphi_i=(x_p \cdot x_q=x_r))$ definišemo linearnu jednačinu $E_i = (z_p+z_q+z_r=0)$ nad poljem $\mathbb{F}_2$ .U sistemu jednačina $\mathcal{E}=\{E_1,\ldots,E_m\}$ javljaju se promenljive $z_1,\ldots,z_n$ i ovaj sistem ima rang m-1 (nad $\mathbb{F}_2$). Definišemo novi sistem $\mathcal{E}^*=\{E_1^*,\ldots,E_m^*\}$ jednačina nad $\mathbb{F}_2$ u kom se javljaju promenljive $s_1,\ldots,s_k,t_1,\ldots,t_k,z_{k+1},\ldots,z_n$. Ako se x_p $(p \leqslant k)$ javlja na prvom (respektivno drugom) mestu u φ_i , tada z_p u E_i treba zameniti sa s_p (respektivno t_p) ; ovako su definisane jednačine $E_1^*,\dots,E_m^*$. Rang sistema $\mathcal{E}^*$ je m . Konačno, definišimo sistem $\mathcal{E}^{**}$; on se od $\mathcal{E}^*$ razlikuje po tome što je slobodni član 0 u E_m^* zamenjen sa 1 . Rang sistema $\mathcal{E}^{**}$ je takodje m , pa sledi da on ima rešenja. Neka su $(\sigma_1^i,\dots,\sigma_k^i,\tau_1^i,\dots,\tau_k^i,\zeta_{k+1}^i,\dots,\zeta_n^i)\in\mathbb{F}_2^{n+k}$, $1\leqslant i\leqslant N$, sva rešenja od $\mathcal{E}^{**}$. Definišemo $S_1,\dots,S_k,T_1,\dots,T_k,Z_{k+1},\dots,Z_n\in\mathbb{F}_2^N$ sa $S_p=(\sigma_p^1,\dots,\sigma_p^N)$, $T_p=(\tau_p^1,\dots,\tau_p^N)$ i $Z_p=(\zeta_p^1,\dots,\zeta_p^N)$.

11.6 LEMA. <u>Elementi</u> $S_1,\dots,S_k,Z_{k+1},\dots,Z_n$ <u>su svi različiti</u>. <u>Isto važi i za</u> $T_1,\dots,T_k,Z_{k+1},\dots,Z_n$.

<u>Dokaz</u>. Za $S_p\neq Z_q$ treba dokazati da je za neko i $\sigma_p^i\neq\zeta_q^i$; sličnu stvar treba dokazati i za $S_p\neq S_q$ i $Z_p\neq Z_q$ $(p\neq q)$. Pošto je skup rešenja od $\mathcal{E}^{**}$ translat skmpa rešenja od $\mathcal{E}^*$, dovoljno je dokazati tvrdjenje leme za $\mathcal{E}^*$ umesto za $\mathcal{E}^{**}$. Dakle, pretpostavljamo da su $(\sigma_1^i,\dots,\sigma_k^i,\tau_1^i,\dots,\tau_k^i,\zeta_{k+1}^i,\dots,\zeta_n^i)$, $1\leqslant i\leqslant N$, rešenja od $\mathcal{E}^*$.

Sad je dovoljno dokazati da za svako p,q $(1\leqslant p<q\leqslant n)$ sistem $\mathcal{E}$ ima rešenje $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ u kom je $\zeta_p\neq\zeta_q$. Jer, ako je $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ rešenje od $\mathcal{E}$, tada je $(\zeta_1,\dots,\zeta_k,\zeta_1,\dots,\zeta_k,\zeta_{k+1},\dots,\zeta_n)$ rešenje od $\mathcal{E}^*$. Medjutim, rešenja sistema $\mathcal{E}$ su upravo valuacije za Φ u odnosu na bulovu grupu $(\mathbb{F}_2,+)$ koja jeste rešenje od Φ . Kako je $c(\Gamma(\Phi))=3$, sledi da se udaljavanjem x_p i x_q iz $\Gamma(\Phi)$ dobija graf koji je povezan, pa stoga sadrži i maksimalno drvo od $\Gamma(\Phi)$. Dakle (lema 3.4), postoji baza za Φ koja sadrži x_p i x_q . Sada iz posledice 3.6 sledi da postoji valuacija $\phi:X\to\mathbb{F}_2$ takva da je $\phi(x_p)=0$ i $\phi(x_q)=1$. □

Sad možemo da završimo dokaz teoreme 11.5. Iz upravo dokazane leme sledi da postoji $\alpha\in\mathrm{Sym}(\mathbb{F}_2^N)$ tako da važi $\alpha(S_1)=T_1$,

$\ldots,\alpha(S_k)=T_k,\alpha(Z_{k+1})=Z_{k+1},\ldots,\alpha(Z_n)=Z_n$. Bulova grupa $(\mathbb{F}_2^N,+)$ očigledno zadovoljava Φ . Posmatrajmo njen izotop $(\mathbb{F}_2^N,*)$ definisan sa $x*y=z \Leftrightarrow x+\alpha(y)+z=0$. Neka je $\phi:X\longrightarrow\mathbb{F}_2^N$ dato sa $\phi(x_p)=S_p$ $(1\leqslant p\leqslant k)$ i $\phi(x_p)=Z_p$ $(k<p\leqslant n)$. Označimo sa φ_i^ϕ formulu $\phi(x_p)*\phi(x_q)=\phi(x_r)$, gde je $\varphi_i=(x_p\cdot x_q=x_r)$. Sve formule $\varphi_1^\phi,\ldots,\varphi_{m-1}^\phi$ su tačne jer n-torka $(S_1,\ldots,S_k,T_1,\ldots,T_k,Z_{k+1},\ldots,Z_n)$ zadovoljava jednačine $E_1^*,\ldots,E_{m-1}^*$. Kada bi $(\mathbb{F}_2^N,*)$ bilo rešenje od Φ , gornja n-torka bi morala zadovoljavati i jednačinu E_m^* , što nije tačno - ta n-torka zadovoljava jednačinu dobijenu od E_m zamenom slobodnog člana 0 sa $(1,\ldots,1)$. Dakle, $(\mathbb{F}_2^N,*)$ nije rešenje od Φ , pa Φ nije izotopno invarijantan. $\square$

Na kraju ćemo još razmotriti pitanja zatvorenosti u odnosu na izotopiju vezana za identitete u jeziku $\{\cdot\}$, dakle, bez deljenja. Zvaćemo takve identitete multiplikativnim. Prirodna su pitanja ""može li multiplikativni identitet biti izotopno invarijantan?" i "može li se kvazigrupni varijetet zatvoren u odnosu na izotopiju definisati multiplikativnim identitetima?" (up. [26, problem 1]) . Iz sledećeg stava dobićemo posledice koje ponešto govore o ovim problemima.

11.7 STAV. <u>Neka je</u> $F=\langle X,Y\rangle$ <u>slobodna grupa,</u> $\mathbb{Z}_nF$ <u>grupna algebra od</u> F <u>nad prstenom ostataka modulo</u> n <u>i</u> ξ,η <u>automorfizmi abelove grupe</u> $(\mathbb{Z}_nF,+)$ <u>definisani sa</u> $\xi:u\longmapsto Xu$ <u>i</u> $\eta:u\longmapsto Yu$. <u>Tada kvazigrupa</u> $(\mathbb{Z}_nF,*)$ <u>u kojoj je množenje definisano sa</u> $x*y=\xi(x)+\eta(y)$ <u>ne zadovoljava nijedan multiplikativni identitet.</u>

<u>Dokaz</u>. Ako je $t(x_1,\ldots,x_m)$ multiplikativni term, tada za svako i , $1\leqslant i\leqslant m$, $tr_i(t)$ je suma različitih elemenata od

F (tj. oblika je $u_1+\ldots+u_k$, gde su svi u_i različiti) i tragovi $tr_1(t),\ldots,tr_m(t)$ jedinstveno odredjuju t . Tako, ako je $E=(t_1=t_2)$ i ako t_1 i t_2 nisu identični, tada je za neko i $tr_i(t_1)-tr_i(t_2)=u_1+\ldots+u_k-u_{k+1}-\ldots-u_\ell$, gde je $\ell>0$ i $u_1,\ldots,u_\ell$ različiti elementi od F . Jezgro homomorfizma $\phi:\mathbb{Z}F\longrightarrow End(\mathbb{Z}_nF,+)$ definisanog sa $X\longmapsto\xi$ i $Y\longmapsto\eta$ je $n\mathbb{Z}F$, pa je $tr_i(t_1)-tr_i(t_2)\in Ker\phi$. Iz leme 10.9 sad sledi $(\mathbb{Z}_nF,*)\notin varE$. □

11.8 POSLEDICA. <u>Ako izotopno zatvoren kvazigrupni varijetet sadrži netrivijalnu grupu, tada on sadrži i kvazigrupu koja ne zadovoljava nijedan multiplikativan identitet. (Tim pre se takav varijetet ne može definisati multiplikativnim identitetima.</u>

<u>Dokaz</u>. Ako kvazigrupni varijetet sadrži netrivijalnu grupu, tada sadrži i cikličnu grupu reda n za neko n . Abelova grupa $(\mathbb{Z}_nF,+)$ je direktni proizvod cikličnih grupa reda n , pa sledi da naš varijetet sadrži $(\mathbb{Z}_nF,*)$. □

Neka $\varepsilon:\mathbb{Z}F\longrightarrow\mathbb{Z}$ označava homomorfizam dat sa $u\longmapsto 1$ za svako $u\in F$. Za svaki kvazigrupni term $t=t(x_1,\ldots,x_n)$ definišemo <u>sumu eksponenata po</u> x_i <u>u</u> t sa $\sigma_i(t)=\varepsilon(tr_i(t))$. Za identitet $t_1=t_2$ rećićemo da je <u>grupno trivijalan</u> ako je $nzd\{\sigma_1(t_1/t_2),\ldots,\sigma_n(t_1/t_2)\}=1$; up. [20, str. 74] . Lako se proverava da varE sadrži netrivijalnu grupu ako i samo ako E nije grupno trivijalan.; up. [40, teorema 12.12] . Tako dobijamo i sledeći rezultat.

11.9 POSLEDICA. <u>Multiplikativni identitet koji nije grupno trivijalan ne može biti izotopno invarijantan</u>. □

Napominjemo da je nerešen problem postojanja kvazigrupnog varijeteta koji je zatvoren u odnosu na izotopiju, a ne sadrži natrivijalnu grupu [19, str. 519]. Medju kvadratnim varijetetima takvoga nema - sledi iz teoreme 11.1. S druge strane, prema posledici 11.8 , postojanje multiplikativno definisanog izotopno zatvorenog varijeteta odmah povlači i postojanje izotopno zatvorenog varijeteta koji ne sadrži netrivijalnih grupa.

12. MALJCEVLJEVI KVAZIIDENTITETI

Zanimljivo je da na koherentne kvaziidentitete možemo naići i u sasvim drugom kontekstu gde njihova izotopna invarijantnost ne igra (bar ne na prvi pogled) nikakvu ulogu. Radi se o problematici utapanja semigrupa u grupe. Tridesetih godina bio je otvoren problem da li se svaka kancelativna semigrupa može utopiti u grupu. Odgovor je, ispostavilo se, negativan, a prvi kontraprimer - semigrupa data prezentacijom

$$\langle x_1, y_1, \ldots, x_4, y_4 \mid x_1y_1 = x_2y_2 \ , \ x_3y_1 = x_4y_2 \ , \ x_3y_3 = x_4y_4 \rangle$$

- potiče od Maljceva [35]. Antecedentni deo Reidemeisterovog uslova (1-1) vidimo u relatorima ove semigrupe. Otkud Reidemeisterov uslov ovde i kakva veza tu postoji zanimljivo je pitanje. Postavio ga je L.Fuchs, a Radó [41] je napravio interesantnu analizu svodjenjem problema utapanja semigrupa u grupe na problem utapanja takozvanih polurešetaka u regularne rešetke.

Maljcev je kasnije dokazao da kvazivarijetet utopivih semigrupa nije konačno aksiomatizabilan [37] i ponudio je jednu beskonačnu aksiomatizaciju [36]. Čitav se ovaj Maljcevljev rad smatra veoma komplikovanim (v. [15, glava XII]) , što će biti jasno čim vidimo aksiome koje je Maljcev dao. Ove aksiome su kvaziidentiteti i pre nego što ih opišemo da kažemo samo da je svaki od njih kvadratni i oblika $\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_0$, gde je $\varphi_i = (x_t y_q = x_r y_s)$, $x_p, x_r \in X$, , $y_q, y_s \in Y$, a X i Y su disjunktni skupovi promenljivih. U ovom odeljku ćemo koherentnim zvati baš kvaziidentitete ovog oblika. Jasno je da se radi o nebitnoj razlici u odnosu na definiciju koherentnosti datu u prethodnom odeljku.

Skup promenljivih od kojih je načinjen Maljcevljev kvaziidentitet je $X = \{a_i, b_i, c_i, d_i, A_j, B_j, C_j, D_j \mid 1 \leqslant i \leqslant p \ , \ 1 \leqslant j \leqslant q\}$. Treba nam još jedan alfabet: $Y = \{L_i, L_i^*, R_j, R_j^* \mid 1 \leqslant i \leqslant p \ , \ 1 \leqslant j \leqslant q\}$ Maljcevljeva reč je, po definiciji, svaka reč $M = S_1 S_2 \ldots S_{2(p+q)}$ za koju važe sledeća dva uslova:

(m1) Skup slova koja se javljaju u M je Y i javljanje slova L_i (R_j) u M prethodi javljanju slova L_i^* (R_j^*) , za svako i,j $(1 \leqslant i \leqslant p \ , \ 1 \leqslant j \leqslant q)$;

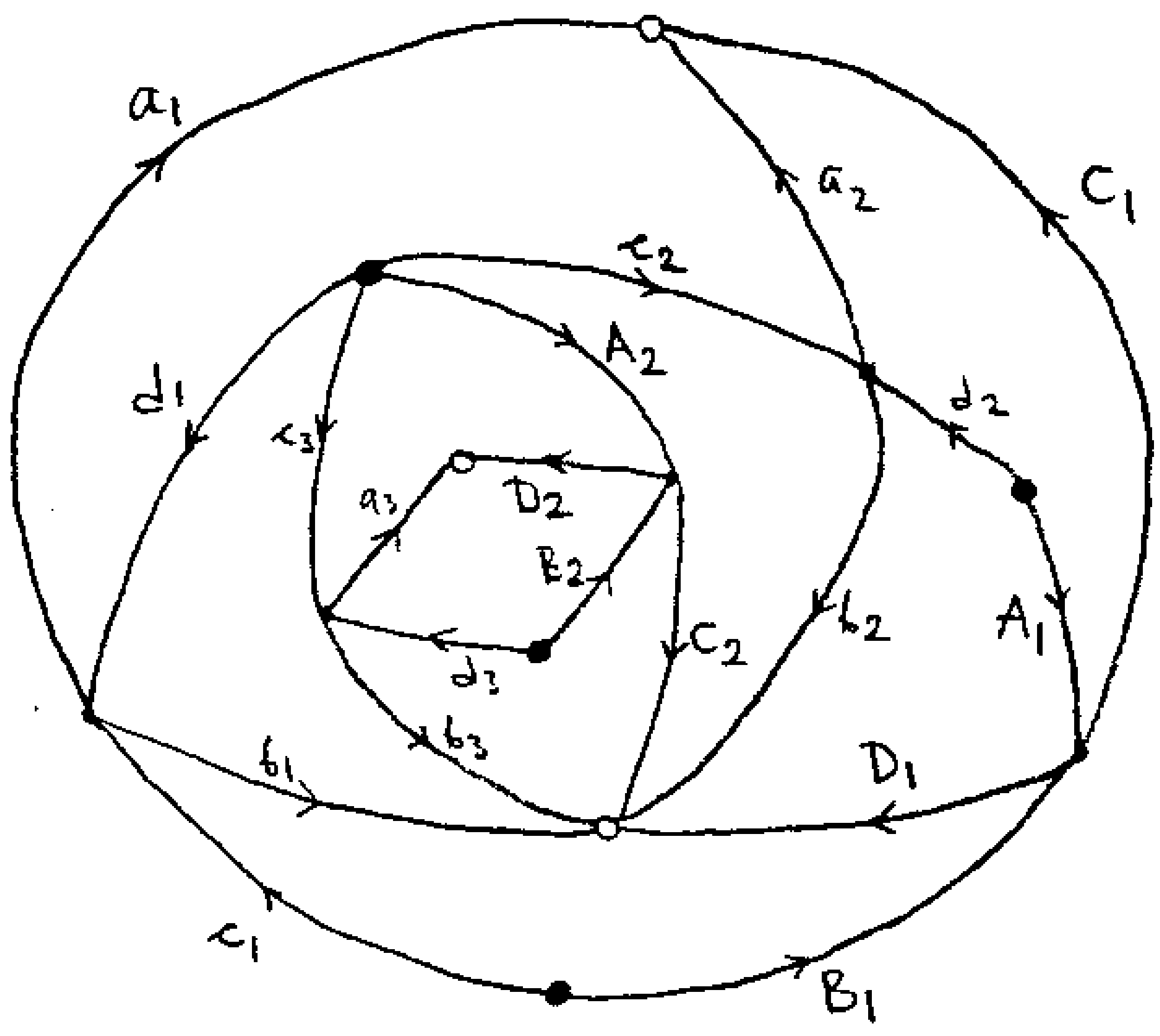
(m2) Ako se L_k (R_k) javlja izmedju L_i i L_i^* $(R_j$ i $R_j^*)$, tada isto važi i za javljanje slova L_k^* (R_k^*) .

Maljcevljev kvaziidentitet $qi(M)$ dobijen od Maljcevljeve reči $M = S_1 S_2 \ldots S_{2(p+q)}$ je definisan sa

$$qi(M) = \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{2(p+q)-1} \lambda(S_i) = \rho(S_{i+1}) \right) \Rightarrow \lambda(S_{2(p+q)}) = \rho(S_1) \right) ,$$

gde se $\lambda(S_i)$ i $\rho(S_i)$ čitaju iz sledeće tablice.

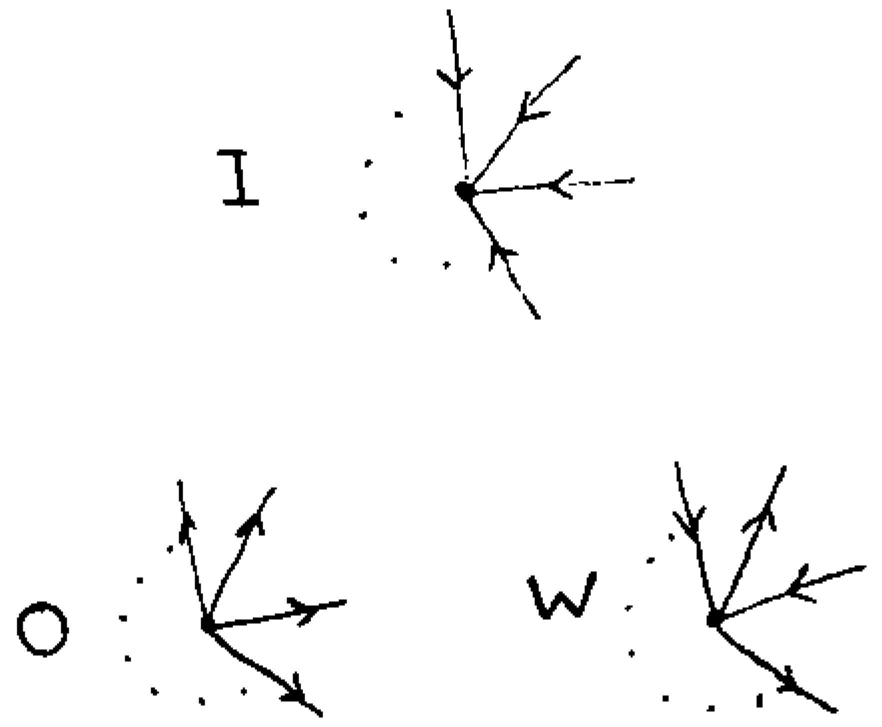
S_i	L_k	L_k	R_k	R_k
(S_i)	$d_k a_k$	$c_k b_k$	$A_k D_k$	$B_k D_k$
(S_i)	$c_k a_k$	$d_k b_k$	$A_k C_k$	$B_k D_k$



sl.26

Očigledno da je svaki Maljcevljev kvaziidentitet koherentan. Iz [15, str. 311] reprodukujemo jedan primer. Reč $M = L_1L_2R_1L_2^*R_2L_3R_2^*L_3^*L_1^*R_1^*$ je Maljcevljeva. Na slici 26 je prikazan van Kampenov dijagram $K(qi(M))$.

Potrebna su nam sledeća zapažanja o van Kampenovim dijagramima koherentnih kvaziidentiteta. Naime, ako je $\Phi = (\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_m \Rightarrow \varphi_o)$ koherentan (svaki φ_i je oblika $x_py_q = x_ry_s$) i kvadratni, tada možemo ivice od $K(\Phi)$ identifikovati sa skupom promenljivih $X \vee Y$ koje se javljaju u Φ . Zatim, temena od $K(\Phi)$ se raspadaju na tri klase - zvaćemo ih <u>ulaznim</u>, <u>izlaznim</u> i <u>prolaznim</u> temenima. Ulazno teme je završno teme svake incidentne mu ivice. Izlazno teme je početno teme svake incidentne mu ivice. A za ivice incidentne prolaznom temenu to teme je naizmenično ($K(\Phi)$ je površ!) početno, odnosno završno (sl. 27) . Koristićemo i alternativnu notaciju: temena I- , O- i W-tipa (sInk, sOurce, sWitch) .



sl.27

Stepen svakog temena od $K(\Phi)$ je paran. Za prolazna temena možemo pretpostaviti i da je $\geqslant 4$. Jer, W-temenu stepena dva odgovara javljanje u identiteta $x_py_q = x_ry_s$ i $x_py_q = x_{r'}y_{s'}$, a oni mogu biti zamenjeni jednim identitetom

$x_r y_s = x_{r'} y_{s'}$. Nazovimo Φ W-svedenim ako je svako W-teme od $K(\Phi)$ stepena 4 . Slično, zvaćemo Φ O-svedenim (I-svedenim) ako je svako O-teme (I-teme) u $K(\Phi)$ stepena dva.

Zvaćemo sfernim one kvaziidentitete čiji je van Kampenov dijagram (topološki) dvodimenziona sfera. Iz stava 13.2 sledi da svaki kvaziidentitet koji učestvuje u ma koj aksiomatizaciji klase semigrupa utopivih u grupe mora biti sferni. Iz podatka da Maljcevljevi kvaziidentiteti čine jednu aksiomatizaciju ove klase dobijamo da oni svi moraju biti sferni. Potpunu geometrijsku karakterizaciju daje sledeća teorema. Važna je napomena da u dokazu nećemo koristiti Maljcevljeve rezultate; oni se zapravo, uz malo dodatnog truda mogu dobiti kao posledice [28, 29].

12.1 TEOREMA. Koherentan kvaziidentitet je Maljcevljev ako i samo ako je sferni i W-sveden.

Dokaz. Dokazujemo prvo da je dati uslov neophodan. Neka je $\Phi = qi(M)$ Maljcevljev kvaziidentitet kao u definiciji datoj gore i neka je $K=K(\Phi)$ njegov van Kampenov dijagram. Prolazna temena od K su upravo završna temena ivica a_i, b_i, C_j, D_j tj. početna temena ivica c_i, d_i, A_j, B_j . Iz tablice koja definiše $qi(M)$ odmah sledi da je svako prolazno teme stepena 4 . Tačnije, postoji tačno $p+q$ prolaznih temena u K i za svako od njih četiri incidentne ivice su a_i, b_i, c_i, d_i ili A_j, B_j, C_j, D_j (za neko i ili j). Preostaje samo da se dokaže da je K sferni; činimo to računanjem Eulerove karakteristike. Zasad znamo da K ima $4(p+q)$ ivica, $2(p+q)$ oblasti i $p+q$ W-temena. Da dokažemo

$$|\{\text{temena}\}| - |\{\text{ivice}\}| + |\{\text{oblasti}\}| = 2$$

treba nam samo da je ukupan broj O-temena i I-temena jednak $p+q+2$. Mi ćemo dokazati da O-temena ima ukupno $p+1$, po simetriji će onda slediti da I-temena ima $q+1$.

O-temena od K su početna temena ivice c_i, d_i, A_j, B_j . Stavimo $Z=\{c_1,d_1,\ldots,c_p,d_p,A_1,B_1,\ldots,A_q,B_q\}$ i neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na Z takva da su dva elementa od Z ekvivalentna ako i samo ako dve odgovarajuće ivice od K imaju zajedničko početno teme. Očigledno, $|\{\text{O-temena}\}| = |Z/\sim|$. Uz to, relacija $\sim$ je generisana sa "prvi simbol od $\lambda(S_i)$" $\sim$ "prvi simbol od $\rho(S_{i+1})$" , gde je $1 \leqslant i \leqslant 2(p+q)$ i $i+1$ uzeto po modulu $2(p+q)$.

Neka je $M_L=T_1T_2\ldots T_{2p}$ reč dobijena od M brisanjem svih simbola R_j, R_j^* . Neka je $Z_L=\{c_1,d_1,\ldots,c_p,d_p\}$ i neka je $\sim$ ekvivalencija na Z_L generisana sa "prvi simbol od $\lambda(T_i)$" $\sim$ "prvi simbol od $\rho(T_{i+1})$" , gde je $1 \leqslant i \leqslant p$ i $i+1$ uzeto modulo $2p$. Pošto su prvi simboli od $\lambda(R_j)$ i $\rho(R_j)$ (od $\lambda(R_j^*)$ i $\rho(R_j^*)$) jednaki, sledi da je $|Z/\sim| = |Z_L/\sim|$. Sad za neko i imamo da je $L_iL_i^*$ podreč od M_L . Dakle, d_i , koje je početni simbol i u $\lambda(L_i)$ i u $\rho(L_i^*)$, čini jednoelementnu klasu u Z_L . Štaviše, ako je M_L' reč dobijena od M_L brisanjem L_i i L_i^* , tada je $|Z_L/\sim|=1+|Z_L'/\sim|$, gde je $Z_L'=Z_L-\{c_i,c$ Neka je M' reč dobijena od M brisanjem L_i i L_i^* ; ona je Maljcevljeva reč i imamo $(M')_L=M_L'$. Pošto u slučaju $M_L=L_1L_1^*$ imamo $|Z_L/\sim|=2$, tražena jednakost sledi indukcijom.

Dokazujemo sad da je dati uslov i dovoljan. Neka je Φ W-sveden sferni kvaziidentitet; naćićemo Maljcevljevu reč M takvu da se $qi(M)$ podudara sa Φ do na preznačavanje promenljivih. Neka je $K=K(\Phi)$, $p=|\{\text{O-temena od } K\}|-1$ i $q=|\{\text{I-temena od } K\}|-1$. Jednostavnom računicom, uz korišćenje Eulerove formule sledi da K ima $p+q$ W-temena, $4(p+q)$ ivica i $2(p+q)$ oblasti. Ivicu od K zvaćemo OW-ivicom ili WIivicom, prema tipu incidentnih joj temena. Dve OW-ivice (WI-ivice) zvaćemo <u>srodnim</u> ako imaju zajedničko W-teme.

Neka je Γ_0 podgraf od $K^{(1)}$ kojeg čine sve sve OW-ivice i sva incidentna im temena. Tada je

$$|\{\text{ivice od } \Gamma_0\}| - |\{\text{temena od } \Gamma_0\}| = 2(p+q)-((p+q)+(p+1)) = q-1 \ .$$

Stepen svakog W-temena u Γ_0 jednak je dva, pa sledi da odstranjivanjem (pogodno izabranih) q parova srodnih ivica iz Γ_0 dobijamo drvo; označimo ga sa T_0. Temena od T_0 su sva O-temena od K i nekih p W-temena koja označavamo sa $\ell_1,\dots,\ell_p$. Preostalih q W-temena označimo sa $r_1,\dots,r_q$. Neka je T_I graf kojeg čine $2q$ WI-ivica incidentnih sa $r_1,\dots,r_q$ zajedno sa svim incidentnim im temenima. Imamo

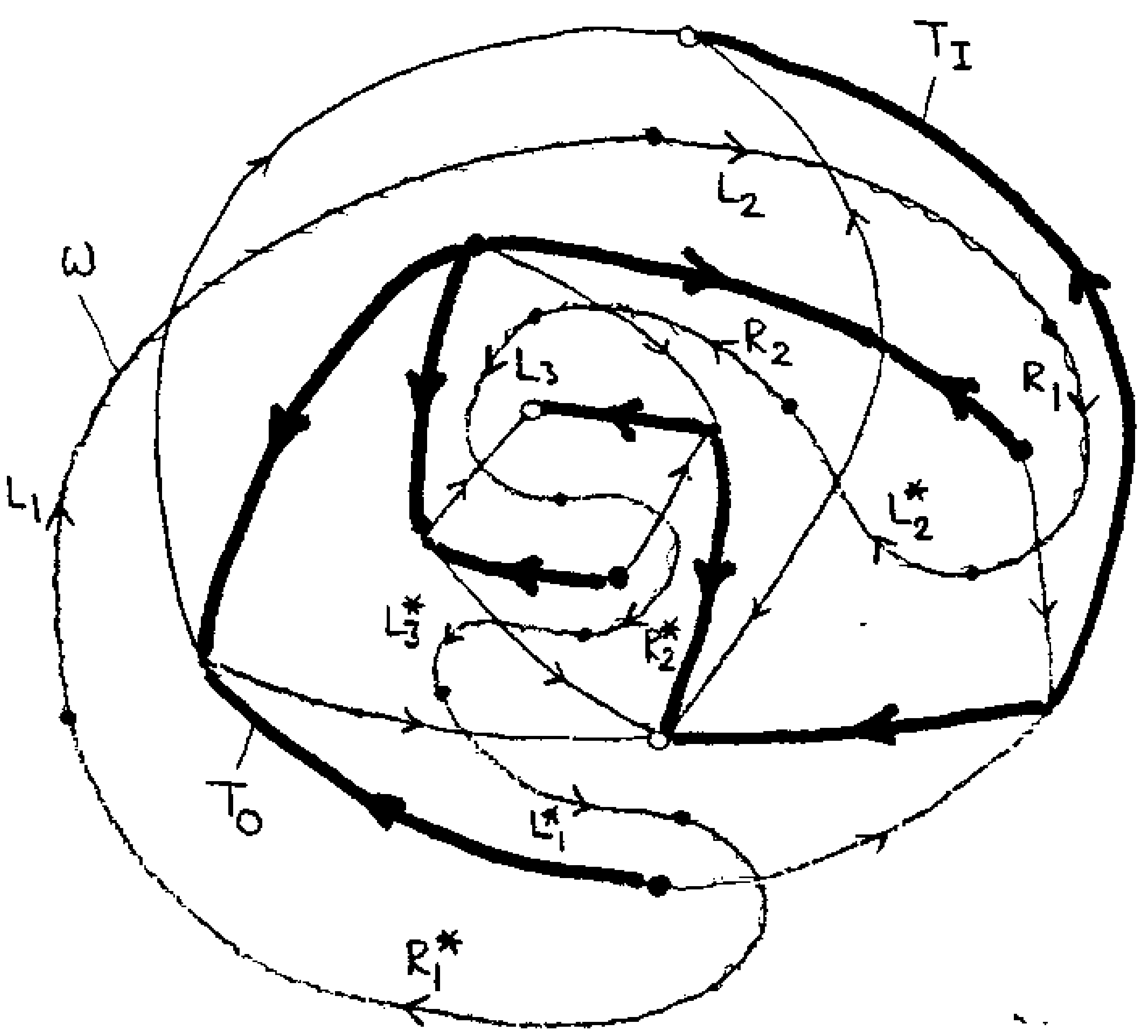
$$|\{\text{ivice od } T_I\}| - |\{\text{temena od } T_I\}| =$$
$$2q - (q + |\{\text{I-temena od } T_I\}|) \geqslant -1 \ .$$

Ako postoji prost cikl γ u T_I, tada O-temena incidentna paru srodnih OW-ivica čije zajedničko W-teme pripada γ pripadaju različitim komponentama povezanosti komplementa od γ. Budući da je T_0 povezan graf koji sadrži sva O-temena od K, mora onda biti $T_0 \cap T_I \neq \emptyset$ - kontradikcija. Dakle, prostih ciklova u T_I nema i sledi da je T_I disjunktna unija $k \geqslant 1$ drveta, gde je

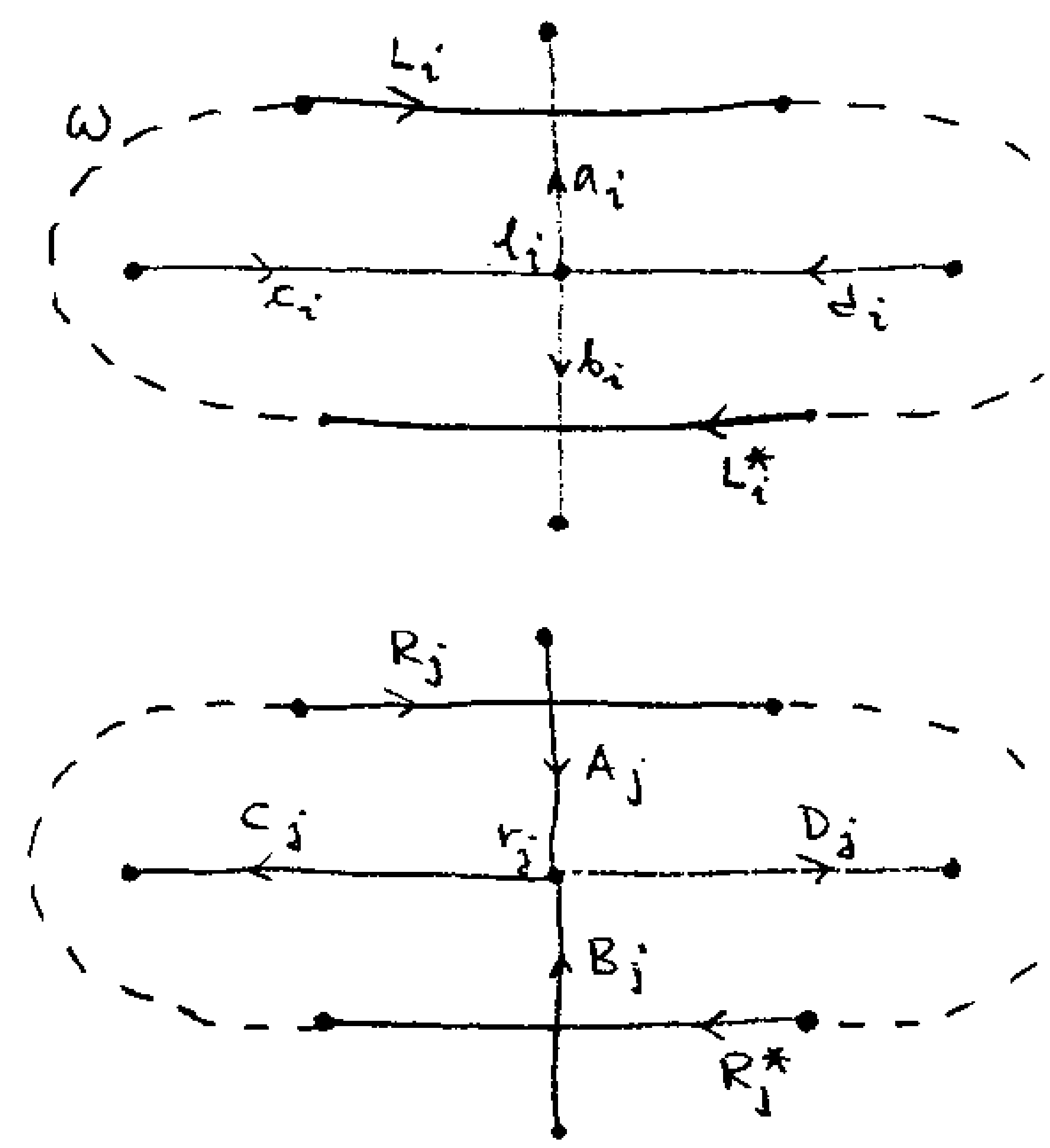
$$-k = |\{\text{ivice od } T_I\}| - |\{\text{temena od } T_I\}| \ .$$

Uporedjujući sa nejednakošću dobijenom malopre zaključujemo da je $k=1$, pa je T_I drvo i T_I sadrži sva I-temena od K.

Neka je S skup svih ivica od K koje nisu u $T_0 \cup T_I$. Za svako W-teme, S sadrži tačno dve incidentne mu ivice, i te dve ivice su srodne. Komplement od $T_0 \cup T_I$ je homeomorfan otvorenom prstenu (proizvodu S^1 i otvorenog intervala). Svaka ivica od S razrezuje prsten, ali ga ne raspovezuje. Sledi da postoji prosta zatvorena kriva ω u prstenu koja seče svaku ivicu od S u tačno jednoj tački. Kriva ω ne prolazi ni kroz jedno teme od K i presek njen sa svakom od oblasti od K je interval. Podelimo ω sa $2(p+q)$ tačaka uzetih iz različitih oblasti od K . Tako ω postaje graf sa $2(p+q)$ ivica i temena i svake ivica od ω seče tačno jednu ivicu od S , v. sl. 28 .



sl.28



sl.29

Ivice od K su označene promenljivima koje učestvuju u Φ . Mi ih sada preznačavamo da bismo videli da je Φ Maljcevljev kvaziidentitet. Neka je v teme od K koje pripada oblasti $D(\varphi_0)$, gde je φ_0 konsekventni identitet od Φ . Putujmo duž ω u jednom izabranom smeru sa početkom u v . Za svako W-teme ℓ_i postoje dve WI-ivice incidentne sa ℓ_i koje pripadaju S ; prvu na koju naidjemo putujući duž ω označimo sa a_i , a drugu sa b_i . Dve odgovarajuće ivice od ω označimo respektivno sa L_i i L_i^* , v. sl. 29. Neka su D_1, D_2, D_3, D_4 oblasti incidentne sa ℓ_i napisane takvim cikličnim redom da svake dve uzastopne imaju zajedničku ivicu i da idući duž L_i prelazimo iz D_1 u D_2. Jednostavno sledi da idući duž L_i^* prelazimo iz D_3 u D_4. Označimo zajedničku ivicu od D_1 i D_4 sa c_i, a zajedničku ivicu od D_2 i D_3 sa d_i. Na sličan način označavamo ivice incidentne temenima r_j, v. sl. 29.

Sad kad su označene sve ivice od ω, naš put duž ω sa početkom u v daje nam reč M dužine $2(p+q)$ za koju se odmah vidi da zadovoljava (m1). Pošto ω "obilazi" jednom oko drveta T_0, sledi da svaka komponenta od $\omega - (L_i \cup L_i^*)$ sadrži ivicu L_j^* kad god sadrži L_j. Sledstveno, M zadovoljava i (m2), pa jeste Maljcevljeva reč. Iz toga kako smo označili ivice od K sledi neposredno da je $\Phi = qi(M)$. $\square$

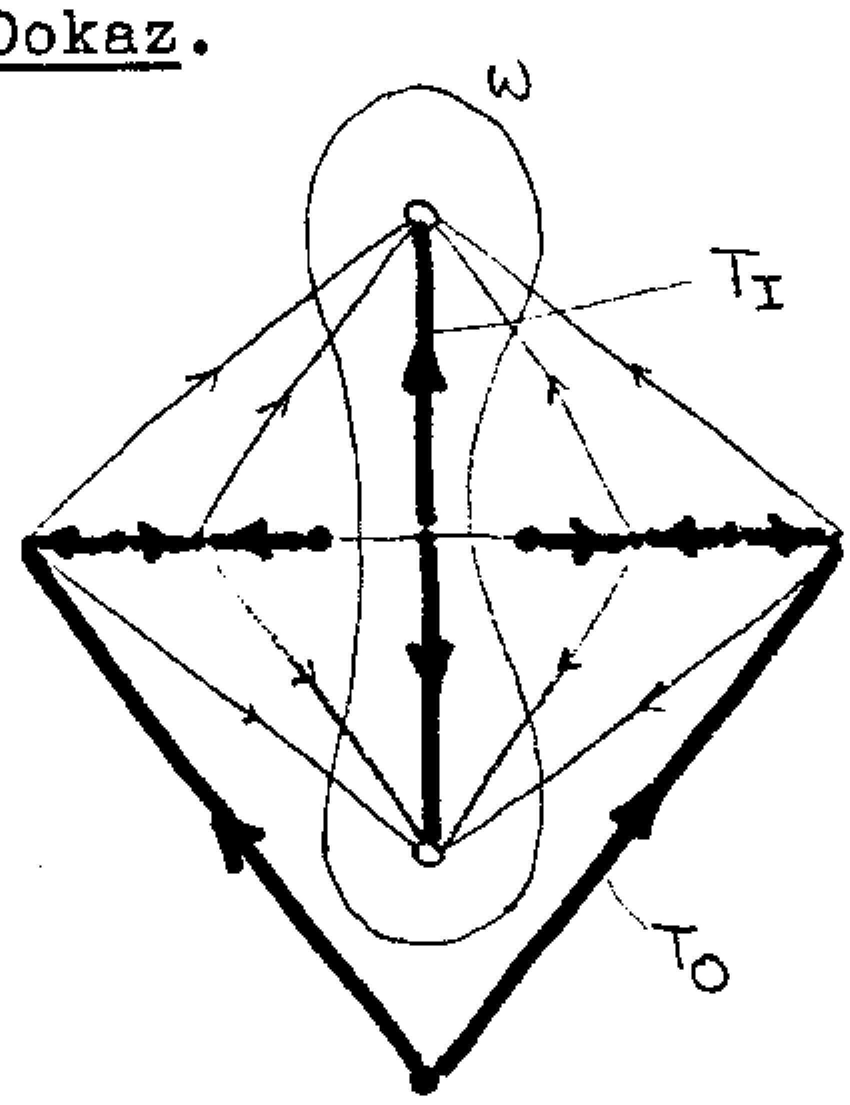
Postoji još jedna klasična aksiomatizacija klase semigrupa utopivih u grupe. Potiče od Lambeka [31], a čine je takodje koherentni kvaziidentiteti, tzv. "poliedarski uslovi" [15]. Sledeći stav ostavljamo bez dokaza. Lambekovi kvaziidentiteti su geometrijski definisani i naš je stav tek malo preradjena originalna definicija. Čitalac neupoznat sa Lambekovim radom može bezbedno uzeti ovaj stav za definiciju.

12.2 STAV. <u>Koherentan kvaziidentitet je Lambekov ako i samo ako je sferni i 0-sveden.</u> $\square$

Geometrijska analogija medju Maljcevljevim i Lambekovim kvaziidentitetima, izražena teoremom 12.1 i stavom 12.2, omogućuje jedinstven dokaz da su i jedni i drugi aksiomatizacija klase utopivih semigrupa [28]. Ovde ćemo samo izvesti sledeću jednostavnu posledicu za čiji je algebarski dokaz bilo potrebno znatno više truda.

12.3 POSLEDICA.(Clifford i Preston [15, teorema 12.21]) Neka je M Maljcevljeva reč. Kvaziidentitet qi(M) je Lambekov ak i samo ako je M oblika $L_1 \dots L_m R_1 L_m^* \dots L_1^* L_{m+1} \dots L_n R_1^* L_n^* \dots L_{m+1}^*$

Dokaz. Kvaziidentitet Φ=qi(M) je i O-sveden i W-sveden. Odmah sledi d van Kampenov dijagram K=K(Φ) ima samo dva I-temena i jednak broj (n, recimo) O-temena i W-temena, v sl. 30. Da bismo videli koje Maljcevljeve reči odgovaraju dijagramima ovog oblika, primetimo da su drveta T_O i T_I jedinstvena do na cikličnu simetriju dijagrama.



sl.30

Zavisno od izbora oblasti u kojoj započinjemo obilazak separirajuće krive ω , metodom opisanim u dokazu teoreme 11.1 dobijamo Maljcevljeve reči $M_{m,n}$ = $L_1 \dots L_m R_1 L_m^* \dots L_1^* L_{m+1} \dots L_n R_1^* L_n^* \dots L_{m+1}^*$. Štaviše, iz simetrije d jagrama sledi da su kvaziidentiteti qi($M_{m,n}$) i qi($M_{m',n}$) isti do na preznačavanje promenljivih. □

13. DODATAK. O GEOMETRIJSKOJ TERMINOLOGIJI

Tako elementaran i očigledan pojam kao što je graf ima u literaturi sijaset definicija, sve zavisno od načina posmatranja i od onoga čemu grafovi služe u različitim kontekstima. Ovaj je odeljak napisan radi preciziranja pojmova. Dakle, slede uglavnom definicije pojmova vezanih za grafove i 2-komplekse. Nešto nužnih rezultata iz teorije grafova (teorema o planarnosti, Mengerova teorema) navedeno je bez dokaza u osnovnom tekstu. Važne rezultate o geometrijskoj interpretaciji zavisnosti u grupama ćemo ipak navesti ovde, jer nisu baš opštepoznati, a i trebaju nam u malo izmenjenom obliku.

Sve je u ovom odeljku svedeno na neophodan minimum. Specijalno, svi objekti (grafovi i 2-kompleksi) su ovde po pretpostavci konačni.

Graf će za nas biti, već prema potrebi, ili čisto kombinatorna tvorevina (apstraktni graf) ili topoški prostor (topološki graf). Apstraktni graf je kolekcija $\Gamma=(V,E,{}^{-1},\iota,\tau)$, gde su V i E skupovi (temena i ivice) , ${}^{-1}$ involucija $E\rightarrow E$ bez fiksnih elemenata i $\iota,\tau:E\rightarrow V$ funkcije (početno i završno teme) koje zadovoljavaju uslove $\iota(e^{-1})=\tau(e)$ i $\tau(e^{-1})=\iota(e)$. Ivica sa $\iota(e)=\tau(e)$ je petlja . Put u grafu je niz ivica $\pi=(e_1,\dots,e_n)$, obično pisan kao reč $\pi=e_1\dots e_n$, takav da je $\iota(e_{i+1})=\tau(e_i)$ za $1\leqslant i\leqslant n$. Ako je uz to i $\tau(e_n)=\iota(e_1)$, π je cikl . Prost put je put čiji nijedan pravi podput nije cikl. Put je sveden ako nema podputeva oblika ee^{-1}. Put inverzan putu $\pi=e_1\dots e_n$ je $\pi^{-1}=e_n^{-1}\dots e_1^{-1}$. Proizvod $\pi_1\pi_2$ puteva π_1 i π_2 je na očigledan način definisan, pod uslovom da je završno teme od π_1 jednako početnom temenu od π_2 . Graf je povezan ako za svaka dva temena postoji put koji počinje u jednom, a završava se u drugom. *Drvo* je povezan graf koji nema svedenih ciklova. Graf $\Gamma' = (V', E', {}^{-1}, \iota, \tau)$ je *podgraf* od Γ ako je $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$, a ${}^{-1}, \iota, \tau$ u Γ' su restrikcije odgovarajućih funkcija u Γ. Za $E' \subseteq E$ definišemo $\Gamma(E')$ kao najmanji podgraf od Γ koji sadrži E'. Lako se proverava da je poddrvo grafa maksimalno ako i samo ako sadrži sva temena. Takodje, svako poddrvo je podgraf nekog maksimalnog drveta. Svaki par $\{e, e^{-1}\}$ zovemo *neorijentisanom ivicom* grafa. Svaki graf je jednoznačno (do na izomorfizam) odredjen svojim skupom temena, skupom neorijentisanih ivica i preslikavanjem koje svakoj neorijentisanoj ivici dodeljuje skup incidentnih joj temena. Svaki podskup E_0 od E koji sadrži tačno jedan element iz svake neorijentisane ivice je *orijentacija* grafa.

Topološki graf je topološki prostor dobijen od disjunktne unije zatvorenih intervala identifikacijom nekih od krajnjih tačaka tih intervala. Topološki graf je očigledno disjunktna unija diskretnog skupa tačaka (temena) i otvorenih intervala. Svaki od tih intervala je (neorijentisana) ivica grafa. *Orijentacija* topološkog grafa je izbor jednog od dva bitno različita načina da se proputuje svaka ivica grafa. *Luk* u grafu je neprekidna slika zatvorenog intervala čije krajnje tačke su temena grafa.

Očigledno je kako se svakom apstraktnom grafu može pridružiti jedan topološki graf (topološka realizacija apstraktnog grafa) koji ga potpuno odredjuje. U našem tekstu se po pravilu neće ukazivati na koji se od dva pojma grafa misli u svakom trenutku. Najčešće se, zapravo, misli na obadva istovremeno. Tako se u isto vreme može pričati o putevima (što je pojam vezan za apstraktne grafove) i o planarnosti grafa (što je topološki pojam). Suštinskih dvosmislenosti ne bi, medjutim, trebalo da bude.

Grafovi su jednodimenzioni objekti. U kombinatornoj topologiji, gde je <u>kompleks</u> (simplicijalni, celularni) osnovni pojam, oni su upravo jednodimenzioni kompleksi. Nama nije potrebno da idemo dalje od dimenzije dva, pa ćemo termin "kompleks" koristiti za dvodimenzione komplekse. Prilagodjene definicije slede.

<u>Apstraktan kompleks</u> K čine tri skupa V,E,F (<u>temena</u>, <u>ivice</u>, <u>oblasti</u>) za koje se pretpostavljaju sledeće dve stvari. Prvo je da V i E čine graf, tzv. 1-skelet od K, u oznaci $K^{(1)}$. Drugo je da za svaku oblast D imamo definisan, do na ciklične permutacije i uzimanje inverza, cikl δD u K - <u>granični cikl</u> od D. Što se tiče relacije incidencije u K, to je incidencija u $K^{(1)}$, plus to da su objekti incidentni oblasti D upravo temena i ivice na δD.

<u>Topološki kompleksi</u> su prostori koji se dobijaju od izvesnog broja poligona identifikacijom nekih (zatvorenih) strana tih poligona. Temena i unutrašnjosti strana tih poligona čine temena i ivice kompleksa. Unutrašnjosti poligona su,pak, oblasti kompleksa. Malo drugačije gledano, topološki kompleks je prostor dobijen od grafa (svog 1-skeleta) "lepljenjem" izvesnog broja dvodimenzionih diskova duž nekih ciklova u grafu. "Nalepiti" disk duž cikla $e_1 \dots e_n$ znači uzeti poligon sa n strana pa ove strane redom identifikovati sa zatvorenjem ivica $e_1, \dots, e_n$, up. [38, VII.2]. Jasno je opet da imamo obostranu vezu izmedju apstraktnih i topoloških kompleksa, pa ćemo, kao kod grafova, koristiti obe terminologije u isto vreme.

Za nas su posebno važni kompleksi kod kojih se svaka ivica javlja tačno dvaput u $\{\delta D \mid D \in F\}$. (Ovo nije isto što i reći da je svaka ivica incidentna tačno dvema oblastima!) Kao topološki prostori, ovakvi kompleksi su <u>površi</u> (kompaktne 2-mnogostrukosti bez granice) i za njih je dobro poznata klasifikacija po rodu i orijentabilnosti [38, gl. 1 , 45, str. 69] . Komplek je ipak malo više od površi, jer očigledno je da istu površ mo emo na razne načine predstaviti kao kompleks (upotrebljavaćemo termin <u>dekompozicija</u> površi).

Pretpostavimo da je graf Γ homeomorfno utopljen u površ Σ . Tad možemo govoriti o <u>dualnom grafu</u> Γ^* . To je graf koji ima po jedno teme u svakoj komponenti od $\Sigma-\Gamma$, a ivice su mu u bijektivnoj vezi sa ivicama od Γ , tako da ako je e ivica od Γ , tad je e^* ivica od Γ^* koja spaja teme od Γ^* koja pripadaju onim komponentama od $\Sigma-\Gamma$ čijoj granic e pripada. Ivica e^* je petlja ako i samo ako e pripada gr nici samo jedne komponente od $\Sigma-\Gamma$. Lako se vidi da se i Γ^* može utopiti u Σ i to tako da svaka ivica e^* seče Γ u ta no jednoj tački (koja pripada e) .

Primetimo dalje da svaki povezan graf Γ utopljen u (2-sferu) jeste 1-skelet jedinstvene dekompozicije sfere - jer su ("očigledno", a zapravo kao posledica Jordan-Shoenfliessove teoreme [45, str. 35]) sve komponente od $S^2-\Gamma$ homeomorfne ot vorenom disku. Slično, ako je Γ povezan graf utopljen u orijentabilnu površ Σ i ako je Σ orijentabilna površ najmanje roda u koju se Γ može utopiti, tada su sve komponente od Σ - otvoreni diskovi ("oblasti"), pa imamo jedinstvenu strukturu kompleksa K na Σ tako da je $K^{(1)}=\Gamma$. Jasno, oblasti od K su u bijektivnoj vezi sa temenima od Γ^*.

Preostaje nam još da vidimo kako kompleksi mogu služit kao vizuelizacija (kvazi)identiteta. Pa neka je $E=(u_1=u_2)$ identitet u grupnom jeziku, tj. $u_1=\xi_1^{\varepsilon_1}\ldots\xi_p^{\varepsilon_p}$, $u_2=\eta_1^{\varepsilon_1'}\ldots\eta_q^{\varepsilon_q'}$, ljke 8 i 9), ali samo zbog toga što je trebalo na jednom mestu gledati i "grupni" i "abelov" slučaj. U stvari, ako je ikakva interpretacija potrebna za kvaziidentitete na abelovim grupama, onda je ona koju daje naredna lema i prirodnija i jednostavnija.

Neka je, naime, Γ graf sa temenima $v_1,\dots,v_m$ i (orijentisanim) ivicama $e_1,\dots,e_n$. Pretpostavimo, radi jednostavnijeg pisanja, da nijedna ivica nije petlja. Ako je v_i početno teme od e_p stavimo $\varepsilon_{pi}=1$, a ako je v_i završno teme od e_p neka je $\varepsilon_{pi}=-1$. Kao i gore, dodelimo svakoj ivici e oznaku $\phi(e)\in X\cup X^{-1}$. Označimo sa δv_i term $\sum \varepsilon_{pi}e_p$ gde suma ide po svim p takvim da je e_p incidentna sa v_i. Proširimo ϕ na očigledan način na sve linearne kombinacije $\sum \alpha_p e_p$ i definišimo za svako i $(1\leqslant i\leqslant m)$ kvaziidentitet $\Phi_i(\Gamma)$ = $(\bigwedge_{j\neq i}\phi(\delta v_j)=0)\Rightarrow \phi(\delta v_i)=0$.

13.4 LEMA. <u>Kvaziidentitet</u> $\Phi_i(\Gamma)$ <u>je tačan na svim abelovim grupama</u>.

<u>Dokaz</u>. Sledi iz $\sum_{j=1}^{m}\phi(\delta v_j) = 0$. □

ako i samo ako je $K(\Phi)$ $\left\{\begin{array}{l}\text{sfera}\\ \text{orijentabilna površ roda } \geq 1\\ \text{neorijentabilna površ}\end{array}\right\}$. □

Neka je kompleks K sa oblastima $D_1,\dots,D_m$ dekompozicija površi Σ. Fiksirajmo skup promenljivih $X=\{x_1,x_2,\dots\}$ i svakoj ivici od K dodelimo oznaku $\phi(e)\in X\cup X^{-1}$, tako da je $\phi(e^{-1})=\phi(e)^{-1}$ $(X^{-1}=\{x_1^{-1},x_2^{-1},\dots\})$. Označavanje ϕ se multiplikativno proširuje na sve puteve u K, tako da za svak put π imamo oznaku $\phi(\pi)$ koja je grupna reč po slovima iz Za svako i, 1 i m, definišemo kvaziidentitet $\Phi_i(K)$ = $(\bigwedge_{j\neq i}\phi(\delta D_j)=1)\Rightarrow\phi(\delta D_i)=1$. Pošto za svaki kompleks K koji j dekompozicija površi postoji kvadratni kvaziidentitet Φ taka da je $K(\Phi)=K$, sledi da je svaki $\Phi_i(K)$ instanca nekog kvadratnog kvaziidentiteta za koji je $K(\Phi)=K$. Tako dobijamo iz stava 13.2 sledeću važnu posledicu.

13.3 POSLEDICA. Ako je K dekompozicija $\left\{\begin{array}{l}\text{sfere}\\ \text{orijentabilne po}\\ \text{neorijentabilne}\end{array}\right.$ tada je (za svako označavanje ϕ) kvaziidentitet $\Phi_i(K)$ tača na svim $\left\{\begin{array}{l}\text{grupama}\\ \text{abelovim grupama}\\ \text{bulovim grupama}\end{array}\right\}$. □

"Sferni" deo ovog tvrdjenja poznat je kao van Kampenov leme ili lema o normalnoj podgrupi [23], [34, lema V.1.2]. Prav govoreći, "sferni" deo je u nekom smislu i jedini važan, jer zavisnost u abelovim (i još više u bulovim) grupama je stvar sasvim jednostavna i teško da joj je potrebna interpretacija gornjeg oblika. Nama je doduše zaista ispala potrebna (v. ode-

13. V.D.Belousov, E.S.Livšic, Uravnovešennye funkcional'nye uravneniya na kvazigruppah lyuboy arnosti, Mat. Issled. 43(1976), 9-29.

14. W.Blaschke, G.Bol, "Geometrie der Gewebe", Springer, Berlin 1938.

15. A.H.Clifford, G.B.Preston, "The Algebraic Theory of Semigroups", Amer. Math. Soc. Providence 1977.

16. J.Dénes, A.D.Keedwell, "Latin Squares and their Applications", Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

17. I.H.M.Etherington, Note on quasigroups and trees, Proc. Edinburgh Math. Soc. 13(1962-63), 219-222.

18. T.Evans, A note on the associative law, J. London Math. Soc. 25(1950), 196-201.

19. E.Falconer, Isotopy invariants in quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 151(1970), 511-526.

20. E.Falconer, Isotopes of some special quasigroup varieties, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 22(1971), 73-79.

21. F.Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading 1969.

22. J.Howie, S.Pride, The word problem for one relator semigroups, Preprint 1985.

23. E.R.van Kampen, On some lemmas in the theory of groups, Amer. J. Math. 55(1933), 268-273.

24-26. A.Krapež, On solving asystem of balanced functional equations on quasigroups I-III, Publ. Inst. Math. Beograd 23(37)(1978), 117-127 ; 25(39)(1979), 70-78 ; 26(40)(1979), 145-156.

27. A.Krapež, Strictly quadratic functional equations on quasigroups, Publ. Inst. Math. Beograd 29(43)(1981), 125-138.

LITERATURA

1. J.Aczél, On ageneralization of the functional equations of Pexider, Publ. Inst. Math. Beograd 4(18)(1964), 77-80.

2. J.Aczél, Quasigroups, nets and nomograms, Advances in Math. 1(1965), 383-450.

3. J.Aczél, "Lectures on Functional Equations and their Applications", Academic Press, New York 1966.

4. J.Aczél, V.D.Belousov, M.Hosszú, Generalized associativity and bisymmetry on quasigroups, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 11(1960), 127-136.

5-6. B.Alimpić, A class of balanced laws on quasigroups I,II, Zbornik radova Matematičkog Instituta, knj.1(9)(1976),

7. V.D.Belousov, Associativnye sistemy kvazigrupp, Usp. Mat. Nauk 13(1958), 243.

8. V.D.Belousov, Uravnovešennye toždestva v kvazigruppah, Mat. Sb. 70(112)(1966),55-97.

9. V.D.Belousov, "Algebraičeskie seti i kvazigruppy", Štiinca Kišinev 1971.

10. V.D.Belousov, "n-arnye kvazigruppy", Štiinca, Kišinev 1972

11. V.D.Belousov, "Konfiguracii v algebraičeskih setyah", Štiinca, Kišinev 1979.

12. V.D.Belousov, E.S.Livšic, Funkcional'noe uravnenie obščei associativnosti na binarnyh kvazigruppah, Mat. Issled. IX 4(34)(1974), 5-22.

13. V.D.Belousov, E.S.Livšic, Uravnovešennye funkcional'nye uravneniya na kvazigruppah lyuboy arnosti, Mat. Issled. 43(1976), 9-29.

14. W.Blaschke, G.Bol, "Geometrie der Gewebe", Springer, Berlin 1938.

15. A.H.Clifford, G.B.Preston, "The Algebraic Theory of Semigroups", Amer. Math. Soc. Providence 1977.

16. J.Dénes, A.D.Keedwell, "Latin Squares and their Applications", Akadémiai Kiadó, Budapest 1974.

17. I.H.M.Etherington, Note on quasigroups and trees, Proc. Edinburgh Math. Soc. 13(1962-63), 219-222.

18. T.Evans, A note on the associative law, J. London Math. Soc. 25(1950), 196-201.

19. E.Falconer, Isotopy invariants in quasigroups, Trans. Amer. Math. Soc. 151(1970), 511-526.

20. E.Falconer, Isotopes of some special quasigroup varieties, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 22(1971), 73-79.

21. F.Harary, "Graph Theory", Addison-Wesley, Reading 1969.

22. J.Howie, S.Pride, The word problem for one relator semigroups, Preprint 1985.

23. E.R.van Kampen, On some lemmas in the theory of groups, Amer. J. Math. 55(1933), 268-273.

24-26. A.Krapež, On solving asystem of balanced functional equations on quasigroups I-III, Publ. Inst. Math. Beograd 23(37)(1978), 117-127 ; 25(39)(1979), 70-78 ; 26(40)(1979), 145-156.

27. A.Krapež, Strictly quadratic functional equations on quasigroups, Publ. Inst. Math. Beograd 29(43)(1981), 125-138.

28. S.Krstić, Embedding semigroups in groups: A geometrical approach, Publ. Inst. Math. Beograd 38(52)(1985).

29. S.Krstić, Dependence among quasi-identities axiomatizing the class of semigroups embeddable in a group, Preprint 1

30. A.G.Kuroš, "Obščaya algebra", Nauka, Moskva 1974.

31. J.Lambek, The immersibility of a semigroup into a group, Canad. J. Math. 3(1951), 34-43.

32. E.S.Livšic, Funkcional'nye uravneniya II roda na binarnyh kvazigruppah, Mat. Issled. X 2(36)(1975), 168-181.

33. E.S.Livšic, Uravnovešennye funkcional'nye uravneniya I roda na kvazigruppah proizvol'noy arnosti, Mat. Issled. 39(1976), 108-128.

34. R.C.Lyndon, P.E.Schupp, "Combinatorial Group Theory", Springer, Berlin 1977.

35. A.I.Mal'cev, On the immersion of an algebraic ring into a field, Math. Ann. 113(1937), 686-691.

36-37. A.I.Mal'cev, O vklyučenii associativnyh sistem v gruppy I,II, Mat. Sb. 6(1939), 331-336 ; 8(1940), 241-264

38. W.S.Massey, "Algebraic Topology: An Introduction", Harcou Brace & World, New York 1967.

39. S.Milić, On GD-groupoids with applications to n-ary quasigroups, Publ. Inst. Math. Beograd 13(27)(1972), 65-76.

40. H.Neumann, "Varieties of Groups", Springer, Berlin 1967.

41. F.Radó, Einbettung eines Halbgewebes in ein reguläres Gewebe und eines Halbgruppoids in eine Gruppe, Math. Z. 89(1965), 395-410.

42. J.H.Remmers, On the geometry of semigroup presentations, Advances in Math. 36(1980), 283-296.

43. A.Sade, Entropie demosienne de multigroupoïdes et de quasigroupes, Ann. Soc. Sci. Bruxelles 73(1959), 302-309.

44. A.Sade, Demosian systems of quasigroups, Amer. Math. Monthly 68(1961), 329-337.

45. J.Stillwell, "Classical Topology and Combinatorial Group Theory", Springer, Berlin 1980.

46. M.A.Taylor, A generalization of a theorem of Belousov, Bull. London Math. Soc. 10(1978), 285-286.

47. M.A.Taylor, On the generalized equations of associativity and bisymmetry, Aeq. Math. 17(1978), 154-163.

48. M.A.Taylor, On a problem of Krapež, Proc. Symp. on n-ary structures, Skopje 1982, 11-13.

49. M.A.Taylor, Some varieties of groupoids which consist of abelian group or group isotopes, Aeq. Math. 28(1985), 156-160.

50. H.Zieschang, E.Vogt, H.D.Coldewey, "Surfaces and Planar Discontinuous Groups", Springer, Berlin 1980.