

UNIVERZITET U BEOGRADU
Matematički fakultet

KORELACIJE PUTANJSKIH ELEMENATA
VIZUELNO DVOJNIH ZVEZDA

Diplomski master rad

Ivana Milić

Beograd,
januar 2010.

Zahvaljujem se mentoru, dr Zorici Cvetković, na pomoći, savetima i primedbama tokom izrade ovog master rada.

Veliku zahvalnost dugujem profesoru dr Mikeu Kuzmanskom i dr Radetu Pavloviću koji su detaljno pročitali rad i dali niz korisnih saveta i sugestija.

Posebno se zahvaljujem dr Slobodanu Ninkoviću i dr Zorici Cvetković koji su mi dali ideju za master rad i formulisali temu.

Neizmernu zahvalnost želim da uputim Luki, koji mi je pružio tehničku pomoć u radu i od koga sam tokom izrade master rada imala veliku podršku.

U Beogradu, januar 2010.
Ivana Milić

SADRŽAJ

1	Uvod.....	5
1.1	Zadatak i cilj.....	6
1.2	Sadržaj glava.....	6
2	Dvojne zvezde.....	8
3	Vizuelno dvojne zvezde.....	12
4	Prava orbita	15
5	Prividna orbita.....	17
1.1	Jednačina prividne orbite	20
6	Metode za izračunavanje orbita.....	21
7	Metoda Kovalskog i Kovalski-Olević.....	23
8	Račun putanjskih elemenata i njihovih grešaka	26
9	Izračunavanje koeficijenata korelacije putanjskih elemenata	28
10	Kondicion matrice	31
11	Korišćeni uzorak zvezda.....	33
11.1	WDS katalog	35
11.2	Četvrti katalog interferometrijskih merenja dvojnih zvezda	35
11.3	Šesti katalog orbita vizuelno dvojnih zvezda.....	36
12	Rezultati i diskusija.....	37
13	Analiza rezultata	56
14	Zaključak.....	59
15	Literatura	61
16	Dodatak.....	62

1 UVOD

Postojanje zvezda koje su toliko medjusobno blizu da se kreću jedna oko druge otkriveno je još polovinom 17. veka, ubrzo pošto je teleskop počeo da se koristi za astronomska posmatranja. Sam termin "dvojna zvezda" prvi put je upotrebljen 1802. godine (sistem od dve zvezde koje se kreću oko zajedničkog centra masa). Početkom 19. veka počinje razvoj nove oblasti astronomije koja izučava kretanje dvojnih zvezda. Od tog trenutka počinje masovno otkrivanje i praćenje kretanja ovih zvezda. Kada je posmatrački materijal postao dovoljno obiman, pojavili su se prvi katalozi dvojnih zvezda u kojima su sistematski beležene osnovne karakteristike i merenja dvojnih zvezda. Dvojnim zvezdama davana su imena po otkrivaču. Počelo je razvijanje i prvih metoda za određivanje putanjskih elemenata dvojnih zvezda. Izučavanje kretanja dvojnih zvezda je omogućilo da se učini dalji korak i neposredno da se dokaže da zakon gravitacije, koji objašnjava kretanja tela u Sunčevom sistemu, važi u daleko većim oblastima Svemira.

Veliki broj zvezda pripada dvojnim, trojnim ili višestrukim sistemima. U našoj Galaksiji i drugim galaksijama takve zvezde čine preko 60% svih zvezda. Uprkos svojoj prividnoj jednostavnosti, ovi sistemi su često veoma složeni.

Dvojne zvezde imaju veliki značaj u izučavanju problema dva tela, što predstavlja osnovni problem nebeske mehanike. Proučava-

nje dvojnih sistema je značajno, jer omogućava određivanje temperature, radijusa i drugih karakteristika zvezda.

1.1 Zadatak i cilj

Zadatak ovog rada je izračunavanje putanjskih elemenata Ω , ω , i , a , e , P , T vizuelno dvojnih zvezda i njihovih međusobnih koeficijenata korelacije.

Prvo treba izračunati koeficijente jednačine prividne orbite i ocene njihovih grešaka metodom najmanjih kvadrata (MNK). Zatim treba računati putanjske elemente (pravu orbitu) korišćenjem neke od razvijenih metoda i njihove ocene grešaka. Na kraju, primenom matematičke teorije izravnjanja po MNK, treba izračunati kovarijacionu i korelacionu matricu putanjskih elemenata.

Cilj ovog rada je ispitivanje zavisnosti koeficijenta korelacije putanjskih elemenata od dužine luka orbite pokrivenog merenjima, od merenja različite tačnosti i od broja merenja. Ovo omogućava da se dobije odgovor na pitanje kolika je pouzdanost dobijenih putanjskih elemenata.

Ispitivanja su radjena na uzorku od sedam dvojnih sistema: WDS 00155–1608, WDS 00247–2653, WDS 00321+6715, WDS 01350–2955, WDS 04041+3931, WDS 04184+2135 i WDS 04400+5328.

1.2 Sadržaj glava

U glavi Dvojne zvezde se govori o opštim karakteristikama dvojnih zvezda, o njihovim osnovnim podelama i o njihovom kretanju.

Vizuelno dvojne zvezde opisujemo u sledećoj glavi u kojoj se govori o osobinama tih zvezda. Takodje su navedeni neki osnovni podaci o elementima njihove orbite. Obraćena je pažnja na probleme na koje nailazimo prilikom izučavanja njihovog kretanja.

O elementima prave orbite detaljno se govori u glavi Prava orbita.

U glavi Prividna orbita se govori detaljno o elementima prividne orbite.

O istorijskom razvoju metoda, njihovim podelama, karakteristikama i sličnostima razmatrano je u glavi Metode za izračunavanje orbita.

Metoda Kovalskog i Kovalski-Olević se detaljno opisuju u istoimenoj glavi, s tim što je više pažnje posvećeno metodi Kovalskog, jer je ta metoda osnovna.

Način na koji su računati putanjski elementi i njihove greške u ovom radu je razmatran u glavi Račun putanjskih elemenata i njihovih grešaka.

U glavi Izračunavanje koeficijenata korelacije putanjskih elemenata se govori o izgledu i načinu formiranja matrice korelacije i njenom značaju za analizu vrednosti putanjskih elemenata vizuelno dvojnih zvezda.

O kondicionu matrice i načinu na koji se on računa u ovom radu, o njegovim primenama i značaju navedeno je u glavi Kondicion matrice.

O zvezdama koje su korišćene u ovom radu, njihovim karakteristikama i razlogu zašto su njihova merenja uzeta za proučavanje korelacije putanjskih elemenata se govori u glavi Korišćeni uzorak zvezda.

U glavi Rezultati i diskusija se govori o izračunatim putanjskim elementima gore navedenih zvezda, o njihovim greškama i o izračunatim korelacijama.

Glava Analiza rezultata govori o detaljnom tumačenju rezultata i njihovom značenju.

U poslednjoj glavi je iznesen zaključak i kratak pregled ovog rada.

2 DVOJNE ZVEZDE

Fizički sistemi od dve zvezde koje se kreću oko zajedničkog centra masa pod dejstvom uzajamne gravitacije su dvojne zvezde i kreću se saglasno Keplerovim zakonima. Ako je broj zvezda sistema tri ili više onda su to višestruki zvezdani sistemi. Proučavanje dvojnih zvezda je izuzetno značajno jer omogućava određivanje važnih zvezdanih parametara kao što su: mase, daljine, radijusi, temperature i dr. Zvezde ovih sistema (komponente) imaju isto poreklo, tj. istu starost, pa su značajne i za proučavanje evolucije zvezda. Osim fizički dvojnih često se srećemo sa optički dvojnim zvezdama. To su slučajevi kada se dve zvezde vide približno u istom pravcu, a nemaju ništa zajedničko. Odgovor da li je zvezda fizički ili optički dvojna dobija se tek nakon praćenja kretanja njenih komponenti. Kod fizičkih parova komponente menjaju, brže ili sporije, međusobni položaj usled orbitalnog kretanja, dok kod optičkih parova međusobni položaj zvezda se gotovo ne menja (promena je samo posledica sopstvenih kretanja). Komponente fizičkih parova, zavisno od međusobnog rastojanja, detektuju se različitim posmatračkim tehnikama. Prema uzajamnom položaju komponenti u dvojnog sistema i načinu detektovanja dvojne zvezde se mogu podeliti u sledeće grupe: vizuelno dvojne, spektroskopski dvojne, eklipsno dvojne i tesno dvojne zvezde.

Ako se komponente dvojnog sistema nalaze na dovoljnom rastojanju da se mogu teleskopom videti odvojeno ili da se komponente mogu razdvojiti uz pomoć dodatne opreme, takav sistem nazivamo vizuelno dvojnim. Ova vrsta dvojnih je prvo otkrivena, pa se

one najduže posmatraju i izučavaju. Parametri orbitalnog kretanja određuju se na osnovu njihove relativne promene položaja. Pošto je zadatak ovog rada vezan za ispitivanja u oblasti vizuelno dvojnih zvezda, njima će biti posvećeno više pažnje u narednim glavama.

Dvojnost zvezda kod kojih su komponente na manjim rastojanjima, pa se ne mogu razdvojiti teleskopima i različitom dodatnom opremom, detektuje se drugim tehnikama: spektroskopski ili fotometrijski.

Spektroskopski dvojne otkrivaju se na osnovu periodičnog pomeranja spektralnih linija u spektru date zvezde, što je posledica orbitalnog kretanja. Iz merenja Doplerovog pomaka linije u spektru zvezde dobija se radijalna brzina u odnosu na centar masa kojom se komponenta udaljava od posmatrača (crveni pomak) ili približava ka posmatraču (plavi pomak). Iz promena krive radijalne brzine određuju se parametri orbitalnog kretanja, među kojima su mase komponenti (i masa sistema) pomnožene sa $\sin^3 i$. U slučajevima kada je razlika magnituda komponenti mala dobija se spektar obe komponente. Kada je jedna komponenta znatno sjajnija od druge, dobija se samo spektar sjajnije zvezde (spektar manje sjajne zvezde se gubi u spektru sjajnije zvezde). Ovaj tip je poznat kao jednolinijska spektroskopski dvojna zvezda.

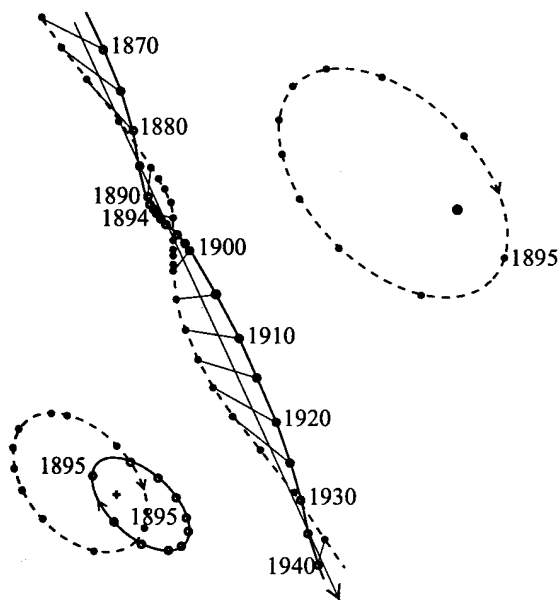
Fotometrijski dvojne mogu se detektovati na osnovu pravilnih promena sjaja u toku vremena, što je posledica orbitalnog kretanja komponenti. Položaj orbitalne ravni u odnosu na posmatrača je takav da dolazi do periodičnog pomračenja komponenti, tj. do promene sjaja sistema. Kada sjajnija komponenta pomračuje manje sjajnu dobijaju se manji minimumi krive sjaja i obrnuto, kada dobijamo dublje minimume. Iz proučavanje krivih sjaja mogu se dobiti parametri orbitalnog kretanja, među kojima su radijusi komponenti i odnos njihovih efektivnih temperatura.

Vizuelno dvojne zvezde imaju udaljenije komponente koje se sporije kreću jedna u odnosu na drugu, nego što je to slučaj kod spektroskopski i eklipsno dvojnih zvezda. Danas imamo savremenije tehnike posmatranja kojima možemo da razdvojimo dosta bliske komponente, pa određeni broj sistema može da se detektuje i izučava i kao vizuelno i kao spektroskopski i kao eklipsno dvojne zvezde.

Posebnu i zbog mnogih osobina značajnu grupu dvojnih zvezda čine tesno dvojni sistemi. Za razliku od onih dvojnih zvezda kod kojih se komponente nalaze na znatnom rastojanju, i ne utiču međusobno na strukturu i evoluciju, kod tesno dvojnih sistema rastojanje među komponentama je uporedivo sa njihovim dimenzijama, pa dolazi do razmene materije među komponentama što menja tok

njihove evolucije. Zbog blizine komponenata, pomračenja su vrlo verovatna, pa se tesno dvojni sistemi otkrivaju najčešće fotometrijski, tj. analizom krivih sjaja. Proučavanje tesno dvojnih sistema omogućilo je da se objasne mnogi, do tada nerešeni, astrofizički problemi, a naročito faze u evoluciji zvezda.

U literaturi se mogu naći još i polarimetrijski dvojne zvezde i astrometrijski dvojne (Grin, 1998). Kod polarimetrijski dvojnih zvezda dvojna priroda se utvrđuje iz periodične promene parametara polarizacije, a kod astrometrijski dvojnih periodične varijacije sopstvenog kretanja ukazuju na dvojni prirodu zvezde.



Slika 1: Kretanje komponenata dvojnog sistema i njegovog centra masa.

Komponente dvojnog sistema kreću se oko zajedničkog centra masa po eliptičnim putanjama saglasno Keplerovim zakonima (Slika 1, levo dole). Obe zvezde kreću se po elipsama sa istim ekscentricitetom i opišu elipse za isto vreme (isti orbitalni period P). Velike poluose elipsi a_1 i a_2 obrnuto su proporcionalne masama zvezda (zakon težišta):

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\mathcal{M}_2}{\mathcal{M}_1} . \quad (1)$$

Orbita jedne komponente u odnosu na drugu takodje predstavlja elipsu i ova orbita se naziva relativna orbita (Slika 1, desno gore). U

kretanju komponenata se uočava periodično odstupanje od pravolinijske trajektorije duž koje se kreće samo centar masa (Slika 1, u sredini). Velika poluosa relativne orbite a jednaka je zbiru velikih poluosa orbita oko zajedničkog centra masa sistema

$$a = a_1 + a_2 \quad . \quad (2)$$

Opšti oblik trećeg Keplerovog zakona koji opisuje kretanje dvojnih zvezda glasi:

$$\frac{a^3}{P^2} = \frac{G}{4\pi^2}(\mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2), \quad (3)$$

iz koga se može izračunati zbir masa zvezda u dvojnem sistemu, kada se odrede orbitalni elementi a i P . Ako se a izrazi u astronomskim jedinicama, period P u godinama, a mase komponenata u jedinicama mase Sunca, tada je faktor $G/4\pi^2 = 1$. Pojedinačne mase komponenata mogu se izračunati koristeći zakon težišta, ako se iz merenja odredi odnos poluosa a_1/a_2 orbita zvezda oko centra masa.

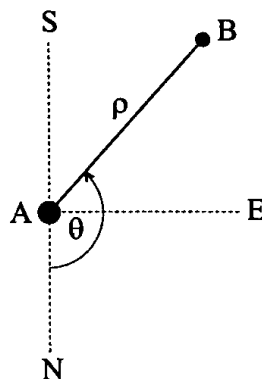
Eddington (Eddington) je još 1924. u okviru teorije unutrašnje strukture zvezda predvideo vezu između mase zvezde i njene luminoznosti. Na osnovu posmatranja, u početku samo vizuelno dvojnih zvezda i određivanja masa njihovih komponenata, izvedena je empirijska relacija $\mathcal{M} - L$ ili $\mathcal{M} - M_{bol}$ pod imenom relacija masa - sjaj. Iako važi samo za zvezde sa glavnog niza, predstavlja jedan od najznačajnijih rezultata proučavanja dvojnih zvezda. Izučavanje orbita dvojnih zvezda dopušta određivanje mase i dinamičke paralakse.

3 VIZUELNO DVOJNE ZVEZDE

Vizuelno dvojne zvezde se teleskopom vide razdvojene. Njihovo orbitalno kretanje može da se izučava na osnovu relativne promene položaja komponenata. Merenja vizuelno dvojnih zvezda sakupljaju se više od 200 godina. Naravno, tehnike merenja su usavršavane, usled čega se dobijaju podaci sa sve većom tačnošću. Mikrometerska merenja i fotografske ploče zamenile su CCD kamere, adaptivna optika i različite vrste interferometrije (vizuelna, dugobazična, spekl i dr.). Merenja se čuvaju u međunarodnoj bazi podataka u Vašingtonu na Naval opservatoriji. Osnovni podaci: položaji za epohu J2000.0, oznaka otkrivača, epoha, pozicioni ugao, uglovno rastojanje komponenata, prividne veličine, spektralni tip, sopstvena kretanja, broj iz BD kataloga i napomene za komponente više od 100 000 sistema dati su u elektronskom obliku u Vašingtonskom katalogu dvojnih zvezda (Mason et al. 2006, The Washington Visual Double Star Catalogue, WDS). Novija, interferometrijska merenja, objavljuju se u posebnim katalozima i najnoviji je Četvrti katalog interferometrijskih merenja dvojnih zvezda (Hartkopf et al. 2006, Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars, INT4). Izračunavanje orbita tj. putanjskih elemenata komponente manjeg sjaja (sekundarne) oko sjajnije komponente (primarne) važno je zbog izračunavanja zvezdanih masa i daljina. Do sada orbite su izračunate za relativno mali broj dvojnih zvezda. One su objavljene u Šestom katalogu orbita vizuelno dvojnih zvezda (Hartkopf and Mason, 2006, Sixth Catalog of Orbits Visual Binary Stars). Ovaj katalog uključuje oko

2 000 orbita za približno 1900 sistema. Mnoge orbite su određene ili iz starih merenja niske preciznosti ili iz merenja koja pokrivaju kratak luk na orbiti. Pouzdanost takvih orbita je niska, pa novija i tačnija merenja omogućavaju popravljjanje putanjskih elemenata. Samo oko 3% orbita nosi oznaku "definitivna". U ovoj bazi podataka može se naći katalog višestrukih zvezda, identifikovane optički dvojnje ili samo kandidati, katalog razlika prividnih veličina komponenti parova i još niz drugih korisnih informacija.

Da bi odredili orbitu dvojnog sistema potrebno je pratiti relativnu promenu položaja komponenta u toku vremena, tj. meriti uglovno rastojanje (separacija) između komponenta ρ i pozicioni ugao $\theta = \angle NAB$ (Vukićević-Karabin i Atanacković-Vukmanović, 2004). Na Slici 2. je prikazan dvojni sistem onako kako ga vidi posmatrač.



Slika 2: Uglovno rastojanje između komponenta ρ i pozicioni ugao θ .

Referentna ravan putanje je ravan kroz A upravna na vizuru. U pravcu AN je izabrana x -osa i y -osa je u pravcu AE. Zbog orbitalnog kretanja dvojnih zvezda, separacija i pozicioni ugao se menjaju u toku vremena. Promena pozicionog ugla je monotona. Ako pozicioni ugao raste sa vremenom onda je orbitalno kretanje direktno, a ako pozicioni ugao opada sa vremenom, kretanje je retrogradno. Na osnovu svega navedenog položaj sekundarne zvezde u odnosu na primarnu je:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta, \\ y &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \tag{4}$$

Problem koji se rešava kod ovih zvezda jeste određivanje orbite tj. orbitalnih elemenata. Kod dugoperiodičnih dvojnih zvezda

računanje orbite je često nepouzđano, jer nema dovoljno posmatranja koja bi pokrila veći deo orbite i time obezbedila dovoljnu tačnost izračunate orbite.

Uticaj precesije, kod vizuelno dvojnih zvezda, raste proporcionalno vremenu i može znatno da promeni pozicioni ugao. Prema tome pozicione uglove uvek treba svesti na neku standardnu epohu. Neka su α i δ koordinate dvojne zvezde. Ako θ i θ_0 označavaju pozicione uglove za epohe t i t_0 , onda važi

$$\theta = \theta_0 + 0.00557 \sin \alpha \sec \delta (t - t_0), \quad (5)$$

gde su t i t_0 izraženi u godinama.

4 PRAVA ORBITA

U nebeskoj mehanici je dokazano da je trajektorija sekundarne komponente B elipsa sa primarnom komponentom A u jednoj od žiža. Neka elipsa sa centrom u O i jednom od žiža A predstavlja orbitu sistema kao na Slici 3. Periastron P je tačka na orbiti najbliža tački A i apoastron je najviše udaljena od tačke A. Elementi prave orbite su sledeći :

- period jednog obilaženja sekundarne komponente oko primarne P koji se izražava u godinama,
- srednje godišnje kretanje $n = \frac{360^\circ}{P}$ izraženo u stepenima ili $\mu = \frac{2\pi}{P}$ izraženo u radijanima,
- epoha prolaska sekundarne zvezde kroz periastron T , koja se izražava u Beselovim godinama,
- ekscentričnost orbite e ,
- velika poluosa a , izražena u uglovnoj meri (u lučnim sekundama) ili astronomskim jedinicama (ako znamo paralaksu i podelimo a , koje je izraženo u lučnim sekundama, paralaksom).

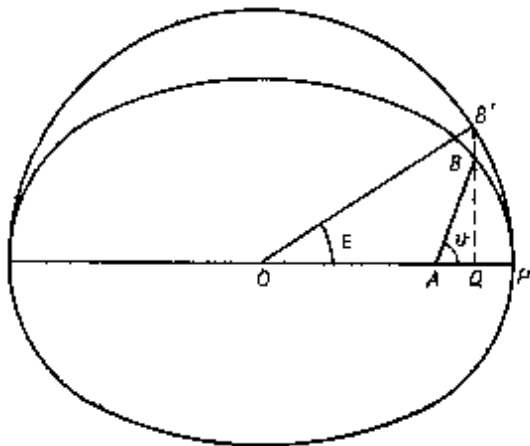
Odredimo položaj sekundarne komponente B na njenoj orbiti kao funkciju vremena. Taj položaj se određuje sa dva parametra: radijus-vektorom $AB=r$ i uglom $\nu=PAB$, koji se naziva prava anomalija. Konstruišimo krug radijusa OP . Taj krug se naziva "glavni krug". Povucimo normalu iz tačke B na radijus OP . Normala seče OP u tački Q. Neka je B' projekcija tačke B na glavni krug. Ugao $POB'=E$ se naziva ekscentrična anomalija. Izaberimo pravac vektora \vec{OP} od O ka P i dobićemo:

$$\vec{AQ}=\vec{AO} + \vec{OQ} = -ae + a \cos E = r \cos \nu, \quad (6)$$

$$QB = QB'(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} = a(1 - e^2)^{\frac{1}{2}} \sin E = r \sin \nu. \quad (7)$$

Iz poslednje dve formule nalazimo

$$r = a(1 - e^2)/(1 + e \cos \nu). \quad (8)$$



Slika 3: Osnovni parametri elipse.

Ostaje da se nađe veza između prave anomalije ν i vremena t . To je moguće uraditi koristeći ekscentričnu anomaliju E . Iz drugog Keplerovog zakona dobijamo:

$$(r^2/2)d\nu/dt = c, \quad (9)$$

gde je c konstanta površine.
S druge strane,

$$\operatorname{tg}(\nu/2) = [(1 + e)/(1 - e)]^{1/2} \operatorname{tg}(E/2), \quad (10)$$

što posle poznatih transformacija dovodi do Keplerove jednačine

$$E - e \sin E = \mu(t - T) = M. \quad (11)$$

Usvajamo da veličinu M izražavamo u stepenima i tada imamo

$$M = n(t - T). \quad (12)$$

Veličina M se naziva srednja anomalija. Ona je proporcionalna vremenu koje se računa od trenutka prolaska kroz periastron i određuje srednji položaj komponente, a veličina ν karakteriše pravi položaj komponente.

5 PRIVIDNA ORBITA

Iz merenih vrednosti ρ i θ prvo se određuje prividna orbita. Prividna orbita je ortogonalna projekcija prave orbite na ravan, normalnu na pravac vizure. Kako je ortogonalna projekcija konusnog preseka, takodje konusni presek, tako je prividna orbita konusni presek. Projekcija svakog dijametra prave orbite je dijametar prividne orbite. Centar prividne orbite je projekcija centra prave orbite, ali primarna zvezda ne mora biti u žiži prividne orbite. Na taj način, spojivši centar prividne orbite sa primarnom zvezdom, dobićemo projekciju velike ose prave orbite, a samim tim i projekciju periastrona. U tom slučaju, kada je prava orbita elipsa, prividna orbita je takodje elipsa. Da bi izračunali dinamičke elemente, neophodno je izračunati geometrijske elemente, koji određuju orijentaciju prave orbite u odnosu na ravan prividne orbite. Primenuju se dva sistema geometrijskih elemenata: elementi Kembela (Campbell) i Til-Inesa (Thile-Innes).

Elementi Kembela

Nagib orbite i je ugao između ravni prave i prividne orbite. On uzima vrednosti iz intervala $(0^\circ, 180^\circ)$. Ako je nagib manji od 90° kretanje je direktno.

Longituda čvora Ω određuje položaj linije NN' preseka ravni prave i prividne orbite (Slika 4.) i računa se od pravca ka severnom polu. Linija NN' se naziva linija čvorova. Linija čvorova seče elipsu u dvema tačkama - uzlazni i silazni čvor.

Longituda periastrona ω je ugao izmedju linije čvorova i pravca od primarne zvezde ka periastronu. Meri se u ravni prave orbite u pravcu kretanja sekundarne komponente.

Dinamički elementi su P , n , T , e i a .

Odredjivanje orbite dvojne zvezde se sastoji u nalaženju njenih elemenata polazeći od datih posmatranja. Saglasno prethodnim definicijama i na osnovu Slike 4. imamo:

$$\begin{aligned} AB &= \rho, AB' = r, \\ PAB' &= \nu, NAP = \omega, BAN = \theta - \Omega. \end{aligned} \quad (13)$$

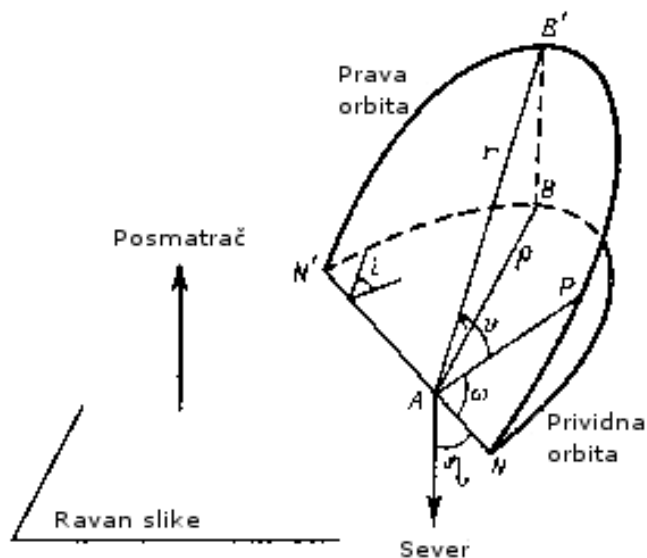
Posle elementarnih transformacija dobićemo osnovne jednačine:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg}(\theta - \Omega) &= \operatorname{tg}(\nu + \omega) \cos i, \\ \rho &= r \cos(\nu + \omega) / \cos(\theta - \Omega) = \\ &= a(1 - e^2) \cos(\nu + \omega) / (1 + e \cos \nu) \cos(\theta - \Omega), \\ M &= n(t - T). \end{aligned} \quad (14)$$

Ovim jednačinama možemo dodati jednačinu koja određuje položaj sekundarne komponente u odnosu na pravac posmatranja:

$$BB' = z = r \sin(\nu + \omega) \sin i, \quad (15)$$

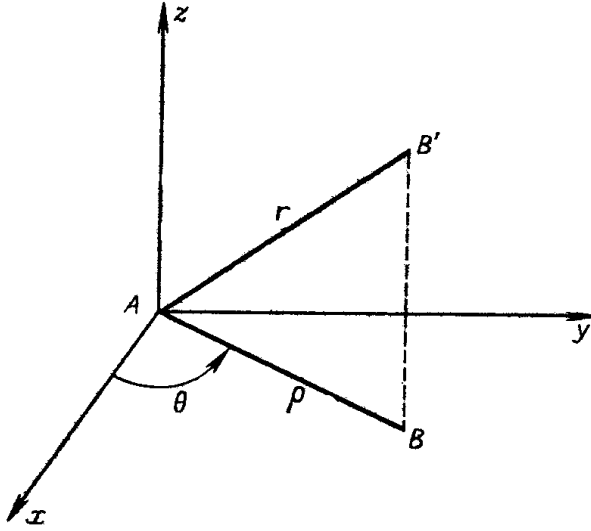
koja je značajna kada se razmatraju radijalne brzine.



Slika 4: Prividna i prava orbita.

Elementi Til - Inesa

Neka je u pravouglom koordinatnom sistemu primarna zvezda A u koordinatnom početku. Osa Ax je usmerena ka severnom polu, osa Ay u smeru direktnog kretanja i osa Az je usmerena ka posmatraču. Sekundarna zvezda B' se projektuje na nebu u tačku B kao na Slici 5.



Slika 5: Pravougli koordinatni sistem sa koordinatnim početkom u primarnoj zvezdi A.

Tada imamo da je $AB = \rho$, $\angle xAB = \theta$, $AB' = r$. Koordinate tačke B su $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$, $z = r \sin(\nu + \omega) \sin i$. Posle elementarnih transformacija i uvođenja redukovanih pravougljih koordinata $X = \frac{r}{a} \cos \nu$, $Y = \frac{r}{a} \sin \nu$ dobija se:

$$x = AX + FY, \quad y = BX + GY, \quad z = CX + HY, \quad (16)$$

gde je:

$$\begin{aligned} A &= a(\cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i), \\ B &= a(\cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i), \\ F &= a(-\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i), \\ G &= a(-\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i), \\ C &= a \sin \omega \sin i, \\ H &= a \cos \omega \sin i. \end{aligned} \quad (17)$$

Konstante A, B, F, G, C i H se nazivaju elementi Til - Inesa. Oni određuju položaj prave orbite i njenu veličinu, kao i elementi Kem-bela. Jednačina (16) služi za prelaz sa prividne na pravu orbitu. Kada su veličine X i Y poznate, lako je naći jednačine:

$$\rho = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad \theta = \text{arctg}(y/x) \quad (18)$$

iz kojih računamo efemeride sekundarne zvezde. Takodje je važno videti formulu za dvostruku sektorsku brzinu prividne orbite. Ako tu veličinu označimo sa c , znači da je $c = C \cos i$, gde je C dvostruka sektorska brzina kretanja po pravoj orbiti. S obzirom da je $C = 2\pi ab/P = \mu a^2(1 - e)^{1/2}$ i uzimajući u obzir prethodne formule, dobija se $c = \mu(AG - BF)(1 - e^2)^{1/2}$.

5.1 Jednačina prividne orbite

Vreme obilaska prividne orbite je jednako vremenu obilaska prave orbite. Prema tome, upoređivanje trenutaka kada pozicioni ugao ima jednake vrednosti, daje mogućnost procene P . Taj način primenjujemo samo za dvojne zvezde sa malim orbitalnim periodom. Ekscentricitet e prave orbite jeste odnos rastojanja između centra i fokusa prema velikoj poluosi a . U metodama kojim računamo prividnu orbitu (zovu se geometrijske metode) svi putanjski elementi, osim P i T , dobijaju se iz računate prividne orbite. Iz posmatranja dobijamo ρ_i i θ_i za određene trenutke t_i gde je $i = 1, 2, \dots, n$, a n je ukupan broj posmatranja. Po formuli (4) računamo niz uredjenih parova koordinata $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)$ kroz koje provlačimo prividnu orbitu. Kako je prividna orbita elipsa, nju dobijamo rešavanjem jednačine:

$$a_{20}x^2 + a_{02}y^2 + 2a_{11}xy + 2a_{10}x + 2a_{01}y - 1 = 0, \quad (19)$$

pod uslovom da slobodni član bude različit od nule jer prividna orbita ne prolazi kroz primarnu zvezdu. Za nalaženje pet koeficijenata jednačine (19) pomoću MNK možemo iskoristiti ceo niz uredjenih parova koordinata.

6 METODE ZA IZRAČUNAVANJE ORBITA

Razvijeno je mnogo metoda za izračunavanje orbita vizuelno dvojnih zvezda. Prve metode za određivanje orbitalnih elemenata bile su grafičke (Subbotin 1968), dok je prvu analitičku metodu predložio Kovalski (Ковальский) 1872. godine. Sve analitičke metode se mogu podeliti na dve klase: geometrijske i dinamičke. Prvu geometrijsku metodu je razvio Džon Heršel (John Herschel) 1833. godine. Kod geometrijskih metoda, najpre se određuju pet geometrijskih elemenata koji definišu prividnu orbitu, a zatim se određuju period P i trenutak prolaska kroz periastron T na osnovu tih elemenata, ali bez uključivanja svojstva kretanja, tj. drugog Keplerovog zakona. Ovo je osnovni nedostatak ovih metoda. Kod dinamičkih metoda se ne određuje prvo prividna orbita, kao što je to slučaj kod geometrijskih metoda, već se odmah računaju svi orbitalni elementi. U ovo računanje se uključuje drugi Keplerov zakon. Glavni nedostatak dinamičke metode je potreba poznavanja sektorske brzine. Vremenom su počele da se razvijaju numeričke metode. U današnje vreme koristi se nekoliko različitih metoda za određivanje orbitalnih elemenata vizuelno dvojnih zvezda. Sve one imaju neke svoje specifičnosti zbog kojih efikasnost i pouzdanost svake od metoda varira od slučaja do slučaja (Novaković, 2006).

Metoda Tila (Thiele) :

Metoda Tila, koja je nastala 1806. godine, daje tačnije rezultate

od metode Heršela. Da bi izračunali orbitalne elemente neophodno je izmeriti koordinate dovoljnog broja tačaka (ρ, θ) i rešiti odgovarajući sistem linearnih jednačina.

Metoda Til-Ines-van den Bosa (Thiele-Innes-van den Bos) :

Ova metoda (Кыто, 1981) podrazumeva poznavanje tri normalna mesta i konstantu površine $(t_i, \theta_i, \rho_i; 2C)$, $i = 1, 2, 3$. Ona je specijalni slučaj Dokobove metode.

Metoda Dokoba (Docobo) :

Za određivanje orbita vizuelno dvojnih zvezda u ovoj metodi (Docobo, 1985) koriste se tri izabrane tačke kroz koje orbita prolazi. Račun je zasnovan na preslikavanju intervala $(0, 2\pi)$ na familiju orbita koje prolaze kroz te tri tačke. Njene osnovne prednosti leže u činjenici da nije potrebno prethodno određivanje konstante površine. Tri tačke kroz koje će orbita prolaziti mogu da se izaberu iz posmatranja, ali to nije neophodno jer se mogu uzeti i normalna mesta više posmatranja.

Metoda Purbea :

Na osnovu načina određivanja orbitalnih elemenata vizuelno dvojnih zvezda ova metoda (Pourbaix, 1994) se svrstava u numeričke metode. Sastoji se od dva glavna dela, tj. dva numerička postupka za određivanje minimuma sume odstupanja $O - C$ u funkciji od sedam orbitalnih elemenata. Kao ulazni podatak kod ove metode unose se procenjene granice za period (P_{min}, P_{max}) koje se određuju na osnovu promene pozicionog ugla θ u intervalu vremena u kom postoje posmatranja dvojne zvezde čija se orbita određuje.

U centru CHARA (Center for High Angular Resolution Astronomy) je razvijen algoritam za nalaženje orbitalnih elemenata čiji je ulaz P , T i e .

7 METODA KOVALSKOG I KOVALSKI-OLEVIĆ

Metoda Kovalskog :

Ova metoda je bazirana na računanju pet putanjskih elemenata (Ω , i , ω , e , a) iz pet koeficijenata a_{20} , a_{02} , a_{11} , a_{10} , a_{01} jednačine prividne orbite (19). Dva dinamička elementa P i T se računaju iz Keplerove jednačine (11). Često se P i T ne mogu najbolje uskladiti sa već dobijenom elipsom (tj. sa ostalim orbitalnim elementima), jer se u njihovom izračunavanju ne koristi drugi Keplerov zakon. Da bi dobili pouzdane putanjske elemente merenja treba da pokrivaju veliki deo elipse. Kod kratkih lukova često nije moguće ni dobiti elipsu iz postojećih posmatranja. Nizom jednostavnih transformacija (Subbotin, 1968) i uvođenjem smena $L = a_{02} + a_{01}^2$, $M = a_{20} + a_{10}^2$ i $N = a_{11} + a_{01}a_{10}$, radi preglednijeg pisanja formula, računaju se putanjski elementi. Prvo se računa Ω :

$$\operatorname{tg}(2\Omega) = \frac{2N}{M - L}. \quad (20)$$

Sada je lako naći i :

$$\operatorname{tg}^2 i = \frac{(L - M) \cos 2\Omega - 2N \sin 2\Omega}{L \sin^2 \Omega + M \cos^2 \Omega + N \sin 2\Omega}. \quad (21)$$

Iz sledeće formule nalazimo p :

$$2p^{-2} = L + M - p^{-2}\text{tg}^2 i. \quad (22)$$

Ugao i jednoznačno odredjujemo uslovom :

- ako pozicioni ugao θ raste onda je $0^\circ \leq i < 90^\circ$,
- ako pozicioni ugao θ opada onda je $90^\circ < i \leq 180^\circ$.

Na taj način smo našli elemente Ω , i , p . Jednačine, koje možemo napisati u obliku:

$$\begin{aligned} ep^{-1} \sin \omega &= (a_{01} \cos \Omega - a_{10} \sin \Omega) \cos i, \\ ep^{-1} \cos \omega &= a_{01} \sin \Omega + a_{10} \cos \Omega, \end{aligned} \quad (23)$$

omogućavaju pronalaženje e i ω . Da bi izračunali P i T , uzmimo nekoliko najboljih posmatranja pozicionih uglova (t_k, θ_k) . Iz jednačine

$$\text{tg}(\nu_k + \omega) = \text{tg}(\theta_k - \Omega) \sec i, \quad (24)$$

gde se vrednosti uglova $\nu_k + \omega$ i $\theta_k - \Omega$ nalaze uvek u jednom te istom kvadrantu, izračunaćemo vrednosti prave anomalije ν_k . To omogućava da nadjemo za te trenutke ekscentričnu i srednju anomaliju:

$$\begin{aligned} \text{tg}\left(\frac{E_k}{2}\right) &= \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} \text{tg}\left(\frac{\nu_k}{2}\right), \\ M_k &= E_k - e \sin E_k. \end{aligned} \quad (25)$$

Svako posmatranje nam daje mogućnost da napišemo uslovnu jednačinu $nt_k - nT = M_k$. Rešenje te jednačine daje $n = 360^\circ/P$ i nT . Za računanje poslednjeg elementa, a to je velika poluosa a , moglo bi se poslužiti jednačinom $p = a(1 - e^2)$. No za dobijanje verovatnije vrednosti tog veoma važnog elementa se postupa drugačije. Izaberimo niz posmatranja t_k, ρ_k, θ_k koja daju verovatne vrednosti rastojanja ρ_k . Izračunavši po formulama $\rho \sin(\theta - \Omega) = r \sin(\omega + \nu) \cos i$, $\rho \cos(\theta - \Omega) = r \cos(\omega + \nu)$ vrednosti orbitalnih koordinata r_k, ν_k dobićemo niz vrednosti velike poluose

$$a_k = r_k(1 + e \cos \nu_k)(1 - e^2)^{-1} \quad (26)$$

čija srednja vrednost daje najbolju ocenu za veliku poluosu elipse.

Metoda Kovalski-Olević :

U cilju da omogući računanje putanjskih elemenata gde posmatranja pokrivaju kratak luk elipse, Olević (Čatović & Olević 1992, Olević & Cvetković 2004) je modifikovao metodu Kovalskog tako što je merenjima dodao fiktivna posmatranja. Kratak opis ove metode se sastoji u kombinovanju sledeće dve jednačine :

$$F(A, x) = A_1x_i^2 + A_2y_i^2 + 2A_3x_iy_i + 2A_4x_i + 2A_5y_i - 1 = 0, \quad (27)$$

$$F'(A, x') = A_1x_l'^2 + A_2y_l'^2 + 2A_3x_l'y_l' + 2A_4x_l' + 2A_5y_l' - 1 = 0, \quad (28)$$

gde je $x_l' = \rho_l' \cos \theta_l'$, $y_l' = \rho_l' \sin \theta_l'$.

Na delu putanje sekundarne zvezde oko glavne zvezde, koji nije pokriven posmatranjima, postavimo nekoliko "fiktivnih tačaka" tako što fiksiramo pozicioni ugao θ_l' , a uglovno rastojanje ρ_l' variramo u unapred zadatim granicama sa proizvoljnim koracima. Na taj način kroz postojeća posmatranja proveravamo veliki broj elipsi (ne samo jednu kao u metodi Kovalskog) i zatim odredjujemo period P i trenutak prolaska kroz periastron T , tako da suma odstupanja $O - C$ bude minimalna. Za najbolje rešenje uzimaju se putanjski elementi za koje funkcija D ima minimalnu vrednost. Funkcija D je definisana sa :

$$D = \left(\sum_1^n \omega_i [(x_i - x_{ci})^2 + (y_i - y_{ci})^2] \right) / \sum_1^n \omega_i \quad (29)$$

gde su x_i, y_i pravougke koordinate dobijene iz posmatranja i x_{ci}, y_{ci} računate pravougke koordinate, a ω_i su težine posmatranja. Fiktivne tačke produžuju luk iz koga se odredjuje elipsa, pa se zato elipsa uvek može dobiti. Granice koje zadajemo za uglovno rastojanje ρ , kod fiktivnih tačaka, odredjujemo tako što postojeća posmatranja predstavimo u pravouglom koordinatnom sistemu Oxy i procenimo kolika bi mogla biti minimalna i maksimalna vrednost za ρ , za neku fiksiranu vrednost θ . Dobro zadavanje ovih granica za uglovno rastojanje ρ , od velikog je značaja za odredjivanje putanjskih elemenata vizuelno dvojnih zvezda. U ovoj metodi je uspostavljena bolja veza izmedju geometrijskih parametara elipse (prvi Keplerov zakon) i dinamičkih parametara Keplerove jednačine o zakonu površina (drugi Keplerov zakon).

8 RAČUN PUTANJSKIH ELEMENATA I NJIHOVIH GREŠAKA

Iz matematičke teorije o MNK znamo da najpre treba formirati jednačine veza. Jednačine popravaka linearnog modela se mogu zapisati u obliku:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f} \quad (30)$$

gde je \mathbf{x} vektor nepoznatih parametara $[x_1, x_2, \dots, x_m]^T$ dimenzije $m \times 1$, \mathbf{f} vektor slobodnih članova $[f_1, f_2, \dots, f_n]^T$ dimenzije $n \times 1$, \mathbf{A} (matrica geometrije opažanja) je matrica koeficijenata linearnog modela dimenzije $n \times m$, gde je m broj nepoznatih parametara i n broj merenja. Ocene nepoznatih parametara vektora \mathbf{x} se dobijaju iz sistema normalnih jednačina

$$\mathbf{N}\mathbf{x} + \mathbf{n} = 0, \quad (31)$$

pri čemu je $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$, gde je \mathbf{P} matrica težina merenja dimenzije $n \times n$, a $\mathbf{n} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{f}$ je vektor slobodnih članova normalnih jednačina. Matrica \mathbf{N}^{-1} označava se sa $\mathbf{Q}_{\mathbf{x}}$ i ona se zove kofaktorska matrica parametara dimenzije $m \times m$. Da bi dobili kovarijacionu matricu parametara, treba da izračunamo

$$\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{f}^T \mathbf{P} \mathbf{f} - \mathbf{x}^T \mathbf{N} \mathbf{x}. \quad (32)$$

Disperzioni koeficijent ocenjujemo iz $\sigma^2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v} / (n-u)$ sa $f = n-u$ stepeni slobode, gde je u broj nepoznatih. Kovarijaciona matrica parametara je

$$\mathbf{K}_X = \sigma^2 \mathbf{Q}_X \quad (33)$$

dimenzije $m \times m$. Standardne greške nepoznatih koeficijenata jednačine prividne orbite se dobijaju iz dijagonalnih elemenata kovarijacione matrice parametara po formuli $(K_{ii})^{1/2}$. Vandijagonalni elementi K_{ij} predstavljaju kovarijacije između i -tog i j -tog parametra. Korelaciona matrica \mathbf{C} se formira iz kovarijacione matrice. Elementi ove matrice su

$$C_{ij} = K_{ij} / (K_{ii} K_{jj})^{1/2}. \quad (34)$$

Važi da je $|C_{ij}| \leq 1$ za $\forall(i, j)$.

Prvo smo pomoću MNK iz merenih vrednosti ρ i θ dobili koeficijente jednačine prividne orbite (19) i njihove greške na upravo opisani način. U ovom slučaju matrica \mathbf{A} će biti dimenzije $(n \times 5)$.

Zatim smo izračunali putanjske elemente po metodi Kovalski-Olević uz pomoć jednačina (21) - (27). Greške pet putanjskih elemenata smo dobili iz totalnog diferencijala formula za putanjske elemente i grešaka parametara a_{20} , a_{02} , a_{11} , a_{10} i a_{01} .

Greške za putanjske elemente, osim za elemente T i P se mogu dobiti na upravo pomenuti način. S obzirom da je $M = n(t - T)$, rešavanjem jednačine

$$M_i = nt_i - nT \quad (35)$$

pomoću MNK dobićemo n , T , ali i P , jer je $n = \frac{360^\circ}{P}$. Time smo dobili nT , n i njihove greške. Nismo dobili grešku za T , jer su n i T zavisne veličine. Da bi našli grešku za T treba da rešavamo jednačinu (35) napisanu u linearnom obliku $t_i = \frac{P}{2\pi} M_i + T$ pomoću MNK.

9 IZRAČUNAVANJE KOEFICIJENATA KORELACIJE PUTANJSKIH ELEMENATA

Naš zadatak je bio da odredimo korelacije putanjskih elemenata vizuelno dvojnih zvezda. To znači da prvo treba izračunati kovarijacionu matricu putanjskih elemenata, a zatim koeficijente korelacije putanjskih elemenata. Kao što smo opisali, iz kovarijacione matrice se mogu odrediti greške putanjskih elemenata, što smo kasnije iskoristili za poredjenje ovako dobijenih grešaka sa onim greškama dobijenim iz teorije totalnog diferencijala. Formiranje kovarijacione matrice preuzeli smo iz radova Ajhorna i Ksua (Eichhorn & Xu, 1990) i Purbea (Pourbaix, 1994). Međutim, naš postupak je nešto drugačiji. Ajhorn prvo određuje početne vrednosti putanjskih elemenata i pomoću MNK određuje njihove popravke u iterativnom postupku. Na kraju određuje kovarijacionu i korelacionu matricu sa krajnjim rešenjem elemenata. Purbe određuje putanjske elemente svojom metodom u kojoj koristi P , T , e i Til-Inesove konstante A , B , F i G , a zatim određuje kovarijacionu i korelacionu matricu. Mi putanjske elemente određujemo metodom Kovalski-Olević i sa tim elementima formiramo matricu normalnih jednačina \mathbf{J} (Pourbaix, 1994) :

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n (\partial(x_i, y_i)/\partial\alpha)^T (\partial(x_i, y_i)/\partial\alpha) / s_0^2, \quad (36)$$

gde je α vektor parametara $\alpha=(P, T, a, e, i, \omega, \Omega)$, $s_0^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2 / (n-u)$, n ukupan broj posmatranja, u broj nezavisnih parametara, a

$s_i^2 = (x_{o,i} - x_{c,i})^2 + (y_{o,i} - y_{c,i})^2$. Formule koje ulaze u sastav matrice **J** su :

$$x = aA(\cos E - e) + aF\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$y = aB(\cos E - e) + aG\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial x / \partial a = A(\cos E - e) + F\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial x / \partial e = -aA\left(1 + \frac{\sin^2 E}{1 - e \cos E}\right) + aF \frac{(\cos E - e) \sin E}{\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)} ,$$

$$\partial x / \partial \Omega = -aB(\cos E - e) + aG\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial x / \partial i = a(\sin \omega \sin \Omega \sin i)(\cos E - e) + a(\cos \omega \sin \Omega \sin i)\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial x / \partial \omega = aF(\cos E - e) - aA\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial x / \partial P = (-aA \sin E + aF\sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{-360^\circ(t-T)}{P^2(1 - e \cos E)} ,$$

$$\partial x / \partial T = (-aA \sin E + aF\sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{(-n)}{(1 - e \cos E)} ,$$

$$\partial y / \partial a = B(\cos E - e) + G\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial y / \partial e = -aB\left(1 + \frac{\sin^2 E}{1 - e \cos E}\right) + aG \frac{\sin E(\cos E - e)}{\sqrt{1 - e^2}(1 - e \cos E)} ,$$

$$\partial y / \partial \Omega = aA(\cos E - e) + aF\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial y / \partial i = a(-\sin \omega \cos \Omega \sin i)(\cos E - e) + a(-\cos \omega \cos \Omega \sin i)\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial y / \partial \omega = aG(\cos E - e) + aB\sqrt{1 - e^2} \sin E ,$$

$$\partial y / \partial P = (-aB \sin E + aG\sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{-360^\circ(t-T)}{P^2(1 - e \cos E)} ,$$

$$\partial y / \partial T = (-aB \sin E + aG\sqrt{1 - e^2} \cos E) \frac{-n}{(1 - e \cos E)} .$$

Koeficijenti A , B , F , G su Til - Inesove konstante i računamo ih po formuli (17). Uredjeni parovi koordinata (x_o, y_o) su računati iz posmatranja po formuli (4), a (x_c, y_c) su odgovarajuće računate vrednosti sa poznatim elementima. Najčešće se (x_o, y_o) i (x_c, y_c)

računaju za epohu J2000.0. Matrica \mathbf{J} je dimenzije 7×7 , gde je 7 broj parametara vektora α , tj. broj orbitalnih elemenata. Pošto je vektor putanjskih elemenata α funkcija komponenata vektora $\mathbf{x} = [a_{20}, a_{02}, a_{11}, a_{10}, a_{01}]^T$, tj. $\alpha = \alpha(\mathbf{x})$, iz matematičke teorije propagacije grešaka kovarijaciona matrica je

$$\mathbf{K}_\alpha = (\partial\alpha/\partial\mathbf{x})s_0^2(\partial\alpha/\partial\mathbf{x})^T. \quad (37)$$

Upravo iz ove formule sledi da je naša kovarijaciona matrica \mathbf{J}^{-1} . Korelacionu matricu računamo na način koji smo opisali u prethodnom poglavlju. Što su manje apsolutne vrednosti elemenata matrice korelacije, tj. manja korelacija između putanjskih elemenata, to je njihov međusobni uticaj manji.

10 KONDICION MATRICE

Za izračunavanje kondiciona neke kvadratne matrice neophodno je imati minimalnu i maksimalnu sopstvenu vrednost matrice. Sada ćemo videti kako se te vrednosti računaju preko traga matrice (Perović, 2005, str. 81-96). Neka su $\lambda_1 > \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ sopstvene vrednosti kvadratne regularne matrice \mathbf{A} reda n . Tada je

$$|\lambda_1| = \lim_{m \rightarrow \infty} (\text{tr} \mathbf{A}^m)^{1/m} \quad (38)$$

na osnovu čega je, pri m dovoljno velikom

$$|\lambda_1| \approx (\text{tr} \mathbf{A}^m)^{1/m}. \quad (39)$$

Za računanje sopstvene vrednosti matrice $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{B}$, tada će biti $\lambda_n = 1/\lambda'_1$, gde je, pri m dovoljno velikom

$$|\lambda'_1| \approx (\text{tr} \mathbf{B}^m)^{1/m}. \quad (40)$$

Ako je \mathbf{A} simetrična matrica, onda je

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \max|\lambda_i|/\min|\lambda_i| = |\lambda_1|/|\lambda_n| \quad (41)$$

i

$$\text{cond}(\mathbf{A}) = \lambda_1/\lambda_n \quad (42)$$

za \mathbf{A} pozitivno definitno.

Kondicion karakteriše osetljivost rešenja sistema linearnih jednačina $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ u odnosu na promene njegovih koeficijenata. Matrice sa velikim kondicionom nazivamo slabo-uslovljenim. Ako je $\text{cond}(\mathbf{A})=1$, onda sistem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ nazivamo idealno uslovljenim. Ako je kondicion veliki, možemo očekivati velike promene rešenja pri nekim sasvim malim promenama početnih podataka. U ovom radu će kondicion biti računat za matricu sistema normalnih jednačina \mathbf{J} .

11 KORIŠĆENI UZORAK ZVEZDA

Zbog ispitivanja zavisnosti korelacije putanjskih elemenata od dužine luka orbite pokrivenog merenjima, merenja različite tačnosti i broja merenja, izbor dvojnih zvezda smo napravili prema tim kriterijumima. Merenja ovih zvezda smo uzeli iz Četvrtog kataloga interferometrijskih merenja dvojnih zvezda i iz raspoložive baze podataka na Astronomskoj opservatoriji u Beogradu. Osnovne podatke o tim zvezdama smo uzeli iz WDS kataloga.

1. **WDS 00155–1608 (HEI 299)**. Ovu dvojni je otkrio Hajnc 1985. godine. Do 2004. godine ovaj par ima 24 merenja od kojih su 6 mikrometarska, a 18 interferometrijska. Prvo interferometrijsko merenje je uradjeno 1993. godine. Za ovaj par nemamo na raspolaganju starija mikrometarska merenja, već samo interferometrijska uzeta iz INT4. Sve merene separacije su manje od $0''.5$. Cela orbita je pokrivena posmatranjima. Spektralni tip komponenata je M3.5V odnosno M5V. Magnituda primarne zvezde je 11.0, a sekundarne 11.4. Ovo je kratkoperiodična vizuelno dvojni zvezda sa retrogradnim kretanjem.

2. **WDS 00247–2653 (LEI 1)**. Ovaj sistem ima tri komponente A, B, C, a u ovom radu su uzeta merenja za par BC. Ovaj par ima merenja u intervalu 1993. - 2007. godine. Sva merenja su uradjena interferometrijskom tehnikom. Ukupan broj merenja je 44. Dužina luka orbite pokrivena posmatranjima je 250° . Spektralni tip

komponentata još uvek nije određen. Magnituda primarne zvezde je 15.9, a sekundarne 16.3. Par BC je kratkoperiodična dvojna zvezda sa direktnim kretanjem.

3. **WDS 00321+6715 (MCY 1)** je trojni sistem. Širi par AB je otkriven 1923. godine. Da je komponenta A dvojna (Aa, Ab) otkriveno je tek 1989. godine. Ovaj uži par ima merenja u intervalu 1989. - 2005. godine. Sva su merenja interferometrijska i ukupno ih ima 16. Cela orbita je pokrivena posmatranjima. Merene separacije ne prelaze vrednost od $0''.5$. Spektralni tip je dM2.5e. Magnituda primarne zvezde je 10.3, a sekundarne nije poznata. Ovo je kratkoperiodični par sa direktnim kretanjem.

4. **WDS 01350–2955 (DAW 31)** je četvorostruki sistem. Par koji se ovde razmatra, AB, je najuži par u sistemu. Ovaj par ima merenja u intervalu 1920. - 2008. godine. Ima 13 merenja koja je uradio Finzen svojim vizuelnim interferometrom i samo 7 speklinterferometrijskih merenja, dok su 75 merenja uradjena mikrometrom. Cela orbita je pokrivena posmatranjima. Spektralni tip je K1V. Magnituda primarne zvezde je 7.51, a sekundarne 8.94. Par AB je kratkoperiodična dvojna zvezda sa direktnim kretanjem.

5. **WDS 04041+3931 (STF 483)** je otkrio Struve još 1830. godine. Ovo je širi par gde su skoro sva merenja mikrometarska, uradjena između 1830. i 2006. godine i ukupno ih ima 133. Dužina luka orbite pokrivena posmatranjima je 315° . Spektralni tip je G5. Magnituda primarne zvezde je 7.38, a sekundarne 9.35. Ovo je dugoperiodična dvojna zvezda sa retrogradnim kretanjem.

6. **WDS 04184+2135 (MCA 14)** je trojni sistem. Širi par AB je otkriven 1893. godine. Da je komponenta A dvojna otkriveno je tek 1975. godine. Ovaj uži par (Aa, Ab) ima kratak orbitalni period. On ima speklinterferometrijska merenja u intervalu 1975. - 2005. godine i ukupno ih je 78. Cela orbita je pokrivena posmatranjima. Spektralni tip je F0V. Magnituda primarne zvezde je 5.60, a sekundarne 8.10.

7. **WDS 04400+5328 (STF 566)** ima komponente A, B, C, D, a u ovom radu su uzeta merenja za par AB-C. Ovaj par ima ukupno 153 merenja u intervalu 1828. - 2007. godine i skoro sva su mikrometarska. Dužina luka orbite pokrivena posmatranjima je 133° . Magnituda primarne zvezde je 5.56, a sekundarne 7.49. Par AB-C je dugoperiodična dvojna zvezda sa retrogradnim kretanjem.

11.1 WDS katalog

WDS katalog je osnovala Vojnopomorska opservatorija Sjedinjenih Američkih Država kada su početkom 1960. godine podaci bili prenešeni sa Lik opservatorije. Predstavlja glavnu bazu za astrometrijske dvojne i višestruke zvezde. U WDS katalogu se nalaze precizne koordinate zvezda za J2000.0 epohu, njihove oznake, komponente, pozicioni uglovi i separacije za prvi i poslednji datum posmatranja, epohe, magnitude, spektralni tipovi, komponente sopstvenog kretanja primarne zvezde, sopstvena kretanja po deklinaciji i rektascenziji sekundarne zvezde i još neki korisni podaci o tim zvezdama. Za samo nekoliko hiljada zvezda iz ovog kataloga je izračunata orbita pri čemu se ne zna da li su sve fizički dvojne. Redovno se unose promene u ovu bazu podataka. Ovaj katalog je naslednik Indeks kataloga dvojnih zvezda (Index Catalogue of Visual Double Stars, IDS). Prethodna tri kataloga dvojnih zvezda iz prošlog veka BDS, SDS i ADS su pokrivala samo deo neba. IDS i WDS pokrivaju "celo" nebo dok WDS sadrži sve poznate dvojne zvezde za koje je objavljeno bar jedno posmatranje. Veće izmene u katalogu su bile objavljene 1984, 1996, 2001 i 2006.

11.2 Četvrti katalog interferometrijskih merenja dvojnih zvezda

Ovaj katalog postoji od 1982. godine kao internacionalna baza podataka u centru CHARA na Državnom Univerzitetu Džordžija. U njemu se nalaze posmatranja dvojnih zvezda dobijena speklinterferometrijskom tehnikom. INT4 je uskoro obuhvatio astrometrijske i fotometrijske podatke za dvojne zvezde dobijene drugim tehnikama (mesečeve okultacije, adaptivna optika, okularna interferometrija, Hiparkos i druge). Dva štampana izdanja su objavljena 1984. i 1988. godine, a elektronska verzija je dostupna već od ranih 90-ih godina prošlog veka. Na samom kraju prošlog veka jedan od autora ovog kataloga je preneo katalog na Naval opservatoriju. Katalog danas sadrži 147240 dvojnih zvezda.

11.3 Šesti katalog orbita vizuelno dvojnih zvezda

Ovaj katalog je od samog početka svog postojanja bio izvesna zbirka orbita vizuelno dvojnih zvezda objavljena od strane Finzena 1934. i 1938. godine. Vremenom su ovaj katalog dopunjavali i razvijali Vorli, Hajnc, Hartkopf i drugi. Šesti katalog sadrži nešto više od 2000 orbita dvojnih zvezda. U njemu se nalaze slike orbita, ocena pouzdanosti orbite obeležena brojevima od 1 (konačna) do 5 (neodredjena), autor orbite (sa referencom gde je orbita objavljena). Takodje sadrži putanjske elemente i njihove greške, rektascenziju i deklinaciju za epohu J2000.0; HD, ADS i HIP broj, magnitude primarne i sekundarne komponente, ime otkrivača i druge oznake.

12 REZULTATI I DISKUSIJA

Sada ćemo predstaviti dobijene rezultate za izabrani uzorak parova vizuelno dvojnih zvezda. Vrednosti putanjskih elemenata smo dobili primenom metode Kovalski-Olević koja je opisana u poglavlju 7. Greške putanjskih elemenata smo računali na dva načina:

1) posredno iz grešaka pet parametara prividne orbite, koje smo dobili iz kovarijacione matrice parametara \mathbf{K}_x , primenom formule za totalni diferencijal, njih smo označavali sa σ i

2) neposredno iz izračunate kovarijacione matrice putanjskih elemenata \mathbf{J}^{-1} , a njih smo označavali sa σ_k .

Koeficijenti korelacije između putanjskih elemenata računati su iz njihove kovarijacione matrice po formuli (36), a potom su formirane matrice korelacija putanjskih elemenata \mathbf{C} , koje će nam poslužiti za ispitivanje zavisnosti korelacija putanjskih elemenata od dužine luka orbite pokrivenog merenjima, od merenja različite tačnosti i od broja merenja.

Osetljivost rešenja sistema linearnih jednačina ispitivali smo na osnovu dobijenih vrednosti kondiciona kvadratne matrice sistema normalnih jednačina \mathbf{J} koji smo računali po formuli (43) i sa $m=32$.

Merenja za par WDS 00247–2653 pokrivaju luk orbite od 250° , na kome postoji praznina od oko 60° gde nedostaju merenja (Slika 8.). Zbog ispitivanja zavisnosti korelacija putanjskih elemenata od dužine luka orbite pokrivenog merenjima, orbitalne elemente smo računali iz kraćeg luka (merenja do praznine) i iz dužeg luka (sva merenja). Slično smo postupili i kod para WDS 04184+2135 kod koga merenja pokrivaju celu orbitu (Slika 15.). Imamo ukupno 78

merjenja od kojih su 76 iz dva orbitalna perioda, a preostala dva iz trećeg. Kod ovog para mogli smo da izdvajamo merjenja na različitim dužinama luka orbite, da pomoću njih izračunavamo putanjske elemente i ispitujemo njihove korelacije.

Za svako orbitalno rešenje crtali smo prividnu orbitu. Crvenim krstićima označene su merene vrednosti, a plavim zvezdicama odgovarajuće efemeridske vrednosti. Sva merjenja su povezana sa njihovim računatim (efemeridskim) položajima, tj. linije su $O-C$ vrednosti. Crnim znakom "plus" obeležen je položaj primarne zvezde.

1. Zvezda WDS 00155–1608, $n=18$, luk= 360° .

Od 18 interferometrijskih merjenja, 17 su uradjena izmedju epoha 1993.61 i 1997.96 i sva je uradio isti posmatrač sa teleskopom aperture 2.4m. Promena pozicionog ugla u ovom intervalu je približno 360° što znači da je sekundar opisao jedan orbitalni period. Poslednje merenje je uradio Docobo krajem 2004. godine teleskopom aperture 6m.

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.1 iz koje možemo videti dobro slaganje grešaka putanjskih elemenata dobijenih posredno (σ) i neposredno (σ_k). Male vrednosti ovih grešaka ukazuju na pouzdanost dobijenih putanjskih elemenata. Prividna orbita je prikazana na Slici 6. Ona dobro fituje merene vrednosti što je potvrda da su one dobijene sa visokom preciznošću. Dobijena vrednost za s_0 iznosi $0''.003873$.

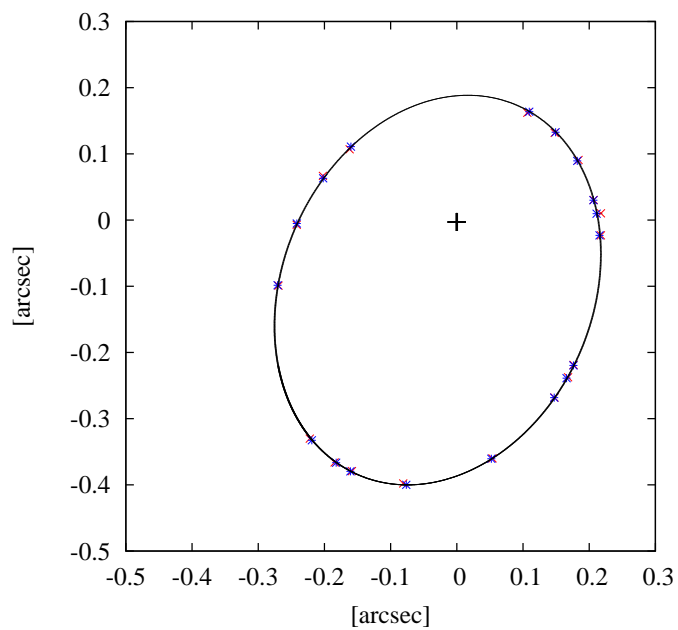
U Tabeli 1.2 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Sve vrednosti koeficijenata korelacije, osim izmedju longitude čvora i longitude periastrona, imaju male vrednosti, tj. ne uočava se njihov medjusobni uticaj. Kondicion matrice \mathbf{J} je 9.34×10^2 .

Tabela 1.1. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 00155–1608.

$P[\text{god}]=4.559$	$\sigma_P = 0.008$	$\sigma_{kP} = 0.004$
$T=1995.359$	$\sigma_T = 0.009$	$\sigma_{kT} = 0.005$
$a['] = 0.3046$	$\sigma_a = 0.0170$	$\sigma_{ka} = 0.0013$
$e=0.3636$	$\sigma_e = 0.0196$	$\sigma_{ke} = 0.0022$
$i[^\circ]=145.58$	$\sigma_i = 0.31$	$\sigma_{ki} = 0.62$
$\omega[^\circ]=346.99$	$\sigma_\omega = 0.63$	$\sigma_{k\omega} = 1.26$
$\Omega[^\circ]=63.54$	$\sigma_\Omega = 0.53$	$\sigma_{k\Omega} = 1.04$

Tabela 1.2. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 00155–1608.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.07	-0.12	0.43	0.17	-0.07	-0.11
T		1.00	-0.24	0.02	0.39	0.61	0.37
a			1.00	-0.35	-0.66	-0.11	-0.04
e				1.00	0.28	-0.20	-0.24
i					1.00	0.19	0.07
ω						1.00	0.95
Ω							1.00



Slika 6: Prividna orbita za WDS 00155–1608, luk 360°.

2. Zvezda WDS 00247–2653, n=26, luk=126°.

Od 44 interferometrijskih merenja, 26 pokrivaju luk dužine 126°. Skoro sva su uradjena teleskopima aperture 3.5m i imaju visoku preciznost, što se može videti na Slici 7. gde se merene i efemeridske vrednosti skoro poklapaju.

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.3. iz koje se vidi da su greške σ_k znatno veće od σ . Ovde merenja pokrivaju samo trećinu orbite, pa ovakva geometrija utiče na račun koeficijenata matrice \mathbf{A} . Prividna orbita je prikazana na Slici 7. i ona dobro fituje merene vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0".005916.

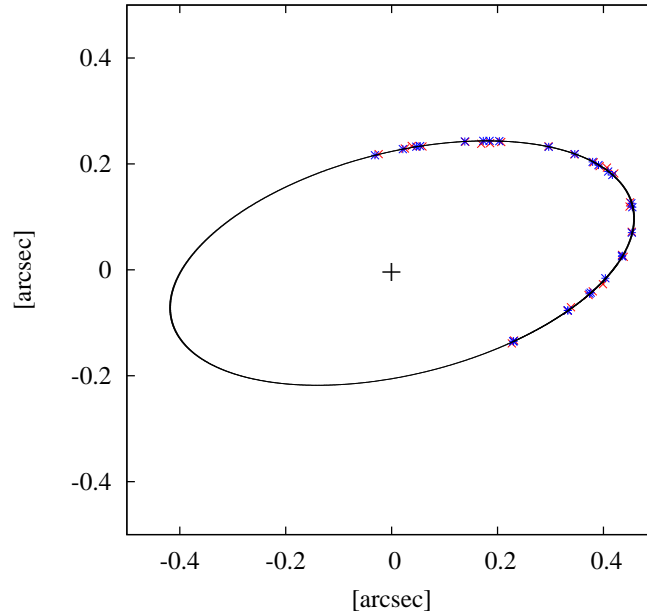
U Tabeli 1.4 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Skoro sve vrednosti koeficijenata korelacije su bliske jedinici sto ukazuje na visoku korelisanost putanjskih elemenata. Kondicion matrice \mathbf{J} je 5.95×10^6 .

Tabela 1.3. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 00247–2653.

$P[\text{god}] = 16.209$	$\sigma_P = 0.063$	$\sigma_{kP} = 1.517$
$T = 2006.593$	$\sigma_T = 0.026$	$\sigma_{kT} = 2.534$
$a["] = 0.4487$	$\sigma_a = 0.0116$	$\sigma_{ka} = 0.0323$
$e = 0.0604$	$\sigma_e = 0.0060$	$\sigma_{ke} = 0.0645$
$i[^\circ] = 62.08$	$\sigma_i = 0.28$	$\sigma_{ki} = 1.72$
$\omega[^\circ] = 218.10$	$\sigma_\omega = 4.53$	$\sigma_{k\omega} = 36.44$
$\Omega[^\circ] = 13.95$	$\sigma_\Omega = 0.33$	$\sigma_{k\Omega} = 0.95$

Tabela 1.4. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 00247–2653.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	0.98	1.00	-0.99	0.97	0.95	0.59
T		1.00	0.99	-0.95	0.98	0.99	0.42
a			1.00	-0.99	0.99	0.96	0.55
e				1.00	-0.96	-0.91	-0.67
i					1.00	0.97	0.49
ω						1.00	0.32
Ω							1.00



Slika 7: Prividna orbita za WDS 00247–2653, luk 126° .

3. Zvezda WDS 00247–2653, $n=44$, luk= 250° .

Ovde smo uzeli svih 44 interferometrijskih merenja. Poslednjih 16 merenja uradjena su teleskopom velike aperture.

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.5 iz koje se vidi mnogo bolje slaganje grešaka σ_k i σ (bolja geometrija) nego što je to u slučaju kraćeg luka. Prividna orbita je prikazana na Slici 8. Ona dobro fituje merene vrednosti, a poklapanje merenih i efemeridskih vrednosti je posledica visoke preciznosti merenja. Dobijena vrednost za s_0 iznosi $0''.004690$.

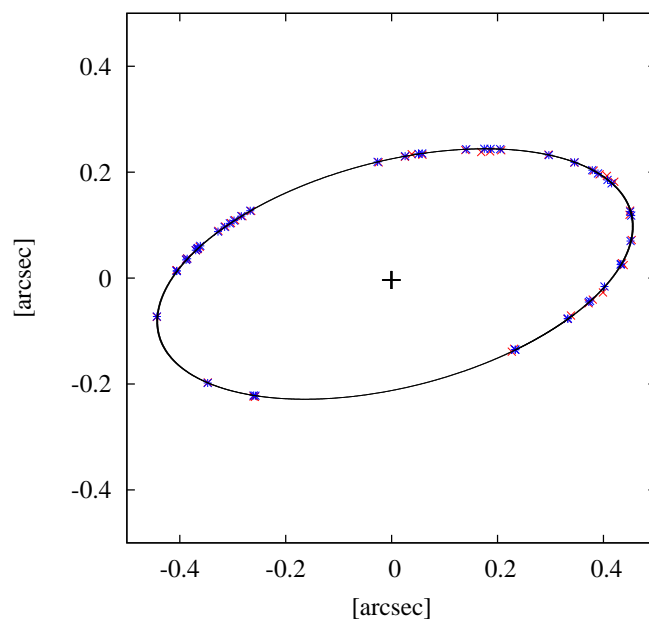
U Tabeli 1.6 data je korelaciona matrica putanjskih elemenata. Vrednosti koeficijenata korelacije su mnogo manje nego one u Tabeli 1.4. Samo tri koeficijenta imaju apsolutne vrednosti iznad 0.6. Ovo znači da se sa poboljšanjem geometrije posmatranja smanjuje međusobna korelacija putanjskih elemenata. Kondiciona matrice \mathbf{J} je znatno manji nego što je to u slučaju kraćeg luka i iznosi 3.30×10^4 .

Tabela 1.5. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 00247–2653.

$P[\text{god}] = 17.039$	$\sigma_P = 0.019$	$\sigma_{kP} = 0.044$
$T = 2008.200$	$\sigma_T = 0.012$	$\sigma_{kT} = 0.147$
$a[''] = 0.4606$	$\sigma_a = 0.0354$	$\sigma_{ka} = 0.0011$
$e = 0.0325$	$\sigma_e = 0.0149$	$\sigma_{ke} = 0.0032$
$i[^\circ] = 62.40$	$\sigma_i = 0.78$	$\sigma_{ki} = 0.20$
$\omega[^\circ] = 241.30$	$\sigma_\omega = 24.13$	$\sigma_{k\omega} = 3.27$
$\Omega[^\circ] = 14.45$	$\sigma_\Omega = 1.01$	$\sigma_{k\Omega} = 0.19$

Tabela 1.6. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 00247–2653.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.38	-0.29	-0.84	-0.49	-0.50	0.26
T		1.00	0.39	0.59	0.50	0.99	-0.09
a			1.00	0.32	0.53	0.40	0.01
e				1.00	0.59	0.69	-0.33
i					1.00	0.54	-0.26
ω						1.00	-0.17
Ω							1.00



Slika 8: Prividna orbita za WDS 00247–2653, luk 250°.

4. Zvezda WDS 00321+6715, n=16, luk=360°.

Za ovaj par imamo 16 interferometrijskih merenja. Većina merenja su uradjena teleskopom aperture 3.5m, a 2 merenja su uradjena teleskopom aperture 2.0m i preostala 2 merenja su uradjena velikim teleskopom aperture 6.0m (uradio ih je Docobo krajem 2004. i 2005. godine).

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.7 iz koje se vidi veoma dobro slaganje grešaka σ_k i σ . Prividna orbita je prikazana na Slici 9. Ona dobro fituje merene vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0''043301.

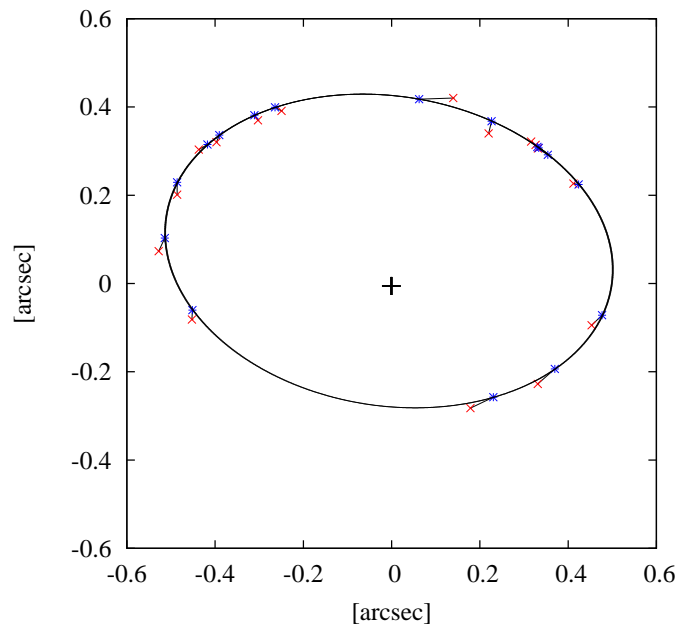
U Tabeli 1.8 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Koeficijenti korelacije putanjskih elemenata imaju male vrednosti, osim koeficijenta izmedju a i i , e i i , P i ω , T i ω , čije su vrednosti malo iznad 0.5. Kondicion matrice \mathbf{J} je 5.96×10^2 . Uočava se smanjenje vrednosti kondiciona sa porastom luka orbite, tj. sa poboljšanjem geometrije posmatranja smanjuje se mogućnost promene rešenja.

Tabela 1.7. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 00321+6715.

$P[\text{god}] = 15.837$	$\sigma_P = 0.146$	$\sigma_{kP} = 0.250$
$T = 2000.266$	$\sigma_T = 0.123$	$\sigma_{kT} = 0.232$
$a[\text{''}] = 0.5215$	$\sigma_a = 0.0803$	$\sigma_{ka} = 0.0161$
$e = 0.2076$	$\sigma_e = 0.0338$	$\sigma_{ke} = 0.0241$
$i[^\circ] = 47.71$	$\sigma_i = 1.08$	$\sigma_{ki} = 3.07$
$\omega[^\circ] = 99.54$	$\sigma_\omega = 4.96$	$\sigma_{k\omega} = 5.27$
$\Omega[^\circ] = 171.57$	$\sigma_\Omega = 1.54$	$\sigma_{k\Omega} = 4.03$

Tabela 1.8. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 00321+6715.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.32	0.15	0.30	0.22	-0.53	0.05
T		1.00	-0.04	-0.04	-0.06	0.65	0.34
a			1.00	0.29	0.64	-0.16	0.10
e				1.00	0.57	-0.34	0.28
i					1.00	-0.23	0.14
ω						1.00	-0.42
Ω							1.00



Slika 9: Prividna orbita za WDS 00321+6715, luk 360°.

5. Zvezda WDS 01350–2955, n=95, luk=360°.

Skoro sva merenja su mikrometerska uradjena malim teleskopima aperture ispod 0.5m i male tačnosti, a poslednjih 9 su speklinterferometrijska. Prvo merenje je 1920.86, a poslednje je 2008.7673. Sekundar je za ovo vreme više puta obišao oko primara.

Putanjski elementi i greške njihovog određivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.9. iz koje se vidi da se greške veoma dobro slažu, osim grešaka za ω i Ω . Prividna orbita je prikazana na Slici 10. na kojoj se uočava velika disperzija merenih vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0".039.

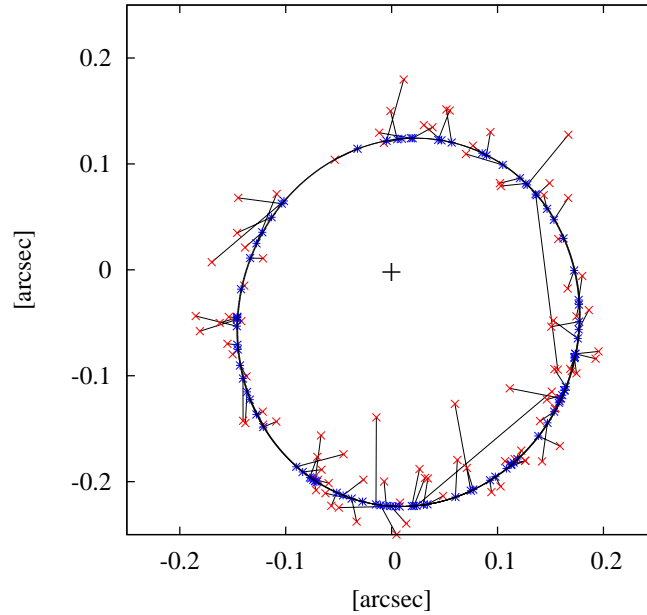
U Tabeli 1.10 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Koeficijenti korelacije putanjskih elemenata imaju male vrednosti, a samo dve vrednosti su veće od 0.6. Kondicion matrice \mathbf{J} je 7.00×10^4 . Poredjenje sa parom WDS 00321+6715 (oba para imaju luk od 360°) ukazuje da je ovde kondicion za dva reda veličine veći, ali je tačnost merenja mnogo niža.

Tabela 1.9. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 01350–2955.

$P[\text{god}] = 4.557$	$\sigma_P = 0.023$	$\sigma_{kP} = 0.004$
$T = 1991.889$	$\sigma_T = 0.023$	$\sigma_{kT} = 0.054$
$a["] = 0.1787$	$\sigma_a = 0.0474$	$\sigma_{ka} = 0.0060$
$e = 0.3047$	$\sigma_e = 0.0805$	$\sigma_{ke} = 0.0177$
$i[^\circ] = 22.60$	$\sigma_i = 2.70$	$\sigma_{ki} = 6.77$
$\omega[^\circ] = 51.53$	$\sigma_\omega = 6.27$	$\sigma_{k\omega} = 18.07$
$\Omega[^\circ] = 58.04$	$\sigma_\Omega = 5.75$	$\sigma_{k\Omega} = 18.27$

Tabela 1.10. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 01350–2955.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	0.60	0.05	-0.11	0.05	0.15	-0.15
T		1.00	0.28	-0.03	0.37	0.13	0.00
a			1.00	-0.08	0.73	0.11	-0.06
e				1.00	0.09	0.44	-0.42
i					1.00	0.06	0.02
ω						1.00	-0.98
Ω							1.00



Slika 10: Prividna orbita za WDS 01350–2955, luk 360°.

6. Zvezda WDS 04041+3931, $n=133$, luk=315°.

Osim 4 interferometrijska, ostala merenja su mikrometerska. Uradjena su teleskopom male aperture. Prvo merenje je 1830.52, a poslednje je 2006.067. Ovo je dugoperiodična dvojna zvezda sa velikim ekscentricitetom putanje.

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.11. iz koje se vidi da se greške slažu, osim grešaka za P i T . Prividna orbita je prikazana na Slici 11. na kojoj se uočava velika disperzija merenih vrednosti, jer ima puno mikrometerskih merenja. Dobijena vrednost za s_0 iznosi $0''.158297$.

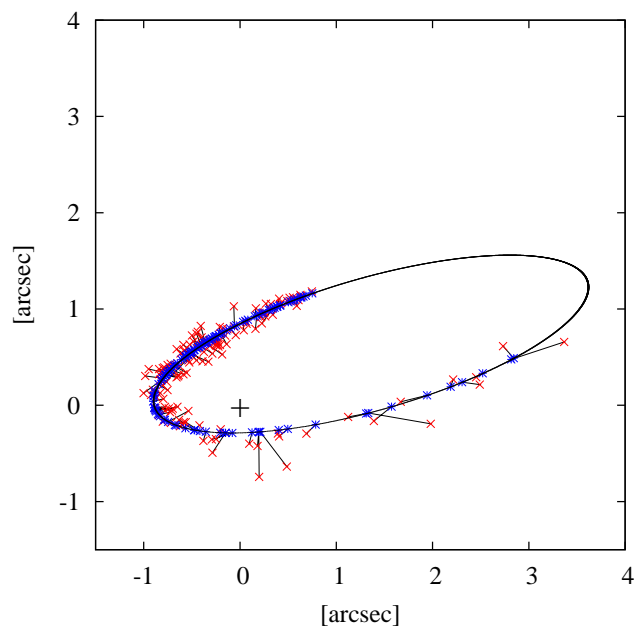
U Tabeli 1.12 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Vrlo mali broj koeficijenata korelacije putanjskih elemenata ima vrednosti veće od 0.5. Kondiciona matrice \mathbf{J} je 1.78×10^8 . Velika vrednost kondiciona ukazuje da se rešenja mogu znatno promeniti kada bude na raspolaganju još merenja.

Tabela 1.11. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04041+3931.

$P[\text{god}] = 503.231$	$\sigma_P = 5.539$	$\sigma_{kP} = 35.919$
$T = 1910.072$	$\sigma_T = 4.146$	$\sigma_{kT} = 0.791$
$a['] = 2.6307$	$\sigma_a = 0.2395$	$\sigma_{ka} = 0.1186$
$e = 0.7196$	$\sigma_e = 0.0412$	$\sigma_{ke} = 0.0154$
$i[^\circ] = 109.50$	$\sigma_i = 0.79$	$\sigma_{ki} = 0.70$
$\omega[^\circ] = 319.54$	$\sigma_\omega = 3.65$	$\sigma_{k\omega} = 1.70$
$\Omega[^\circ] = 189.24$	$\sigma_\Omega = 1.04$	$\sigma_{k\Omega} = 1.18$

Tabela 1.12. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04041+3931.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	0.21	0.91	0.88	-0.15	0.45	0.12
T		1.00	0.08	-0.11	0.47	0.74	-0.03
a			1.00	0.85	-0.40	0.32	0.11
e				1.00	-0.35	0.02	0.05
i					1.00	0.36	0.01
ω						1.00	0.37
Ω							1.00



Slika 11: Prividna orbita za WDS 04041+3931, luk 315° .

7. Zvezda WDS 04184+2135, n=18, luk=103°.

Sva merenja ove zvezde su speklinterferometrijska. Skoro sva su uradjena teleskopima aperture veće od 2m i imaju visoku preciznost, što se može videti na Slici 12. gde se merene i efemeridske vrednosti skoro poklapaju.

Od svih merenja, izabrali smo ona koja pokrivaju kratak luk od 103° i to na delu orbite koji se malo razlikuje od prave. Putanjski elementi i greške njihovog određivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.13. iz koje se vidi da su greške σ_k znatno veće od σ . Ovde merenja pokrivaju manje od trećine orbite, pa ovakva geometrija utiče na račun koeficijenata matrice **J**. Prividna orbita je prikazana na Slici 12. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0".007746.

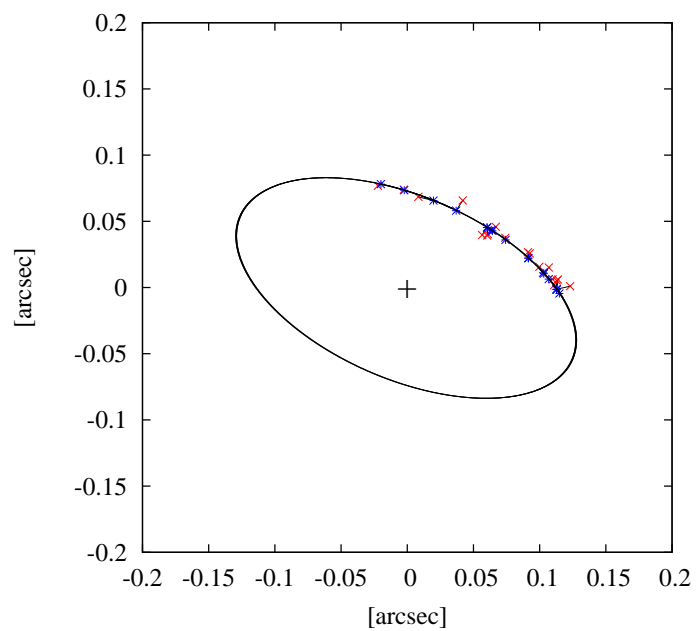
U Tabeli 1.14 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Skoro sve vrednosti koeficijenata korelacije su velike, a samo šest koeficijenata su manji (imaju vrednost oko 0.1). Kondiciona matrice **J** je 2.35×10^9 . Ovako velika vrednost kondiciona je očekivana jer se putanjski elementi mogu znatno promeniti sa porastom broja merenja i luka na orbiti.

Tabela 1.13. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04184+2135.

$P[\text{god}] = 11.256$	$\sigma_P = 0.032$	$\sigma_{kP} = 0.043$
$T = 1977.297$	$\sigma_T = 0.037$	$\sigma_{kT} = 114.502$
$a["] = 0.1366$	$\sigma_a = 0.0062$	$\sigma_{ka} = 0.0420$
$e = 0.0137$	$\sigma_e = 0.0198$	$\sigma_{ke} = 0.2307$
$i[^\circ] = 120.37$	$\sigma_i = 1.84$	$\sigma_{ki} = 21.60$
$\omega[^\circ] = 120.53$	$\sigma_\omega = 125.59$	$\sigma_{k\omega} = 3418.16$
$\Omega[^\circ] = 156.70$	$\sigma_\Omega = 1.82$	$\sigma_{k\Omega} = 33.71$

Tabela 1.14. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04184+2135.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.11	-0.08	-0.09	0.09	-0.11	-0.11
T		1.00	0.97	0.85	-0.95	1.00	0.98
a			1.00	0.69	-0.99	0.96	0.90
e				1.00	-0.65	0.85	0.93
i					1.00	-0.95	-0.88
ω						1.00	0.98
Ω							1.00



Slika 12: Prividna orbita za WDS 04184+2135, luk 103° .

8. Zvezda WDS 04184+2135, n=32, luk=207°.

Ovde smo izabrali merenja na dužem luku orbite, tako da je obuhvaćena cela krivina elipse. Putanjski elementi i greške njihovog određivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.15. iz koje se vidi da se greške σ_k i σ veoma dobro slažu i primetno su manje od odgovarajućih vrednosti u Tabeli 1.13 (luk 103°) . Prividna orbita je prikazana na Slici 13. i ona dobro fituje skoro sve merene vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0''010863.

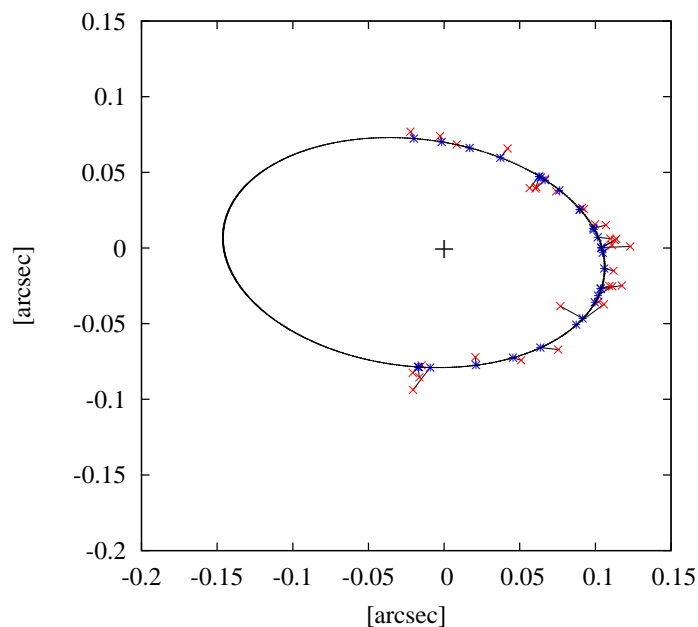
U Tabeli 1.16 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Može se primetiti da su ovde koeficijenti korelacije manji nego kod kraćeg luka. Kondicion matrice \mathbf{J} je 2.11×10^4 i znatno je manji od onog kod luka od 103°.

Tabela 1.15. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04184+2135.

$P[\text{god}] = 11.287$	$\sigma_P = 0.022$	$\sigma_{kP} = 0.0537$
$T = 1977.592$	$\sigma_T = 0.026$	$\sigma_{kT} = 0.3384$
$a['] = 0.1271$	$\sigma_a = 0.0044$	$\sigma_{ka} = 0.0042$
$e = 0.1724$	$\sigma_e = 0.0229$	$\sigma_{ke} = 0.0205$
$i[^\circ] = 126.71$	$\sigma_i = 1.53$	$\sigma_{ki} = 2.25$
$\omega[^\circ] = 154.49$	$\sigma_\omega = 7.61$	$\sigma_{k\omega} = 9.72$
$\Omega[^\circ] = 172.56$	$\sigma_\Omega = 2.46$	$\sigma_{k\Omega} = 4.69$

Tabela 1.16. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04184+2135.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.09	0.04	0.04	-0.01	-0.04	-0.08
T		1.00	0.15	-0.70	-0.06	0.97	-0.82
a			1.00	0.35	-0.66	0.13	-0.09
e				1.00	-0.28	-0.67	0.66
i					1.00	-0.07	-0.03
ω						1.00	-0.67
Ω							1.00



Slika 13: Prividna orbita za WDS 04184+2135, luk 207°.

9. Zvezda WDS 04184+2135, $n=47$, luk=284°.

Sada smo izabrali merenja na još dužem luku orbite. Putanjski elementi i greške njihovog određivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.17. iz koje se uočava bolje slaganje σ_k i σ i smanjenje njihovih vrednosti. Prividna orbita je prikazana na Slici 14. i ona dobro fituje merene vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi $0''.011358$.

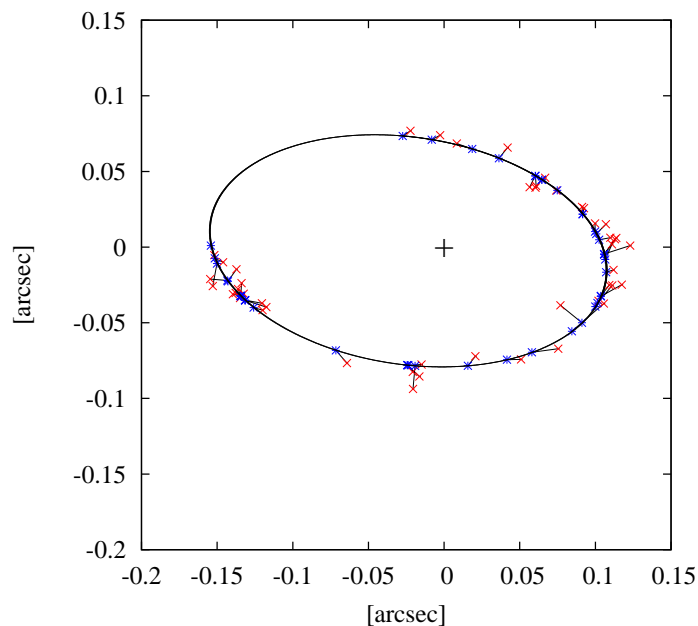
U Tabeli 1.18 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Skoro sve vrednosti koeficijenata korelacije su manje od 0.54. Samo između T i ω je vrednost koeficijenta nešto veća (0.85). Kondicion matrice \mathbf{J} je 4.16×10^3 i njegova vrednost je manja od vrednosti kod kraćih lukova za ovu zvezdu.

Tabela 1.17. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04184+2135.

$P[\text{god}] = 11.241$	$\sigma_P = 0.061$	$\sigma_{kP} = 0.046$
$T = 1977.641$	$\sigma_T = 0.079$	$\sigma_{kT} = 0.111$
$a[\text{''}] = 0.1325$	$\sigma_a = 0.0044$	$\sigma_{ka} = 0.0027$
$e = 0.1941$	$\sigma_e = 0.0241$	$\sigma_{ke} = 0.0118$
$i[^\circ] = 125.14$	$\sigma_i = 1.47$	$\sigma_{ki} = 1.84$
$\omega[^\circ] = 155.19$	$\sigma_\omega = 7.13$	$\sigma_{k\omega} = 4.25$
$\Omega[^\circ] = 170.93$	$\sigma_\Omega = 2.10$	$\sigma_{k\Omega} = 2.02$

Tabela 1.18. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04184+2135.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.14	0.16	0.09	-0.07	0.03	-0.15
T		1.00	-0.20	-0.51	0.33	0.85	-0.06
a			1.00	0.27	-0.51	-0.37	-0.27
e				1.00	-0.32	-0.54	-0.05
i					1.00	0.30	-0.22
ω						1.00	0.35
Ω							1.00



Slika 14: Prividna orbita za WDS 04184+2135, luk 284°.

10. Zvezda WDS 04184+2135, n=78, luk=360°.

Sada smo uzeli sva merenja. Putanjski elementi i greške njihovog određivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.19. iz koje se vidi da se greške σ_k i σ veoma dobro slažu. Prividna orbita je prikazana na Slici 15. i ona dobro fituje merene vrednosti. Dobijena vrednost za s_0 iznosi 0''008832.

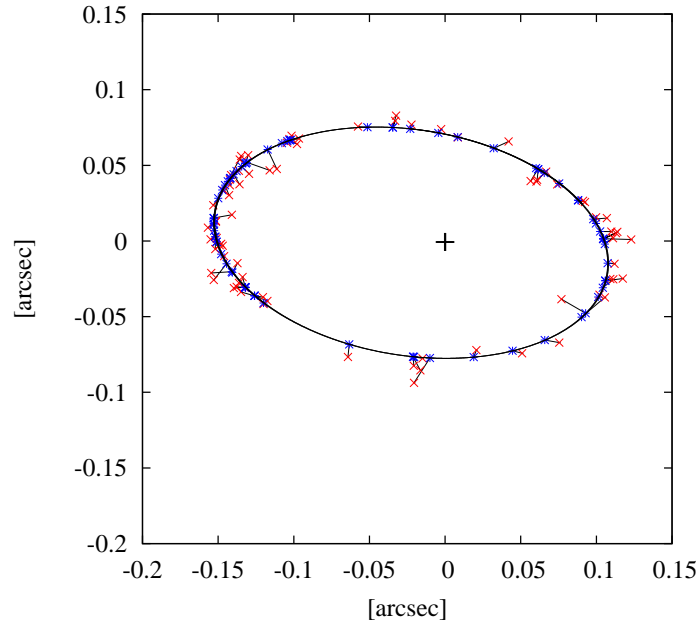
U Tabeli 1.20 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Vrednosti koeficijenata korelacije su male, osim koeficijenta korelacije između ω i T koji i dalje ima vrednost iznad 0.8. Kondicion matrice \mathbf{J} je 7.11×10^3 .

Tabela 1.19. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04184+2135.

$P[\text{god}] = 11.326$	$\sigma_P = 0.050$	$\sigma_{kP} = 0.033$
$T = 1977.766$	$\sigma_T = 0.071$	$\sigma_{kT} = 0.078$
$a['] = 0.1315$	$\sigma_a = 0.0034$	$\sigma_{ka} = 0.0013$
$e = 0.1811$	$\sigma_e = 0.0209$	$\sigma_{ke} = 0.0065$
$i[^\circ] = 125.15$	$\sigma_i = 1.12$	$\sigma_{ki} = 1.01$
$\omega[^\circ] = 159.40$	$\sigma_\omega = 6.26$	$\sigma_{k\omega} = 2.98$
$\Omega[^\circ] = 170.62$	$\sigma_\Omega = 1.58$	$\sigma_{k\Omega} = 1.07$

Tabela 1.20. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04184+2135.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.09	0.00	-0.02	-0.01	0.16	-0.05
T		1.00	-0.07	-0.30	-0.02	0.88	0.33
a			1.00	-0.34	-0.41	-0.11	-0.08
e				1.00	0.21	-0.27	-0.15
i					1.00	-0.02	-0.08
ω						1.00	0.63
Ω							1.00



Slika 15: Prividna orbita za WDS 04184+2135, luk 360°.

11. Zvezda WDS 04400+5328, $n=142$, luk=133°.

Putanjski elementi i greške njihovog odredjivanja σ i σ_k dati su u Tabeli 1.21. Vidi se da su greške σ_k mnogo veće od σ i veće su od grešaka iz Tabele 1.11 (WDS 04041+3931). Ova dva para možemo porediti, jer su oba dugoperiodična sa približno istim brojem mikrometarskih merenja iz istog perioda. Prividna orbita je prikazana na Slici 16. Uočava se veća disperzija mikrometarskih merenja. Dobijena vrednost za s_0 iznosi $0''.141944$.

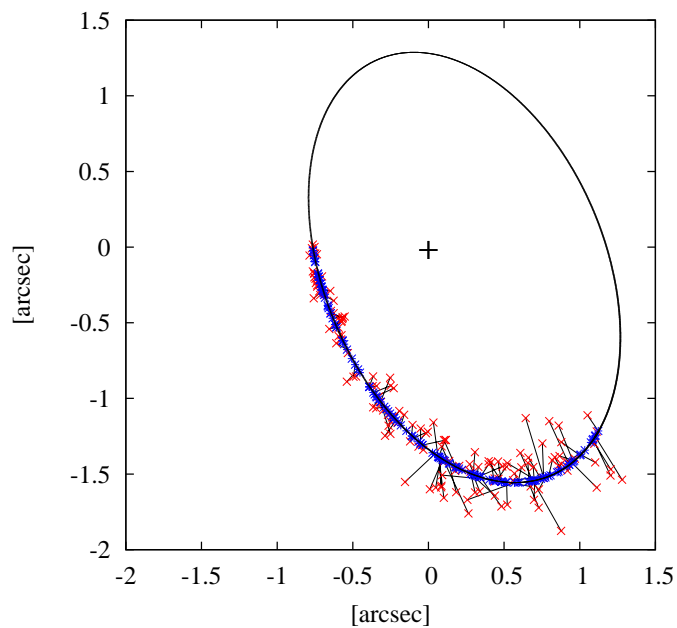
U Tabeli 1.22 je data korelaciona matrica putanjskih elemenata. Više od pola koeficijenata korelacije imaju vrednosti veće od 0.5, a dosta njih ima vrednost blisku jedinici. Kondicion matrice \mathbf{J} je 2.44×10^8 i istog je reda veličine kao kod para WDS 04041+3931.

Tabela 1.21. Putanjski elementi i njihove greške za WDS 04400+5328.

$P[\text{god}] = 480.754$	$\sigma_P = 3.806$	$\sigma_{kP} = 69.618$
$T = 2027.788$	$\sigma_T = 3.257$	$\sigma_{kT} = 20.268$
$a['] = 1.5138$	$\sigma_a = 0.0377$	$\sigma_{ka} = 0.1477$
$e = 0.2289$	$\sigma_e = 0.0121$	$\sigma_{ke} = 0.0624$
$i[^\circ] = 128.42$	$\sigma_i = 0.61$	$\sigma_{ki} = 4.55$
$\omega[^\circ] = 307.11$	$\sigma_\omega = 4.97$	$\sigma_{k\omega} = 30.48$
$\Omega[^\circ] = 110.80$	$\sigma_\Omega = 0.78$	$\sigma_{k\Omega} = 4.59$

Tabela 1.22. Matrica korelacije putanjskih elemenata za WDS 04400+5328.

	P	T	a	e	i	ω	Ω
P	1.00	-0.96	0.93	-0.10	-0.40	-0.98	-0.75
T		1.00	-0.87	-0.05	0.28	0.99	0.88
a			1.00	-0.43	-0.69	-0.93	-0.58
e				1.00	-0.91	0.11	-0.38
i					1.00	0.42	-0.06
ω						1.00	0.82
Ω							1.00



Slika 16: Prividna orbita za WDS 04400+5328, luk 133°.

13 ANALIZA REZULTATA

Za sve razmatrane parove izračunate su korelacione matrice putanjskih elemenata. Rezultati jasno pokazuju da se korelacije putanjskih elemenata smanjuju sa povećanjem luka orbite pokrivenog merenjima, tj. sa jačanjem geometrije modela. Obrnuto, jak međusobni uticaj putanjskih elemenata pokazuje se kod kratkih lukova. Naš uzorak možemo podeliti na tri grupe.

Prvi deo obuhvata slučajeve kratkih lukova 103° , 126° i 133° . Kod njih su koeficijenti korelacije bliski jedinici (Tabele 1.4, 1.14 i 1.22). Malo manje vrednosti se mogu uočiti u Tabeli 1.22 za par WDS 04400+5328 sa mikrometarskim merenjima manje preciznosti, ali je u ovom slučaju broj merenja znatno veći (142) nego kod druga dva para (18 i 26).

Drugi deo obuhvata slučajeve sa dužim lukovima 207° , 250° i 284° . Kod njih su merenja interferometrijska i broj merenja je približno isti (32, 44 i 47). Koeficijenti korelacija putanjskih elemenata su приметно manji (Tabele 1.6, 1.16 i 1.18) nego u slučaju kratkih lukova.

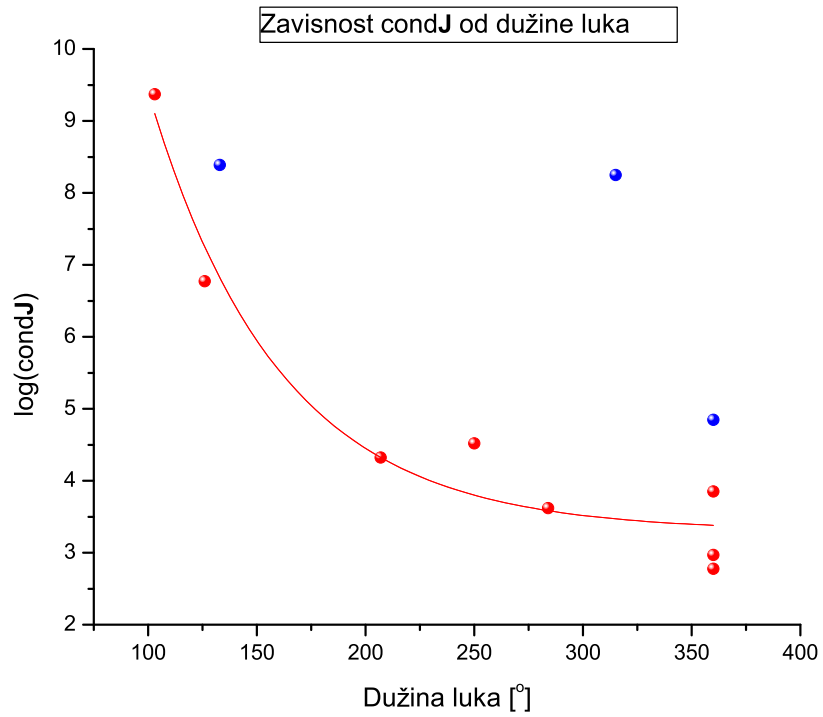
Treći deo obuhvata slučajeve sa dugim lukovima: jedan od 315° i četiri cele orbite tj. 360° . Male vrednosti koeficijenata korelacije (Tabele 1.2, 1.8, 1.10 i 1.20) su pokazatelji da nema međusobnih uticaja putanjskih elemenata. Malo izraženiji uticaj između P , a i e se pokazuje kod dugoperiodične dvojne WDS 04041+3931 (luk je 315° i ekscentričnost preko 0.7). Ne uočava se uticaj broja merenja koji je ovde dosta različit (16, 18, 78, 95 i 133) niti merenja različite tačnosti (dva para imaju mikrometarska, a tri interferometrijska merenja).

Na Slici 17. je predstavljena zavisnost kondiciona matrice sistema normalnih jednačina \mathbf{J} od dužine luka putanje pokrivenog merenjima. Rezultati za parove za koje imamo samo novija interferometrijska merenja, pa time i dobijena sa velikom preciznošću, predstavljani su crvenim kružićima. Rezultati za parove koji su mereni u dužem vremenskom periodu i imaju uglavnom mikrometarska, pa time i manje precizna merenja, predstavljani su plavim kružićima. Zbog velikog raspona vrednosti kondiciona, na ordinati je njegova logaritamska vrednost.

Sa slike se jasno uočava smanjenje kondiciona matrice \mathbf{J} sa porastom dužine luka putanje pokrivenog merenjima za obe vrste merenja. Kod kraćih lukova male promene početnih podataka (nova merenja) mogu znatno da promene rešenje (putanjske elemente). Sa jačanjem geometrije modela, promene rešenja su sve manje, što pokazuju dobijene vrednosti kondiciona. Rezultati pokazuju da merenja manje preciznosti (mikrometarska) imaju veće vrednosti kondiciona nego preciznija interferometrijska merenja. U našem uzorku izuzetak čini dvojna WDS 04041+3931 sa manje preciznim mikrometarskim merenjima koja pokrivaju luk od 315° , a kondicion je istog reda veličine kao kod luka od 130° . Ako pogledamo prividnu orbitu (Slika 11.) vidimo da ima malo merenja, neravnomerno raspoređenih, sa velikom disperzijom na početku luka (na delu oko 120°). Ta merenja su mogla dosta da utiču na odredjivanje putanjskih elemenata, pa i na dobijenu vrednost kondiciona. To nije slučaj sa drugim dugoperiodičnim parom WDS 04400+5328 kod koga stara mikrometarska merenja imaju veliku disperziju, ali su ravnomerno raspoređena i sa podjednakim brojem na luku od 133° .

Što je veći kondicion veća je korelacija između putanjskih elemenata i obrnuto. Obe veličine su veće kod parova kod kojih merenja pokrivaju kraće lukove putanje.

Što se tiče tačnosti odredjivanja putanjskih elemenata, rezultati pokazuju da je tačnost veća (manje vrednosti σ i σ_k) kada je duži luk putanje pokriven merenjima i kada imamo preciznija merenja. Ako poredimo ocene grešaka dobijene posredno (σ) i dobijene neposredno iz kovarijacione matrice putanjskih elemenata (σ_k), veća razlika je kod kraćih lukova. Nije uočena veća razlika ovih ocena kod merenja manje preciznosti. Ovo znači da geometrija modela ima najveći uticaj.



Slika 17: Zavisnost kondiciona od dužine luka kod interferometrijskih i mikrometarских merenja.

14 ZAKLJUČAK

U ovom radu, ukratko, uradjeno je sledeće:

- (i) Izračunati su putanjski elementi dvojnih zvezda metodom Kovalski-Olević.
- (ii) Greške putanjskih elemenata su računane totalnim diferenciranjem formula za nalaženje putanjskih elemenata i pomoću matrice kovarijacije za putanjske elemente.
- (iii) Nadjena je matrica korelacije između putanjskih elemenata.
- (iv) Izračunat je kondicion matrice sistema normalnih jednačina \mathbf{J} .

Korelacije putanjskih elemenata smanjuju se sa povećanjem luka orbite pokrivenog merenjima, tj. sa jačanjem geometrije modela. Obrnuto, jak međusobni uticaj putanjskih elemenata pokazuje se kod kratkih lukova. Kod dugačkih lukova korelacija ne zavisi od broja merenja, što izgleda nije slučaj kod kratkih lukova, gde se korelacija smanjuje sa porastom broja merenja. Koeficijenti korelacije ne zavise od preciznosti merenja.

Kondicion matrice \mathbf{J} se smanjuje sa porastom dužine luka putanje pokrivenog merenjima za obe vrste merenja. Kod kraćih lukova male promene početnih podataka mogu znatno da promene rešenje. Sa jačanjem geometrije modela, promene rešenja su sve manje. Merenja manje preciznosti (mikrometarska) daju veće vrednosti kondiciona nego preciznija interferometrijska merenja.

Što je veći kondicion veća je korelacija između putanjskih ele-

menata i obrnuto. Obe veličine su veće za parove kod kojih merenja pokrivaju kraće lukove putanje.

Tačnost određivanja putanjskih elemenata je veća kada je duži luk putanje pokriven merenjima i kod preciznijih merenja. Ocene grešaka dobijene posredno i neposredno iz kovarijacione matrice putanjskih elemenata znatno se razlikuju kod kraćih lukova, a nema uticaja merenja različite preciznosti.

Glavni zaključak ovog rada je:

Koeficijenti korelacije putanjskih elemenata su obrnuto srazmerni dužini luka prividne orbite i ne zavise od preciznosti merenja.

Literatura

- [1] Docobo, J.A.: 1985, *Celestial Mechanics*, **36**, 143.
- [2] Eichhorn, H.K. & Xu, Yu-Lin: 1990, *AJ*, **358**, 575.
- [3] Grin, R.M.: 1998, *Astronomija - klasika u novom ruhu*, Izdanje Vesta Co. Beograd.
- [4] Hartkopf, W.I. & Mason, B.D.: 2006, Sixth Catalog of Orbits Visual Binary Stars, US Naval Observatory, Washington. Electronic version <http://ad.usno.navy.mil/wds/orb6.html>.
- [5] Heintz, W.D.: 1977, Double stars.
- [6] Hartkopf, Mason, Wycoff & McAlister: 2006, Fourth Catalog of Interferometric Measurements of Binary Stars. Electronic version <http://ad.usno.navy.mil/wds/int4.html>.
- [7] Кутю, П.: 1981, Наблюдения визуально - двойных звезд, Москва.
- [8] Mason at al.: 2006, The Washington Visual Double Star Catalogue. Electronic version <http://ad.usno.navy.mil/wds/wds.html>.
- [9] Novaković, B.: 2006, Poredjenje metoda za odredjivanje orbitalnih elemenata vizuelno dvojnih zvezda, Pripravnički rad.
- [10] Olević, D. & Cvetković, Z.: 2004, *A&A*, **415**, 259.
- [11] Perović, G.: 2005, Metod najmanjih kvadrata, (Monografija 1).
- [12] Pourbaix, D.: 1994, *A&A*, **290**, 682.
- [13] Субботин, М.Ф.: 1968, Введение в теоретическую астрономию Москва - Наука.
- [14] Vukićević-Karabin, M. i Atanacković-Vukmanović, O.: 2004, *Opšta astrofizika*.
- [15] Čatović, Z. & Olević, D. 1992, *IAU Coll.*, **135**, ASP Conf. Ser., **32**, 217.

15 DODATAK

Merenja za WDS 00155-1608.

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1993.6060	236.06	0.398	1995.9430	353.93	0.219
1994.3890	200.18	0.287	1996.4210	308.87	0.281
1994.6210	181.70	0.242	1996.4785	305.30	0.291
1994.7890	161.73	0.213	1996.5737	298.81	0.306
1994.9160	146.56	0.194	1996.9834	278.52	0.364
1995.4810	56.69	0.194	1997.4934	258.50	0.406
1995.5830	41.68	0.198	1997.8592	247.31	0.411
1995.6940	26.29	0.205	1997.9635	243.23	0.410
1995.8280	8.36	0.209	2004.9902	2.7	0.218

Merenja za WDS 00247-2653.

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1993.57	330.0	0.267	1997.648	25.4	0.450
1993.574	328.5	0.266	1997.878	26.5	0.439
1994.33	348.2	0.346	1998.004	28.0	0.432
1994.330	346.9	0.341	1998.346	32.3	0.408
1994.705	352.7	0.375	1998.773	38.2	0.377
1994.730	353.9	0.382	1999.461	49.4	0.318
1995.044	356.1	0.400	1999.587	52.1	0.303
1995.518	3.2	0.439	1999.666	54.6	0.292
1995.532	3.7	0.436	1999.893	60.1	0.279
1996.041	9.0	0.459	2000.424	76.0	0.240
1996.641	14.9	0.465	2000.468	80.8	0.237
1996.739	15.8	0.468	2000.6260	83.77	0.2305

Merenja za WDS 00247-2653 (nastavak).

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
2000.9490	96.42	0.2199	2003.4890	171.92	0.3735
2002.5610	154.46	0.2939	2003.6780	174.48	0.3878
2002.6949	157.47	0.3051	2003.7030	174.83	0.3899
2002.8051	159.72	0.3153	2003.9410	177.91	0.4061
2002.8730	161.09	0.3206	2003.9470	177.91	0.4066
2002.9580	162.80	0.3290	2004.9460	189.38	0.4496
2003.0680	164.75	0.3390	2006.8300	209.58	0.3992
2003.3940	170.75	0.3672	2007.5389	220.63	0.3435
2003.4430	171.36	0.3701	2007.5630	220.99	0.3421
2003.4590	171.57	0.3712			

Merenja za WDS 00321+6715.

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1989.7803	42.7	0.451	1995.7693	157.5	0.526
1989.9418	43.9	0.453	1996.7448	172.1	0.533
1990.6954	57.1	0.405	1997.8789	190.2	0.460
1991.7201	71.6	0.443	2001.1095	302.3	0.334
1993.7474	122.5	0.464	2001.8406	325.5	0.402
1994.0767	129.3	0.478	2002.7994	348.2	0.463
1994.7064	141.1	0.510	2004.9902	28.8	0.470
1994.9501	145.2	0.532	2005.803	45.5	0.451

Merenja za WDS 01350-2955.

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1920.86	273.1	0.24	1934.89	288.9	0.19
1922.94	37.2	0.21	1934.98	295.1	0.14
1925.88	290.6	0.20	1935.58	314.3	0.20
1926.90	340.2	0.16	1935.85	330.6	0.20
1927.92	95.0	0.13	1935.87	336.3	0.21
1928.86	207.8	0.17	1935.87	338.3	0.21
1929.55	249.3	0.21	1935.94	342.4	0.16
1929.55	246.7	0.17	1935.98	348.3	0.19
1929.56	250.5	0.21	1936.56	28.6	0.17
1929.76	261.9	0.24	1936.94	77.3	0.14
1929.82	253.3	0.22	1936.95	69.8	0.16
1929.95	267.8	0.20	1937.57	171.2	0.14
1930.0	257.3	0.23	1937.86	197.0	0.17
1930.09	277.8	0.19	1937.89	193.1	0.19
1930.54	294.0	0.23	1938.64	253.4	0.21
1930.68	304.8	0.22	1938.79	255.5	0.23
1930.88	313.5	0.23	1939.76	304.8	0.22
1931.55	358.0	0.18	1939.79	300.5	0.21
1931.81	10.3	0.16	1942.70	226.2	0.20
1931.94	26.0	0.16	1943.59	270.9	0.25
1932.55	86.2	0.18	1944.63	308.0	0.23
1932.90	177.4	0.17	1945.562	22.0	0.18
1932.91	154.7	0.16	1945.90	54.2	0.16
1932.96	166.4	0.15	1946.98	197.6	0.19
1933.53	225.3	0.20	1947.94	262.2	0.20
1933.62	230.1	0.19	1948.95	305.5	0.21
1933.75	232.6	0.18	1952.90	322.6	0.190
1933.99	255.2	0.18	1952.96	282.7	0.219
1934.03	250.5	0.20	1953.88	314.8	0.158
1934.58	271.9	0.22	1953.94	328.5	0.180

Merenja za WDS 01350-2955 (nastavak).

Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$	Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$
1954.95	57.2	0.13	1975.723	279.8	0.20
1955.03	56.7	0.140	1977.920	71.1	0.16
1955.99	186.0	0.140	1978.8699	198.8	0.150
1956.86	248.2	0.19	1978.8727	196.1	0.160
1959.86	90.3	0.15	1978.97	204.2	0.17
1959.98	117.2	0.117	1989.9355	303.0	0.213
1960.82	216.2	0.17	1990.9156	353.9	0.167
1961.03	227.6	0.181	1991.25	329.0	0.183
1962.00	279.0	0.199	1991.7129	74.0	0.140
1963.01	320.0	0.191	1999.8855	345.9	0.180
1963.96	37.4	0.13	2008.5407	319.6	0.2025
1963.988	38.6	0.131	2008.5489	319.9	0.2021
1964.95	146.5	0.13	2008.6060	322.7	0.2001
1965.000	174.8	0.122	2008.6061	322.7	0.2004
1966.35	264.0	0.14	2008.6061	322.7	0.2001
1967.030	296.6	0.229	2008.7673	331.0	0.1928
1968.96	93.4	0.12	2008.7673	330.7	0.1950
1970.552	251.0	0.22			

Merenja za WDS 04041+3931.

Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$	Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$
1830.52	11.6	2.80	1874.20	352.5	1.4
1831.86	10.0	3.43	1879.61	353.7	1.99
1845.17	5.8	2.47	1880.05	353.1	1.13
1853.23	4.0	2.50	1889.97	336.2	0.75
1857.21	6.0	2.23	1894.67	320.8	0.52
1864.65	0.4	1.67	1896.10	322.7	0.49

Merenja za WDS 04041+3931 (nastavak).

Epoha	θ [°]	ρ ["]	Epoha	θ [°]	ρ ["]
1898.96	306.7	0.80	1929.10	174.1	0.87
1899.19	284.3	0.77	1929.81	170.8	0.84
1899.19	292.7	0.46	1933.12	167.7	0.77
1900.19	282.8	0.41	1935.17	172.4	1.01
1903.13	229.8	0.46	1935.20	161.8	0.80
1904.13	239.2	0.57	1936.13	161.8	0.87
1904.13	234.0	0.43	1936.20	162.4	1.03
1904.95	230.6	0.32	1937.14	162.4	0.86
1907.19	223.6	0.53	1937.83	155.8	0.72
1908.18	196.7	0.59	1938.12	158.6	0.90
1909.077	205.7	0.47	1938.15	154.6	0.71
1909.16	192.9	0.65	1939.03	158.0	1.02
1910.777	198.3	0.63	1939.08	157.2	0.88
1912.81	198.7	0.66	1939.84	153.4	0.71
1913.062	196.1	0.61	1940.11	155.5	0.92
1914.88	185.7	0.54	1940.94	150.9	0.67
1915.927	193.8	0.74	1941.13	154.0	0.89
1916.19	191.4	0.82	1942.12	153.1	0.88
1917.86	183.5	0.78	1943.12	150.5	0.86
1918.437	185.1	0.73	1943.14	148.3	0.65
1918.937	181.3	0.88	1943.82	146.7	0.75
1920.150	180.8	0.65	1944.70	148.7	0.84
1920.65	186.4	0.85	1946.84	138.7	0.71
1921.072	182.4	0.70	1947.68	139.5	0.69
1921.772	183.9	0.71	1948.75	138.6	0.82
1921.79	182.0	0.74	1949.17	138.1	0.88
1921.93	180.7	0.78	1949.90	122.3	0.74
1924.82	174.7	0.80	1949.96	131.6	0.73
1927.10	169.4	0.92	1950.08	134.8	0.81
1927.59	172.9	0.93	1950.87	125.7	0.56

Merenja za WDS 04041+3931 (nastavak).

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1951.09	135.5	0.81	1967.502	99.2	0.80
1951.22	133.9	0.65	1969.16	93.3	0.73
1951.71	130.2	0.60	1971.078	93.4	1.03
1952.15	132.9	0.86	1971.88	94.2	0.82
1952.88	126.2	0.74	1974.920	87.0	0.78
1953.12	129.3	0.82	1975.85	85.6	0.87
1954.16	125.7	0.82	1976.98	85.3	0.85
1955.07	123.5	0.76	1980.050	80.6	1.02
1955.11	124.3	0.88	1980.895	78.4	0.81
1955.12	165.1	0.83	1982.09	75.1	1.00
1955.19	123.8	0.67	1983.141	76.7	0.94
1955.95	117.9	0.61	1983.742	74.0	0.96
1956.12	121.0	0.87	1986.322	75.6	1.09
1957.13	119.6	0.88	1986.95	75.5	0.99
1957.76	118.7	0.78	1988.123	75.0	0.88
1958.09	109.1	0.56	1988.8074	73.0	1.1
1958.11	116.1	0.92	1989.794	70.0	1.00
1958.70	119.2	0.81	1990.103	69.8	1.18
1959.02	116.7	0.69	1991.25	68.3	1.131
1959.89	111.5	0.67	1991.46	68.1	1.148
1960.35	108.9	0.70	1995.06	65.6	1.19
1961.01	111.7	0.68	1996.109	65.2	1.23
1961.15	111.9	0.70	1997.070	64.6	1.20
1962.09	107.9	0.74	1997.819	62.9	1.24
1962.60	108.2	0.66	1999.00	60.3	1.19
1962.88	110.0	0.65	2000.53	60.9	1.25
1963.081	109.8	0.67	2001.0195	61.3	1.307
1964.090	104.2	0.84	2001.9884	63.9	1.25
1965.040	102.2	0.65	2003.053	60.8	1.30
1965.09	101.8	0.74	2006.067	57.8	1.398
1965.784	102.3	0.82			

Merenja za WDS 04184+2135.

Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$	Epoha	$\theta[^\circ]$	$\rho['']$
1975.7160	466.0	0.080	1984.8433	162.8	0.148
1975.9591	451.9	0.074	1984.8457	164.0	0.148
1976.8574	394.9	0.069	1984.8513	165.4	0.147
1976.8602	393.5	0.073	1984.9308	164.5	0.141
1976.9229	392.9	0.072	1984.9998	161.1	0.144
1977.0868	386.7	0.083	1985.1063	161.0	0.137
1977.6398	368.8	0.101	1985.1826	156.4	0.142
1977.7420	363.1	0.110	1985.1855	158.3	0.146
1978.1490	352.2	0.113	1985.2048	158.0	0.125
1978.6183	340.7	0.108	1985.740	144.9	0.118
1978.8756	333.3	0.086	1985.8378	146.7	0.117
1979.7735	304.3	0.090	1985.8406	145.5	0.123
1980.1532	285.9	0.075	1985.8541	146.7	0.123
1980.7182	259.0	0.079	1986.6573	127.2	0.095
1980.7263	255.8	0.085	1986.8865	111.3	0.089
1980.7291	259.1	0.087	1986.8890	112.5	0.086
1982.7550	191.4	0.139	1987.7655	417.4	0.078
1982.7579	192.3	0.141	1988.1646	394.4	0.081
1982.7605	190.0	0.136	1988.6554	376.2	0.095
1982.7633	192.5	0.143	1988.6582	375.5	0.096
1982.7661	193.0	0.136	1988.9095	368.0	0.108
1983.0472	186.0	0.138	1989.1611	360.4	0.123
1983.0637	187.7	0.156	1989.1639	363.0	0.114
1983.7108	181.9	0.152	1989.1666	362.6	0.113
1983.7135	179.5	0.155	1989.2292	360.9	0.111
1983.9337	181.0	0.149	1989.7067	347.0	0.112
1983.9579	176.7	0.157	1989.7123	348.0	0.120
1984.0522	175.1	0.152	1989.8078	347.1	0.114
1984.0576	174.9	0.152	1990.2697	340.5	0.112
1984.0603	172.9	0.142	1990.7552	318.3	0.101
1984.779	157.3	0.146	1991.8938	257.6	0.096

Merenja za WDS 04184+2135 (nastavak).

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1992.6916	230.	0.10	1995.1487	179.2	0.151
1993.7655	199.1	0.127	1995.7631	171.2	0.155
1993.914	194.	0.139	1995.9268	167.2	0.150
1993.9170	198.6	0.124	1996.025	168.	0.146
1993.9198	197.1	0.126	1996.8689	156.8	0.121
1994.7189	183.9	0.1464	1997.1364	148.1	0.123
1994.9430	180.7	0.148	1998.7776	83.0	0.069
1994.9456	181.2	0.147	2005.8634	189.6	0.155

Merenja za WDS 04400+5328.

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1828.28	311.9	1.53	1870.02	299.0	1.63
1831.31	310.9	1.65	1872.13	293.4	1.76
1831.85	308.3	2.0	1873.25	298.5	1.3
1833.90	307.1	1.93	1873.29	299.0	1.5
1834.49	307.9	1.9	1875.09	294.3	1.54
1836.28	308.7	1.7	1878.26	289.0	1.52
1842.15	301.5	1.69	1878.90	291.6	1.81
1845.84	306.4	1.8	1879.293	294.4	1.61
1846.45	302.9	1.56	1880.11	294.0	2.07
1851.29	300.8	1.63	1880.18	295.3	1.7
1852.06	304.8	1.46	1880.18	293.0	1.49
1853.19	303.7	1.94	1882.26	293.7	1.57
1855.26	303.5	1.40	1882.93	291.9	1.87
1855.36	303.4	1.7	1888.03	289.8	1.60
1857.14	300.6	1.74	1888.92	291.9	1.58
1861.25	299.8	1.62	1890.955	277.8	1.69
1863.24	299.5	1.68	1895.34	286.1	1.78
1864.19	300.3	1.68	1895.920	292.2	1.72
1868.75	288.8	1.64	1898.16	284.8	1.47

Merenja za WDS 04400+5328 (nastavak).

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1898.17	284.8	1.61	1930.28	274.4	1.28
1898.18	285.9	1.60	1930.54	271.0	1.16
1898.18	287.1	1.49	1932.19	263.7	1.56
1901.05	288.7	1.54	1933.20	273.6	1.42
1902.19	285.4	1.48	1938.13	274.6	1.28
1902.69	285.1	1.59	1938.17	268.0	1.34
1904.65	272.6	1.51	1939.07	267.0	1.20
1909.29	284.9	1.78	1939.11	266.6	1.32
1909.37	284.7	1.49	1940.10	268.7	1.23
1910.17	287.8	1.53	1942.22	269.3	1.22
1911.16	282.0	1.49	1943.14	264.1	1.29
1912.21	280.0	1.46	1943.40	264.4	1.18
1913.02	282.0	1.39	1946.01	259.6	1.18
1913.05	281.1	1.65	1948.79	261.3	1.12
1914.15	280.0	1.65	1950.15	257.5	1.15
1914.21	284.2	1.70	1951.15	256.6	1.28
1918.67	279.9	1.51	1952.16	257.4	1.18
1920.16	277.3	1.46	1952.17	259.5	1.10
1921.209	276.1	1.49	1953.15	257.0	1.21
1921.75	273.9	1.28	1954.18	256.0	1.14
1921.91	277.9	1.49	1955.16	254.1	1.12
1924.74	273.1	1.32	1956.16	252.5	1.07
1925.14	275.8	1.63	1957.16	251.7	1.12
1927.11	274.9	1.42	1959.11	253.3	0.90
1927.78	277.9	1.78	1959.14	258.1	1.26
1928.24	269.7	1.60	1960.17	250.6	1.12
1929.23	271.1	1.59	1961.02	252.6	1.07
1929.88	272.4	1.59	1961.37	255.8	0.96
1930.00	272.9	1.66	1962.14	251.3	1.04
1930.11	272.5	1.58	1962.89	254.4	0.95

Merenja za WDS 04400+5328 (nastavak).

Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]	Epoha	θ [$^{\circ}$]	ρ [$''$]
1964.967	249.2	0.98	1993.8391	203.8	0.782
1965.057	246.5	0.93	1994.63	209.4	0.72
1965.06	247.8	0.99	1995.13	204.4	0.75
1970.21	240.5	0.98	1995.7684	202.0	0.779
1971.316	238.5	1.04	1995.940	204.0	0.830
1973.02	239.7	0.99	1996.13	204.0	0.71
1975.013	232.5	0.88	1996.8689	199.5	0.780
1977.986	226.	0.88	1997.1364	198.9	0.777
1979.7734	226.4	0.840	1997.8271	197.7	0.781
1980.7291	225.2	0.818	1997.8299	197.1	0.770
1980.8821	224.6	0.836	1998.7775	194.8	0.780
1980.8822	221.7	0.798	1998.9274	195.6	0.775
1984.9968	220.3	0.754	1999.8178	193.1	0.775
1985.00	219.4	0.85	1999.8859	192.7	0.775
1985.8378	220.5	0.759	2000.53	195.4	0.73
1985.8434	219.7	0.743	2000.7651	191.9	0.781
1987.7601	219.5	0.719	2003.9601	183.7	0.739
1989.2294	219.5	0.736	2004.0968	184.1	0.788
1989.2294	219.1	0.732	2005.090	183.3	0.75
1990.7554	214.8	0.764	2005.869	0 180.	6 0.770
1991.25	213.1	0.77	2007.091	180.0	0.753
1991.57	218.2	0.76	2007.197	178.8	0.764

