В. ЖАРДЕЦКИ
професор Универзитета у Београду

Основи Теориске физике

са 47 слика у тексту

БЕОГРАД
1941

Издање

Задужбине Луке Ћеловића Требињца

КЊИГА V

Штампарија Драг. Грегорића, Београд.

ПРЕДГОВОР

Теориска или Математичка физика претставља у наше доба скуп толиког броја проблема, који се усто стално повећава, да је немогућно у једној књизи изложити све теорије из ове области. Зато сам се морао ограничити углавном на питања већег принципског значаја, наводећи само у извесним случајевима посебне проблеме ради бољег схватања општих теорија. „Основи Теориске физике" су предавања која сам држао на Београдском универзитету, допуњена и другим одељцима како би се добила претстава о овој науци као целини. Ово се односи у првом реду на Механику која је изложена врло кратко и само у оноликом обиму, колико је то било потребно за разумевање питања из других грана Теориске физике.

Математичко постављање проблемâ заузима, природно, прво место. Но тежио сам да дам што јаснију претставу и о полазним чињеницама које служе као основе за стварање теорија и помоћу којих се у појединим гранама поступно уводе нови појмови или нови основни закони.

Желео сам такође да истакнем како се Теориска физика од теорија специјалног карактера развија ка општијим теоријама, које обухватају питања из разних грана. У том циљу дати су и прегледи ранијих схватања природе разних појава, из којих би се могла видети еволуција погледа на суштину целог комплекса питања Теориске физике. А водио сам рачуна и о томе да се не добије утисак, да су извесна схватања добила већ свој коначан облик.

Како се претпоставља да је читалац упознат са Експерименталном физиком, из ове се подробније наводе подаци само у неким случајевима. Исто тако се претпоставља познавање основа Теорије вектора из које се у уводу даје известан број података. Због тежње да се смањи обим књиге и број слика је мали, а надам се да читаоцу неће бити тешко да сам према тексту конструише слику где за њом осети потребу.

По себи се разуме да ову књигу треба сматрати као први корак ка упознавању са Теориском физиком, а за дубље упознавање потребно

је проучавање и других дела. Овде наводим она дела којима сам се, поред других, углавном служио при изради ове књиге и која и читаоцима препоручујем:

1. *M. Abraham*, Theorie der Elektrizität. B.B. I, II. Berlin. 1923.

2. *R. Courant u. D. Hilbert*, Methoden der mathematischen Physik. B. I. Berlin. 1924.

3. *Th. de Donder*, Théorie mathématique de l'Electricité. P. I. Paris. 1925.

4. *P. Frank u. R. Mises*, Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik. Braunschweig. 1935.

5. *A. Haas*, Atomtheorie. Berlin. 1936.

6. „ „ Einführung in die theoretische Physik. B.B. I. II. Berlin. 1921.

7. *Handbuch der Physik.* (H. Geiger *u.* K. Scheel). Berlin. Низ чланака у B.B. I-XXIV.

8. *E. Hoppe*, Geschichte der Physik. Braunschweig. 1926.

9. *G. Joos*, Lehrbuch der theoretischen Physik. Leipzig. 1934.

10. *Die Kultur der Gegenwart.* T. III. B. I Physik (E. Warburg). Berlin. 1915.

11. *P. Painlevé*, Cours de Mécanique. Tome I. Paris. 1930.

12. *H. Poincaré*, Electricité et optique. Paris, 1901.

13. *Cl. Schaefer*, Einführung in die theoretische Physik. B.B. I. II. Leipzig. 1914.

14. *W. Voigt*, Kompendium der theoretischen Physik. B.B. I. II. Leipzig. 1895. 1896.

Одбору за штампање уџбеника и научних дела из фонда Задужбине Луке Ћеловића Требињца захваљујем за штампање ове књиге. А нарочиту благодарност дугујем колеги г. Dr Војиславу Мишковићу, професору Универзитета, који је прочитао рукопис и чије су примедбе допринеле да текст на више места постане јаснији. Много труда уложили су г. г. колеге Dr Војислав Мишковић и Ing Никола Обрадовић, професор Универзитета, при читању коректура на чему им такође изјављујем захвалност.

В. Жардецки

САДРЖАЈ

УВОД

Страна

Основи описивања физичких појава 1

А. ТЕОРИЈА ПОЉА

§ 0.1 Скаларно поље 4
0.2 Векторско поље 6
0.3 Тензори. Тензорска поља 12

В. ДИСКРЕТНИ ОБЛИЦИ

§ 0.4 Тачкасти облици 17
0.5 Статистика 20

С. ОПШТА НАЧЕЛА

§ 0.6 Феноменолошко проучавање и атомистика 25
0.7 Принцип одржања енергије 27
0.8 Принцип најмањег дејства 28

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

А. МЕХАНИКА ТАЧКЕ

§ 1 Основни подаци из Кинематике 29
2 Основни појмови Динамике 34
2.1 Основни појмови Динамике тачке 35
2.2 Једначине кретања материјалне тачке 37

Страна

§ 2.3 Теорема живе силе 40
2.4 Централне силе. Њутнов закон гравитације 41
2.5 Разне врсте осцилаторних кретања 44

B. МЕХАНИКА СИСТЕМА

§ 3.1 Материјални систем. Везе 53
3.2 Lagrange-ове једначине 56
3.3 Каноничке једначине 59
4.1 Закон количине кретања. Центар инерције 62
4.2 Закон момента количинâ кретања 63
4.3 Закон живе силе 63
4.4 Интеграли кретања 64
4.5 Кретање у односу на центар инерције 65
4.6 Примедба о законима и интегралима кретања 67
5 Општи принципи Механике 68

C. МЕХАНИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА

§ 6 Кинематика чврстог тела 74
6.1 Апсолутно и релативно кретање 78
7 Геометрија маса 80
8 Динамика 82
8.1 Једначине кретања 83
8.2 Опште примедбе 86

D. МЕХАНИКА НЕПРЕКИДНЕ СРЕДИНЕ

§ 9 Деформација делића 87
10 Унутрашње силе. Опште једначине кретања непрекидне средине 92
11 Различите врсте непрекидних средина 97
11.1 Идеална течност 97
11.2 Вискозна течност 101
11.3 Еластично тело 102
11.4 О другим врстама непрекидних материјалних средина . . 107

ГЛАВА II

АКУСТИКА

§ 12.1 Периодични процеси 109
12.2 Мала кретања система око положаја стабилне равнотеже . 114
12.3 Звучни извори 118
12.4 Таласна једначина. Простирање звука 125

ГЛАВА III

ТОПЛОТА

Страна

§ 13 Основне чињенице и величине 132
13.1 Провођење топлоте 134
13.2 Специјални проблеми провођења топлоте 140
14 Карактеристична једначина 150
15 Два принципа Термодинамике 152
16 Промене стања. Идеални гас 155
17 Термодинамички потенцијали. Равнотежа 166
18 Термодинамички системи. Нернстова теорема 170
19 Кинетичка теорија материје 175
19.1 Примене Болцманове статистике 177
20 Топлотно зрачење; основна идеја квантне хипотезе . . . 185
20* Еволуција схватања природе топлоте 189

ГЛАВА IV

ЕЛЕКТРИЦИТЕТ И МАГНЕТИЗАМ

A. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

§ 21.1 Основне претпоставке 191
21.2 Електростатичко поље тачкастих оптерећења 195
21.3 Поља непрекидно распоређених оптерећења (у вакууму) . 199
21.31 Инфлуенција 208
21.4 Поље у нехомогеном диелектрику 211
21.5 Основни проблем Електростатике 216

B. ЕЛЕКТРИЧНА СТРУЈА

§ 22 Основне величине. Омов закон 222
23 Топлотно дејство струје. Џаулов закон 226
24 Струја у диелектрику. Права струја 227

C. МАГНЕТОСТАТИКА

§ 25 Основне чињенице. Кулонов закон 230
26 Магнетска поља перманентних магнета 232

D. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗАМ

§ 27 Магнетско поље електричне струје. Био-Саваров закон . . 238
27.1 Примери 242

Страна

§ 28 Индукција 244
29 Главне једначине електромагнетског поља 247
29.1 Појнтингова теорема 249
30 Примене закона индукције 250
30.1 Самоиндукција 250
30.2 Узајамна индукција 252
30.3 Пражњење кондензатора 253
30.4 Теслине струје 256
30.5 Узајамно дејство двеју струја 257

Е. ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКИ ТАЛАСИ

§ 31 Једначине електромагнетских таласа 259
31.1 Два случаја ел.-магн. таласа: равански и Херцово решење 263
31.2 Распростирање таласа у полупроводницима и проводницима 271
32 Појаве при распростирању електромагнетских таласа . . 274
32.1 Одбијање и преламање таласа на граници двају диелектрика 274
32.2 Интерференција 279
32.3 Друге појаве 281
33 Распростирање електромагнетских таласа у анизотропним срединама 281
33* Еволуција схватања природе електрицитета и магнетизма 288

ГЛАВА V

СВЕТЛОСТ

§ 34 Геометриска оптика 293
35 Прве теорије светлости 297
36 Електромагнетска теорија светлости 300
36.1 Електромагнетски таласи у покретним срединама 305
36.2 Основне идеје Теорије релативитета 315
37 Зрачење, апсорпција, дисперсија 331
38 Таласна механика 333
38* Еволуција схватања природе светлости 346

ГЛАВА VI

СТРУКТУРА МАТЕРИЈЕ

§ 39 Теорија електрона 350
39.1 Елементарна количина електрицитета: а) електролиза, в) Миликан-Еренхафтова метода 350

Страна

§ 39.2 Провођење електрицитета у гасовима 352
39.3 Једначине и закључци теорије електрона 353
40 Атомски модели 367
40.1 Спектрална анализа 369
40.2 Периодни систем 371
40.3 Позитон и неутрон 373
40.4 Борова теорија атомског склопа 375
41 Атомска механика 384
42 Склоп атомског језгра 388
43* Еволуција схватања структуре материје 391
Азбучни преглед 395

УВОД

ОСНОВИ ОПИСИВАЊА ФИЗИЧКИХ ПОЈАВА

При проучавању физичких појава потребна је и експериментатору извесна класификација. И први корак ка овој била је подела Физике на гране према нашим осећајима; зато су постали Механика, Звук, Топлота и Оптика. Због електричних и магнетских појава, које се не могу уврстити ни у једну од ових грана, требало је проширити поделу. А како се са дубљим проучавањем многих појава показало да неколике од њих припадају разним деловима Физике, то је ова подела почела да губи антропоморфни карактер. Иако се поменута подела формално задржава, стварно је она напуштена, а највише је томе допринело теориско проучавање разних питања која су се постављала при посматрањима.

Теориска или Математичка физика тежи да омогући схватање физичких појава служећи се при њихову описивању математичком анализом. Она бира из великог експерименталног материјала што мањи број основних чињеница које карактеришу, на пр., основне особине материје или групе појава, формулише их математичким језиком и показује, путем рачуна, како се може објаснити низ осталих чињеница. Сасвим природно је било да су се испочетка постављале теорије које су обухватале само групе појава из неке од поменутих грана, а тек доцније је тежња ка синтези доводила до стварања општијих теорија. Механика је прва добивала савршенији теориски облик од осталих грана. Упоредо са овим појављивала се и жеља да се све остале појаве сведу на једну врсту — на механичке појаве. Овај правац мишљења довео је до објашњења акустичких појава и, донекле, топлотних; за светлосне и електричне појаве било је потребно друго тумачење. Тако се дошло пред почетак XX века до поделе Физике у два дела: Меха-

нику и Електродинамику. У први су се могле уврстити: Акустика и низ топлотних појава, у други Магнетизам, Оптика, — пошто су прво теорија а касније и експерименти показали сродну природу светлосних и електромагнетских појава — и, најзад, топлотно зрачење. Но познате су многе везе између појава ових двају делова и једна општија теорија, коју будућност тек треба да створи, мораће да их споји и веже у једну целину.

А. ТЕОРИЈА ПОЉА

Физичке појаве могу се проучавати помоћу математичких метода, ако се за карактеристику стања уоченог тела, одн. средине уведу извесне величине, на пр. температура за топлотно стање, брзина и убрзање — у случају кретања. Оваквих величина има разних врста јер су и физичка стања разнолика. Овде ћемо проучити опште особине оних физичких величина чије се вредности мењају ако прелазимо са једног места тела на друго. Такав је случај, на пр., густине у неком хетерогеном телу. Како вредности величине зависе од положаја, од места, то се оне зову *функције положаја* и, према томе, оне су функције координата места. Наравно, уопште узевши, оне могу бити функције и других променљивих, времена на пр., али засада ћемо узети у обзир само њихову везу са координатама или, што је исто, са вектором положаја неке уочене тачке.

Део простора, област, за коју је дефинисана величина, т.ј. за чије тачке она има неке одређене вредности зове се *поље*. Реч поље употребљује се у два смисла. С једне стране, пољем неке функције зовемо област у којој се мењају независне променљиве; поље у том случају има само геометриски смисао. С друге пак стране, поље се схвата као део простора заједно са носиоцем стања које карактерише дата величина. Дакле, при другом схватању у Физици, пољу се даје одређени физички смисао.

Величине које служе за описивање физичких појава можемо поделити у групе према томе колико је бројева потребно да се зна вредност величине за неку тачку. Служићемо се даље величинама које, у тродимензионалном простору, одређују један, три, шест или девет бројева.

У прву групу спадају *скаларне величине* или *скалари*; то су величине чије су вредности за сваку тачку дате једним бројем. Температура, густина — су величине ове врсте. Поље скаларне величине зове се *скаларно поље*. Другу групу чине *векторске* величине или *вектори*. Сила, брзина материјалног делића — биће вектори. Јер, на пр., у случају силе треба да знамо, осим неке бројне вредности (8 kg), и њен правац. А правац се одређује са два броја — са два угла. Њихова су поља

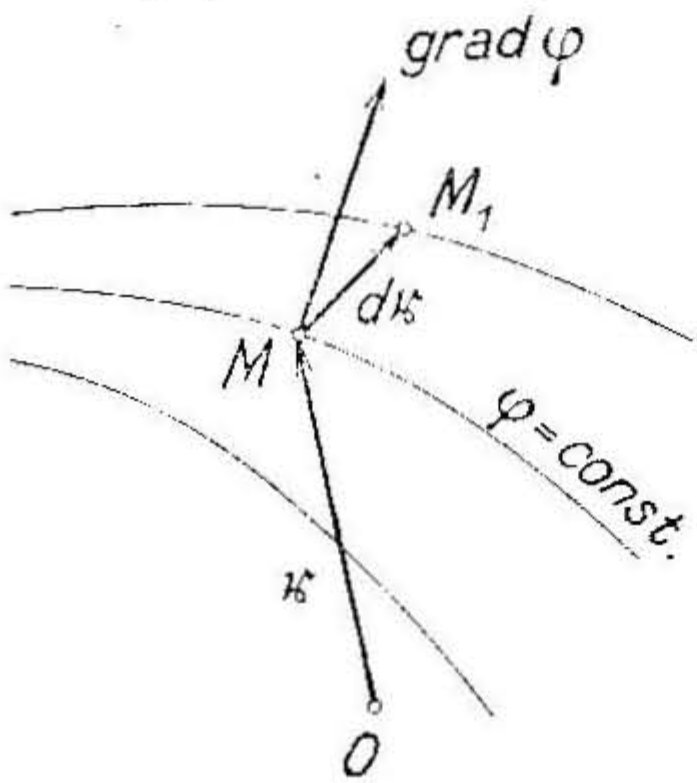
— *векторска*. Најзад, постоје физичка стања која се могу описати само помоћу сложенијих величина, т.зв. *тензора*. На пр., у еластичном телу стварају се напони, и распоред унутрашњих сила, као што ћемо даље видети, карактерише се са шест бројева. Поља таквих величина зову се *тензорска*. Уопштавајући, можемо добити још сложеније величине које се одређују са више од девет бројева, но за математичку анализу физичких појава биће засада довољно да уведемо величине трију споменутих врста.

§ 0.1 Скаларно поље. Нека буде скалар φ одређен у ограниченој или неограниченој области D. Дакле, он је у D функција координата, на пр. правоуглих x, y, z, неке тачке $M : \varphi\,(x, y, z)$, или њеног вектора положаја $\mathfrak{r} : \varphi\,(\mathfrak{r})$. Уопште, у околини тачке M_0, ако претпоставимо да је φ непрекидна функција, има вредности већих, мањих или једнаких φ_0. Ставимо

$$\varphi\,(x, y, z) = \varphi_0\,. \tag{1}$$

Сматрајмо φ_0 за дату константу. Онда једначина (1) одређује неку површину за чије тачке скалар φ има исте вредности (φ_0). Мењајући вредности φ_0 добићемо у пољу скалара φ низ површина, које се зову *еквискаларне*. Ако узмемо у D неку другу површину, на пр. раван која сече еквискаларне површине, на њој ћемо имати *еквискаларне* линије (изотерме, изобаре итд.). Простор између две еквискаларне површине (φ_0) и (φ_1) зове се *ламела*.

Проучимо сада промене вредности скалара φ у околини тачке M. Нека буде дат положај ове тачке у односу на неку сталну тачку (O) (сл. 1), а M_1 је нека друга тачка чији је положај у односу према M дат бескрајно малим вектором $d\mathfrak{r}$ (dx, dy, dz). Вредност $\varphi_1 = \varphi + d\varphi$ у новој тачки зависи од њеног положаја и



Сл. 1

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz\,. \tag{2}$$

Овај израз је скаларни производ вектора $d\mathfrak{r}$ и вектора чије су пројекције $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}$. Овај вектор зове се *градијент* скалара и означава овако:

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\mathfrak{k}\,, \tag{3}$$

ако су $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединични вектори у правцима координатних оса $Oxyz$, што ћемо увек даље претпостављати. Из једначина (2) и (3) следује да је

$$d\varphi = (d\mathfrak{r}\,\operatorname{grad}\varphi)\,. \tag{4}$$

Пројекције gradφ на координатним осама пропорционалне су косинусима углова које образује са координатним осама нормала на површину (1); дакле, градијент стоји у свакој тачки еквискаларне површине управно на овој. Он је усмерен ка страни према којој скалар расте. Доиста, из обрасца (4) следује да, за $d\varphi > 0$, grad φ мора да образује са $d\mathfrak{r}$ оштар угао. Ако ставимо $d\mathfrak{r} = da\,\mathfrak{a}_0$, где је $\mathfrak{a}_0$ јединични вектор у правцу MM_1, добићемо величину

$$\frac{d\varphi}{da} = (\mathfrak{a}_0 \operatorname{grad} \varphi), \tag{5}$$

која се зове извод скалара у правцу вектора $\mathfrak{a}_0$. Ако вектор $d\mathfrak{r} = dn\,\mathfrak{n}$ има правац нормале на еквискаларну површину, имаћемо, место (5), обрасце:

$$\frac{d\varphi}{dn} = (\mathfrak{n} \operatorname{grad} \varphi) \quad \text{и} \quad \left|\frac{d\varphi}{dn}\right| = \left|\operatorname{grad} \varphi\right|. \tag{6}$$

Дакле модуо grad φ даје највећу промену скалара φ, и ова ће бити у правцу нормале на еквискаларну површину. При померању дуж еквискаларне површине имамо $d\varphi = 0$, јер је $d\mathfrak{r} \perp \operatorname{grad} \varphi$.

Познато је из теорије вектора да се градијент може дефинисати и на овај начин:

$$\operatorname{grad} \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F \varphi\, d\mathfrak{f}}{V} = \nabla\varphi, \tag{*}$$

где се интеграл узима по површини F која обухвата запремину V у чијој се унутрашњости налази тачка M, а $d\mathfrak{f}$ је *управљени површински елемент* тј. $d\mathfrak{f} = df\,\mathfrak{n}$. Оператор „дел“ или Hamilton'ов оператор, чија је ознака ∇, показује низ ових операција:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathfrak{k}. \tag{7}$$

Израз (*) зове се први просторни извод скалара φ. Дефиницију и улогу других извода видећемо доцније. Ако φ зависи и од времена, из услова $\varphi = \varphi\,(x, y, z, t)$ следује (упореди са обрасцима 2 и 4)

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}\,dt + (d\mathfrak{r} \operatorname{grad} \varphi). \tag{8}$$

Обрасци:

(9) $\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi$, $\operatorname{grad}\varphi\psi = \psi \operatorname{grad}\varphi + \varphi \operatorname{grad}\psi$, $\operatorname{grad} f(\varphi) = f'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi$;

$\nabla(\varphi + \psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi$, $\nabla(\varphi\psi) = \psi\nabla\varphi + \varphi\nabla\psi$, $\nabla f(\varphi) = f'(\varphi)\nabla\varphi$.

§ 0.2 Векторско поље. Нека буде вектор $\mathfrak{v}$ функција положаја тачака у области D. Онда је $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(x, y, z)$ или $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}(\mathfrak{r})$, а може да зависи и од других променљивих величина. Означимо ли пројекције $\mathfrak{v}$ на координатним осама са $v_x = f_1(x, y, z)$, $v_y = f_2(x, y, z)$, $v_z = f_3(x, y, z)$, имаћемо заједно са векторским пољем три скаларна, јер су скалари v_x, v_y, v_z у D такође функције положаја. За сваку тачку у D $\mathfrak{v}$ има, уопште, одређену вредност. Ако пођемо од извесне тачке, можемо потражити у пољу линију која задовољава услов да у свакој тачки те линије вектор $\mathfrak{v}$ има правац дирке. Линије које имају ову особину зову се *векторске*, а могу се наћи помоћу услова

$$\left[\mathfrak{v}\, d\mathfrak{s}\right] = \mathbf{0}, \tag{10}$$

јер елемент векторске линије $d\mathfrak{s}$ треба да буде *колинеаран* са $\mathfrak{v}$. Ако су dx, dy, dz пројекције $d\mathfrak{s}$, из овог услова следују диференцијалне једначине

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z}. \tag{11}$$

И, када су v_x, v_y, v_z познате функције координата, интеграљењем ових једначина наћи ћемо фамилију векторских линија.

Ако кроз сваку тачку неке затворене криве L повучемо векторску линију, добива се у пољу цев која се зове *соленоид*. Векторске линије, соленоиди, дају извесну претставу о распореду вредности $\mathfrak{v}$ у пољу. Друге особине овог распореда одређују се вредностима величина *просторних* извода вектора $\mathfrak{v}$, који се зову *дивергенција* (div $\mathfrak{v}$) и *ротор* (rot $\mathfrak{v}$):

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}, \tag{12}$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\mathfrak{k}. \tag{13}$$

Скалар div $\mathfrak{v}$ и вектор rot $\mathfrak{v}$ такође су функције положаја тачке у пољу.

У теорији вектора даје се и оваква дефиниција тих величина:

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F (\mathfrak{v}\, d\mathfrak{f})}{V} = \nabla \mathfrak{v}, \quad \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F [d\mathfrak{f}\, \mathfrak{v}]}{V} = [\nabla \mathfrak{v}], \tag{14}$$

где су услови за израчунавање интеграла исти као и код градијента.

Величине $\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}$ и $\int\limits_F \mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}$ зову се *протицање вектора* $\mathfrak{v}$ кроз површински елеменат df, односно кроз површину F.

По *Гаусовој* теореми, ако је F затворена површина која обухвата неку запремину у пољу вектора $\mathfrak{v}$, онда је

$$\int\limits_F \mathfrak{v}\,d\mathfrak{f} = \int\limits_V \operatorname{div}\mathfrak{v}\,dV\,. \tag{15}$$

По *Стоксовој* теореми, ако је L контура која ограничава неку незатворену површину S, а њен је линиски елеменат $d\mathfrak{l}$, онда је

$$\int\limits_L \mathfrak{v}\,d\mathfrak{l} = \int\limits_S \operatorname{rot}\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}\,. \tag{16}$$

Векторска поља деле се у четири врсте, према вредностима дивергенције и ротора, на овај начин: 1) $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ свугде у пољу; $\operatorname{div}\mathfrak{v} \neq 0$ бар у неким тачкама, — ова поља зову се *потенцијална*, *безвртложна* или *ламеларна;* 2) $\operatorname{rot}\mathfrak{v} \neq 0$ бар у неким тачкама, $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ свугде у пољу — *соленоидска* поља; 3) $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ и $\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0$ свугде у пољу — *Лапласова* поља; 4) $\operatorname{rot}\mathfrak{v} \neq 0$ и $\operatorname{div}\mathfrak{v} \neq 0$ у неким тачкама поља — *сложена* поља.

Тачке у којима $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ има позитивне вредности зову се *извори*, оне за које је $\operatorname{div}\mathfrak{v} < 0$ — негативни извори или понори.

Потенцијална поља имају карактеристичну особину, по којој су и добила овај назив: наиме, ако узмемо вектор $\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\varphi$, биће

$$v_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z}, \tag{*}$$

и зато је

$$\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\partial z} = 0.$$

А на исти се начин доказује да су друга и трећа пројекције $\operatorname{rot}\mathfrak{v}$ (види обр. 13) једнаке нули, — дакле и $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$. Обрнуто, ако је $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$, можемо ставити да је

$$\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\varphi\,, \tag{17}$$

и у овом случају скалар φ зове се *потенцијал* вектора $\mathfrak{v}$.

Израз

$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l} \tag{18}$$

зове се линиски интеграл (дуж криве L). У потенцијалном пољу, овај је израз једнак разлици потенцијала у крајњим тачкама криве (A и B). Доиста, из (17) и (4) следује:

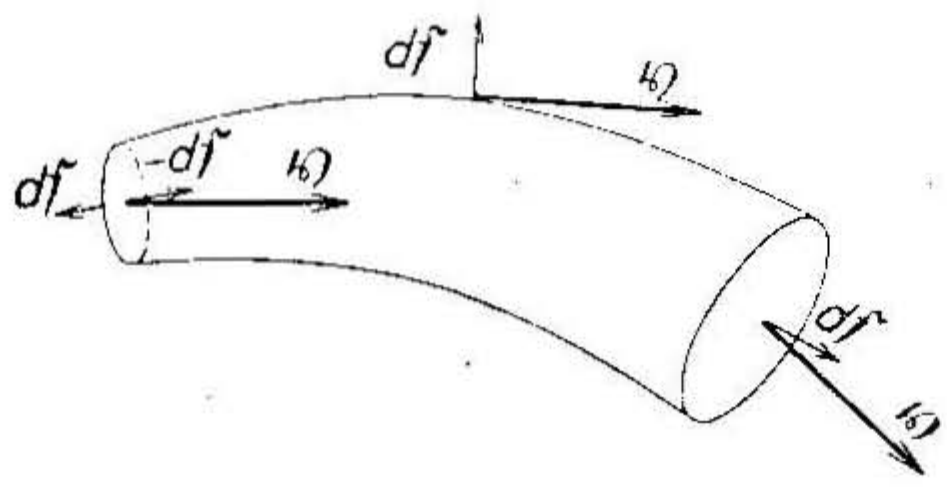
$$\int_L \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l} = \int_A^B d\mathfrak{l}\, \mathrm{grad}\, \varphi = \int_A^B d\varphi = \varphi_B - \varphi_A\,. \tag{19}$$

Ако је L затворена крива и ако је φ једнозначна функција, $\varphi_B = \varphi_A$, те је према томе,

$$\oint \mathfrak{v}\, d\mathfrak{l} = 0\,. \tag{20}$$

Израз који стоји с леве стране уопште се зове *циркулација.* Из услова да постоји потенцијал следи да се, осим векторских линија, у пољу може повући фамилија еквискаларних тј. еквипотенцијалних површина и прве су управне на другима. Дивергенција вектора $\mathfrak{v}$ не мора уопште да ишчезава у свима тачкама потенцијалног поља.

Соленоидска поља имају особину да је $\mathrm{div}\, \mathfrak{v} = 0$ у свима тачкама поља, тј. у пољу нема извора. Ако узмемо део неког соленоида (сл. 2) између два пресека f_1 и f_2, и на ову запремину применимо Гаусову теорему (15), имаћемо



Сл. 2

$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \int_V \mathrm{div}\, \mathfrak{v}\, dV = 0\,.$$

Али је на омотачу $\mathfrak{v} \perp d\mathfrak{f}$, и зато остају површински интеграли само по пресецима f_1 и f_2. На пресеку f_1 мењамо смер управљеног површинског елемента и, према томе, знак интеграла, те ћемо имати

$$\int_{f_1} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \int_{f_2} \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}\,, \tag{21}$$

тј. протицање вектора $\mathfrak{v}$ кроз све пресеке једног соленоида је исто. Ако узмемо врло танке соленоиде и нормалне пресеке ($d\mathfrak{f} \parallel \mathfrak{v}$) и ако

означимо са v_1 и v_2 модуле вектора $\mathfrak{v}$ на пресецима f_1 и f_2 добићемо, место услова (21):

$$v_1 f_1 = v_2 f_2 . \tag{22}$$

Одатле се види да су вредности модула вектора $\mathfrak{v}$ обрнуто пропорционалне површинама нормалних пресека соленоида на дотичним местима. Извесну слику распореда вредности вектора $\mathfrak{v}$ можемо добити, ако у пољу тако повучемо низ соленоида да протицање буде исто кроз све њихове пресеке. Тамо где соленоиди постају ужи модуо вектора $\mathfrak{v}$ је већи, а и правце векторских линија, такође, видимо из облика соленоида. Само за смер вектора $\mathfrak{v}$ морамо да знамо где се налазе извори (и то ван поља).

Лапласова поља, у којима ишчезавају div $\mathfrak{v}$ и rot $\mathfrak{v}$, имају све особине првих двеју група поља. Комбинујући ове услове добивамо нову карактеристичну особину ових поља. Имамо

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

а, диференцирањем по x, добићемо:

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 .$$

Из услова rot $\mathfrak{v} = 0$ и (13) следи

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial x} = \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \frac{\partial v_z}{\partial y} = \frac{\partial v_y}{\partial z} .$$

А сменом прва два извода у претходној једначини добићемо

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} = 0 .$$

На исти начин доказује се да, поред v_x, и пројекције v_y и v_z задовољавају т.зв. *Лапласову* једначину чији је облик

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 . \tag{23}$$

Најзад, четврта група поља, сложених, претставља општи случај који се може свести на проучавање двају поља: потенцијалног и соленоидског. Доиста, како је сада

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = e \neq 0 \text{ и } \operatorname{rot} \mathfrak{v} = \mathfrak{w} \neq 0 ,$$

то ставимо $\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2$, и узмимо тако векторе $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ да буде

$$\operatorname{div} \mathfrak{v}_1 = e, \ \operatorname{div} \mathfrak{v}_2 = 0 ; \ \operatorname{rot} \mathfrak{v}_1 = 0 , \ \operatorname{rot} \mathfrak{v}_2 = \mathfrak{w}.$$

Поље вектора $\mathfrak{v}_1$ биће потенцијално, а $\mathfrak{v}_2$ — соленоидско.

У низу проблема везаних за проучавање поља биће потребно да се уведу и други просторни изводи другога реда. Зато ћемо показати укратко, помоћу оператора ∇, како се они израчунавају.

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \nabla \nabla \varphi ,$$

а због обрасца (3), (12) или (7), и вредности скаларних производа јединичних ортогоналних вектора $(\mathfrak{i}\mathfrak{i}) = (\mathfrak{j}\mathfrak{j}) = (\mathfrak{k}\mathfrak{k}) = 1$, $(\mathfrak{i}\mathfrak{j}) = (\mathfrak{j}\mathfrak{k}) = (\mathfrak{k}\mathfrak{i}) = 0$, биће

(24) $$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \nabla^2 \varphi.$$

Ако се уведе ознака

(25) $$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \text{ (Лапласов оператор),}$$

биће

(26) $$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \triangle \varphi .$$

Лапласову једначину можемо сада писати у облику

(27) $$\operatorname{div} \operatorname{grad} u = 0 \quad \text{или} \quad \triangle u = 0 .$$

Даље је, због образаца (7), (3) и (14), или (13), и познате особине векторског производа колинеарних вектора

(28) $$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \left[\nabla \nabla \varphi\right] = \left[\nabla \nabla\right] \varphi = 0 .$$

За вектор функцију $\mathfrak{v}$ имаћемо низ оваквих извода другога реда.

(29) $$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{v} = \nabla (\nabla \mathfrak{v}) = \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial x}\right) \mathfrak{i} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z \partial y}\right) \mathfrak{j} + \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right) \mathfrak{k}$$

због образаца (3) и (12).

Даље је, због образаца (12) и (13)

(30) $$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \left(\nabla\left[\nabla\mathfrak{v}\right]\right) = 0.$$

Најзад, ако се на израз

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \left[\nabla[\nabla\mathfrak{v}]\right]$$

примени образац векторске алгебре $[\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}) - (\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$, и стави $(\nabla\nabla) = \Delta$, биће

(31) $$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{v} - \Delta\mathfrak{v}$$

— вектор чије се пројекције могу израчунати помоћу образаца (29) и (25).

Гринови обрасци (Green). Ако се у Гаусовој теореми (15) стави да је

$$\mathfrak{v} = W\operatorname{grad}U,$$

где су U и W два скалара, и ако се израчуна помоћу образаца (3) и (12) израз

(32) $$\operatorname{div}(W\operatorname{grad}U) = \operatorname{grad}U\ \operatorname{grad}W + W\Delta U,$$

добива се први Гринов образац

(33) $$\int_F W\operatorname{grad}U\,d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{grad}W\operatorname{grad}U\,dV + \int_V W\Delta U\,dV.$$

Ставимо ли да је $\mathfrak{v} = U\operatorname{grad}W$ и одузмемо ли нови Гринов образац од (33), добићемо други Гринов образац

(34) $$\int_F (W\operatorname{grad}U - U\operatorname{grad}W)\,d\mathfrak{f} = \int_V (W\Delta U - U\Delta W)\,dV.$$

Ако, најзад, скалари U и W задовољавају Лапласову једначину, биће $\Delta U = 0$ и $\Delta W = 0$ и због обрасца (34):

(35) $$\int_F W\operatorname{grad}U\,d\mathfrak{f} = \int_F U\operatorname{grad}W\,d\mathfrak{f}$$

— трећи Гринов образац.

Слично обрасцу (8) доказује се да је

(**) $$d\mathfrak{v} = \frac{\partial\mathfrak{v}}{\partial t}\,dt + (dt\,\nabla)\,\mathfrak{v},$$

на основу обрасца (12) — да је

(***) $$\operatorname{div} u\mathfrak{v} = (\mathfrak{v} \operatorname{grad} u) + u \operatorname{div} \mathfrak{v} \quad \text{или} \quad \nabla (u\mathfrak{v}) = (\mathfrak{v} \nabla u) + u \nabla \mathfrak{v}$$

а на основу обрасца (13) — да је

(°) $$\operatorname{rot} u\mathfrak{v} = [\operatorname{grad} u, \mathfrak{v}] + u \operatorname{rot} \mathfrak{v} \quad \text{или} \quad [\nabla u\mathfrak{v}] = [\nabla u, \mathfrak{v}] + u [\nabla \mathfrak{v}] .$$

§ 0.3 Тензори. Тензорска поља. Нека буде $\mathfrak{w}(w_x, w_y, w_z)$ линеарна функција вектора $\mathfrak{v}(v_x, v_y, v_z)$, коју ћемо означити овако:

(36) $$\mathfrak{w} = \Phi \mathfrak{v} ,$$

а то значи да су координате првог вектора линеарне хомогене функције координата другог:

(37) $$\begin{aligned} w_x &= a_{11} v_x + a_{12} v_y + a_{13} v_z , \\ w_y &= a_{21} v_x + a_{22} v_y + a_{23} v_z , \\ w_z &= a_{31} v_x + a_{32} v_y + a_{33} v_z . \end{aligned}$$

Зато, раставимо ли $\mathfrak{v}$ у компоненте $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$, имаћемо везу

(38) $$\Phi(\mathfrak{v}_1 + \mathfrak{v}_2) = \Phi \mathfrak{v}_1 + \Phi \mathfrak{v}_2 .$$

Ако уведемо три вектора $\mathfrak{a}_i$ (a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}), $i = 1, 2, 3$, можемо ставити

(39) $$\begin{gathered} w_x = \mathfrak{a}_1 \mathfrak{v}, \quad w_y = \mathfrak{a}_2 \mathfrak{v}, \quad w_z = \mathfrak{a}_3 \mathfrak{v} \\ \mathfrak{w} = \mathfrak{i} (\mathfrak{a}_1 \mathfrak{v}) + \mathfrak{j} (\mathfrak{a}_2 \mathfrak{v}) + \mathfrak{k} (\mathfrak{a}_3 \mathfrak{v}) . \end{gathered}$$

Упоређењем овог израза са (36) добићемо да је

(40) $$\Phi = \{\mathfrak{i}, \mathfrak{a}_1\} + \{\mathfrak{j}, \mathfrak{a}_2\} + \{\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_3\} ,$$

ако се десна страна у једначини (36) схвати као резултат множења извесне величине Φ и вектора $\mathfrak{v}$. Ова величина зове се *тензор* (или *афинор)* и израз (40) показује да се она одређује помоћу три вектора $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3)$, тј. помоћу девет скалара a_{ik}. У изразу (40) тензор Φ претстављен је као збир трију израза, који се зову *дијаде* или *дијадички производи,* и помножити дијаду скаларно с десне стране неким вектором $\mathfrak{v}$ (као што смо учинили) значи написати производ првог вектора у дијади ($\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ или $\mathfrak{k}$) и скаларног производа другог ($\mathfrak{a}_1$, $\mathfrak{a}_2$ или $\mathfrak{a}_3$) са $\mathfrak{v}$.*)

---

*) Уопште код дијаде: $\{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}\}$, производ с десне стране $\mathfrak{A} (\mathfrak{B} \mathfrak{v})$ разликује се од њена производа са вектором с леве стране $(\mathfrak{v} \mathfrak{A}) \mathfrak{B}$.

Први вектори у дијади (тензору) зову се претходни, други — следећи*). Ако променимо ред претходних и следећих вектора добићемо *коњуговани* тензор

(41) $$\Phi_c = \{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{i}\} + \{\mathfrak{a}_2, \mathfrak{j}\} + \{\mathfrak{a}_3, \mathfrak{k}\}.$$

Ако је $\Phi_c = \Phi$, тензор се зове *симетричним*; у случају $\Phi_c = -\Phi$ он је *антисиметрични*. Напишимо девет пројекција a_{ik}, које се зову *компоненте*, у облику схеме

(42) $$\Phi \begin{cases} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{cases}.$$

У општем случају бројеви a_{ik} различити су, за симетрични тензор је $a_{ik} = a_{ki}$, а за антисиметрични $a_{ik} = -a_{ki}$ и $a_{ii} = 0$. Ову везу између компонената лако је добити, ако се тензори (40) и (41) множе с десне стране скаларно са $\mathfrak{i}$ (односно са $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$) и ако се даље упореде добивени изрази. Дакле, симетрични тензор одређен је са шест бројева, антисиметрични — само са три броја.

Помоћу израза (40) може се доказати да је збир тензора опет тензор. Јединични тензор је

(43) $$J = \{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{u}_1\} + \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{u}_2\} + \{\mathfrak{u}_3, \mathfrak{u}_3\},$$

где су $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ ма која три управна јединична вектора. Производ $J\mathfrak{v} = \mathfrak{v}$. По дефиницији, тензор је величина којом се множи вектор $\mathfrak{v}$ а добива други вектор $\mathfrak{w}$ (36). Он не зависи од координатног система, али његов израз (40) и, дакле, компоненте зависиће од избора овог. Ако узмемо нов систем координатних оса $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ и ставимо

(44) $$\begin{aligned} \mathfrak{i} &= \alpha_1 \mathfrak{u}_1 + \alpha_2 \mathfrak{u}_2 + \alpha_3 \mathfrak{u}_3 \\ \mathfrak{j} &= \beta_1 \mathfrak{u}_1 + \beta_2 \mathfrak{u}_2 + \beta_3 \mathfrak{u}_3 \\ \mathfrak{k} &= \gamma_1 \mathfrak{u}_1 + \gamma_2 \mathfrak{u}_2 + \gamma_3 \mathfrak{u}_3 \end{aligned}$$

у израз (40), и означимо са $\mathfrak{b}_i$ векторе

(45) $$\mathfrak{b}_i = \alpha_i \mathfrak{a}_1 + \beta_i \mathfrak{a}_2 + \gamma_i \mathfrak{a}_3$$

---

*) Уопште је тензор $\Psi = \{\mathfrak{A}_1, \mathfrak{B}_1\} + \{\mathfrak{A}_2, \mathfrak{B}_2\} + \{\mathfrak{A}_3, \mathfrak{B}_3\}$. Ако раставимо претходне векторе у компоненте $\mathfrak{A}_i = A_{i1}\,\mathfrak{i} + A_{i2}\,\mathfrak{j} + A_{i3}\,\mathfrak{k}$ и скупимо дијаде са истим јединичним векторима, добићемо, стављајући $\mathfrak{a}_j = A_{1j}\,\mathfrak{B}_1 + A_{2j}\,\mathfrak{B}_2 + A_{3j}\,\mathfrak{B}_3$, да је $\Psi = \{\mathfrak{i}, \mathfrak{a}_1\} + \{\mathfrak{j}, \mathfrak{a}_2\} + \{\mathfrak{k}, \mathfrak{a}_3\}$. Растављајући следеће векторе у компоненте можемо увек тензору Ψ дати облик $\{\mathfrak{b}_1, \mathfrak{i}\} + \{\mathfrak{b}_2, \mathfrak{j}\} + \{\mathfrak{b}_3, \mathfrak{k}\}$.

добићемо да је

(46) $$\Phi = \{\mathfrak{u}_1, \mathfrak{b}_1\} + \{\mathfrak{u}_2, \mathfrak{b}_2\} + \{\mathfrak{u}_3, \mathfrak{b}_3\}$$

те ће, према томе, нове компоненте бити:

(47) $$\Phi \begin{cases} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{cases} .$$

Нове компоненте тензора могу се израчунати помоћу старих и косинуса углова ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \ldots, \gamma_3$), које образују нове осе са старима на пр.:

(48) $$b_{11} = (\mathfrak{b}_1\, \mathfrak{u}_1) = \alpha_1\, (\mathfrak{a}_1\, \mathfrak{u}_1) + \beta_1\, (\mathfrak{a}_2\, \mathfrak{u}_1) + \gamma_1\, (\mathfrak{a}_3\, \mathfrak{u}_1).$$

Како ови косинуси задовољавају везе

(49) $$\Sigma\, \alpha_i^2 = 1,\ \Sigma\, \beta_i^2 = 1,\ \Sigma\, \gamma_i^2 = 1,\ \Sigma\, \alpha_i\, \beta_i = \Sigma\, \beta_i\, \gamma_i = \Sigma\, \gamma_i\, \alpha_i = 0\,,$$

а због (44) имамо

(50) $$\mathfrak{u}_1 = \alpha_1\, \mathfrak{i} + \beta_1\, \mathfrak{j} + \gamma_1\, \mathfrak{k}, \quad \mathfrak{u}_2 = \ldots$$

(49′) $$\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1,\ \alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1,\ \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1\,,$$

то ће b_{11} бити линеарна функција од a_{ik}. Исто важи за све компоненте b_{ik}.

Али вредности израза

(51) $$S_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33}\,,$$
$$S_2 = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{33} & a_{31} \\ a_{13} & a_{11} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}\,,$$
$$S_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

не мењају се при промени координатног система. Ово су т.зв. *инваријанте* тензора. Доказаћемо на пр. да је S_1 инваријанта. Сабирањем израза (48) и двају сличних за b_{22}, b_{33}, добивамо

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = (\mathfrak{a}_1\,, \alpha_1\, \mathfrak{u}_1 + \alpha_2\, \mathfrak{u}_2 + \alpha_3\, \mathfrak{u}_3) + \cdots = (\mathfrak{a}_1\,, \mathfrak{i}) + \cdots =$$
$$= a_{11} + a_{22} + a_{33} = S_1\,.$$

За различите проблеме Теориске физике од важности су симетрични тензори, а како су они одређени са шест бројева, могу се са њима довести у везу површине другог реда

(52) $$a_{11}\, x^2 + a_{22}\, y^2 + a_{33}\, z^2 + 2\, a_{23}\, yz + 2\, a_{31}\, zx + 2\, a_{12}\, xy = 1.$$

Зовимо ову површину уопште *тензорски* елипсоид, иако ово може да буде и друга површина. Ако уведемо триједар оса $\mathfrak{i}^*\,\mathfrak{j}^*\,\mathfrak{k}^*$ који има почетак у средишту ове површине, а јединичне векторе узмемо усмерене дуж њених главних оса, једначина тензорског елипсоида имаће облик

$$a_1 X^2 + a_2 Y^2 + a_3 Z^2 = 1\,. \tag{53}$$

У исти мах тензор Φ за ове осе имаће само три компоненте

$$\Phi \begin{cases} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{cases} \tag{54}$$

па се његов израз може написати у облику

$$\Phi = a_1 \left\{\mathfrak{i}^*, \mathfrak{i}^*\right\} + a_2 \left\{\mathfrak{j}^*, \mathfrak{j}^*\right\} + a_3 \left\{\mathfrak{k}^*, \mathfrak{k}^*\right\}. \tag{55}$$

Но треба имати у виду да морамо имати још три броја па да се одреди оријентација ових главних оса, с обзиром на дати триједар $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ на пр. три од девет косинуса, који су везани са шест услова (49), или три Ојлерова угла.

Компоненте тензора Φ могу, у претходним обрасцима, бити константне или променљиве величине. Претпоставимо да су оне функције положаја, тј. да је тензор функција положаја тачке у некој области D. Ова се област зове поље тензора или тензорско поље. У њему је, дакле,

$$a_{ik} = g_{ik}\,(x, y, z)\,, \tag{56}$$

а може да зависи и од других величина, на пр. од времена. Уопште, тензорски елипсоиди за разне тачке поља разликоваће се, јер њихове полуосе и оријентација главних оса у простору зависе од вредности коефицијената g_{ik}.

Нека је

$$\Phi = \left\{\mathfrak{G}_1, \mathfrak{i}\right\} + \left\{\mathfrak{G}_2, \mathfrak{j}\right\} + \left\{\mathfrak{G}_3, \mathfrak{k}\right\} \tag{57}$$

променљив тензор. Даље, у теорији непрекидних средина, биће нам потребан његов просторни извод, који ћемо сада дефинисати као скаларни производ оператора ∇ и тензора. Из основних особина оваквог множења (обр. 39 и примедба на стр. 12) следи

$$\nabla\Phi = (\nabla\mathfrak{G}_1)\,\mathfrak{i} + (\nabla\mathfrak{G}_2)\,\mathfrak{j} + (\nabla\mathfrak{G}_3)\,\mathfrak{k}$$

или

$$\nabla\Phi = \mathfrak{i}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{j}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{k}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_3\,. \tag{58}$$

Координате овог вектора зависе, према томе, од првих извода компонената g_{ik} тензора Φ по координатама.

Нека је положај извесне тачке M у простору D одређен вектором $\mathfrak{r}$. Ако вектор

$$\mathfrak{s} = \Phi\mathfrak{r} \tag{59}$$

сматрамо вектором положаја тачке N у другом простору D_1, онда, свакој тачки првог простора одговара тачка другог; другим речима, помоћу овог обрасца врши се трансформација простора D у D_1. Ова трансформација има ове особине.

1. Свака раван (P) у D трансформише се у раван (P_1) у D_1. Доиста, ако је M_0 $(\mathfrak{r}_0)$ тачка у равни P, а $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{b}$ два вектора разних праваца у овој равни, њена је једначина

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \kappa\mathfrak{a} + l\mathfrak{b}\,. \tag{60}$$

Ставимо овај израз за $\mathfrak{r}$ у једначину (59) и означимо

$$\mathfrak{s}_0 = \Phi\mathfrak{r}_0\,,\quad \mathfrak{l} = \Phi\mathfrak{a}\,,\quad \mathfrak{m} = \Phi\mathfrak{b}\,,$$

добићемо

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{s}_0 + \kappa\mathfrak{l} + l\mathfrak{m}\,, \tag{61}$$

тј. раван у простору D_1.

2. Паралелне равни у D трансформишу се у паралелне равни у D_1. Раван P' паралелна са равни P одређена је једначином (60), у којој треба ставити нову вредност $\mathfrak{r}_0'$. Једначина трансформисане равни P_1' биће (61), у коју ће доћи $\mathfrak{s}_0' = \Phi\mathfrak{r}_0'$ на место вектора $\mathfrak{s}_0$. Дакле P_1' биће паралелна P_1.

3. Из прве две особине следи да се паралелне праве у простору D трансформишу у паралелне праве у D_1. Оваква трансформација простора зове се афина, одакле и потиче назив афинор.

Ако узмемо у D лопту

$$(\mathfrak{r}\mathfrak{r}) = 1 = x^2 + y^2 + z^2\,,$$

добићемо из образаца (59) и (57) да је

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{G}_1 x + \mathfrak{G}_2 y + \mathfrak{G}_3 z\,.$$

Нека су ξ, η, ζ пројекције вектора $\mathfrak{s}$. Из три једначине, које дају ове пројекције, израчунајмо x, y, z, на пр., $x = h_{11}\xi + h_{12}\eta + h_{13}\zeta$ и ставимо у једначину лопте. Добићемо уопште узев једначину елипсоида тј. лопта у D трансформише се у елипсоид у D_1.

В. ДИСКРЕТНИ ОБЛИЦИ

§ 0.4 Тачкасти облици. У низу питања Теориске физике јавља се потреба за проучавањем стања врло малих објеката, на пр. њихова кретања или електрична стања и др. Због тога се при математичком описивању дотичних појава уводе појмови о разним тачкастим облицима, тачкама које су носиоци извесне физичке особине. У Механици, на пр., проучавају се кретања *материјалних тачака*, тј. тачака за које су везане масе. Сличном апстракцијом долази се до појма електричне тачке, тј. оне за коју је везана нека коначна количина електрицитета, или до магнетског тачкастог пола. Усамљени, дискретни облици, за које се на првим корацима претпоставља да су тачке, играју улогу и у стварању поља, тј. одређеног стања у некој средини. Тако, на пр., можемо замислити тачку, извор, одакле се у некој средини распростире топлота, или извор светлости. Тиме што се многи дискретни облици своде на тачке, умногоме се олакшава анализа математичких проблема. Но, после овакве анализе, често је потребно, ради дубљег проучавања питања, даље узимати у обзир коначне димензије дискретних облика. На пр., на првом кораку кретање метка проучава се као кретање материјалне тачке, а затим се прелази на његово кретање као тела.

Даље се у случају дискретних облика претпоставља да они могу дејствовати једни на друге. Не прецизирајући начин на који се ово дејство преноси или остварује, формулишемо низ закона којима се одређује узајамно дејство, што је нарочито лако за случај тачкастих облика. По Њутнову закону гравитације, две материјалне тачке привлаче се силом сразмерном њиховим масама (m и m') а обрнуто сразмерном квадрату растојања (r), и, на пр., она сила $\mathfrak{F}$ која дејствује на тачку m' има правац од m' ка m. Означимо ли јединични вектор правца mm' са $\mathfrak{r}_0$, имаћемо

$$\mathfrak{F} = -f\frac{mm'}{r^2}\mathfrak{r}_0 , \tag{62}$$

где је f коефицијент пропорционалности. Исти математички облик имају Кулонови закони у теорији електрицитета и магнетизма.

Силе којима се одбијају или привлаче две тачкасте количине електрицитета, односно два магнетска пола, дате су обрасцима

$$\mathfrak{F} = f_1 \frac{ee'}{r^2} \mathfrak{r}_0, \quad \mathfrak{F} = f_2 \frac{\mu\mu'}{r^2} \mathfrak{r}_0, \tag{63}$$

где су e и e' количине електрицитета, μ и μ' јачине полова. У овим случајевима дискретни облици — тачке, појављују се као места у простору на која дејствују неке силе или која изазивају силе.

Другу улогу играју оне у теорији поља када се јављају као извори неког стања у средини. У теорији вектора извор дефинишемо као тачку у којој дивергенција неког вектора $\mathfrak{v}$ није једнака нули и разликујемо *изворе* за које је $\operatorname{div} \mathfrak{v} > 0$, и *поноре* или негативне изворе: $\operatorname{div} \mathfrak{v} < 0$. Уопште, ове тачке могу бити усамљене тачке или чинити непрекидни низ на линији, површини и у запремини.

Претпоставимо да је, због тога што постоји један извор у некој средини која испуњава простор, изазвано стање које се у свакој тачки (сем извора) одређује вектором

$$\mathfrak{v} = \frac{A}{r^2} \mathfrak{r}_0, \tag{64}$$

[illegible] A нека константа, r растојање уочене тачке M од извора, $\mathfrak{r}_0$ — је- [illegible] вектор у правцу од извора ка тачки M. Ово је математички [illegible] одговара законима (62) и (63). На пр. у случају извора [illegible] можемо сматрати да је овакво стање средине изазвао [illegible] у којем се налази количина електрицитета e. Ставимо сад

$$U = \frac{A}{r}. \tag{65}$$

Онда је, због једнакости $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и образаца (9) и (17),

$$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad} U. \tag{66}$$

Доказаћемо да је у свакој тачки, осим извора,

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} U = 0.$$

Доиста, имамо

$$\operatorname{div} \mathfrak{v} = \operatorname{div} \frac{A}{r^2} \mathfrak{r}_0 = A \operatorname{div} \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = A \left\{ \frac{1}{r^3} \operatorname{div} \mathfrak{r} + \left(\mathfrak{r} \operatorname{grad} \frac{1}{r^3}\right) \right\},$$

и према обрасцу (***) § 0.2, а због једнакости $\operatorname{div} \mathfrak{r} = 3$ и $\operatorname{grad} f(r) = f'(r) \operatorname{grad} r = f'(r) \mathfrak{r}_0$ добићемо

$$A \operatorname{div} \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = A \left\{ \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right\} = 0.$$

Дакле функција $\frac{1}{r}$ задовољава Лапласову једначину (27):

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \tag{67}$$

у свима тачкама, осим извора где она постаје бесконачна ($r = 0$). Извор је сингуларна тачка. Према Гаусовој теореми (15) протицање кроз неку затворену површину, која обухвата запремину V где нема извора ($\operatorname{div} \mathfrak{v} = 0$), биће једнако нули:

$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = 0 . \tag{68}$$

Међутим, ако се у унутрашњости F-а налази извор, протицање није нула. Зовимо га *издашност* извора и докажимо да је она једнака $4\pi A$ у случају када важе обрасци (64—66). Нека је F површина лопте са средиштем у извору

$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = A \int_F \frac{1}{r^2}\, \mathfrak{r}_0\, d\mathfrak{f} .$$

Како је r исто за све тачке површине лопте и $(\mathfrak{r}_0\, d\mathfrak{f}) = df$ површински елемент, биће

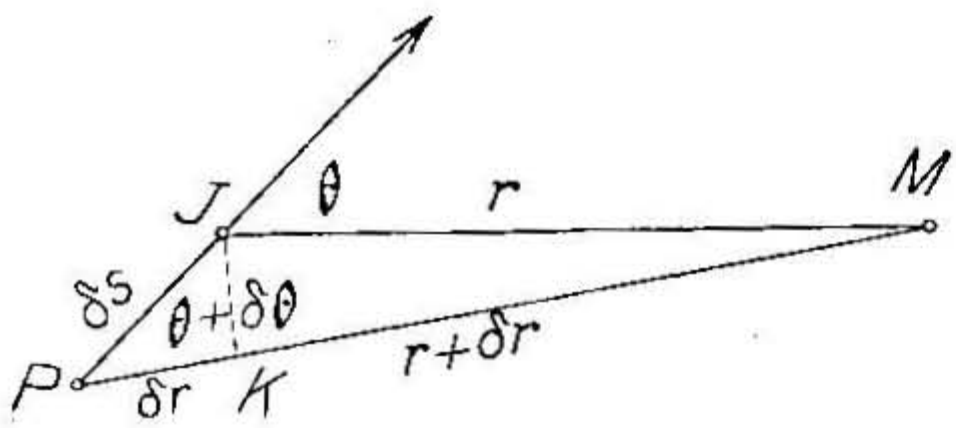
$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = \frac{A}{r^2} \int_F df = \frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi A . \tag{69}$$

Ако се извор налази на самој површини F заокружимо га опет лоптом полупречника r. Тангенцијална раван на F повучена у овој тачки полови површину ове лопте. Протицање пак вектора $\mathfrak{v}$ кроз F биће једнако половини протицања кроз површину лопте. Дакле је

$$\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f} = 2\pi A . \tag{69'}$$

Протицање кроз сваку другу површину која обухвата усамљени извор биће исто као и кроз лопту (ово следује из Гаусове теореме). Скалар $U = \frac{A}{r}$ зове се такође потенцијал вектора $\mathfrak{v}$ (64) и одговара случају усамљеног извора. Осим ове функције играју улогу потенцијали такозваних изворних парова (биполова). Уочимо извор J и понор P који се налазе на бесконачно блиском растојању δs а имају издашности m и $-m$. Величина $m\,\delta s = m^*$ зове се момент изворног пара, а права која иде од P ка J је његова *оса*; m^* биће коначно

ако се узме да је m бесконачно велико. Израчунајмо потенцијал пара у некој тачки M (види слику 3). Имамо због једнакости $m = 4\pi A$



Сл. 3

$$U^* = \frac{m}{4\pi r} - \frac{m}{4\pi(r + \delta r)} = \frac{m\,\delta r}{4\pi r(r + \delta r)}.$$

Али је из троугла KPJ $\delta r = \delta s \cos(\theta + \delta\theta)$, и када се поред коначних занемаре бесконачно мали сабирци биће

$$U^* = \frac{m^* \cos\theta}{4\pi r^2}. \tag{70}$$

Образац (70) може се написати и у другом облику. Нека је $\delta\mathfrak{s} = \delta s\,\mathfrak{u}$ где је $\mathfrak{u}$ јединични вектор правца PJ. Знамо да је $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,\mathfrak{r}_0$, но сада ће $\mathfrak{r}_0$ бити јединични вектор у правцу JM. Биће, дакле, $\cos\theta = (\mathfrak{r}_0\,\mathfrak{u})$. Означимо са $\operatorname{grad}_M\frac{1}{r} = -\operatorname{grad}\frac{1}{r}$, па ће први вектор бити вредност градијента скалара $\frac{1}{r}$ када се тачка M сматра за центар еквипотенцијалних површина овог скалара а мења се положај тачке J. Стављајући ове изразе у образац (70), добићемо

$$U^* = \frac{m^*}{4\pi}\left(\mathfrak{u}\operatorname{grad}_M\frac{1}{r}\right) = \mathfrak{m}\operatorname{grad}_M\frac{1}{r}, \tag{70'}$$

ако се са $\mathfrak{m}$ означи вектор $\frac{1}{4\pi}m^*\mathfrak{u}$ који можемо такође звати *момент изворног пара.*

При овоме доказу искористили смо чињеницу да је потенцијал збира вектора једнак збиру потенцијала, што следује из дефиниције (17). На овим примерима видимо на који се начин појављује веза између дискретних облика — извора и поља неких вектора ($\mathfrak{v}$) или скалара (U). Овакве везе играју важну улогу, као што ћемо ниже видети, при описивању физичких појава.

§ 0.5 Статистика. У основи физичких теорија углавноме лежи принцип каузалитета, према којем, када је дато стање неког система тела, или објеката, у једном тренутку времена и када су познати закони узајамног дејства елемената тог система, они потпуно одређују сва будућа стања. Претпоставља се усто, наравно, да су спољњи утицаји, уколико их има, такође познати. С обзиром на ово постављају се једначине које омогућавају израчунавање величина које карактеришу стања. Али постоје проблеми Теориске физике где се проучавају нека стања, на пр. кретања великог броја дискретних објеката, у којима мате-

матичка анализа постаје често неизводљива када је потребно, полазећи од стања у неком тренутку времена, наћи стање у другом тренутку.

У таквим питањима тражи се решење другим путем — методама статистике. Уопште, предмет статистике је проучавање распореда објеката (индивидуума) неке врсте, а математичку основу за то даје теорија вероватноће. У Физици улогу таквих објеката играју молекули, електрони, фотони. Разликујемо три врсте статистика: класична или Болцманова, Бозе - Ајнштајнова и Ферми - Диракова. Овде ћемо се зауставити само на основним појмовима које ћемо доцније применити.

Посматрајмо неки скуп објеката и неку њихову особину. За карактеристику ове особине уводимо једну или неколико величина. Вредности ових величина падају у неке задате интервале. Када се вредност сваке од ових величина налази у неком од за њу одређених интервала, овим се карактерише одређено стање објекта. Стања уопште има више, те се основни проблем статистике своди на испитивање: како су распоређени објекти према овим стањима.

Означимо са N укупни број објеката, са N_i број оних који се налазе у i-том стању. Онда је $\Sigma N_i = N$. Да бисмо имали распоред према стањима, неопходно је потребно да знамо колико се објеката налази у сваком стању; не игра улогу који су то од датих објеката. Зовимо *комплекс* одређени распоред $(N_1, N_2, \cdots)$. Ако сад узмемо други случај, да број објеката у сваком стању остаје исти али да су неки од њих променили стања, имаћемо други комплекс. Овај, очевидно, одговара истом распореду по стањима, и број комплекса за који је распоред исти зове се *статистичка вероватноћа*. Означимо је са W. Она је једнака броју пермутација свију N елемената, али отпадају оне које одговарају промени места двају објекта у истом стању, тј.:

$$W = \frac{N!}{N_1!\, N_2! \cdots N_i! \cdots}. \tag{71}$$

Ако је N врло велики број, као што је то случај у питањима Теориске физике у којима се примењују статистичке методе, овај образац није згодан за израчунавање вредности статистичке вероватноће. Зато ћемо извести приближну њену вредност. Нека је $\omega_i = \frac{N_i}{N}$; имаћемо $\Sigma\, \omega_i = 1$. Конструишимо криву $y = \ln x$ и израчунајмо површину AMB ограничену делом ове криве између тачака $A\,(1,0)$ и $M\,(n, \ln n)$, отсечком x-осе AB, $B\,(n, 0)$ и ординатом BM. Ова површина је

$$F = \int_1^n \ln x\, dx = \Big[x \ln x\Big]_1^n - \int_1^n dx = n \ln n - n + 1\,.$$

Претпоставимо да је n цео број; ако је доста велики, за прибли-

жну вредност F узмимо збир површина правоугаоника чије су основе једнаке 1 а висине $\ln 2$, $\ln 3 \cdots$; имаћемо

$$\ln 2 + \ln 3 + \cdots + \ln n = n \ln n - n + 1 .$$

Како је n велики број, занемарујући 1, добићемо:

$$\ln(n!) = n \ln n - n.$$

Из овог обрасца и (71) следује сада

$$\ln W = N \ln N - N - \Sigma N_i \ln N_i + \Sigma N_i ,$$

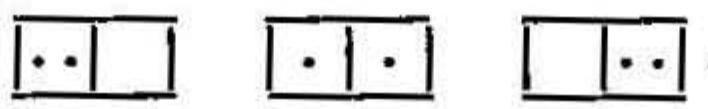
а због једнакости $\Sigma N_i = N$, $\Sigma \omega_i = 1$, добивамо

$$\ln W = - N \Sigma \omega_i \ln \omega_i . \tag{72}$$

Уколико је број комплекса који одговарају одређеном распореду већи утолико је овај *вероватнији* према нашем схватању. Ако распоред R има вероватноћу W, а уочени скуп мења своје стање, онда за два друга распореда, R_1 и R_2, за која је $W_1 < W < W_2$, вероватније је да ће R прећи у R_2. Другим речима, при промени распореда скуп тежи да повећа статистичку вероватноћу. Највероватнији је онај распоред за који је број могућних комплекса највећи. Очевидно је да статистичка вероватноћа има горњу границу и ова је једнака броју свих могућних комплекса, тј., ако има p разних стања, $W < p^N$ јер сваки објект може да се налази у сваком од p стања. Ако се дају неки накнадни услови, које комплекси треба да задовољавају, број могућних комплекса се смањује.

Начин пребројавања могућних комплекса при распореду (N_1, N_2 ... N_i) који доводи од обрасца (71) лежи у основи класичне или Болцманове статистике. Он ће важити ако се објекти уоченог скупа могу индивидуализовати и нумерисати. За два објекта (a и b), који се могу налазити у једноме од два извесна стања, имаћемо овакву схему

Али, ако се проблем постави друкчије, наиме, ако се само пита колико се објеката налази у неком стању, а не који су ту од њих, резултат пребројавања се мења. За исти пример имамо онда схему



Овај случај лежи у основи Бозе — Ајнштајнове статистике у којој се дакле не разликују као засебна она стања која се добивају пермутацијом објеката (место другог и трећег у претходној схеми, у овој се појављује само једно — средње). Нумеришу се сада само стања, а не и објекти. Како се не узима у обзир који се објекти налазе у

разним стањима, то се сваки распоред у дотичним стањима броји само једанпут, тј. броје се комплекси који одговарају одређеном распореду, на пр. место $\boxed{a \mid b}$ $\boxed{b \mid a}$ долази само $\boxed{\bullet \mid \bullet}$.

За ово пребројавање може се поставити други, накнадни услов: у сваком стању може да се налази највише по један објект. Ако се усвоји ова основна претпоставка Ферми - Диракове статистике, онда у споменутом примеру имамо само случај $\boxed{\bullet \mid \bullet}$.

Уопште, број могућних комплекса је једнак $N!$, као што то следује из обрасца (71), за $N_i = 1!$ или $0!$. Број стања мора сада бити $\geqq$ броју објеката.

Вратимо се сада на случај класичне статистике и уведимо накнадне услове друге врсте. Нека је за сваки објект скупа везана на неки начин величина $u_к$, а за цео скуп величина U. Ако се у к-том стању налази $N_к$ објеката, нека је

$$U = \Sigma N_к u_к. \tag{73}$$

Можемо даље додати услов да величина $u_к$ зависи од стања у којем се налази објект, па ће, према томе, она бити функција неких параметара $(p_1, p_2, \cdots p_r)$:

$$u_к = f_к (p_1, p_2, \cdots p_r),$$

чије вредности зависе од стања.

Претпоставимо, најзад, да се број објеката N и величина U не мењају при промени распореда. Статистичка вероватноћа мења се у вези са променом распореда па ћемо потражити онај распоред за који је она extremum. Како ће у исти мах и њен логаритам имати екстремну вредност, то овакав распоред, који се зове *канонички*, морамо наћи из услова

$$\delta \ln W = 0, \ \delta N = 0, \ \delta U = 0 \tag{74}$$

знајући да је $N_к = N \omega_к$ и $\Sigma \omega_к = 1$. Из последњег услова добивамо $\Sigma \delta\omega_к = 0$. Из једначине (72) следи

$$\delta \ln W = - N \Sigma \ln \omega_к \delta\omega_к - N \Sigma \omega_к \frac{1}{\omega_к} \delta\omega_к = - N \Sigma \ln \omega_к \delta\omega_к = 0$$

а из (73):

$$\delta U = \Sigma u_к \, \delta N_к = \Sigma u_к N \delta\omega_к = 0 \text{ или } \Sigma u_к \, \delta\omega_к = 0,$$

јер се величине $u_к$ не мењају. Тражећи условни екстремум, спајамо у један три услова које задовољавају варијације $\delta\omega_к$; стога је потребно да уведемо два множитеља λ_1 и λ_2; имаћемо

$$\Sigma (\ln \omega_к + \lambda_1 u_к + \lambda_2) \delta\omega_к = 0 .$$

Одавде следује да мора бити

$$\ln \omega_к + \lambda_1 u_к + \lambda_2 = 0,$$

или

$$\omega_к = e^{-\lambda_2 - \lambda_1 u_к}.$$

Ставимо ли

$$\lambda_1 = \frac{1}{\theta}, \quad \lambda_2 = -\frac{\psi}{\theta},$$

биће

(75) $$\omega_к = e^{\frac{\psi - u_к}{\theta}}.$$

Нађимо сад услове за одређивање бројева ψ и θ. Имамо

(76) $$\Sigma \omega_к = \Sigma e^{\frac{\psi - u_к}{\theta}} = 1, \quad \text{тј.} \quad e^{-\frac{\psi}{\theta}} = \Sigma e^{-\frac{u_к}{\theta}}$$

и, због (73),

$$U = N \Sigma u_к \omega_к = N \Sigma u_к e^{\frac{\psi - u_к}{\theta}}.$$

Последње две једначине дају

(77) $$U : N = \Sigma u_к e^{-\frac{u_к}{\theta}} : \Sigma e^{-\frac{u_к}{\theta}},$$

одакле се може наћи θ, јер су U, N и $u_к$ познати. Број θ се зове *модуо распореда*. Ставимо

(78) $$\Psi = N\psi = -N\theta \ln \Sigma e^{-\frac{u_к}{\theta}},$$

као што то следује из једначине (76). Бројеви ψ и Ψ могу се израчунати сада помоћу овог услова.

Израчунајмо вредност статистичке вероватноће која му одговара. Из једначина (72), (75), (73), (78), добивамо

$$\ln W = -N\Sigma \frac{\psi - u_к}{\theta} \omega_к = -\frac{N\psi}{\theta} + \frac{1}{\theta} \Sigma u_к N_к,$$

или

(79) $$\ln W = \frac{U - \Psi}{\theta}.$$

Како су U и Ψ функције параметара p_j (и модула распореда), то и статистичка вероватноћа зависи од ових параметара.

На примену ових података из статистике наићи ћемо у теорији топлоте.

С. ОПШТА НАЧЕЛА

§ 0.6 Феноменолошко проучавање и атомистика. Као што је већ речено у Уводу, прво се појављују у Физици теорије које могу објаснити поједине групе појава неке врсте, затим општије теорије обухватају читаве гране и, најзад, долази спајање грана у оквиру једне теорије. Тежећи ка синтези појава теоретичар има за крајњи циљ да створи такву теорију која би могла да објасни све познате физичке појаве. Али Теориска физика није још постигла овај циљ; у њој има теорија ширег или ужег значаја, које се битно разликују по своме карактеру.

На првоме месту имамо теорије које се развијају на следећи начин. Из посматрања неког скупа појава потиче низ основних чињеница. Сматрајући да оне важе уопште за појаве те врсте, уводимо низ појмова и величина који служе за описивања појава; дакле, ослањајући се на посматрања постављамо неке основне везе између горњих величина. Ове се везе формулишу математички, и путем рачунских операција изводи низ закона, закључака, који управљају током појава уочене области (гране). Као у геометрији, тежи се, наравно, што мањем броју основних чињеница (претпоставака), које се бирају усто по могућности међу најједноставнијима што дају посматрања. Теорије ове врсте служе се *феноменолошким начином.*

Овај се начин може доследно спроводити у првој грани Теориске физике, у Механици (идеалног чврстог тела, система материјалних тачака и идеалне течности нарочито). *)

Видећемо, даље, уколико се можемо служити феноменолошким начином у другим гранама. Приметимо само још то да у питањима ове врсте игра углавном улогу теорија поља.

Но има у Теориској физици и теорија које морају, било због тежње да се дубље продре у суштину појаве било силом околности,

---

*) Она је достигла исто толико савршени облик као и Математика, и зато се издваја као Рационална Механика. Али, наравно, питања која ова проучава у исти мах су основна питања и Теориске физике, и Механика остаје грана ове последње.

да у своју основу уграде извесне хипотезе чија тачност не мора наћи потврду (ослонац) у непосредном посматрању (контролисању). Тек закључке (законе) који се изводе помоћу ових хипотеза можемо упоређивати са резултатима посматрања па, ако између њих постоји сагласност, сматрамо да су постављене хипотезе вероватне. Ове врсте је атомска теорија, која се развија нарочито јако у току последњих четрдесет година; у њеној основи лежи атомска хипотеза стара већ 2000 година. Низ појава, на пр. промена запремине тела под дејством спољњих сила, дао је повода старим грчким филозофима да одбаце претпоставку о непрекидности материје и да сматрају да се сва тела састоје из врло малих одвојених делића. Према овоме схватању — атомистици, атоми, недељиве честице, су најмањи делићи материје. Ова хипотеза, одомаћила се у Хемији и, у XIX веку, хемичари су сматрали да постоји 92 различите врсте атома — онолико колико има хемиских елемената. Почетком истога века рађа се идеја (William Prout) да се атоми свију елемената граде од малог броја основних честица, али неког експерименталног ослонца ово гледиште онда још није имало. У низу грана Физике, на пр. у теорији еластичних тела атомска, односно молекуларна, хипотеза није доводила до жељених резултата, али у неким случајевима (Brown-ова кретања, кинетичка теорија гасова) она је имала успеха. На пр. резултати проучавања структуре кристала, која су нарочито напредовала после експеримената Laue (1912 г.) са Рендгеновим зрацима, ишли су у прилог молекуларној хипотези. Проширење атомског схватања на друге области, теорија електрона, убрзо је довело до промена основних идеја. Према савременим подацима, и атоми су компликовани системи који се граде од мањих честица: протона, тј. језгра водоникова атома, електрона и неутрона (честица које нису оптерећене електрицитетом), о чему ћемо детаљније говорити у одељку о структури материје. Атомско се схватање преноси и у теорију светлости: према овој претпоставци, то је рој фотона, светлосних честица.

Но не треба губити из вида да атомска теорија на свом путу наилази и на тешкоће. Споменућемо само ову: атомска хипотеза говори о структури материје, о процесима које непосредно није могућно посматрати а контролишу се тек закључци на основи одговарајућих претпоставки. Зато за општи развитак Теориске физике није још дошло време да се коначно одлучимо за један од споменутих двају начина: за проучавање појава феноменолошким путем или за онај којим води атомска хипотеза.

Док се у атомистици тежило, бар до последњих година, да се створе просте претставе о невидљивим процесима у микрокосмосу, јер је ово требало да олакша схватање процеса у макрокосмосу, феноменолошки начин води другим путем ка синтези појава јер омогућава постављање општих принципа који служе, даље, за описивање појава из појединих

грана, обухватујући их и везујући једном општом идејом; са таква два принципа упознаћемо се у идућим параграфима.

§ 0.7 Принцип одржања енергије. У Механици, при проучавању кретања тела, даје се дефиниција његове енергије, па се разликује кинетичка или енергија кретања, потенцијална или енергија положаја тела и, најзад, тотална која је збир првих двеју (види §§ 2.3 и 4.4). За ове величине имамо математичке изразе у којима и лежи дефиниција. Даље, на основи једначина које служе за описивање кретања материјалних тела може се доказати теорема да тотална енергија система тела остаје константна за време кретања (али под извесним накнадним условима о природи сила које дејствују на тела). Међутим, уопште у Теориској физици прима се и за друге гране извесно уопштавање ове теореме, које се зове принцип одржања енергије. Он се не доказује математичким путем, него се поставља као начело које има образложење у резултатима посматрања. Тај принцип је створен под утицајем чињенице да механички рад може да буде еквивалентан топлоти, а разрађивали су га R. Mayer, H. Helmholtz, W. Thomson и други, док није добио облик који важи за све гране Физике. Потребно је било најпре уопштити појам енергије за физичке појаве које су различите од механичких.

Према дефиницији коју је дао W. Thomson: енергијом (или способношћу за обављање рада) материјалног система у неком одређеном стању зове се општи износ свих спољњих дејстава која би се могла створити ван система ако он пређе из овог стања у неко *почетно (нулто)* стање. При томе треба сва спољња дејства изразити у механичким јединицама рада; прелаз у нулто стање може да се врши на произвољан начин, а и само нулто стање може се бирати произвољно.

Сада се сам принцип може овако формулисати:

„Енергија неког материјалног система у одређеном стању у погледу на неко друго стање, одабрано за нулто, има једнозначну вредност.“

Овим речима је изражен принцип *одржања* енергије. Јер, ако узмемо неки изоловани материјални систем, на који, дакле, споља ништа не дејствује, и ако се само у њему врше било какви процеси, његова енергија, имајући једнозначну вредност, остаје иста тј. одржава се.

Другим речима, општи износ свих могућних, разних дејстава (механичких, топлотних, електричних итд.), који је потребан да се материјални систем преведе из једног стања у друго, биће исти ако се измери механичким јединицама. Дакле, разне врсте енергије: механичка, топлотна, електрична итд. еквивалентне су.

Да бисмо могли тачно карактеризовати стање материјалног система, потребно ће бити да се уведу извесне величине које можемо мерити

или израчунати. Енергија материјалног система биће у том случају функција ових величина.

§ 0.8 Принцип најмањег дејства. Општији је од принципа одржања енергије т.зв. принцип најмањег дејства. У Механици се овај принцип изводи помоћу једначина кретања материјалног система (§ 5), па се прецизирају услови под којима он важи. Обрнуто, ако се овај принцип положи у основу, из њега следују једначине кретања. Дејство се дефинише у Механици као производ енергије и времена, а у претходном параграфу видели смо да је енергија еквивалентна раду. При разним формулисањима овога принципа у Механици прецизираће се и појам дејства. Овај принцип преноси се на појаве свију врста. За њега су везана имена Maupertuis-a, Euler-a, Lagrange-a и Hamilton-a.

Први облик принципа, који је дао Maupertuis: „износ дејства које се употреби при променама у природи увек је најмањи (minimum)“ има тај недостатак, што је сувише неодређен. Хамилтон је дао оно формулисање принципа, које се показало од важности за механичке, електричне и топлотне појаве. Означимо ли са T кинетичку енергију тела или система, потенцијалну са $-U$, дејством се зове израз

$$\int_{t_0}^{t} (T + U)\, dt\,,$$

тј. интеграл разлике кинетичке и потенцијалне енергије у времену од тренутка t_0 до t. У случају других појава сем механичких, наместо механичке кинетичке односно потенцијалне енергије долазе аналогне врсте других енергија. За стварно кретање, или стање, овај интеграл, дејство, има најмању вредност према вредностима које би он имао, ако би се узела у обзир друга „могућна“ кретања, односно друга блиска „могућна“ стања у истом размаку времена. А за могућно стање или кретање треба сматрати оно, које је, разликујући се мало од стварног, у складу са свима накнадним условима, ако ове треба узети у обзир за појаве уочене врсте.

Улога принципа најмањег дејства у новим теоријама у Физици постаје све већа, јер он дозвољава да им се у збијеном облику да основа, а из њега се могу, даље, изводити једначине које управљају током појава. Али познато је да су појаве у природи иреверзибилне. Принципом најмањег дејства, међутим, могу се описати реверзибилне појаве, тј. оне које се могу, бар теориски, дешавати са истим правом у времену и простору унапред или уназад. Дакле, он не може да расветли питање иреверзибилности.

ГЛАВА I

МЕХАНИКА

Механика је наука која се бави проучавањем кретања материјалних тела. Она се дели у два дела: *Кинематику* и *Кинетику*. У Кинематици се проучавају кретања тела без обзира на њихову супстанцију и на узроке који ова кретања изазивају; зато се она зове још и Геометријом кретања. У њој ћемо, дакле, посматрати само промене положаја датог геометриског облика према неком одабраном систему геометриских облика. Кинетика, пак, бави се кретањем материјалних тела испитујући узроке ових кретања и израчунавајући дејство ових узрока. Кинетика се дели у два дела: Динамику, где се стварно посматра кретање, и Статику, у којој се проучавају услови равнотеже (мировања) материјалних система.

Према објектима чија се кретања испитују разликујемо Механику тачке, система, чврстог тела, еластичних тела, Хидромеханику и Аеромеханику.

А. МЕХАНИКА ТАЧКЕ

§ 1. Основни подаци из Кинематике. Два појма налазе се у основи Кинематике: простор и време. У овоме што следује претпоставимо да је простор (апсолутни) Еуклидов тродимензионални, да геометриски облик, непромењљив у строгом смислу ове речи, у њему има особине које се одређују Еуклидовом геометријом и, најзад, да је време (апсолутно) параметар који служи за констатовање поступних промена положаја објеката у простору.*)

При проучавању померања објеката у простору можемо уочити неко тело T и положаје осталих објеката према њему. Сматрајмо да је одабрано тело непомично. Онда ћемо померања објеката према њему звати *апсолутна померања*. Нека је M нека тачка у простору. Њен

*) Према Канту апс. простор и апс. време јесу трансцендентални појмови (узрочност се не примењује на ове појмове него на деловање у простору и времену). Пре Канта, а сад у теорији релативитета, ово су трансцендентно-реални појмови.

положај потпуно је одређен крајем вектора $\mathfrak{r}$, чији се почетак налази у одабраној тачки (O) тела T, и има одређену оријентацију у телу, дакле и у простору. (Ово, наравно, важи уз претпоставку да знамо да дефинишемо и *меримо* растојање двеју тачака.) Како је наш простор тродимензионалан, то за одређивање оријентације вектора $\mathfrak{r}$ можемо да уведемо триједар оса $Oxyz$ везан са телом T. Овај *непомични* триједар може потпуно да замени тело T.

Нека се положај уочене тачке M мења. Према нашој претпоставци постоји параметар t чијој свакој вредности одговара одређени положај M, и то само један (обрнуто не важи, јер на пр. при кретању M по кружној линији могу датом положају да одговарају више вредности t). Овај се параметар мења непрекидно и тачка M описује путању (трајекторију) непрекидну криву линију у простору. Ако се њен положај мења, онда је $\mathfrak{r}$ одређена функција $\mathfrak{r}(t)$. Мирује ли M, $\mathfrak{r} = \text{const}$.

Уочимо више покретних тачака и претпоставимо да за сваку вредност *истог* параметра t, свака од њих има одређени положај. *Апсолутно време* има баш ту особину за све замишљене тачке и њихова кретања. *Истовремени* су положаји тачака који одговарају истој вредности t, тј. истом *тренутку*. Растојање између двеју покретних (M и M_1) тачака је онда растојање између оне две тачке простора, непомично везаног за $Oxyz$, са којима се M и M_1 поклапају у датом тренутку.

Триједар $Oxyz$ одабран је потпуно произвољно. Ако га заменимо другим триједром $O_1 x_1 y_1 z_1$, чији положај према првоме знамо, можемо наћи положај тачке M према новом триједру. Ако је непомичан нови триједар, путања M неће у њему променити свој облик, а координате M израчунавају се у новом триједру помоћу познатих образаца Аналитичке геометрије. Ове обрасце можемо употребити и у случају када је триједар $O_1 x_1 y_1 z_1$ покретан, но тада ће коефицијенти (параметри) који одређују положај нових оса постати функције времена. Путања тачке M према покретном триједру упште неће имати исти облик са путањом према непомичном. Ако уочимо две покретне тачке, вектор који их спаја у датом тренутку не зависи од избора триједара, но ово само онда, када се узима апсолутно време одн. исти параметар t за разне триједре. После ових примедаба, уочимо кретање најпростијег објекта: тачке, и величине које служе за описивање овог кретања у односу на триједар $Oxyz$.

Покретна тачка M описује у простору криву L (путању) њена векторска једначина је

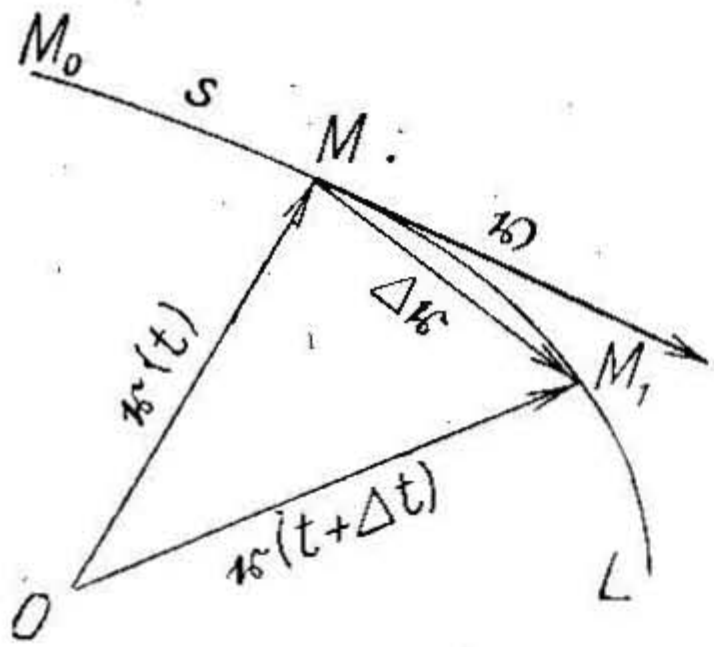
$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t), \tag{1}$$

у којој са десне стране стоји извесна функција времена. Означимо ли $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ јединичне векторе координатних оса, биће

$$\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k} \tag{2}$$

вектор положаја, а

(3) $$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t)$$



Сл. 4

скаларне једначине путање (која може бити и само један део криве одређене овим једначинама). Нека буде M положај покретне тачке у тренутку t; M_1 — у тренутку $t + \Delta t$; $\mathfrak{r}(t)$ и $\mathfrak{r}(t + \Delta t)$ вредности вектора положаја које им одговарају и $\Delta\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(t + \Delta t) - \mathfrak{r}(t)$ (сл. 4).

Брзина тачке M је вектор:

(4) $$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta t},$$

тј. извод $\mathfrak{r}$ по времену, и има правац дирке путање у уоченој тачки M. Количник $\frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta t}$ зове се средња брзина између уочених тренутака. Ако је s лук криве L, $\smile MM_1 = \Delta s$ и $\mathfrak{t}$ јединични вектор у правцу дирке, то ће бити

(5) $$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \cdot \mathfrak{t} = \frac{ds}{dt}\mathfrak{t} \quad \text{и} \quad \frac{ds}{dt} = v$$

модуо брзине; онда је $\dot{\mathfrak{r}}_s = \mathfrak{t}$.

Координате брзине су

(6) $$v_x = x' = f_1'(t), \quad v_y = y' = f_2'(t), \quad v_z = z' = f_3'(t);$$
$$v^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2,$$

ако је $Oxyz$ правоугли триједар.

Уочимо вредности брзине у тачкама M и M_1, : $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{v}_1$ и $\Delta\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}$.

Убрзање тачке M је вектор

(7) $$\mathfrak{a} = \dot{\mathfrak{v}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathfrak{v}}{\Delta t} = \ddot{\mathfrak{r}}.$$

Његове координате су

(8) $$a_x = x'' = f_1''(t), \quad a_y = y'' = f_2''(t), \quad a_z = z'' = f_3''(t).$$

Диференцирајући $\mathfrak{r}$ по времену три, четири итд. пута добили бисмо убрзање вишега реда, но за циљеве Механике довољно је увести само вектор $\mathfrak{a}$, тј. други извод функције $\mathfrak{r}$.

Из једначина (4) и (7) види се да су димензије брзине и убрзања LT^{-1} односно LT^{-2}.

Примери кретања. 1) Ако је $\mathfrak{t}$ = const. кретање је праволиниско, ако је v = const. кретање је равномерно. За праволиниско кретање: $\mathfrak{a} = 0$ кретање је равномерно, 2) $\mathfrak{a}$ = const. и $a > 0$ равномерно убрзано.

Убрзања, тангентно и нормално, јесу компоненте убрзања $\mathfrak{a}$ у правцу дирке, одн. главне нормале путање; $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_T + \mathfrak{a}_N$.

Како је

$$\mathfrak{a} = \dot{\mathfrak{v}} = \frac{d}{dt} v\mathfrak{t} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + v\dot{\mathfrak{t}}$$

и $\dot{\mathfrak{t}} = \dot{\mathfrak{t}}_s \frac{ds}{dt} = v\dot{\mathfrak{t}}_s$, то је

$$\mathfrak{a} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t} + v^2 \dot{\mathfrak{t}}_s .$$

Вектор $\mathfrak{K} = \dot{\mathfrak{t}}_s = \ddot{\mathfrak{r}}_{ss}$ је кривина криве L; K је њен модуо и $R = \frac{1}{K}$ полупречник кривине. Дакле је $\dot{\mathfrak{t}}_s = K\mathfrak{n} = \frac{1}{R}\mathfrak{n}$, где је $\mathfrak{n}$ јединични вектор главне нормале, и зато је

(9) $$\mathfrak{a}_T = \frac{dv}{dt}\mathfrak{t}, \quad \mathfrak{a}_N = \frac{v^2}{R}\mathfrak{n} .$$

Убрзање $\mathfrak{a}$ лежи, према томе, у оскулаторној равни путање.

Криволиниске координате олакшавају решење више проблема Механике. Нека су q_1, q_2, q_3 три независна параметра и

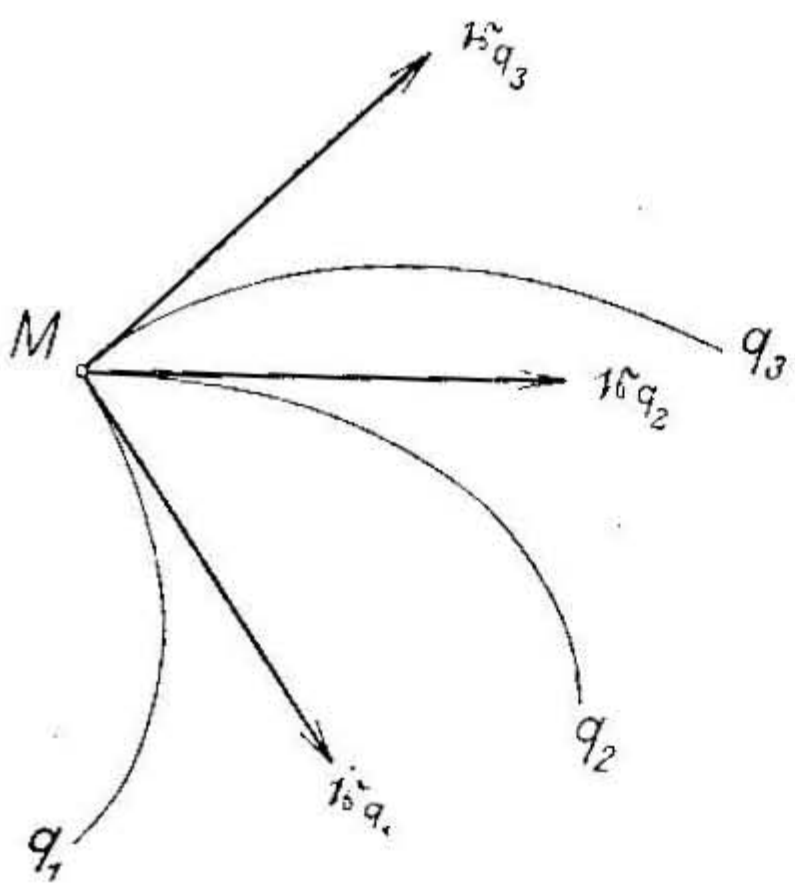
(10) $$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \; y = f_2(q_1, q_2, q_3), \; z = f_3(q_1, q_2, q_3).$$

Сваки од услова $q_i = \text{const.}$ одређује једну површину; на пр. за $q_1 = \text{const.}$, елиминацијом q_2 и q_3 из једначина (10), добићемо $F_1(x,y,z) = 0$. Мењајући вредности q_i добивамо три фамилије *координатних површина.* Два услова $q_i = \text{const.}$, $q_j = \text{const.}$, $i \neq j$, одређују *координатне линије* — пресеке координатних површина; величине q_i зовемо криволиниске координате.

У некој тачки простора $M(q_1, q_2, q_3)$ састају се три координатне линије и дирке ових одређују триједар координатних оса (сл. 5). Вектор $\mathfrak{r}$ је функција променљивих q_i и зато је

(11) $$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \dot{\mathfrak{r}}_{q_1} q_1' + \dot{\mathfrak{r}}_{q_2} q_2' + \dot{\mathfrak{r}}_{q_3} q_3',$$

где су q_i' изводи по времену, а $\dot{\mathfrak{r}}_{q_i}$ изводи по дотичним координатама. Очевидно је да сваки од њих пада у правац дирке криве дуж које се мења једна од координата.



Сл. 5

Пример: Сферне координате r, θ, ψ. Имамо

$$\mathfrak{r} = r\sin\theta\cos\varphi\,\mathfrak{i} + r\sin\theta\sin\varphi\,\mathfrak{j} + r\cos\theta\,\mathfrak{k} .$$

Координатне површине су: 1) $r = \text{const.}$ — лопта са средиштем у O, 2) $\theta = \text{const.}$ — конусна површина са осом Oz, 3) $\psi = \text{const.}$ — раван нормална на Oxy, која пролази кроз Oz. Координатне криве су: 1) $\theta = \text{const.}$,

$\psi = \text{const.}$ — права; координата $q_1 = r$, 2) $r = \text{const.}$, $\psi = \text{const.}$ — кружна линија; координата $q_2 = \theta$; 3) $r = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$ — кружна линија; координата $q_3 + \psi$.

Диференцирањем по времену израза за $\mathfrak{r}$ добивамо

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} = \frac{dr}{dt}\left(\sin\theta\cos\psi\,\mathfrak{i} + \sin\theta\sin\psi\,\mathfrak{j} + \cos\theta\,\mathfrak{k}\right) +$$
$$+ r\frac{d\theta}{dt}\left(\cos\theta\cos\psi\,\mathfrak{i} + \cos\theta\sin\psi\,\mathfrak{j} - \sin\theta\,\mathfrak{k}\right) +$$
$$+ r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\left(\cos\psi\,\mathfrak{j} - \sin\psi\,\mathfrak{i}\right).$$

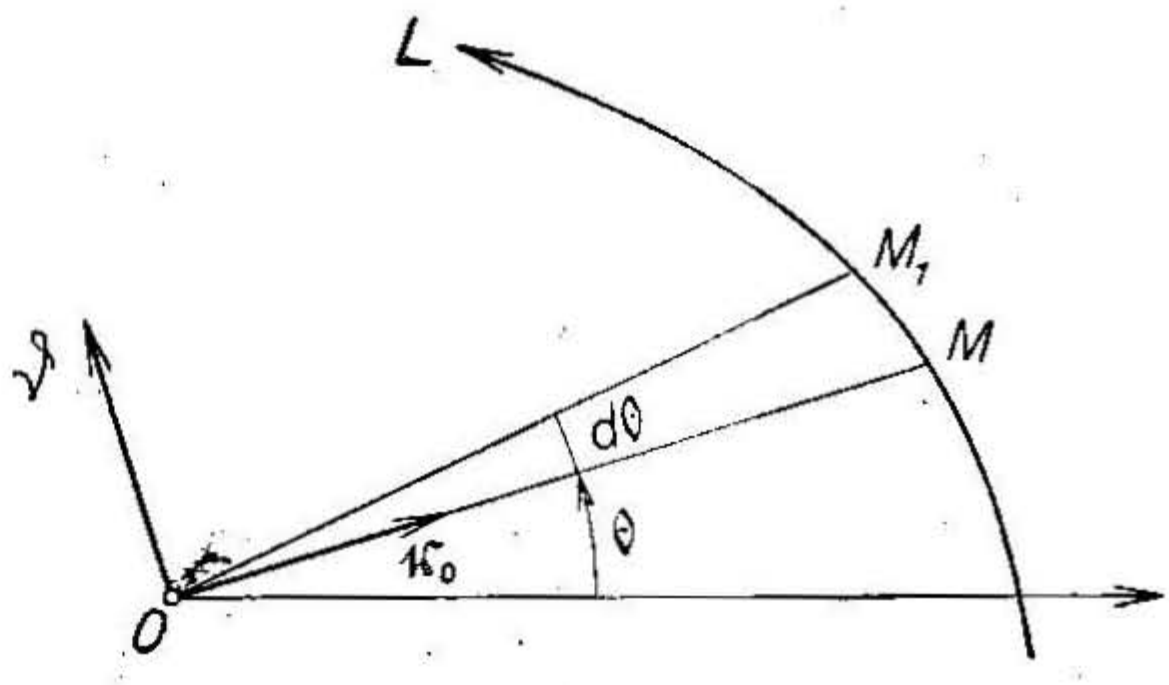
Изрази у заградама су јединични вектори: $\mathfrak{r}_0$ у правцу r, $\mathfrak{d}$ дирке координатне линије θ, $\mathfrak{f}$ координатне линије за ψ. Дакле је

$$\mathfrak{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathfrak{r}_0 + r\frac{d\theta}{dt}\,\mathfrak{d} + r\sin\theta\frac{d\psi}{dt}\,\mathfrak{f}. \tag{12}$$

Коефицијенти јединичних вектора у овој једначини су пројекције брзине на осама ортогоналног триједра $M\mathfrak{r}_0\mathfrak{d}\mathfrak{f}$. Из обрасца (12) добивамо, за $\psi = \text{const.}$, тј. за случај поларних координата r, θ при кретању у равни

$$\mathfrak{v} = \frac{dr}{dt}\,\mathfrak{r}_0 + r\frac{d\theta}{dt}\,\mathfrak{d}. \tag{13}$$

Секторска брзина. Централно кретање. Ако имамо раванско кретање, вектор положаја $\mathfrak{r}$ за време dt прелази бесконачно мали сектор MOM_1, чија је површина $\frac{1}{2}r^2\,d\theta$, јер је лук MM_1 једнак $r\,d\theta$. Израз $\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt}$ зове се секторска брзина. Он игра улогу при проучавању т.зв. *централног* кретања окарактерисаног особином да убрзање покретне тачке M има правац који пролази кроз непомичну тачку O.



Сл. 6

Према познатом обрасцу теорије вектора, пројекције убрзања на покретним осама $O\mathfrak{r}_0$ и $O\mathfrak{d}$ дате су обрасцима

$$\left(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_0\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}_0\right) - \left(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{r}}_0\right), \qquad \left(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{d}\right) = \frac{d}{dt}\left(\mathfrak{v}\,\mathfrak{d}\right) - \left(\mathfrak{v}\,\dot{\mathfrak{d}}\right).$$

Из слике (6) види се да када тачка M пређе у положај M_1, вектори $\mathfrak{r}_0$ и $\mathfrak{d}$ заокренуће за угао $d\theta$, тако да је $d\mathfrak{r}_0 = d\theta\,\mathfrak{d}$ а $d\mathfrak{d} = -d\theta\,\mathfrak{r}_0$. Зато је, узимајући још у обзир образац (13),

$$(14) \qquad \left(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_0\right) = \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2,$$

$$\left(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{d}\right) = \frac{d}{dt}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right) + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right).$$

За централно кретање $(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{d}) = 0$, те је према томе,

$$(15) \qquad \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \text{const.},$$

где смо увели множитељ $\frac{1}{2}$ да би смо имали израз за секторску брзину. Једначина (15) даје други Кеплеров закон о кретању планета: радијус вектор повучен од Сунца до планете преваљује површину пропорционалну времену. Доиста, ако означимо површину у јединици времена — ону што стоји с леве стране једначине (15) — са C, OM у времену t преваљује сектор $Q = Ct$.

Нека је $r = f(\theta)$ једначина путање L. Имамо због (15)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{2C}{r^2} = -2C\frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{r}\right)$$

и

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2C\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right)\frac{d\theta}{dt} = -\frac{4C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right).$$

Прва од пројекција (14) $(\dot{\mathfrak{v}}\,\mathfrak{r}_0) = a_1$ биће (види обр. 15)

$$(16) \qquad a_1 = -\frac{4C^2}{r^2}\left\{\frac{d^2}{d\theta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r}\right\}.$$

Ова Бине-ова једначина омогућује да нађемо путању, тј. $r = f(\theta)$, када је дато убрзање a_1 и, обрнуто, да нађемо убрзање ако је позната путања. Њу задовољавају кретања дуж конусних пресека.

§ 2 Основни појмови Динамике. За Механику, као и за друге гране Физике, од основне је важности принцип узрочности (каузалитета) који се може изразити овако: „Ако су услови под којима се одигравају два феномена у разним тренуцима и у разним местима у простору исти, ова су два феномена само премештена у простору и времену“. Како се претпоставља да знамо да меримо дужину и време, то се овом принципу може дати, према Painlevé-у, овакво тумачење: Могућно је једном за свагда усвојити мере за дужину и време тако, да увек принцип узрочности буде остварен.

Механика је наука о кретању материјалних тела и зато треба да се прецизира шта се подразумева под условима за феномене о којима је реч у принципу узрочности. Као што су показивали многобројни експерименти са падом тела, који су положени у основе Механике, важну улогу играју почетни положај и почетна брзина. Зато ћемо претпоставити (и то се показује као довољно) да су *иницијални услови* за кретање система тела почетни положаји и почетне брзине елемената система.

Прецизирајмо још појам апсолутног кретања тела. То је кретање у односу на триједар оса који се, према претпоставци, може замислити тако да кретање задовољава низ аксиома о којима ће сада бити реч. Посматрати, пак, могу се само релативна кретања јер у природи немамо таквог триједра.

§ 2.1 Основни појмови Динамике тачке. Аксиоме Механике дао је Њутн у облику три принципа или закона.

I Свако тело тежи да задржи стање мировања или равномерног и праволиниског кретања све док нека сила не промени ово стање.

II Промена кретања пропорционална је дејству силе која креће, и дешава се у правцу силе.

III Дејство (акција) је увек једнако противдејству (реакцији), или дејства два тела једног на друго увек су једнака и супротног смера. Ови аксиоми дошли су као резултат не само Њутнова рада, него и Коперникова, Кеплерова и Галилејева. Помоћу ових аксиома уводе се и основни појмови Динамике.

Претпоставимо, прво, да сваком материјалном телу одговара величина која карактерише количину материје — *маса*. Па замислимо неко тело T_1 које нити губи, нити добива материју, и сматрајмо његову масу за јединицу масе. Онда ћемо звати масом другога тела T његову релативну масу у односу на T_1.

Према првом аксиому, или т.зв. *принципу инерције*, материјално тело има особину да тежи да остане у стању апсолутног мира или равномерног праволиниског кретања. Ова особина зове се *инерција*. То стање ће се одржавати све док се не појави неки спољњи узрок, а такав ће се узрок налазити у дејству неког другог тела. Онда се каже да на уочено тело T дејствује сила. Према другом аксиому, сила се дефинише као вектор колинеаран са убрзањем а пропорционалан маси. Ставимо дакле

$$\mathfrak{F} = ma, \tag{1}$$

ако је m маса узетог елемента материје. Даље ћемо говорити о т.зв. *материјалној тачки*, појму који се добива апстракцијом када се уочи део материје толико мали по запремини да је за описивање његова

кретања довољно да се зна кретање једне његове тачке, а да се обртање овог делића при томе може изоставити из посматрања. Једначина (1) важи онда за материјалну тачку.

Смисао је трећег аксиома овај: уочимо само две материјалне тачке M и M_1 и дејство једне на другу; онда је сила којом M_1 дејствује на M супротна сили којом M дејствује на M_1, тј. $\mathfrak{F}_1 = -\mathfrak{F}$.

Даље ћемо усвојити још аксиом о почетним условима, који се формулише овако: ако се уоче само две материјалне тачке исте масе, њихова ће апсолутна убрзања бити једнака по величини, истог правца но супротног смера, и потпуно ће бити одређена у сваком тренутку t ако је познато растојање ових тачака и релативна брзина. Најзад имамо правило паралелограма: ако је убрзање материјалне тачке под истовременим дејством двају тела M_1 и M_2 једнако $\mathfrak{a}$, а било би $\mathfrak{a}_1$ или $\mathfrak{a}_2$ да је дејствовало само једно од ових тела (M_1 односно M_2), онда је

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \mathfrak{a}_2 .$$

Одавде, и из једначине (1), следи правило за сабирање сила $\mathfrak{F}_1$ и $\mathfrak{F}_2$ које дејствују истовремено:

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 + \mathfrak{F}_2 . \tag{2}$$

Маса коју смо дефинисали зове се још *инертна* маса: њу имамо у једначини (1).

Према нашој претпоставци постоји триједар оса $Oxyz$ такав да ће кретања у односу на њ одговарати горенаведеним аксиомима. Јасно је да, ако узмемо неки други триједар непомичан према $Oxyz$, имаће кретања и према овом триједру исту особину. Но не само за непомични, него и за сваки триједар $O_1 x_1 y_1 z_1$, који се креће праволиниски и равномерно према $Oxyz$ важи иста особина, тј. и осе $O_1 x_1 y_1 z_1$ могу се сматрати за *апсолутне* осе.*) Доиста, ако је $\mathfrak{r}_0$ вектор положаја O_1 у односу на O, а $\mathfrak{r}_1$ вектор положаја тачке M у односу на O_1, имаћемо

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_0 + \mathfrak{r}_1 \quad \text{и} \quad \ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{r}}_1 \quad \text{јер је} \quad \ddot{\mathfrak{r}}_0 = 0.$$

У горњим аксиомима, међутим, говори се само о убрзањима, а ова су иста за оба триједра: $Oxyz$ и $O_1 x_1 y_1 z_1$. Основна једначина (1) Механике задржава исти облик за све триједре који се померају један према другоме праволиниски и равномерно. У овоме лежи Галилејев принцип релативитета. Ако се под дејством силе $\mathfrak{F}$, материјална тачка M помера, онда се каже да сила врши рад и, означимо ли бескрајно мало померање са $d\mathfrak{r}$, израз

$$dR = (\mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}) \tag{3}$$

*) Ако силе не зависе од $\dot{\mathfrak{r}}_0$.

зове се *рад* на бескрајно малом померању. Ако су X, Y, Z пројекције силе $\mathfrak{F}$ на правоуглим осама, а dx, dy, dz пројекције од $d\mathfrak{r}$, биће

(4) $$dR = Xdx + Ydy + Zdz.$$

Уочимо ли коначно померање тачке M дуж криве L, и то од тачке A до B, тотални рад на овоме померању биће

(5) $$R = \int_A^B (\mathfrak{F}\, d\mathfrak{r}).$$

Важну врста сила сачињавају оне које се могу претставити као градијент неког скалара. Ако је

(6) $$\mathfrak{F} = \operatorname{grad} U \quad \text{биће} \quad X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

а скалар $U(x, y, z)$ зове се *функција силе.* Њена негативна вредност је *потенцијал* $\Pi = -U$, тј. $\mathfrak{F} = -\operatorname{grad} \Pi$.

Ако постоји функција силе, тотални рад R не зависи од облика пута но само од вредности ове функције у крајњим тачкама:

(7) $$R = \int_A^B \operatorname{grad} U \; d\mathfrak{r} = \int_A^B dU = U_B - U_A,$$

према обрасцу (19) § 0.2.

Очевидно је да и функција $U + \text{const.}$ задовољава услове (6).

§ 2.2 Једначине кретања материјалне тачке. Једначина (1) која изражава везу убрзања и силе

(1) $$m\mathfrak{a} = \mathfrak{F}$$

основна је у Механици тачке. Ако претпоставимо да је позната сила $\mathfrak{F}$ која дејствује на материјалну тачку m, може се наћи вектор положаја $\mathfrak{r}$ чији је други извод по времену једнак $\mathfrak{a}$, и ово је основни проблем Динамике тачке. Функција, пак, $\mathfrak{r}(t)$ одређује потпуно кретање уочене материјалне тачке. Биће потребно само да узмемо у обзир *иницијалне* или почетне услове, и то *почетни* положај и *почетну* брзину тачке; видећемо одмах зашто је то потребно.

Имамо диференцијалну једначину другога реда:

(8) $$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{F}.$$

Када се она интеграли, уводе се произвољне константе. За одређивање њихових вредности потребни су услови за почетак кретања. Лако је ово увидети геометриски. Једначина (8) треба да одреди пу-

тању. Да би смо је потпуно одредили треба да знамо прво једну њену тачку, рецимо M_0, у тренутку $t = t_0$ који се сматра за почетни и, затим, оријентацију ове путање у простору; а ово ћемо имати ако знамо брзину у почетку, јер она има правац дирке и, према томе, одређује у $t = t_0$ оријентацију првог бесконачно малог лука. Положај M_0 дат је вектором $\mathfrak{r}_0(x_0, y_0, z_0)$, односно трима његовим пројекцијама, почетна брзина је вектор $\mathfrak{v}_0(x_0', y_0', z_0')$; свега имамо шест бројева.

Уочимо сада три скаларне једначине које одговарају векторској (8), и то у случају Декартова правоугла триједра:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z. \tag{9}$$

Сила $\mathfrak{F}$ може да зависи од положаја тачке, тј. од њених координата, од брзине, дакле од првих извода координата, најзад од времена. Нећемо претпостављати да $\mathfrak{F}$ зависи од виших извода вектора положаја. Према томе је уопште

$$\begin{gathered} X = X(x, y, z, x', y', z', t), \quad Y = Y(x, y, z, x', y', z', t), \\ Z = Z(x, y, z, x', y', z', t). \end{gathered} \tag{10}$$

Једначине (9), у којима су X, Y, Z функције дате обрасцима (10), чине систем од три диференцијалне једначине другога реда, и њиховим интеграљењем уводе се шест произвољних констаната, чије се вредности могу одредити помоћу горенаведених шест бројева $x_0, y_0, z_0, x_0', y_0', z_0'$. На овај начин и функције

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \tag{11}$$

биће потпуно одређене*), па и вектор $\mathfrak{r}$, а према томе и кретање материјалне тачке. Имаћемо, поред (11), да је

$$\begin{gathered} x_0 = f_1(t_0), \quad y_0 = f_2(t_0), \quad z_0 = f_3(t_0), \\ x_0' = f_1'(t_0), \quad y_0' = f_2'(t_0), \quad z_0' = f_3'(t_0). \end{gathered} \tag{12}$$

Из *диференцијалних једначина кретања* (9) са датим иницијалним условима следују, дакле, *коначне једначине кретања* (11).

Основној векторској једначини кретања (8) одговарају уопште три скаларне, које се добивају када се вектори пројецирају на неке три осе; на пр. на осе неких криволиниских координата. Згодан избор ових олакшава решење појединих проблема Механике. Овде ћемо навести т. зв. *Euler*-ове или *природне једначине* кретања материјалне тачке. Уочимо за тачку M, која се креће дуж криве L, триједар оса дуж дирке,

*) Ово следује из основне Коши-јеве теореме о интегралима диференцијалних једначина, која се ипак доказује уз извесна ограничења за функције X, Y, Z (види P. Painlevé: Cours de Mécanique; p. 230).

нормале и бинормале. Нека буду F_T, F_N, F_B пројекције силе F на овим осама. Према обрасцима (9) § 1 пројекције су убрзања на истим осама: $\frac{dv}{dt}, \frac{v^2}{R}, 0$. Дакле, из једначине (8) следује

$$m\frac{dv}{dt} = F_T, \quad \frac{mv^2}{R} = F_N, \quad 0 = F_B, \tag{13}$$

и то су Ојлерове диференцијалне једначине.

Досада смо посматрали случај *слободне* материјалне тачке. Ако са ова мора налазити на датој површини или кривој линији, њено је кретање *неслободно*. У овоме случају постоје, дакле, извесни кинематички услови које треба да задовољавају координате тачке. Са гледишта Динамике појављују се у томе случају силе које проистичу од дејства површине или криве. Овакве се силе зову: *реакције површина* односно кривих или реакције веза. Ако реакција има правац нормале на површину или криву, ова се зове *идеална веза*. Узима ли се у обзир трење, које се може јављати при кретању материјалне тачке на површини или кривој, реакција неће више имати правац нормале. Додамо ли реакцију везе $\mathfrak{R}$ сили $\mathfrak{F}$ која дејствује на материјалну тачку, једначина њена кретања моћи ће се написати у облику:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{F} + \mathfrak{R}. \tag{14}$$

Случај површине: дата је идеална веза $f(x, y, z, t) = 0$, која уопште може мењати облик у току времена. $\mathfrak{R}$ има правац нормале, тј. правац од

$$\operatorname{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\mathfrak{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathfrak{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathfrak{k}.$$

Ставимо $\mathfrak{R} = \lambda \operatorname{grad} f$.

Скаларне једначине које одговарају (14) јесу

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda\frac{\partial f}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = Y + \lambda\frac{\partial f}{\partial y}, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = Z + \lambda\frac{\partial f}{\partial z}. \tag{15}$$

Оне заједно са једначином везе $f(x, y, z, t) = 0$ чине систем од четири једначине са четири непознате x, y, z, λ. Последња величина омогућује да изразимо реакцију $\mathfrak{R}$.

Случај криве: дате су идеалне везе $f_1(x, y, z, t) = 0$ и $f_2(x, y, z, t) = 0$; материјална тачка креће се дуж криве која је пресек ових површина. Сматрајући да је функција криве $\mathfrak{R}$ збир реакција $\mathfrak{R}_1$ и $\mathfrak{R}_2$ ових површина, имаћемо

$$\mathfrak{R} = \mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 = \lambda_1 \operatorname{grad} f_1 + \lambda_2 \operatorname{grad} f_2; \tag{16}$$

према томе, добивамо овај систем једначина

$$(17)\quad m\frac{d^2x}{dt^2} = X + \lambda_1\frac{\partial f_1}{\partial x} + \lambda_2\frac{\partial f_2}{\partial x}, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \ldots, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \ldots,$$
$$f_1(x, y, z, t) = 0, \quad f_2(x, y, z, t) = 0,$$

са пет непознатих $x, y, z, \lambda_1, \lambda_2$. Последње две одредиће величине реакција, на пр., $R_1 = |\lambda_1 \operatorname{grad} f_1|$.

Ојлерове једначине (13) имају у овоме случају облик

$$(18)\qquad m\frac{dv}{dt} = F_T, \quad m\frac{v^2}{\rho} = F_N + R_N, \quad 0 = F_B + R_B,$$

јер реакција не даје пројекцију на дирци. Ако се место координата x, y, z уочи у првој од једначина (18) лук криве s, из ње ~~ће~~ се наћи $s = \varphi(t)$ (увек под претпоставком да је сила $\mathfrak{F}$ позната), а остале две служиће за израчунавање пројекција R_N и R_B реакције.

Приметимо да се обично претпоставља у случају неидеалних веза, тј. веза са трењем, да је тангенцијална компонента реакције пропорционална нормалној.

§ 2.3 Теорема живе силе. Основну једначину кретања тачке (1) можемо написати у облику:

$$(19)\qquad m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F}.$$

Одавде, скаларним множењем са $\mathfrak{v}$ добивамо

$$m\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{F}\mathfrak{v}.$$

А како је $\frac{dv^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}) = 2\mathfrak{v}\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$, имаћемо

$$(20)\qquad \frac{d}{dt}\frac{mv^2}{2} = (\mathfrak{F}\mathfrak{v}).$$

Израз $\frac{1}{2}mv^2$ зове се *жива сила* тачке, а (20) је једначина живе силе. Интеграљењем ове једначине од t_0 до t_1, добићемо

$$(21)\qquad \frac{mv_1^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \int_{t_0}^{t_1}(\mathfrak{F}\mathfrak{v})\,dt = \int_{t_0}^{t_1}\mathfrak{F}\,d\mathfrak{r},$$

где су v_0 и v_1 величине брзине у тренуцима t_0, одн. t_1, јер је према (20)

$$(22)\qquad d\frac{mv^2}{2} = \mathfrak{F}\,d\mathfrak{r}.$$

Теорема: прираштај живе силе при померању $d\mathfrak{r}$ једнак је раду силе при овом померању. Једначина, пак, (21) изражава исту чињеницу само за коначна померања.

Ако постоји функција сила, па $\mathfrak{F} = \text{grad}\, U$, биће (образац (4) § 0.1):

$$\mathfrak{F}\, d\mathfrak{r} = \text{grad}\, U\, d\mathfrak{r} = dU.$$

Ставимо ли овај диференцијал у једначину (22) и интегралимо, добићемо

$$\frac{1}{2} mv^2 = U + h, \tag{23}$$

или (види једначину (7)), ако интегралимо од t_0 до t:

$$\frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv^2_0 = U - U_0. \tag{24}$$

Дакле је $h = \frac{1}{2} mv^2_0 - U_0$.

Израз $\frac{1}{2} mv^2$ зваћемо *кинетичком,* а $\Pi = -U$ потенцијалном енергијом.

Једначина (23), која се зове *интеграл живе силе,* може да се напише још и у овоме облику

$$\frac{1}{2} mv^2 + \Pi = h, \tag{25}$$

тј. *тотална енергија* (збир кинетичке и потенцијалне) тачке је константна.

§ 2.4 Централне силе. Њутнов закон гравитације. Претпоставимо да се материјална тачка M креће под дејством *централне силе* $\mathfrak{F}$, тј. оне чији правац стално пролази кроз дату непомичну тачку O. Нека буде OM једнако $\mathfrak{r}$ а $\mathfrak{v}_0$ почетна брзина тачке M. Ако помножимо векторски са $\mathfrak{v}$ једначину

$$m \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} = \mathfrak{F}$$

добићемо, због колинеарности $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{F}$,

$$m \left[\mathfrak{r} \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} \right] = \frac{d}{dt}\, m \left[\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \right] = 0$$

и, према томе,

$$m \left[\mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{dt} \right] = \mathfrak{C}. \tag{26}$$

$\mathfrak{C}$ је константни вектор који је одређен вредношћу вектора положаја $\mathfrak{r}$ у почетном тренутку и вектором $\mathfrak{v}_0$.

Дакле, раван у којој се налазе $\mathfrak{r}$ и брзина $\frac{d\mathfrak{r}}{dt}$ тачке M остаје стално иста и управна је на вектор $\mathfrak{C}$. Кретање материјалне тачке под дејством централне силе је *раванско* и зове се *централно* (види § 1). Ако се уведу поларне координате тачке $M: r$ и θ, интензитет силе $\mathfrak{F}$ мора да буде функција $F(r, r', \theta, \theta', t)$, па се може извести анализа кретања за разне облике ове функције,

$$\left(r' = \frac{dr}{dt}, \quad \theta' = \frac{d\theta}{dt} \right).$$

Код централних сила важан је случај кад оне зависе само од растојања $r = OM$; тај случај се јавља у проблемима Небеске механике и Математичке физике. У првој од њих — када се проучава дејство сила гравитације, у другој — на пр. у теорији електрицитета и магнетизма — када се уоче силе привлачења и одбијања електрицитетом оптерећених честица, односно магнетских полова.

Зауставимо се на случају $F = F(r)$ и уочимо следећи проблем. Две тачке: M, масе m, и M_1 (m_1) дејствују једна на другу. Сила која дејствује на M нека је $-m m_1 f(r) \mathfrak{r}_0$; ако је $\mathfrak{r}_0$ јединични вектор правца $M_1 M$, онда је сила која дејствује на M_1: $m m_1 f(r) \mathfrak{r}_0$. Убрзања су: $-m_1 f(r) \mathfrak{r}_0$, одн. $m f(r) \mathfrak{r}_0$. Према томе је релативно убрзање M у односу на M_1: $-(m_1 + m) f(r) \mathfrak{r}_0$. Означимо $m_1 + m$ са μ. Дакле, релативно кретање M врши се као да је тачка M_1 непокретна а убрзање $-\mu f(r) \mathfrak{r}_0$, тј. сила је

$$-m \mu f(r) \mathfrak{r}_0 = \operatorname{grad} U,$$

$$U = -\mu m \int f(r)\, dr = -\mu m \varphi(r). \tag{27}$$

Претпостављајући сада да је тачка M_1 непомична, долазимо до случаја централног кретања, значи (једначина (15) § 1):

$$\frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const.} = c. \tag{28}$$

Није тешко доказати да ово следује и из константности интензитета вектора $\mathfrak{C}$ (26).

Даље, постоји интеграл живе силе (23)

$$m v^2 = -2 m \mu \varphi(r) + 2h,$$

а из обрасца (13) § 1 следује да је

$$v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Узимајући у обзир једначину (28) и $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{2c}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$, имаћемо

(29) $$mv^2 = 4mc^2\left[\frac{1}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\right] = -2m\mu\varphi(r) + 2h.$$

Одавде је

$$\frac{4c^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = \psi(r),$$

где

(30) $$\psi(r) = -\frac{4c^2}{r^2} - 2\mu\varphi(r) + \frac{2h}{m}.$$

Према томе имамо

$$d\theta = \pm\frac{2c\,dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}},$$

и једначина путање у поларним координатама гласи:

(31) $$\theta = \pm\int\frac{2c\,dr}{r^2\sqrt{\psi(r)}} + \theta_0.$$

Осим тога из (28) следује, после смене $d\theta$,

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\psi(r)},$$

а после интеграљења

(32) $$t + \tau = \pm\int\frac{dr}{\sqrt{\psi(r)}}.$$

Произвољне константе θ_0 и τ одређују се условима за почетак кретања; једначина (32) даје r као функцију времена, а (31) после замене $r = f(t)$ даће θ као функцију времена. Дакле, кретање тачке M је потпуно одређено.

Од нарочите важности је — за питање атомске структуре као и за Небеску механику — случај када је $f(r) = \frac{1}{r^2}$ и, дакле, $\varphi(r) = -\frac{1}{r}$ (види образац (27)). Онда из обрасца (29) следује

$$v^2 = 2\left(h_1 + \frac{\mu}{r}\right).$$

где је $h_1 = \frac{h}{m}$, а из обрасца (30):

$$\psi(r) = 2\left(h_1 + \frac{\mu}{r} - \frac{2c^2}{r^2}\right).$$

Ставимо

$$\alpha = \sqrt{2h_1 + \frac{\mu^2}{4c^2}}, \qquad \rho = \frac{2c}{r} - \frac{\mu}{2c}.$$

Онда је

$$\psi(r) = \alpha^2 - \rho^2$$

и

$$d\rho = -\frac{2c\,dr}{r^2}.$$

Дакле, према обрасцу (31):

$$\theta - \theta_0 = \mp \int \frac{d\rho}{\sqrt{\alpha^2 - \rho^2}} = \arccos\frac{\rho}{\alpha},$$

ако се задржи један знак. Како је:

$$\rho = \alpha \cos(\theta - \theta_0),$$

$$\frac{2c}{r} = \rho + \frac{\mu}{2c},$$

биће

$$r = \frac{2c}{\frac{\mu}{2c} + \alpha\cos(\theta - \theta_0)}.$$

Ако уведемо ознаке

$$\frac{4c^2}{\mu} = p, \qquad e^2 = \frac{4c^2\alpha^2}{\mu^2} = 1 + \frac{8c^2h_1}{\mu^2},$$

добићемо

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\theta - \theta_0)}, \tag{33}$$

а то је једначина конусних пресека (M_1 је жижа). Ако је $h < 0$ и, према томе, $e < 1$ путања тачке M је елипса; за $h = 0$, $e = 1$ имамо параболу, а за $h > 0$ и $e > 1$ хиперболу.

За планете које описују елипсе око Сунца, као што то и следује из једначине (33), добили смо, дакле, први Кеплеров закон. Обрнуто, из три Кеплерова закона, а помоћу Binet-овог обрасца (16) § 1, може се извести Њутнов закон гравитације

$$\mathfrak{F} = -\frac{m m_1}{r^2}\mathfrak{r}_0. \tag{34}$$

§ 2.5 Разне врсте осцилаторних кретања. 1) Случај сила пропорционалних удаљењу од непокретне тачке. Нека на покретну тачку M,

чија је маса m, дејствује сила привлачења $-a\mathfrak{r}$, где је $\mathfrak{r}$ вектор положаја у односу на непокретну тачку O $(a > 0)$. Ако још означимо $\frac{a}{m}$ са κ^2, имаћемо (види (8) § 2.2) једначину кретања

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \kappa^2\mathfrak{r} = 0 . \tag{35}$$

Општи интеграл ове једначине је

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A} \cos \kappa t + \mathfrak{B} \sin \kappa t , \tag{36}$$

где су $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ два константна вектора, а то се потврђује непосредно заменом $\mathfrak{r}$ у једначини (35). Ако је почетни положај тачке у тренутку $t = 0$ дат вектором $\mathfrak{r}_0$ *), а почетна брзина је била $\mathfrak{v}_0$, из једначине (36) имамо

$$\mathfrak{r}_0 = \mathfrak{A} , \quad \mathfrak{v}_0 = \kappa\mathfrak{B} .$$

Кретање се догађа у равни вектора $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ и крај вектора $\mathfrak{r}$ описује затворену путању. Пошто протекне време $T = \frac{2\pi}{\kappa}$, $\mathfrak{r}$ ће имати исту вредност; T се зове *периода*, а кретање — периодичко. Ако узмемо косоугли координатни систем, и усмеримо осу Ox_1 дуж вектора $\mathfrak{A}$, а осу Oy_1 правцем вектора $\mathfrak{B}$, имаћемо према (36):

$$x_1 = A \cos \kappa t , \quad y_1 = B \sin \kappa t ,$$

а одатле је

$$\frac{x_1^2}{A^2} + \frac{y_1^2}{B^2} = 1 . \tag{37}$$

Ово је једначина елипсе; $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имају правце коњугованих пречника. Путања материјалне тачке M је елипса.

Ако уочимо случај када је $\mathfrak{B}$ колинеарно са $\mathfrak{A}$, имаћемо: $\mathfrak{B} = n\mathfrak{A}$ и

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{A}(\cos \kappa t + n \sin \kappa t) ,$$

те стављајући

$$\frac{1}{\sqrt{1 + n^2}} = \sin \varepsilon , \quad \frac{n}{\sqrt{1 + n^2}} = \cos \varepsilon ,$$

добивамо

$$\mathfrak{r} = \sqrt{1 + n^2} \sin(\kappa t + \varepsilon)\, \mathfrak{A} . \tag{38}$$

Путања је у овоме случају отсечак праве, који тачка M описује периодички. Имамо сада, дакле, случај линеарне осцилације вектор функ-

*) $\mathfrak{r}_0$ није сада јединични вектор.

ције $\mathfrak{r}$, док се претходна зове елиптичка осцилација; за $A = B$ ова постаје кружна. Уопште, сваки се процес, за чије описивање служи једначина облика

$$S = S_0 \sin(\kappa t + \varepsilon) \tag{39}$$

где је t време а $S_0 = \text{const.}$, зове *хармониска осцилација*. Њена периода је $T = \frac{2\pi}{\kappa}$, $\kappa t + \varepsilon$ је *фаза*, а ε је *константа фазе* (тј. вредност аргумента за $t = 0$), $\nu = \frac{1}{T} = \frac{\kappa}{2\pi}$ зове се *фреквенција*. Елиптичкој осцилацији одговарају две линеарне хармониске осцилације.

Силе пропорционалне удаљењу, као што је $-a\mathfrak{r}$ коју смо овде уочили, зову се *квазиеластичне*. Такве су, на пр., силе код мало растегнутих еластичних опруга.

2) Поред квазиеластичне уочимо још и силу пропорционалну брзини материјалне тачке. Такве је природе, на пр., отпор при трењу: $-b^2 \frac{d\mathfrak{r}}{dt}$, знак минус смо ставили јер је смер силе супротан смеру брзине. Стављајући $\frac{b^2}{m} = \alpha > 0$, можемо диференцијалну једначину кретања материјалне тачке написати у облику

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \alpha \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \kappa^2 \mathfrak{r} = 0 . \tag{40}$$

Раставимо ли ове векторе у компоненте дуж координатних оса $Oxyz$ неког непокретног триједра, имаћемо три скаларне једначине истог облика, од којих је прва

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \kappa^2 x = 0 . \tag{41}$$

Зауставимо се на случају када почетна брзина пада у правац OM и када ће, према томе, кретање бити праволиниско. Одаберемо ли за x осу правац OM, имаћемо, место векторске једначине (40), да решимо само једну скаларну (41). Ставимо

$$x = a e^{\lambda t} ,$$

(a и λ су константе) и решимо карактеристичну једначину

$$\lambda^2 + \alpha \lambda + \kappa^2 = 0 . \tag{42}$$

Добивамо корене

$$(43)\quad \lambda_1 = -\frac{\alpha}{2} + \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \kappa^2}\ ,\quad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{2} - \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \kappa^2}\ ,$$

и разликујемо случајеве реалних и имагинарних корена.

а) $\alpha^2 > 4\kappa^2$; корени су реални и опште решење једначине (41) биће

$$x = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t},$$

где су A и B произвољне константе, или

$$(44)\qquad x = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(A e^{\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \kappa^2}\,t} + B e^{-\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \kappa^2}\,t}\right).$$

Како су λ_1 и λ_2 негативни, x тежи нули када t тежи бесконачности. Кретања ове врсте зову се *апериодичка.*

б) $\alpha^2 = 4\kappa^2$; корени карактеристичне једначине су једнаки, и општи интеграл има облик

$$(45)\qquad x = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(A + Bt\right).$$

Како први множитељ брже опада него што други расте, x тежи нули када $t \to \infty$, и кретање је опет апериодичко.

в) $\alpha^2 < 4\kappa^2$; корени λ_1 и λ_2 су имагинарни. Ставимо

$$\sqrt{\frac{\alpha^2}{4} - \kappa^2} = i\beta,$$

$$x = e^{-\frac{\alpha}{2}t}\left(A e^{\beta t i} + B e^{-\beta t i}\right).$$

Трансформишимо други множитељ, који ће бити

$$(A + B)\cos\beta t + i(A - B)\sin\beta t.$$

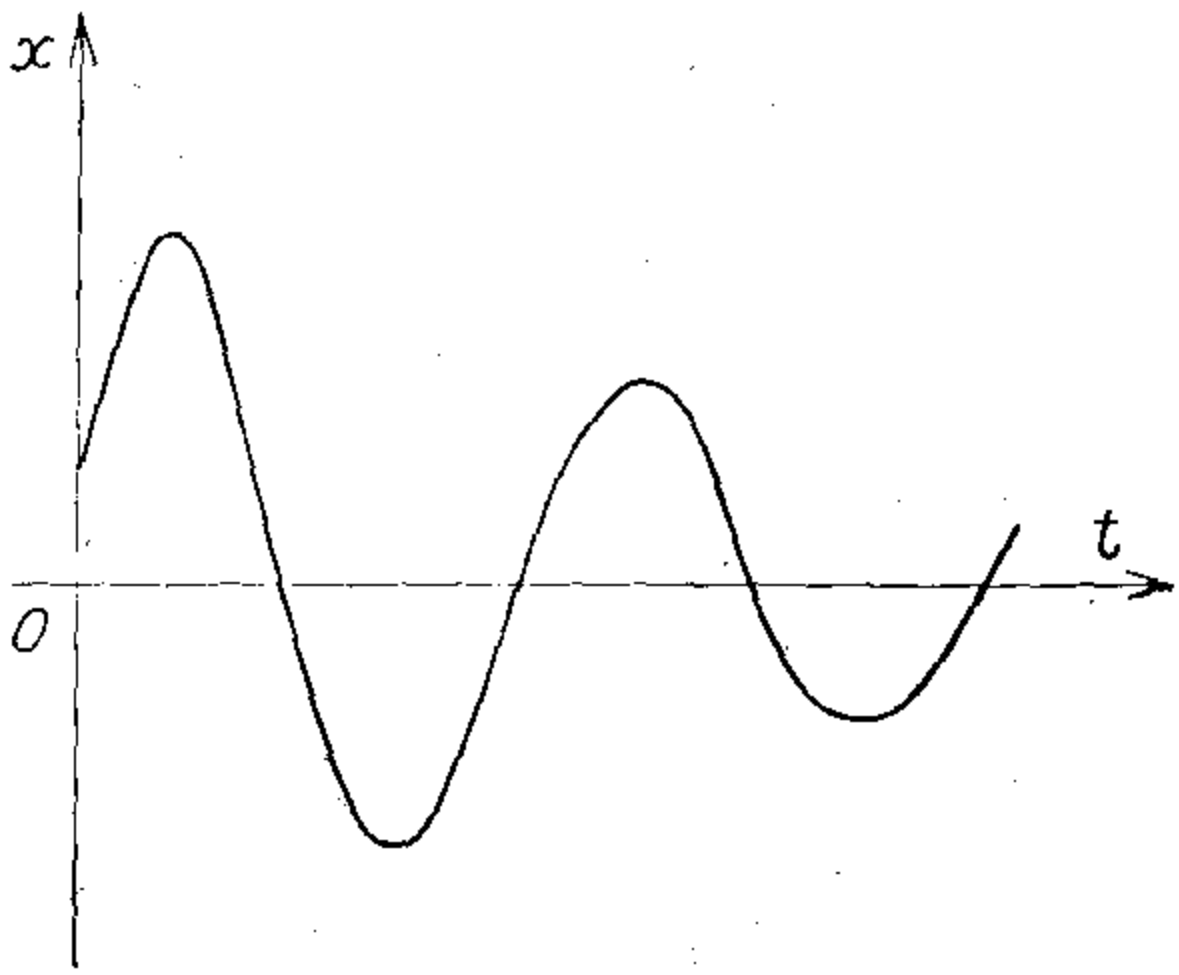
Вредности произвољних констаната A и B следују из почетних услова, а претходни израз прелази у

$$C\cos(\beta t - \gamma).$$

И тако општи интеграл једначине (41) има облик

$$(46)\qquad x = C e^{-\frac{\alpha}{2}t}\cos(\beta t - \gamma),$$

где су вредности константа C и γ израчунате већ помоћу A и B. Образац (46) показује да је кретање тачке M осцилаторно. Али амплитуда осцилација, $Ce^{-\frac{\alpha}{2}t}$, бива све мања што t бива веће и осцилације се гасе. На слици (7) претстављена је крива (46).



Сл. 7

Овакве се осцилације зову *амортизоване*. Нека буде τ периода другог множитеља. Онда је размера двеју вредности x за t и $t + \tau$, као што се види из једначине (46): $e^{\frac{\alpha}{2}\tau}$, и $\delta = \frac{\alpha}{2}\tau$ зове се *логаритмички декремент*.

3) *Принудне осцилације.* Претпоставимо да поред сила уочених у претходним случајевима дејствује на материјалну тачку још једна сила која је периодичка функција времена, и зауставимо се на случају при којем материјална тачка, без нове силе, врши осцилације дуж праве OM, а нека величина нове силе, која пада у исти правац, буде дата изразом $K \sin \mu t$. Осцилације под дејством нове периодичке силе зову се *принудне*. Место једначине (41), сада ћемо имати

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + \kappa^2 x = K \sin \mu t \,. \tag{47}$$

Као што је познато из теорије диференцијалних једначина, општи интеграл нехомогене линеарне једначине (47) једнак је збиру њеног партикуларног интеграла и општег интеграла хомогене једначине (41). Како ћемо проучавати случај осцилација, то ћемо овај општи интеграл имати у облику (46).

Треба још да нађемо један партикуларни интеграл једначине (47). Како је слободни члан дата периодичка функција покушаћемо да видимо да ли функција истог облика, тј.

$$x_1 = D \sin (\mu t + \sigma) \,, \tag{48}$$

може да буде решење дате једначине. На десној страни једначине (47) имамо

$$\sin (\mu t + \sigma - \sigma) = \sin (\mu t + \sigma) \cos \sigma - \cos (\mu t + \sigma) \sin \sigma \,.$$

Ако заменимо $\sin \mu t$ овим изразом, и ако ставимо израз (48) у једначину (47), добићемо да је

$$\sin(\mu t + \sigma) . \left[- \mu^2 D + \kappa^2 D - K \cos \sigma \right] + \cos (\mu t + \sigma) . \left[\mu \alpha D + K \sin \sigma \right] = 0 \,,$$

и то за сваку вредност t. Дакле, изрази што стоје у заградама морају бити једнаки нули, тј.

$$(\kappa^2 - \mu^2) D = K \cos \sigma ,$$

$$\mu \alpha D = - K \sin \sigma .$$

Из ових једначина следује да је

$$\operatorname{tg} \sigma = \frac{\mu\alpha}{\mu^2 - \kappa^2},$$

(49)

$$D = - \frac{K}{\sqrt{(\mu^2 - \kappa^2)^2 + \mu^2\alpha^2}} .$$

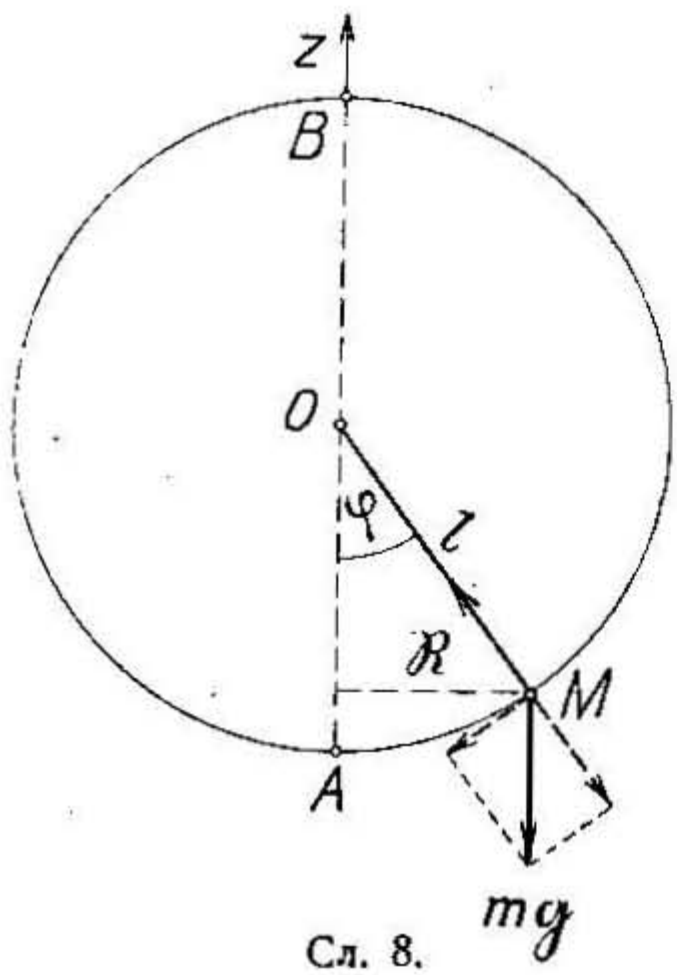
Као што се види, вредности константних бројева D и σ одређене су потпуно овим обрасцима, значи: израз (48) је партикуларни интеграл једначине (47), чији општи интеграл добивамо сад у облику

(50) $$x = C e^{-\frac{\alpha}{2} t} \cos (\beta t - \gamma) + D \sin (\mu t + \sigma) ,$$

где су C и γ произвољне константе.

Док се амплитуда првога члана стално смањује, амплитуда другога остаје иста. Зато код оваквих осцилација: прва, дата првим чланом, који се зове *сопствена* осцилација, постаје неосетна, док друга, *принудна*, остаје.

Из образаца (49) могу се извести закључци о специјалним случајевима који су од велике важности. Амплитуда D постаје све већа ако се μ приближује κ. Ако је усто α мала величина, амплитуда принудне осцилације постаје велика. Ова се појава зове *резонанција*. Када $\mu \to \kappa$ и $\alpha \to 0$, $D \to \infty$.



Сл. 8.

4) *Математичко клатно*. Тако се зове материјална тачка која се креће по вертикалној кружној линији под дејством своје тежине (куглица на концу). Њена брзина је (види слику 8)

$$\mathfrak{v} = v \mathfrak{t},$$

а $$\mathfrak{F} = m \mathfrak{g} = \operatorname{grad} U = \operatorname{grad} (- m g z) ,$$

$$U = mgl \cos\varphi .$$

Интеграл живе силе (23 § 2.3) даје једначину помоћу које се решава проблем кретања:

$$\frac{m l^2 \varphi'^2}{2} = mgl \cos \varphi + h .$$

Одавде добивамо, означавајући $\kappa = \frac{h}{mgl}$,

$$\varphi'^2 = 2\frac{g}{l}\left(\kappa + \cos\varphi\right). \tag{51}$$

Реакција $\mathfrak{R}$ усмерена је дуж MO и одређује се једначином (види (18) § 2.2)

$$m\frac{v^2}{l} = F_N + R, \quad \text{тј.}$$

$$R = m\frac{v^2}{l} + mg\cos\varphi = mg\,(2\kappa + 3\cos\varphi) \tag{52}$$

према једначини (51).

Разликујемо три случаја кретања.

I. $\kappa > 1$. Из једначине (51) следује да φ'^2 никад не постаје нула, и зато тачка M описује целу кружну линију. Кретање је *прогресивно*. Највећа је брзина у тачки A, најмања у B.

$$\left[\varphi'\right]_{\varphi=0} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\kappa+1)}, \quad \left[\varphi'\right]_{\varphi=\pi} = \sqrt{2\frac{g}{l}(\kappa-1)}.$$

II. $\kappa = 1$. Тада је

$$\varphi' = 2\sqrt{\frac{g}{l}}\cos\frac{\varphi}{2}.$$

Одавде следује да је

$$\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,dt = \frac{d\,\mathrm{tg}\frac{\pi+\varphi}{4}}{\mathrm{tg}\frac{\pi+\varphi}{4}}.$$

Интеграљењем добивамо

$$\log\mathrm{tg}\frac{\pi+\varphi}{4} = \sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

ако време бројимо од тренутка када се M налази у тачки A. Када $\varphi \to \pi$, $\mathrm{tg}\frac{\pi+\varphi}{4} \to \infty$. Дакле, клатно се *асимптотски* приближава тачки B. Овај случај се може замислити, ако се претпостави да је конац OM чврст, јер из израза за реакцију (52) видимо да је $R = 0$ када је $2 + 3\cos\varphi = 0$, $\cos\varphi = -\frac{2}{3}$ и $\varphi = 131^\circ 49'$. Кад OM не би било чврсто, тачка би у наредном тренутку почела падати.

III. $-1 < \varkappa < 1$. У овоме случају постоји угао φ^* такав, да је $\varkappa = -\cos\varphi^*$ и зато је

$$\varphi'^2 = 4\frac{g}{l}\left(\sin^2\frac{\varphi^*}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

Угао φ^* је највећа вредност коју може имати φ. Из овог обрасца следује да је време, које је потребно да клатно стигне из A у положај који одговара углу φ:

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\varphi}\frac{d\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{\sin^2\frac{\varphi^*}{2} - \sin^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Добивени интеграл зове се елиптички интеграл прве врсте.

Ставимо

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \sin\frac{\varphi^*}{2}\sin u = \varkappa\sin u.$$

Добићемо

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{u}\frac{du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}.$$

Нека буде T периода клаћења, тј. четвороструки интервал времена потребан да M стигне од 0 (тачка A) до φ^*. Како је за $\varphi = \varphi^*$, $u = \frac{\pi}{2}$ (види горњи образац), то је

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{du}{\sqrt{1-\varkappa^2\sin^2 u}}. \tag{53}$$

Израчунавање интеграла може се извршити развијањем у ред функције

$$\left(1-\varkappa^2\sin^2 u\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}\varkappa^2\sin^2 u + \frac{1.3}{2.4}\varkappa^4\sin^4 u + \ldots.$$

Како је

$$J_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2m} u\,du = \frac{1.3.5.(2m-1)}{2.4.6\ldots 2m}\frac{\pi}{2},$$

а

$$J_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}}du = \frac{\pi}{2},$$

то ће бити

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right)^2 x^4 + \ldots\right]. \tag{54}$$

За мале вредности φ^* можемо ставити $x = \sin\frac{\varphi^*}{2} = \frac{\varphi^*}{2}$ и

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{\varphi^{*2}}{16}\right), \tag{55}$$

а за бесконачно мале амплитуде (φ^*),

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{56}$$

B. МЕХАНИКА СИСТЕМА

§ 3.1 Материјални систем. Везе. Скуп материјалних тачака зовемо материјални систем или систем материјалних тачака, ако кретање сваке од њих зависи од положаја или кретања осталих. Број тачака n система може бити коначан или њих може бити бесконачно много. Можемо даље посматрати изоловани систем, или систем на који дејствују и силе које потичу од других тела или материјалних тачака које не припадају уоченоме систему. Ако тачке уоченог система могу заузимати у произвољном тренутку ма какве положаје и брзине, систем се зове *слободан*. Систем је *неслободан* ако се овај услов не може остварити. Свака се материјална тачка креће под утицајем сила које на њу дејствују. Разликујемо две врсте сила: 1. *унутрашње* тј. оне чији је извор у другим тачкама тог система и 2. *спољње* тј. оне које потичу од маса које не припадају томе систему.

Означимо са $\mathfrak{r}_i$ вектор положаја тачке M_i чија је маса m_i. Нека буде $\mathfrak{R}_{ik}$ сила којом маса m_k дејствује на m_i, а резултанта ових сила $\mathfrak{R}_i = \sum_{k=1}^{n} \mathfrak{R}_{ik}$ $(\mathfrak{R}_{ii} = 0)$. Нека је $\mathfrak{F}_i^*$ резултанта спољњих сила које дејствују на исту масу, кретање тачке M_i биће одређено једначином (1) § 2.2 :

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i^* + \mathfrak{R}_i , \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{1}$$

Кретање пак уоченог слободног система n материјалних тачака је одређено системом n векторских једначина (1). Јер, када су познате силе $\mathfrak{F}_i^*$ и $\mathfrak{R}_i$, интеграљењем овога система можемо уопште наћи n вектора положаја $\mathfrak{r}_i$ као функције времена. За $n = 2$, ако нема спољњих сила, имамо т.зв. проблем двају тела, и кретање двеју материјалних тачака, које се привлаче, одређује се на начин који је изложен у § 2.4. Ако претпоставимо да нема спољњих сила и да се n слободних тачака привлаче по Њутнову закону гравитације, имаћемо т.зв. проблем n тела који игра важну улогу у теорији склопа атома, као и у Небеској механици ($n = 3$). Овде се нећемо заустави на анализи ових проблема.

Ако је систем неслободан, то значи да постоје неки накнадни услови који ограничавају слободу у избору положаја, одн. брзина тачака система. Овакви се услови дају у Механици једначинама или неједначинама, и зову *везе*. Везе изражене једначинама зовемо *задржавајуће*, оне пак које су дате неједначинама нису *задржавајуће*. Према природи веза врши се класификација система на овај начин: 1. за *холономни систем* постоји низ једначина у којима је дата веза између неких координата тачака и, евентуално, времена:

$$f_r(x_i, y_i, z_i, t) = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n; \quad r = 1, 2 \ldots k. \tag{2}$$

Ово су *холономне* или *коначне* везе.

На пример, ако се тачка M_d мора налазити стално на некој покретној површини $F(x, y, z, t) = 0$, њене координате задовољаваће услов $F(x_d, y_d, z_d, t) = 0$.

2. У *нехолономном* систему постоје везе не само између координата него и њихових извода. *Нехолономне* или диференцијалне везе имају, дакле, облик

$$\varphi_s(x_i, y_i, z_i; x_i', y_i', z_i'; t) = 0, \qquad i = 1, 2 \ldots n; \; s = 1, 2 \ldots l, \tag{3}$$

где су, као и у случају функција f_r, φ_s задате функције.

За многе проблеме су од важности само *линеарне* по изводима нехолономне везе, тј. једначине облика:

$$\sum_m (a_{ms}(x_i, y_i, z_i, t)\, x_m' + b_{ms} y_m' + c_{ms} z_m') + a_s(x_i, y_i, z_i) = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots l. \tag{4}$$

Из једначина (2) могу се диференцирањем извести једначине облика (4), али, што је битно за нехолономне везе, претпоставља се да се једначине (3) или (4) не могу интегралити, тј. свести на облик (2). Даље се разликују системи односно везе *склерономне* и *реономне*. Код првих време (t) не улази експлицитно у једначине, друге пак имају облик (2) или (3). Ако везе нису *задржавајуће*, горње једначине прелазе у неједначине.

Ако диференцирамо по времену једначине (2) добићемо k нових услова

$$\frac{df_r}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_i} x_i' + \frac{\partial f_r}{\partial y_i} y_i' + \frac{\partial f_r}{\partial z_i} z_i' \right) + \frac{\partial f_r}{\partial t} = 0. \tag{5}$$

Ако се уведе појам делимичног градијента: $\mathrm{grad}_i f_r \left(\frac{\partial f_r}{\partial x_i}, \frac{\partial f_r}{\partial y_i}, \frac{\partial f_r}{\partial z_i} \right)$ и вектор $\mathfrak{a}_{ms}(a_{ms}, b_{ms}, c_{ms})$, онда се једначине (5) и (4) могу написати у овом облику:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{grad}_i f_r, \mathfrak{v}_i) + \frac{\partial f_r}{\partial t} = 0 \tag{5'}$$

и

$$(4') \qquad \sum_m (\mathfrak{a}_{ms}\, \mathfrak{v}_m) + a_s = 0 .$$

У општем случају, када за материјални систем постоје холономне и нехолономне везе, брзине тачака треба да задовољавају за време кретања $\kappa + l$ услова (5) и (4). Сваки скуп брзина $\mathfrak{v}_i(x_i', y_i', z_i')$ који задовољава ове услове зове се скуп *могућних брзина*. Брзине за време стварног кретања припадају овом скупу. За слободни систем све су брзине могућне. Ако је $\mathfrak{v}_i$ могућна брзина, вектор

$$(6) \qquad \Delta \mathfrak{r}_i = \mathfrak{v}_i \Delta t$$

претставља *могућно померање* тачке M_i. Разлике двају могућних померања

$$(7) \qquad \delta \mathfrak{r}_i = \Delta^* \mathfrak{r}_i - \Delta \mathfrak{r}_i$$

чине систем *могућних варијација* система.

Ако диференцирамо по времену једначине (5) и (4) добивамо услове:

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{grad}_i f_r , \ddot{\mathfrak{r}}_i \right) + B_r = 0 ,$$

$$(9) \qquad \sum_m \left(\mathfrak{a}_{ms} \ddot{\mathfrak{r}}_m \right) + \sum_m \left(\dot{\mathfrak{a}}_{ms}\, \mathfrak{v}_m \right) + a_s' = 0 , \qquad a_s' = \frac{da_s}{dt} .$$

У једначини (8) означили смо са B_r скуп осталих чланова. Као што се види, убрзања тачака M_i треба да задовољавају услове (8) и (9). Ако је то остварено, дотична убрзања зовемо *могућнима*.

Ако замислимо убрзања која би имале тачке M_i под дејством *само* сила привлачења, а која би се одређивала из једначине (1) за слободни систем, ова убрзања уопште не морају задовољавати услове (8) и (9). Да би убрзања тачака неког уоченог неслободног материјалног система постала могућна, тј. задовољавала и накнадне услове (8) и (9) сем једначина кретања морамо претпоставити да се у последњим једначинама, тј. у систему (1) додају неке силе. Ове нове силе појављују се услед постављених веза (2) и (4). А како, према Њутновим законима, извором силе може да буде само маса, то је јасно да се везе могу јављати због присуства маса које не припадају систему, на пр. помоћу неких механизама. Зваћемо ове допунске силе *реакције веза*. Означимо са $\mathfrak{R}_i$ реакцију везе која дејствује на тачку M_i. Пошто имамо $3n$ пројекција ових вектора на неким координатним осама, то $\kappa + l$ допунских услова уопште нису довољни за одређивање реакција веза. Зато се заустав-

љамо на случају *идеалних веза,* за које се поставља услов да је тотални рад реакција при свакој могућној варијацији једнак нули, тј.

$$\sum_i (\mathfrak{R}_i \, \delta \mathfrak{r}_i) = 0 \tag{10}$$

(види једначину (3) § 2.1). Из услова (5′) и (4′) лако је добити, узимајући у обзир (7) и (6):

$$\begin{aligned} &\sum_i (\mathrm{grad}_i f_r, \delta \mathfrak{r}_i) = 0 \\ &\sum_i (\mathfrak{a}_{is}, \delta \mathfrak{r}_i) = 0 . \end{aligned} \tag{11}$$

Множећи прву групу ових једначина бројевима $-\lambda_r$, а другу са $-\mu_s$ и сабирајући једначине (10) и (11) добивамо

$$\sum_i (\mathfrak{R}_i - \sum_{r=1}^{\kappa} \lambda_r \mathrm{grad}_i f_r - \sum_{s=1}^{l} \mu_s \mathfrak{a}_{is}, \delta \mathfrak{r}_i) = 0 .$$

Ова једначина треба да буде задовољена за све могућне вредности вектора $\delta \mathfrak{r}_i$. Али се из услова (11) види да нису сви $\delta \mathfrak{r}_i$, одн. све њихове пројекције δx_g независне, јер су први вектори у тим условима познате величине. Зато ћемо претпоставити да смо $\kappa + l$ бројева λ_r и μ_s изабрали тако да постану нуле коефицијенти зависних пројекција δx_g у претходној једначини. Онда због произвољности осталих $3n - k - l$ бројева δx_g морају опет њихови коефицијенти да буду једнаки нули. Зато, без обзира да ли је $\delta \mathfrak{r}_i$ независни или зависни вектор, мора бити

$$\mathfrak{R}_i = \sum_{r=1}^{\kappa} \lambda_r \mathrm{grad}_i f_r + \sum_{s=1}^{l} \mu_s \mathfrak{a}_{is} . \tag{12}$$

Бројеви λ_r и μ_s зову се *множитељи веза.*

§ 3.2 Lagrange-ове једначине. Означимо ли сада са $\mathfrak{F}_i$ резултанту сила привлачења које дејствују на тачку M_i, можемо место једначине (1) написати

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i , \tag{13}$$

где је $\mathfrak{R}_i$ дато изразом (12). Кретање неслободног материјалног система одређено је системом једначина (13) за $i = 1, 2, \ldots n$ и везама (2) и (4), што чини систем од $n + \kappa + l$ једначина. Непознатих величина има сада исти број: n вектора положаја $\mathfrak{r}_i$, κ бројева λ_r и s бројева μ_s.

Означимо сада координате тачака на други начин, наиме $\mathfrak{r}_i (x_{3i-2}, x_{3i-1}, x_{3i})$, тј. прећашње x_i са x_{3i-2}, $y_i = x_{3i-1}$, $z_i = x_{3i}$ и поставимо услов да је $m_{3i-2} = m_{3i-1} = m_{2i}$ маса i-те тачке тј. m_i; X_{3i-2}, X_{3i-1}, X_{3i} пројекције силе $\mathfrak{F}_i$ која дејствује на M_i.

Ако пројецирамо једначине (13) на осе правоуглог координатног система, добићемо систем од $3n$ скаларних једначина:

$$m_i x_i'' = X_i + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{l} \mu_s a_{is} \tag{14}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots ,$$

које се зову Лагранжове једначине прве врсте. Заједно са везама (2) и (4) оне чине систем од $3n + k + l$ једначина са истим бројем непознатих величина: координатама x_i, y_i, z_i и множитељима веза. Одређивање кретања материјалног система под дејством задатих сила ($\mathfrak{F}_i$) своди се, дакле, на интеграљење овога система диференцијалних једначина другога реда. Резултат интеграљења биће одређивање $3n$ координата x_i као функција времена уз иницијалне услове, тј. уз задате почетне положаје тачака и њихове почетне брзине.

При решавању различитих проблема Механике згодније је заменити координате x_s, у случају када постоје између њих везе, другим величинама које су независне. Зауставимо се зато на случају холономног система који за време кретања задовољава k услова

$$f_r(x_1, x_2, \ldots x_{3n}, t) = 0 . \tag{15}$$

Одавде следује да су само $3n - k$ координата независних, а осталих k координата могућно је израчунати помоћу ових једначина. Претпоставимо да смо увели $3n - k$ нових независних параметара q_i помоћу којих се могу изразити сви x_j. Ове ћемо параметре звати *генералисане координате,* а њихове изводе $\frac{dq_i}{dt} = q_i'$ *генералисане брзине.* Величине q_i не треба да имају увек димензију дужине, као што је то на пр. случај када су ово сферне координате. Имамо дакле

$$x_j = x_j(q_1, \ldots q_p, t), \qquad p = 3n - k , \tag{16}$$

и дефинишемо p као број *степена слободе* уоченог материјалног система (он претставља број независних координата). Ако ставимо функције x_j у једначине (15) добићемо, очевидно, идентитете јер између параметара q_i не постоје никакве везе. Али биће не само једначине (15) идентички задовољене, него и услови:

$$\frac{\partial f_r}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3n} \frac{\partial f_r}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0 . \tag{17}$$

Ако сада множимо редом једначине (14) (где су $\mu_s = 0$) са $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$,

$j = 1, 2, \ldots p$, и сабирамо сваки пут за све вредности i, добићемо систем од p једначина

(18) $$\sum_i m_i x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \Sigma X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Из (16) следује да је

(19) $$x_i' = \Sigma \frac{\partial x_i}{\partial q_j} q_j' + \frac{\partial x_i}{\partial t}.$$

Одатле је

$$\frac{\partial x_i'}{\partial q_j'} = \frac{\partial x_i}{\partial q_j}.$$

Зато је

$$x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = x_i'' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'} = \frac{d}{dt}\left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}\right) - x_i' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}\right) - x_i' \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}\right) - x_i' \left(\sum_h \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial q_h} q_h' + \frac{\partial^2 x_i}{\partial q_j \partial t}\right)$$

$$= \frac{d}{dt}\left(x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j'}\right) - x_i' \frac{\partial x_i'}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_j'} \frac{x_i'^2}{2}\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{x_i'^2}{2}.$$

Уведимо појам *живе силе* система (упореди са (20) § 2.3)

(20) $$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i v_i'^2 = \frac{1}{2} \Sigma (m_i \mathfrak{v}_i, \mathfrak{v}_i),$$

или

(20a) $$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3n} m_i x_i'^2.$$

Помоћу услова (16) овај израз постаје функција генералисаних координата и брзина, и лако је увидети да је

(21) $$T = T_0 + T_1 + T_2,$$

где је сваки члан хомогени полином по q_i' степена који одговара индексу.

Сада се леве стране једначина (18) трансформишу у следеће изразе

$$\Sigma m_i x_i'' \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial q_j'} \frac{1}{2} \Sigma m_i x_i'^2\right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{1}{2} \Sigma m_i x_i'^2$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}.$$

Ако су силе функције координата x_i, десне стране једначина (18) постаће функције величина q_j и, уопште узев, времена t.

Ако ставимо

(22) $$\Sigma X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \ ,$$

онда систем (18) добива овај облик:

(23) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \, , \qquad j = 1, 2, \ldots p \, ,$$

и ово су Лагранжове једначине друге врсте. Величине Q_j зову се *генералисане силе.* Оне не морају имати димензију силе, али је израз

$$Q_j \, \delta q_j = \sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_i X_i \, \delta x_i \, ,$$

ако су δx_i координате померања тачака M_i , када се мења само q_j, рад сила на овоме померању.

Ако су силе *конзервативне,* тј. ако постоји потенцијал $-U$ и, према томе, услови

$$X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$$

биће, због једначине (22),

$$Q_j = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{\partial U}{\partial q_j} \, ,$$

где смо у функцији U заменили x_i њиховим изразима (16).

Како U у овоме случају не зависи од q_j', тј. $\frac{\partial U}{\partial q_j'} = 0$, то, означавајући $T + U$ са L можемо место једначина (23) написати ове:

(24) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial q_j'}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \qquad j = 1, 2 \ldots p \, .$$

Функција L зове се Лагранжова функција. Ако осим конзервативних сила на систем дејствују и друге, тј. ако су

$$Q_j = \frac{\partial U}{dq_j} + Q_j^* \, ,$$

имаћемо, место једначине (24):

(25) $$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial q_j'} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = Q_j^* \, .$$

§ 3.3 Каноничке једначине. Ако се у израз (20 а) за живу силу T ставе вредности (19) извода x_i', она постаје полином другога степена у

односу на q_j', где ће коефицијенти бити функције генералисаних координата q_j. Према томе биће

$$\frac{\partial T}{\partial q_j'} = a_{1j}\, q_1' + a_{2j}\, q_2' + \ldots + a_{pj}\, q_p' + a_j = p_j\,. \tag{26}$$

Величине p_j које су овом једначином дефинисане зову се *генералисани импулси*. Како су то линеарне функције генералисаних брзина, могу се, обрнуто, изразити помоћу p_j:

$$q_j' = \sum_{k=1}^{p} b_{kj}\, p_k + b_j\,. \tag{27}$$

Сменимо ли сада у изразу за живу силу генералисане брзине овим изразима, она ће постати полином у односу на p_j где ће коефицијенти опет бити функције координата q_j. Означимо овај полином са T^*. Сматрајмо да је жива сила T функција од q_i'. Онда је

$$dT = \Sigma \frac{\partial T}{\partial q_j'}\, dq_j' = \Sigma\, p_j\, dq_j' = d\, \Sigma\, p_j\, q_j' - \Sigma\, q_j'\, dp_j\,.$$

Дакле је

$$\Sigma\, q_j'\, dp_j = d\, \left\{\Sigma\, p_j\, q_j' - T\right\}$$

тотални диференцијал функције

$$\Theta = \Sigma\, p_j\, q_j' - T\,, \tag{28}$$

па ће бити

$$q_j' = \frac{\partial \Theta}{\partial p_j}$$

ако се у Θ смене q_j' помоћу обрасца (27). Тада је и

$$\Theta = \Sigma\, p_j\, q_j' - T^*\,. \tag{28a}$$

Како су T, T^* и Θ такође функције величина q_j које смо сматрали досада као параметре, то ће бити, према (28),

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial \Theta}{\partial q_k} + \Sigma \frac{\partial \Theta}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial q_k} = \Sigma\, q_j' \frac{\partial p_j}{\partial q_k}$$

и, због горње једначине за q_j', постаје

$$\frac{\partial T}{\partial q_k} = -\frac{\partial \Theta}{\partial q_k}\,.$$

Ако сада сменимо у Лагранжовим једначинама одговарајуће изразе имаћемо прве од једначина

$$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial \Theta}{\partial q_j} + Q_j^*\,, \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial \Theta}{\partial p_j}\,, \tag{29}$$

а друге смо малопре извели.

Означимо сада, за случај када су $Q_j^* = 0$, $Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}$:

(30) $$H = \Theta - U = H(q_j, p_j)\,.$$

Како U не зависи од p_j, то је $\frac{\partial H}{\partial p_j} = \frac{\partial \Theta}{\partial p_j}$ и зато се систем једначина (29) може написати у облику:

(31) $$\frac{dp_j}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_j}; \qquad \frac{dq_j}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_j}$$

који се зове *каноничан*, а саме једначине (31) — каноничке.

Чак и у случају нехолономних веза, када не важе више једначине (23), а треба да се уоче једначине (14), могу се ове трансформисати тако да добију облик сличан првој групи једначина (29), у којима ће још бити допунских чланова који зависе од веза. Друга пак једначина (29) задржаће горњи облик. Овако добивене једначине општије су од (31) и зову се Хамилтонове.

Каноничке једначине (31) претстављају систем диференцијалних једначина првога реда, где су непознате функције q_j и p_j, и овај систем замењује систем Лагранжових једначина које су другога реда. Али је у првоме систему број непознатих удвостручен, јер у другоме има само p непознатих функција q_j.

Ако функција H, као што се то дешава у неким случајевима, не зависи од неке координате q_α, онда односна једначина система (31) постаје $\frac{dp_\alpha}{dt} = 0$ и према томе је $p_\alpha = \text{const}$.

Координате овакве врсте зову се *цикличке*, на пр., поларни угао θ у централном кретању (§ 2.4).

Поред наведених облика једначина кретања материјалних система постоји низ других, општијих, који важе и за случај нехолономних веза. То су једначине Appell-ове, Maggi-еве, Boltzmann-ове, Hamel-ове, Воронецове и Билимовићеве.

Ако постоје холономне и нехолономне везе, то се помоћу последњих не може смањити број независних координата q_i. Али из једначина (4), увођењем генералисаних координата и брзина, добивамо

(32) $$\sum_{m=1}^{p} \alpha_{ms}(q_i, t)\, q_m' + \alpha_s = 0 \qquad s = 1, 2, \ldots l\,.$$

Одавде следује да се $p - l$ брзина q_m' могу сматрати независним или да се q_m' могу изразити као линеарне функције $p - l$ независних величина π_μ^*, тако да ће услови (32) бити идентички задовољени. Ако сада сматрамо да су π_μ^* изводи параметара π_μ по времену, тј. ставимо

$\frac{d\pi_\mu}{dt} = \pi_\mu^*$, имамо $p - l$ *квазикоордината* π_μ. Одговарајуће диференцијалне једначине (на броју $p - l$) имаће на левим странама линеарне функције израза што стоје у Лагранжовим једначинама друге врсте, на десним биће линеарне комбинације генералисаних сила, а множитељи веза биће елиминисани.

§ 4.1 Закон количине кретања. Центар инерције. Једначине кретања материјалног система имају облик ((13) § 3.2) :

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i , \qquad i = 1, 2 \ldots . n . \tag{1}$$

Саберимо све ове једначине:

$$\Sigma m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \Sigma \mathfrak{F}_i + \Sigma \mathfrak{R}_i . \tag{2}$$

Означимо са $\mathfrak{F} = \Sigma \mathfrak{F}_i$ главни вектор (резултанту) сила, са $\mathfrak{R} = \Sigma \mathfrak{R}_i$ главни вектор реакција и са $\mathfrak{M} = \Sigma m_i \mathfrak{v}_i$ т. зв. *количину кретања* материјалног система. Онда једначина (2) добива облик:

$$\dot{\mathfrak{M}} = \mathfrak{F} + \mathfrak{R} \tag{3}$$

и изражава *закон количине кретања:* извод количине кретања материјалног система по времену једнак је збиру главних вектора сила и реакција. Очевидно је да векторској једначини (3) одговарају скаларне:

$$\frac{dM_x}{dt} = F_x + R_x , \quad \frac{dM_y}{dt} = F_y + R_y , \quad \frac{dM_z}{dt} = F_z + R_z . \tag{4}$$

Тачка C, чији је положај дат вектором $\mathfrak{r}_c$ који зависи од маса m_i тачака система и њихових вектора положаја на овај начин:

$$\mathfrak{r}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{n} m_i \mathfrak{r}_i , \tag{5}$$

где је $m = \sum_{i=1}^{n} m_i$, зове се *центар инерције.*

Због (5) и (2) имаћемо сад

$$m \ddot{\mathfrak{r}}_c = \mathfrak{F} + \mathfrak{R} , \tag{6}$$

тј. центар инерције се креће као да су у њему сакупљене све масе и да на њ дејствује резултанта сила и реакција целог система. Ако је $\mathfrak{R} = 0$, остаје

$$m \ddot{\mathfrak{r}}_c = \mathfrak{F} . \tag{6a}$$

§ 4.2 Закон момента количинâ кретања. Помножимо једначину (1) векторски са $\mathfrak{r}_i$:

$$m_i [\mathfrak{r}_i \ddot{\mathfrak{r}}_i] = [\mathfrak{r}_i \mathfrak{F}_i] + [\mathfrak{r}_i \mathfrak{R}_i] .$$

Лева страна је извод по времену израза $m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i] = \mathfrak{g}_i$, тј. извод момента количине кретање $m\dot{\mathfrak{r}}_i$ тачке M_i око тачке O (пола). Вектор

(7) $$\mathfrak{G} = \Sigma \mathfrak{g}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i [\mathfrak{r}_i \mathfrak{v}_i]$$

зове се *момент количинâ кретања.* Слично овоме добивамо главни момент сила и главни момент реакција

(8) $$\mathfrak{L} = \sum_{i=1}^{n} [\mathfrak{r}_i \mathfrak{F}_i] = \Sigma \mathfrak{L}_i , \quad \Lambda = \Sigma [\mathfrak{r}_i \mathfrak{R}_i] = \Sigma \Lambda \quad .$$

Из горњих једначина следује, онда, да је

(9) $$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L} + \Lambda ,$$

и ова једначина изражава *закон момента количинâ кретања:* извод по времену момента количина кретања у односу на непокретну тачку (O), једнак је збиру главних момената сила и реакција система у односу на исту тачку.

Одговарајуће скаларне једначине су:

(10) $$\frac{dG_x}{dt} = L_x + \Lambda_x , \quad \frac{dG_y}{dt} = L_y + \Lambda_y , \quad \frac{dG_z}{dt} = L_z + \Lambda_z .$$

§ 4.3 Закон живе силе. Множећи сваку од једначина (1) скаларно одговарајућим вектором $d\mathfrak{r}_i = \dot{\mathfrak{r}}_i dt$ и сабирајући добивамо:

$$\sum_{1}^{n} m_i (\ddot{\mathfrak{r}} \dot{\mathfrak{r}}_i) dt = \Sigma (\mathfrak{F}_i d\mathfrak{r}_i) + \Sigma (\mathfrak{R}_i d\mathfrak{r}_i) .$$

Лева страна је диференцијал:

$$d \frac{1}{2} \Sigma m_i (\dot{\mathfrak{r}}_i \dot{\mathfrak{r}}_i) = d \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 ,$$

ако је v_i модуо брзине $\mathfrak{v}_i$. Дакле, она је диференцијал живе силе система

$$T = \frac{1}{2} \Sigma m_i v_i^2 .$$

Даље: $\Sigma (\mathfrak{F}_i d\mathfrak{r}_i)$ је рад свију сила на померањима $d\mathfrak{r}_i$ и, најзад, $\Sigma \mathfrak{R}_i d\mathfrak{r}_i$ рад реакција на истим померањима тачака M_i. Једначина

(11) $$dT = \Sigma \mathfrak{F}_i d\mathfrak{r}_i + \Sigma \mathfrak{R}_i d\mathfrak{r}_i ,$$

која следује из претходних, изражава *закон живе силе:* елементарни прираштај живе силе једнак је збиру елементарних радова сила и реакција система. Да бисмо добили коначни прираштај живе силе, који ће одговарати прелазу система из једне конфигурације P_0 (у тренутку t_0 када је жива сила била T_0) у другу P (у тренутку t када је жива сила T), треба да интегралимо једначину (11):

$$T - T_0 = \int_{P_0}^{P} \Sigma \mathfrak{F}_i \, d\mathfrak{r}_i + \int_{P_0}^{P} \Sigma \mathfrak{R}_i \, d\mathfrak{r}_i \, . \tag{12}$$

Уопште узев, ови интеграли зависе од начина прелаза из P_0 у P, тј. од положаја брзина и тачака у интервалу (t_0, t).

§ 4.4 Интеграли кретања. Ако је $\mathfrak{F} + \mathfrak{R} = 0$, из једначине (3) следује

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_0 = \text{const.} \, , \tag{13}$$

односно, ако су C_1, C_2, C_3 координате овог константног вектора, из (4) излази:

$$M_x = \Sigma m_i x_i' = C_1 \, , \quad M_y = C_2 \, , \quad M_z = C_3 \, . \tag{13а}$$

Ово су први интеграли кретања — *интеграли количина кретања.* Према (6) и (13) имамо сад

$$\dot{\mathfrak{r}}_c = \frac{1}{m} \mathfrak{M}_0 \, . \tag{13б}$$

Одавде интеграљењем добивамо

$$\mathfrak{r}_c = \frac{1}{m} \mathfrak{M}_0 t + \mathfrak{N}_0 \, , \tag{14}$$

где је $\mathfrak{N}_0$ такође константни вектор. Ако је збир сила и реакција у систему једнак нули, центар инерције налази се у миру ($\mathfrak{M}_0 = 0$) или се креће праволиниски и равномерно. Једначина (14) је други интеграл кретања.

Ако је $\mathfrak{L} + \Lambda = 0$, интеграљењем једначине (9) добивамо

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_0 \, , \tag{15}$$

где је $\mathfrak{G}_0 (C_4, C_5, C_6)$ константни вектор, а из једначина (10) следује

$$\begin{aligned} G_x &= \Sigma m_i (y_i z_i' - z_i y_i') = C_4 \, , \\ G_y &= \Sigma m_i (z_i x_i' - x_i z_i') = C_5 \, , \\ G_z &= \Sigma m_i (x_i y_i' - y_i x_i') = C_6 \, , \end{aligned} \tag{16}$$

јер је $\mathfrak{G}$ вектор који је дат обрасцем (7), а x_i, y_i, z_i; x_i', y_i', z_i' су координате вектора $\mathfrak{r}_i$, односно $\mathfrak{v}_i$.

Једначине (15) и (16) су *интеграли момента количина кретања.* Како је сваки од израза $y_i z_i' - z_i y_i'$ итд. једнак двострукој секторској брзини (§ 1), то се (16) зову још *интеграли површина.*

Константни вектор $\mathfrak{G}$ одређује фамилију равни које стоје нормално на њему и не мењају положај у простору. Свака се од њих зове Лапласова раван и, ако је $\mathfrak{r}^*$ вектор положаја ма које њене тачке, њена једначина може се написати у облику

$$(\mathfrak{r}^* \mathfrak{G}) = \alpha\,, \tag{17}$$

где је α константа.

Претпоставимо сад да је рад реакција на стварним померањима тачака система једнак нули. Да би ово било могућно неопходно су потребни извесни услови које ћемо одмах видети. Ставимо, према (12) § 3.1,

$$\Sigma \mathfrak{R}_i d\mathfrak{r}_i = \Sigma \lambda_r (\mathrm{grad}_i f_r, d\mathfrak{r}_i) + \Sigma \mu_s (\mathfrak{a}_{is}, d\mathfrak{r}_i) = 0\,. \tag{18}$$

Због (5′) и (4′) § 3.1 и $d\mathfrak{r}_i = \mathfrak{v}_i dt$, имаћемо у исти мах

$$\Sigma \mathfrak{R}_i d\mathfrak{r}_i = -\Sigma \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial t} dt - \Sigma \mu_s a_s dt = 0\,. \tag{18a}$$

Ако: 1. коначне везе не зависе од времена, тј. $\frac{\partial f_r}{\partial t} = 0$, 2. диференцијалне везе (4) су линеарне и хомогене функције брзина, тј. $a_s = 0$, — једначина (18) биће задовољена и, према (11),

$$dT = \Sigma \mathfrak{F}_i d\mathfrak{r}_i\,. \tag{19}$$

Учинимо и трећу претпоставку: силе имају потенцијал, тј. $X_i = \frac{\partial U}{\partial x_i}$. Онда је $\Sigma \mathfrak{F}_i d\mathfrak{r}_i = \Sigma \frac{\partial U}{\partial x_i} dx_i = dU$. Сад можемо интегралити једначину (19) и добивамо

$$T = U + h\,. \tag{20}$$

Ставимо ли да је потенцијал (или потенцијална енергија) $\Pi = -U$, имамо

$$T + \Pi = h\,, \tag{21}$$

где је h константа. У облику (20) зовемо ову једначину *интеграл живе силе,* у (21) пак — *закон одржања енергије;* T се зове кинетичка енергија. Овај закон важи уз горње три претпоставке и гласи, дакле, овако: тотална енергија материјалног система, тј. збир кинетичке и потенцијалне, је константна. Системи за који важи овај закон зову се конзервативни.

§ 4.5 Кретање у односу на центар инерције. Досада смо проучавали особине апсолутног кретања система. Али у више проблема Механике

указује се потреба да се проучи релативно кретање, у односу на неки покретни простор, неки покретни триједар оса. А од нарочитог је интереса кретање у односу на центар инерције.

Ако означимо са $\mathfrak{r}_i^*$ вектор положаја тачке M_i у односу на центар инерције имаћемо

$$\mathfrak{r}_i = \mathfrak{r}_c + \mathfrak{r}_i^* \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{22}$$

Помножимо ли ове једначине са m_i и саберемо ли их, добићемо, због (5),

$$\Sigma\, m_i \mathfrak{r}_i^* = 0. \tag{23}$$

Осим тога је

$$\dot{\mathfrak{r}}_i = \dot{\mathfrak{r}}_c + \dot{\mathfrak{r}}_i^* \quad \text{и} \quad \Sigma\, m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^* = 0. \tag{24}$$

Помножимо векторски једначине (1) векторима $\mathfrak{r}_i^*$ и саберимо их. Добивамо:

$$\Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \ddot{\mathfrak{r}}_i\right] = \Sigma \left[\mathfrak{r}_i^* \mathfrak{F}_i\right] + \Sigma \left[\mathfrak{r}_i^* \mathfrak{R}_i\right].$$

Леву страну ове једначине трансформишимо помоћу (22—24) на следећи начин:

$$\Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \ddot{\mathfrak{r}}_i\right] = \frac{d}{dt} \Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i\right] - \Sigma\, m_i \left[\dot{\mathfrak{r}}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i\right] = \frac{d}{dt} \Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i^*\right] + \frac{d}{dt}\left[\Sigma\, m_i \mathfrak{r}_i^*, \dot{\mathfrak{r}}_c\right]$$

$$- \left[\Sigma\, m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^*, \dot{\mathfrak{r}}_c\right] - \Sigma\, m_i \left[\dot{\mathfrak{r}}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i^*\right]^{1)} = \frac{d}{dt} \Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i^*\right].$$

Израз

$$\mathfrak{G}^c = \Sigma\, m_i \left[\mathfrak{r}_i^* \dot{\mathfrak{r}}_i^*\right] \tag{25}$$

је главни момент количина кретања $m_i \dot{\mathfrak{r}}_i^*$, тј. за релативно кретање у простору који се транслаторно помера са центром инерције (C), а у односу на ову тачку. Величине пак

$$\mathfrak{L}^c = \Sigma \left[\mathfrak{r}_i^* \mathfrak{F}_i\right], \qquad \Lambda^c = \Sigma \left[\mathfrak{r}_i^* \mathfrak{R}_i\right] \tag{26}$$

су главни моменти сила и реакција у односу на центар инерције. Дакле закон момента количина кретања у односу на релативно кретање око центра инерције

$$\frac{d\mathfrak{G}^c}{dt} = \mathfrak{L}^c + \Lambda^c \tag{27}$$

има исти облик са једначином (9), тј. са законом за апсолутно кретање.

---

[1]) једнако је нули због колинеарности множитеља у производу.

Како живу силу можемо изразити у облику

$$T=\frac{1}{2}\Sigma\, m_i(\dot{\mathfrak{r}}_i\dot{\mathfrak{r}}_i)=\frac{1}{2}\Sigma\, m_i(\dot{\mathfrak{r}}_c\dot{\mathfrak{r}}_c)+(\Sigma\, m_i\dot{\mathfrak{r}}_i^*,\dot{\mathfrak{r}}_c)+\frac{1}{2}\Sigma\, m_i(\dot{\mathfrak{r}}_i^*\dot{\mathfrak{r}}_i^*),$$

то је, због (24),

$$T=\frac{1}{2}\Sigma\, m_i(\dot{\mathfrak{r}}_c\dot{\mathfrak{r}}_c)+\frac{1}{2}\Sigma\, m_i(\dot{\mathfrak{r}}_i^*\dot{\mathfrak{r}}_i^*).$$

Први члан је

$$\frac{1}{2}m(\dot{\mathfrak{r}}_c\dot{\mathfrak{r}}_c)=\frac{1}{2}mv_c^2,$$

други је пак жива сила релативног кретања

$$T_r=\frac{1}{2}\Sigma\, m_i v_i^{*2},$$

где је v_i^* модуо релативне брзине $\mathfrak{v}_i^*=\dot{\mathfrak{r}}_i^*$.

Дакле имамо

$$T=\frac{1}{2}mv_c^2+T_r. \tag{28}$$

Ако функција силе зависи само од разлика вектора положаја, можемо у изразу за U сменити $\mathfrak{r}_i-\mathfrak{r}_k$ са $\mathfrak{r}_i^*-\mathfrak{r}_k^*$ (због (22)) и, ако је још $v_c=\text{const.}$, закон живе силе важиће за релативно кретање. Доиста, из (20) добивамо, због (28),

$$T_r=U+h-\frac{1}{2}mv_c^2=U+h',$$

где је h' нова константа.

§ 4.6 Примедба о законима и интегралима кретања. Три закона: количине кретања (3), момента количина кретања (9) и живе силе (11) јесу опште теореме које се, уз наведене услове, изводе из једначина кретања материјалног система. Али обрнуто, из *једног* од ових закона не могу се извести уопште све једначине кретања система. Свима овим законима одговарају седам скаларних једначина (4), (10) и (11) и очевидно је да у случају броја степена слободе већег од седам ове једначине нису довољне за потпуно решење проблема.

Даље добили смо три интеграла кретања (13), (15) и (20), односно седам скаларних (14), (16) и (20) и то је највећи број интеграла који се може извести у општем случају за материјални систем. Очевидно је да и ове једначине могу послужити за дефинитивно решење проблема кретања само онда, ако број степена слободе не прелази седам. У су-

протном случају морамо да попунимо број једначина диференцијалним једначинама кретања. У појединим проблемима, на пр. у случају цикличких координата, број познатих интеграла лако се повећава.

§ 5 Општи принципи Механике или општа начела јесу услови из којих се могу извести системи једначина кретања материјалних система, али и обрнуто, они су последица ових. Начела, дакле, карактеришу особине кретања материјалних система, а потпуно су еквивалентни системима једначина кретања.

I. *Даламберов принцип.* Претпоставимо да је дат систем n материјалних тачака, холономне везе (2) § 3.1 и нехолономне (4) § 3.1. Једначине кретања имају онда облик (14) § 3.2

$$m_i x_i'' = X_i + \sum_{r=1}^{k} \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial x_i} + \sum_{s=1}^{l} \mu_s a_{is}, \qquad i = 1, 2, \ldots 3n, \tag{1}$$

или, у векторском облику,

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \Sigma \lambda_r \operatorname{grad}_i f_r + \Sigma \mu_s \mathfrak{a}_{is}, \qquad i = 1, 2, \ldots n. \tag{1*}$$

Помножимо скаларно сваку од ових једначина могућним варијацијама $\delta \mathfrak{r}_i$ i-те тачке и саберимо. Добивамо да је

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i, \delta \mathfrak{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{r=1}^{k} \lambda_r (\operatorname{grad}_i f_r \, \delta \mathfrak{r}_i) + \sum_{i=1}^{n} \sum_{s=1}^{l} \mu_s (\mathfrak{a}_{is}, \delta \mathfrak{r}_i). \tag{2}$$

Али, због услова (11) § 3.1, десна страна је једнака нули. Зато је

$$\sum_{i=1}^{n} (m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i, \delta \mathfrak{r}_i) = 0 \tag{3}$$

или

$$\sum_{i=1}^{3n} (m_i x_i'' - X_i, \delta x_i) = 0. \tag{3*}$$

Доказали смо да једначина (3) следује из једначина кретања. Обрнуто, из овог услова могу се извести једначине (1) или (1*) из (3*). Разликујемо два случаја. Први — систем слободних материјалних тачака. Како су за ове тачке све варијације произвољне, једначина (3) може да постоји само онда, ако је

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots n.$$

А ово су једначине кретања слободних тачака. Други случај — постоје холономне и нехолономне везе. Онда нису све варијације произвољне, јер оне задовољавају услове (11) § 3.1. Множећи прву групу ових услова бројевима $-\lambda_r$, једначине друге групе бројевима $-\mu_s$ и додајући једначини (3) све ове услове, добићемо једначину (2). У овој једначини

располажемо са $k + l$ произвољних бројева λ_r и μ_s. Можемо, дакле, да им дамо такве вредности, да $k + l$ коефицијената зависних варијација постану једнаки нули. Због услова (11) § 3.1, којих има $k + l$ на броју, биће само $3n - k - l$ независних варијација δx_i, δy_i, δz_i. Онда у једначини (2), где су остале сада само независне варијације, морају бити једнаки нули и остали коефицијенти. На овај начин добивамо $3n$ једначина (1), тј. из услова (3) следују једначине кретања система материјалних тачака.

Услов (3) изражава Даламберов принцип*): убрзања ($\ddot{\mathfrak{r}}_i$) материјалних тачака треба да буду таква да буде задовољен услов (3).

II. *Принцип могућних померања.* Претпоставимо да су везе склерономне. Онда нема разлике између могућних померања и могућних варијација. Имамо, дакле, $\frac{\partial f_r}{\partial t} = 0$, $a_s = 0$, $\delta \mathfrak{r}_i = \Delta \mathfrak{r}_i$ (види § 3.1). Нека се систем материјалних тачака налази у равнотежи, тј. $\ddot{\mathfrak{r}}_i = 0$.

Тада из једначине (3) следује

$$\sum_1^n (\mathfrak{F}_i, \Delta \mathfrak{r}_i) = 0 \tag{4}$$

или тотални рад сила на могућним померањима мора бити једнак нули. Услов (4) зове се принцип могућних померања а лежи у основи Статике. Наравно, у овом случају силе $\mathfrak{F}_i$ не могу да зависе од времена. Ако је задовољен услов (4), систем може да остане у стању равнотеже.

III. *Гаусов принцип.* Једначина кретања неке тачке A_i система материјалних тачака има облик (13) § 3.2

$$m_i \ddot{\mathfrak{r}}_i = \mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i .$$

У исти мах имамо две вредности убрзања које одговарају случајевима: 1) да постоје само силе $\mathfrak{F}_i$ (тачка постаје слободна) и 2) да дејствују силе $\mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i$:

$$\ddot{\mathfrak{r}}_i = \frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i ; \quad \ddot{\mathfrak{r}}_i = \frac{1}{m_i} (\mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i) .$$

Ако развијемо у ред вектор положаја, имамо

$$\mathfrak{r}(t + \Delta t) = \mathfrak{r} + \mathfrak{v} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \mathfrak{a} + \ldots .$$

Када би убрзање било дато првим изразом, тачка A_i налазила би се у положају $a' : \mathfrak{r} + \mathfrak{v} \Delta t + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{1}{m_i} \mathfrak{F}_i$; а ако је дато другим изразом — у

*) За везе које нису задржавајуће, место знака једнакости треба да стоји $\geqq$.

положају $a : \mathfrak{r} + \mathfrak{v}\,\Delta t + \frac{\Delta t^2}{2}\frac{1}{m_i}(\mathfrak{F}_i + \mathfrak{R}_i)$. Дакле је вектор $\overrightarrow{a'a}$ једнак $\frac{\Delta t^2}{2}\frac{1}{m_i}\mathfrak{R}_i = -\frac{\Delta t^2}{2}\left(\frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i - \ddot{\mathfrak{r}}_i\right)$.

Претпоставимо да због неке могућне варијације $\delta\mathfrak{r}$ тачка A_i дође у положај b. Из троугла $a'ba$ имамо

$$\overrightarrow{a'b} = \overrightarrow{a'a} + \delta\mathfrak{r}$$

$$(a'b)^2 = (a'a)^2 + \delta\mathfrak{r}^2 + 2\,\overrightarrow{a'a}\,\delta\mathfrak{r} =$$

$$= (a'a)^2 + \delta\mathfrak{r}^2 + \Delta t^2\left(\ddot{\mathfrak{r}}_i - \frac{1}{m_i}\mathfrak{F}_i\,,\ \delta\mathfrak{r}\right).$$

Одатле сабирањем за све тачке добивамо

$$\Sigma\, m_i\,(a'b)^2 = \Sigma\, m_i\,(a'a)^2 + \Sigma\, m_i\,\delta\mathfrak{r}^2 + \Sigma\,\Delta t^2\,(m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i - \mathfrak{F}_i,\ \delta\mathfrak{r}).$$

Како је последњи члан по Даламберову принципу једнак нули или је већи од нуле*), то ће бити

$$\Sigma\, m_i\,(a'b)^2 > \Sigma\, m_i\,(a'a)^2.$$

Ако $\Sigma\, m_i\,(a'b)^2$ назовемо отступање другог положаја система од првог, последња неједнакост каже да се неслободни материјални систем креће са таквим убрзањима, да је у сваком тренутку отступање система од положаја, који би овај имао да је постао у претходном тренутку слободан, најмање.

Последње отступање је $\Sigma\, m_i\,(a'a)^2$ и уврсти ли се горња вредност вектора $\overrightarrow{a'a}$, за то отступање налазимо

$$\frac{\Delta t^4}{4}\,\Sigma\,\frac{1}{m_i}\,(\mathfrak{F}_i - m_i\ddot{\mathfrak{r}}_i)^2. \tag{5}$$

Према Гаусову принципу или, како се он још зове, принципу најмањег отступања овај израз за стварно кретање има најмању вредност.**)

IV. *Hamilton-ов принцип.* Уочимо холономни систем на који дејствују силе које имају потенцијал (а могу да зависе експлицитно од времена). Због последњег услова генералисане су силе $Q_j = \frac{\partial U}{\partial q_j}$, а Лагранжове једначине друге врсте имају облик (23) § 3.2

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q_j'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_j} = 0.$$

---

*) за везе које нису задржавајуће.

**) Као што смо видели у горњим разлагањима само убрзања варирају. Зато треба, приликом извођења једначина кретања из овог израза, варирати само убрзања.

Означимо са A_0 положај система у неком тренутку t_0, са A_1 — у тренутку t_1. Скуп путања тачака кад оне прелазе из A_0 у A_1 зовимо *директни* пут система. Скуп пак кривих линија које се бесконачно мало разликују од ових путања, а спајају увек почетни положај тачке у A_0 са крајњим у A_1, назовимо *суседни* пут система. Претпоставимо да се могу одабрати брзине тако, да материјални систем пређе суседним путем из A_0 у A_1 за исто време $t_1 - t_0$, а да, наравно, везе $f_r = 0$ буду при том задовољене. Уочимо сад израз

$$W = \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt\,. \tag{6}$$

Вредности овог израза разликују се, према томе да ли узимамо генералисане координате q_j тачака система за директни пут или за суседне путеве. За ове путеве имаће координате вредности $q_j + \delta q_j$. Израчунајмо сада варијацију овог израза δW уз услове да тренуци t_0 и t_1 остају исти и да координате у положају A_0, односно A_1 остају исте:

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = \int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta U)\, dt\,. \tag{7}$$

Међутим је, пошто T зависи од q_j и q_j',

$$\delta T = \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_1^n \frac{\partial T}{\partial q_j'} \delta q_j' \;;\quad \delta U = \sum_1^n \frac{\partial U}{\partial q_j} \delta q_j\,. \tag{8}$$

Како је опет

$$\delta q_j' = \delta \frac{dq_j}{dt} = \frac{d}{dt} \delta q_j\,,$$

то је

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_j'} \delta q_j'\, dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{\partial T}{\partial q_j'} \frac{d}{dt} \delta q_j'\, dt = \left[\frac{\partial T}{\partial q_j'} \delta q_j\right]_{t_0}^{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j'} \delta q_j\, dt\,.$$

Како почетни, односно крајњи положај не варира, биће

$$\left[\delta q_j\right]_{t_0} = \left[\delta q_j\right]_{t_1} = 0$$

и члан, где се врши двојна супституција, отпада. Дакле, стављајући изразе (8) у (7) и узимајући у обзир последњу трансформацију добивамо

$$\delta W = \int_{t_0}^{t_1} \sum_1^n \left(\frac{\partial (T + U)}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial q_j'}\right) dt\, \delta q_j\,.$$

На директном путу задовољене су Лагранжове једначине, тј. изрази у заградама постају једнаки нули. Према томе за директни пут је

$$\delta W = \delta \int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt = 0\,, \tag{9}$$

и овај услов изражава Хамилтонов принцип. Израз W (6) зове се *дејство у Хамилтонову смислу* и онда овај принцип гласи: дејство у Хамилтонову смислу има за директни пут система екстремну вредност, ако се упореди са вредностима за суседне путеве, на којима систем из истог почетног положаја A_0 може да стигне у исти крајњи положај A_1 за исто време $(t_1 - t_0)$.

Обрнуто, ако се Хамилтонов принцип узме као дати услов, могу се из једначине (9) извести Лагранжове једначине друге врсте.

V. *Принцип Lagrange-Maupertuis*-ов. За кретање холономног конзервативног система постоји интеграл живе силе (20) § 4.4

$$T = U + h\,.$$

Ако у једначини (9) сменимо U са $T - h$ и одбацимо члан $\delta h (t_1 - t_0)$, који сада не варира, добићемо, означавајући са

$$L = 2 \int_{t_0}^{t_1} T\, dt\,, \tag{10}$$

да је

$$\delta L = 0\,. \tag{11}$$

Ова једначина изражава Лагранжов принцип или принцип најмањег дејства. Израз (10) зове се дејство у Лагранжову смислу.

Како је

$$2T = \Sigma\, m_i v_i^2\,,$$

а $v_i = \dfrac{ds_i}{dt}$, то можемо написати једначину (11) у облику

$$\delta \int_{t_0}^{t_1} 2T\, dt = \delta \int_{A_0}^{A_1} \Sigma\, m_i v_i\, ds_i = 0\,, \tag{12}$$

где смо елиминисали време и зато смо у границе интеграла увели ознаке: A_0 за почетни и A_1 за завршни положај система. Овај принцип поставио је први пут Moreau de Maupertuis, но Лагранжу припада његово тачно формулисање. Као и у Хамилтонову принципу, најмање дејство добива се наравно за директни пут.

Поред наведених, познати су још у Рационалној механици принципи: Jacobi-ев, Helmholtz-ов, Hertz-ов, Jourdain-ов (види на пр. Hand. d. Physik B. V), које нећемо овде наводити. Уопште се, према облику, разликују принципи диференцијални и интегрални. У прву групу спада на пр. Даламберов, у другу — Хамилтонов. Док диференцијални принципи омогућују да се само изведу диференцијалне једначине кретања, интегрални принципи карактеришу и путање система; на пр. Хамилтонов принцип даје особину дејства на директном путу. Облик овог принципа може да се уопшти тако, да важи и за нехолономне и реономне системе, за које ће и једначине кретања имати компликованији облик (уопштене Лагранжове или споменуте на крају § 3.3). О другим уопштењима види Увод § 0.8.

С. МЕХАНИКА ЧВРСТОГ ТЕЛА

§ 6 Кинематика чврстог тела. Уочимо део простора који испуњава материја. Претпоставимо да се за сва могућна кретања овог тела (материјалног) не мењају међусобна растојања његових тачака. Онда ово тело зовемо *чврсто* (идеално чврсто, јер у природи, у реалним телима ова се особина не остварује). Ако за чврсто тело вежемо неки триједар, чије осе пролазе кроз четири некомпланарне тачке, но које не мењају положај у телу, онда је за одређивање кретања чврстог тела довољно да се нађе кретање уоченог триједра.

Најпростији је случај померања чврстог тела када су путање свију његових тачака исте, тј. када вектори положаја свију тачака за исто време добивају једнаке прираштаје. Ако, дакле, тачке $A, B, C, \ldots$ прелазе у положаје $A', B', C', \ldots$, биће

$$\mathfrak{r}_{A'} = \mathfrak{r}_A + \mathfrak{a}\,, \quad \mathfrak{r}_{B'} = \mathfrak{r}_B + \mathfrak{a}\,, \quad \mathfrak{r}_{C'} = \mathfrak{r}_C + \mathfrak{a}\,, \ldots\,,$$

или

$$\mathfrak{r}_{A'} - \mathfrak{r}_A = \mathfrak{r}_{B'} - \mathfrak{r}_B = \mathfrak{r}_{C'} - \mathfrak{r}_C = \ldots = \mathfrak{a}\,.$$

Кретање чврстог тела које задовољава овај услов зове се *транслаторно*. Ако претпоставимо да време Δt, за које се свака тачка помера за вектор $\mathfrak{a}$, тежи нули, добићемо, због

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathfrak{r}_{A'} - \mathfrak{r}_A}{\Delta t} = \dot{\mathfrak{r}}_A = \mathfrak{v}_A\,,$$

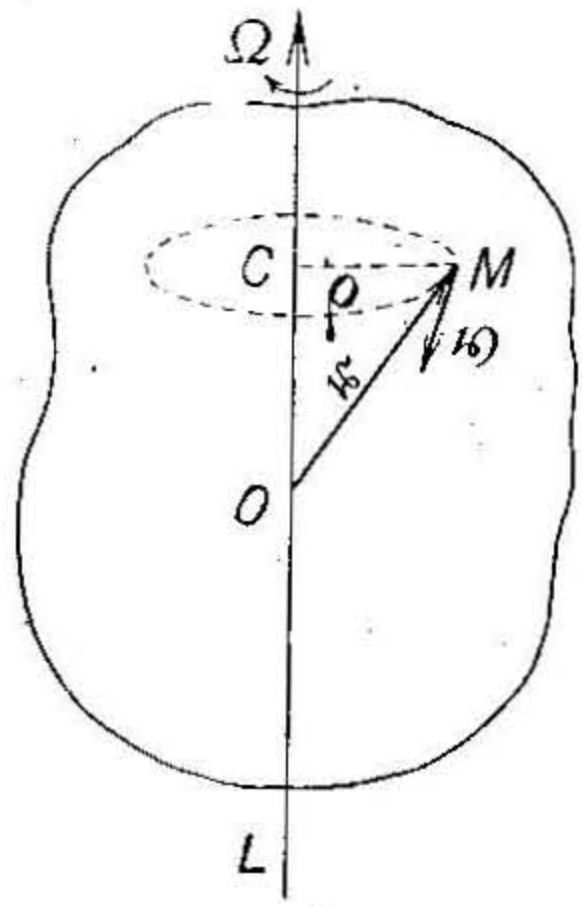
да је

$$\mathfrak{v}_A = \mathfrak{v}_B = \mathfrak{v}_C = \ldots\,,$$

тј. при транслаторном кретању брзине свију тачака чврстог тела су једнаке.

Други прост случај кретања чврстог тела је обртање око непокретне осе. Свака тачка (M) описаће кружну линију са средиштем (C) на овој оси (L) а у равни управној на овој оси. Ако полупречник CM означимо са ρ, а са $d\theta$ угао за који ће се он обрнути у времену dt, лук који опише тачка биће $\rho d\theta$, а модуо (v) њене брзине ($\mathfrak{v}$) биће $v = \rho \dfrac{d\theta}{dt}$

(сл. 9). Све тачке које леже на јединици растојања од осе имају брзине чији је модуо $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Према томе $v = \rho\omega$.



Сл. 9

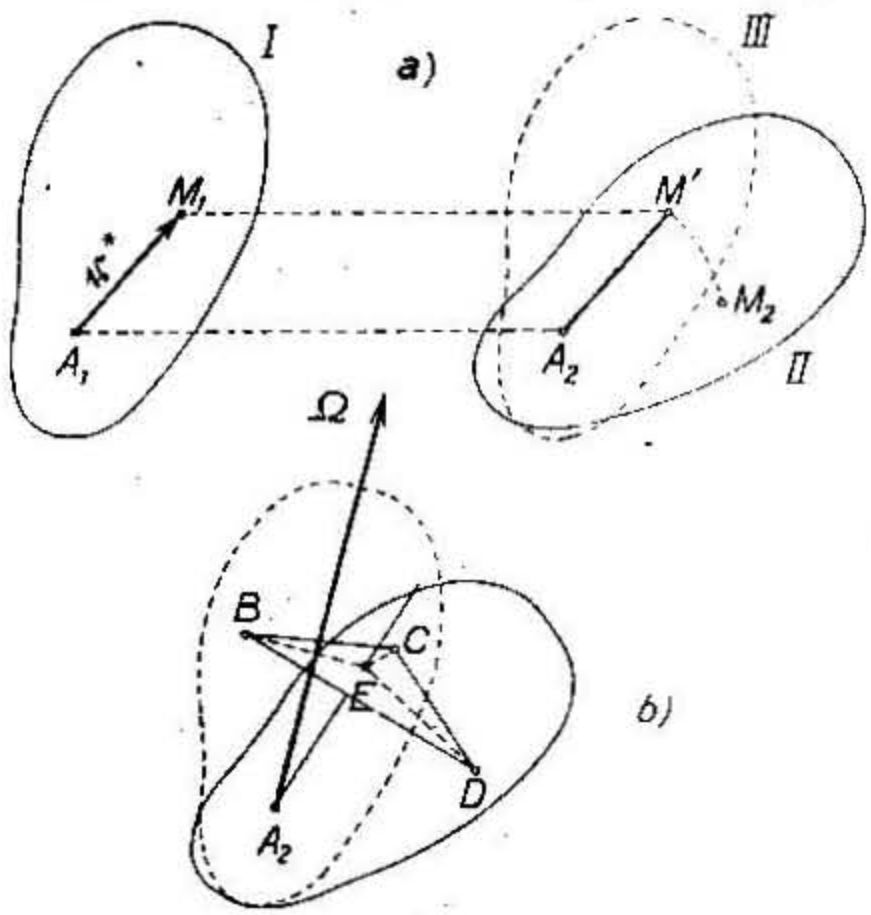
Уочимо сад на оси L вектор Ω чији је модуо ω, а који је усмерен ка оној страни одакле се види да је обртање у позитивном смеру. Овај ћемо вектор звати *угловна брзина*. Нека се положај покретне тачке (M) одређује у односу на неку непокретну тачку O. Из троугла OCM је: $\rho = r \sin \sphericalangle COM$, ако је r модуо вектора положаја ($\mathfrak{r}$). Брзина $\mathfrak{v}$ стоји нормално на равни OCM, а њен модуо је

$$v = \omega r \sin \sphericalangle COM = \omega r \sin \sphericalangle (\Omega \mathfrak{r}).$$

Лако је видети на слици (9) да је онда

$$\mathfrak{v} = [\Omega \mathfrak{r}]. \tag{1}$$

Уочимо сада кретање слободног чврстог тела, и нека оно за време Δt пређе из положаја I у II (сл. 10a). Транслаторним померањем може се прво тело довести у положај III; тада ће нека његова тачка A_1 доспети у положај A_2 који она заузима и у положају тела II. Затим, обртањем тела око ове тачке доводи се оно из III у II. Уочимо сада другу слику (10*b*). Нека услед овог обртања тачка B пређе у положај C, а пређашња тачка тела C у положај D. Имамо $A_2B = A_2C = A_2D$ и, ако спустимо нормалу AE на раван BCD, E ће се налазити у средишту круга описаног око троугла BCD. Биће према томе $EB = EC = ED$ и $\sphericalangle BEC = \sphericalangle CED$, који ћемо означити са $\Delta\theta$. Очигледно је да имамо обртање око осе AE, а величина $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ је *средња угловна брзина*. Ако сада претпоставимо да су положаји I, II, III бесконачно блиски, тј. да Δt тежи нули, оса обртања A_2E тежиће неком граничном положају, на којем можемо уочити вектор Ω чији је модуо $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Овај ћемо вектор звати *тренутна угловна брзина* (обртања). Он може за време кретања чврстог тела мењати свој правац у простору и телу, а такође и модуо.



Сл. 10

Узмемо ли ма коју тачку тела M (у положају M_1 на слици 10а) њено ће померање бити

$$\overrightarrow{M_1 M_2} = \overrightarrow{M_1 M'} + \overrightarrow{M' M_2},$$

а усто је $\overrightarrow{M_1 M'} = \overrightarrow{A_1 A_2}$. Нека буде $\mathbf{r}^*$ вектор положаја M_1 у односу на тачку тела A која се налази у положају A_1.

Како је

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{\Delta t} = \mathbf{v}_M, \quad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M_1 M'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{A_1 A_2}}{\Delta t} = \mathbf{v}_A$$

а, осим тога,

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{M' M_2}}{\Delta t} = \left[\Omega\, \mathbf{r}^*\right],$$

јер последње померање тачке долази због обртања око осе (Ω), и према обрасцу (1) одговарајућу брзину добићемо ако сменимо $\mathbf{r}$ са $\mathbf{r}^*$, то ћемо имати

$$\mathbf{v}_M = \mathbf{v}_A + \left[\Omega\, \mathbf{r}^*\right]. \tag{2}$$

Ово је основни образац Кинематике чврстог тела, који даје брзину ма које његове тачке, изражену помоћу брзине и вектора положаја $\mathbf{r}^*$ прве у односу на другу. Како нисмо поставили никакав услов за избор тачке A, то је очевидно да се може, место ње, узети ма која друга тачка тела. Може се доказати да ће се онда у обрасцу (2) променити само вредност вектора $\mathbf{r}^*$, а Ω остати исто.

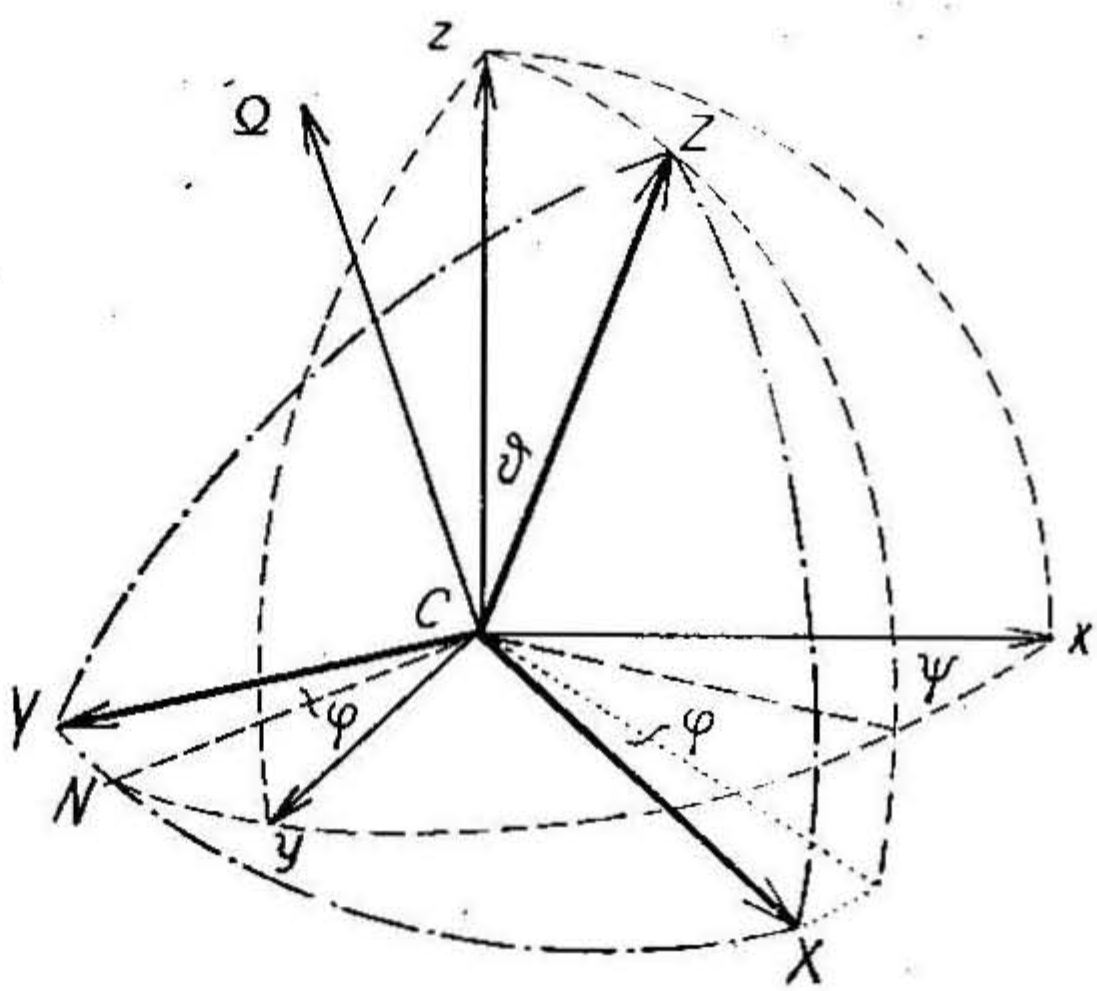
У почетку овог параграфа казали смо да је кретање чврстог тела одређено чим се зна кретање за њ везаног триједра. У општем случају, када је тело слободно, треба дакле да знамо у сваком тренутку положај почетка овог триједра и оријентацију његових оса према неком другом непокретном триједру ($Oxyz$). Положај почетка триједра даје један вектор, односно три броја — пројекције овог вектора. Нека буду уочени триједри ортогонални. Оријентација покретних оса $CXYZ$ даје се помоћу девет углова, но ови нису сви независни, јер постоје познате везе између косинуса. Напишемо ли ових девет косинуса у облику схеме

	X	Y	Z
x	α_1	β_1	γ_1
y	α_2	β_2	γ_2
z	α_3	β_3	γ_3

имаћемо из Аналитичке геометрије шест познатих веза:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2=1 \qquad \alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_3=0$$
$$\beta_1^2+\beta_2^2+\beta_3^2=1 \qquad \beta_1\gamma_1+\beta_2\gamma_2+\beta_3\gamma_3=0$$
$$\gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1 \qquad \gamma_1\alpha_1+\gamma_2\alpha_2+\gamma_3\alpha_3=0\,,$$

те су, према томе, само три од ових величина независне. Али обрасци постају много згоднији ако се уведу т. зв. *Ојлерови углови* као величине које одређују положај триједра (слика 11).*) Уочимо зато триједар $Cxyz$ чије су осе паралелне осама $Oxyz$. Обрнимо триједар $Cxyz$ око осе z за угао ψ (прецесиони), затим око линије CN (линије чворова) за угао ϑ (нутациони) и, најзад, око осе Z за угао φ (ротациони), па ћемо га довести у положај $CXYZ$. Три Ојлерова угла $(\vartheta, \varphi, \psi)$ одређују дакле оријентацију оса. Са три координате почетка C ово чини шест бројева, па према томе, у општем случају, за одређивање кретања чврстог тела морамо да нађемо ових шест бројева као функције времена. Слободно чврсто тело има другим речима *шест степена слободе.*



Сл. 11

У обрасцу (2) стоји вектор Ω, тренутна угловна брзина. Као што ћемо даље видети, биће потребно да се његове пројекције на координатне осе нађу као функције Ојлерових углова и њихових извода по времену. Ове везе можемо лако наћи помоћу слике 11. Нека буду $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ јединични вектори у правцима X, Y, Z, а $\mathfrak{l}$ у правцу CN. Ставимо

$$\Omega = p\mathfrak{u}_1+q\mathfrak{u}_2+r\mathfrak{u}_3\,. \tag{3}$$

С друге стране, ако је $\mathfrak{k}$ јединични вектор осе Cz,

$$\Omega = \psi'\mathfrak{k}+\vartheta'\mathfrak{l}+\varphi'\mathfrak{u}_3\,,$$

*) А помоћу којих се могу изразити $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$.

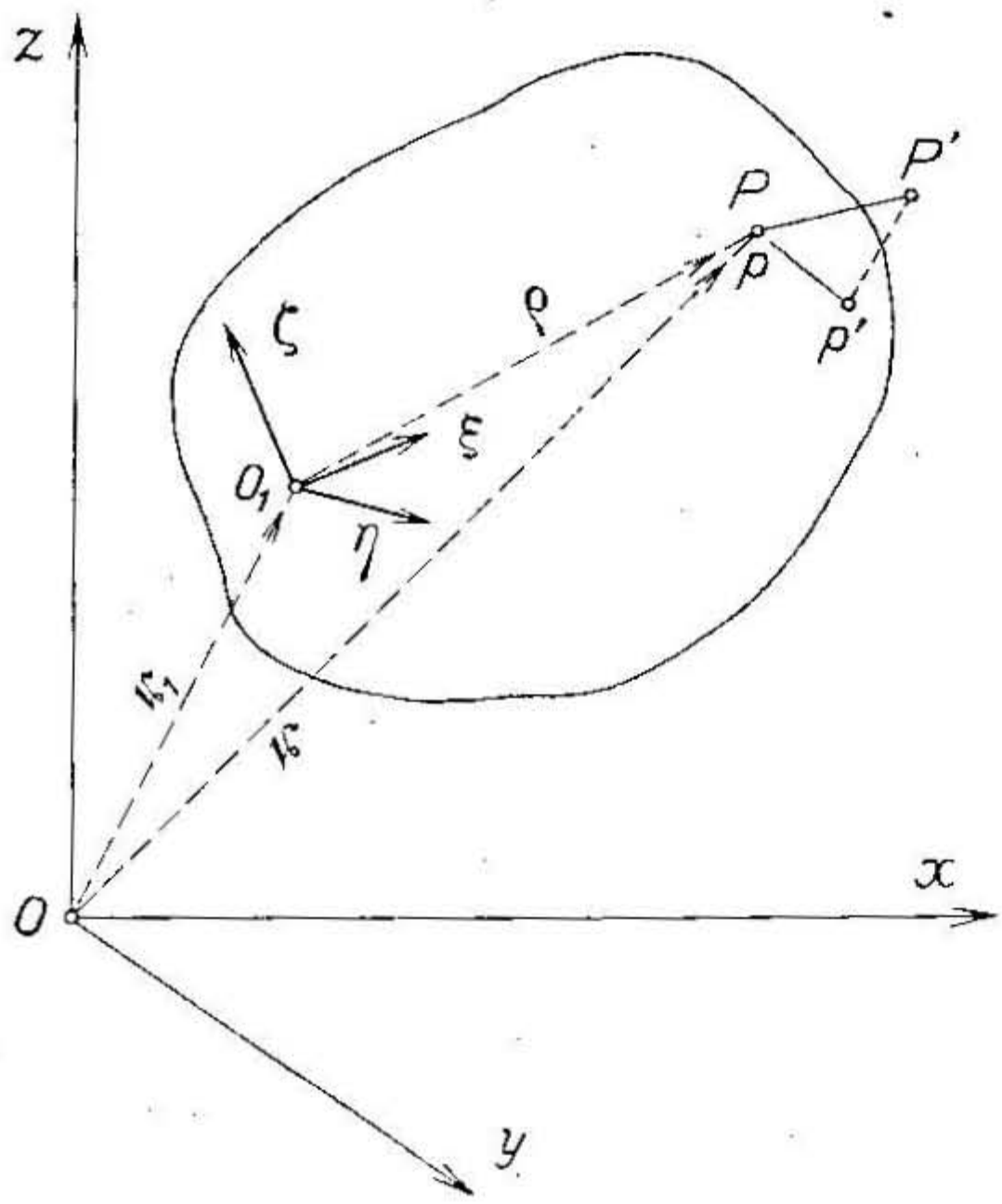
јер се због обртања триједра $CXYZ$ око осе Ω мењају Ојлерови углови. Из слике даље имамо

$$\mathfrak{l} = \sin\varphi\, \mathfrak{u}_1 + \cos\varphi\, \mathfrak{u}_2\,, \quad \mathfrak{k} = -\cos\varphi \sin\vartheta\, \mathfrak{u}_1 + \sin\varphi \sin\vartheta\, \mathfrak{u}_2 + \cos\vartheta\, \mathfrak{u}_3\,,$$

и упоређивањем ових образаца добивамо

$$\begin{aligned} p &= -\psi'\cos\varphi \sin\vartheta + \vartheta' \sin\varphi\,, \\ q &= \psi'\sin\varphi \sin\vartheta + \vartheta' \cos\varphi\,, \\ r &= \psi'\cos\vartheta + \varphi'\,. \end{aligned} \tag{4}$$

§ 6.1 Апсолутно и релативно кретање. Уочимо неко тело у простору и сматрајмо да је оно непомично. Нека буде $Oxyz$ триједар правоуглих оса везан за ово тело. Кретање сваког другог тела према овом зовимо *апсолутно*. Уочимо ли још неко покретно тело за које је везан триједар $O_1\xi\eta\zeta$, онда ћемо звати *релативним* кретање сваког другог тела или неке тачке према телу T.



Сл. 12

Нека се покретна тачка P поклапа у тренутку t са тачком p тела T. Њен положај одређују вектори: $\mathfrak{r}$ у триједру $Oxyz$, ρ у триједру $O_1\xi\eta\zeta$. Вектор $\mathfrak{v}_a = \dot{\mathfrak{r}}$ биће њена *апсолутна брзина;* нека буде $\mathfrak{v}_r$ — *релативна брзина.* Узмимо да се P после времена Δt налази у положају P', а p у p'. Очевидно је (сл. 12) да је

$$\overrightarrow{PP'} = \overrightarrow{Pp'} + \overrightarrow{p'P'}\,.$$

PP' је апсолутно померање и $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\overrightarrow{PP'}}{\Delta t} = \mathfrak{v}_a$; $\overrightarrow{p'P'}$ је релативно померање и зато је $\lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\overrightarrow{p'P'}}{\Delta t} = \mathfrak{v}_r$. Вектор $\mathfrak{v}_p = \lim\limits_{\Delta t\to 0} \dfrac{\overrightarrow{Pp'}}{\Delta t}$ претставља брзину тачке p' тела T и зове се *преносна брзина.* Из горње једначине следује

$$\mathfrak{v}_a = \mathfrak{v}_r + \mathfrak{v}_p\,. \tag{5}$$

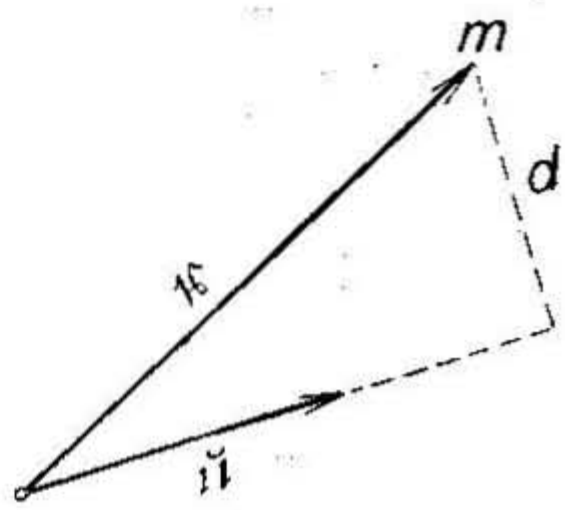
Према познатом обрасцу Теорије вектора и због $(\mathfrak{u}\,\mathfrak{u}) = 1$ имамо

$$J_{\mathfrak{u}} = \Sigma\, m \left\{ \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}\mathfrak{r})^2 \right\}.$$

Из слике 13 је јасно, да је израз у заградама квадрат растојања тачке m од осе $\mathfrak{u}$.

Зато је

(15*) $$J_{\mathfrak{u}} = \Sigma\, m d^2$$



Сл. 13

и ова се величина зове *момент инерције тела (система) око осе.* Служећи се претходним обрасцем лако ћемо израчунати моменте инерције око координатних оса, на пр. за осу Ox : $\mathfrak{u} = \mathfrak{i}$, $(\mathfrak{i}\mathfrak{r}) = x$, $\mathfrak{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2$ и

(16) $$J_x = \Sigma\, m (y^2 + z^2), \quad J_y = \Sigma\, m (z^2 + x^2), \quad J_z = \Sigma\, m (x^2 + y^2).$$

Израз $\Pi_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}}$ (14) зове се *продукт (производ) инерције.* Ако га развијемо према обрасцу Теорије вектора, који смо мало пре искористили, имаћемо

(17) $$\Pi_{\mathfrak{u}\mathfrak{s}} = \Sigma\, m \left\{ (\mathfrak{u}\mathfrak{s})\, \mathfrak{r}^2 - (\mathfrak{u}\mathfrak{r})(\mathfrak{s}\mathfrak{r}) \right\}.$$

Нека буду $\mathfrak{u}$ и $\mathfrak{s}$ два од јединичних вектора правоуглог координатног система $Oxyz$, на пр.: $\mathfrak{u} = \mathfrak{j}$, $\mathfrak{s} = \mathfrak{k}$. Онда је $(\mathfrak{u}\mathfrak{s}) = (\mathfrak{j}\mathfrak{k}) = 0$, $(\mathfrak{u}\mathfrak{r}) = y$, $(\mathfrak{s}\mathfrak{r}) = z$ и

(18) $$\Pi_{yz} = -\Sigma\, myz, \quad \Pi_{zx} = -\Sigma\, mzx, \quad \Pi_{xy} = -\Sigma\, mxy.$$

Последња два од ових израза добивају се на исти начин као и први. Са супротним знаком имамо т.зв. *моменте девијације.*

Нека буде C центар инерције тела, $\mathfrak{r}^*$ вектор положаја тачке m у односу на C, $\mathfrak{r}_c = \overrightarrow{OC}$ и $J_{\mathfrak{u}}^c$ момент инерције око осе која пролази кроз C а има исти правац: $\mathfrak{u}$. Ако у обрасцу (15) ставимо $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_c + \mathfrak{r}^*$ и узмемо у обзир услов (12), добићемо

(19) $$J_{\mathfrak{u}} = J_{\mathfrak{u}}^c + M k^2,$$

(Steiner-ова теорема) где је k растојање између паралелних праваца $(\mathfrak{u})$ који пролазе кроз тачке O и C. Из једначине (14) лако се може добити одговарајући образац за продукте инерције. Као што се види, ове величине зависе од положаја уочених оса. Израчунајмо момент инерције око осе $\mathfrak{u}(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ која полази из почетка координатних оса $Oxyz$, — претпоставићемо да се у овој тачки не налази центар инерције.

Узимајући у обзир обрасце (15), (14) и $\mathfrak{u} = \cos\alpha\,\mathfrak{i} + \cos\beta\,\mathfrak{j} + \cos\gamma\,\mathfrak{k}$, имаћемо

$$J_{\mathfrak{u}} = J_x \cos^2\alpha + J_y \cos^2\beta + J_z \cos^2\gamma + 2\Pi_{yz}\cos\beta\cos\gamma + \\ + 2\Pi_{zx}\cos\gamma\cos\alpha + 2\Pi_{xy}\cos\alpha\cos\beta, \tag{20}$$

Ако ставимо

$$\cos\alpha = \sqrt{J_{\mathfrak{u}}}\,x, \quad \cos\beta = \sqrt{J_{\mathfrak{u}}}\,y, \quad \cos\gamma = \sqrt{J_{\mathfrak{u}}}\,z, \tag{21}$$

образац (18) постаје једначина површине другог реда:

$$J_x x^2 + J_y y^2 + J_z z^2 + 2\Pi_{yz} yz + 2\Pi_{zx} zx + 2\Pi_{xy} xy = 1. \tag{22}$$

Ову површину описаће крај вектора $\mathfrak{R}$ чији је модуо, према обрасцима (21), $R = \frac{1}{\sqrt{J_{\mathfrak{u}}}}$. Како за материјално тело момент инерције (15*) није нула ни за један правац, биће ова површина елипсоид (или лопта). Узмимо координатни систем $OXYZ$, чије се осе поклапају са осама овог т. зв. *елипсоида инерције*. Онда, означимо ли са J_1, J_2, J_3 одговарајуће моменте инерције, једначина (22) добива облик

$$J_1 X^2 + J_2 Y^2 + J_3 Z^2 = 1. \tag{23}$$

Ове се осе зову главне осе инерције; J_1, J_2, J_3 — главни моменти инерције, а продукти инерције за главне осе једнаки су нули. Величине (16) и (18), или коефицијенти у једначини (22) *елипсоида инерције*, зависе од положаја тачке O према телу. Дакле за сваку тачку простора имаћемо одговарајући елипсоид инерције. За центар инерције имамо *централни елипсоид инерције, централне моменте и продукте инерције, главне централне осе.*

§ 8 Динамика. Основни проблем Динамике чврстог тела је да се одреди његово кретање под дејством задатих сила. Наравно, треба разликовати случајеве слободног тела и неслободног, када су дате неке везе, тј. неки накнадни услови, на пр., услов да тело има једну непомичну тачку или да оно мора да се котрља по некој површини. Ако је чврсто тело слободно, неопходно је потребно да се зна шест бројева, *координата*, који одређују његов положај у сваком тренутку; другим речима, слободно чврсто тело има шест степена слободе. Ако постоје везе, број степена слободе се смањује. За координате чврстог тела могу да се узму, као што смо видели у § 6, три координате неке његове тачке, на пр. центра инерције, и три Ојлерова угла, који одређују положај триједра оса везаних за тело. За координате чврстог тела могу се узимати и друге величине, помоћу којих његов положај може да се одреди. Избор најзгоднијих величина зависи од услова појединих проблема.

§ 8.1 Једначине кретања. Како се положај тела одређује са шест координата, то, да бисмо ове добили као функције времена, тј. да бисмо одредили кретање слободног чврстог тела, неопходно је потребно шест скаларних једначина у којима се поставља веза између координата, времена и силе. Ових шест једначина добивају се помоћу закона количине кретања (3, § 4.1) и момента количина кретања (9, § 4.1).

Зауставимо се, прво, на случају обртања чврстог тела око непомичне тачке (T). У овом случају, брзина сваке друге тачке тела биће, према обрасцу (2) § 6.1, ако ставимо $\mathfrak{v}_A = 0$ и $\overrightarrow{TM} = \mathfrak{r}$,

(24) $$\mathfrak{v} = [\Omega\, \mathfrak{r}] .$$

Дакле момент количина кретања уоченог тела биће (7) § 4.2:

(25) $$\mathfrak{G} = \Sigma m\, [\mathfrak{r}\, \mathfrak{v}] = \Sigma m\, [\mathfrak{r}\, [\Omega \mathfrak{r}]] ,$$

где знак Σ означава интеграљење по запремини тела, а $m = \rho\, dV$, ако је ρ густина тела.

Закон пак (9) § 4.1 имаће облик

(26) $$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L} .$$

Јер, ако других реакција нема сем у тачки T, која се одржава непомично, биће момент реакција једнак нули. У нашем проблему довољно је да нађемо као функције времена три Ојлерова угла, који одређују положај триједра оса везаних за чврсто тело, а помоћу ових углова и њихових извода могу се изразити пројекције тренутне угловне брзине Ω (§ 6). Међутим из образаца (26) и (25) видимо, да ће се првом од ових једначина поставити веза између тог вектора и момента спољњих сила $\mathfrak{L}$. Пројицирајући ову векторску једначину на координатне осе добићемо три скаларне диференцијалне једначине, које ће послужити за израчунавање Ојлерових углова. Уочимо сада покретни триједар $\mathfrak{u}_1\, \mathfrak{u}_2\, \mathfrak{u}_3$ који се, заједно са телом, обрће око тачке T тренутном угловном брзином Ω. Према обрасцу (24) брзина краја јединичног вектора биће:

(27) $$\frac{d\mathfrak{u}_i}{dt} = [\Omega\, \mathfrak{u}_i] , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Због познатог обрасца из Теорије вектора:

$$(\dot{\mathfrak{G}}\, \mathfrak{u}_i) = \frac{d}{dt}(\mathfrak{G}\, \mathfrak{u}_i) - (\mathfrak{G}\, \frac{d\mathfrak{u}_i}{dt})$$

и обрасца (27), имаћемо три скаларне једначине:

(28) $$\frac{d}{dt}(\mathfrak{G}\, \mathfrak{u}_i) - (\mathfrak{G}\, [\Omega\, \mathfrak{u}_i]) = L_i , \qquad i = 1, 2, 3 ,$$

које одговарају векторској (26), ако су L_i пројекције вектора $\mathfrak{L}$.

Израчунајмо пројекције вектора $\mathfrak{G}$ на осама $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$. Из обрасца (25), када се вектор Ω растави у компоненте:

$$\Omega = \omega_1 \mathfrak{u}_1 + \omega_2 \mathfrak{u}_2 + \omega_3 \mathfrak{u}_3 , \tag{29}$$

следује

$$G_1 = (\mathfrak{G}\,\mathfrak{u}_1) = \Sigma m \left([\Omega\,\mathfrak{r}]\,[\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{r}]\right) = \Sigma m \left\{\omega_1 \left([\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{r}]\,[\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{r}]\right) + \omega_2 \left([\mathfrak{u}_2\,\mathfrak{r}]\,[\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{r}]\right) + \right.$$
$$\left. + \omega_3 \left([\mathfrak{u}_3\,\mathfrak{r}]\,[\mathfrak{u}_1\,\mathfrak{r}]\right)\right\} .$$

А због образаца (14) и (15) добивамо прву од једначина

$$\begin{aligned} G_1 &= J_1\,\omega_1 + \Pi_{12}\,\omega_2 + \Pi_{13}\,\omega_3 , \\ G_2 &= \Pi_{12}\,\omega_1 + J_2\,\omega_2 + \Pi_{23}\,\omega_3 , \\ G_3 &= \Pi_{13}\,\omega_1 + \Pi_{23}\,\omega_2 + J_3\,\omega_3 , \end{aligned} \tag{30}$$

где су J_i и Π_{ij} моменти и продукти инерције за одговарајуће осе; друга и трећа од ових једначина добивају се на исти начин. Даље имамо

$$[\Omega\,\mathfrak{u}_1] = \omega_2\,[\mathfrak{u}_2\,\mathfrak{u}_1] + \omega_3\,[\mathfrak{u}_3\,\mathfrak{u}_1] = -\,\omega_2\,\mathfrak{u}_3 + \omega_3\,\mathfrak{u}_2 . \tag{31}$$

Претпоставимо сада да су осе $\mathfrak{u}_1$, $\mathfrak{u}_2$, $\mathfrak{u}_3$ главне осе инерције за тачку T. Онда су продукти инерције $\Pi_{ij} = 0$, а

$$G_1 = J_1\,\omega_1 , \quad G_2 = J_2\,\omega_2 , \quad G_3 = J_3\,\omega_3 . \tag{32}$$

Узимајући у обзир обрасце (31) и (32), првој од једначина (28) даћемо облик

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} - (J_2 - J_3)\,\omega_2\,\omega_3 &= L_1 , \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} - (J_3 - J_1)\,\omega_3\,\omega_1 &= L_2 , \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} - (J_1 - J_2)\,\omega_1\,\omega_2 &= L_3 , \end{aligned} \tag{33}$$

другу и трећу добићемо помоћу образаца сличних (31), где у векторском производу треба сменити $\mathfrak{u}_1$ са $\mathfrak{u}_2$, одн. са $\mathfrak{u}_3$. Како су уочене осе везане за чврсто тело, тј. не мењају у њему положај, то ће моменти инерције J_1, J_2, J_3 бити константни бројеви. Једначине (33) зову се Ојлерове. Када су познате пројекције момента спољњих сила око тачке T, њиховим интеграљењем добивамо ω_1, ω_2, ω_3 као функције времена, а, помоћу нађених вредности, и Ојлерове углове (види једначине (4) § 6, у којима су само друкчије означене пројекције угловне брзине).

Од овог случаја можемо лако да пређемо на кретање слободног чврстог тела. Видели смо у § 4.1 да се центар инерције материјалног система, сада дакле центар инерције чврстог тела, креће као материјална

тачка, чија је маса једнака маси тела, а под дејством резултанте свих сила које дејствују на тело (једначина 6а § 4.1). Остаје према томе да видимо, како ће се наћи обртање тела око осе која пролази кроз центар инерције (C). Уочимо зато закон (9) § 4.1, где је сада $\Lambda = 0$,

$$\dot{\mathfrak{G}} = \mathfrak{L} \tag{26}$$

и где се моменти узимају у односу на непокретни пол O. Према познатом обрасцу из Теорије вектора имамо за систем вектора $\mathfrak{F}_i$:

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^c + [\mathfrak{r}_c \mathfrak{F}] ,$$

где је $\mathfrak{L}^c$ момент око тачке C. Слично овоме имаћемо

$$\mathfrak{G} = \mathfrak{G}^c + [\mathfrak{r}_c \mathfrak{M}] ,$$

ако је $\mathfrak{M} = \Sigma m_i \dot{\mathfrak{r}}_i = M \dot{\mathfrak{r}}_c$ (M маса тела, види образац 5 § 4.1). Биће, дакле,

$$\dot{\mathfrak{G}} = \dot{\mathfrak{G}}^c + [\mathfrak{r}_c \dot{\mathfrak{M}}] .$$

Ставимо ли у (26) ове изразе и поведемо ли рачуна о закону количина кретања (3 § 4.1, $\mathfrak{R} = 0$ за слободно тело), биће

$$\dot{\mathfrak{G}}^c = \mathfrak{L}^c , \tag{34}$$

тј. закон момента количина кретања у односу на центар инерције има исти облик као и у случају непокретне тачке. А како смо из једначине (26) извели једначине (33), то ћемо сада уочити триједар главних централних оса инерције, које се обрћу заједно са телом, па ће из једначине (34) следовати систем једначина сличних (33). Означимо сада пројекције Ω на ове осе са p, q, r, а главне моменте инерције са A, B и C. Добивамо, дакле

$$\begin{aligned} A \frac{dp}{dt} - (B - C)\, qr &= L_1^c , \\ B \frac{dq}{dt} - (C - A)\, rp &= L_2^c , \\ C \frac{dr}{dt} - (A - B)\, pq &= L_3^c . \end{aligned} \tag{35}$$

Одавде треба, интеграљењем, да се нађу p, q и r, а затим Ојлерови углови који одређују положај централних оса инерције према непокретном координатном систему. Ако је тело слободно, уз једначине (35) треба уочити оне три скаларне једначине које следују из закона количина кретања (6а) § 4.1

$$M \ddot{\mathfrak{r}}_c = \mathfrak{F} , \tag{36}$$

а које одређују кретање центра инерције тела; свега, дакле, шест диференцијалних једначина. Како у једначинама (35) стоје први изводи вели-

чина p, q, r, а обрасци (4) § 6 показују да су и ове величине линеарне функције првих извода Ојлерових углова, — како, осим тога, из једначине (36) следује да ће се у одговарајућим скаларним једначинама појавити други изводи координата центра инерције, то се решење проблема о кретању слободног тела своди на интеграљење система шест обичних диференцијалних једначина другог реда.

§ 8.2 Опште примедбе. Да бисмо сад могли да решимо неки одређени проблем о кретању чврстог тела под дејством задатих сила, треба да знамо почетне услове, тј. почетни положај тела, који ћемо дати почетним координатама центра инерције и почетним вредностима Ојлерових углова, и почетне брзине, које се могу изразити помоћу почетних вредности извода шест претходних величина по времену. Према томе, у почетном тренутку ($t = t_0$) имамо свега 12 задатих бројева, који ће бити пројекције вектора $\mathbf{r}_c$, $\mathbf{v}_c$ и Ојлерови углови и њихови изводи по времену, а помоћу ових бројева можемо да изразимо 12 произвољних констаната које ће се увести при интеграљењу једначина (35) и (36).

Ако пак тело није слободно, тј. ако су дате неке везе, осим спољних сила појавиће се и непознате реакције веза. Зависи од оваквих накнадних услова, колико ће степена слободе имати чврсто тело, а од самог проблема зависи — од каквих је једначина најзгодније да се пође, јер осим уочених Ојлерових једначина можемо написати и друге системе једначина кретања. Овакве системе добивамо, на пр., пројицирањем векторске једначине (34) на неки други триједар оса; ми смо међутим уочили триједар главних оса инерције.

D. МЕХАНИКА НЕПРЕКИДНЕ СРЕДИНЕ

§ 9 Деформација делића. Према дефиницији апсолутно чврстог тела, његова основна особина је да се међусобна растојања његових тачака не могу мењати. Али, ако замислимо уопште неку материју (масу) која је распоређена непрекидно у датој запремини, очевидно је да горњу особину, као специјалан случај, можемо заменити другом особином. Ако међусобна растојања тачака уочене масе, или, као што ћемо је даље звати, непрекидне средине, не морају бити увек иста, имаћемо општи случај при коме ће се делићи ове средине за време кретања деформисати и њихов релативни положај мењати. Док је основна особина чврстог тела била довољна да се из општих једначина Механике система добију једначине његова кретања, у случају непрекидне средине, као што ћемо даље видети, потребни су за то још неки услови. А јасно је да се, уопште, могу дефинисати разне врсте средина, тако да ћемо, бирајући ове накнадне услове, имати извесну класификацију тих средина. Знамо међутим из посматрања, да се тела у природи, која се могу деформисати, битно разликују, на пр., течност, пластична или еластична тела. Сматрамо ли ова тела за непрекидне средине и потражимо ли једначине кретања сваке од ових врста тела, мораћемо дати дефиниције ових тела истичући неке њихове карактеристичне особине. Но треба имати у виду да ће увек предмет проучавања бити кретање извесних *идеалних* објеката, који се више или мање приближавају стварнима, као што је то био случај и код идеалног, апсолутно чврстог тела.

Пре него што проучимо кретање разних врста средина, морамо узети у обзир оне заједничке особине кретања које следују из опште претпоставке о њима, да се оне могу деформисати. Уочимо ли сада неки делић непрекидне средине, постаје јасно да могу ове три промене наступити: 1) делић се може преносити транслаторно без промене облика, 2) делић може да се обрће као чврсто тело и 3) делић може да се деформише. Наравно, ове три промене могу наступити и у исти мах.

Уочимо делић и распоред брзина у њему. Претпоставимо испо-

четка да се он обрће као чврсто тело угловном брзином Ω а, уједно, нека се и помера транслаторно (брзина $\mathfrak{v}_A$). Према обрасцу (2) § 6 је

$$\mathfrak{v}_M = \mathfrak{v}_A + [\Omega \mathfrak{r}^*]$$

брзина ма које тачке делића (M) чији је вектор положаја у односу на неку тачку A једнак $\mathfrak{r}^*$. Из ове једначине следује да је

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v}_M = \operatorname{rot} \mathfrak{v}_A + \operatorname{rot} [\Omega \mathfrak{r}^*] = \operatorname{rot} [\Omega \mathfrak{r}^*] ,$$

јер је $\operatorname{rot} \mathfrak{v}_A = 0$, пошто је $\mathfrak{v}_A$ исто за све тачке делића, дакле, не зависи од координата. Израз што стоји на десној страни је

$$\left[\nabla [\Omega \mathfrak{r}^*] \right] = (\mathfrak{r}^* \nabla) \Omega + \Omega \operatorname{div} \mathfrak{r}^* - (\Omega \nabla) \mathfrak{r}^* - \mathfrak{r}^* \operatorname{div} \Omega \text{ *)} .$$

Вектор Ω има исту вредност за све тачке делића, тј. не зависи од координата, те према томе први и последњи чланови отпадају. Да бисмо израчунали остале, ставимо почетак координатног система у тачку A ($\mathfrak{r}^* = \mathfrak{r}$). Онда ће бити

$$\operatorname{div} \mathfrak{r}^* = \operatorname{div} \mathfrak{r} = 3 ,$$

$$\left(\Omega \nabla\right) \mathfrak{r}^* = \left(\Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z}\right) \left(x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}\right) = \Omega ,$$

ако се узму у обзир познати обрасци (12) и (7) § 0.2. Зато из последње четири једначине следује

$$\operatorname{rot} \mathfrak{v} = 3\Omega - \Omega = 2\Omega , \tag{1}$$

где смо изоставили индекс M као сада непотребан. Дакле ротор брзине ($\mathfrak{v}$) једнак је двострукој угловној брзини.

Претпоставимо сад да се наш делић може деформисати. Онда ће свака његова тачка имати брзину $\mathfrak{v}_1$, која се разликује од оне из случаја обртања као чврстог тела. Означимо допунску компоненту брзине која долази услед деформације са $\mathfrak{d}$, претпоставимо да је делић бесконачно мали и зато променимо ознаке: место $\mathfrak{r}^*$ ставимо $\delta\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{v}$ место $\mathfrak{v}_A$. Онда можемо написати

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{v} + [\Omega \delta\mathfrak{r}] + \mathfrak{d} . \tag{2}$$

Разлика $\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v}$ претставља промену вектора $\mathfrak{v}$, кад се из тачке A померимо у M; а према обрасцу (**) § 0.2, где треба ставити $\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = 0$, она је:

$$\mathfrak{v}_1 - \mathfrak{v} = \delta\mathfrak{v} = (\delta\mathfrak{r} \nabla) \mathfrak{v} .$$

---

*) Пошто диференцијални оператор ∇ треба применити на сваки множитељ одвојено, тј. на Ω и на $\mathfrak{r}^*$, а затим раставити сваки двоструки векторски производ према обрасцу $[\mathfrak{A} [\mathfrak{B}\mathfrak{C}]] = (\mathfrak{A}\mathfrak{C}) \mathfrak{B} - \mathfrak{C} (\mathfrak{A}\mathfrak{B})$.

Дакле, из једначина (2), (1) и претходне добивамо

$$\mathfrak{d} = (\delta\mathfrak{r}\nabla)\,\mathfrak{v} - \frac{1}{2}\,[\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}\,\delta\mathfrak{r}]\,. \tag{3}$$

Ова компонента брзине линеарна је функција вектора $\delta\mathfrak{r}$, па према томе зависи од положаја тачке M у делићу.

Узмимо сада пројекције вектора које улазе у једначину (3) на осе неког триједра $Oxyz$: $\mathfrak{d}\,(D_x, D_y, D_z)$, $\delta\mathfrak{r}\,(\delta x, \delta y, \delta z)$ и $\mathfrak{v}\,(v_x, v_y, v_z)$. Према познатим обрасцима Теорије вектора, а после лаких трансформација добићемо из ове једначине вредности пројекција:

$$\begin{aligned}
D_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\delta z \\
D_y &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\delta x + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\delta y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\delta z \\
D_z &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\delta x + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\delta y + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\delta z\,.
\end{aligned} \tag{4}$$

Свака од ових пројекција је скаларни производ и то вектора $\delta\mathfrak{r}$ и једног од вектора

$$\begin{aligned}
\mathfrak{B}_1 &= \frac{\partial v_x}{\partial x}\,\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\mathfrak{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{k} \\
\mathfrak{B}_2 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right)\mathfrak{i} + \frac{\partial v_y}{\partial y}\,\mathfrak{j} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{k} \\
\mathfrak{B}_3 &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\mathfrak{i} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\mathfrak{j} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\,\mathfrak{k}\,,
\end{aligned} \tag{5}$$

тј.

$$D_x = (\mathfrak{B}_1\,\delta\mathfrak{r}), \qquad D_y = (\mathfrak{B}_2\,\delta\mathfrak{r}), \qquad D_z = (\mathfrak{B}_3\,\delta\mathfrak{r})\,. \tag{6}$$

У исти мах, ако уочимо тензор (симетричан)

$$\Phi \begin{cases}
\dfrac{\partial v_x}{\partial x} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial y} + \dfrac{\partial v_y}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial v_y}{\partial y} & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) \\[2ex]
\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_x}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial x}\right) & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_y}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z}{\partial y}\right) & \dfrac{\partial v_z}{\partial z}
\end{cases}, \tag{7}$$

можемо написати линеарну векторску функцију $\mathfrak{d}$ у облику (36 § 0.3)

$$\mathfrak{d} = (\Phi, \delta\mathfrak{r}) \tag{8}$$

и ова је функција компонента брзине ма које тачке делића непрекидне

средине која долази услед саме деформације, тј. када се узимају у обзир само промене облика, а не и транслаторно и ротационо кретање.

Поред горњих образаца, који важе за брзине, биће нам потребне и везе између бесконачно малих померања тачака. Претпоставимо зато да се уочени делић бесконачно мало деформише, и да су му димензије толико мале да се квадрати растојања тачака M од A могу занемарити. Нека извесна тачка делића има померање

$$\mathfrak{s} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k} \tag{9}$$

у времену dt. За мале величине u, v и w, које су функције координата, претпоставићемо још да су сви изводи $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \ldots \frac{\partial w}{\partial z}$ толико мали, да се њихови производи могу занемарити. Можемо ставити

$$\mathfrak{s} = \mathfrak{v}\,dt, \quad u = v_x\,dt, \quad v = v_y\,dt, \quad w = v_z dt\,. \tag{10}$$

Означимо са $\delta^*\mathfrak{r}$ вектор у који се претвара $\delta\mathfrak{r}$ после деформације. Како заједничко транслаторно померање тачака и обртање треба сада изоставити, а због саме деформације крај вектора $\delta\mathfrak{r}$ помера се према почетку за $\mathfrak{d}\,dt$, то ћемо имати

$$\delta^*\mathfrak{r} = \delta\mathfrak{r} + \mathfrak{d}\,dt\,.$$

Због једначине (8), уводећи јединични тензор J, добивамо

$$\delta^*\mathfrak{r} = (\mathsf{J} + \Phi\,dt, \delta\mathfrak{r})\,. \tag{11}$$

Из услова (7), ако се још изврши замена (10), следује да тензор $\Psi = \mathsf{J} + \Phi\,dt$ има компоненте написане у схеми:

$$\Psi \begin{cases} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) & 1 + \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) & 1 + \frac{\partial w}{\partial z}\,. \end{cases} \tag{12}$$

Помоћу шест различитих компонената тензора Ψ можемо конструисати елипсоид са центром у тачки A. Узмемо ли ову тачку за почетак координатног система $A\xi\eta\zeta$, једначина овог *елипсоида деформација* биће:

$$\begin{aligned} &\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\xi^2 + \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\eta^2 + \left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\zeta^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\xi\eta + \\ &+ \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right)\eta\zeta + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right)\zeta\xi = 1\,. \end{aligned} \tag{13}$$

Његове главне осе зову се главне осе дилатације. Како су коефицијенти у једначини (13) функције координата тачке $A(x, y, z)$, то ће елипсоиди деформација за разне тачке непрекидне средине бити различити. Претпоставимо да су главне осе елипсоида (13) за тачку A у исти мах и координатне осе. Онда се лева страна своди на збир прва три члана, као што је познато из Аналитичке геометрије. Одговарајући коефицијенти имаће нове вредности $1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}$ итд., а величине

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\partial v_1}{\partial y_1}, \quad \varepsilon_3 = \frac{\partial w_1}{\partial z_1} \tag{14}$$

зову се *главне дилатације*. Разлог за овај назив видећемо из геометриског тумачења израза̂ који се јављају у компонентама тензора Ψ. Нека буду $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ вектори који имају координате једнаке компонентама тензора Ψ из прве, друге, одн. треће врсте схеме (12):

$$\Psi = \{\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{i}\} + \{\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{i}\} + \{\mathfrak{C} \cdot \mathfrak{k}\} \tag{15}$$

(види обрасце 41—42 § 0.3). Уочимо тетраедар са теменом у A, конструисани на векторима $\delta x\mathfrak{i}$, $\delta y\mathfrak{j}$, $\delta z\mathfrak{k}$. После деформације, ови ће се вектори претворити у $\delta_1\mathfrak{r}$, $\delta_2\mathfrak{r}$, $\delta_3\mathfrak{r}$, који опет, према обрасцима (11) и (15), постају

$$\delta_1\mathfrak{r} = (\Psi, \delta x\mathfrak{i}) = \mathfrak{A}\,\delta x, \qquad \delta_2\mathfrak{r} = \mathfrak{B}\,\delta y, \qquad \delta_3\mathfrak{r} = \mathfrak{C}\,\delta z. \tag{16}$$

Израчунајмо релативну промену прве ивице тетраедра. Имаћемо

$$\frac{|\delta_1\mathfrak{r}| - \delta x}{\delta x} = \frac{A-1}{1} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

пошто се занемарују производи извода померања, а модуо вектора $\mathfrak{A}$ је

$$A = \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \ldots} = \left(1 + 2\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\partial u}{\partial x} + \ldots$$

и квадратни корен се може развити у ред. На исти начин се доказује да су $\frac{\partial v}{\partial y}$ и $\frac{\partial w}{\partial z}$ релативне промене дужина ивица δy и δz.

Како се тетраедар деформише, то ће се уопште нови углови између горњих ивица разликовати од $\frac{\pi}{2}$, али мало. Означимо ли угао између $\delta_1\mathfrak{r}$ и $\delta_2\mathfrak{r}$ са $\frac{\pi}{2} - \theta_{12}$, имаћемо, због услова (16),

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta_{12}\right) = \frac{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}{AB}.$$

Израчунавајући скаларни производ $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ помоћу пројекција ових вектора (види схему (12)), занемарујемо поново производе извода поме-

рања; и, како су ови мали, ставимо приближно $A \approx B$ и $B \approx 1$. И тако добивамо из претходне једначине

$$\sin \theta_{12} \approx \theta_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Геометриски смисао дијагоналних компонената у схеми (12) видели смо раније, а последња једначина показује да свака удвостручена од осталих компонената мери промену угла између ранијих ивица, положених дуж координатних оса, а која је наступила због деформације тетраедра.

Уведимо сад ознаке:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial w}{\partial z},$$

(17)

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \varepsilon_{23} = \varepsilon_{32} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}.$$

Прве три величине зову се *дилатације* у правцима координатних оса, остале — *клизања* или *смицања*. Кад су позната померања u, v, w можемо израчунати ове величине помоћу образаца (17) *).

Како је запремина тетраедра пре деформације $V = \frac{1}{6}\delta x \delta y \delta z$, а после $V_1 = \frac{1}{6}(\mathfrak{A}[\mathfrak{B}\mathfrak{C}])\delta x \delta y \delta z$, то ћемо лако добити помоћу схеме (12) да је

$$\frac{V_1 - V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \operatorname{div} \mathfrak{s}. \tag{18}$$

Ова величина даје запреминску дилатацију (ширење) израчунату за јединицу запремине. Напоменимо да смо горње величине увели уз претпоставку да је деформација бесконачно мала. У случају коначне деформације ови ће обрасци бити компликованији.**)

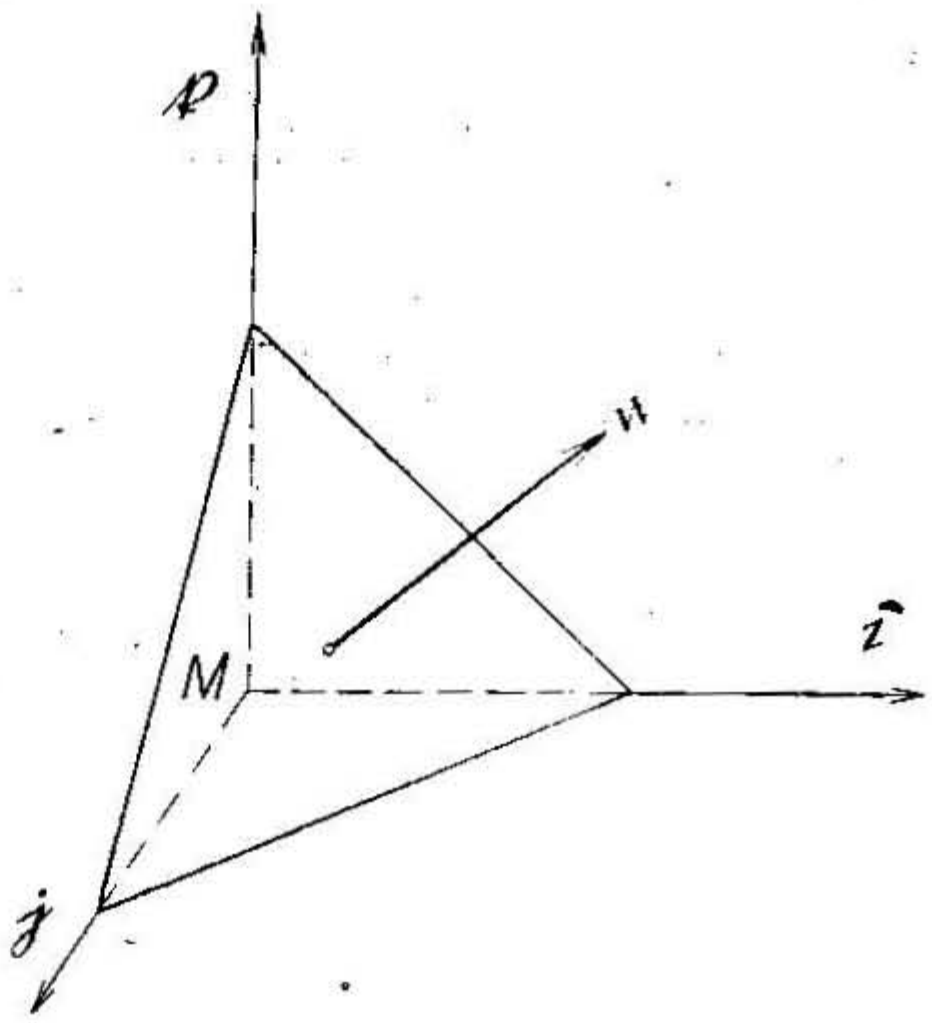
§ 10 Унутрашње силе. Опште једначине кретања непрекидне средине. У некој непрекидној средини могу дејствовати силе разних врста. Прво имамо *запреминске* силе; на пр. привлачење делића услед гравитације, које је сразмерно њиховим масама. Друго, на заједничкој граници делића могу да се појаве силе као резултат дејства честица с једне стране ове површине на честице с друге стране које је додирују. Резултанта оваквих *површинских* сила зависи уопште од величине уочене површине. Ако узмемо граничну вредност количника овакве резултанте и површине, и то када она тежи нули, добићемо површинску силу за јединицу површине или т.зв. *напон*. Уопште, овај може стајати косо на неком повр-

*) Решење обрнутог проблема види, на пр., J. Хлитчијев „Наука о чврстоћи" стр. 30.

**) види на пр. P. Appell. Traité de Mécanique rationnelle T. III.

шинском елементу, тако да га можемо раставити у нормалну компоненту, *нормални напон* (притисак или затезање), и тангенцијалну — *тангенцијални напон* (смицање). Ако у некој тачки средине мењамо положај (оријентацију) површинског елемента, јасно је да долазе у обзир дејства других честица, па ће се уопште и напони мењати.

Проучимо зато распоред напона за неку тачку средине. Кроз изабрану тачку (M) повуцимо осе $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ паралелно координатним осама и уочимо тетраедар (сл. 14) чије три ивице, које полазе из темена M, леже на уоченим осама. Нека буду: $\mathfrak{n}$ јединични вектор нормале на површинском елементу df који је страна тетраедра, а df_1, df_2, df_3 — стране на којима управно стоје вектори $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ и $\mathfrak{k}$. Нека буду $\mathfrak{N}$, $-\mathfrak{N}_1$, $-\mathfrak{N}_2$, $-\mathfrak{N}_3$ напони на тим странама, који дејствују на делић средине у овом тетраедру. А пројекције ових вектора на исте осе означимо овако: $\mathfrak{N}\,(N_x, N_y, N_z)$, $\mathfrak{N}_1\,(X_x, X_y, X_z)$, $\mathfrak{N}_2\,(Y_x, Y_y, Y_z)$, $\mathfrak{N}_3\,(Z_x, Z_y, Z_z)$, $\mathfrak{n}\,(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$.



Сл. 14

Онда имамо

$$df_1 = df\cos\alpha, \quad df_2 = df\cos\beta, \quad df_3 = df\cos\gamma.$$

Према закону количине кретања (6, § 4.1), ако ставимо да је маса делића једнака $\rho\,dV$ (ρ густина, dV запремина) и $\mathfrak{F} = \rho\,dV\mathfrak{F}_*$ ($\mathfrak{F}_*$ је запреминска сила израчуната за јединицу масе), имаћемо

$$\rho\,dV\,\ddot{\mathfrak{r}}_c = \rho\,dV\mathfrak{F}_* + \mathfrak{N}\,df - \mathfrak{N}_1\,df_1 - \mathfrak{N}_2\,df_2 - \mathfrak{N}_3\,df_3\,,$$

јер смо на десној страни узели у обзир све силе које дејствују на делић. Но ако делић постаје бесконачно мали, прва два члана ишчезавају, јер су трећега реда, због множитеља dV, док су последња четири члана само другога реда. Стога мора бити

$$\mathfrak{N}\,df = \mathfrak{N}_1\,df_1 + \mathfrak{N}_2\,df_2 + \mathfrak{N}_3\,df_3\,,$$

или, због горњих веза између површинских елемената,

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1\cos\alpha + \mathfrak{N}_2\cos\beta + \mathfrak{N}_3\cos\gamma\,. \tag{19}$$

Ова једначина казује да се напон $\mathfrak{N}$, који зависи од положаја површинског елемента df, одн. од правца вектора $\mathfrak{n}$, може увек одредити

као линеарна функција овога правца, ако знамо три напона на елементима паралелним координатним равнима. Из векторске једначине (19) следују скаларне једначине:

$$
(20)\qquad
\begin{aligned}
N_x &= X_x \cos\alpha + Y_x \cos\beta + Z_x \cos\gamma\,,\\
N_y &= X_y \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Z_y \cos\gamma\,,\\
N_z &= X_z \cos\alpha + Y_z \cos\beta + Z_z \cos\gamma\,.
\end{aligned}
$$

Лако је видети да су X_x, Y_y, Z_z нормални напони на елементима који стоје управно на координатним осама, док су остале величине — тангенцијални напони.

Напишимо сада законе количине кретања (3, § 4, 1) и момента количина кретања (9, § 4.2) за неку запремину V уочене средине, обележавајући са S површину која обухвата овај део. Према једначинама (2) и (7) истих параграфа, где треба ставити $m_i = \rho\, dV$, $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{v}$ место $\mathfrak{r}_i$ и $\mathfrak{v}_i$, имаћемо

$$
(21)\qquad
\begin{aligned}
\int_V \rho\,\mathfrak{a}\, dV &= \int_V \rho\,\mathfrak{F}_*\, dV + \int_S \mathfrak{N}\, df\\
\int_V \rho\,[\mathfrak{r}\mathfrak{a}]\, dV &= \int_V \rho\,[\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}_*]\, dV + \int_S [\mathfrak{r}\mathfrak{N}]\, df\,.
\end{aligned}
$$

При сабирању напона на границама делића поништиће се сви они који дејствују на унутрашњим границама, јер на сваком унутрашњем површинском елементу дејствују два супротна напона (по закону о акцији и реакцији). Остаће, дакле, у првој једначини (21) само они напони који дејствују на површини S. Исто важи и за моменте напона. Уочимо сада прву од скаларних једначина које одговарају (21):

$$
\int_V \rho\, a_x\, dV = \int_V \rho F_x\, dV + \int_S N_x\, df\,,
$$

и последњи површински интеграл претворимо у запремински. Нека буду

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
\mathfrak{G}_1 &= X_x\,\mathfrak{i} + Y_x\,\mathfrak{j} + Z_x\,\mathfrak{k}\\
\mathfrak{G}_2 &= X_y\,\mathfrak{i} + Y_y\,\mathfrak{j} + Z_y\,\mathfrak{k}\,.\\
\mathfrak{G}_3 &= X_z\,\mathfrak{i} + Y_z\,\mathfrak{j} + Z_z\,\mathfrak{k}\,.
\end{aligned}
$$

Како су $\cos\alpha, \ldots$ пројекције вектора $\mathfrak{n}$, због прве од једначина (20), а по Гаусовој теореми, имамо

$$
\int_S N_x\, df = \int_S (\mathfrak{G}_1, \mathfrak{n})\, df = \int_S (\mathfrak{G}_1, d\mathfrak{f}) = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{G}_1\, dV\,.
$$

Дакле је

$$\int_V \rho a_x \, dV = \int_V \rho F_x \, dV + \int_V \operatorname{div} \mathfrak{G}_1 \, dV \, .$$

И, пошто ова једначина важи ма за који део (V) средине, мора бити (прва од следећих једначина, друга и трећа добивају се на исти начин)

$$\begin{aligned} \rho a_x &= \rho F_x + \operatorname{div} \mathfrak{G}_1 \, , \\ \rho a_y &= \rho F_y + \operatorname{div} \mathfrak{G}_2 \, , \\ \rho a_z &= \rho F_z + \operatorname{div} \mathfrak{G}_3 \, , \end{aligned} \tag{23}$$

где су F_x, F_y, F_z пројекције $\mathfrak{F}_*$, a_x, a_y, a_z — пројекције убрзања $\mathfrak{a}$.

Узмимо сада прву од скаларних једначина које одговарају другој векторској (21):

$$\int_V \rho (y a_z - z a_y) \, dV = \int_V \rho (y F_z - z F_y) \, dV + \int_S (y N_z - z N_y) \, df \tag{24}$$

и трансформишимо поново површински интеграл. Због друге и треће од једначина (20), а по Гаусовој теореми, добивамо

$$\int_S (y N_z - z N_y) \, df = \int_S y \mathfrak{G}_3 \, df - \int_S z \mathfrak{G}_2 \, df = \int_V (\operatorname{div} y \mathfrak{G}_3 - \operatorname{div} z \mathfrak{G}_2) \, dV.$$

Но према познатом обрасцу Теорије вектора (***) § 0.2 је

$$\begin{aligned} \operatorname{div} y \mathfrak{G}_3 &= y \operatorname{div} \mathfrak{G}_3 + \mathfrak{G}_3 \operatorname{grad} y = y \operatorname{div} \mathfrak{G}_3 + Y_z \, , \\ \operatorname{div} z \mathfrak{G}_2 &= z \operatorname{div} \mathfrak{G}_2 + Z_y \, . \end{aligned}$$

Ставимо ове изразе у једначину (24) и скупимо чланове са заједничким множитељем у односу на z. Видимо да због друге и треће од једначина (23) ови чланови отпадају и остаје

$$0 = \int_V (Y_z - Z_y) \, dV \, .$$

Како ова једначина важи ма за коју запремину V, мора бити

$$Y_z = Z_y \, . \tag{25}$$

На исти начин доказује се да је $Z_x = X_z$ и $X_y = Y_z$. Дакле је

$$\mathfrak{G}_i = \mathfrak{N}_i \qquad i = 1, 2, 3, \tag{26}$$

и тензор

$$\Theta \begin{cases} X_x & Y_x & Z_x \\ X_y & Y_y & Z_y \\ X_z & Y_z & Z_z \end{cases} \tag{27}$$

је симетричан. Сада можемо да кажемо да нам вредности тензора Θ, чије се компоненте наравно мењају са положајем тачке, карактеришу стање деформисане средине. Напон за дати правац $\mathfrak{n}$ добивамо сад помоћу обрасца (види (22), (19), (20) и (57) § 0.3)

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{n}\Theta \tag{28}$$

који потпуно замењује услове (20). Можемо даље помоћу компонената тензора Θ да конструишемо површину другог реда — *елипсоид напона* (но она не мора увек бити елипсоид) и да узмемо за координатне осе главне осе овог елипсоида. Напони у овим правцима зову се *главни напони*, а нормални и потенцијални могу се изразити помоћу њих.

Једначине (23) у којима се даје веза између убрзања тачака средине, запреминских и унутрашњих сила јесу опште једначине кретања неке непрекидне средине. Можемо их написати у развијеном облику:

$$\begin{aligned} \rho a_x &= \rho F_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_x}{\partial y} + \frac{\partial Z_x}{\partial z} \\ \rho a_y &= \rho F_y + \frac{\partial X_y}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_y}{\partial z} \\ \rho a_z &= \rho F_z + \frac{\partial X_z}{\partial x} + \frac{\partial Y_z}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z}, \end{aligned} \tag{29}$$

или, узимајући у обзир ознаке тензорског рачуна (58 § 0.3):

$$\nabla\Theta = \mathfrak{i}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_1 + \mathfrak{j}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_2 + \mathfrak{k}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{G}_3, \tag{30}$$

у облику једне једначине*)

$$\rho\mathfrak{a} = \rho\mathfrak{F} + \nabla\Theta. \tag{31}$$

Симетричност тензора унутрашњих напона доказали смо помоћу закона момента количина кретања. Обрнуто, из претпоставке да се стање средине карактерише симетричним тензором напона (Болцманов аксиом) следује да важи овај закон.

Једначине (29) или (31) важе за кретање макакве непрекидне средине, од чијих смо особина ми уочили само: 1) да се делићи њени могу индивидуализовати, тј. да се у неком тренутку положај сваког од њих може одредити са три броја (координате) a, b, c тако да, знајући ове, можемо пратити даље његово кретање; 2) да делићи испуњавају непрекидно

*) звездицу код вектора $\mathfrak{F}$ отсада избацимо као сувишну.

простор (цео или део), тј. морамо мењати непрекидно вредности a, b, c да бисмо имали све делиће; 3) да се стање средине карактерише симетричним тензором Θ чије вредности зависе од положаја тачке у њој и одређују распоред унутрашњих сила.

§ 11 Различите врсте непрекидних средина. Расматрање даљих особина непрекидних средина води ка њиховој класификацији и, очевидно, ка различитим специјалним облицима једначине (31), као што ћемо то видети мало даље. А од највеће важности је подела средина у врсте према особинама тензора Θ. Но пре него што пређемо на ову поделу осврнућемо се на друге, према новим особинама. Пре свега разликујемо хомогене и хетерогене средине, и ово има два смисла. Тела могу бити хомогена или хетерогена с обзиром на састав (структуру), на пр. — као легуре, а друго — с обзиром на густину. Хомогено тело у првом смислу може да буде хетерогено у другом. По себи се разуме да је потребна јасна дефиниција хомогене структуре; зауставићемо се на Хелмхолцовој: „маса има једнаку структуру, ако је у свима местима веза између деформације и унутрашњих напона дата истим законом". Очевидно је да густина зависи не само од врсте оваквог закона него и од врсте супстанције и сила које дејствују. Даље се средине деле у изотропне и анизотропне. Код првих, ма од које тачке пошли, особине су исте у свима правцима, код других (кристала) то није случај — има праваца нарочито истакнутих по својим особинама. Еластично тело (о којем ће даље бити реч) биће изотропно (према дефиницији), ако је: 1) ма који део у облику лопте или коцке, једнако притиснут са свију страна, не деформише се но остаје једнако смањен са свију страна и 2) ако код оваквог дела, под дејством тангенцијалних сила, настаје чиста деформација (без скупљања или ширења). После ових претходних примедаба можемо да пређемо на специјалне случајеве.

§ 11.1 Идеална течност. Најпростији случај непрекидне средине која се може деформисати имаћемо, ако претпоставимо да се тензор унутрашњих напона своди на производ јединичног тензора

$$J \begin{cases} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{cases} \tag{32}$$

и скалара који ћемо означити са $-p$, тј.

$$\Theta = -pJ \begin{cases} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p\,. \end{cases} \tag{33}$$

У овом случају, унутрашња сила која дејствује на неки површински елемент има увек правац нормале на њему, као што се то види из образаца (20), где треба ставити

$$X_x = Y_y = Z_z = -p, \quad Y_x = Z_y = X_z = 0; \tag{34}$$

а њен интензитет, израчунат за јединицу површине, биће увек p (ово такође следује из једначина (20)). Средину која има ову особину зовемо идеална течност, а скалар p — *притисак*. Као што је познато, реалне течности, поред тога што могу мењати облик, те се њихови делићи лако могу раздвојити, указују већи отпор само силама које дејствују у правцу унутрашње нормале на површину (притисак), а, осим тога, имају и већу или мању *вискозност*. Последња особина је резултат трења које се јавља када делићи клизе једни по другима, и зато су у овом случају унутрашње силе компликованије од оних које смо горе имали. Ово ћемо узети у обзир у наредном параграфу; засада, дакле, занемарујемо вискозност. Дефиниција течности без трења, тј. идеалне течности, поред тога што је логички оправдана, од користи је и за примену, јер су се закључци теорије кретања овакве средине показали као врло важни за проучавање појава у природи, а и у техници[1]). Теорија кретања гасова поклапа се до извесних граница са овом теоријом.

За идеалне течности, једначине кретања непрекидне средине (29) и (31) упрошћавају се. Наиме, у једначинама (29), од извода напона остају, због (34), само: $-\frac{\partial p}{\partial x}$, $-\frac{\partial p}{\partial y}$, $-\frac{\partial p}{\partial z}$ и зато једначину (31) можемо написати у облику

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p\,. \tag{35}$$

Ово је основна једначина Хидромеханике, која изражава везу између убрзања ма које тачке течне масе, силе израчунате за јединицу масе која у тој тачки дејствује, густине и, најзад, притиска на том месту. Ако су силе познате, а тражи се да се одреди кретање неке течне масе, онда треба водити рачуна о томе да су, поред трију координата ма које тачке течности, које ће бити непознате функције времена, густина течности а и притисак, који имају различите вредности у разним тачкама, такође непознате функције. Дакле, вектор положаја $\mathfrak{r}$ (или три координате), ρ и p су три (одн. пет) непознатих функција. Да бисмо их могли наћи треба поставити осим векторске једначине (35), која је еквивалентна трима скаларним, још две скаларне једначине.

Прву од ових имаћемо ако искористимо услов непрекидности. Уочимо ли један делић течности, који се за време кретања помера и

---

[1]) види, на пр., В. Жардецки. Хидромеханика.

деформише, — у њему се, дакле, нити појављују нити губе нове количине течности, његова маса (μ) остаје константна, тј. $\frac{d\mu}{dt}=0$. Означимо му са ω запремину, са σ површину, биће $\mu=\rho\omega$ и

$$\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}+\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}=0.$$

Сваки површински елемент у времену dt опише ваљак чија ће запремина бити $(\mathfrak{v}\,dt,\,d\mathfrak{f})$, где је $d\mathfrak{f}$ управљени површински елемент. Према томе је

$$d\omega=\int_\sigma(\mathfrak{v}\,dt,\,d\mathfrak{f}).$$

Одавде је опет према дефиницији $\operatorname{div}\mathfrak{v}$ (14) § 0.2, пошто је реч о бескрајно малој запремини,

$$\frac{1}{\omega}\frac{d\omega}{dt}=\frac{\int_\sigma\mathfrak{v}\,d\mathfrak{f}}{\omega}=\operatorname{div}\mathfrak{v}.$$

Дакле је

(36) $$\frac{d\rho}{dt}+\rho\operatorname{div}\mathfrak{v}=0$$

или, због (8), (14) и (***) § 0.2:

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+(\mathfrak{v}\nabla)\rho,$$

(37) $$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathfrak{v}=0.$$

Услов непрекидности (36) или (37) претставља једну везу између координата делића и густине. Као специјални случај може се узети да је течност *нестишљива*, тј. да се густина не мења за време кретања. Онда за $\rho=\text{const.}$ добивамо из једначине (36)

(38) $$\operatorname{div}\mathfrak{v}=0,$$

— *услов нестишљивости.*

Најзад, као трећа узима се т.зв. *карактеристична* једначина, у којој се даје веза између притиска и густине,

(39) $$\rho=f(p)\quad\text{или}\quad\varphi(p,\rho)=0.$$

Везе ове врсте познате су као експериментални закони, на пр. Мариотов, но у њима се могу појавити и неки нови параметри, на пр.

температура. Само увођење овакве нове непознате величине захтева наравно и допунске једначине.

Узимајући у обзир да је $\mathfrak{a} = \dot{\mathfrak{v}}$, где је $\mathfrak{v}(v_x, v_y, v_z)$ брзина делића, и да је

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{v}$$

$$(\mathfrak{v}\nabla) = v\ \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

добићемо три скаларне једначине које се зову Ојлерове и одговарају векторској (35):

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},$$

(40) $$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

а (37) можемо написати у облику

(41) $$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

Најзад је

(42) $$\rho = f(p) \quad \text{или} \quad \rho = \text{const.}.$$

Овај систем од пет једначина садржи пет непознатих функција v_x, v_y, v_z, ρ и p са четири независне променљиве x, y, z, t. Ако се ове функције нађу, ставићемо

$$\frac{dx}{dt} = v_x(x, y, z, t), \qquad \frac{dy}{dt} = v_y(x, y, z, t), \qquad \frac{dz}{dt} = v_z(x, y, z, t),$$

где су десне стране познате, а, поновним интеграљењем, добивамо и координате x, y, z сваког делића течности као функције времена. Вредности произвољних констаната које се уводе при интеграљењу треба да се одреде помоћу почетних вредности координата делића и почетних брзина. Но у овом првом случају кретања непрекидне средине, — која се може деформисати, једначине кретања су парцијалне диференцијалне једначине, и за њихово решавање потребни су уопште и накнадни, гранични услови.

Разликујемо, према Хелмхолцовој класификацији, две врсте кретања *потенцијално* и *вртложно*. Кретање прве врсте задовољава услов

(43) $$\mathfrak{v} = -\operatorname{grad}\varphi$$

и скалар $-\varphi$ зове се *потенцијал брзина.* У овом случају је $\operatorname{rot}\mathfrak{v} = 0$ и, према обрасцу (1) § 9, тренутна угловна брзина макаквог делића Ω је једнака нули; кретање је безвртложно. У другој врсти кретања постоје у течности делићи за које је $\Omega \neq 0$ и који се, према томе, обрћу. У идеалној течности једна врста кретања не може да пређе у другу*).

§ 11.2 Вискозна течност. Реалне течности имају већу или мању покретљивост а као узрок овога сматра се трење које се појављује при клизању делића једних по другима. Ова се особина зове вискозност, а течност — вискозна течност. Да бисмо увели силе трења треба ближе да формулишемо овакву особину, јер треба поставити везу између унутрашњих сила и релативних померања у делићу.

Претпоставићемо да је течност нестишљива. Дакле

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0\,, \tag{44}$$

а $\rho = \text{const.}$ је карактеристична једначина. Случај стишљиве вискозне течности своди се на врло компликоване једначине; а још је теже водити рачуна о топлотним појавама које прате трење.

Унутрашње су силе компликованије у вискозним течностима него ли у идеалним. Зато ћемо ставити да је тензор (27) § 10:

$$\Theta = -p\,\mathfrak{J} + \Theta_1\,. \tag{45}$$

Први члан на десној страни одговара претпоставци да постоји притисак p у течности, други — да се појављују неке допунске силе. Што се тиче ових последњих, можемо учинити различите претпоставке, али ћемо изабрати најпростију, наиме да је тензор Θ_1, који се појављује због релативних померања, сразмеран тензору Φ (7) § 9. Ставимо

$$\Theta_1 = 2\mu\,\Phi \tag{46}$$

и назовимо μ *коефицијент вискозности.* Као образложење ове претпоставке можемо сматрати ово: ако по једном слоју течности клизи други, онда онај који тече брже тежи да убрза кретање другог, онај пак који тече спорије тежи да успори кретање првог и силе које овде дејствују сразмерне су, поред површине додира, још и промени брзине у правцу нормале на њој. Последње правило, које припада Њутну, слаже се доста добро са посматрањима кретања реалних течности. Тензор Φ има пак компоненте које зависе од промена брзине у разним правцима. Но и без обзира на ово, могли смо чисто формално увести претпоставку (46), написати једначину кретања вискозне течности, због једначина (45), (46) и (31), у облику (види још 32—35)

$$\rho\mathfrak{a} = \rho\mathfrak{F} - \operatorname{grad} p + 2\mu\nabla\Phi \tag{47}$$

*) Ближе о томе види у уџбеницима Хидромеханике.

и накнадно упоређивати резултате одређивања кретања помоћу ове једначине са резултатима експеримената. Зваћемо сад вискозном течношћу ону непрекидну средину која одговара нашим претпоставкама, а чије кретање задовољава једначину (47). Она се дефинише дакле помоћу услова (45) и (46).

Због обрасца (58) § 0.3 је

$$\nabla\Phi = \mathfrak{i}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{j}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_2 + \mathfrak{k}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_3\,,$$

где су вектори $\mathfrak{B}_i$ одређени једначинама (5) § 9. Дакле је

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_1 = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2}\right),$$

а због услова (44) отпада први члан и остаје

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{2}\Delta v_x\,.$$

Како је $\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_2 = \frac{1}{2}\Delta v_y$ и $\mathrm{div}\,\mathfrak{B}_3 = \frac{1}{2}\Delta v_z$, биће

$$\nabla\Phi = \frac{1}{2}\Delta\mathfrak{v}\,.$$

Према томе, означавајући $\frac{\mu}{\rho}$ са ν (кинематички коефицијент вискозности), место (47), имаћемо

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p + \nu\Delta\mathfrak{v}\,. \tag{48}$$

Место израза $\Delta\mathfrak{v}$ може се написати $-\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v}$, јер је

$$\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{v} = \mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{v} - \Delta\mathfrak{v} = -\Delta\mathfrak{v}$$

због услова (44).

Скаларне једначине које одговарају векторској (48) претстављају Navier-Stokes-ове диференцијалне једначине кретања вискозне течности. Леве стране њихове можемо написати у оном облику који имамо у Ојлеровим једначинама (40), а заједно са условом нестишљивости (44), оне ће сачињавати систем од четири једначине са четири непознате функције v_x, v_y, v_z и p.

§ 11.3 Еластично тело. Апсолутно чврсто тело одредили смо условом да се узајамна растојања његових тачака не могу мењати. Треба сад да дефинишемо тело које се може деформисати и које ће имати особине ближе реалним чврстим телима. Какве је природе тело, зависи од везе

између деформација делића и унутрашњих сила. Значи, постављајући ове везе, дефинишемо и тело, јер су онда дате његове карактеристичне особине.

Како су деформације делића претстављене тензором Ψ (12) § 9, а унутрашње силе тензором Θ (27) § 10, то би требало у најопштијем случају ставити

$$\Psi = \text{fonct.}\,(\Theta)\,.$$

Међутим, због математичких тешкоћа, морамо да се ограничимо на простије случајеве. Зато ћемо претпоставити да је ова веза линеарна, а како је реч о тензорима, ово значи да су компоненте тензора Ψ линеарне функције компонената тензора Θ. Зато ћемо имати шест услова, од којих ћемо написати само први, служећи се ознакама (17) § 9:

$$\varepsilon_{11} = a_{11}\,X_x + a_{12}\,Y_y + a_{13}\,Z_z + a_{14}\,Y_z + a_{15}\,Z_x + a_{16}\,X_y\,. \tag{49}$$

Ако узмемо да су изрази (17) § 9 вредности величина ε_{ik}, значи да се заустављамо на случају малих деформација.

Тело за које важе услови (49) зове се *идеално еластично тело*, а те услове можемо сматрати као уопштавање Хукова закона (R. Hooke, 1676 г.). Према овом експерименталном закону за више тела у природи нормални напони сразмерни су издужењу (израчунатом за јединицу дужине). Кратко се он формулише овако „ut tensio, sic vis". Коефицијенти a_{ik} ($i = 1, 2 \ldots 6$; $\kappa = 1, 2 \ldots 6$) могу да зависе од структуре тела и уопште су функције положаја делића у телу, но не зависе од деформација и напона. За примену закључака, који се оснивају на Хукову закону, одн. на теорији идеалног еластичног тела постоје извесне границе; на крају § 9 видели смо да се за коначне деформације обрасци компликују.

Према изразима (49), компоненте тензора деформација хомогене су функције компонената тензора напона, а ово одговара претпоставци да у отсуству унутрашњих сила нема ни деформација, или обрнуто. Дакле, престану ли да дејствују напони у телу, оно се враћа у неко „природно" стање где нема ни деформација. Ово је карактеристична особина само идеалног еластичног тела.

Знамо да се непрекидне средине деле у хомогене и хетерогене, у изотропне и анизотропне. Да видимо како се ове особине могу изразити математички код идеалног еластичног тела. *Коефицијенти деформације* a_{ik} зависе од положаја тачке у телу, ако је оно хетерогено. За хомогена тела a_{ik} су константе, тј. имаће свугде у телу исте вредности. Али они се мењају ако променимо координатни систем. Коефицијената деформације има 36, али се њихов број своди, као што се може доказати, на 21, ако се претпостави да за кретање идеалног еластичног тела важи закон одржања енергије. Осим тога, разликује се неколико врста анизотропних тела, кристала, и, због разних услова симетрије, опада још број

коефицијената a_{ik} који нису једнаки нули. Најпростији је случај хомогених изотропних тела онај за који се број коефицијената своди само на два. На овом ћемо се случају задржати.

Уочимо тензоре Φ_1 и Θ који су одређени главним компонентама*)

$$\Phi_1 \begin{cases} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{cases}, \quad \Theta \begin{cases} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{cases}. \tag{50}$$

Усто треба знати положај главних оса одговарајућих елипсоида, тј. на пр. Ојлерове углове у односу на неки дати триједар оса.

За изотропна тела природно је да се претпостави, да се главне осе елипсоида деформација и напона поклапају, јер главни напон, како стоји управно на површинском елементу, не даје тангенцијалне компоненте, те тако код изотропног тела, услед симетрије особина у овом правцу, треба да наступи само или издужење или скраћивање.

Дакле, можемо уопште ставити да, место (49), постоје везе

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_{11} X_1 + A_{12} X_2 + A_{13} X_3 , \\ \varepsilon_2 &= A_{21} X_1 + A_{22} X_2 + A_{23} X_3 , \\ \varepsilon_3 &= A_{31} X_1 + A_{32} X_2 + A_{33} X_3 , \end{aligned} \tag{51}$$

и да су коефицијенти A_{ik} за хомогено тело константни. Нека буде тело изотропно, и нека постоји само напон X_1. Онда је

$$\varepsilon_1 = A_{11} X_1 , \quad \varepsilon_2 = A_{21} X_1 , \quad \varepsilon_3 = A_{31} X_1 .$$

Али дејство напона X_1 мора бити исто у правцима друге и треће осе, тј. мора бити $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ те је, дакле, $A_{21} = A_{31}$. Кад би дејствовао само напон $X_2 = X_1$, било би ε_2 исто као у првом случају, тј. треба да буде $A_{22} = A_{11}$, и слично првом случају $A_{12} = A_{32}$. Најзад, за $X_3 = X_1$ било би $A_{33} = A_{11}$, $A_{23} = A_{13}$. Како услови (51) важе ма за које вредности напона, узмимо да је $X_1 = X_2$, $X_3 = 0$. У случају обртног елипсоида напона код изотропног тела треба да буде обртни и елипсоид деформација. Онда из услова $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ следује $A_{12} = A_{21}$, и на сличан начин се доказује да је $A_{13} = A_{31}$, $A_{23} = A_{32}$. Означимо ли

$$A_1 = A_{ii} , \quad A_2 = A_{ik} \qquad i \neq k , \quad i, k = 1, 2, 3$$

услове (51) за изотропно тело имамо у облику

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= A_1 X_1 + A_2 (X_2 + X_3) , \\ \varepsilon_2 &= A_1 X_2 + A_2 (X_3 + X_1) , \\ \varepsilon_3 &= A_1 X_3 + A_2 (X_1 + X_2) . \end{aligned} \tag{52}$$

---

*) тензор Φ_1 који има компоненте (17) или (14) § 9 узимамо место Ψ због облика веза (49).

Ставимо

(53) $$A_1 = \frac{1}{E}, \quad -\frac{A_1}{A_2} = m.$$

E се зове Young-ов модуо или модуо еластичности, а m је Поасонов коефицијент. Ако је само $X_1 \neq 0$ биће $X_1 = E\varepsilon_1$, тј. величина E карактерише издужење у правцу прве осе $(E > 0)$, у исти мах је $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = A_2 X_1 = -A_1 \frac{1}{m} X_1$ или, због (53), $m = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$. Издужење дуж прве осе изазива скраћивање дуж друге и треће ($\varepsilon_2 < 0$ и $\varepsilon_3 < 0$, $\varepsilon_1 > 0$) и позитиван број m даје размеру издужења ε_1 и скраћивања ε_2 у правцу управном на правцу истезања.

И тако имамо овакав облик услова (52)

(54) $$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left\{X_1 - \frac{1}{m}(X_2 + X_3)\right\} = \frac{1+m}{Em}\left\{X_1 - \frac{1}{1+m}(X_1 + X_2 + X_3)\right\},\\
\varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left\{X_2 - \frac{1}{m}(X_3 + X_1)\right\} = \frac{1+m}{Em}\left\{X_2 - \frac{1}{1+m}(X_1 + X_2 + X_3)\right\},\\
\varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left\{X_3 - \frac{1}{m}(X_1 + X_2)\right\} = \frac{1+m}{Em}\left\{X_3 - \frac{1}{1+m}(X_1 + X_2 + X_3)\right\}.
\end{aligned}$$

Саберимо једначине (54) и добићемо

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \frac{m-2}{Em}(X_1 + X_2 + X_3).$$

Сваки од ових збирова је инваријанта одговарајућег тензора (§ 0.3) и, као што се види из образаца (9) и (14) § 9,

(55) $$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \operatorname{div} \mathfrak{s}.$$

Дакле, нађемо ли компоненте X_i из једначина (54):

(56) $$X_i = \frac{Em}{1+m}\varepsilon_i + \frac{E}{1+m}\frac{m}{m-2}\operatorname{div}\mathfrak{s}$$

и означимо ли са

(57) $$-P = \frac{E}{1+m}\frac{m}{m-2}\operatorname{div}\mathfrak{s}, \quad \frac{Em}{1+m} = 2G,$$

видимо да се тензор Θ може претставити као збир двају тензора:

(58) $$\Theta = -PJ + 2G\Phi_1.$$

Према томе тензор унутрашњих напона, у случају изотропних тела, има исти облик као и за вискозну течност (45, 46 § 11.2) те можемо применити слично расуђивање за извођење вредности величине $\nabla\Theta$

која се јавља у једначини кретања непрекидне средине (31) § 10. Дакле биће (види извођење једначине (48) где се не сме више ставити да је једнак нули члан $\frac{1}{2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}$):

$$\nabla\Theta = -\operatorname{grad}P + G\Delta\mathfrak{s} + G\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}\,, \tag{59}$$

јер за еластично тело померање $\mathfrak{s}$ стоји место брзине $\mathfrak{v}$.

Узмимо прво случај равнотеже изотропног еластичног тела, $\mathfrak{a}=0$. Једначину (48) замениће сада ова, због ознака (57):

$$\rho\mathfrak{F} + G\left\{\Delta\mathfrak{s} + \frac{m}{m-2}\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}\right\} = 0\,. \tag{60}$$

Из векторске једначине (60) која је основна у Еластостатици, тј. у делу теорије еластичних тела где се проучавају њихова стања под дејством датих сила кад нема кретања, $\mathfrak{a}=0$, могу се лако извести три скаларне једначине за пројекције u, v, w померања $\mathfrak{s}$. Ово су парцијалне диференцијалне једначине другога реда, а за њихово решавање потребни су још гранични услови. То значи да морамо да знамо вредности померања на граници, тј. на површини тела, а могу бити дате и вредности површинских сила. У овом случају, имаћемо на површини тела услове (20) § 10 у којима су величине N_x, N_y, N_z сад задате. Онда треба напоне X_x,... изразити помоћу компонената тензора Φ_1 и уврстити те изразе у услове (20) § 10. Добиће се услови који дају везу између померања̂ на површини.

Бројеви

$$\lambda = \frac{mE}{(m+1)(m-2)} \qquad \text{и} \qquad \mu = G = \frac{mE}{2(m+1)}$$

зову се Lamé-ове константе и оне исто тако карактеришу изотропно тело као и друга два броја: Јунгов модуо E и Поасонов коефицијент.

Потребне претпоставке при извођењу једначине (60), која важи за изотропно еластично тело, биле су: 1) да су деформације мале и 2) да важи уопштени Хуков закон. Може се развити теорија еластичних тела и за коначне деформације (види крај § 9), или за друге функционалне везе између тензора̂ напона и деформација, но она ће бити много компликованија.

У Еластокинетици, тј. у теорији кретања еластичних тела, као што се види из једначине (31), треба у једначину (60) увести члан $\rho\mathfrak{a}$, где је $\mathfrak{a}$ убрзање, одн. други извод $\mathfrak{s}$ по времену.

Но наша једначина (60) важи само за мале деформације, тј. мала померања. Како ова треба да остану мала за све време кретања, очеви-

дно је да кретање може имати само осцилаторни карактер. Означимо зато леву страну једначине (31) са $\rho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}$, па ћемо имати

$$\rho \mathfrak{F} + G \left\{ \Delta \mathfrak{s} + \frac{m}{m-2} \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{s} \right\} = \rho \frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} . \tag{61}$$

При решавању проблемâ оваквих кретања еластичних тела, треба опет водити рачуна о граничним површинским условима. На такве проблеме наићи ћемо у Акустици.

§ 11.4 О другим врстама непрекидних материјалних средина. Три врсте материјалних непрекидних средина, наиме, идеалне и вискозне течности и идеално еластично тело, не обухватају још сва могућа стања материје. Многе појаве указују на потребу да се створи теорија нових врста непрекидних средина. Ако се зауставимо на течном стању видимо да, за општији случај, вискозне течности, унутрашње силе одређује тензор напона (45, § 11.2) чији је облик сличан облику тензора напона изотропног еластичног тела (58, § 11.3). Разлика између њих је у томе, што су у првом случају компоненте тензора напона везане са изводима брзина делића, док су у другом случају — везане са изводима померања. За течно стање намеће се, дакле, једно уопштавање — случај анизотропних течности. Теорију ових разрадио је Озен (Oseen).

Поред споменутих праваца уопштавања теорије идеалних еластичних тела, при којима се могу уочити коначне деформације и неки закони који би заменили Хуков, испитују се и други правци.

Кад се проучавају појаве кретања еластичних тела, утврђују се отступања од теорије идеалног еластичног тела. Ова отступања огледају се у томе, на пр., што амортизације наступају друкчије, а ово се сматра као резултат дејства унутрашњег трења у телу. На овај начин се уводи, дакле, појам *вискозног чврстог* тела. Ако се још узме да је тело изотропно, онда тензор унутрашњих напона, који треба да зависи од бесконачно малих померања, као идеално еластично тело, и од брзина, као вискозна течност, може да се претстави као збир тензора (45, § 11.2) и (58, § 11.3), тј. може да се стави

$$\Theta = - p^* \mathrm{J} + 2 \mu \Phi_1 (\mathfrak{v}) + 2 G \Phi_1 (\mathfrak{s}) , \tag{62}$$

где је p^* неки скалар, који игра улогу притиска, а поред Φ_1 стоји ознака $(\mathfrak{v})$ или $(\mathfrak{s})$ да се покаже да први пут у Φ_1 треба увести компоненте брзине $\mathfrak{v}$, а други пут — компоненте померања $\mathfrak{s}$. Средина, одн. тело које се карактерише оваквом особином зове се Voigt-ово; у стању равнотеже ($\mathfrak{v} = 0$) оно се понаша као идеално еластично.

Исто тако је од велике важности т. зв. *пластично* стање материје. Познато је из експеримената да је при растезању металног штапа

његово издужење (срачунато за јединицу дужине) до извесне границе сразмерно сили. Али када сила пређе ову границу, издужење нагло расте. Ова граница, односно вредност силе, зове се *почетак развлачења*. Метали се развлаче под великим притиском, као што су то показали Трескини (Tresca) експерименти. Теорија пластичних тела није још добила коначан облик. Али је Сен-Венан (St. Venant) дао за равнотежу без запреминских сила ($\mathfrak{a}=0$, $\mathfrak{F}=0$) у случају „раванских" напона, тј. када један од главних напона ишчезава, овакве једначине

$$\frac{\partial X_x}{\partial x}+\frac{\partial X_y}{\partial y}=0\,, \qquad \frac{\partial Y_y}{\partial y}+\frac{\partial X_y}{\partial x}=0\,.$$

Оне следују из (29) § 10. Но за три непознате функције $X_x=f_1(x,y)$, $Y_y=f_2(x,y)$ и $X_y=f_3(x,y)$ треба још једна једначина. Зато се накнадно уводи услов пластичности. Узима се, на пр., да је на почетку развлачења:

$$(X_x-Y_y)^2+4X_y^2=4\kappa^2=\text{const.}$$

из разлога на којима се овде нећемо заустављати. За тродимензионалне напоне, према Мизесовој (Mises) хипотези, треба увести услов

$$(X_1-X_2)^2+(X_2-X_3)^2+(X_3-X_1)^2=\text{const.}$$

којим се одређује почетак развлачења.

Анализу пластичног стања дали су такође H. Hencky, L. Prandtl и Geiringer.

Не улазећи у ову анализу, приметићемо само да се све више испољава чињеница да подела стања материје на чврсто, течно и гасовито није довољна. Постоји, између ових, читав низ прелазних стања.

ГЛАВА II

АКУСТИКА

(ЗВУК — ТАЛАСНА КРЕТАЊА)

Акустика као наука обухвата све појаве које стоје у вези са звуком. Ове појаве можемо поделити у три групе: у прву спадају оне које служе као извор звука; другу сачињава простирање звука у различитим медијумима; трећа се односи на осећај звука. Као грана Теориске физике, Акустика се бави појавама првих двеју група, трећа група, Физиолошка акустика, у коју математичка анализа не може да продре, стоји ван њених граница. Откад се успело да се покаже, да тело које служи као звучни извор трепери, да се звук преноси кроз медијум (ваздух или друга материјална тела), у којем онда наступа таласно кретање, — Акустика је постала део Механике. Проблеми Акустике који се односе на осцилације материјалних тела у суштини су проблеми Механике непрекидне средине која се може деформисати. Ови последњи имају ширу област примена, јер се за осцилације које стоје у вези са звуком постављају одређене границе, ван којих оне постају нечујне. Осим тога, у акустичким појавама играју улогу мале осцилације. Зато ћемо овде извести општу математичку анализу таласних кретања. Ова теорија може се примењивати и у другим областима Примењене математике; тако на пр. резултати проучавања простирања таласа у материјалним срединама налазе примену у Сеизмологији, где је ово питање једно од основних. Али у овој глави довешћемо таласна кретања у везу са специјалним акустичким појавама.

Но претходно треба да се упознамо са математичким апаратом који служи за решавање проблема ове врсте.

§ 12.1 Периодични процеси. Разне врсте периодичних кретања, која смо проучили у Механици тачке (§ 2.5), претстављају примере периодичних процеса чија анализа игра улогу у Теориској физици. Специјално

акустичке појаве своде се на осцилације материјалних тела. Зато ћемо проучити извесне особине периодичних процеса.

а) *Хармониске осцилације. Сабирање. Интерференција. Лебдење.* Најпростији је случај т.зв. хармониских осцилација, које улазе у низ *чисто периодичних* процеса, тј. оних где се у једнаким интервалима времена поступно појављују иста стања. Ако, на пр., скалар S карактерише ово стање, имамо једначину (39) § 2.5 или другу од ових:

$$S = S_0 \sin(\kappa t + \varepsilon), \qquad S = S_0 \cos(\kappa t + \varepsilon). \tag{1}$$

Бирајући почетни тренутак t_0 тако да константа фазе ε ишчезне, можемо увести сем тога, место тригонометриских, експоненцијалну функцију:

$$u = S_0 e^{i\kappa t}. \tag{2}$$

Овим се у многоме олакшава рачун, но ипак треба, ако проучавамо неке физичке појаве, да се на крају вратимо на реалне величине, помоћу Ојлерова обрасца

$$e^{i\kappa t} = \cos \kappa t + i \sin \kappa t.$$

Диференцирајући двапут функцију (2) видимо одмах да је она решење једначине

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \kappa^2 u = 0, \tag{3}$$

а њен реални ($\cos \kappa t$) или имагинарни (одн. $\sin \kappa t$) део биће такође решења ове једначине. У Акустици, случај хармониске осцилације одговара *тону*.

Ако, на пр., материјална тачка мора да врши истовремено неколико хармониских осцилација, ове се суперпонују тако да се добива једна, резултантна осцилација. Она може имати разноврсне облике, јер зависи од вредности амплитуда, фреквенција и фаза појединих осцилација.

Узмимо случај суперпозиције двају периодичних процеса истих фреквенција. Појава која тада наступа зове се *интерференција*. Нека буду

$$S_1 = a_1 \cos \kappa t, \qquad S_2 = a_2 \cos(\kappa t + \varepsilon), \qquad S = S_1 + S_2. \tag{4}$$

Ставимо

$$a_1 + a_2 \cos \varepsilon = a \cos \delta, \qquad a_2 \sin \varepsilon = a \sin \delta. \tag{5}$$

Одавде је

$$a^2 = a_1^2 + 2a_1 a_2 \cos \varepsilon + a_2^2, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{a_2 \sin \varepsilon}{a_1 + a_2 \cos \varepsilon}, \tag{6}$$

те је, према томе:

(7) $$S = a\cos(\kappa t + \delta)\,.$$

Резултантна осцилација је такође хармониска, исте периоде. Њена амплитуда има највећу или најмању вредност за $\varepsilon = 2n\pi$, одн. за $\varepsilon = (2n+1)\pi$

$$a = a_1 + a_2\,, \quad a = |a_1 - a_2|\,;$$

ако је још $a_1 = a_2$, осцилације се поништавају. Дакле, ако се суперпонују два чиста тона, који имају исте фреквенције (број трептаја у секунди $\nu = \frac{1}{T}$, где је T периода; а *угловна фреквенција* је $\kappa = 2\pi\nu$), добива се исти тон, који звучи јаче или слабије, што зависи од разлике фаза ε.

Ако су и фреквенције различите, тј. ако је

(8) $$S_1 = a_1\cos(\kappa_1 t + \varepsilon_1)\,, \quad S_2 = a_2\cos(\kappa_1 t + \varepsilon_2)\,,$$

резултантно стање неће бити проста осцилација. У томе случају имамо

$$S = S_1 + S_2 = a_1\cos(\kappa_1 t + \varepsilon_1) + a_2\cos[\kappa_1 t + (\kappa_2 - \kappa_1)t + \varepsilon_2]\,.$$

И, ако ставимо

$$a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos[(\kappa_2 - \kappa_1)t + \varepsilon_2] = a\cos\delta\,,$$
$$a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin[(\kappa_2 - \kappa_1)t + \varepsilon_2] = a\sin\delta\,,$$

одакле следује

(9) $$a^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos[(\kappa_2 - \kappa_1)t - \varepsilon_1 + \varepsilon_2]\,,$$
$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a_1\sin\varepsilon_1 + a_2\sin[(\kappa_2 - \kappa_1)t + \varepsilon_2]}{a_1\cos\varepsilon_1 + a_2\cos[(\kappa_2 - \kappa_1)t + \varepsilon_2]}\,,$$

имаћемо

(10) $$S = a\cos(\kappa_1 t + \delta)\,.$$

Но сада су амплитуда a и „константа“ фазе δ постале функције времена, и то периодичке, чија је угловна фреквенција $\kappa_2 - \kappa_1$. Узмимо сад да је ова фреквенција мала у односу према κ_1, тј. да је периода прве осцилације знатно краћа од периоде величина (9). Амплитуда a мењаће се периодички између $a_1 + a_2$ и $a_1 - a_2$, и ова се појава зове *лебдење (дрхтање)*. Њена периода износи $\frac{2\pi}{\kappa_2 - \kappa_1}$.

На сличан начин може се проучавати суперпозиција више од две осцилације.

Задржаћемо се још на случају суперпозиције двеју управних осцилација. Узмимо за координате неке честице:

(11) $$x = a\cos\kappa t\,,\ y = b\cos(\kappa_1 t + \varepsilon) = b\cos(\kappa t + \delta),\ \delta = (\kappa_1 - \kappa)t + \varepsilon\,.$$

Када је $\kappa_1 = \kappa$ $(\delta = \varepsilon)$, елиминацијом t из једначина (11) добивамо

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{2xy}{ab}\cos\delta + \frac{y^2}{b^2} = \sin^2\delta\,,$$

тј. фамилију елипса. Ако је $\delta = \varepsilon = 0$ или је једнако π добивамо две праве $bx \mp ay = 0$ (упореди са првим случајем у § 2.5). Али, ако фреквенције осцилација (11) нису једнаке, место елипсе добивају се компликованије криве линије, које се зову Лисажу-ове (Lissajous) фигуре, које се показују помоћу познатих експеримената у Акустици. Оне ће бити затворене криве, ако су периоде T и T_1 самерљиве (на пр. ако се односе као 1 : 2 — случај октаве у Акустици).

b) *Компликовани периодични процеси. Fourier-ови редови и интеграли.*

Периодичне промене стања, са којима радимо у Акустици као и у другим гранама Физике, могу се свести на низ хармониских осцилација помоћу т.зв. Фурјеових редова. Нека $f(t)$ буде периодичка функција и $T = 2\pi$ њена периода (заменом променљиве $t = \frac{l}{\pi}x$ можемо сваку периоду $2l$ свести на ову); $f(t)$ нека буде, као и њен први извод, непрекидна функција у интервалу $(0, 2\pi)$ сем, можда, за коначни број вредности t. На сваком месту τ где функција $f(t)$, има скок узимамо за њену вредност аритметичку средину граничних њених вредности са леве одн. са десне стране

$$f(\tau) = \frac{1}{2}\Big[f(\tau + 0) + f(\tau - 0)\Big]\,,$$

$$f(\tau + 0) = \lim_{h \to 0} f(\tau + h)\,, \quad f(\tau - 0) = \lim_{h \to 0} f(\tau - h)\,, \quad h > 0\,.$$

Онда, као што се доказује у Математичкој анализи, $f(t)$ може да се развије у тригонометриски ред или ред експоненцијалних функција

$$(12) \qquad \begin{aligned} f(t) &= \sum_{0}^{\infty} b_n \cos nt + \sum_{1}^{\infty} c_n \sin nt \\ f(t) &= \sum_{-\infty}^{\infty} a_n e^{int}\,. \end{aligned}$$

Коефицијенти ових редова израчунавају се овако: узмимо прво a_0, интегралимо обе стране једначина (12) у интервалу $(0, 2\pi)$ и добићемо

$$\int_0^{2\pi} a_n e^{int} dt = a_n \cdot \frac{1}{in}\Big[e^{int}\Big]_0^{2\pi} = \frac{a_n}{in}\left(e^{i2\pi n} - e^0\right) = 0\,,$$

те је

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt\,. \tag{13}$$

Да бисмо добили коефицијенте a_n и a_{-n}, помножимо једначину (12) са e^{-int}, одн. са e^{int}, и интегралимо поново од 0 до 2π. На десној страни опет ишчезавају сви чланови сем $2\pi a_n$ (или $2\pi a_{-n}$), тако да је

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{-int}\,dt\,, \qquad a_{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,e^{int}\,dt\,. \tag{14}$$

Да бисмо нашли коефицијенте b_n и c_n, узмимо збир чланова са индексима n и $-n$ и заменимо, према Ојлерову обрасцу, експоненцијалне функције тригонометрискима. Добићемо

$$a_n e^{int} + a_{-n} e^{-int} = \frac{1}{\pi}\cos nt \int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\sin nt \int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\,.$$

Дакле је

$$b_0 = a_0, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt\,, \quad c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin nt\,dt\,. \tag{15}$$

Да смо узели интервал $(-\pi, \pi)$, онда би то биле границе у горњим интегралима. За друге границе интервала променће се сходно овима и границе интеграла, које могу да постану $-\infty$ и $+\infty$ (за неку непериодичку функцију на пр.). Интеграли овога облика зову се Фурјеови интеграли.

Сваки члан реда (12) претставља хармониску осцилацију. Ако у извесној тачки наступа промена притиска ваздуха, која је функција времена, и то функција $\sin kt$, наш осећај који јој одговара зове се (прости) *тон*. Општија периодичка промена даје сложени тон и овај се може сматрати, према ономе што смо доказали, као сложена појава — као низ тонова који се суперпонују. Тон са најдужом периодом је *основни*, а даље иду хармониски горњи тонови, са периодама $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ итд. основног тона. Ухо има способност да разликује у сложеном тону делимичне тонове, тј. поступа на начин сличан ономе који смо применили при растављању сложене периодичке функције у Фурјеов ред. Сваки се тон одређује са три елемента: амплитудом, која одређује *јачину*, периодом, одн. фреквенцијом, од које зависи *висина* тона, и фазом. *Боја* сложеног тона зависи само од односа амплитудâ тонова који звуче у исти мах, као што то показују експерименти, ма да се за разне фазе при супер-

позицији добивају различити облици криве $u = f(t)$, ако се ова састоји од коначног низа чланова.

Поред осцилација горње врсте играју у Акустици улогу још и амортизоване и принудне осцилације.

§ 12.2 Мала кретања система око положаја стабилне равнотеже. Досада смо се задржавали на кинематичком проучавању осцилаторних појава. Међутим, поред уопште периодичких промена стања, на пр. притиска, у Акустици играју улогу и стварна кретања материјалних тела, те стога треба да се осврнемо и на проблеме Динамике у вези с њима. А како у акустичким појавама долазе у обзир мале осцилације честица око неког положаја, зауставићемо се на т. зв. теорији малих кретања око положаја стабилне равнотеже.

Узмимо прво холономни и склерономни систем n материјалних тачака, који има k степена слободе. Према принципу могућних померања (4) § 5, овај систем ће се налазити у стању равнотеже ако је задовољен услов

$$\Sigma \mathfrak{F}_i \delta \mathfrak{r}_i = 0 ,$$

тј. ако је тотални рад сила на могућним померањима једнак нули. Ако су q_i генералисане координате, а Q_i генералисане силе, овај услов прелази (види једн. (22) § 3.2 и даље) у једначину

$$\sum_1^k Q_i \delta q_i = 0 .$$

Претпоставимо ли још да су силе конзервативне $Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$, претходну једначину можемо задовољити, због произвољности могућних померања δq_i, само онда, ако је

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0 , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0 , \ldots , \quad \frac{\partial U}{\partial q_k} = 0 . \tag{16}$$

Ових k једначина су потребни и довољни услови равнотеже. Како је функција сила U — функција променљивих $q_1, q_2, \ldots, q_k$, из ових услова можемо одредити вредности ових величина које одговарају конфигурацији равнотеже. Даље је од важности за нас случај стабилне равнотеже. Критеријум стабилности равнотеже дао је Лагранж, наиме: равнотежа неке конфигурације материјалног система је стабилна, ако је за њу U максимум.*)

Увек можемо генералисане координате q_i изабрати тако, да у положају равнотеже оне имају вредности $q_1 = q_2 = \ldots = q_k = 0$. А како је усто U одређено до адитивне константе (крај § 2.1), ову ћемо изабрати тако, да за конфигурацију равнотеже буде $U = 0$.

---

*) доказ ове теореме види на пр. P. Appell. Traité de mécanique. T. II.

Конфигурација стабилне равнотеже има ову карактеристичну особину: ако се тачке система помере из тих основних положаја на довољно мала растојања па пусте, оне ће се кретати у близини тих положаја, тј. координате q_i и генералисане брзине остаће мале величине (уз наведену претпоставку да су $q_i = 0$ за ову конфигурацију). Но за време ових *малих* кретања могу да се појаве и друге силе; зато ћемо написати Лагранжове једначине које одговарају овом општијем случају (25) § 3.2:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial(T+U)}{\partial q_j'} - \frac{\partial(T+U)}{\partial q_j} = Q_j^* , \tag{17}$$

где је Q_j^* — компонента генералисане силе, која се јавља кад су силе неконзервативне. Q_j^* може да зависи од компонената брзина при трењу, вискозности итд.. Анализа кретања такве врсте упрошћава се када постоји извесна функција $\Phi(q, q')$ чији су изводи по генералисаним брзинама једнаки одговарајућим функцијама Q_j^*. Ова се функција зове *функција расипања.* Важан је случај када је Φ квадратична форма

$$\Phi = \frac{1}{2}c_{11}q_1'^2 + \frac{1}{2}c_{22}q_2'^2 + \ldots + c_{12}q_1'q_2' + c_{23}q_2'q_3' + \ldots , \tag{18}$$

где су коефицијенти c_{ij} функције координата, а могу бити и константе. При холономним и склерономним везама (в. једначине 16—21 § 3.2) биће и жива сила квадратична форма по q_j ($j = 1, \ldots k$), јер координате x_j не зависе експлицитно од времена, тј. биће

$$T = \frac{1}{2}a_{11}q_1'^2 + \frac{1}{2}a_{22}q_2'^2 + \ldots + a_{12}q_1'q_2' + \ldots , \tag{19}$$

где су коефицијенти a_{ij} функције координата. Код малих кретања, сваку од функција a_{ij} или c_{ij} можемо развити у Маклоренов ред. Ако се заустависмо на малим величинама другог реда, коефицијенти у обрасцима (18) и (19) биће константни бројеви. Најзад, за мала кретања (q_j — мале величине) раставићемо у ред функцију сила

$$U = U(0,0,\ldots 0) + \Sigma\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right)_{q_i=0} q_i + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j\left(\frac{\partial^2 U}{\partial q_i\,\partial q_j}\right)_{q_i=0,\ q_j=0} q_i q_j + \ldots$$

За конфигурацију равнотеже ишчезавају први члан и коефицијенти код q_i, због (16) и даљих услова, и тако остаје

$$U = \frac{1}{2}b_{11}q_1^2 + \frac{1}{2}b_{22}q_2^2 + \ldots + b_{12}q_1q_2 + b_{23}q_2q_3 + \ldots , \tag{20}$$

где су коефицијенти b_{ij} константни бројеви. Према ономе што је речено, функција сила U (20) имаће у близини положаја стабилне равнотеже само негативне вредности; а жива сила (19) остаје увек позитивна.

Како анализа општег случаја осцилација система са k степена слободе наилази на знатне математичке тешкоће, заустављемо се на систему са два степена слободе. Карактеристичне особине ових осцилација имаћемо и у општем случају.

Претпоставимо прво да су величине $Q_j^* = 0$. Диференцирајући T и U по односним променљивима добивамо из једначина (17) систем Лагранжових једначина за параметре q_1 и q_2:

$$
(21) \qquad \begin{aligned} a_{11} q_1'' + a_{12} q_2'' - b_{11} q_1 - b_{12} q_2 &= 0 , \\ a_{12} q_1'' + a_{22} q_2'' - b_{12} q_1 - b_{22} q_2 &= 0 . \end{aligned}
$$

Овај систем од две обичне диференцијалне једначине са константним коефицијентима можемо задовољити стављајући

$$
(22) \qquad q_1 = A_1 \cos (\varkappa t + \varphi) , \quad q_2 = A_2 \cos (\varkappa t + \varphi) ,
$$

где су A_1, A_2, $\varkappa$ и φ четири константе. Треба само наћи одговарајуће вредности ових констаната. Из једначина (21) и (22) добивамо услове

$$
(23) \qquad \begin{aligned} A_1 (b_{11} + \varkappa^2 a_{11}) + A_2 (b_{12} + \varkappa^2 a_{12}) &= 0 , \\ A_1 (b_{12} + \varkappa^2 a_{12}) + A_2 (b_{22} + \varkappa^2 a_{22}) &= 0 . \end{aligned}
$$

Одавде следује да је $\varkappa$ корен једначине

$$
(24) \qquad \begin{vmatrix} b_{11} + \varkappa^2 a_{11} & b_{12} + \varkappa^2 a_{12} \\ b_{12} + \varkappa^2 a_{12} & b_{22} + \varkappa^2 a_{22} \end{vmatrix} = 0 ,
$$

тј.

$$
(24') \qquad (b_{11} + \varkappa^2 a_{11}) (b_{22} + \varkappa^2 a_{22}) - (b_{12} + \varkappa^2 a_{12})^2 = 0 .
$$

Ова једначина има за $\varkappa^2$ два позитивна корена. Да бисмо ово доказали треба да видимо, какви услови постоје за коефицијенте a_{ij} и b_{ij}. Израз (19) за живу силу мора бити стално позитиван, зато је $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$ и $a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$. Како је $U < 0$ ма за какве вредности q_1 и q_2, биће $b_{11} < 0$, $b_{22} < 0$, $b_{11} b_{22} - b_{12}^2 > 0$. Ставимо редом у једначину (24'), на место $\varkappa^2 : 0$, позитивне бројеве $\left(-\frac{b_{11}}{a_{11}}\right)$, $\left(-\frac{b_{22}}{a_{22}}\right)$ и $+\infty$. Према наведеним неједначинама, лева страна имаће знакове $+, -, -, +$. Дакле, доиста постоје два реална позитивна корена за $\varkappa^2$, те ћемо, према томе, имати и две позитивне вредности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ (сем када је $\varkappa_1 = \varkappa_2$).

Уврстимо сада вредности $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ у једначине (23). Јасно је да ћемо ове једначине задовољити, ако ставимо

$$
(25) \qquad \frac{A_1}{b_{12} + \varkappa_\nu^2 a_{12}} = \frac{-A_2}{b_{11} + \varkappa_\nu^2 a_{11}} = C_\nu \qquad \nu = 1,2 ,
$$

где су C_ν произвољне константе (због (24'), друга од једначина (23) по-

стаје идентична са првом). Због овог услова можемо написати опште интеграле једначина (21) у облику

$$(26)\quad \begin{aligned} q_1 &= C_1(b_{12}+\varkappa_1^2 a_{12})\cos(\varkappa_1 t+\varphi_1)+C_2(b_{12}+\varkappa_2^2 a_{12})\cos(\varkappa_2 t+\varphi_2),\\ q_2 &= -C_1(b_{11}+\varkappa_1^2 a_{11})\cos(\varkappa_1 t+\varphi_1)-C_2(b_{11}+\varkappa_2^2 a_{11})\cos(\varkappa_2 t+\varphi_2), \end{aligned}$$

и четири произвољне константе C_1, C_2, φ_1 и φ_2 одредити, у сваком конкретном случају, из услова у почетку кретања.

Ако означимо са K_ν и φ_ν интеграционе константе, величине

$$(27)\qquad \eta_\nu = K_\nu \cos(\varkappa_\nu t+\varphi_\nu) \qquad \nu = 1,2$$

зову се *нормалне* координате, одговарајуће осцилације — *главне* или *сопствене*, а $\varkappa_\nu$ — *сопствене фреквенције*. Ови резултати могу се уопштити и за произвољни број степена слободе.*)

Општији случај имаћемо, ако узмемо у обзир функцију расипања (18), која се такође своди на збир три члана. Ово ће бити амортизоване слободне осцилације. Као што се види из једначина (17), сад треба допунити једначине (21) члановима који се добивају диференцирањем функције Ф. Ако уведемо ознаке:

$$a_{12}:a_{11}=a_2,\ -b_{11}:a_{11}=b_1^2,\ -b_{12}:a_{11}=\beta_2,\ -c_{11}:a_{11}=2c_1,\ -c_{12}:a_{11}=2\gamma_2$$
$$a_{12}:a_{22}=a_1,\ -b_{12}:a_{22}=\beta_1,\ -b_{22}:a_{22}=b_2^2,\ -c_{12}:a_{22}=2\gamma_1,\ -c_{22}:a_{22}=2c_2$$

(b_{11} и b_{22} су негативни), имаћемо једначине

$$(28)\quad \begin{aligned} &q_1''+2c_1q_1'+b_1^2q_1+a_2q_2''+2\gamma_2q_2'+\beta_2q_2=0,\\ &q_2''+2c_2q_2'+b_2^2q_2+a_1q_1''+2\gamma_1q_1'+\beta_1q_1=0. \end{aligned}$$

Кад бисмо изједначили са нулом ма коју групу од три члана са истом координатом q_i, добили бисмо једначину облика (41) § 2.5, коју задовољава функција облика (46) § 2.5, и ово одговара амортизованим осцилацијама система са једним степеном слободе. Међутим сад осцилације сваке од координата q_i нису независне. У овом случају имамо појаву која се зове *спрезање*. Према вредностима коефицијената разликујемо три врсте спрезања, наиме: кад је $a_2 \neq 0$ и $a_1 \neq 0$ — имамо спрезање убрзања, кад је $c_1 \neq 0$, $c_2 \neq 0$, $\gamma_2 \neq 0$, $\gamma_1 \neq 0$ — спрезање трења, кад је $b_1 \neq 0$, $b_2 \neq 0$, $\beta_2 \neq 0$, $\beta_1 \neq 0$ — спрезање сила.

---

*) Линеарном трансформацијом $q_\mu = \Sigma\beta_{\mu\nu}\eta_\nu$ могу се изрази (19) и (20) свести на облик $T=\Sigma\eta_\nu'^2$ и $U=-\Sigma\varkappa_\nu^2\eta_\nu^2$, где ће $\varkappa_\nu^2$ бити корени једначине (24) уопштене за одговарајући број променљивих (т. зв. трансформација на главне осе). Лагранжове једначине за η_ν имаће облик

$$\frac{d^2\eta_\nu}{dt^2}+\varkappa_\nu^2\eta_\nu=0,$$

дакле следују решења (27).

Елиминацијом једне од координата из једначина (28) долази се до диференцијалне једначине четвртог реда. Ставимо ли $q_1 = ae^{\lambda t}$, као што смо то учинили у § 2.5, добићемо карактеристичну биквадратну једначину. Нека буду њени корени

$$\lambda_{1,2} = -\alpha_1 \pm i\varkappa_1\,, \quad \lambda_{3,4} = -\alpha_2 \pm i\varkappa_2\,. \tag{29}$$

Као и у случају решења (46) § 2.5, добивамо опште интеграле једначина (28) у облику

$$\begin{aligned} q_1 &= A_1 e^{-\alpha_1 t}\cos\varkappa_1 t + B_1 e^{-\alpha_2 t}\cos(\varkappa_2 t + \varphi)\,, \\ q_2 &= A_2 e^{-\alpha_1 t}\cos\varkappa_1 t + B_2 e^{-\alpha_2 t}\cos(\varkappa_2 t + \varphi)\,, \end{aligned} \tag{30}$$

а произвољне константе треба, наравно, одредити помоћу почетних услова. Периоде појединих осцилација, чијом се суперпозицијом добивају осцилације (30), јесу $T_1 = \frac{2\pi}{\varkappa_1}$ и $T_2 = \frac{2\pi}{\varkappa_2}$, а због истих коефицијената α_1 и α_2 у оба израза, амортизација се врши на исти начин.

Још општији случај — принудне осцилације имаћемо ако се, сем сила које проистичу од функција U и Φ, појављују и нове, спољње периодичке силе (в. § 2.5). Појава осцилације такве врсте, чак ако је систем само и са два степена слободе, постаје уопште комплико вана.

§ 12.3 Звучни извори. Методе са којима смо се упознали у претходним параграфима омогућују да анализујемо извесне карактеристичне особине акустичких појава. Али ако узмемо у обзир да у овим појавама играју улогу тела еластична, течна или гасовита, одговори на многобројна питања која се постављају могу се дати само на основи Механике ових тела. Како је ова улога двострука, јер, с једне стране, тело може да служи као звучни извор, с друге стране, у њему звук може се простирати, поделићемо и одговарајућа питања Акустике у две групе. Овде ћемо се прво зауставити на постанку звука, тј. на осцилацијама звучних извора. По облику разликоваћемо линеарне изворе (жица, шипка), површинске (мембрана, плоча) и запреминске (кубна пиштаљка).

а) *Трансверзалне осцилације жице.* Жицом ћемо звати еластично тело врло мала пресека у односу на дужину, које се врло лако савија. Нека буде жица дужине l затегнута на крајевима. Тада у свакој њеној тачки постоји напон. Ако се она изведе из тог положаја на неки начин (ударцем или се повуче) па се остави сама себи, настају осцилације. Претпоставићемо да се оне врше у равни. Почетак координатног система

Oxy ставимо у почетак жице, x-осу дуж саме жице, y-осу у раван осцилација. Отступање (y) сваке тачке жице од положаја у миру биће функција апсцисе x и времена t:

$$y = y(x, t), \tag{31}$$

која на крајевима жице треба да задовољава услове:

$$y(0, t) = y(l, t) = 0. \tag{32}$$

Потражимо диференцијалну једначину коју ће задовољавати y за време кретања. Зато уочимо бесконачно мали лук криве која претставља жицу у деформисаном стању и претпоставимо да је отступање од праве толико мало, да се може ставити

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}\alpha = \sin\alpha, \tag{33}$$

обележавајући са α угао између дирке у некој тачки криве и x-осе. У свакој тачки жице постоји напон који је, ако се означи са P његова вредност за јединицу површине нормалног пресека, на пресеку q једнак qP и усмерен дуж дирке. На лук AB дејствују, дакле, на крајевима A и B, две силе у супротним смеровима (занемарујемо силу тежине која је мала према напонима, као и промену величине напона због деформације, која је такође мала величина). Према услову (33), пројекција резултанте ових сила на осу y је

$$qP\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_B - \left(\frac{dy}{dx}\right)_A\right].$$

И ако је dx пројекција лука AB на x-оси, занемарујући при развијању у ред првог члана величине другог реда, налазимо да је ова пројекција

$$qP\frac{d^2y}{dx^2}\,dx.$$

Маса овога елемента жице је $\rho q dx$, ρ је густина и $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ је пројекција убрзања. Зато, скративши са $q dx$, добивамо једначину

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{P}{\rho}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}. \tag{34}$$

Да бисмо нашли решење ове једначине која, уз граничне услове (32), одређује функцију (31), применићемо Бернулијеву методу; ставићемо наиме

$$y = w(x)g(t) = w(x)e^{i\lambda t}. \tag{35}$$

И како, због (32) : $w(0)g(t) = w(l)g(t) = 0$, долазимо до услова

(36) $$w(0) = 0\,, \qquad w(l) = 0\,;$$

а, због једначине (34),

(37) $$w''_{xx} + \kappa^2 w = 0\,,$$

ако се означи

(38) $$\kappa = \lambda\sqrt{\frac{\rho}{P}}\,.$$

Једначина (37), слична једначини (3) § 12.1, има решења $e^{i\kappa x}$, одн. $\cos\kappa x$ и $\sin\kappa x$ *).

Како y мора имати реалну вредност, долазе у обзир само тригонометриске функције, од којих $\cos\kappa x$ не задовољава први од услова (36). Зато, стављајући

(39) $$w(x) = \sin\kappa x\,,$$

видимо да ова функција може да задовољи други од услова (36) само за дискретни низ вредности броја κ:

(40) $$\kappa_n = \lambda_n\sqrt{\frac{\rho}{P}} = \frac{n\pi}{l}\,,$$

где је n цео број.

Ако ставимо $\lambda_n = 2\pi\nu_n$, имаћемо

(41) $$\frac{\lambda_n}{2\pi} = \nu_n = \frac{n}{2l}\sqrt{\frac{P}{\rho}}\,.$$

Према томе, одвајајући у (35) реални део од имагинарног, добивамо да свака од функција

(42) $$y = a_n\cos 2\pi\nu_n t\sin\frac{n\pi}{l}x\,,$$
$$y = b_n\sin 2\pi\nu_n t\sin\frac{n\pi}{l}x\,,$$

где су a_n и b_n константе, може да буде решење једначине (34) које задовољава и граничне услове (32). Нађене вредности параметра κ (40), за које постоје решења диференцијалне једначине складна са граничним условима, зову се *карактеристични бројеви*, а функције (42), које служе као оваква решења и одговарају овим бројевима, зову се *карактеристичне функције* дотичне диференцијалне једначине. **)

---

*) Функција $g(t)$ задовољава једначину $g'' + \lambda^2 g = 0$, као што се то види непосредно из (34) и зато смо директно ставили да је $g(t) = e^{i\lambda t}$.

**) Случај ових решења диференцијалних једначина игра важну улогу у читавом низу проблема Теориске физике.

Но поред граничних услова, о којима смо већ повели рачуна, постоје и *почетни услови* кретања. Јер, у почетном тренутку $t = 0$, жицу изводимо из стања равнотеже, тако да добива облик неке криве $y = \eta(x)$ у интервалу $(0, l)$, затим је пуштамо, што опет значи да свака тачка има почетну брзину $y' = \beta(x)$, која је функција координате x.

Како је и збир израза (42) са разним вредностима бројева ν_n, a_n, b_n решење линеарне парцијалне диференцијалне једначине (34), можемо ставити, у општем случају,

$$y = \sum_1^\infty (a_n \cos 2\pi \nu_n t + b_n \sin 2\pi \nu_n t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{43}$$

и можемо одредити коефицијенте a_n и b_n тако, да буду задовољени услови у почетку кретања ($t = 0$). За овај тренутак из израза (43) и његова извода по времену, морамо добити

$$\sum_1^\infty a_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \eta(x), \qquad \sum_1^\infty 2\pi\nu_n b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \beta(x). \tag{44}$$

Дакле, константе a_n и b_n треба да буду коефицијенти у Фурјеовим редовима у које ће се раставити функције $y = \eta(x)$, $y_t' = \beta(x)$, (за $t = 0$) у интервалу $(0, l)$. У овом интервалу, функције $w_n = \sin \frac{n\pi}{l} x$ имају нарочиту особину, коју ћемо и извести. Пре свега имамо $w_n(0) = w_n(l) = 0$ за сваки цео број n, и функција w_n је решење једначине (37) за $\kappa_n = \frac{n\pi}{l}$.

Дакле је

$$w_n'' + \kappa_n^2 w_n = 0 \quad \text{и} \quad w_m'' + \kappa_m^2 w_m = 0,$$

где је цео број $m \neq n$, тј. $\kappa_m \neq \kappa_n$. Помножимо прву од ових једначина са w_m, другу са w_n, одузмимо и интегралимо у границама од 0 до l, и добићемо

$$(\kappa_n^2 - \kappa_m^2) \int_0^l w_n w_m dx + \int_0^l \frac{d}{dx}(w_n' w_m - w_n w_m') dx = 0.$$

Са разлога што су функције w_n и w_m на крајевима интервала $(0, l)$ једнаке нули, други интеграл ишчезава и остаје услов

$$\int_0^l w_n w_m dx = 0 \tag{45}$$

за све неједнаке целе вредности n и m. Функције w_n које задовољавају услове облика (45) зову се *ортогоналне*.*) Узимајући у обзир ову осо-

*) Ову особину имају и низови других функција који играју важну улогу у многим математичким проблемима.

бину можемо одредити вредности коефицијената a_n и b_n из једначина (44). Зато треба да помножимо сваку од ових једначина са $\sin\frac{n\pi}{l}x$ и да интегралимо у границама од 0 до l. Онда ће у редовима ишчезнути сви чланови сем оних са коефицијентима a_n, одн. b_n. И како је

$$\int_0^l \sin^2\frac{n\pi}{l}x\,dx=\frac{l}{2},$$

имаћемо

$$(46)\qquad a_n=\frac{2}{l}\int_0^l \eta(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi\nu_n l}\int_0^l \beta(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx.$$

Једначине (43, 46, 41) дају осцилацију жице за дате почетне и граничне услове, другим речима дају потпуно решење постављеног проблема.

Основни тон добивамо за $n=1$, хармониске тонове за $n=2, 3, \ldots$ Али амплитуде зависе, као што се види из једначина (46) од почетних услова, — тј. од начина којим се жица ставља у покрет. Разне боје тона имаћемо, дакле, у случајевима, када дејствује нека тренутна сила (ударац чекића у клавиру или чупање жице), или када дејствује трајнија сила (кад се преко жице превлачи гудалом или слично).

в) *Лонгитудиналне* (уздужне) *осцилације жица и шипки.* За шипку као и за жицу претпоставља се да је тело једне димензије (разлика је у величини нормалног пресека: прва има мали коначни пресек — друга је влакнастог облика). Код ових тела могу да се изазову не само трансверзалне него и лонгитудиналне осцилације — уздужним превлачењем по њима. Диференцијална једначина осцилација ове врсте може лако да се добије. Узмимо да су u и $u+\frac{\partial u}{\partial x}dx$ померања двају пресека, на растојању dx један од другога који су уједно границе елемента шипке; оса x је, дакле, положена дуж шипке. Дужина шипке је l, а њени крајеви су $x=0$ и $x=l$. Шипка је изотропна и има свугде исти нормални пресек q. Ако занемаримо промене величине пресека, које ће за време малих осцилација бити мале величине вишег реда, биће напон који дејствује на први од уочених пресека — $E\frac{\partial u}{\partial x}q$ (в. обрасце 52 и даље § 11.3), јер модуо еластичности E карактерише истезање шипке у правцу x-осе, а напон је овде негативног смера. У исти мах ће на другом пресеку дејствовати на уочени елеменат шипке сила $Eq\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}dx\right)$ у позитивном смеру x-осе. Дакле резултанта сила је $Eq\,dx\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. Свака тачка

шипке врши осцилације око неког средњег положаја $\bar{x}$, и има координату $x = \bar{x} + u$; $u = (x,t)$. Према томе њено убрзање је $\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$. Ако је ρ густина шипке, а $q dx$ запремински елемент, биће, по другом Њутнову закону,

$$\rho q\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Eq\, dx \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

тј.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{47}$$

диференцијална једначина кретања ма каквог елемента шипке, одн. њених осцилација. Као што се види, она има исти облик као и једначина (34), само што су лонгитудинално померање u и Јунгов модуо E заменили трансверзално померање y и напон P. Интеграљење једначине (47) може се извести на исти начин. Треба само повести рачуна о другој природи граничних услова у случају шипке. А разликујемо три случаја: 1) кад су оба краја (као и код жице) учвршћена, $u = 0$, дакле, за $x = 0$ и $x = l$; а од решења једначине (37) долази у обзир једино функција (39), само са другом вредношћу константе κ која овде зависи од E; 2) кад су оба краја слободна и на њима нема напона, те је зато, за $x = 0$ и $x = l$, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. Косинус је карактеристична функција за овај случај; 3) кад је један крај учвршћен а други — слободан, дакле, на пр., $u = 0$ за $x = 0$ и $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ за $x = l$. Узећемо да је $w(x) = \sin \kappa x$; тада због другог услова мора бити $\kappa = \frac{n\pi}{2l}$. Ако је, обрнуто, $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ за $x = 0$, а $u = 0$ за $x = l$, треба ставити $w(x) = \cos \kappa x$ и $\kappa = \frac{n\pi}{2l}$.

У свима овим случајевима осцилације се састоје од основне и низа горњих. Поред ових врста могу да постоје и *торзионе* осцилације. Теорија линеарних осцилација проширује се, даље, на шупље шипке, променљива пресека, савијене (на пр. звучна виљушка итд.)

c) *Мембране и плоче.* Мембрана се замишља као врло танак лист који, слично жици, задржава свој облик (у најпростијем случају део равни) због тога што на њ дејствује нека спољња сила, — на пр. он је затегнут дуж свог обода. Код мембране долазе у обзир, дакле, напони који су резултат дејства ових сила. Код плоча међутим, као и код шипке, играју већ улогу величине које зависе од материјала: модуо еластичности и торзије и густина. „Мембрана“ телефона је према овој терминологији, плоча. Мембрана, било цела било један њен део, треба

да буде учвршћена да би она могла да трепери, овом чињеницом одређени су гранични услови, који код плоче могу да се мењају: може да буде обод учвршћен (потпуно или делимично) или слободан итд.. Код мембрана и плоча могу да наступе осцилације лонгитудиналне (у њиховој равни) и трансверзалне (нормално на равни, одн. на површини). Компликованије осцилације имаћемо у случају савијених плоча, на пр. звона.

Ограничићемо се на извођење диференцијалне једначине равне мембране. Нека буде δ њена дебљина свугде иста, а P напон такође свугде исти. Раван мембране, која је дуж обода учвршћена, нека буде раван xy, а z растојање површинског елемента $dx\,dy$ од ове равни, када је мембрана испупчена. Пустимо ли је затим да осцилује, биће $z = z(x, y, t)$. Слично жици, у равни паралелној са равни yz (в. извођење једначине 34) дејствује резултанта $P\delta\, dx \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} dy$ правцем z-осе, а у равни xz : $P\delta\, dy \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} dx$. Зато је резултанта сила које дејствују на елемент мембране $\rho\delta\, dx\, dy$ (ρ је густина)

$$P\delta\, dx\, dy \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right).$$

Његово убрзање у правцу z-осе је $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$ и, по Њутнову закону, а после скраћивања добивамо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\rho}{P} \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{48}$$

Тражена функција z, која карактерише мале осцилације мембране, треба да буде решење ове парцијалне диференцијалне једначине, уз граничан услов : $z = 0$ дуж обода мембране (z је коначно на слободном делу) и уз услове у почетку кретања: за $t = 0$, $z = \eta(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial t} = \beta(x, y)$.

Као и код жице решење једначине (48) тражи се у облику производа

$$z(x, y, t) = w(x, y)\, g(t). \tag{49}$$

Ставимо ли овај израз у једначину (48), добићемо да је

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) : \frac{\rho}{P} w = g'' : g = -\lambda^2,$$

где је заједничка вредност ових двају количника означена са $-\lambda^2$. Дакле је

$$g'' + \lambda^2 g = 0$$

и

$$g = e^{i\lambda t}. \tag{50}$$

Ставимо ли

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \Delta w\,, \quad \kappa = \lambda \sqrt{\frac{\rho}{P}}\,, \tag{51}$$

имаћемо за функцију w једначину

$$\Delta w + \kappa^2 w = 0 \tag{52}$$

и гранични услов $w = 0$ дуж обода мембране. Решења ове једначине која задовољавају и гранични услов (карактеристичне функције) постоје, но само за дискретни низ вредности κ_n (карактеристични бројеви). Врста ових функција зависи од облика обода мембране. Општа решења (49) добивају се и у овом случају у облику редова у којима се такође р појављују тригонометриске функције времена.

Осцилације мебране добивају се, дакле, суперпозицијом низа осцилација разних облика. Сличан, но компликованији је случај, плоче за коју функција z задовољава диференцијалну једначину четвртог реда. У оба случаја постоји на површини у сваком тренутку фамилија чворних линија чије тачке мирују, а трепере делови мембране и плоче између њих (Chladni-јеве фигуре).

О неким звучним изворима говорићемо пошто проучимо простирања звука.

§ 12.4 Таласна једначина. Простирање звука. У претходним параграфима задржали смо се на осцилацијама тела код којих играју улогу једна или две димензије, а сада ћемо прећи на случај осцилација у непрекидној средини, узимајући у обзир све три димензије. Ту ћемо у исти мах наћи одговор и на питање о начину простирања звука.

Мале осцилације у неком еластичном телу су кретања која задовољавају једначину (61) § 11.3 :

$$\rho \mathfrak{F} + G\left\{\Delta \mathfrak{s} + \frac{m}{m-2}\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{s}\right\} = \rho\,\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2}$$

ако је $\mathfrak{s}$ померање неке тачке. Посматрајмо случај када нема спољњих сила, тј. када је $\mathfrak{F} = 0$, и уведимо Ламеове константе (в. § 11.3)

$$\mu = G = \frac{mE}{2(m+1)}\,, \quad \lambda = \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\,.$$

Тада можемо претходну једначину написати у облику.

$$\rho\,\frac{\partial^2 \mathfrak{s}}{\partial t^2} = \mu\,\Delta \mathfrak{s} + (\lambda + \mu)\,\mathrm{grad}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{s}\,. \tag{53}$$

Нека буду

$$\mathrm{div}\,\mathfrak{s} = \Theta\,, \qquad \mathrm{rot}\,\mathfrak{s} = 2\mathfrak{w}\,. \tag{54}$$

Применимо операције div и rot на једначину (53) и узмимо у обзир да се може променити ред парцијалног диференцирања по времену и координатама, и да је div grad $\Theta = \Delta\Theta$ а rot grad $\Theta = 0$. И добићемо две једначине

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}\Delta\Theta\,, \quad \frac{\partial^2\mathfrak{w}}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\rho}\Delta\mathfrak{w}\,. \tag{55}$$

Дакле Θ и $\mathfrak{w}$ су решења парцијалне диференцијалне једначине облика

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = c^2\Delta\chi\,, \tag{56}$$

где χ може бити скалар Θ или вектор $\mathfrak{w}$, а множитељ c^2 има различите вредности у првом, одн. у другом случају.

Уопште је $\chi = \chi(x, y, z, t)$. Узмимо специјалан случај да χ зависи само од једне координате, на пр. од x. Једначина (56) имаће онда облик

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2}\,. \tag{57}$$

Опште решење ове једначине има облик

$$\chi = f_1(x - ct) + f_2(x + ct)\,, \tag{58}$$

где f_1 и f_2 могу бити произвољне функције, а тачност ове чињенице потврђује се непосредном сменом χ у једначини (56). Најважнија су периодичка решења, на пр.

$$\chi = a\sin\kappa(x \pm ct)\,, \quad \chi = a\cos\kappa(x \pm ct)\,.$$

Уочимо сад распоред вредности функције $\chi = f_1(x - ct)$ у извесном тренутку $t = t_0$. Вредности χ зависе од x, дакле мењају се дуж ове осе. У исти мах χ имају у којој било равни ($x = x_0$) паралелној Oyz, у свима тачкама, исту ону вредност као и на пресеку са x-осом. За идући тренутак $t_1 > t_0$ исту вредност имаће функција χ на растојању $x_1 > x_0$, јер мора бити $x_1 - ct_1 = x_0 - ct_0$. Дакле, померају се вредности функције χ дуж x-осе а уједно, према томе, и с једне од поменутих равни на другу. Брзина, чији је модуо $\frac{dx}{dt} = c$, усмерена је позитивно. Супротни смер оваквих померања биће за функцију $f_2(x + ct)$. Појава коју карактерише горњи облик функције χ зове се равански талас. Он се простире правцем x-осе а свака од поменутих равни зове се таласна раван. Таласе других облика проучићемо доцније.

Ако се вратимо величинама Θ и $\mathfrak{w}$ и претпоставимо да померање $\mathfrak{s} = u\mathfrak{i} + v\mathfrak{j} + w\mathfrak{k}$ зависи само од координате x, имаћемо,

$$\Theta = \frac{\partial u}{\partial x}\,, \quad 2\mathfrak{w} = -\frac{\partial w}{\partial x}\mathfrak{j} + \frac{\partial v}{\partial x}\mathfrak{k}\,.$$

Како је сад Θ решење једначине (57), у специјалном случају

$$\Theta = a \sin \kappa (x - ct) \ ,$$

добићемо интеграљењем

$$(59) \qquad u = A \cos \kappa (x - ct) \ , \qquad c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \ .$$

Кад би се осцилације у непрекидној средини свеле само на оваква померања паралелна x-оси, тј. у правцу простирања таласа, овај би се звао *лонгитудинални* талас. Ако сам вектор $\mathfrak{w}$ задовољава другу од једначина (55), задовољаваће и свака његова компонента понаособ. Зато ћемо у нашем специјалном случају имати на пр.

$$-\frac{\partial w}{\partial x} = b' \sin \kappa (x - c_1 t), \quad \frac{\partial v}{\partial x} = b \sin \kappa (x - c_1 t) \, .$$

Одавде добивамо интеграљењем

$$(60) \qquad v = B \cos \kappa (x - c_1 t), \quad w = B' \cos \kappa (x - c_1 t), \quad c_1 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \, .$$

Талас у којем се померања врше у равни нормалној на правцу простирања зове се *трансверзални* (попречни); брзина његова простирања (c_1) разликује се од брзине простирања лонгитудиналног таласа.

До ових закључака дошли смо полазећи од једначине (53), која важи за еластична тела (чврста). Значи, у средини ове врсте као и у вискозним течностима могући су и лонгитудинални и трансверзални таласи. Ако упоредимо тензоре унутрашњих напона код идеалне течности (33) § 11,1 и еластичног тела (58) § 11.3, видимо да се први добива из другог, кад се стави да је $G = \mu = 0$. А тада ће бити и $c_1 = 0$, тј. у идеалним течностима могу се простирати само лонгитудинални таласи. Једначина (56):

$$(56) \qquad \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2} \right)$$

зове се *таласна* једначина*), јер извесна њена решења дају таласе, од којих смо досада имали само равански талас.

Да видимо сад друго специјално решење, које одговара *сферном* таласу. Претпоставимо да је $\chi = \chi(r, t)$, где је $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ растојање од координатног почетка O и трансформишимо израз $\Delta\chi$:

$$\Delta\chi = \operatorname{div} \operatorname{grad} \chi = \operatorname{div} \chi_r' \frac{\mathfrak{r}}{r} = \chi_r'' + \frac{2}{r} \chi_r' \ **)$$

---

*) једначине (34), (47) и (48) специјални су случајеви таласне једначине (56).

**) због $\operatorname{div}(\varphi \mathfrak{r}) = \varphi \operatorname{div} \mathfrak{r} + \mathfrak{r} \operatorname{grad} \varphi$, $\operatorname{div} \mathfrak{r} = 3$, $\operatorname{grad} \chi = \chi_r' \operatorname{grad} r = \chi_r' \mathfrak{r}_0$.

Дакле имамо

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial \chi}{\partial r}\right). \tag{61}$$

Сменом

$$\chi(r,t) = \frac{\vartheta(r,t)}{r} \tag{62}$$

добићемо да је ϑ решење једначине

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial r^2}. \tag{63}$$

Како је ова истог облика као и једначина (57), мењајући само ознаке у обрасцу (58) можемо овако написати опште изразе за функције ϑ и χ:

$$\vartheta = f_1(r - ct) + f_2(r + ct), \tag{64}$$

$$\chi = \frac{1}{r}\left[f_1(r - ct) + f_2(r + ct)\right]. \tag{65}$$

Функције f_1 и f_2 могу опет да зависе на произвољан начин од означених аргумената. У сваком тренутку $t = t^*$ ма на којој лопти полупречника $r = r^*$ са средиштем O, имамо за све њене тачке исте вредности функције χ или ϑ. Видимо уједно да се вредности функције $f_1(r - ct)$ померају у простору, јер у тренутку $t^* + \Delta t$ оне ће бити на лопти полупречника $r^* + \Delta r$, ако ставимо да је

$$\Delta r = c\Delta t. \tag{66}$$

Одавде следује да се *сферни талас* који описује периодичка функција f_1 простире брзином c од средишта.*) Од нарочитог интереса су чисто периодичка решења; на пр.

$$\begin{aligned} \vartheta &= a\cos\kappa(ct - r) = a\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{c}\right) = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right), \\ \chi &= \frac{a}{r}\cos\kappa\left(ct - r\right). \end{aligned} \tag{67}$$

У свакој тачки величине ϑ и χ врше хармониске осцилације; само, док је амплитуда a функције ϑ свугде иста, амплитуда $\left(\frac{a}{r}\right)$ функције χ опада са удаљењем од заједничког средишта лопти.

*) Функција $f_2(r + ct)$ даје талас који се простире ка средишту.

Три израза, које смо написали за функцију ϑ, постају еквивалентни ако се стави

$$\kappa c = \frac{2\pi}{T}, \qquad cT = \lambda\,.^{*)} \tag{68}$$

T—периода осцилација зове се *периода таласа*. Ако пођемо од неке тачке M дуж зрака OM, имаћемо у извесном тренутку, на растојањима $n\,.\,cT$ (n цео број), исте вредности за функцију ϑ (67). Растојање λ између две најближе овакве тачке зове се *таласна дужина*. За време T простире се, дакле, талас на растојање λ. Графички се може талас (67) претставити косинусоидом у равни (t, ϑ) или у равни (r, ϑ).

Од најпростијих хармониских осцилација може се прећи на општи случај таласа

$$\vartheta = f_1(r - ct)\,, \tag{69}$$

ако се ова периодичка функција растави у Фурјеов ред, према обрасцу (12), где ће се место аргумента t појавити у том случају $ct - r$ (или $ct - x$ за равански талас). Произвољни талас настаје, дакле, суперпозицијом једног, основног, и делимичних (виших) са разним таласним дужинама.

Поред раванског и сферног таласа лако се може анализовати и случај цилиндричног таласа.

Проучимо још једно решење специјалног облика, наиме случај оваквих раванских таласа (58):

$$\chi = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) \tag{70}$$

тј. суперпозицију двају таласа исте периоде, једнаких амплитуда, но супротних смерова простирања (закључци ће важити и за функцију ϑ слична облика, в. обр. (64) и (67)). По извршеној трансформацији добивамо

$$\chi = 2a\cos 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\,. \tag{71}$$

У тачкама $x = \frac{\lambda}{4}(2n-1)$, где је n цео број, увек је $\chi = 0$. Ове тачке, *чворови*, не померају се у простору; то је случај т.зв. *стојног* таласа. Растојање између чворова једнако је $\frac{\lambda}{2}$.

Звук се, као таласно кретање, простире у телима разних агрегатних стања, а брзина простирања зависи од ових стања (в. обр. (59) и (60)).

*) Са λ на почетку параграфа означена је и Lamé-ова константа, али исте ознаке за ове величине свугде су се одомаћиле.

Три израза, које смо написали за функцију ϑ, постају еквивалентни ако се стави

$$(68) \qquad \kappa c = \frac{2\pi}{T}, \qquad cT = \lambda\,.^{*)}$$

T—периода осцилација зове се *периода таласа*. Ако пођемо од неке тачке M дуж зрака OM, имаћемо у извесном тренутку, на растојањима $n\,.\,cT$ (n цео број), исте вредности за функцију ϑ (67). Растојање λ између две најближе овакве тачке зове се *таласна дужина*. За време T простире се, дакле, талас на растојање λ. Графички се може талас (67) претставити косинусоидом у равни (t, ϑ) или у равни (r, ϑ).

Од најпростијих хармониских осцилација може се прећи на општи случај таласа

$$(69) \qquad \vartheta = f_1(r - ct)\,,$$

ако се ова периодичка функција растави у Фурјеов ред, према обрасцу (12), где ће се место аргумента t појавити у том случају $ct - r$ (или $ct - x$ за равански талас). Произвољни талас настаје, дакле, суперпозицијом једног, основног, и делимичних (виших) са разним таласним дужинама.

Поред раванског и сферног таласа лако се може анализовати и случај цилиндричног таласа.

Проучимо још једно решење специјалног облика, наиме случај оваквих раванских таласа (58):

$$(70) \qquad \chi = a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + a\cos 2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right)$$

тј. суперпозицију двају таласа исте периоде, једнаких амплитуда, но супротних смерова простирања (закључци ће важити и за функцију ϑ слична облика, в. обр. (64) и (67)). По извршеној трансформацији добивамо

$$(71) \qquad \chi = 2a\cos 2\pi\frac{t}{T}\cos 2\pi\frac{x}{\lambda}\,.$$

У тачкама $x = \frac{\lambda}{4}(2n-1)$, где је n цео број, увек је $\chi = 0$. Ове тачке, *чворови*, не померају се у простору; то је случај т.зв. *стојног* таласа. Растојање између чворова једнако је $\frac{\lambda}{2}$.

Звук се, као таласно кретање, простире у телима разних агрегатних стања, а брзина простирања зависи од ових стања (в. обр. (59) и (60)).

*) Са λ на почетку параграфа означена је и Lamé-ова константа, али исте ознаке за ове величине свугде су се одомаћиле.

Ако се зауставимо на случајевима течности и гасова, имаћемо лонгитудиналне таласе.

Да бисмо нашли брзину простирања ових таласа, напишимо приближне једначине за мале осцилације у течности, сматрајући да се брзине делића толико мало мењају да члан $(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v}$ у изразу $\frac{d\mathfrak{v}}{dt}$ (види извођење Ојлерових једначина (40) § 11.1) можемо занемарити, — и да вредност густине ρ осцилује у свакој тачки око средње вредности ρ_c.

Не обазирући се ни овде на спољње силе ($\mathfrak{F} = 0$), имаћемо место једначине (35) § 11.1

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\,. \tag{72}$$

Ставимо ли још

$$\rho = \rho_c(1 + \sigma)\,, \tag{73}$$

где је $\sigma = \sigma(x, y, z, t)$ мала величина, и занемаримо ли у једначини (37) § 11.1 чланове вишег реда, добићемо

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \operatorname{div}\mathfrak{v} = 0\,; \tag{74}$$

а из једначина (74) и (72) следује

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \operatorname{div}\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p\,. \tag{75}$$

Густина је функција притиска те, обрнуто, можемо, због услова (73), ставити $p = \varphi(\sigma)$ и $\operatorname{grad} p = \varphi' \operatorname{grad}\sigma$. За изотермичке и адијабатске појаве важе закони (§ 14 и (41) § 16)

$$p = \frac{p_c}{\rho_c}\rho = p_c(1 + \sigma) \quad \text{(Boyle-Mariotte-ов закон)}$$

$$p = p_c\left(\frac{\rho}{\rho_c}\right)^{\gamma} = p_c(1 + \sigma)^{\gamma} = p_c(1 + \gamma\sigma)\,,$$

где смо са p_c означили средњу вредност притиска, а са $\gamma = c_p : c_v$ — количник специфичких топлота при сталном притиску, одн. запремини. Ови обрасци дају

$$\varphi' = p_c \quad \text{или} \quad \varphi' = p_c\gamma\,,$$

и, ако се у једначини (75) стави ρ_c место ρ, добива се таласна једначина

$$\frac{\partial^2 \sigma}{\partial t^2} = \alpha^2 \operatorname{div}\operatorname{grad}\sigma = \alpha^2 \Delta\sigma\,. \tag{76}$$

Брзина простирања таласа биће

$$\alpha = \sqrt{\frac{p_c}{\rho_c}} \text{ (Њутнов образац)}, \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma p_c}{\rho_c}} \text{ (Лапласов образац)}.$$

Први даје брзине које се подударају са експериментима са течностима, но он не важи за ваздух. Други даје за ваздух $\gamma = 1{,}14$ и $\alpha = 333{,}2 \frac{m}{sec}$ — дакле вредност скоро једнаку експерименталној.*)

Таласну једначину извели смо из претпоставке да су амплитуде осцилација мале. Има међутим појава, на пр. при експлозији, кад овај степен апроксимације није довољан. У таквим случајевима треба поћи од других, компликованијих једначина. Исто ово важи и када се узимају у обзир унутрашње трење у течностима или гасовима, које је иначе врло мало, или трење на њиховим заједничким границама са чврстим телима.

Увођењем нових услова о простирању звука долази се, теориским путем, до објашњења читавог низа познатих појава: 1) кад се звучни извор приближује посматрачу тон се осећа као виши (када се извор удаљује — као нижи) — *Доплеров принцип*; 2) појава одбијања; 3) преламања звука; 4) дифракција. Но на овима се овде нећемо заустављати.**)

Питање звучних тродимензионалних извора, као постанак звука и осцилације ваздуха у свиралама разних облика, своди се такође на решавање таласне једначине, коју треба да задовољи величина која служи за описивање појаве, на пр. потенцијал брзина, но при том треба узимати у обзир разне граничне услове, као на пр. услов да нормална компонента брзине на зидовима свирале треба да буде једнака нули, или услове на отворима итд.***)

---

*) треба само имати у виду поправку због утицаја температуре.

**) види на пр. *H. Backhaus*: Schwingungen räumlich ausgedehnter Kontinua у Handbuch d. Physik B. VIII. Akustik. Berlin 1927.

***) види чланак *A. Kalähne*: Schallerzeugung mit mechanichen Mitteln. Hdb. d. Physik. B. VIII.

ГЛАВА III

ТОПЛОТА

У Математичко-физичкој акустици, са чијим смо се основама упознали у претходној глави, теорија оперише са појмовима Механике полазећи од основне чињенице да се постанак звука (ван бића које га осећа) и његово простирање своди на осцилаторна кретања. У другим гранама Физике треба одмах од почетка увести нове појмове и нове аксиоме — чињенице карактеристичне за појаве те врсте, појмове које у претходним гранама још нису били потребни.

§ 13 Основне чињенице и величине. При додиру са разним телима можемо осетити разлике у њиховим стањима која карактеришемо речима: хладно, млако, врућe итд. Ова стања зовимо *топлотна стања* а особину тела (која, наравно, не зависи од наших осећаја) — *топлотом.* Проучавањем ове особине, као и закона којима се покоравају њене промене итд. бави се Теорија топлоте.

Низ питања из Теорије топлоте налази одговор при феноменолошком проучавању, кад се из основних чињеница, без накнадних хипотеза о структури материје, изводе закључци математичким путем. Такав је део Теорије топлоте који се зове теорија провођења топлоте. Али се велики део Теорије топлоте обрађује на основи атомске хипотезе.

Прва чињеница. Ако се систем тела чија су топлотна стања била различита обухвати покривачем — телом чије се топлотно стање не мења и које *не пропушта* топлоту, после извесног времена можемо да констатујемо да се сва тела у унутрашњости налазе у истом топлотном стању. Дакле, топлотна се стања мењају и, под извесним околностима, теже изједначењу с обзиром на ону особину која се примећује при додиру. Ову чињеницу објашњавамо претпоставком да се врши *преношење* топлоте.

Друга чињеница. Као што показују експерименти, постоје три начина преношења топлоте, који се зову: *радијација, конвекција* и *провођење.*

Разликујемо тела хомогена и нехомогена, изотропна и анизотропна. За низ нехомогених тела важи још и *трећа чињеница* (ако се искључе извесне хемиске, радиоактивне и др. појаве): *унутрашње* стање тела не мења се или се врло мало мења, ако променимо запремину тела или његово топлотно стање. Смисао ове чињенице, коју је тешко прецизирати и за коју је тешко поставити све могућне границе у којима важи, лежи у томе да скуп особина тела, на пр. механичких, који чини његово „унутрашње" стање не губи своје карактеристичне одлике при уоченим променама. Ниже ћемо се упознати и са низом појава чији је ток друкчији.

Ако је дошло до изједначења стања тела у систему, другим речима, ако се овај систем налази у *равнотежи,* и ако ставимо између два дела бесконачно танку преграду која такође не пропушта топлоту, стање се неће променити ни у једном делу. Дакле, према овој *четвртој чињеници* можемо, стављајући претходно поменуту преграду, отстранити један део, и стање другог се неће променити. Приближно стање тела у некој тачки зависи само од најближе околине.

За одређивање топлотног стања потребно је да се уведу величине које га могу карактерисати. Промену извесне особине тела која је везана за промену топлотног стања узимамо прво за основу мерења. Познато је из експеримената да се при загревању тела уопште његова запремина повећава (*пета чињеница,* изузетак: вода у размаку од 0—4°C). Узимајући у обзир прву и пету чињеницу можемо „конструисати" (теориски — замислити) справу чије ће промене запремине послужити за карактеристику топлотног стања — термометар. Величина која се јавља као резултат оваквог мерења топлотног стања, а која даје извесну поступност у стањима зове се *температура* (по Целзиусу: 0° у леду који се топи, 100° — у води која ври под ваздушним притиском од 760 *mm*; — 273°,2 — тачка која се зове *апсолутна нула,* најзад, *апсолутна температура* је она температура која се мери од ове тачке). При конструкцији термометра са живом, и уопште са течностима мери се дужина стуба живе; у основи овога лежи, дакле, претпоставка да је та дужина пропорционална температури. Међутим, са овим начином је скопчана једна тешкоћа, јер запремина тела није линеарна функција температуре. Зато се, за тачнија мерења температуре, узима у обзир друга особина, која се појављује код гасовитих тела: повећање притиска при константној запремини, које је везано за повишавање температуре (гасни, хелијумов термометар). Притисак није увек иста функција запремине (*шеста чињеница,* која ће даље играти улогу при постављању т.зв. карактеристичне једначине). Према првој чињеници, два

тела (система) која су у почетку имала разне температуре (T_1, T_2), имаће после извесног времена, за које се вршило преношење топлоте, исту температуру T_3. Али температура није сама довољна за карактеристику топлотног стања. Ако се неколико разних тела исте масе, загрејаних до исте температуре, доведу у додир са другим телима једнаких стања (на пр. спуштају се стално у исту количину воде, загрејану до одређене температуре, различите од њихове), после успостављања стања равнотеже њихове ће температуре бити различите (*седма чињеница*). Ако пак загревамо неку масу, па затим под истим околностима загревамо двоструку, троструку итд. масу, видећемо да је потребно два, три итд. пута више времена него ли у првом случају, да би се ове масе загрејале до исте температуре (*осма чињеница*). Последње две чињенице могу се растумачити тиме што се сматра да са једног тела на друго прелази извесна *количина топлоте*. У овоме претпостављамо осим тога да се при изједначавању температура двају тела *одржава општа количина топлоте* (I *претпоставка*).

Означимо са ΔQ количину топлоте коју маса m добива када се температура ϑ повећава за $\Delta\vartheta$. Између количине топлоте ΔQ и температуре $\Delta\vartheta$ могли бисмо поставити произвољну везу, али се показује за многе проблеме Теорије топлоте као довољна линеарна веза.

Ставимо на основи овога и поменуте две чињенице да је (II *претпоставка*)

$$\Delta Q = c m \Delta\vartheta \ , \tag{1}$$

где је коефицијент пропорционалности c константа, која зависи од врсте материје. Тај коефицијент се зове *специфичка топлота* и једнак је количини топлоте, потребној да се маса од 1 gr. уочене супстанције загреје за 1^0. Тачнија мерења показују да је специфичка топлота функција температуре и, специјално у случају гасова, зависи и од других величина, на пр. од запремине и притиска.

Количина топлоте је друга величина потребна за карактеристику топлотног стања тела. За свако тело је, дакле, везана извесна количина топлоте. За јединицу количине топлоте узима се она која је потребна да се 1 грам воде загреје од 14.5^0 до 15.5^0C и зове се *мала* или *грам-калорија* (за друге температуре количина топлоте која служи за загревање исте количине воде за 1^0 мало се разликује од ове). Велика калорија је једнака 1000 малих.

§ 13.1 Провођење топлоте. Од три начина преношења топлоте проучићемо прво провођење, које се према експерименталним подацима констатује у телима или при додиру разних тела, при чему се види да температуре разних делова једног тела, одн. разних тела, теже да се изједначе. Топлота се преноси од места са вишом температуром ка месту

са нижом температуром (*девета чињеница*).*) И како је ова појава слична току течности, то се и до данас задржала терминологија која води порекло од хипотезе да је топлота нека врста супстанце, без тежине, која се налази у сваком телу. Звали су је флогистон. При провођењу она тече из једног тела у друго и, када нема нових извора количина топлоте које бисмо могли уочити, она се не ствара и не губи. Зато девету чињеницу формулишемо овако: топлота тече од топлијег места ка хладнијем. Према првој претпоставци њена општа количина остаје иста.

У сваком телу имамо поље температуре, јер она се уопште мења од једне тачке до друге, а зависи наравно и од времена. Дакле температура је $\vartheta = \vartheta(\mathfrak{r}, t)$; ако је $\mathfrak{r}$ вектор положаја уочене тачке, или $\vartheta = \vartheta(x, y, z, t)$. Поред еквипотенцијалних, тј. *изотермних* површина уочимо вектор

$$\mathfrak{v} = -\kappa \operatorname{grad} \vartheta \tag{2}$$

који ћемо звати *ток топлоте*. За изотропно тело сматраћемо да је κ скалар, за анизотропно κ је симетрични тензор. Нека буде df површински елемент ма у којој тачки тела и $\mathfrak{n}$ правац нормале на њему. Означимо управљени површински елемент са $d\mathfrak{f} = df\,\mathfrak{n}$, са $\frac{dq}{dt}$ количину топлоте која протиче у јединици времена кроз елемент df, и претпоставимо да је

$$\frac{dq}{dt} = -\kappa(\operatorname{grad}\vartheta\, d\mathfrak{f}) = (\mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}) \tag{3}$$

(заједно са претпоставком о природи величине κ — III *претпоставка*). У изотропном телу топлота тече, дакле, у правцу $\operatorname{grad}\vartheta$ и, као што се лако види из једначине (3), модуо тока топлоте даје ону количину топлоте која у јединици времена протече кроз јединицу изотермне површине. Скалар κ зове се *коефицијент проводљивости*.

Нека буде F површина која обухвата запремину V, уопште произвољну, у унутрашњости тела. Ако је $d\mathfrak{f}$ усмерено у правцу спољње нормале $\mathfrak{n}$, количина топлоте која утиче у запремину V за јединицу времена услед провођења биће

$$Q_1 = -\int_F \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}\,. \tag{4}$$

Да бисмо обухватили општији случај, претпоставимо да се у запремини V може стварати топлота (на пр. хемиским или електричним путем). Означимо ли са q^* количину топлоте, израчунату за јединицу

*) Clausius-ов постулат (први део).

времена и јединицу запремине, која одговара овом начину. Укупна количина топлоте која ће се појавити у запремини V биће тада

$$Q = Q_1 + \int_V q^* \, dV ,$$

или, пошто се израз (4) по Гаусовој теореми може претворити у запремински интеграл,

$$Q = \int_V (q^* - \operatorname{div} \mathfrak{v}) \, dV . \tag{5}$$

Претпоставимо да доведена топлота иде искључиво на повишење температуре (IV *претпоставка*) и израчунајмо везу између њих. Доводи ли се за јединицу времена у елемент запремине dV количина топлоте dQ, за време dt она ће бити $dQ\,dt$ и, ако је ρ густина, а маса тог елемента $m = \rho \, dV$, c специфичка топлота и $d\vartheta$ одговарајућа промена температуре, биће, према обрасцу (1):

$$dQ\,dt = c \rho \, dV \, d\vartheta .$$

Означимо са $\frac{\partial \vartheta}{\partial t}$ промену температуре у јединици времена, јер се положај делића при уоченој појави не мења, па ћемо имати

$$Q = \int_V dQ = \int_V c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} dV = \int_V (q^* - \operatorname{div} \mathfrak{v}) \, dV .$$

Како су последња два интеграла једнака ма за какву запремину, мора бити

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = q^* + \operatorname{div} (\kappa \operatorname{grad} \vartheta) , \tag{6}$$

где смо сменили вектор $\mathfrak{v}$ његовом вредношћу (2). Ако је тело изотропно, тј. ако је κ скалар, можемо написати једначину (6) у облику:

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = q^* + \kappa \operatorname{div} \operatorname{grad} \vartheta + (\operatorname{grad} \vartheta, \operatorname{grad} \kappa) . \tag{7}$$

Ако је κ константно, тело је хомогено и имамо

$$c\rho \frac{\partial \vartheta}{\partial t} = q^* + \kappa \Delta \vartheta . \tag{8}$$

Најзад, ако се зауставимо само на појави провођења, треба да ставимо $q^* = 0$. Означимо са $a^2 = \frac{\kappa}{c\rho}$ т.зв. *коефицијент проводљивости температуре.* Онда ћемо добити из једначине (8)

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \Delta \vartheta = a^2 \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial z^2} \right) . \tag{9}$$

Температура ϑ, као функција положаја и времена, мора за провођење топлоте у изотропном хомогеном телу, у којем се не ствара и не губи топлота, бити решење ове парцијалне диференцијалне једначине другог реда. Ова, Фурјеова једначина припада врсти параболичких једначина.

Али за одређивање функције ϑ у сваком конкретном проблему, тј. да би се видео начин провођења топлоте у неком датом телу, потребни су накнадни услови. Очевидно је да, пре свега, треба да знамо почетни распоред температура у телу, тј. вредност функције ϑ у свакој тачки за дати тренутак $t = t_0$ (*почетни* услов):

$$\vartheta(x, y, z, t_0) = F(x, y, z) , \tag{10}$$

где је F дата функција. А потребни су осим тога и *гранични* услови, тј. они који владају на површини додира двају тела или на слободној површини тела.

Ако се два тела, различитих температура ϑ_1 и ϑ_2, доведу у додир, на заједничкој површини наступиће скок температуре. Но после извесног времена, услед провођења, успоставиће се непрекидни распоред температуре, и на површини додира биће $\vartheta_1 = \vartheta_2$ (V *претпоставка* и први гранични услов). Претпоставимо да се на површини додира не ствара топлота и конструишимо на њеном елементу df бесконачно мали цилиндар чије ће основе лежати у првом, одн. у другом телу. Нека буду: $\mathfrak{n}$ јединични вектор спољње нормале првог тела, h висина цилиндра коју можемо узети тако да буде бесконачно мала величина којег било вишег реда, $\mathfrak{v}_1$ и $\mathfrak{v}_2$ токови топлоте у првом, одн. у другом телу. Количина топлоте која истиче из уоченог цилиндра, према обрасцу (4), дата је изразом $\int \mathfrak{v}\, d\mathfrak{f}$ а једнака је нули због учињене претпоставке. Како се протицање тока топлоте кроз омотач цилиндра може занемарити, остаће само протицање кроз основе, тј.

$$(\mathfrak{v}_1 d\mathfrak{f}_1) + (\mathfrak{v}_2 d\mathfrak{f}_2) = -(\mathfrak{v}_1 \mathfrak{n})\, df + (\mathfrak{v}_2 \mathfrak{n})\, df = 0 .$$

Ако су κ_1 и κ_2 коефицијенти проводљивости, имаћемо, дакле,

$$\kappa_1 (\operatorname{grad} \vartheta_1 \mathfrak{n}) = \kappa_2 (\operatorname{grad} \vartheta_2 \mathfrak{n}) \quad \text{или} \quad \kappa_1 \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = \kappa_2 \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} \tag{11}$$

тј. нормалне компоненте токова топлоте једнаке су на површини додира (други гранични услов).

На граници тела можемо даље разликовати услове две врсте: *природне* и *специјалне* који се, на пр., стварају у нарочитим експериментима. За прву врсту, када се уопште топлота кроз границу преноси провођењем и зрачењем шта више и конвекцијом, ако се чврсто тело налази у течности или гасу, не постоји егзактни закон, но се узима приближни — Њутнов. Количина топлоте коју површински елемент df губи (кад је температура спољњег простора ϑ_a нижа од температуре тела) за јединицу времена дата је изразом $\alpha(\vartheta - \vartheta_a)df$; α се зове *коефицијент спољње проводљивости*. Како нормална компонента тока топлоте даје ону количину топлоте која се преноси кроз јединицу површине, можемо ставити

$$\alpha(\vartheta - \vartheta_a) = -\kappa\frac{\partial\vartheta}{\partial n} \quad \text{или} \quad \alpha\vartheta = -\kappa\frac{\partial\vartheta}{\partial n}, \tag{12}$$

ако се температура мери од тачке ϑ_a (*десета чињеница*). Специјалне услове имаћемо, када се температура на граници одржава на неки начин као одређена функција положаја и времена, или када се регулише ток топлоте, тј. на граници је

$$\text{a)}\ \vartheta = \varphi(x, y, z, t) \quad \text{или} \quad \text{b)}\ \kappa\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = f(x, y, z, t). \tag{13}$$

Површина је *адијабатски изолована*, ако је

$$\kappa\frac{\partial\vartheta}{\partial n} = 0. \tag{14}$$

Зовимо *хомогеним условима* оне где сваки члан садржи температуру или њен извод, на пр. (12) и (14); услови облика (13) биће *нехомогени*.

Докажимо сада да једначина провођења топлоте (9), уз дате почетне и граничне услове, има једно решење. Дакле за потпуно решење проблема провођења топлоте у неком одређеном телу потребно је да знамо ове услове, поред, наравно, и оних под којима важи једначина (9). Слично формулисање проблема имамо и у другим гранама Теориске физике где се јављају парцијалне диференцијалне једначине.

Пре свега се лако види да, ако су ϑ_1 и ϑ_2 два различита решења која, поред диференцијалне једначине, задовољавају нехомогене услове (13), њихова разлика $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$ задовољава услов (14), а осим тога је за почетни тренутак $t = 0$, и $\vartheta = 0$, јер је онда $\vartheta_1 = \vartheta_2 = F(x, y, z)$ (10).

У Гринову обрасцу, (33) § 0.2,

$$\int_V W \triangle U dV + \int_V \operatorname{grad} W \operatorname{grad} U dV = \int_F W(\operatorname{grad} U d\mathfrak{f})$$

ставимо

$$W = \frac{\partial \vartheta}{\partial t}, \qquad U = a^2 \vartheta .$$

Због граничног услова (14) биће

$$\operatorname{grad} a^2 \vartheta \, df = a^2 \frac{\partial \vartheta}{\partial n} df = 0 .$$

Дакле је

$$\int_V \frac{\partial \vartheta}{\partial t} a^2 \Delta \vartheta \, dV + \int_V \operatorname{grad} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \operatorname{grad} a^2 \vartheta \, dV = 0 .$$

Или, због једначине (9) и трансформације:

$$\operatorname{grad} \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \operatorname{grad} \vartheta = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \vartheta)^2 ,$$

имамо

$$\int_V \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 dV + \frac{a^2}{2} \int_V \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{grad} \vartheta)^2 \, dV = 0 ,$$

а, после интеграљења по времену,

$$\int_0^t dt \int_V \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right)^2 dV + \frac{a^2}{2} \int_V (\operatorname{grad} \vartheta)^2 dV = 0 .$$

Како су интегранди позитивни бројеви мора бити

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0 , \qquad \operatorname{grad} \vartheta = 0 \quad \text{тј.} \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = \frac{\partial \vartheta}{\partial z} = 0 .$$

Дакле $\vartheta = \text{const.}$ и, како је у почетном тренутку она била једнака нули, увек је $\vartheta_1 = \vartheta_2$, тј. постоји само једно решење.

Једначина за провођење топлоте је линеарна и зато има следеће особине: 1) ако су ϑ_1 и ϑ_2 два њена решења која задовољавају исте хомогене граничне услове, на пр. (14), и функција $A\vartheta_1 + B\vartheta_2$, где су A и B произвољне константе, решење је једначине (9) уз услов (14); 2) опште решење (интеграл) једначине (9) за нехомогене граничне услове једнако је збиру њеног партикуларног интеграла за нехомогене граничне услове и општег решења за хомогене граничне услове.

Доказ првог става је очигледан; други се доказује овако. Узмимо да је

$$\frac{\partial \vartheta_1}{\partial t} = a^2 \Delta \vartheta_1 , \qquad \frac{\partial \vartheta_2}{\partial t} = a^2 \Delta \vartheta_2 \quad \text{и} \quad \kappa \frac{\partial \vartheta_1}{\partial n} = f , \qquad \kappa \frac{\partial \vartheta_2}{\partial n} = f .$$

Функција ϑ задовољава онда једначину (9) уз услов (14). Према томе, ако је ϑ опште решење једначине (9) уз хомогени гранични услов, и ако смо нашли партикуларни интеграл ϑ_1 уз нехомогени услов, $\vartheta_2 = \vartheta + \vartheta_1$ биће општи интеграл уз нехомогени услов.

§ 13.2 Специјални проблеми провођења топлоте. a) *Стационарно стање* имаћемо ако температура не зависи експлицитно од времена, тј. ако је $\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = 0$. Једначина (9) постаје под тим условом Лапласова

$$\Delta \vartheta = 0 , \tag{15}$$

и низ проблема провођења топлоте решава се уз дате граничне услове помоћу ове једначине. Као што ћемо даље видети, има проблема из других области Теориске физике који се своде на исто математичко формулисање. За упознавање са заједничким начином решавања овог низа проблема упућујемо на курсеве Математичке анализе (на пр. E. Goursat) где је излагању овога питања дато више места.

Овде ћемо се зауставити само на специјалном решењу једначине (15) које смо добили већ у § 0.4, образац (65), у општем облику. Узимајући у обзир то решење, можемо ставити у случају једног *извора* топлоте у који ћемо сместити координатни почетак

$$\vartheta = \frac{q}{4\pi k r} , \tag{16}$$

где је q константа, а k, као и раније, коефицијент проводљивости. Онда добивамо из образаца (65—69) § 0.4, а с обзиром на услове (2) и (4), где треба променити знак, да је q она количина топлоте коју даје извор за јединицу времена, т.зв. *издашност извора*. Изотермне површине $\vartheta = \text{const.}$ или, према обрасцу (16), $r = \text{const.}$ припадају фамилији концентричних лопти, а векторске линије у пољу тока топлоте $\mathfrak{v}$ су зраци који полазе од извора. Променом знака q добива се понор.

Ако имамо више извора чије су издашности q_i, вредност температуре у некој тачки M биће

$$\vartheta = \frac{1}{4\pi k} \Sigma \frac{q_i}{r_i} , \tag{17}$$

где смо са r_i означили њено растојање од i-тог извора. Још општија решења једначине (15) можемо наћи ако узмемо непрекидни низ извора дуж неке линије, на површини или у неком делу простора.

b) *Провођење топлоте кроз лопту.* Уочимо испочетка изотропну хомогену лопту у којој је температура функција само растојања од средишта и времена $\vartheta = \vartheta(r, t)$. Ово би био, на пр., случај извора у средишту лопте, у којој је испочетка био такав распоред температура и,

према томе, у свима тачкама на површини била једнака температура, или на пр. случај једнаког загревања или хлађења на целој површини, ако су усто изотермне површине у почетном тренутку биле лопте концентричне са површином тела. Фурјеова једначина (9) упрошћава се у овом случају слично таласној једначини (види обр. 61—63 § 12.4). Имамо

$$\Delta\vartheta = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vartheta = \frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial\vartheta}{\partial r}$$

и сменом

$$\vartheta(r,t) = \frac{1}{r}\theta(r,t) \tag{18}$$

долазимо до једначине

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial r^2}\,. \tag{19}$$

Потражимо партикуларни интеграл ове једначине у облику

$$\theta = \tau(t)\rho(r)\,. \tag{20}$$

Из једначине (19) добивамо

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{a^2}{\rho}\frac{d^2\rho}{dr^2}\,,$$

где су изводи постали обични, јер свака од функција τ и ρ зависи само од једне променљиве. Како сваки од два израза у претходној једначини може да зависи само од једне променљиве, и то лева страна од t а десна од ρ, ова једначина је могућна само онда, ако се ови изрази своде на једну константу. Означимо је са $-\lambda^2 a^2$, па ћемо имати

$$\frac{d\tau}{\tau} = -\lambda^2 a^2 dt\,, \qquad \frac{d^2\rho}{dr^2} + \lambda^2\rho = 0\,. \tag{21}$$

Одатле је

$$\tau(t) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\,, \tag{22}$$

а друга од једначина (21), која је исте врсте као и (3) § 12.1, одређује ρ као експоненцијалну или тригонометриску функцију од r.

Узмемо ли општији случај, када температура при провођењу топлоте кроз лопту зависи од три сферне координате r, φ, ψ и времена

$$\vartheta = \vartheta(r,\varphi,\psi,t)\,, \tag{23}$$

тада је потребно прво да нађемо израз за $\Delta\vartheta$ у овим координатама. Но ми ћемо ову трансформацију извести уопште за ортогоналне криволиниске координате.

Нека буду q_1, q_2, q_3 ортогоналне криволиниске координате (в. обр. (10) и даље у § 1)

$$x = f_1(q_1, q_2, q_3), \quad y = f_2(q_1, q_2, q_3), \quad z = f_3(q_1, q_2, q_3) \tag{24}$$

и $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$, $\mathfrak{q}_3$ јединични вектори у правцима дирки координатних линија. Лук сваке од ових линија ds_i можемо претставити помоћу управљеног вектора $d\mathfrak{s}_i$ и, како се дуж координатне линије мења само једна координата q_i, имаћемо

$$\begin{aligned} ds_i^2 &= \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial f_k}{\partial q_i}\right)^2 dq_i^2 = S_i^2 dq_i^2 , \\ d\mathfrak{s}_i &= ds_i \mathfrak{q}_i . \end{aligned} \tag{25}$$

Да бисмо нашли израз за $\Delta\vartheta = \operatorname{div}\operatorname{grad}\vartheta$ помоћу координата q_i, израчунајмо пројекције $\operatorname{grad}\vartheta$ на осе ортогоналног триједра $M\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3$ који мења своју оријентацију у простору са променом положаја тачке M за коју узимамо и сам вектор $\operatorname{grad}\vartheta$. Према познатом обрасцу (8) § 0.1 за прираштај скалара у неком правцу је: $d\vartheta = d\mathfrak{s}\operatorname{grad}\vartheta$, а узимајући у обзир обрасце (25), имаћемо

$$(\mathfrak{q}_i \operatorname{grad}\vartheta) = \frac{\partial\vartheta}{\partial s_i} = \frac{1}{S_i}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_i}, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{26}$$

Дивергенција неког вектора $\mathfrak{w}$, чије ћемо координате у триједру $M\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_3$ означити са w_1, w_2, w_3, дефинише се обрасцем (14) § 0.2 који се, за бесконачно мали паралелепипед конструисан на векторима $d\mathfrak{s}_i$, може написати у облику

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} = \frac{\int_F \mathfrak{w}\, d\mathfrak{f}}{V}, \qquad V = S_1 S_2 S_3\, dq_1\, dq_2\, dq_3 .$$

Израчунајмо протицање $\mathfrak{w}$ кроз површину паралелепипеда F, тј. кроз његове стране за које координате имају вредности q_i и $q_i + dq_i$; на пр. кроз страну $M\, d\mathfrak{s}_2\, d\mathfrak{s}_3$ биће протицање $-w_1\, ds_2\, ds_3 = -(w_1 S_2 S_3)_{q_1}\, dq_2\, dq_3$, а кроз супротну страну $(w_1 S_2 S_3)_{q_1+dq_1}\, dq_2\, dq_3$. Збир ова два протицања биће

$$\frac{\partial(w_1 S_2 S_3)}{\partial q_1}\, dq_1\, dq_2\, dq_3$$

и зато је израз за дивергенцију у криволиниским координатама:

$$\operatorname{div}\mathfrak{w} = \frac{1}{S_1 S_2 S_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}(w_1 S_2 S_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(w_2 S_3 S_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(w_3 S_1 S_2)\right\} \tag{27}$$

Стављајући $\mathfrak{w} = \operatorname{grad}\vartheta$ и узимајући у обзир обрасце (26) добивамо израз за $\operatorname{div}\operatorname{grad}\vartheta$:

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{S_1 S_2 S_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{S_2 S_3}{S_1}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{S_3 S_1}{S_2}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{S_1 S_2}{S_3}\frac{\partial\vartheta}{\partial q_3}\right)\right\}. \tag{28}$$

У случају сферних координата r, φ, ψ имаћемо, према обрасцима (24), (25) и (28)

$$x = r\sin\varphi\cos\psi\,, \qquad y = r\sin\varphi\sin\psi\,, \qquad z = r\cos\varphi\,;$$

$$S_1 = 1\,, \qquad S_2 = r\,, \qquad S_3 = r\sin\varphi\,; \tag{29}$$

$$\Delta\vartheta = \frac{1}{r^2\sin\varphi}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\sin\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial\psi}\left(\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial\vartheta}{\partial\psi}\right)\right\},$$

тако да, после једноставне трансформације, једначину (9) можемо написати у облику

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial t} = \frac{a^2}{r}\left\{\frac{\partial^2(r\vartheta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial\vartheta}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{r\sin^2\varphi}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial\psi^2}\right\}. \tag{30}$$

Потражићемо решење ове једначине у облику производа

$$\vartheta = \tau(t)\,\rho(r)\,Y(\varphi,\psi)\,. \tag{31}$$

Сменом у једначини (30) добивамо

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{a^2}{r\rho}\frac{d^2(r\rho)}{dr^2} + \frac{a^2}{r^2 Y}\left\{\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial Y}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 Y}{\partial\psi^2}\right\}. \tag{32}$$

Претпоставимо да је $Y = Y_n$ т.зв. *сферна* функција која је интеграл једначине

$$\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial Y_n}{\partial\varphi}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\psi^2} + n\left(n+1\right)Y_n = 0\,. \tag{33}$$

Онда ћемо, место једначине (32), имати

$$\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{dt} = \frac{a^2}{r\rho}\frac{d^2(r\rho)}{dr^2} - \frac{a^2 n(n+1)}{r^2}\,. \tag{34}$$

И, како лева страна може бити функција само времена, док десна зависи само од r, сваки од горња два израза мора бити једнак некој константи коју ћемо означити са $-\lambda^2 a^2$. Према томе добивамо поново прву од једначина (21) и за $\tau(t)$, дакле, израз (22), а други услов ће бити сад

$$\frac{d^2(r\rho)}{dr^2} + \left[\lambda^2 - \frac{n(n+1)}{r^2}\right]r\rho = 0\,. \tag{35}$$

Ако се стави

(36) $$\lambda r = h\,, \qquad \sqrt{h}\rho = J(h)\,,$$

једначина (35) се трансформише у диференцијалну једначину

(37) $$\frac{d^2J}{dh^2} + \frac{1}{h}\frac{dJ}{dh} + \left[1 - \frac{(2n+1)^2}{4h^2}\right]J = 0$$

чија су решења за разне вредности n — *Беселове* функције J_κ где је $\kappa = n + \frac{1}{2}$. Добићемо, дакле, и за функцију ρ из једначине (36) низ вредности ρ_n. У теорији Беселових функција доказује се да једначина $\rho_n(h) = 0$ има бескрајан низ реалних коренова λ_{nm} и онда је $\rho_n(\lambda_{nm} r)$ решење једначине (35).

У општем случају ставља се да је решење једначине (30) дато редом

(38) $$\vartheta = \sum_n \sum_m e^{-\lambda_{nm}^2 a^2 t} \rho_n(\lambda_{nm} r)\, Y_n$$

и произвољне константе које се уводе преко сферних функција треба одредити помоћу почетног услова: за $t = 0$ биће ϑ позната функција координата r, φ, ψ. Како за $r = 1$, $h = \lambda$ а $\rho_n(\lambda_{nm}) = 0$, решење које смо нашли задовољава гранични услов да је на површини лопте (чији ћемо полупречник узети за јединицу) температура константа и ова константа једнака нули.

c) *Провођење топлоте кроз шипку.* Проблем провођења топлоте упрошћава се у оним случајевима, када се температура може сматрати као функција само једне координате, на пр. x, јер онда место једначине (9) имамо

(39) $$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2}\,.$$

Такав би случај био провођење топлоте у жици или бескрајно танкој шипци чија је површина адијабатски изолована*). Ако је шипка права x ће бити праволиниска координата, но једначина (39) важиће и за случај криве шипке, под условом да се место координате x уведе лук криве s.

Овде ћемо детаљније проучити општији случај, када постоји губитак топлоте на омотачу шипке. Овај услов узећемо у обзир при извођењу диференцијалне једначине за провођење топлоте кроз шипку, јер ће он, у овом једнодимензионалном проблему, заменити услов прости-

*) Исту (39) једначину добивамо код провођења топлоте кроз бескрајно раширену хомогену и изотропну плочу, чије се обе стране одржавају на разним температурама но тако да је на истој страни свугде иста температура. Истог облика је и једначина (19).

рања топлоте у све три димензије. Сматрајмо, дакле, да је $\vartheta = \vartheta(x, t)$ и да је нормални пресек шипке f функција координате x, ако је шипка права. Уочимо бесконачно мали део шипке ограничен пресецима f и f_1 који леже на растојању dx. Његова запремина је $f dx$, а омотач је $l dx$ ако је l обим пресека f. Претпоставимо да су густина ρ, c и κ константе.

Кроз пресеке f и f_1 пролазе за време dt, услед провођења, количине топлоте које су, према обрасцу (3), дате изразима

$$-\kappa \frac{\partial \vartheta}{\partial x} f dt\,, \quad -\kappa \left\{ f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx \right\} dt\,,$$

ако се при развијању у ред другог протицања зауставимо на другом члану. Дакле, у уоченом елементу запремине остаје количина топлоте

$$\kappa \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) dx\, dt$$

а један део ове губи се на његову омотачу. Овај ће део, према Њутнову закону (види извођење једначине (12)), бити:

$$\alpha (\vartheta - \vartheta_a)\, l dx\, dt\,.$$

Количина топлоте која се доводи елементу шипке за време dt једнака је, према обрасцу (1), $c\rho f dx\, d\vartheta$.

Изједначимо ли добивене изразе, имаћемо

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \frac{\kappa}{\rho c f} \frac{\partial}{\partial x}\left(f \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right) - \frac{\alpha l (\vartheta - \vartheta_a)}{\rho c f}\,. \tag{40}$$

Ако је пресек шипке свугде исти и ϑ_a свугде исто, мерећи температуру од ове тачке ($\vartheta_a = 0$) имаћемо за постављени проблем једначину

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - b^2 \vartheta\,, \tag{41}$$

где смо означили

$$\frac{\kappa}{c\rho} = a^2\,, \quad \frac{\alpha l}{\rho c f} = b^2\,. \tag{42}$$

Једначина (41), у којој је члан $-b^2\vartheta$ заменио два последња члана једначине (9), може се, заменом

$$\vartheta = \theta e^{-b^2 t}\,, \tag{43}$$

свести на облик

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}\,. \tag{44}$$

За криву шипку поново ћемо имати једначину истог облика као и (41), само у њој треба сменити x луком криве s. Ако је ова крива затворена, тј. ако имамо прстен, температура мора бити периодичка функција дужине лука.

За стационарно стање $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t}=0\right)$ имаћемо обичну диференцијалну једначину

$$a^2 \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - b^2\vartheta = 0\,, \tag{45}$$

и означавајући $\frac{b}{a}=\beta$, имаћемо општи интеграл

$$\vartheta = C_1 e^{\beta x} + C_2 e^{-\beta x}\,, \tag{46}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе које треба одредити из граничних услова. Ако почетак лежи у $x=0$, а шипка се протеже до $x=\infty$ мора бити $C_1=0$ да не бисмо добили бесконачно високу температуру $C_2=\vartheta(0)$ ако са $\vartheta(0)$ означимо температуру у почетку. На растојању L биће

$$\vartheta(L)=\vartheta(0)\,e^{-\beta L}\,.$$

Одавде можемо израчунати количник

$$\frac{b}{a}=\beta=\frac{\ln\vartheta(0)-\ln\vartheta(L)}{L}\,,$$

ако мерењем нађемо и $\vartheta(L)$. Овај образац лежи у основи Депрецове методе за мерење релативног коефицијента проводљивости у односу на неки материјал, на пр. у односу на сребро. Од две шипке разних материјала друга се превуче танким слојем првог материјала како би имале исти коефицијент спољње проводљивости α. Како ће коефицијенти b због тога бити исти, мерењем температура добивамо из претходног обрасца $\frac{b}{a}$, $\frac{b}{a_1}$ и количник, дакле, $\frac{a}{a_1}$. Ова метода не даје довољну тачност, јер је α уствари променљива величина (она зависи од температуре).

Променом граничних услова долазимо до других вредности произвољних констаната: на пр. ако је шипка коначне дужине L, а на крајевима је $\vartheta(0)=0$, $\vartheta(L)=\vartheta^*$, биће, место једначине (46),

$$\vartheta=\vartheta^*\,\frac{e^{\beta x}-e^{-\beta x}}{e^{\beta L}-e^{-\beta L}}=\vartheta^*\,\frac{\sinh\beta x}{\sinh\beta L}\,.$$

Када температура шипке зависи од растојања (x) и времена она мора бити решење једначине (41) уз дате почетне и граничне услове. Претпоставимо да је у шипци дужине L, у почетном тренутку $t=0$, температура

$$\vartheta=F(x)\,. \tag{47}$$

Како је шипка танка, може се губитак топлоте на њеним крајевима занемарити, тј. у тачкама $x=0$, $x=L$ неће бити протицања и, због услова (13b), имаћемо

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial n}=\mp\frac{\partial\vartheta}{\partial x}=0 \tag{48}$$

за $x=0$, одн. за $x=L$.

Услед провођења температура ће се мењати и наш задатак је да нађемо функцију $\vartheta(x,t)$.

Ставимо

$$\vartheta=A\,e^{\gamma t+\delta x} \tag{49}$$

и потражимо оне вредности бројева A, γ и δ за које ће сви постављени услови бити задовољени. Сменом функције ϑ у једначини (41) долазимо пре свега до везе између бројева γ и δ

$$\gamma=a^2\delta^2-b^2\,. \tag{50}$$

Дакле, само један од ових бројева можемо изабрати произвољно. Да не бисмо добили израз за ϑ који неограничено расте са временом, јер температура у шипци мора имати коначне вредности, узећемо у обзир само негативне вредности константе γ, тј. ставићемо $\gamma=-\varphi^2$. Из услова (50) следује тада

$$\delta^2=\frac{b^2-\varphi^2}{a^2}\,. \tag{51}$$

Уопште може да буде $\gamma+b^2=b^2-\varphi^2\gtreqless 0$. До жељеног решења можемо доћи сматрајући да је $b^2-\varphi^2<0$, и онда ћемо ставити

$$\delta=\pm\,\delta_1\,i\,, \tag{52}$$

где је δ_1 реалан број. И тако се функција (49) може написати у облику

$$\vartheta=A\,e^{-\varphi^2 t}(\cos\delta_1 x\pm i\sin\delta_1 x)\,. \tag{53}$$

Лако је видети да коефицијент код i не задовољава први од граничних услова (48), док реални део израза (53) задовољава. Ставимо зато

$$\vartheta=A\,e^{-\varphi^2 t}\cos\delta_1 x \tag{54}$$

и одредимо вредност δ_1, за коју ће бити задовољен и други од граничних услова, тј.

$$\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial x}\right)_{x=L}=\left[-A\,\delta_1\,e^{-\varphi^2 t}\sin\delta_1 x\right]_{x=L}=0\,.$$

Из овог услова следује да постоји бескрајан низ вредности $\delta_\nu = \frac{\nu\pi}{L}$ ($\nu = 0, 1, \ldots, \infty$) и према томе бескрајан низ партикуларних решења једначине (41) уз задате граничне услове:

$$\vartheta_\nu = A_\nu e^{-b^2 t - \frac{a^2 \nu^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \frac{\nu \pi x}{L}, \tag{55}$$

где смо $-\varphi^2 = \gamma$ сменили изразом (50). Опште решење једначине (41) имамо сад у облику реда

$$\vartheta = \sum_0^\infty \vartheta_\nu . \tag{56}$$

Како још располажемо произвољним коефицијентима A_ν, изабраћемо их тако како бисмо задовољили почетни услов. Из једначина (56), (55), (47) за $t = 0$, имамо

$$\sum_0^\infty A_\nu \cos \frac{\nu \pi x}{L} = F(x) .$$

А да бисмо могли израчунати коефицијенте A_ν, треба да развијемо дату функцију $F(x)$ у Фурјеов ред и да изједначимо коефицијенте истих индекса. Из једначина (56) и (55) види се да сваки члан реда опада када t расте и то утолико брже уколико је веће ν. Зато је, после извесног времена $t = t_1$, довољно оставити само прва два члана. Ако се тада измере температуре на крајевима шипке, а то ће бити вредности $\vartheta(0, t_1)$ и $\vartheta(L, t_1)$, па се напишу изрази (56) са $\nu = 0$ и $\nu = 1$, добиће се две једначине са две непознате величине a и b. У овом се састоји F. Neumann-ова метода одређивања коефицијената проводљивости.

Ако променимо неки од услова под којим се врши провођење топлоте у шипци, добићемо наравно друго решење једначине (41). Претпоставимо на пр. да се на једном крају $x = 0$ веома дуге шипке температура периодички мења, услед загревања и хлађења. Онда ће се ова промена простирати у шипци као нека врста температурног таласа. Очевидно је да је у том случају потребно да у обрасцу (49) буде γ имагинаран број, јер ће температура постати периодичка функција времена. Ставимо $\gamma = \beta i$. Из услова (50) следује онда да је δ комплексни број: $\delta = \lambda + \mu i$ и

$$a^2 \lambda^2 + 2a^2 \lambda \mu i - a^2 \mu^2 - b^2 = \beta i .$$

Одвајајући реални од имагинарног дела, можемо наћи λ и μ као корене једначина $a^2(\lambda^2 - \mu^2) = b^2$, $2a^2 \lambda \mu = \beta$. Да би за $x \to \infty$ (бесконачно дуга шипка) температура ϑ остала коначна, треба да узмемо негативно решење за λ. Означимо га са $-\varkappa^2$. Онда ће бити и μ негативно, ако је β позитивно; ставимо $\mu = -\nu$ и

$$\vartheta = A e^{-\varkappa^2 x + (\beta t - \nu x) i}$$

или, ако се зауставимо на реалном делу овог решења,

$$\vartheta = Ae^{-\varkappa^2 x} \cos(\beta t - \nu x) .$$

Амплитуда осцилација температура бива са удаљењем од почетка шипке све мања.

d) *Температура површинског слоја планете.* Споменућемо као једну од важних примена теорије провођења топлоте одређивање температуре површинског слоја планета које имају чврсту кору. Ако се планета налази још у гасовитом или течном стању, температура површинског слоја је резултат: Сунчеве радијације, довођења топлоте из унутрашњости, — чију структуру као ни распоред температура у њој не знамо, — и, најзад, конвекције. Ако све ове услове морамо узети у обзир, проблем бива и сувише компликован. Међутим, ако планета има већ чврсту кору, конвекција у њој отпада и остаје само провођење топлоте. Осим тога, за довољно велике интервале времена топлотно стање се не мења осетно услед провођења из унутрашњости. За Земљу, на пр., имамо на дубини од 10 m слој константне температуре. Према томе, промене температуре треба проучавати само у танком спољњем слоју коре на чијој унутрашњој страни имамо овај прост гранични услов. На другим планетама је, наравно, дебљина овог слоја друкчија. Што се тиче услова на спољњој граници, можемо имати: 1) случај константне инсолације; на пр. на Меркуру који је стално истом страном окренут Сунцу и 2) периодичну инсолацију — код планета које имају периоде обртања око оса различите од периода обилажења око Сунца. По себи се разуме да морамо водити рачуна о томе да ли је планета обавијена атмосфером или не.

У случају када је инсолација периодичка функција времена, можемо се ограничити прво на питање вертикалног провођења. Ако означимо са x растојање од спољње површине планете, температура ће бити извесна функција $\vartheta(x, t)$, која мора бити решење једначине (39). Услов у почетку овде не игра улогу, јер се посматра периодичка појава која је почела одавно, тако да остају само гранични услови. Први од ових је $\vartheta = \text{const.}$ на извесној дубини $x = x_0$; облик другог услова зависи од природе функције која карактерише инсолацију. На првом кораку можемо ставити да је количина топлоте која се апсорбује за јединицу времена на спољњој граници проста периодичка функција $Q_1 = A_0 + A_1 \cos \frac{2\pi}{T} t$ (где су A_0 и A_1 константе). Осим тога до ове границе допире изнутра количина топлоте Q_2. Како услед зрачења планета губи количину топлоте Q_3 и при томе се успоставља равнотежа, имаћемо $Q_3 = Q_1 + Q_2$. Q_3 је дато Стефан-Болцмановим и Кирхофовим законима и ова једначина претставља други гранични услов. Слично претходном случају (треба само ставити да је b једнако нули) добива се решење као про-

извод експоненцијалне функције по x и периодичке (косинуса) која зависи од времена t и растојања x. Према томе, у површинском слоју планете имамо овакво простирање топлоте: на свакој дубини $x < x_0$ постоје осцилације температуре; амплитуда осцилација опада, кад x расте; осцилације задоцњавају, ако x расте, јер и фаза зависи од x.

Али је уопште веза између инсолације и времена компликованија и зато ће и други гранични услов бити компликованији од оних које смо раније поменули. Теорију ове појаве дао је М. Миланковић узимајући у обзир атмосферу планете, елиптичност њене путање, затим секуларне промене астрономских елемената Земљине путање, услед којих наступају и секуларне промене климе.

§ 14 Карактеристична једначина. У теорији кретања идеалне течности или флуидума потребно је било увести једначину (39) § 11.1 која карактерише уочено течно тело и даје везу између притиска p и густине ρ. У Теорији топлоте стање тела карактерише се помоћу три величине: притиска p, запремине V и температуре T (*претпоставка* VI); овде запремина замењује њој обрнуто пропорционалну густину. Очевидно је да ова претпоставка важи за она тела чији се унутрашњи напони одређују само једним скаларом. У случају гасова, експерименти показују да између три наведене величине постоји веза, тј. да се оне не могу мењати потпуно независно једна од друге (*чињеница* 11). Зато уопште можемо ставити да је

$$F(p, V, T) = 0 \tag{1}$$

ова веза; зваћемо је *карактеристична* једначина. У овом облику она претставља уопштење једначине (39) § 11.1. Али, наравно, једначина (1) није најопштији облик који се може замислити. Јер, с једне стране, можемо узети тела за која је тензор унутрашњих напона компликованији од оног који има идеална течност, с друге стране можемо водити рачуна о неким хемиским особинама тела и за карактеристику ових увести у њу неке нове параметре. Овде ћемо се зауставити на случају карактеристичне једначине (1). Из ње можемо наћи коју хоћемо од величина p, V, T као функцију двеју осталих, тј.

$$p = p(V, T)\,, \qquad V = V(p, T)\,, \qquad T = T(p, V)\,. \tag{2}$$

За хомогено тело, за које имамо карактеристичну једначину (1), промене његова стања, одн. промене величинâ које га карактеришу везане су условом

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT\,, \tag{3}$$

који следује из прве од једначина (2); индекси $_T$ и $_V$ код делимичних извода означавају да се вредности те променљиве сматрају за константе.

Разликујмо четири врсте промена стања: 1) *изотермичке*: $T = \text{const.}$, 2) *изохоричке*: $V = \text{const.}$, 3) *изобарске*: $p = \text{const.}$ и 4) *адијабатске*; о овим последњима биће говора касније.

У равни можемо повући фамилије кривих које одговарају сваком од постављених услова:

1) *изотерме* за које је, дакле, $dT = 0$. Запремина постаје функција само притиска и њене промене карактеришу се т.зв. *модулом компресије*

$$\varkappa = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T, \tag{4}$$

где је V запремина.

2) *изохоре* за које имамо услов $dV = 0$. Притисак ће бити функција само температуре. *Напонски коефицијент* β (изохорички) дефинишемо помоћу једначине

$$\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V, \tag{5}$$

где је p притисак.

3) *изобаре* за које је $dp = 0$ те је, према томе, запремина функција само температуре. *Коефицијентом истезања* (изобарским) зове се величина

$$\alpha = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \tag{6}$$

Из једначине (3) следује

$$0 = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT = -\frac{1}{\varkappa V} dV + \beta p\, dT,$$

због (4) и (5). Како је, због константности p,

$$\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V,$$

биће

$$\alpha = \beta \varkappa p. \tag{7}$$

Дакле између коефицијената α, β и $\varkappa$ постоји такође веза. Досада још нисмо специјализовали облик функције F у карактеристичној једначини. За гасове имамо Boyle-Mariotte-ов закон

$$pV = \text{const.} \quad \text{за} \quad T = \text{const.}, \tag{8}$$

који служи као добра апроксимација када је температура далеко од тачке згушњавања. Затим имамо Gay-Lussac-ов закон. Ако са ϑ означимо температуру (у Целзиусовим степенима), имамо

$$\frac{pV}{1+\alpha\vartheta} = \text{const.}, \tag{9}$$

где коефицијент α има за све гасове исту вредност $\frac{1}{273,2}$. Ако је T апсолутна температура $T = 273,2 + \vartheta$ и једначину (9) добивамо у облику

$$pV = AT, \tag{10}$$

где је A константа. Гас за који по дефиницији важи овај закон зове се идеалан гас. Течности се не покоравају сличном закону и за њих се добива емпиричким путем услов

$$V = V_0(1 - \beta^* p)(1 + \alpha^* \vartheta), \tag{11}$$

где су α^* и β^* две константе, које за разне супстанције имају различите вредности.

Најзад, van der Waals је дао закон који претставља боље од Ге-Лисакова промене стања реалних гасова, но који се изводи помоћу атомске хипотезе*). Узмимо да је v запремина једног мола (грам-молекула). Онда Ге-Лисаков закон имамо у облику

$$pv = RT \tag{10'}$$

а гасна константа је $R = \frac{p_0 v_0}{273,2} = 8,315.10^7$ erg/grad. ван дер Валсова једначина пак гласи

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)\left(v - b\right) = RT, \tag{12}$$

где су a и b две константе. За високе температуре, допунски чланови којима се лева страна разликује од производа pv играју незнатну улогу. Њихов утицај долази до изражаја за ниже температуре. У карактеристичним једначинама других облика (види споменути чланак у Hdb. d. Phys.) поставља се компликованија веза између притиска, запремине и температуре.

§ 15 Два принципа Термодинамике. У основи општег проучавања топлотних појава имамо два принципа. Да бисмо формулисали први, који је примена општег принципа одржања енергије (§ 0.7) у Теорији топлоте, потребно је навести неке податке. Уочимо неки затворени материјални систем, тј. систем потпуно изолован од свих спољњих дејстава. Његово стање биће одређено механичким, електричним, хемиским, топлотним и др. процесима који се дешавају у њему, а, према принципу одржања енергије, општи износ разних облика енергије остаје константан. Како смо механичку енергију E_M дефинисали, а знамо да дефинишемо и електричну енергију (види даље § 21.5) E_E, увешћемо још једну вели-

*) види на пр. Hdb. d. Phys. B.X. S. 126. Berlin. 1926.

чину E_i, коју ћемо звати *унутрашња енергија* система, па ћемо принцип одржања енергије моћи написати у облику

$$E_M + E_E + E_i = \text{const.}, \tag{13}$$

Ову нову величину уводимо због тога што, како је познато из експеримената, збир само механичке и електричне енергије не остаје константан (*чињеница* 12, једна од оних које леже у образложењу овог принципа). Сматрајмо да унутрашња енергија зависи само од две од величина које према § 14 одређују стање система, тј. да је $E_i = E_i(V, T)$*) (*претпоставка* VII).

Количина топлоте претставља одређени облик енергије (*чињеница* 13) и између мале калорије и јединице рада, ерга, постоји веза 1 кал. = $4.188.10^7$ ерга.**)

У затвореном систему може, због једначине (13), унутрашња енергија да порасте само на рачун механичке одн. електричне. Али, ако систем није затворен, на пр. ако имамо тело које није термички изоловано, десна страна ове једначине није више константна. Промена унутрашње енергије биће тотални диференцијал променљивих V и T, тј.

$$dE_i = \left(\frac{\partial E_i}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial E_i}{\partial T}\right)_V dT. \tag{14}$$

Међутим доведена количина топлоте споља или извршени рад којим се мења стање система не морају бити тотални диференцијали. Означаваћемо ове величине са $đQ$, $đA$.

Сада можемо први принцип Термодинамике овако формулисати: Ако се неком материјалном систему доводи споља бескрајно мала количина топлоте $đQ$ а при томе се врши рад $đA$, збир ових величина биће тотални диференцијал функције E_i, унутрашње енергије:

$$dE_i = đQ + đA. \tag{15}$$

Рад који се систему доводи споља сматраћемо позитивном величином, онај пак рад који сам систем врши — негативном.

Дакле, ако се споља доводи топлота, овим се повећава унутрашња енергија, која иначе зависи од тренутног стања система. Општије формулисање истог принципа добићемо, наравно, ако узмемо у обзир евентуалне промене механичке, одн. електричне енергије. Онда ћемо имати:

$$dE_i = đQ + đA - đE_M - đE_E. \tag{16}$$

За питања која ћемо даље проучавати од важности је једначина (15). Првом принципу Термодинамике даје се још и овај смисао: не

---

*) она зависи и од хемиског састава, али се ово засада изоставља.

**) из ове чињенице и једначине (13) следује I претпоставка. Сматра се такође да баш први принцип служи за дефиницију количине топлоте.

може да постоји машина у којој би се стално вршио рад, а која не би црпла енергију из другог неког извора, јер општи износ енергија у затвореном систему остаје константан. Другим речима, т.зв. perpetuum mobile прве врсте није могућан.

Уочимо специјалан случај. Узмимо да се електрична и механичка енергија не мењају, тј. да важи једначина (15). Узмимо даље да свугде исти притисак споља изазива смањивање запремине. На површински елемент дејствује сила $-p d\mathfrak{f}$ ($d\mathfrak{f}$ је као и увек усмерено ка спољњој страни) и, ако је $d\mathfrak{s}$ његово померање, биће

$$đA = -\int_F p\, d\mathfrak{f}\, d\mathfrak{s} = -p \int_F d\mathfrak{f}\, d\mathfrak{s} = -p\, dV\,,$$

јер последњи интеграл даје прираштај запремине dV. У овом случају ће једначина (15) имати облик

$$đQ = dE_i + p\, dV\,. \tag{17}$$

Према првом принципу Термодинамике, ако нема промена механичке и електричне енергије, рад може вршити неки систем само на рачун унутрашње енергије или доведене топлоте. У природи стоје на расположењу практички неограничене количине унутрашње енергије. Кад би се могао неограничено стварати рад на њен рачун, ово би било од огромне важности за примене. Међутим експерименти сведоче да се овакво стање не може стварно продужити у бесконачност, јер, на пр., услед трења и томе сличних узрока, део механичког рада поново се претвара у топлоту (*чињеница* 14). Немогућност неограниченог претварања унутрашње енергије неког система у рад сачињава суштину другог принципа Термодинамике. Постоји неколико начина формулисања овог принципа.

Навешћемо прво онај који непосредно даје математички облик другом принципу: „Количник доведене топлоте $đQ$ и апсолутне температуре T тела биће тотални диференцијал извесне величине која зависи од тренутног стања и која се зове *ентропија* (S)".

Имамо, дакле, по дефиницији

$$dS = \frac{đQ}{T} \tag{18}$$

па ћемо даље подробније испитати овај појам и његове особине.

Други начин формулисања дао је Planck: „Није могућно конструисати машину која ради периодички а не прозводи ништа сем механичког рада и хлађења само једног резервоара топлоте".

Овако замишљена справа зове се perpetuum mobile друге врсте.*) Други принцип Термодинамике искључује могућност овог perpetuum mobile. Оба су принципа, ако стојимо на феноменолошком гледишту, апстракција која се оснива на посматраним чињеницама. Но ако се усвоји атомска хипотеза и примене статистичке методе, други принцип се јавља као нужна, логичка последица.

Из низа других формулисања другог принципа споменимо још једно Планково: „Сваки процес у природи тече у таквом смеру да збир ентропија свих тела који суделују у процесу расте."

О питању који аксиоми леже у основи другог принципа постоји опширна литература.**)

§ 16 Промене стања. Идеални гас. Проучимо сад неке особине промена стања. Уобичајено је да се расуђивања односе на један мол, па ћемо зато вредности одговарајућих величина означавати малим словима, тј. запремину са v, доведену количину топлоте са $đq$, унутрашњу енергију са e_i. Обрасцима (15), (17) и (18) даћемо облике:

$$de_i = đq + đa\,, \qquad đq = de_i + pdv\,, \qquad ds = \frac{đq}{T}\,. \tag{19}$$

Специфичком топлотом (за један грам или мол) зове се она количина топлоте која је потребна да се маса једног грама (одн. мола) загреје за један степен, тј.

$$c = \frac{đq}{dT}\,. \tag{20}$$

Унутрашња енергија уочене јединице масе $e_i = e_i(T, v)$. Према томе је

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial T}dT + \frac{\partial e_i}{\partial v}dv \tag{21}$$

и, дакле,

$$c = \frac{đq}{dT} = \frac{\partial e_i}{\partial T} + \left(\frac{\partial e_i}{\partial v} + p\right)\frac{dv}{dT}\,. \tag{20'}$$

Овај израз зависи од количника $\frac{dv}{dT}$. У равни променљивих v и T можемо повући неку криву $v = \varphi(T)$ и ова веза карактерише извесну

*) Називи perpetuum mobile прве, одн. друге врсте потичу од Ostwald-а; појам ентропије увео је Clausius, који је назвао S — функцијом ентропије, а ентропијом тела — вредност ове функције за одређено стање тела.

**) види на пр. В. Жардецки: Прилог питању аксиоматизовања другог принципа Термодинамике. Глас. Срп. Кр. Ак. CLXXVIII.

промену стања. Од избора ове везе зависе вредности $\frac{dv}{dT}$ и, због услова (20′), вредности специфичке топлоте.

Зато уопште треба разликовати неколико случајева према врсти промена стања тела.

Специфичку топлоту при константној запремини c_v добићемо на следећи начин.

Узимајући у обзир да је $dv = 0$, из образаца (20), (19) и (21) добивамо

$$c_v = \frac{\partial e_i}{\partial T}. \tag{22}$$

Ако уопште сматрамо T и v као независне променљиве, онда ћемо, због друге од једначина (19), (21) и (22), имати

$$đq = \frac{\partial e_i}{\partial T} dT + \left(p + \frac{\partial e_i}{\partial v}\right) dv, \tag{23}$$

$$de_i = c_v\, dT + \frac{\partial e_i}{\partial v} dv. \tag{24}$$

А како је de_i тотални диференцијал променљивих T и v, мора бити

$$\frac{\partial c_v}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial e_i}{\partial v}\right). \tag{25}$$

Према другом принципу Термодинамике ds је тотални диференцијал, а из образаца (19, трећа једначина), (23) и (22), следује

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + \frac{1}{T}\left(p + \frac{\partial e_i}{\partial v}\right) dv. \tag{26}$$

Дакле мора бити

$$\frac{\partial}{\partial v}\frac{c_v}{T} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{T}\left(p + \frac{\partial e_i}{\partial v}\right).$$

Узимајући у обзир (25) одатле можемо наћи

$$\frac{\partial e_i}{\partial v} = -p + T\frac{\partial p}{\partial T} = p(\beta T - 1). \tag{27}$$

због услова (5). Ставимо ли овај израз у (23), имаћемо због услова (22):

$$đq = c_v\, dT + \beta p T dv, \tag{28}$$

тј. везу између доведене топлоте и осталих количина које смо увели у посматрање.

Ако се промена стања тела врши изохорично, биће $đq = c_v dT$. Ако је промена изотермичка: $dT = 0$ и $đq = \beta p T dv$. Из овог обрасца

се види да, кад запремина расте, тј. кад је $dv > 0$, тело прима топлоту ($đq > 0$) или губи, према знаку напонског коефицијента.

Адијабатске промене дефинишемо условом $đq = 0$. Због једначине (28) имамо онда

$$\beta p T dv = -c_v dT. \tag{29}$$

Ако је $\beta > 0$, запремина ће расти ($dv > 0$) када температура опада, тј. када је $dT < 0$.

Место v и T можемо сматрати као независне променљиве величине температуру и притисак (једн. (2)). Онда запремина, унутрашња енергија, ентропија постају функције ових величина. Специфичку пак топлоту при константном притиску c_p треба да разликујемо од оне при константној запремини, јер се у другом случају не врши рад спољњих сила док се врши у првом.

Како је сада $e_i = e_i(T, p)$ те је, према томе,

$$de_i = \frac{\partial e_i}{\partial T} dT + \frac{\partial e_i}{\partial p} dp. \tag{30}$$

и $v = v(T, p)$, па ће бити

$$dv = \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp,$$

имаћемо место друге од једначина (19)

$$đq = \left(\frac{\partial e_i}{\partial T} + p\frac{\partial v}{\partial T}\right) dT + \left(\frac{\partial e_i}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right) dp. \tag{31}$$

Специфичка топлота при константном притиску ($dp = 0$) биће коефицијент поред dT (в. једначину 20), тј.

$$c_p = \frac{\partial e_i}{\partial T} + p\frac{\partial v}{\partial T}, \tag{32}$$

где се извод унутрашње енергије узима за $p = \text{const.}$. Како смо променљиве T, v заменили са T и p, и $v = v(T, p)$, биће

$$\left(\frac{\partial e_i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial e_i}{\partial T}\right)_v + \left(\frac{\partial e_i}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = c_v + \left(\frac{\partial e_i}{\partial v}\right)_T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,$$

где индекси означавају која се од променљивих сматра за константу.

Ставимо овај израз у једначину (32). Добићемо

$$c_p - c_v = \left[\left(\frac{\partial e_i}{\partial v}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p. \tag{33}$$

За гасове, вредност првог члана у заградама обично је знатно мања од притиска, док код чврстих тела овај члан игра већу улогу од p (ако притисак нема неке врло велике вредности).

Због израза (32) можемо једначину (30) написати у облику

$$de_i = \left(c_p - p\frac{\partial v}{\partial V}\right)dT + \frac{\partial e_i}{\partial p}dp$$

и, како је ово тотални диференцијал, мора бити

$$\frac{\partial}{\partial p}\left(c_p - p\frac{\partial v}{\partial T}\right) = \frac{\partial}{\partial T}\frac{\partial e_i}{\partial p} .$$

Међутим је

$$ds = \frac{đq}{T} = \frac{c_p}{T}dT + \frac{1}{T}\left(\frac{\partial e_i}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right)dp$$

(в. једначине 19, 31, 32) такође тотални диференцијал. Зато је

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{c_p}{T} = \frac{\partial}{\partial T}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial e_i}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p}\right).$$

Ови услови, после лаке трансформације, дају

$$\frac{\partial e_i}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p} = -T\frac{\partial v}{\partial T}$$

или, због једнакости (6), где треба увести ознаке за један мол,

$$\frac{\partial e_i}{\partial p} + p\frac{\partial v}{\partial p} = -\alpha v T . \tag{34}$$

Најзад, због једначина (32) и (34) израз (31) добиће облик

$$đq = c_p dT - \alpha v T dp . \tag{35}$$

Ако је промена стања тела, одн. система, изобарска ($dp = 0$) биће

$$đq = c_p dT .$$

Изотермичка промена дата је једначином

$$đq = -\alpha v T dp .$$

Ако је коефицијент истезања α негативан, при довођењу топлоте ($đq > 0$) притисак расте ($dp > 0$).

За адијабатске промене ($đq = 0$) имамо

$$c_p dT = \alpha v T dp .$$

Ако притисак расте, наступа загревање у телима за које је $\alpha > 0$, на пр., код воде $\alpha > 0$ ако је њена температура изнад 4°C и, обрнуто, $\alpha < 0$ за температуру испод ове тачке.

Веза између специфичких топлота c_p и c_v може да се дâ у другом облику. Упоредимо изразе (28) и (35). Сматрајмо да се узимају исте количине топлоте. Онда ћемо имати

$$(c_p - c_v)\, dT = \alpha v T dp + \beta p T dv\,.$$

Због услова (4—6),

$$dv = \frac{\partial v}{\partial T} dT + \frac{\partial v}{\partial p} dp = \alpha v dT - \varkappa v dp\,,$$

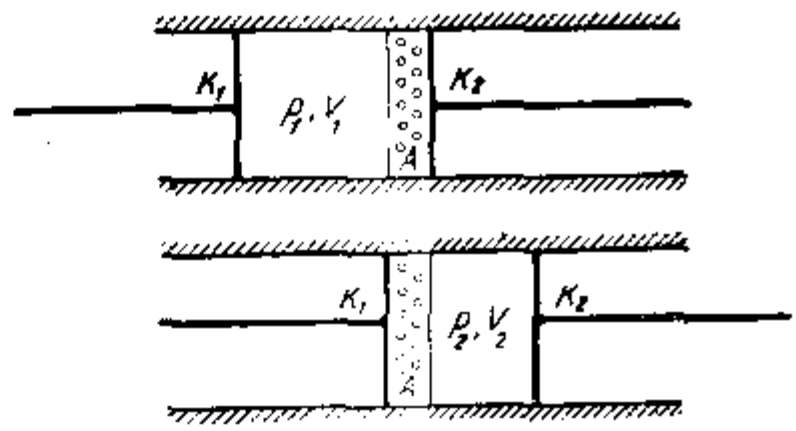
и (7) добићемо

$$c_p - c_v = \frac{\alpha^2}{\varkappa} v T\,. \tag{33'}$$

Зауставићемо се на случају идеалног гаса. По дефиницији за њега важи Ге-Лисаков закон (10″), где n означава број мола

$$pV = nRT\,. \tag{10''}$$

Као што смо мало пре видели, од велике је важности питање на који начин зависи унутрашња енергија од независних променљивих V и T, јер ова величина и њени изводи долазе у обзир при проучавању промена стања. Први одговор на ово питање дао је Ге-Лисаков експеримент, који се састоји у овоме: гас чија је запремина V_1 а притисак p_1 преводи се адијабатски у друго стање (запремина V_2, притисак p_2) и усто се још не врши никакав механички рад. У овом експерименту није се могла запазити промена температуре, па је Ге-Лисак закључио да унутрашња енергија не зависи од запремине. Thomson и Joule извели су овај експеримент на савршенији начин. Цев која је направљена од врло рђавог проводника топлоте преполовљена је порозним зидом (A). Између два клипа (K_1 и K_2) налази се потпуно изолована маса гаса (сл. 15). У почетку експеримента клип K_2 притискује зид A и гас има: запремину V_1, притисак p_1. Помоћу врло малог притиска на клип K_1 гас се преводи, веома споро, на другу страну зида A потискујући при том клип K_2. На овај клип врши се притисак p_2. Када сав гас пређе на другу страну, он ће имати запремину V_2 и притисак који се врло мало разликује од p_2. При том се мери (помоћу термоелемента) његова температура у првом, одн. у другом положају. Разлика температура, иначе веома мала (делови степена), постаје све мања уколико се температура удаљује од тачке згушњавања (*чињеница* 15). Може се примити да се, за све веће температуре, гасови све више приближавају идеалном стању, у коме се при посматраном процесу температура више не мења.



Сл. 15.

Из једначине (10″) следује онда (због $T = \text{const.}$)

$$p_1 V_1 = p_2 V_2 .$$

Претпоставимо да се уочени процес врши адијабатски, тј. да је $đQ = 0$. Ако рад раставимо у два дела: 1) смањивање запремине за V_1 при притиску p_1, 2) повећавање запремине гаса за V_2 при притиску p_2, биће $đA = p_1 V_1 - p_2 V_2$ (в. извођење обрасца 17). Како је сада $đA = 0$, због претходне једначине, биће (в. једначину 15) и $dE_i = 0$. Интеграљењем добивамо да функција $E_i(v, T)$ задовољава услов

$$E_i(v_1, T) = E_i(v_2, T) ,$$

тј. унутрашња енергија идеалног гаса зависи само од апсолутне температуре а

(36) $$\frac{\partial E_i}{\partial V} = 0 .$$

Из услова (25) следује онда да и специфичка топлота c_v не зависи од запремине. Како је због услова (10′)

$$p \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = R$$

једначина (33) ће за идеални гас имати облик

(37) $$c_p = c_v + R .$$

Одавде је

(38) $$\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v} .$$

Због услова (23) и једначине

$$pdv = d(pv) - vdp = RdT - vdp$$

(в. једначину 10′) имаћемо

(39) $$đq = (c_v + R)dT - vdp = c_v dT + pdv .$$

Уочимо сад адијабатске промене стања идеалног гаса: $đq = 0$, $pv = RT$. Из ових услова и једначине (39) следује

$$\frac{dT}{T} + \frac{R}{c_v}\frac{dv}{v} = 0 .$$

Због (38) имаћемо за произвољну масу гаса

(40) $$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0 .$$

Одатле интеграљењем добивамо

$$TV^{\gamma - 1} = \text{const.}$$

или, због (10′),

(41) $$pV^{\gamma} = \text{const.}\,.$$

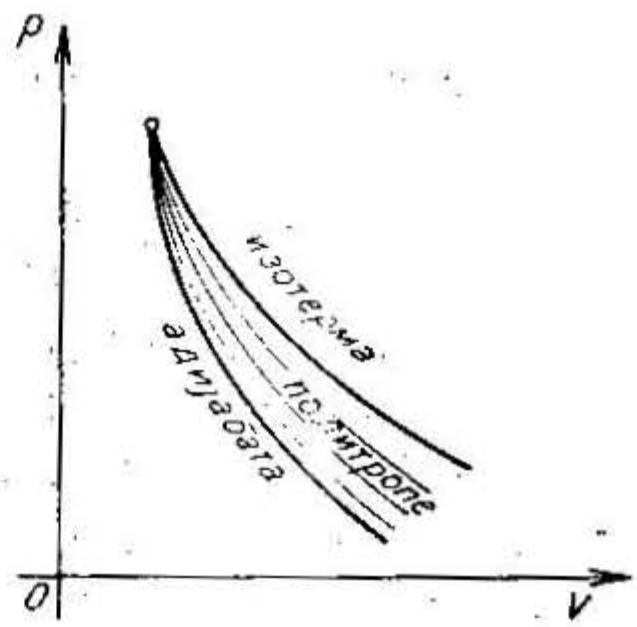
Крива одређена овом једначином у равни p, V зове се *адијабата*. Непосредно из једначине (10) имамо (за $T = \text{const.}$) једначину *изотерме*

(42) $$pV = \text{const.}\,.$$

Како је $\gamma > 1$ (в. образац 38), можемо између изотерме и адијабате идеалног гаса повући фамилију кривих

(43) $$pV^{\varkappa} = \text{const.}\,, \qquad 1 < \varkappa < \gamma\,,$$

т. зв. *политропа* (сл. 16). Ова фамилија, ако мењамо $\varkappa$ од 0 до ∞, протеже се и ван ове области, и за $\varkappa = 0$ добивамо једначину изобаре ($p = \text{const.}$), за $\varkappa = \infty$ једначину изохоре ($V = \text{const.}$). Дакле једначину (43) можемо сматрати као општу, која даје све досада уочене врсте промена стања идеалног гаса.



Сл. 16

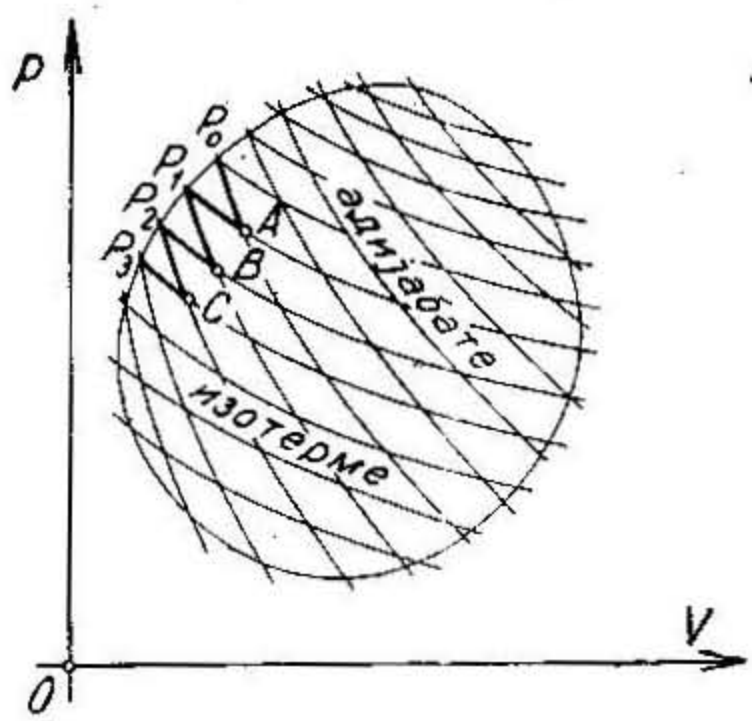
Промене стања тела (процеси) деле се још у две врсте: *повратне* или *реверзибилне* и *неповратне* или *иреверзибилне*. Првој врсти припадају оне код којих се ток промена може обрнути, тј. ако је неко тело или систем тела прешао из стања G_1 у G_2 онда га је, и обрнуто, могућно превести из G_2 у G_1, дакле, сва тела враћају се у почетно стање. Неповратни је процес ако у неким деловима система, који хоћемо да вратимо у почетно стање, неке промене остају.

Од нарочитог су интереса и важности за примене (на пр. у техници) т.зв. *кружни процеси* или *циклуси*. По дефиницији, на крају оваквог процеса враћа се тело одн. систем у почетно стање. Према томе и све величине које зависе од тренутног стања добивају по завршетку циклуса првобитне вредности. Такве су на пр. унутрашња енергија E_i и ентропија S. Дакле, ако саберемо све доведене количине топлоте, извршени рад итд., морамо добити из једначине (15) и (18) за кружни процес услове

(44) $$\Sigma\, đQ + \Sigma\, đA = 0\,, \qquad \Sigma \frac{đQ}{T} = 0\,.$$

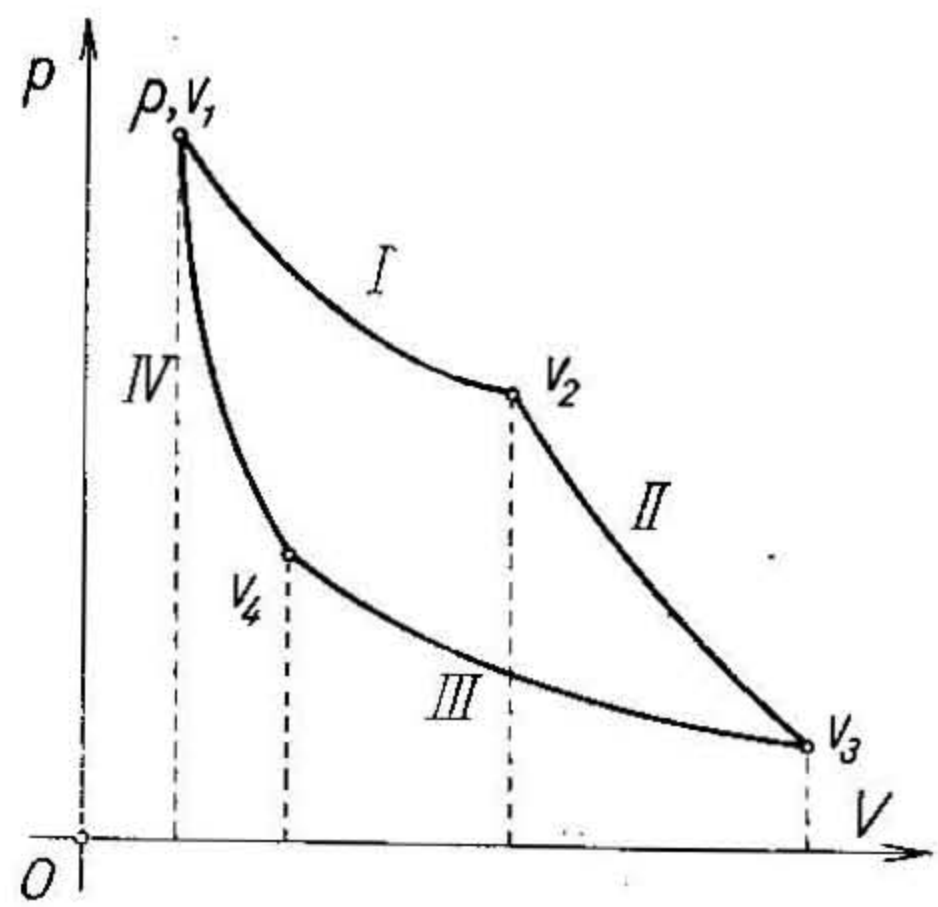
Ако имамо систем чије се промене карактеришу вредностима независних променљивих p и V, онда можемо кружни процес графички претставити затвореном линијом $P_0 P_1 \ldots P_0$ у равни ових променљивих

(сл. 17). Нарочиту улогу игра Carnot-ов кружни процес са идеалним гасом. Карноов циклус замишља се на следећи начин (сл. 18). Гас у неком суду (који на пр. има клип на којем лежи тег) доводи се у додир са телом K_1 које има температуру T_1, изједначава са овом своју температуру и добива запремину v_1. I део циклуса: смањивањем спољњег притиска пуштамо да се гас изотермички шири до запремине $v_2 > v_1$. Како унутрашња енергија идеалног гаса зависи само од температуре, а ова остаје иста $\Sigma dE_i = 0$ и како гас врши рад, тј. $\Sigma đA < 0$, њему се *доводи* количина топлоте $\Sigma đQ$ према једначини (15). II део циклуса: прекидамо везу суда са телом K_1 и пуштамо да се гас шири адијабатски до запремине v_3, када ће његова температура бити T_3. III део: доводимо у везу суд са телом K_2 које има исту температуру и сабијамо гас до запремине $v_4 > v_1$, тако да промена стања буде поново изотермичка. Дакле тело K_2 одузима за ово време извесну количину топлоте. IV део: прекидамо везу суда са K_2 и адијабатски сабијамо гас до запремине v_1.



Сл. 17

Запремина v_4 бира се тако да на крају овог процеса температура гаса добије вредност T_1. Онда се гас вратио у почетно стање. При томе претпостављамо да су тела K_1 и K_2 довољно велика, да се њихове температуре не мењају осетно. Али, када се цела оваква справа, Карноова машина, врати у полазни положај, телу K_1 одузима се за време циклуса извесна количина топлоте која се преноси на тело K_2, а усто се врши извесни механички рад. Цео циклус састоји се према томе из два изотермичка (I и III) и два адијабатска (II и IV) дела. Означимо са Q_1 (Q_3) количину топлоте која се гасу доводи (одн. губи) за време првог (одн. трећег) процеса ($Q_2 = Q_4 = 0$). Нека буде $-A$ укупан рад за време кружног процеса (знак — ставља се због тога што машина врши рад). Онда једначине (44) можемо преписати у овом облику



Сл. 18

(45) $$Q_1 + Q_3 = A\,, \quad \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_3}{T_3} = 0\,.$$

Одавде следује, прво, да је $|Q_3| < Q_1$, јер је $T_1 > T_3$, тј. да ће за време кружног процеса тело K_2 примити мању количину топлоте од оне коју је K_1 изгубило, и друго да је

(46) $$A = Q_1 \frac{T_1 - T_3}{T_1}$$

тј. да се други део топлоте Q_1 претвара у рад.

Количник

(47) $$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_1 - T_3}{T_1} = 1 - \frac{T_3}{T_1}$$

зове се термодинамички *коефицијент корисног дејства* (он не зависи од природе тела која учествују у процесу, но само од крајних температура — Карноова теорема).

Очевидно је да ток Карноова циклуса можемо обрнути, и на тај начин одузети од хладнијег тела K_2 неку количину топлоте и довести телу K_1; само онда треба утрошити споља извесни рад.

Ако ставимо израз (47) за A у прву једначину (45), добићемо

$$-Q_3 = (1-\eta)\, Q_1$$

и, према томе, ако Карноова машина ради у обрнутом смислу, треба споља утрошити рад

$$A = \eta Q_1 = \frac{-\eta}{1-\eta}\, Q_3\,.$$

Може се доказати да је коефицијент корисног дејства Карноове машине највећи.

Претпоставимо да постоји циклус чији је коефицијент $\eta^* > \eta$. Замислимо да се помоћу овога циклуса телу K_1 одузима количина топлоте Q^*, и да се један део енергије претвори у рад $-A^* = -\eta^* Q^*$ (према дефиницији коефицијента (47)) док се телу K_2 доведе топлота

$$-Q_3 = (1-\eta^*)\, Q^*\,.$$

Претпоставимо даље да се помоћу обрнутог Карноова циклуса ова количина топлоте одузима од тела K_2 и помоћу спољњег рада A доводи количина топлоте Q_1 телу K_1. Из горњих образаца следује да је

$$Q_1 = \frac{1-\eta^*}{1-\eta}\, Q^*\,,$$

дакле, $Q_1 < Q^*$, тј. помоћу ова два процеса тело K_1 се расхлађује. Израчунајмо тотални рад.

$$-A^* + A = -\eta^* Q^* + \frac{1-\eta^*}{1-\eta}\, \eta Q^* = \frac{\eta - \eta^*}{1-\eta}\, Q^* < 0\,,$$

тј. „машина“ је створила рад. Овај процес могли бисмо понављати неограничено, стално расхлађујући тело K_1 а да се при томе ништа друго, одн. стање тела K_2 не мења. Али овакво стање ствари у супротности је са другим принципом Термодинамике (§ 15) и зато је немогућно. Дакле не може η^* бити веће од η.

Зауставимо се на анализи особина ентропије. Као што смо видели, ова функција се дефинише уопште једначином (18). Но треба даље разликовати, да ли је процес којим се врши довођење топлоте реверзибилан или иреверзибилан. Узмимо први случај и означимо доведену топлоту са $đ_rQ$. Онда је ентропија

$$S=\int\frac{đ_rQ}{T} \tag{48}$$

или, ако тело (систем) прелази из једног стања (1) у друго (2), биће

$$S_2-S_1=\int_1^2\frac{đ_rQ}{T}\,. \tag{49}$$

У овом случају интеграл не зависи од пута (на пр. у равни p, V) тачније од начина прелаза. Доиста, ако уочимо вредности овог израза за два различита пута, онда у исти мах можемо замислити кружни процес који се састоји у превођењу тела из стања 1 у 2 по првом путу, а затим, због реверзибилности ово се може остварити, у превођењу из 2 у 1 дуж другог пута. Узмемо ли у обзир другу од једначина (44), која сада гласи

$$\int_O\frac{đ_rQ}{T}=\int_1^2+\int_2^1=0\,,$$

видимо да је поменута особина тачна.

За иреверзибилни процес не можемо расуђивати на овај начин и зато извршимо анализу кружног процеса који има иреверзибилне делове. Уочимо кружни процес $P_0P_1\ldots P_0$ (сл. 17). Кроз тачке $P_0, P_1, \ldots,$ које леже на бескрајно малим растојањима, можемо повући адијабате и изотерме. У тој мрежи узмимо пресеке $A, B, C\ldots$ најближе контури. Сваком луку контуре $(P_0P_1, P_1P_2, \ldots)$ одговара процес и за време овога доводи се бескрајно мала количина топлоте $đQ$ при температури T која одговара вредностима p и V. Заменимо сад овај кружни процес другим, $P_0AP_1BP_2\ldots$ Ова крива састављена је од лукова адијабата и изотерма. Испочетка, од тачке P_0 мењамо стање тела дуж адијабате P_0A, а да бисмо га довели до стања P_1 треба да идемо дуж изотерме AP_1. За ово је потребно да се доведе извесна количина топлоте $đQ$. Претпоставимо да се ово остварује помоћу Карноова циклуса, који

доводи ову количину топлоте од неког врло великог резервоара чија је температура T^*. Означимо ли са $-đQ'$ ону количину топлоте која се одузима од резервоара имаћемо, сходно другој од једначина (45),

$$\frac{đQ'}{T^*} = \frac{đQ_1}{T} .$$

Како исто важи за остале лукове ($BP_2, \ldots$) одн. процесе, то при кружном процесу резервоару се одузима топлота

$$Q' = \Sigma đQ' = T^* \int \frac{đQ_1}{T} .$$

Но $đQ_1$ разликује се од $đQ$ за бесконачно мале величине вишег реда. Јер, ако уочимо процес, на пр. $P_0 A P_1 P_0$, имаћемо, према првој од једначина (44).

$$-đQ + đQ_1 + đA = 0 ,$$

пошто ће по завршетку овог процеса енергија бити иста, а на луку $P_1 P_0$ губи се топлота $đQ$. А рад је $đA = -\int p dV$. Како је овај интеграл једнак површини троугла $P_0 A P_1$ он ће, када $P_0 P_1 \to 0$, тежити нули као квадрат ове бесконачно мале величине. Дакле $đQ_1 = đQ$, и можемо ставити

$$\frac{Q'}{T^*} = \int_{\bigcirc} \frac{đQ}{T} . \tag{50}$$

Овај израз мора бити $\leqq 0$, јер кад би био позитиван, топлота би се за време кружног процеса претворила у рад, резервоар би се хладио, а у другим телима не би се опажала промена стања, што је у супротности са другим принципом. За реверзибилне процесе треба сада узети знак једнакости, јер, ако бисмо обрнули смисао процеса, било би $đQ^* = -đQ$ и израз (50) испао би негативан, што је немогућно. За иреверзибилне процесе биће знак $<$, тј.

$$\int_{\bigcirc} \frac{đ_{ir}Q}{T} < 0 . \tag{51}$$

Сада можемо видети особину ентропије, ако се промена стања тела врши помоћу иреверзибилног процеса. Узмимо да се мења стање 1 у 2 помоћу иреверзибилног процеса, а стање 2 у 1 помоћу реверзибилног. Добивамо кружни процес и, према условима (51) и (49),

$$\int_{\bigcirc} \frac{đ_{ir}Q}{T} = \int_1^2 \frac{đ_{ir}Q}{T} + \int_2^1 \frac{đ_r Q}{T} = \int_1^2 \frac{đ_{ir}Q}{T} - S_2 + S_1 < 0$$

тј.

$$S_2 - S_1 > \int_1^2 \frac{đ_{ir} Q}{T} . \tag{52}$$

Ако је процес усто адијабатски ($đ_{ir} Q = 0$), биће

$$S_2 > S_1 \tag{53}$$

и имамо теорему: сваки иреверзибилни (адијабатски) процес у затвореном систему тежи да повећа његову ентропију. Сматрајући да је васиона затворени систем, исказао је Clausius чувену теорему: „Ентропија васионе тежи максимуму". Но јасно је да се његова претпоставка не може потпуно образложити.

§ 17 Термодинамички потенцијали. Равнотежа. Помоћу два принципа Термодинамике уводе се две функције, унутрашња енергија E_i и ентропија S, чије вредности зависе од тренутног стања тела. Али осим ових могу се дефинисати и друге функције, које ће такође зависити од тренутног стања и бити од важности за описивање топлотних стања.

Из једначина (15) и (18) следује

$$đA = dE_i - TdS . \tag{54}$$

Функција

$$\Psi = E_i - TS \tag{55}$$

зове се *слободна енергија.**) Ако са $\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_* = - S$ означимо извод од Ψ када се остале променљиве (запремина итд.) сматрају за константе, имаћемо т.зв. Gibbs-Helmholtz-ову једначину

$$E_i - \Psi = - T \left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right)_* \tag{56}$$

којом су спојена оба принципа Термодинамике.

Ако се спољњи рад $đA$ може претставити изразом $-pdV$ (в. једн. 17), биће, дакле, за хомогено тело:

$$0 = dE_i - TdS + pdV .$$

Уведимо сад функцију

$$G = E_i - TS + pV = \Psi + pV , \tag{57}$$

---

*) Ако узмемо изотермички процес ($T = \text{const.}$), имаћемо $dA = d\Psi$. Дакле, ако тело врши рад, dA је негативно и ово је скопчано са опадањем слободне енергије.

која се зове *Џибсов потенцијал* (други). Функције Ψ и G зову се такође *термодинамички потенцијали*. Функција

(58) $$J = E_i + pV$$

зове се *Џибсова топлотна функција* или *ентхалпија*, а

(59) $$-\frac{G}{T} - \textit{Планкова функција.}$$

Досада смо говорили углавном о случају када стање тела (хомогеног) одређују вредности два параметра, на пр. T и V. У општијем случају морамо претпоставити да стање тела (на пр. еластичног) зависи од низа других параметара које ћемо означавати са u_i ($u_0 = V$, $i = 0, 1, 2 \ldots$). Онда ће унутрашња енергија, ентропија и друге величине бити функције ових параметара. Нека рад $-đA$, који врши тело (систем) када се параметри промене за du_i, буде дат изразом

(60) $$-đA = \sum_0^n U_i du_i .$$

Претпостављамо да су ови параметри изабрани тако да промена само температуре T не изазива рад. У општем случају можемо ставити да рад зависи од T и низа других параметара.

Специјално, по аналогији са претходним случајем, ставимо да је $U_0 = p$ и онда ће први члан збира бити $p\,dV$. Величине U_i зову се *термодинамичке силе* (оне немају димензију сила).

Из једначине (54) следује

$$0 = dE_i - TdS + \Sigma U_i du_i$$

или, због једначине (55),

(61) $$0 = d\Psi + SdT + \Sigma U_i du_i .$$

Уочимо сада функцију

(62) $$\Phi = \Psi + \Sigma U_i u_i$$

која претставља општи облик термодинамичког потенцијала. Њен диференцијал је

$$d\Phi = d\Psi + \Sigma U_i du_i + \Sigma u_i dU_i ,$$

а, због једначине (61),

(63) $$d\Phi = -SdT + \Sigma u_i dU_i .$$

Термодинамички потенцијал може да се схвати и као функција променљивих T, U_i, тј.

(64) $$\Phi = \Phi(T, U_0, U_1, \ldots) .$$

Диференцирајући (64) по одговарајућим променљивим и упоређујући са изразом (63) добићемо везе:

$$(65)\qquad \frac{\partial\Phi}{\partial T}=-S\,,\ \frac{\partial\Phi}{\partial U_i}=u_i\,,\quad \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}=V;\ U_0=p,\ u_0=V\right).$$

Како је диференцијал слободне енергије Ψ дат једначином (61), а због (55)

$$(66)\qquad \Psi=\Psi(T,u_i)\,,$$

имаћемо, диференцирајући ову једначину,

$$(67)\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial T}=-S\,,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial u_i}=-U_i\qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial V}=-p\right).$$

Могу се такође извести слични обрасци и за случајеве када се за независне променљиве узимају S и u_i, S и U_i, E_i и u_i, E_i и U_i.

Низ функција које смо увели за карактеристику стања тела или система служи и за постављање услова равнотеже. Зауставимо се на овом појму, јер он у Термодинамици има смисао који треба сада да прецизирамо. У Механици имамо за апсолутну равнотежу неког материјалног система услов, да је убрзање сваке његове тачке једнако нули и нашли смо критеријум—принцип могућних померања (§ 5 гл. I), према којем тотални рад сила на сваком могућном померању мора бити једнак нули, да би се систем налазио у равнотежи (потребан и довољан услов). Силе наравно не могу зависити од времена.

У Термодинамици, где долазе у обзир и промене топлотног стања, сматраћемо да се тело или систем налази у стању *равнотеже*, ако нема ни механичких промена ни топлотних.

У Механици се изостављају све топлотне појаве. Ако из ње узмемо услове равнотеже а при томе водимо рачуна и о топлотним појавама, ти услови ће важити у специјалним случајевима, на пр. за изотермичко стање тела, или за тело или систем чији су делови неједнако загрејани али не постоји ток топлоте (савршени непроводник топлоте, делови су адијабатски изоловани). Супротни гранични случај—промене само топлотног стања имали бисмо, кад бисмо занемарили све промене у самом телу, сем топлотних одн. промена температуре. Међутим за топлотне појаве везане су и механичке, јер при промени температуре наступају промене запремина, деформације делића тела, промене унутрашњих напона и обрнуто, за неке механичке, за трење — везане су топлотне појаве. Зато у условима равнотеже у Термодинамици треба да буде изражена и ова веза. Наравно, појаве су у природи компликованије, јер су за топлотне појаве везане и хемиске. Ако се, на пр., доведу у додир два тела, између њих може да наступи не само размена топлоте, него и процес хемиски који је скопчан са стварањем или губитком

извесних количина топлоте. Овакве је појаве много теже описати математичким путем и уврстити их у ред досада расматраних појава, јер је за њих неминовно потребно уводити нове појмове којима не располаже чиста Термодинамика. Међутим услови равнотеже, које ћемо сада поставити, такве су природе да њихова примена у проблемима Термохемије даје резултате који нису у супротности са посматрањима.

За сваки реверзибилни процес важи једначина (18)

$$dS = \frac{đQ}{T} , \tag{18}$$

док за иреверзибилни процес добивамо неједнакост, и то за бесконачно мали прираштај ентропије $dS = S_2 - S_1$ из услова (52), где ће онда отпасти знак интеграла са десне стране:

$$dS > \frac{đQ}{T} \tag{68}$$

или

$$đQ - TdS < 0 , \tag{68'}$$

или, најзад, због једначине (15),

$$dE_i - TdS - đA < 0 . \tag{66}$$

Ако се T не мења, онда према једнакости (55) можемо овај услов написати у облику

$$d\Psi - đA < 0 ; \tag{70}$$

док за реверзибилни процес имамо

$$d\Psi = đA . \tag{71}$$

Ако се систем налази у равнотежи, онда се неће све величине, које служе за карактеристику стања, мењати, — у првом реду температура.

Дакле, биће

$$dS = 0 , \qquad dE_i = 0 \qquad \text{и} \qquad d\Psi = 0 .$$

За даље формулисање услова равнотеже морамо искључити из расматрања иреверзибилне процесе, јер се они не могу довести у склад са овим условима. На пр., ако се систем налази у равнотежи, имамо $dS = 0$. Међутим за адијабатски иреверзибилни процес $đQ = 0$ и из услова (68) следује да је $dS > 0$. Зато у Термодинамици играју реверзибилни процеси ону исту улогу, коју су у Механици играла могућна померања. Свака бесконачно мала промена стања тела нека буде реверзибилни процес.

Сад можемо формулисати услове равнотеже узимајући у обзир околности под којима се налази систем (допунски услови).

Ако имамо адијабатски затворени систем ($đQ = 0$), због (18) мора бити за сваки могући реверзибилни процес (овде означавамо промене величина са δ)

(72) $$\delta S = 0 \ , \quad \delta E_i = 0 \ , \quad [\delta A_i = 0] \ .$$

Али можемо уочити системе које нису затворени (изоловани). Тада ћемо имати друге допунске услове. На пр., ако се систем одржава на истој температури а не врши се рад, имаћемо $\delta T = 0$, $\delta A = 0$ и, дакле, због (71)

(73) $$\delta \Psi = 0 \ .$$

Ако је реч о хомогеном телу, када је рад $\delta A = -p\delta V$, имаћемо услов (73), дакле, за изотермно-изохоричке услове, тј. $\delta T = \delta V = 0$.

Ако пак одржавамо систем на истој температури и истом притиску, имаћемо услове $\delta T = 0$, $\delta p = 0$ али $\delta A \neq 0$. Дакле из (71) следује

$$\delta (\Psi - A) = 0$$

или, ако је $\delta A = -p\delta V$, због једначине (57),

(74) $$\delta (\Psi + pV) = \delta G = 0 \, .$$

Услови (72), (73), (74) показују да, у стању равнотеже тела или система, одговарајуће функције треба да имају екстремне вредности у односу на вредности у блиским стањима, у која би тела могла да пређу због реверзибилних процеса. Према врсти екстремума добиваћемо и врсте равнотеже — стабилне или лабилне; на пр. ако ентропија има максималну вредност — равнотежа је стабилна.

Све наведене услове можемо сматрати као специјалне случајеве општег услова (в. једн. (63) и (60))

(75) $$\delta \Phi = \delta \Psi - \delta A + \Sigma u_i \delta U_i = 0 \ ,$$

из којег се они изводе када се узму у обзир поменути допунски услови.

§ 18 Термодинамички системи. Нернстова теорема. Зауставићемо се на подробнијој анализи особина тела које су потребне за проучавање топлотних стања. Зваћемо, по дефиницији, хемиски простим системом, *хомогеним*, онај чије се стање одређује температуром и запремином (или притиском), тј. овим двема независним променљивима. Ми смо извели једначину (последња од једн. 67)

(76) $$\frac{\partial \Psi}{\partial V} = -p \ ,$$

и знамо да слободна енергија Ψ простог система зависи такође само од две уочене променљиве, тј. да је

(77) $$\Psi = \Psi (V, T) \, .$$

Ако извршимо диференцирање, као што се тражи у једначини (76), добићемо са леве стране израз у који улазе величине V и T. Онда ова једначина није ништа друго него карактеристична једначина (1) решена по p. Зато и једначину (77) можемо сад сматрати за карактеристичну, која се, по Планку, зове *каноничка*. Слично расуђивање довело би нас и до друге једначине

(78) $$G = G(p, T).$$

кад бисмо узели у обзир услове (57), (65) и (62).

Из наведеног види се да при карактеристици једног система игра улогу слободна енергија.

Системом смо звали уопште скуп материјалних тела која посматрамо одвојено од осталих, а *фазе* су његови делови од којих сваки има одређене физичке особине, на пр. лед и вода су две различите фазе једног хемиски простог система. Ако се неки систем налази у равнотежи, а има гасовите делове, треба да разликујемо два случаја: 1) кад су ови делови одвојени неким преградама које спречавају мешање и, ако су они различити по хемиском саставу, тада имамо неколико гасовитих фаза; 2) кад нема преграда а гасови се измешају, биће само једна гасовита фаза.

У једном систему могу бити разне супстанце и опет је важно да се разликују два случаја: 1) када су могућне неке хемиске реакције и 2) када их нема. У другом случају имамо онда, при променама стања, прелазе извесних количина неке супстанце из једне њене фазе у другу. Из услова равнотеже (на пр. 73 или 74) могу се извести специјални облици равнотеже када има неколико супстанца (m) у r различитих фаза и када се не врше никакве хемиске реакције. Из ових услова следује, између осталог, т.зв. Џибсово правило о највећем могућном броју фаза у једном систему: $r \leqq m + 2$.*)

Ово правило важи, као што се сматра у применама, и када постоје хемиске реакције, ако се за број супстанца узима број простих система. У овим компликованим случајевима постоји низ појава а, због тога, и услова који отежавају засада прецизно математичко формулисање питања. Зато ћемо се задржати на оваквој дефиницији: два дела система налазе се у истој фази, ако за њих важе идентичне карактеристичне једначине. Као што следује из оног што је речено у почетку овог параграфа, можемо тврдити да једнаке количине таквих делова, за исте температуре и притиске, имају и исте слободне енергије (тј. за њих једначина (77) има исти облик, а једнаке су и бројне вредности Ψ**).

*) види на пр. G. Joos. Theoretische Physik стр. 446.

**) два комада истог кристала различитих димензија припадају истој фази само онда, ако занемаримо разлику површинских сила и, према томе, површинску енергију. Осим тога треба водити рачуна о специјалним *критичним фазама*, које одговарају *критичном стању*.

Систем који се састоји од неколико фаза зваћемо *хетерогени*. У хетерогеним системима могу се дешавати топлотне и механичке појаве или, поред ових, и друге, на пр. хемиске. Зауставићемо се на овом важном случају а пре свега на питању *афинитета* неке хемиске реакције, јер је оно одиграло улогу у извесним закључцима у Термодинамици. Хемиско сродство или афинитет реакције је тежња неких супстанца да врше једињења. Нећемо се заустављати на разним величинама које су се раније узимале за карактеристику ове особине. Сада се претпоставља (van't Hoff-ова идеја) да је опадање слободне енергије, одн. овоме еквивалентни рад при реверзибилном и изотермичком процесу, мера афинитета. Означимо ову величину са

$$\mathbf{A} = -\Delta\Psi \qquad (\Delta\Psi > 0)\,. \tag{79}$$

Када се реакција врши при константној запремини можемо написати Џибс-Хелмхолцову једначину (56) у облику

$$\Psi = E_i + T\left(\frac{\partial\Psi}{\partial T}\right)_V.$$

Одатле следује, ако тело прелази из стања 1 у стање 2 при $T = \text{const}$, и $\Delta\Psi = \Psi_2 - \Psi_1$, $\Delta E_i = E_{i2} - E_{i1}$:

$$\Delta\Psi = \Delta E_i + T\left(\frac{\partial\Delta\Psi}{\partial T}\right)_V.$$

Означимо ли још са E' негативну вредност промене унутрашње енергије $-\Delta E_i$, због услова (79), имаћемо једначину

$$\mathbf{A} - E' = T\left(\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial T}\right)_V \tag{80}$$

(истог облика као и (56)), коју треба да задовољава „афинитет" $\mathbf{A}$.

За случај пак реакција при константном притиску дефинишемо афинитет као негативну промену другог Џибсова потенцијала G:

$$\mathbf{A} = -\Delta G\,. \tag{81}$$

Тада морамо једначину (80) заменити другом. Независне променљиве су сада p и T. Према првој од једначина (65), где треба сменити општи израз за термодинамички потенцијал Φ са G, имамо

$$\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p = -S\,,$$

а из једначина (57) и (58) следује

$$G = J - TS = J + T\left(\frac{\partial G}{\partial T}\right)_p. \tag{82}$$

Узимајући опет прираштаје ових величина и услов $T = \text{const.}$ добивамо

$$\triangle G = \triangle J + T\left(\frac{\partial \triangle G}{\partial T}\right)_p$$

или, са ознакама (81) и $J' = -\triangle J$,

$$\mathbf{A} - J' = T\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_p, \tag{83}$$

тј. поново једначину сличну (56) или (80).

Из једначине (80), ако одбацимо индекс V, тј.

$$E' = \mathbf{A} - T\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}$$

следује

$$\int_0^T \frac{E'}{T^2}\,dT = \int_0^T \left(\frac{\mathbf{A}}{T^2} - \frac{1}{T}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right) dT = -\int_0^T \frac{\partial}{\partial T}\frac{\mathbf{A}}{T}\,dT.$$

Дакле је

$$\frac{\mathbf{A}}{T} - \left(\frac{\mathbf{A}}{T}\right)_0 = -\int_0^T \frac{E'}{T^2}\,dT,$$

где индекс $_0$ означава вредност написаног израза за $T = 0$.

Нека буде E_0' вредност E' за $T = 0$. Онда можемо ставити

$$\frac{\mathbf{A}}{T} - \left(\frac{\mathbf{A}}{T}\right)_0 = -\int_0^T \frac{E_0'}{T^2}\,dT - \int_0^T \frac{E' - E_0'}{T^2}\,dT$$

и, после интеграљења првог члана и лаке трансформације, налазимо

$$\mathbf{A} = E_0' - T\int_0^T \frac{E' - E_0'}{T^2}\,dT + \left(\frac{\mathbf{A} - E'}{T}\right)_0 T. \tag{84}$$

На сличан начин можемо из (83) извести једначину:

$$\mathbf{A} = J_0' - T\int_0^T \frac{J' - J_0'}{T^2}\,dT + \left(\frac{\mathbf{A} - J'}{T}\right)_0 T. \tag{85}$$

Ове једначине, због (80) и (83), дају

$$\mathbf{A} = E_0' - T\int_0^T \frac{E - E_0'}{T^2}\,dT + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_{V;\,T\to 0}$$

(86)

$$\mathbf{A} = J_0' - T\int_0^T \frac{J' - J_0'}{T^2}\,dT + \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_{p;\,T\to}$$

Као што следује из једначине (80), **A** није увек једнако E'. Но експериментални подаци за кондензоване системе, тј. за течна и чврста тела (гасови су, дакле, искључени), указују на то да је $\mathbf{A}_0$ коначно и да је

(87) $$\mathbf{A}_0 = E_0' .$$

Учинимо ову претпоставку. Тада из једначине (80) имамо

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\mathbf{A}-E'}{T}\right) = \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_V$$

и за последњи израз добивамо с леве стране неодређени облик $\frac{0}{0}$. Диференцирајмо зато по T бројитељ и именитељ па ћемо добити

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_0 - \left(\frac{\partial E'}{\partial T}\right)_0 .$$

Према Нернстовој претпоставци постоји једнакост

(88) $$\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_0 = \left(\frac{\partial E'}{\partial T}\right)_0 .$$

Онда имамо

(89) $$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T}\right)_V = 0 .$$

Ова једначина изражава Нернстову теорему. Ако се претпостави да она важи и за гасове (као што је то учинио и сам Нернст), онда ово води промени закона за идеалне гасове и њихових особина, коју зову „дегенерација“ гасова.

Вратимо се појмовима слободне енергије и другог термодинамичког потенцијала. Према условима (79) и (80) имамо

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} = \frac{\partial \Psi_1}{\partial T} - \frac{\partial \Psi_2}{\partial T} \quad \text{или} \quad \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial T} = \frac{G\partial_1}{\partial T} - \frac{\partial G_2}{\partial T} ,$$

и при томе Ψ и G задовољавају једначине (56), одн. (82), сличне (83).

Место да оперишемо са појмом афинитета и једначином (80) или (83), које су нас довеле до Нернстове теореме (89), можемо са Планком претпоставити да се услов (89) раставља у два, тако да ћемо добити два услова

$$\lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial \Psi_1}{\partial T}\right)_V = \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial \Psi_2}{\partial T}\right)_V = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial G_1}{\partial T}\right)_p = \lim_{T\to 0}\left(\frac{\partial G_2}{\partial T}\right)_p = 0 .$$

Онда, због првог услова из (67), одн. због услова који претходи једначини (82), добивамо

(90) $$S_0 = 0$$

и ова једначина изражава Нернст-Планкову теорему:

Ентропија сваког хемиски чистог, хомогеног чврстог или течног тела је једнака 0 када је апсолутна температура $T = 0$.

Из једначине (26) за изохоричке промене ($dv = 0$), а из једначина (35) и (19) за изобарске ($dp = 0$) следује

$$ds = \frac{c_v}{T} dT \qquad ds = \frac{c_p}{T} dT .$$

Ако се интеграле ови изрази у границама $(0, T)$ и узме у обзир услов (90), добива се

$$s = \int_0^T \frac{c_v}{T} dT , \qquad s = \int_0^T \frac{c_p}{T} dT .$$

Да би за коначне температуре ентропија имала коначне вредности, потребно је да ови интеграли конвергирају а, према томе, да c_v и c_p довољно брзо теже ка 0, када $T \to 0$. Сматра се да је овај услов испуњен за кондензоване супстанце за које отпада и разлика између c_v и c_p. Међутим за идеалне гасове остају специфичке топлоте коначне. Ова се тешкоћа заобилази поменутом „дегенерацијом" гасова. Постоји жеља да се Нернстова теорема замени т.зв. принципом недостижности апсолутне нуле:

„Немогућно је конструисати справу која би могла одузети неком телу сву топлоту, тј. расхладити га до апсолутне нуле".

Овај принцип, заједно са претпоставком да специфичке топлоте теже ка нули када апсолутна температура тежи ка нули, еквивалентан је по садржају са Нернстовом теоремом, која се, понекад, зове и III принцип Термодинамике.

§ 19. Кинетичка теорија материје. Други начин проучавања топлотних појава разликује се од претходног, феноменолошког, тиме што у његовој основи лежи атомска хипотеза. Претпоставку о непрекидном распореду материје замењујемо, дакле, идејом о дискретној структури физичких тела. Очевидно је да се због тога морају увести и нове претпоставке, јер треба прецизирати склоп делића од којих се састоји неко тело. Извесне идеје атомске теорије изнели смо већ у § 0.6. Идеја о најмањим честицама материје које се даље не могу делити, о атомима, претрпела је за последњих неколико деценија знатне измене. Али ове измене стоје у вези са скупом појава које ћемо проучавати доцније, после Теорије електрицитета, магнетизма и светлости. Овде ћемо се задржати на оном делу атомске теорије који се углавном развио у другој половини XIX века, поглавито у радовима Clausius-овим, Maxwell-овим и Boltzmann-овим.

Најлакше је било спровести доследно последице атомске хипотезе код гасова; за друга два агрегатна стања материје, течно и чврсто, ово је скопчано са врло великим тешкоћама. Најпростија претпоставка да је идеалан гас скуп материјалних тачака међу којима не дејствују никакве силе ствара већ, на пр., могућност, да се изведе Бојл-Мариотов закон (наравно уз низ других претпоставака о вероватноћама распореда брзина тачака).

Али се убрзо показало да је недовољно сматрати атоме одн. молекуле гасова за материјалне тачке. Зато се у *Кинетичкој теорији гасова* узима даље, да се гас састоји од молекула, делића коначних димензија, да се они стално и брзо крећу описујући праволиниске путање (ако се занемарује дејство спољњих сила), да се често сударају и зато мењају своје брзине. Даље се претпоставља да је број молекула врло велики, да су њихове димензије врло мале према међусобним растојањима, да су молекули једног гаса истог облика и једнаких маса. Што се тиче њихове основне физичке особине, сматра се да се молекули понашају као потпуно еластичне лопте.

Досада побројане претпоставке већ показују колики је њихов низ када се ствара теорија на основи атомске хипотезе. А овај се низ још допуњује и другим претпоставкама, кад треба да се узму у обзир извесна стања гасова. Дакле, прецизирање опште идеје о дискретној структури материје повлачи за собом низ претпоставака које се могу смењивати а чију оправданост налазимо, наравно, само у закључцима теорије, које накнадно можемо упоређивати са резултатима експеримената.

Према досад израженом схватању, сваки гас је механички систем, скуп материјалних делића*) и у начелу може се одредити кретање сваког делића помоћу метода Механике. Зато се Кинетичка теорија гасова зове још и *механичка* или *динамичка*. Али број молекула је, чак и у врло малој запремини, врло велики и стварно израчунавање путања и кретања молекула је немогућно. Стога се на проучавање особина гасова примењују методе Теорије вероватноће, методе Статистике која оперише са великим бројем објеката. Ниже ћемо видети како се ово изводи у појединим питањима на која се наилази у Теорији топлоте.

У Кинетичкој теорији гасова се поставља прво веза између притиска гаса p, масе молекула m, средње вредности квадрата брзине v^* и броја молекула у јединици запремине N $\left[p = \frac{Nm v_*^2}{3}\right]$. Ако се у неком суду налази неколико гасова, средња вредност кинетичке енергије молекула биће за све гасове иста. Ова средња вредност кинетичке енергије $\left(\frac{mv_*^2}{2}\right)$ узима се за меру температуре. Дакле, уколико је виша температура утолико се брже крећу молекули.

---

*) у унутрашњости сваког делића материја је распоређена непрекидно.

Ма да се брзине кретања молекула стално мењају (услед судара) врло је вероватно да постоје извесни закони распореда брзина. За гас који се налази у механичкој равнотежи, тј. кад се не примећује кретање његових делова, као и термичкој, тј. кад је у њему свугде иста температура, — извео је Максвел закон распореда брзина (уз извесне специјалне претпоставке): вероватноћа (W) да брзина неког молекула пада у интервал (v_*, $v_* + dv_*$) дата је изразом

$$W = \frac{4}{\sqrt{\pi}\alpha^3} v_*^2 e^{-\frac{v_*^2}{\alpha^2}} dv^* ,$$

где је α највероватнија брзина молекула гаса. Узимајући у обзир дејство спољњих сила на молекуле, Boltzmann је уопштио Максвелов резултат. Ако означимо са N_0 број молекула у јединици запремине горњег слоја гаса у суду, са N — број молекула које имају брзине у интервалу (v_*, $v_* + dv_*$), са χ потенцијал спољњих сила, нови закон гласи*)

$$N = \frac{4N_0}{\sqrt{\pi}\alpha^3} v_*^2 e^{-\frac{1}{\alpha^2}(v_*^2 + 2\chi)} dv_* .$$

На основи претпоставака Кинетичке теорије дао је Максвел објашњење унутрашњег трења у гасовима које, према овој теорији, не зависи од притиска, запремине или густине гаса, но зависи од температуре.

Лако се објашњава и провођење топлоте. Молекули који долазе из топлијих делова гаса доносе у хладније делове већу кинетичку енергију и доприносе повишењу температуре, док молекули који долазе из хладнијих у топлије делове, са мањом кинетичком енергијом, смањују у њима средњу вредност кинетичке енергије, дакле и температуру.

§ 19.1 Примене Болцманове статистике. Према основној идеји Кинетичке теорије материје, сматрајмо да се тела састоје од молекула, а атоми да су „једноатомни молекули“ хемиских елемената. Сваки молекул је објект у смислу Статистике (§ 0.5). Извесно одређено тело састоји се из великог али коначног броја молекула, за који ћемо претпоставити да се не мења. Свака величина која је пропорционална броју молекула биће пропорционална, дакле, маси тела.

Сваки молекул има одређену енергију ($e_к$). Нека буде N укупан број молекула, а $N_к$ — број молекула који имају енергију $e_к$. Цео скуп молекула има онда *унутрашњу* енергију

(91) $$E = \Sigma N_к e_к .$$

*) Извођење ових закона види, на пр., у чланку G. Jäger, Die kinetische Theorie der Gase und Flüssigkeiten. Hdb. d. Physik. B.IX.

Сматрајмо да су $e_к$ и E оне величине ($u_к$ и U), које смо у Статистици (§ 0.5) увели и које су везане за објекте. Оне су функције неких параметара p_i, и њихове вредности зависе од стања. Претпоставимо да је распоред објеката, молекула, канонички, тј. такав да његов логаритам статистичке вероватноће (W) има екстремну вредност. Као што смо видели у § 0.5, између уведених величина и модула распореда θ постоје везе (75—79) § 0.5; узмимо од ових сада три, замењујући U и $u_к$ са E и $e_к$:

$$(92) \qquad E = N\Sigma e_к e^{\frac{\psi - e_к}{\theta}}, \quad \omega_к = \frac{N_к}{N} = e^{\frac{\psi - e_к}{\theta}}, \quad \Sigma\omega_к = \Sigma e^{\frac{\psi - e_к}{\theta}} = 1,$$

где је (в. једначине (76) и (78) § 0.5)

$$(93) \qquad \psi = -\theta \ln \Sigma e^{-\frac{e_к}{\theta}}, \quad \Psi = N\psi.$$

Осим тога је (једначина (79) § 0.5)

$$(94) \qquad \ln W = \frac{E - \Psi}{\theta},$$

E, Ψ и W функције су, дакле, параметара p_i и θ.

Извешћемо два закона који се односе на канонички распоред енергије.

Претпоставимо да се вредности параметара (p_i) промене за dp_i. Онда ће се променити и вредност енергије сваког молекула за

$$de_к = \Sigma \frac{\partial e_к}{\partial p_i} dp_i$$

а, према једначини (91), промениће се и енергија E за

$$(95) \qquad đE = \sum_к \sum_i N_к \frac{\partial e_к}{\partial p_i} dp_i.$$

Ову промену означили смо са $đE$, јер она није тотални диференцијал функције E која зависи и од величине θ. Претпоставимо да је ова промена параметара, одн. стања самога скупа, скопчана једино са радом у унутрашњости тела, тј. да се цео овај процес врши као да је скуп молекула изолован. Онда ће, на основи принципа о одржању енергије, који важи и за овај случај, тај рад бити

$$(96) \qquad đA = -đE.$$

Због друге од једначина (92) и (95) можемо написати израз за $đA$ у облику

$$đA = -N\sum_i dp_i \sum_к \frac{\partial e_к}{\partial p_i} \omega_к.$$

Диференцирајући трећу од једначина (92) добивамо

$$\frac{1}{\theta}\sum_{\kappa}\frac{\partial}{\partial p_i}(\psi - e_\kappa)\, e^{\frac{\psi - e_\kappa}{\theta}} = 0$$

или

$$\sum_{\kappa}\omega_\kappa \frac{\partial e_\kappa}{\partial p_i} = \frac{\partial \psi}{\partial p_i}\,.$$

Зато је сада

$$đA = -N\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,dp_i\,.$$

Узмимо тотални диференцијал функције Ψ (93):

$$d\Psi = N\Sigma\frac{\partial\psi}{\partial p_i}\,dp_i + N\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\,d\theta\,,$$

и нађимо из једначине (93) извод

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\ln\Sigma e^{-\frac{e_\kappa}{\theta}} - (\Sigma e_\kappa e^{-\frac{e_\kappa}{\theta}}) : \theta\Sigma e^{-\frac{e_\kappa}{\theta}}\,.$$

Због једначина (93) и (92) овај се израз може написати у облику

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = \frac{\psi}{\theta} - \frac{E}{N\theta} = \frac{\Psi - E}{N\theta}\,.$$

Дакле, замењујући ове изразе у $đA$ добивамо

(97) $$đA = -d\Psi - \frac{E-\Psi}{\theta}\,d\theta$$

и знамо да $đA$ није уопште тотални диференцијал.

Топлоту према Кинетичкој теорији материје схватамо као енергију молекула тела. Претпоставимо да се телу доводи споља количина топлоте, тј. енергија, $đQ$. Она ће отићи, делом, на промену вредности параметара p_i и тада ће се вршити рад $đA$, делом, на промену модула распореда θ. Означимо са dE промену унутрашње енергије која ће бити тотални диференцијал, јер сад одговара случају када се мењају параметри p_i и θ.

Према закону о одржању енергије биће

$$đQ = dE + đA$$

или

(98) $$dE = đQ - đA\,.$$

Ако сменимо $đA$ његовим изразом (97) и поделимо ову једначину са θ добићемо

(99) $$\frac{đQ}{\theta} = d\,\frac{E-\Psi}{\theta}$$

или, због (94),

$$\frac{đQ}{\theta} = d(\ln W)\,. \tag{100}$$

Да видимо улогу коју модуо распореда θ игра у Термодинамици. Зато уочимо два тела која се додирују. Свако од њих је скуп молекула, и нека W_1 и W_2 буду статистичке вероватноће распореда енергије молекула у првом, одн. у другом телу. Сваки од распореда, комплекса, у првом телу може да постоји у исто доба са сваким од комплекса у другом. Према томе, статистичка вероватноћа неког распореда у целом систему биће

$$W = W_1 W_2\,,^{*)} \tag{101}$$

као што је познато из Теорије вероватноће. Нека буду θ_1 и θ_2 вредности модула распореда које одговарају каноничким распоредима. Када W, одн. $\ln W$ има екстремну вредност, можемо ипак и у том случају замислити промене енергије појединих делова које неће мењати његову вредност, наиме вредност

$$\ln W = \ln W_1 + \ln W_2\,. \tag{102}$$

Претпоставимо да први део добива количину топлоте (енергију) $đQ$, док је други део губи. Из једначине (100) следује тада

$$\frac{đQ}{\theta_1} + \frac{-đQ}{\theta_2} = d\ln W_1 + d\ln W_2\,. \tag{103}$$

Ако је $\theta_1 = \theta_2$, биће, због (102) и (103), $d\ln W = 0$, тј. $\ln W$ задржава своју вредност. У овом случају, дакле, систем се налази у *статистичкој равнотежи*.

Ако $\ln W$ расте, тј. $d\ln W > 0$, из једначина (102) и (103) следује

$$\frac{đQ}{\theta_1} - \frac{đQ}{\theta_2} > 0$$

тј. $\theta_2 < \theta_1$, јер сматрамо да је $đQ$ позитивно. Дакле, енергију даје оно тело које има већи модуо распореда, а прима оно које има мањи модуо.

Из реченог постаје очевидно, да модуо распореда игра улогу температуре. Могли бисмо ставити да је $\theta = \theta(T)$.

Но ми ћемо узети најпростији облик функционалне везе:

$$\theta = \kappa T\,, \tag{104}$$

где је T апсолутна температура, а κ т. зв. Болцманова константа. Њена је вредност $\kappa = 1.34.10^{-16}\,\mathrm{erg\,grad}^{-1}$.

---

*) Ако има више тела у систему $W = W_1 W_2 W_3 \ldots$

Ако још ставимо

(105) $$S = \kappa \ln W$$

добићемо, место (100), једначину

(106) $$\frac{đQ}{T} = dS$$

која, као што знамо, изражава други принцип Термодинамике за реверзибилне процесе. Према *Болцманову постулату* (105), ентропија тела је, дакле, сразмерна логаритму статистичке вероватноће каноничког распореда топлотне енергије.

Из једначина (105) и (102) следује одмах прва основна особина ентропије, да је ентропија S система неколиких тела једнака збиру ентропија појединих тела S_1, S_2, ...

Обрасци (94), (93) и (92) показују да је $\ln W$ пропорционалан броју N молекула и зато имамо другу основну особину: ентропија је пропорционална броју молекула, тј. маси тела.

У § 0.5 (в. образац (72) и даље) видели смо да уопште при промени распореда скуп тежи да повећа статистичку вероватноћу. Из овога следује, због једначине (105), раније поменута (стр. 166) теорема: Сваки процес скопчан са прелазом енергије у унутрашњости затвореног система (тела) тежи да повећа ентропију тела (случај иреверзибилних процеса).

Видели смо како се у Кинетичкој теорији материје долази до два принципа Термодинамике, па ћемо се зауставити још на неким резултатима које ћемо углавном применити на гасове.

При извођењу једначине (97) имали смо израз

$$đA = -N\Sigma \frac{\partial \psi}{\partial p_i} dp_i$$

који ће, због друге од једначине (93), имати још и облик

(107) $$đA = -\Sigma \frac{\partial \Psi}{\partial p_i} dp_i .$$

Изводе по параметрима слободне енергије (са знаком —) зовимо *статистичке силе* (упореди са једн. (60) § 17) а број параметара — *степен слободе* система.

Одредимо средњу вредност енергије (e_m) молекула. Да бисмо имали општије формулисање, претпоставимо да стање система (тела) карактеришу неке независне величине q_i ($i = 1, 2 \ldots r$). Ове променљиве могу бити статистичке силе, модуо распореда, сами параметри p_i или неке функције ових. Уочимо низ неких интервала (q_i^0, $q_i^0 + \Delta q_i$), $i = 1, 2 \ldots r$. Са гледишта Кинетичке теорије материје, стање система је одређено ако знамо да вредности променљивих q_i падају у ове интервале.

Испитајмо даље случај кад је енергија молекула квадратна функција s величинâ и дата изразом

$$e_к = \sum_{j=1}^{s} a_{jк} q_j^2 , \tag{108}$$

где су $a_{jк}$ константе. Наравно она има за разне молекуле различите вредности. Претпоставимо да се вредности величина $q_{s+1}, q_{s+2}, \dots q_r$ мењају у одређеним границама и нека буде израз

$$\Omega = \int\int\underset{r-s}{\cdots}\int dq_{s+1} \cdots dq_r \tag{109}$$

коначна величина.

Количник

$$e_m = \frac{E}{N} \tag{110}$$

назовимо *средњом вредношћу енергије молекула.*

Из прве и треће једначине (92) следује да је овај израз једнак

$$e_m = \left(\Sigma e_к e^{-\frac{e_к}{\theta}}\right) : \left(\Sigma e^{-\frac{e_к}{\theta}}\right). \tag{111}$$

Израчунајмо прво именитељ. Због израза (108) биће

$$e^{-\frac{e_к}{\theta}} = e^{-\frac{a_{1к}q_1^2}{\theta}} e^{-\frac{a_{2к}q_2^2}{\theta}} \dots e^{-\frac{a_{sк}q_s^2}{\theta}}.$$

Збир ових израза, за све могућне вредности енергије $e_к$, тј. за све могућне вредности променљивих q_i добићемо ако помножимо ову једначину са $\Delta\tau = \Delta q_1 \Delta q_2 \dots \Delta q_r$ и интегралимо. Како су променљиве независне, то ће вишеструки интеграл бити једнак производу појединих интеграла. И, узмемо ли у обзир услов (109), имаћемо

$$\Delta\tau \Sigma e^{-\frac{e_к}{\theta}} = \Omega \int e^{-\frac{a_{1к} q_1^2}{\theta}} dq_1 \dots \int e^{-\frac{a_{sк}}{\theta} q_s^2} dq_s .$$

Сваки од ових s интеграла треба узети у границама $-\infty, +\infty$ јер ћемо величине $q_1, \dots q_s$ мењати у тим границама — како бисмо увели у расматрање сва могућна стања. Ако су q_i брзине, нећемо наравно имати бесконачно велике брзине молекула. Али код врло великог броја молекула у телу, ове брзине ће се мењати у врло широким границама.

Онда сваки од ових интеграла има облик

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

и једнак је $\sqrt{\pi}$, као што је познато из Анализе.

Зато је

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a_{jk}}{\theta} q_j^2} dq_j = \sqrt{\frac{\theta}{a_{jk}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a_{jk}}{\theta} q_j^2} d\left(q_j \sqrt{\frac{a_{jk}}{\theta}}\right) = \sqrt{\frac{\theta\pi}{a_{jk}}}$$

и, према томе,

$$\Sigma e^{-\frac{e_k}{\theta}} = \frac{\Omega}{\Delta\tau} \frac{\theta^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{a_{1k} a_{2k} \dots a_{sk}}} . \tag{112}$$

Да бисмо нашли бројитељ у изразу (111), диференцирајмо по θ обе стране последње једначине. Имаћемо

$$\frac{1}{\theta^2} \Sigma e_k e^{-\frac{e_k}{\theta}} = \frac{\Omega}{\Delta\tau} \frac{s}{2} \frac{\theta^{\frac{s}{2}-1} \pi^{\frac{s}{2}}}{\sqrt{a_{1k} a_{2k} \dots a_{sk}}}$$

и количник два последња збира даје средњу вредност енергије (кинетичке) молекула

$$e_m = s \frac{\theta}{2} = \frac{ks}{2} T , \tag{113}$$

тј. ова средња вредност зависи само од модула распореда, одн. од апсолутне температуре тела, и броја величина q_j, од којих зависе енергије појединих молекула.

Најпростији је случај једног степена слободе. Узмимо за параметар $p = \frac{V}{N}$, где је V запремина система, који ћемо звати *статистички хомогени* систем, а N број молекула.

При повећању запремине тела (система) врши се рад, јер на спољњу површину дејствује притисак p. Онда је овај рад, као што смо већ израчунали (§ 15 обр. (15) и (17), где треба променити знак (јер се запремина повећава), једнак

$$đA = p dV = Np\, dp .$$

Упоредимо ли овај израз са (107) добићемо

$$p = -\frac{\partial \Psi}{\partial V} . \tag{114}$$

Због константности N, можемо за параметар узети и запремину V, а из једначина (93) и (112) следује

$$\Psi = -N\theta \ln \frac{\Omega \theta^{\frac{s}{2}} \pi^{\frac{s}{2}}}{\Delta\tau \sqrt{a_{1k} \dots a_{sk}}} .$$

Претпоставимо да су извесни q_i координате појединих молекула и да њихове промене дају запремину тела: $\int\int\ldots\int dq_1 \ldots dq_r = V$. Онда ће бити

$$\Omega = \Omega_1 V,$$

ако са Ω_1 означимо други део интеграла Ω. Претходни израз за Ψ имаће онда облик

$$\Psi = -N\theta \ln V - \Psi_1,$$

где члан Ψ_1 не зависи од V, те је, дакле,

$$\frac{\partial \Psi}{\partial V} = -\frac{N\theta}{V}.$$

Једначина (114) трансформише се у

$$pV = N\theta,$$

или, због услова $\theta = \kappa T$, у

(115) $$pV = \kappa NT.$$

Претпоставимо да је идеални гас овакав статистички хомогени систем молекула. Означимо са n — број грам-атома или грам-молекула у запремини V, са L — Лошмитов број, тј. број молекула у једном грам-молекулу. Онда је

$$N = nL.$$

Једначину (115) замењује сада ова:

$$pV = \kappa nLT.$$

Назовимо $\kappa L = R$ *универзална гасна константа*. Болцманова константа је, дакле,

(116) $$\kappa = \frac{R}{L},$$

а

(117) $$pV = nRT,$$

тј. добили смо Ге-Лисаков закон (10″) § 16.

А енергија идеалног гаса биће, због (110) и (113),

(118) $$E = Ne_m = \frac{s}{2} nRT.$$

Авогадров закон, наиме, да: „при истом притиску (p) и истој температури (T) једнаке запремине гасова имају једнаке бројеве молекула (N)“, и Далтонов закон, да је: „притисак мешавине гасова једнак

збиру појединих притисака $(p_1, p_2 \ldots)$" — очевидне су последице једначине (117).

§ 20 Топлотно зрачење. Основна идеја квантне хипотезе. Питања Термодинамике којима смо се досада бавили односила су се на карактеристику топлотних стања тела. Но овим питањима нису још обухваћене све топлотне појаве. Као што смо видели, постоје три начина преношења топлоте. Први, провођење топлоте, могли смо проучити полазећи од претпоставке о непрекидности материје. У другом, у конвекцији, игра улогу и механички процес — струјање, због којега се, при мешању течних или гасовитих маса, такође преносе извесне количине топлоте од једног дела на други. Међутим, ни феноменолошко схватање топлотних појава, ни методе Кинетичке теорије материје, у облику са којим смо се упознали, нису били досада довољни за објашњење трећег начина преношења топлоте — зрачења. Из посматрања је познато да извесне количине топлотне енергије преносе зраци који иду од сваког тела, било усијаног, било тамног. Очевидно је да читав низ могућних питања о томе, како се врши овај пренос, стоји у тесној вези са зрачењем светлости. Зато, уствари, треба проучавати све врсте зрачења заједно. Задржаћемо се овде на неким познатим особинама топлотног зрачења.

У основи садашњег објашњења топлотног зрачења налази се хипотеза коју је 1900 г. поставио M. Planck. Према једној од теорија светлости, са којима ћемо се ниже упознати, зрачење се састоји у томе што се од тела које зрачи распростиру електромагнетски таласи. Постоје дакле у телу извори у којима се ови таласи изазивају и, према Кинетичкој теорији материје, сваки молекул игра улогу таква извора. О самом механизму постанка таласа немамо још података, зато ћемо само претпоставити да се молекул понаша као линеарни хармониски осцилатор, што значи да се могу за карактеристику промена његова стања применити расуђивања која смо навели у § 2.5 (1). У претходном параграфу међутим, говорећи о енергији молекула, нисмо постављали никакве накнадне услове, другим речима сматрали смо да су подједнако могућне ма какве вредности енергије. Нека буде ν фреквенција осцилатора. Према Планковој хипотези, енергија ових осцилатора (молекула) може да има само одређене вредности, наиме, вредности једнаке целом броју величина $h\nu$, где је h константа.

Ова константа, т.зв. *квант дејства* или *Планкова константа* износи

$$h = 6{,}55.10^{-27} \text{ erg sec} .$$

Имамо дакле само дискретни низ могућних вредности енергије осцилатора

$$e_n = n h\nu , \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{119}$$

Из ове једначине види се одмах да h има димензије производа енергије и времена, тј. дејства, јер фреквенција $\nu = \frac{1}{T}$ (T — периода осцилација) има димензију $\sec^{-1}$.

Са периодичким променама стања молекула, извора таласа, довели смо у везу линеарне хармониске осцилације материјалне тачке и сада, ради извесног олакшавања претставе, можемо дати и геометриску интерпретацију Планкове хипотезе. Нека буде q координата поменуте материјалне тачке, а p генералисани импулс (в. једначину (26) § 3.3). Кретање линеарног осцилатора одређено је једначином (в. (35) § 2.5)

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \kappa^2 q = 0\,, \qquad \kappa^2 = \frac{a}{m}\,,$$

а сила $-aq$ има потенцијал $\frac{1}{2}aq^2$. Кинетичка енергија је једнака $\frac{m}{2}q'^2$. Дакле је $p = mq' = \frac{\partial T}{\partial q'}$. Израз за кинетичку енергију имаће онда облик $\frac{1}{2m}p^2$. Претпоставимо да овај осцилатор има тоталну енергију (119), тј. да ће, према закону о одржању енергије (§ 2.3 једн. 25), бити

$$\frac{1}{2}aq^2 + \frac{1}{2m}p^2 = nh\nu\,.$$

У равни променљивих q и p уочимо фигуративну тачку која се креће дуж елипсе, одређене овом једначином, чије ће, дакле, полуосе бити $A = \sqrt{\frac{2nh\nu}{a}}$, $B = \sqrt{2mnh\nu}$. Простор (дводимензионални у нашем случају) променљивих p и q зовемо *простор фаза*, а ову елипсу *фазна путања*; њену пак површину:

$$J = \int p\,dq = \pi AB\,,$$

фазни интеграл. Како је $\nu = \frac{\kappa}{2\pi}$ (§ 2.5), имаћемо

$$J = nh\,. \tag{120}$$

Ова једначина даје друго формулисање Планкове хипотезе: Могућна су само таква стања осцилатора, одн. молекула, за који је фазни интеграл једнак целом броју елементарних кванта дејства. Зауставимо се на последицама ове хипотезе.

У претходном параграфу, приликом израчунавања израза

$$\Sigma e^{-e_K/\theta}\,,$$

претпоставили смо да су могућне све вредности енергије $e_к$ и зато смо могли претворити овај збир у интеграл. Но сада, пошто смо увели квантну хипотезу, имамо дискретни низ вредности енергије (119), а у исти мах низ вредности $J = h, 2h, \ldots$ У равни qp одговарају овим вредностима елипсе и површина прстена између две узастопне елипсе биће увек h. Сматрајмо да унутрашњој елипси одговара вредност енергије — нула, првом прстену — h итд.. Онда су ове вредности енергије подједнако вероватне и узећемо их у обзир приликом израчунавања горњег израза:

$$\Sigma e^{-e_к/\theta} = 1 + e^{-h\nu/\kappa T} + e^{-2h\nu/\kappa T} + \ldots$$
$$= 1 : \left(1 - e^{-h\nu/\kappa T}\right),$$

јер смо имали геометриску прогресију, а $\theta = \kappa T$.

Овај збир стоји у изразу (93) за слободну енергију, али да бисмо је израчунали, треба да учинимо извесне претпоставке о природи уочена тела. Неко ово тело буде један мол двоатомног гаса. Облик спектра таква гаса иде у прилог претпоставци, да у молекулу таква гаса атоми врше осцилације око тежишта молекула у правцу његове осе. Сматрајући овакве молекуле за просте линеарне осцилаторе и узимајући у обзир да у једном молу има L молекула, имаћемо за слободну енергију (93) израз

$$\Psi = RT \ln\left(1 - e^{-h\nu/\kappa T}\right), \tag{121}$$

јер је $\kappa L = R$ (образац 116).

Сада можемо помоћу обрасца (56), наћи унутрашњу енергију

$$E_i = \Psi - T\frac{\partial \Psi}{\partial T} = \frac{Rh\nu}{\kappa}\frac{e^{-h\nu/\kappa T}}{1 - e^{-h\nu/\kappa T}}$$

или

$$E_i = \frac{Rh\nu}{\kappa}\frac{1}{e^{h\nu/\kappa T} - 1}. \tag{122}$$

За високе температуре, када се последњи количник развије у ред и зауставимо се на другом члану, налазимо

$$e^{\frac{h\nu}{\kappa T}} = 1 + \frac{h\nu}{kT} + \ldots$$

и

$$E_i = RT.$$

Ова вредност енергије поклапа се са (118), јер у нашем случају број параметара (p и q) $s = 2$, а узели смо један мол, тј. $n = 1$. Али за ниже температуре, вредност енергије према теорији, која се оснива

на квантној хипотези, разликује се битно од (118). Чим смо добили израз за енергију (122) лако је наћи и одговарајући израз за специфичку топлоту при константној запремини c_v према обрасцу (22), где само треба променити ознаку e_i у E_i, јер сад са e_i означавамо вредности енергије појединих молекула.

Као други пример споменућемо случај чврстих тела. За њих се претпоставља да атоми могу вршити осцилације око својих положаја равнотеже и то у сва три правца. Зато се још узима да се овакав систем атома може упоредити са системом од троструког броја осцилатора. Према томе ће се утростручити, на пр., и вредност поменуте специфичке топлоте c_v. Подробније је обрадио питање специфичке топлоте чврстих тела Debye.

Иако смо учинили извесне претпоставке о постанку зрачења, онај део Теориске физике са којим смо се упознали није још довољан за потпуну анализу овог питања као ни питања апсорпције. Зато ћемо навести само експерименталне чињенице и законе чије ће теориско образложење бити могућно тек пошто се будемо упознали са електромагнетском теоријом светлости.

Постоје два основна питања која се тичу зрачења: 1) како се може наћи потпуно зрачење за јединицу површине неког тела и за јединицу времена, и 2) како се распоређује зрачење с обзиром на разне спектралне области, јер је познато да тела зраче зраке разних таласних дужина, одн. шаљу таласе разних фреквенција.

Прва је чињеница, која олакшава одговор на прво питање, да зрачење неког тела не зависи од других тела у његовој околини. Друга је да зрачење сваког тела можемо наћи, ако знамо зрачење т.зв. *потпуног радијатора* или потпуно црног тела. По дефиницији, потпуно црно тело апсорбује све зраке који на њега падају и може да зрачи зраке свих таласних дужина; а везу између његова зрачења и зрачења неког другог тела даје *Кирхофов* закон. Означимо са K^* зрачење потпуно црног тела, тј. количину енергије која прође кроз јединицу површине за јединицу времена, са K_λ ту величину за извесно тело, са a_λ' средњу вредност коефицијента пропорционалности за зраке којима одговарају таласне дужине у интервалу $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$. Кирхофов закон претставља једначина

$$K_\lambda = a_\lambda' K^* , \tag{123}$$

где се a_λ' зове *апсорпциона способност*.

А зрачење потпуно црног тела даје Stefan-Boltzmann-ов закон:

$$K = \sigma T^4 , \tag{124}$$

тј. количина енергије коју зрачи потпуно црно тело са јединице повр-

шине, за јединицу времена, пропорционално је четвртом степену апсолутне температуре. Коефицијент пропорционалности је константа

$$\sigma = 0{,}76 \times 10^{-10} \frac{\text{Gr. kal.}}{\text{cm}^2 \times \text{min}} . \tag{125}$$

Стефан-Болцманов закон може да се изведе на основи Планкова закона о зрачењу, који даје одговор на друго од поменутих питања. Према овом закону, за црно тело зрачење (неполаризовано) таласа, чије се фреквенције налазе у интервалу $(\nu, \nu + d\nu)$, дато је обрасцем

$$2 K_\nu d\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2 (e^{h\nu/\kappa T} - 1)} d\nu , \tag{126}$$

где је c брзина распростирања таласа, а остале величине су већ познате.

§ 20* Еволуција схватања природе топлоте. Схватање природе топлоте, као и других стања материјалних тела, мењало се у току векова, а било је и у истим епохама разлике у схватањима појединаца. Филозофи јонске школе сматрали су ватру за четврти елемент (поред земље, воде и ваздуха), који и изазива топлоту — стање тела. Али постојало је и мишљење према којем су ватра и топлота биле идентификоване. Од старог доба развијају се и две претставе о природи топлоти: према једној, у стварању топлотног стања игра улогу нека врста „течности" — неки флуидум, према другој — кретање делића материје. Испочетка су, код Платона, ове претставе донекле спојене: ако ватра (овај елемент, пошто има способност да продире у тело, сматрамо за неку врсту „течности") продире у тело, почиње кретање малих честица тела.

Новија тумачења природе топлоте почињу са Roger-ом Bacon-ом (1214—1294) *) који види узрок топлоте у тежњама честица тела једних ка другима. И за J. Кеплера је топлота кретање малих честица, међутим Галилеј сматра топлоту за флуидум. У XVII веку, поред мишљења Fr. Bacon-а Веруламског, да се топлота састоји у треперењу честица, и R. Boyle-ова, који стоји на гледишту атомске хипотезе, имамо Њутново које се разликује од других. Топлота је по њему осцилација етра. J. Mayow мисли да се горење састоји у брзом кретању честица; овај процес правилно је схватио тек Lavoisier. У XVIII веку мишљења остају подвојена. D. Bernoulli (1738) сматра топлоту за резултат кретања честица. Овом се гледишту придружује L. Euler (1738), а, доцније, и Руђер Бошковић (1758). С друге стране, Chr. Wolff разрађује (1720) хипотезу о топлотном флуидуму, којем E. Stahl даје име флогистон. Флогистон је један од т.зв. imponderabilia, тј. нека врста течности које немају теже а могу да продру у тела. Он је свугде у природи, и поједина

*) *E. Hoppe*, Geschichte der Physik. Braunschweig. 1926.

га тела задржавају према својој способности. Lavoisier и Laplace у свом делу о топлоти (1784), излажући супротна схватања о природи топлоте, не одлучују се ни за једно ни за друго. Међутим М. Ломоносов стаје (1742 г.) одлучно на механистичко схватање топлоте и разрађује подробније њену механичку теорију као и Кинетичку теорију гасова. Анализујући три врсте кретања честица тела, наиме: транслацију, треперења и обртања, он долази до закључка који се разликује од осталих мишљења, он, наиме, види узрок топлотних појава у обртању делића тела. Убрзавање обртања у гасовима, на пр., изазива при сударима повећање и брзинâ транслаторног кретања. Стварање топлоте при трењу или удару било је за Ломоносова један од разлога за одбацивање претпоставке о флогистону, што је доцније навело и Rumford-а на исту мисао. Ма да је низом експеримената Ломоносов доказао нетачност Сталова и Бојлова гледишта, ово се за извесно време ипак одржало. Чак су га заступали и Biot (1829) и Poisson (1835). Извесну корист је оно несумњиво донело, јер је олакшало примену математичке анализе на топлотне појаве, нарочито на проблем провођења топлоте, који је формулисао Fourier (1812, 1822). А видели смо да је и до данас од овог схватања сачувана терминологија. Још и Sadi Carnot (1824) полази од претставе топлоте као неке супстанције и само је у неким примедбама доводи у везу са кретањем молекула. Тек под утицајем Румфордових посматрања почиње у XIX веку развој механичке теорије топлоте, у чијој основи лежи Кинетичка теорија гасова. Gay-Lussac и Clapeyron доприносе овоме, а одређенији облик добива она у радовима Krönig-овим (1856), Clausius-овим (1857), van der Waals-овим (1873), L. Boltzmann-овим, Maxwell-овим и др. Упоредо су се развијале и претставе о склопу честица — атома и молекула, са којима ћемо се ниже упознати. До каквих резултата доводи примена математичке анализе у механичкој теорији топлоте видели смо у претходним параграфима. Овде ћемо само још ово споменути. Док се, према схватању на крају XIX века, у гасовима топлота испољава у транслаторним кретањима молекула, у чврстим телима, нарочито у кристалима, за које се узима решеткаста структура, тј. да се неутрални атоми или јони налазе у теменима правилних полиедара, она се састоји у треперењима ових честица око њихових положаја равнотеже. Но и на крају XIX века атомска хипотеза, па, према томе, и ово схватање топлоте имале су противника, на пр. Ostwald-а. И у XIX веку почело је играти велику улогу феноменолошко схватање топлоте. Видели смо како се онда проучава топлота као извесно стање тела, како се у том циљу дефинише низ величина, као што су количина топлоте, ентропија и друге. Болцману припада заслуга за начин којим се може поставити веза између овог схватања и Кинетичке теорије материје.

ГЛАВА IV

ЕЛЕКТРИЦИТЕТ И МАГНЕТИЗАМ

А. ЕЛЕКТРОСТАТИКА

§ 21.1 Основне претпоставке. Велику групу појава које су у наше доба постале нарочито важне сачињавају појаве које зовемо електричне. Њихово откриће везано је не за неко нарочито човечје чуло него за низ врло простих експеримената. Познато је наиме да низ тела (на пр. шипка од стакла или од смоле, ћилибар, грчки „електрон", итд.) трењем прелазе у извесно стање које се испољава на тај начин, што та тела могу да привлаче разна друга (лака) тела. Ово се стање тела зове *електрично* стање и његова се основна особина испољава у појави *пондеромоторне* силе, тј. силе која покреће материјална тела а која се пре прелаза дотичног тела у ово стање није могла запазити (*чињеница* 1). Даље знамо да се овакво стање може пренети с једног тела на друго путем додира (*чињеница* 2). Када се оно преноси на друго тело, види се да се тела могу поделити у две врсте: код једних се ова особина задржава само на месту додира, код других се електрично стање распростире по целом телу. Тела прве врсте зовемо: *изолатори* или *диелектрици*, тела друге врсте — *проводници* (*чињеница* 3; ова се још мора прецизирати, јер низ појава сведочи да свако тело у природи има обе особине само у разној мери). Постоје две врсте електричних стања, од ових зовемо *позитивно*, на пр., оно које се појављује код стакла, а *негативно*, оно, на пр., — код смоле (*чињеница* 4). Узрок електричног стања зовемо *електрицитет*; ако је неко тело прешло у ово стање, казаћемо да је *наелектрисано*. Постоје, дакле, преме садашњем схватању, које води порекло од Symmer-ове хипотезе, две врсте електрицитета. Низ експеримената показује да се при стварању електричних стања појављују

истовремено обе врсте електрицитета (*чињеница* 5) и да се оне могу раздвојити, тј. може се добити позитивно стање на једном проводнику, негативно на другом (*чињеница* 6). На проводнику се ово стање одржава трајно, ако је оно створено путем трења или додира — и то само у случају кад је изолован од земље; чим се споји са земљом, електрично стање ишчезава (*чињеница* 7).

Према првој чињеници, наелектрисано тело изазива поље сила, јер оно тежи да покрене неко друго материјално тело које се налази у његовој околини. Ову пондеромоторну силу можемо мерити и резултати овог мерења омогућују нам да уведемо величине које служе за карактеристику електричног стања. Ако узмемо два тела, две мале лоптице, од којих је једна наелектрисана, можемо, додирујући је неким наелектрисаним телом, мењати њено стање. И онда се запажа, ако се узајамни положај лоптица не мења, да се мења само интензитет силе. Из овог се може закључити, да се извесна особина електричног стања може карактерисати вредношћу једног скалара. Овај скалар зове се *количина електрицитета* или *оптерећење*, а механичка, пондеромоторна сила је са овим пропорционална. Ову чињеницу (*чињеница* 8), којом се даје дефиниција оптерећења, можемо изразити обрасцем

$$\mathfrak{K} = e\mathfrak{K}' , \tag{1}$$

где је $\mathfrak{K}$ сила којом наелектрисано тело дејствује на друго тело, а $\mathfrak{K}'$ вектор који зависи од положаја и стања другог тела, но не зависи од стања првог; сматрамо да је $e \gtrless 0$, према врсти електрицитета.

Количина електрицитета је нова физичка величина и можемо је мерити произвољно изабраном јединицом. Она је адитивне природе, тј. две спојене количине електрицитета e_1 и e_2 дају једну: $e_1 + e_2$. Ово значи да, ако први пут имамо електрично стање прве лоптице за које је $e = e_1$, а сила је $e_1\mathfrak{K}'$, други пут $e = e_2$ и $e_2\mathfrak{K}'$, а трећи пут поновимо начин на који смо први пут довели до оптерећења e_1, а затим продужимо и употребимо начин који доводи до e_2, на крају добивамо силу $\mathfrak{K}^* = (e_1 + e_2)\mathfrak{K}'$, тј. треће стање карактерише вредност скалара $e = e_1 + e_2$. Ако место првог тела узмемо два, са оптерећењима e_1 и e_2, и спојимо у једно, резултантно оптерећење биће $e_1 + e_2$ (*чињеница* 8').

Оптерећење изолованог наелектрисаног тела остаје константно уколико се не мењају спољњи услови (претпоставка — *чињеница* 9).

Coulomb је, мерећи силе којима се привлаче мале лоптице разноимених оптерећења, одн. одбијају ако су истоимених оптерећења, извео закон:

$$\mathfrak{K} = f\frac{ee_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 , \tag{2}$$

(*чињеница* 10), који треба да схватимо овако: ако замислимо два врло мала тела (у граничном случају две тачке) A и B, чија су оптерећења e и e_1,

ако означимо са $\mathfrak{r}_0$ јединични вектор правца AB и њихово растојање са r, — интензитет силе којом A дејствује на B биће пропорционалан оптерећењима а обрнуто пропорционалан квадрату растојања; правац силе поклапа се са AB, а смер зависи од врсте електрицитета. У исти мах тело B дејствује на A силом супротна смера, а истог правца и интензитета.

По Гаусову предлогу ставља се $f = 1$ и Кулонов закон узима облик:

$$\mathfrak{K} = \frac{ee_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 . \tag{2'}$$

За наелектрисана тела коначних димензија, може се добити израз за силу на основи претходног израза и *претпоставке* да, ако поделимо свако тело у бесконачно мале елементе чије су запремине dV_1 и dV_2, сила којом дејствује један од тих елемената на други биће бесконачно мала, тј. за карактеристику стања бесконачно малих елемената долазе у обзир бесконачно мале вредности оптерећења: de_1, одн. de_2. Сила којом прво тело дејствује на друго биће збир сила које дејствују између елемената, тј.

$$\mathfrak{K} = \int_{V_1}\int_{V_2} \frac{de_1\, de_2}{r^2}\mathfrak{r}_0 , \tag{3}$$

где се интеграли узимају по запремини V_1 првог тела и V_2 — другог тела, а r је растојање двају елемената dV_1 и dV_2 и $\mathfrak{r}_0$ јединични вектор правца који пролази кроз њих; наравно, r и $\mathfrak{r}_0$ зависе од положаја елемената.

Образац (2') омогућује да нађемо димензију оптерећења. Ставимо $e = e_1$. Интензитет силе који је једнак $e^2 r^{-2}$ има димензију $M \times L \times T^{-2}$ (маса, дужина, време) и зато је димензија

$$[e] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}. \tag{4}$$

Осим тога можемо увести јединицу за мерење оптерећења, на пр. у систему *CGS*. Ова т. зв. електростатичка јединица дефинише се као оно оптерећење које на једнако оптерећење, на растојању 1 cm, дејствује силом од једног дина; 1 кулон $= 3.10^9$ електрост. јед..

Faraday је запазио да Кулонов закон у облику (2') важи само када се наелектрисана тела (лоптице) налазе у вакууму. Ако се између наелектрисаних тела налази диелектрик, овај утиче на вредност силе (*чињеница* 11). Ставићемо заједно са Фарадејем да је у случају хомогеног диелектрика (*чињеница* 11')

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{ee_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 , \tag{5}$$

где је ε т.зв. *диелектрична константа.* За вакуум је она дакле једнака јединици, за ваздух и гасове она има вредности блиске 1, а уопште је она већа од 1; вредности $\varepsilon < 1$ нису познате. Код хетерогених диелектрика, ε може да зависи од положаја и времена, а шта више у извесним случајевима $\frac{1}{\varepsilon}$ нећемо моћи сматрати за скаларну величину (*чињеница* 11″).

Досада нисмо никакве претпоставке чинили о природи електрицитета. Прво схватање електричних појава никло је у доба, када су у Физици увођени појмови разних импондерабилних*) флуидума (на пр. флогистон у Топлоти), и зато се је и електрицитет сматрао за неки флуидум такве врсте. Онда је очевидно, да се количини електрицитета придаје извесни реални смисао, одакле и потиче сам назив, и способност да „тече" са једног места на друго. Осим тога, према овом схватању, количине електрицитета имају способност да дејствују једна на другу са даљине (хипотеза actio in distans, као и код гравитације). Међутим Фарадеј и, доцније, Maxwell развијају нову концепцију електричних појава. Видећи улогу диелектрика, одн. медијума који се налази између „наелектрисаних" тела, они га стављају на прво место за објашњење електричних појава. Ако се извесна тела, према првом схватању, налазе у наелектрисаном стању, по Фарадеју ово значи да је медијум који их опкољава прешао у нарочито стање. Ово се састоји у томе, што се онда у медијуму, и то у свима његовим тачкама појављују, независно од тога да ли се налазе у њима наелектрисана тела или не, неки напони (слични можда напонима у еластичном телу). Седиште целе појаве је, дакле, у диелектрику, а једно тело може да дејствује на друго само помоћу медијума који их опкољава (хипотеза дејства путем непосредног додира). Но познато је да се електричне појаве могу одигравати и у празном простору. Зато, да би се могла доследно спроводити Фарадејева претстава, потребно је увести *претпоставку о етру,* хипотетичном медијуму који испуњава сав простор, и који може да преноси извесна дејства. Наравно за математичку анализу тих питања биће потребно да се ова претпоставка прецизира, тј. да се уведу неке претпоставке о особинама етра. Као што ћемо даље видети, ни ова претстава о електрицитету није била у науци дефинитивна, но за решавање великог броја проблема није још потребно да се везујемо за коју било одређену хипотезу о природи електрицитета.

Досада учињене претпоставке, које се састоје у наведеним чињеницама, омогућиће нам да поставимо и да решимо низ проблема који спадају у Електростатику, тј. у део Теорије електрицитета, где се проучавају услови стања која се не мењају у току времена. Полазна тач-

*) тј. оних који немају тежине

ка биће Кулонов закон. Али ово не значи да смо стали на гледиште хипотезе actio in distans. Ми ћемо сматрати да Кулонов закон (слично случају Њутнова закона гравитације) математички одређује пондеромоторну силу која се јавља код електричних стања *не прецизирајући, не узимајући у обзир начин, механизам, који лежи у основи њена дејства.*

§ 21.2 Електростатичко поље тачкастих оптерећења. Свако наелектрисано тело дејствује на друго тело силом чију вредност даје Кулон-Фарадејев закон. Образац (5) показује да је, у случају тела коначних димензија, ова сила дата компликованим изразом, који зависи не само од електричног стања тела него и од положаја једног према другом и њихова облика. Зато ћемо анализу проблема Електростатике почети са најпростијим проблемом. Уведимо зато појам *тачкастог оптерећења.* Замислимо тело толико малих димензија, да се оне могу занемарити, и нека буде његово електрично стање одређено коначном вредношћу e. Онда можемо учинити корак даље и замислити да је за неку тачку A везана вредност скалара e, електричног оптерећења, па ћемо је звати *тачкасто оптерећење.* Ако се у некој другој тачки (B) „налази"*) оптерећење e_1, прво оптерећење ће дејствовати на друго силом

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e e_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 \,. \tag{5}$$

Ставимо

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{r^2}\mathfrak{r}_0 \,. \tag{6}$$

Овај вектор зависи само од оптерећења e, положаја друге тачке B према A и диелектричне константне (ε) хомогеног диелектрика који испуњава простор. Имамо, дакле,

$$\boxed{\mathfrak{K} = e_1 \mathfrak{E}} \tag{7}$$

Претпостављајући да је оптерећење e непомично у простору, можемо проучити поље вектора $\mathfrak{E}$.**) Овај вектор ћемо звати *електрична сила* (из обрасца (7) види се да он нема исту димензију са механичком силом) и његово поље је *електростатичко поље једног тачкастог оптерећења.* Како константни множитељ не игра сад битну улогу, то ћемо у обрасцу (6) ставити $\varepsilon = 1$, тј. уочићемо поље тачкастог оптерећења у вакууму. Према томе сматраћемо да је

$$\mathfrak{E} = \frac{e}{r^2}\mathfrak{r}_0 = \frac{e}{r^3}\mathfrak{r} \,. \tag{6'}$$

---

*) ова реч опет има само тај смисао да је за B везана вредност скалара e_1.

**) сила $\mathfrak{K}$ дејствоваће, ако се у поље вектора $\mathfrak{E}$ унесе оптерећење e_1. Претпостављамо да су евентуалне промене у пољу због тога такве да се могу занемарити.

Вектор $\mathfrak{E}$ има онај облик који смо проучавали у § 0.4 обр. (64). Имајући само у виду да константна величина A у овом обрасцу означава електрично оптерећење e, можемо непосредно пренети на вектор $\mathfrak{E}$ све оне закључке до којих смо дошли у § 0.4 за вектор $\mathfrak{v}$.

Према обрасцу (65) § 0.4 постоји скалар

$$U = \frac{e}{r}, \tag{8}$$

који ћемо звати *електрични потенцијал* или просто *потенцијал* и, због једначине (66) § 0.4, биће

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U. \tag{9}$$

Електрични потенцијал очевидно нема исте димензије са механичким $\frac{m}{r}$. Исто тако је очевидно да веза између $\mathfrak{E}$ и U остаје иста (9), ако ставимо

$$U = \frac{e}{r} + C, \tag{8'}$$

где је C нека константа. Но ако поставимо накнадни услов да потенцијал у бесконачности ($r = \infty$) буде једнак нули, биће и $C = 0$. Потенцијал U у тачки A ($r = 0$) имаће бесконачно велику вредност.

Даље, у § 0.4 доказали смо да ће бити

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0 \tag{10}$$

за сваку тачку осим A. И, ако напишемо једначину (67) § 0.4, узимајући у обзир услов (8), имаћемо

$$\Delta U = 0, \tag{11}$$

тј. U је решење Лапласове једначине. Да осим услова (10) вектор $\mathfrak{E}$ задовољава и услов

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = 0, \tag{12}$$

у свакој тачки, можемо се уверити непосредним рачуном. Доиста

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$$

према обрасцу (28) § 0.2. Поље електричне силе је, дакле, Лапласово свугде у простору изузимајући тачку A. У овој тачки $\operatorname{div} \mathfrak{E}$ имаће бесконачно велику вредност. Ово је лако доказати, ако се тачка A обухвати лоптом чији је полупречник r_* бесконачно мала величина. Према дефиницији (види обр. (14) § 0.2) биће

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \lim_{V \to 0} \frac{\int_F \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f}}{V}.$$

На површини лопте F, $\mathfrak{E}$ има у свакој тачки исти модуо $E = \frac{|e|}{r_*^2}$ и правац исти са $d\mathfrak{f}$.

Зато је

$$\int_F \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = \frac{e}{r_*^2} \int_F df = \frac{e}{r_*^2} \cdot 4\pi r_*^2 = 4\pi e \,, \tag{13}$$

а

$$V = \frac{4}{3}\pi r_*^3 \,.$$

Дакле у тачки A је

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 3e \lim_{r_* \to 0} \frac{1}{r_*^3} = \pm\infty \,.$$

Ако се у тачки A налази позитивно оптерећење ($e > 0$), она је извор; ако је $e < 0$, она је понор.

Протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз неку затворену површину F биће, према обрасцима (68), (69) и (69′) § 0.4,

$$\int_F \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 0 \,, \quad \text{или} = 2\pi e \,, \quad \text{или} = 4\pi e \,, \tag{14}$$

према томе да ли оптерећење лежи ван F, или се налази на њој или у унутрашњости ове површине.

Поље једног тачкастог оптерећења очевидно је симетрично у односу на тачку A. Векторске линије, тј. линије силе (електричне) су зраци који иду од ове тачке. У свакој тачки вектор $\mathfrak{E}$ (6′) усмерен је ка тачки A, ако је $e < 0$, а од ње, ако је $e > 0$. Соленоиди ће бити конуси са заједничким теменом у тачки A. Еквипотенцијалне површине биће концентричне лопте, јер из услова $U = \text{const.}$ због (8), следује једначина $r = \text{const.}$.

Наведени резултати могу се лако генералисати за већи број тачкастих оптерећења. Претпоставимо да имамо n тачкастих оптерећења $e_1, e_2, \ldots e_n$, у тачкама $A_1, A_2, \ldots A_n$ и да вредности e_i не зависе од присуства осталих оптерећења. Нека буде M произвољна тачка у простору, $\mathfrak{l}_i$ њен вектор положаја у односу на тачку A_i. Електричном силом у тачки M зовемо вектор $\mathfrak{E}$ који је једнак збиру векторâ $\mathfrak{E}_i$, од којих је сваки одређен у односу на оптерећење e_i помоћу обрасца (6′), тј.

$$\mathfrak{E} = \Sigma \mathfrak{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{l_i^3} \mathfrak{l} \,. \tag{15}$$

Свугде у простору, сем у тачкама A_i, електрична сила има

коначне вредности. Њено је поље Лапласово и потенцијал ће бити функција

(16) $$U = \Sigma \frac{e_i}{l_i} ,$$

а

(17) $$\mathfrak{E} = - \operatorname{grad} U .$$

Ове величине зависе наравно од релативних положаја тачака A_i и M, а потенцијал мора бити решење Лапласове једначине (11) у свима тачкама сем A_i.

Како за протицање сваког од вектора $\mathfrak{E}_i$ важи једначина (14), то ће, због једначине (15), протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз неку затворену површину у чијој се унутрашњости налазе оптерећења e_α, e_β, e_γ, ... бити:

(18) $$\int_F \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 4\pi \Sigma e_\kappa ,$$

где се сабирање односи само на наведена оптерећења.*)

Резултанту механичких сила, које према Кулонову закону дејствују на пр. на оптерећење e_j, добићемо изостављајући у вектору $\mathfrak{E}$ компоненту $\mathfrak{E}_j$, у облику (M се сада поклапа са A_j)

$$\mathfrak{K}_j = e_j \Sigma^j \frac{e_i}{l_i^3} \mathfrak{l}_i ,$$

где индекс ^{j} означава да у збиру нема члана $i = j$.

За два тачкаста оптерећења лако је из услова $U = \frac{e_1}{l_1} + \frac{e_2}{l_2} = \text{const.}$ наћи еквипотенцијалне линије у равни у којој се оне налазе. Зато треба да потражимо тачке пресека, у којима, дакле, U има исте вредности, оних кружних линија, са средиштима у A_1 и A_2, од којих је свака — еквипотенцијална линија појединих оптерећења. Исто тако је лако конструисати векторске линије, тј. оне у чијој свакој тачки $\mathfrak{E}$ има правац дирке. Обртањем ове равни око праве $A_1 A_2$ добићемо претставу о целом пољу вектора $\mathfrak{E}$ које очевидно има осу симетрије. Треба само разликовати два случаја, наиме да ли су оптерећења разноимена или истоимена. У првом случају, као што је познато, наравно, и из експеримената, векторске линије иду од једног оптерећења ка другом (в. слику 23). За истоимена оптерећења добивамо два снопа векторских линија који полазе из тачака A_1 и B_1 и не секу се (сл. 19)**).

Врло важну улогу у Теорији електрицитета и магнетизма игра

---

*) Лако је видети како треба променити десну страну ове једначине када се нека оптерећења налазе на самој површини F.

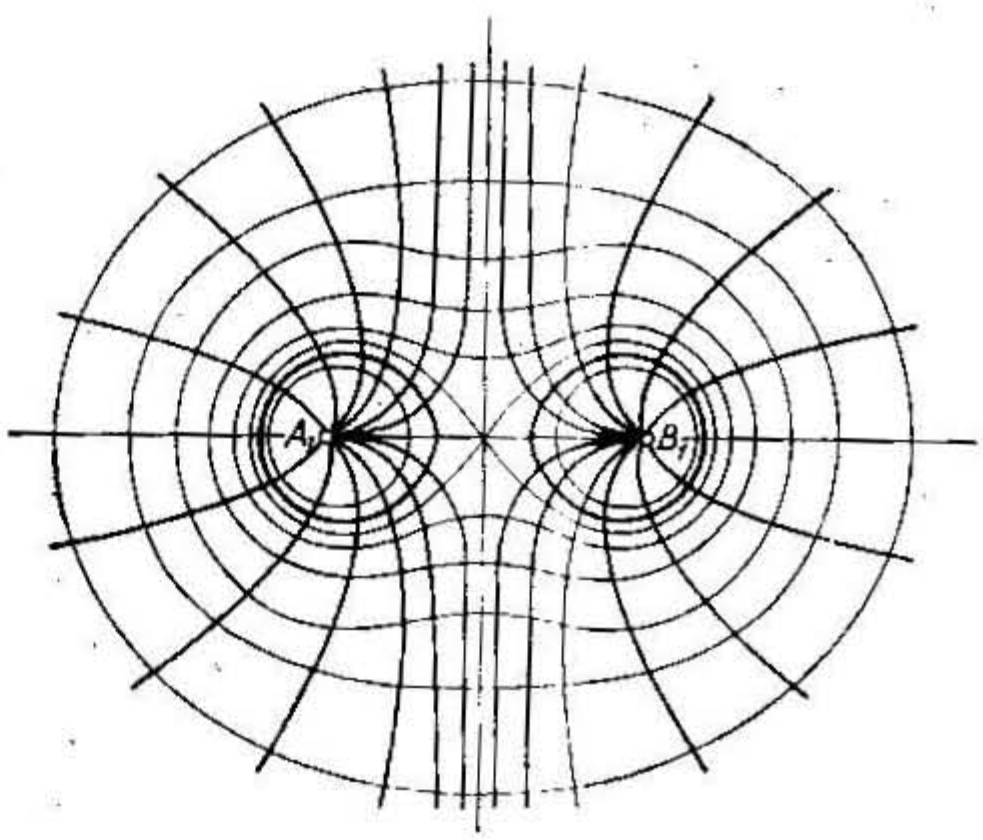
**) Тање извучене линије су еквипотенцијалне.

специјална комбинација два разноимена оптерећења, за која се претпоставља да су једнака по модулу а налазе се на бесконачно блиском растојању. Овај т.зв. *дипол* (електрични) биће изворни пар који смо споменули у § 0.4. У овом случају су издашности извора e, одн. $-e$, а момент дипола $e^* = e\delta$, ако је δ растојање између извора.

Потенцијал U^* дипола у некој тачки M која лежи на растојању r од извора, према обрасцу (70) § 0.4 или (70′), имаће вредност

$$(19) \qquad U^* = \frac{e^* \cos\theta}{r^2} = \mathfrak{e}^* \operatorname{grad}_M \frac{1}{r}$$

ако је θ угао између осе дипола $(A_1 A_2)$ и правца $A_1 M$, $\mathfrak{e}^* = e^* \mathfrak{u}$; множитељ 4π у именитељу отпада, због тога што је сада потенцијал једног пола означен са $\frac{e}{r}$.



Сл. 19

§ 21.3 Поља непрекидно распоређених оптерећења (у вакууму). Узмимо наелектрисана тела коначних димензија. У вези са посматрањима можемо учинити две претпоставке: а) електрично стање тела испољава се у томе што се сваки делић тела налази у овом стању (случај диелектрика, *чињеница* 12), б) електрично стање испољава се само на спољњој површини тела, док се у унутрашњости оно не може запазити (случај проводника, *чињеница* 13).

Прву од ових претпоставака тумачимо на следећи начин. Ако узмемо бесконачно мали делић наелектрисаног тела, чија је запремина dV, онда се његово стање одређује бесконачно малом вредношћу оптерећења: de. Како је оптерећење величина адитивне природе (*чињеница* 8′), стање целог тела, чија је запремина V, дато је изразом $e = \int_V de$. Ако се електрицитет схвата као нека врста флуидума, замишља се да се у запремини dV налази количина електрицитета de, а у целој запремини — збир свих ових количина. За нас ова претстава није неопходно потребна, те, и поред тога што се оваква терминологија готово редовно употребљује, нећемо за њу, као ни досада, дефинитивно везати нашу претставу.

Уводећи нови појам, *густине електрицитета*, можемо уопштити низ резултата које смо добили за тачкаста оптерећења и за случај

уочених оптерећења *непрекидно распоређених у простору*. Према дефиницији, количник

(20) $$\rho = \frac{de}{dV}$$

зовемо густином електрицитета и претпостављамо да је она функција положаја (у Електростатици само положаја, а, уопште, и времена) непрекидна, коначна и једнозначна у свима тачкама наелектрисаног тела. Из једначине (20) следује непосредно да је

(21) $$e = \int_V \rho \, dV.$$

Електрична сила биће у случају оптерећења непрекидно распоређених у простору

(22) $$\mathfrak{E} = \int_V \frac{de}{l^2} \mathbf{l}_0 = \int_V \frac{\rho \, dV}{l^3} \mathbf{l} \, ,$$

па се овај израз добива уопштавањем израза (15), где треба e_i сменити са de, $\mathbf{l}_i$ — вектором положаја $\mathbf{l}$ произвољне тачке M, у којој се узима вредност $\mathfrak{E}$, а у односу на неки делић dV. При интеграљењу мења се очевидно положај овог делића, а према томе и правац и величина вектора $\mathbf{l}$.

Електрична сила поново се може претставити као градијент потенцијала — U

(23) $$\mathfrak{E} = - \operatorname{grad} U$$

и ова функција постаје, због једначине (16),

(24) $$U = \int_V \frac{de}{l} = \int_V \frac{\rho \, dV}{l} \, .$$

Може се наравно доказати, као што се то чини у Теорији потенцијала, и то непосредно, тј. при диференцирању U по координатама (x, y, z), да се ред овог диференцирања и интеграљења по V може променити, и онда се добивају пројекције вектора $\mathfrak{E}$ на одговарајуће осе.

Нека буде v произвољна запремина у којој се налази наелектрисано тело или његов неки део, F површина која обухвата v. Протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз ову површину биће, према обрасцу (18) § 21.2,

(25) $$\int_F \mathfrak{E} \, d\mathbf{f} = 4\pi \int_v \rho \, dV,$$

јер је десна страна ове једначине збир оптерећења која се налазе у

унутрашњости F. Ако се у унутрашњости F налази цело тело, биће, због услова (21),

$$\int_F \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 4\pi e\,. \tag{26}$$

Према Гаусовој теореми (15) § 0.2 можемо површински интеграл који стоји у једначини (25) претворити у запремински, тако да ћемо добити

$$\int_V \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dV = 4\pi \int_V \rho\, dV\,.$$

Како су ова два интеграла једнака за коју било запремину, мора бити

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho \tag{27}$$

и ова веза између електричне силе и густине електрицитета мора да постоји за сваку тачку наелектрисаног тела.

Сменимо сад вектор $\mathfrak{E}$ његовим изразом (23). Место (27) добићемо једначину

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U = -\,4\pi\rho \tag{28}$$

или

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = -\,4\pi\rho\,. \tag{28'}$$

Ова, Poisson-ова једначина даје везу између електричног потенцијала и густине електрицитета. У свакој тачки наелектрисаног тела ($\rho \neq 0$) важи ова једначина и потенцијал је њено решење. Ако пређемо границе овог тела, имаћемо у тачкама ван њега $\rho = 0$ па ће се Поасонова једначина претворити у Лапласову

$$\Delta U = 0\,.$$

Изван граница наелектрисаних тела поље је електричне силе у вакууму, дакле, Лапласово. Сваку тачку тела у којој је електрицитет непрекидно распоређен треба, због услова (27), сматрати за извор. Густина ρ је функција положаја тачке. Ако се тачка помера у унутрашњости тела ка његовој граници, ρ ће имати одређене коначне вредности, различите од нуле. Међутим, ако узмемо тачку изван тела, која се такође приближава ка истој тачки на површини F, имаћемо за све њене положаје $\rho = 0$. Дакле, функција ρ врши на граници F у свима тачкама скок, те, према томе, бар један од других извода функције U по координатама, као што се види из једначине (28′), мора на површини F извршити скок. Другим речима, други изводи потенцијала по координатама су непрекидне функције координата свугде сем за тачке на површини наелектрисаног тела.

Сам потенцијал и његови први изводи по координатима биће у случају непрекидно распоређеног електрицитета у простору непрекидне функције, које у свакој тачки имају коначне и одређене вредности. Као што се види из израза (24), само у случају када се уочи тачка у унутрашњости запремине V, функција $\frac{1}{l}$ постаје бесконачна. Но и за ове тачке важи сада наведена особина потенцијала. Да бисмо се уверили, посматрајмо вредност потенцијала у некој тачки P тела коју ћемо узети за почетак сферног координатног система: $l = r, \varphi, \psi$. Омотајмо је неком површином и нека v буде запремина коју ова обухвата. Запремина дела тела која остаје биће $V - v = V'$. Тачка P је ван ове запремине и зато $\frac{1}{l}$ не постаје бесконачно. Имамо даље

$$\int_{V'} \frac{\rho\, dV}{l} = \int_{V'} \rho\, r \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi \ ,$$

јер је

$$dV = r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi \ , \qquad (l = r) \ .$$

Раставимо овај интеграл у два

$$\int_{V'} \frac{\rho\, dV}{l} = \int_{V} \rho\, r \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi - \int_{v} \rho\, r \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\psi \ .$$

Први интеграл с десне стране има одређену вредност, која не зависи од облика запремине v, други такође има одређену вредност, јер је интеграند $\rho\, r \sin\varphi$ ограничена функција и у области v. Последњи интеграл тежи ка 0 кад $v \to 0$, а $V' \to V$. Одатле и следује да је потенцијал непрекидна функција која има свугде одређене и коначне вредности. На сличан начин се доказују и особине првих и других извода потенцијала.

Да пређемо на случај који је наведен у чињеници 13 (на почетку овог параграфа) а стоји у вези са особином проводника, да се у њима електрично стање јавља на спољњој површини, док се у унутрашњости оно не може констатовати. Осим тога, када проводник прелази у наелектрисано стање, због додира са другим телом, онда у врло кратком размаку времена наступа изједначење потенцијала у свима тачкама његове површине (*чињеница* 14). За овај случај треба такође дефинисати величине које служе за описивање појаве.

Претпоставимо да се електрично стање површинског елемента df одређује такође бесконачно малом вредношћу скалара de (према схватању електрицитета као флуидума каже се: на том елементу „налази

се" количина електрицитета de). А стање целог тела одређује се вредношћу оптерећења: $e = \int_F de$.

Количник

(29) $$\eta = \frac{de}{df}$$

зовемо *површинском густином* електрицитета. Стање неког дела површине F, који ћемо означити са f, одређује се вредношћу оптерећења

(30) $$e = \int_f \eta\, df\,, \qquad \text{одн.} \qquad e = \int_F \eta\, df$$

за целу површину F.

Уопштавајући обрасце (15) и (16) § 21.2 налазимо да је

(31) $$\mathfrak{E} = \int_F \frac{de}{l^2}\, \mathfrak{l}_0 = \int_F \frac{\eta\, df}{l^3}\, \mathfrak{l}\,,$$

где је $\mathfrak{l}$ вектор положаја тачке M у простору у којој се посматра вредност електричне силе, а почетак му је у елементу df, и

(32) $$U = \int_F \frac{\eta\, df}{l}\,.$$

Може се доказати да је функција U непрекидна, да има коначне и одређене вредности у свима тачкама простора и на самој површини F и последња особина важи, ако ова површина у свакој тачки има једну тангенцијалну раван (тј. ако око сваке тачке на F може да се узме бар мали део површине f тако да се његова једначина може написати у облику $z = f(x, y)$ и за $|x| \leq \alpha$, $|y| \leq \alpha$, где је α довољно мали број, биће f, $\frac{\partial f}{\partial x}$ и $\frac{\partial f}{\partial y}$ непрекидне функције x-а и y-а).

Према чињеници 14, на површини проводника потенцијал U има у свима тачкама исту вредност, тј. ова је једна од еквипотенцијалних површина. Прецизирајмо даље појам проводника и назовимо *потпуним* или *савршеним* проводником онај, у чијој је унутрашњости електрична сила једнака нули, ако је наступило стање равнотеже, тј. ако се електрично стање не мења у току времена (чињеница 14').

Како је

(33) $$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U\,,$$

из услова $\mathfrak{E} = 0$ у унутрашњости проводника следује да је $U = \text{const.}$ а према Поасоновој једначини (27) мора бити $\rho = 0$. Дакле у потпуном проводнику имамо само површински распоред електрицитета. Осим тога

из услова (33) и $U = \text{const.}$ на површини следује, да електрична сила $\mathfrak{E}$ стоји управно на површини F, кад нема промена електричног стања.

Ако сад обухватимо део површине проводника f затвореном, бескрајно блиском површином, један део ове: f_1 биће у унутрашњости проводника, док је други: f_2 споља. Према обрасцима (18) и (30) биће

$$\int_{f_1 f_2} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 4\pi \int_f \eta\, df\,.$$

Кроз f_1 нема протицања јер у унутрашњости F ишчезава $\mathfrak{E}$, а f_2 се бескрајно мало разликује од f. Дакле можемо ставити

$$\int_f \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 4\pi \int_f \eta\, df\,,$$

и, како ова једначина важи за произвољну површину f, морају интегранди да буду једнаки. Означимо ли са E_n пројекцију $\mathfrak{E}$ на спољњу нормалу дуж које је управљен вектор $d\mathfrak{f}$, биће

$$E_n = 4\pi\eta\,. \tag{34}$$

А, како је

$$E_n = (\mathfrak{E}\,\mathfrak{n}) = -(\mathfrak{n}\,\mathrm{grad}\,U) = -\frac{\partial U}{\partial n}\,.$$

где је $\mathfrak{n}$ јединични вектор спољње нормале, биће

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\eta\,. \tag{34'}$$

Познато је из експеримената да се истим количинама електрицитета разни проводници оптерећују до различитих потенцијала (*чињеница* 15). За карактеристику ове особине проводника уводи се нова величина која се зове *капацитет* проводника, а даје се изразом

$$C = \frac{e}{U}\,, \tag{35}$$

ако су e оптерећење проводника, а U — потенцијал, тј. његова вредност на површини проводника. Две последње величине одређене су обрасцима (30) и (32) из којих се види да, ако се густина η свугде повећа или смањи a-пута, e и U се повећавају (одн. смањују) у истој размери и равнотежа се неће пореметити. Зато ће њихов количник задржати исту вредност и, према томе, капацитет C не зависи од оптерећења. Он је величина која зависи од облика проводника. Претходни образац пружа такође могућност и за друго тумачење. Налазимо, наиме, да је

$$e + C = C(U + 1)\,,$$

тј. капацитет је бројно једнак оптерећењу потребном да се потенцијал

проводника повиси за јединицу. Како је димензија потенцијала $[e] \times L^{-1}$, капацитет има димензију дужине.

Објашњење чињенице (15) видећемо у § 21.5.

Испитајмо општији случај, непрекидног распореда електрицитета по површини S која не мора бити површина проводника. За овај случај важе наравно обрасци (29—32) и потенцијал U остаје непрекидна функција свугде у простору. Но уочена површина није више једна од еквипотенцијалних и електрична сила која сада не мора да стоји управно на S не мења се непрекидно, као што ћемо доказати, при пролазу кроз оптерећену површину.

Узмимо линиски интеграл дуж произвољне затворене контуре L која пролази кроз површину у тачкама A и B. Како је поље потенцијално, то ћемо имати

$$\int_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = 0 .$$

Означимо са L_1 и L_2 делове криве L који се налазе на разним странама површине S и нека $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ буду вредности вектора $\mathfrak{E}$ у тачкама ових кривих. Раставимо их у нормалне и тангенцијалне компоненте у тачкама површине:

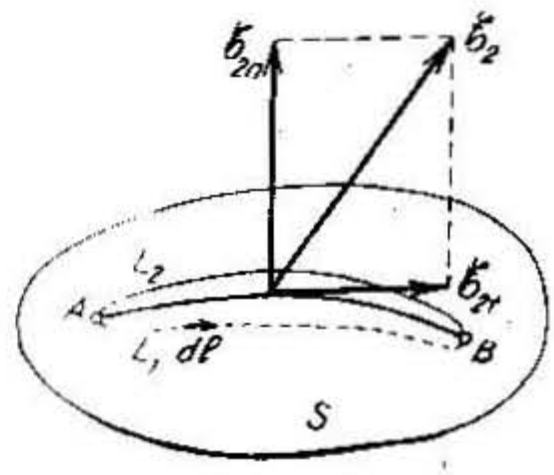
$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_{1n} + \mathfrak{E}_{1t} , \qquad \mathfrak{E}_2 = \mathfrak{E}_{2n} + \mathfrak{E}_{2t} .$$

Узмимо сада произвољну криву AB на површини S и претпоставимо да су криве L_1 и L_2 бесконачно блиске кривој AB (сл. 20). Како $d\mathfrak{l}$ у свакој њиховој тачки пада у додирну раван, производи $(\mathfrak{E}_{1n}\, d\mathfrak{l})$ и $(\mathfrak{E}_{2n}\, d\mathfrak{l})$ отпадају и у линиском интегралу остају само тангенцијалне компоненте, тј.

$$\int_A^B \mathfrak{E}_{1t}\, d\mathfrak{l} + \int_B^A \mathfrak{E}_{2t}\, d\mathfrak{l} = 0 ,$$

или

$$\int_A^B (\mathfrak{E}_{1t} - \mathfrak{E}_{2t}, d\mathfrak{l}) = 0 .$$



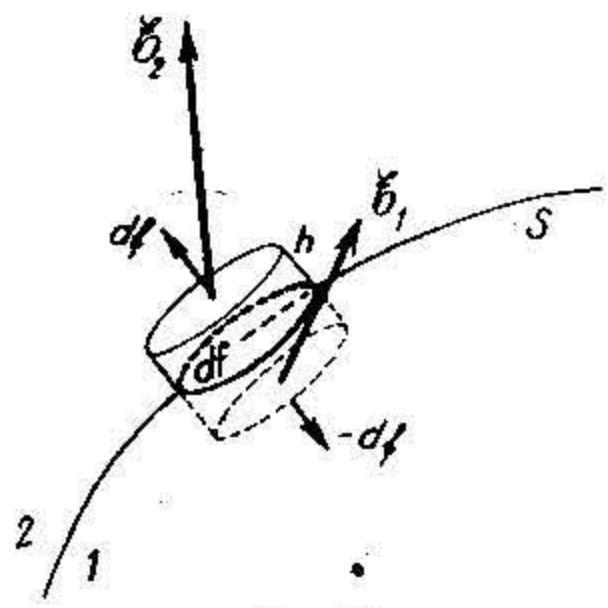
Сл. 20

Због произвољности криве AB, овај услов можемо задовољити само ако ставимо (кад није већ $\mathfrak{E}_{1t} = \mathfrak{E}_{2t} = 0$)

$$\mathfrak{E}_{1t} = \mathfrak{E}_{2t} , \tag{36}$$

јер ови вектори ма у којој тачки површине S не могу да стоје управно на ком било елементу $d\mathfrak{l}$. Дакле, при пролазу кроз површину оптерећену електрицитетом, тангенцијална компонента вектора $\mathfrak{E}$ мења се непрекидно.

Да бисмо нашли како се мења нормална компонента електричне силе при пролазу кроз површину S, узмимо површински елемент df и обухватимо га бесконачно малим ваљком (сл. 21). Нека се основе овог ваљка налазе на разним странама површине S, а његова висина (h) нека буде бесконачно мала величина вишег реда, како бисмо могли занемарити протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз омотач ваљка. Остаје према томе од протицања кроз целокупну површину ваљка само протицање кроз основе, и ово ће бити (види обр. (18))



Сл. 21

$$(\mathfrak{E}_{1n}, -d\mathfrak{f}) + (\mathfrak{E}_{2n}, d\mathfrak{f}) = 4\pi\eta df,$$

јер се: 1) на елементу df налази количина електрицитета $de = \eta df$, 2) скаларни производи тангенцијалних компонената са вектором $d\mathfrak{f}$ који има правац нормале биће једнаки нули и 3) на основама управљени површински елементи имају супротне смерове.

Означимо ли пројекције вектора $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ на нормалу површине S са E_{1n} и E_{2n}, имаћемо после скраћивања са df, место претходне једначине,

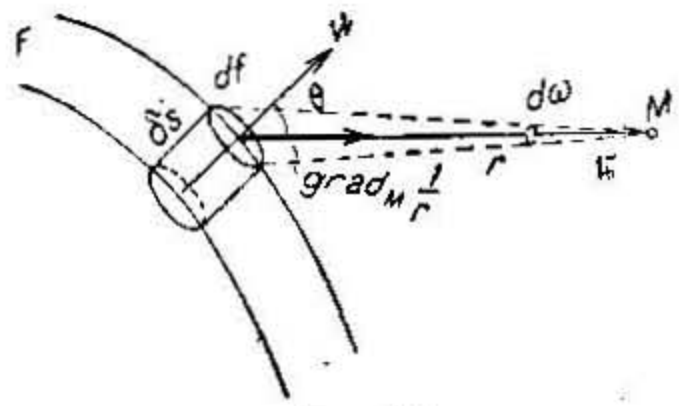
$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\eta \,. \tag{37}$$

Овај услов показује да при пролазу кроз оптерећену површину нормална компонента електричне силе врши скок, што ће рећи да се први изводи потенцијала U не мењају непрекидно. Наравно, из услова (37) следује (34), ако се поново узме да је S површина проводника која обухвата део простора 1 ($E_{2n} = E_n$, $E_{1n} = 0$).

Може се уочити још компликованији случај површинског распореда електрицитета. Претпоставимо да се узме бесконачно танки слој дуж површине F и да су његове стране оптерећене разноименим електрицитетима. Ако се на површинском елементу df налази количина електрицитета ηdf, на супротној страни дуж нормале биће $-\eta df$, и зато се ова два оптерећена елемента могу сматрати за изворни пар (дипол) чија оса има правац нормале. Такав се слој зове *електрична двојна површина*. У некој тачки M у простору, потенцијал U изазвани овом двојном површином биће једнак збиру потенцијала диполова, тј., како је момент једног дипола $e^* = \eta df \delta s$, где је δs растојање страна слоја, према обрасцу (19):

$$U = \int_F \frac{\eta\, \delta s \cos\theta\, df}{r^2} = \int_F \eta\, \delta s \left(d\mathfrak{f}\, \mathrm{grad}_M \frac{1}{r} \right), \tag{38}$$

θ је угао између позитивне нормале, која иде од негативног пола ка позитивном, и правца: пол — тачка M, $d\mathfrak{f} = df\mathfrak{n}$, а $\mathfrak{n}$ је јединични вектор нормале. Ако уочимо лопту са полупречником 1 и средиштем у тачки M (сл. 22), конус са теменом M и основом df исећи ће на њеној површини елемент $d\omega$. У исти мах површински елемент df види се из тачке M у просторном углу $d\omega$. Осим тога, тај конус исећи ће на лопти, полупречника r, са средиштем у M површински елемент



Сл. 22

$df\cos\theta$, па ће бити

$$\frac{d\omega}{1} = \frac{df\cos\theta}{r^2} = \left(d\mathfrak{f}\ \mathrm{grad}_M \frac{1}{r}\right) .$$

Одатле следује да се цела површина F види из тачке M под углом

$$\omega = \int_F d\mathfrak{f}\ \mathrm{grad}_M \frac{1}{r} . \tag{39}$$

Ако $\eta\,\delta s = \eta^*$ има исте вредности за све тачке површине F, потенцијал (38) ће бити

$$U = \eta^* \omega .$$

Претпоставимо да је F затворена површина. За тачку M, која се налази у унутрашњости, $\omega = 4\pi$, ако је позитивни електрицитет на унутрашњој страни, — и $\omega = -4\pi$ у супротном случају, јер $d\mathfrak{f}$ и $\mathrm{grad}_M \frac{1}{r}$ затварају онда тупи угао. Биће, дакле, $U_i = \pm 4\pi\eta^*$ вредност потенцијала свугде у унутрашњости. Ако је тачка M споља, биће $\omega = 0$. Јер, кад се из M повуче конусна површина која додирује F, ова се површина дели у два дела, F_1 и F_2, од којих ће једном одговарати вредност ω_1 позитивна, ако је на F_1 позитивни електрицитет окренут тачки M, на другом пак F_2, $\omega_2 = -\omega_1$.

Према томе, вредност потенцијала ма у којој тачки M ван површине F биће $U_e = 0$, и зато при пролазу кроз затворену двојну површину потенцијал U врши скок

$$U_e - U_i = \pm 4\pi\eta^* . \tag{40}$$

Овај резултат важи и за незатворене двојне површине. Када је дата оваква површина F, можемо замислити неку двојну површину F', која са F образује затворену F^*. Потенцијал U^* при пролазу кроз F врши скок (40). Али је $U^* = U + U'$ и U' ће се мењати непрекидно при прелазу кроз F, јер, с обзиром на F', тачке површине F су неке спољње. Дакле мора U да врши овај скок.

§ 21.31 Инфлуенција. Електрично стање проводника може да се створи не само једним од већ поменутих начина (додиром и др.) него и онда, када се у његовој близини налази друго, оптерећено тело (*чињеница* 16). И у овом случају појављују се на проводнику истовремено обе врсте електрицитета у складу са чињеницом (5). Електрицитет истог знака појављује се на удаљенијим деловима првог проводника, док је на страни окренутој другом проводнику он супротна знака. На површини првог проводника постоји неутрална линија која је дели у два дела, оптерећена, дакле, разним врстама електрицитета. Ова се појава зове *инфлуенција*. Електрицитет истог знака са оним на другом проводнику ишчезава, ако се први проводник споји са земљом, и зове се *слободни*. Електрицитет супротна знака остаје на проводнику и зове се *везани*. Ако се први проводник, где су се створила електрична стања обе врсте, удаљи од другог, на њему се она више не могу констатовати, тј. изазвана оптерећења су једнака (Фарадејев закон). Појавом инфлуенције одмах се објашњава привлачење ненаелектрисаних тела: на овима се, услед инфлуенције, ствара електрично стање, и, како је растојање разноимених електрицитета (на првом и другом телу) мање, то ће, према Кулонову закону, привлачење бити јаче од одбијања истоимених електрицитета.

Сама појава инфлуенције објашњава се на овај начин. На примеру једног тачкастог оптерећења видели смо да су линије електричне силе зраци који иду у бесконачност; у случају два разноимена оптерећења, оне иду од једног ка другом тачкастом оптерећењу. Претпоставимо да се у поље једног тачкастог оптерећења унесе проводник, површина лопте, која ће заузети место једне од еквискаларних површина. Линије сила које могу и сада остати зраци који ће се прво завршавати на унутрашњој страни проводника и, како ће оне стајати управно на њој, биће могућна равнотежа. Ово значи, према другом од наведених примера, да се на унутрашњој страни појавило оптерећење супротна знака. На спољњој страни ствара се истоимено оптерећење и, због симетрије, линије сила задржаће облик зракова који стоје управно на површини лопте. За друге геометриске облике проводника биће компликованија слика распореда линија сила.

Систем од два проводника, од којих је бар један изолован од земље, зове се *кондензатор*. Ако се неизоловани проводник оптерети, на пр. позитивним електрицитетом, на другом се, услед инфлуенције, такође појављује електрицитет и слободни ће нестати када се овај проводник споји са земљом. Кондензатори могу бити произвољна облика, а најпростији су: раван (проводници у облику две паралелне равни), сферни (проводници у облику две концентричне лопте) и цилиндрички (проводници у облику две коаксијалне цилиндричке површине).

Уочимо сферни кондензатор. Нека буде на унутрашњој лопти позитивно оптерећење e, а полупречник лопте r_1. На спољњој лопти, полупречника r_2, биће на унутрашњој страни оптерећење $-e$. Ова два оптерећења стварају у простору, између две лопте, поље електричне силе која, очевидно, свугде има правац зракова који иду од средишта. Површине лопти биће еквипотенцијалне.

Ставимо да је потенцијал

$$U = \frac{e}{r} + a ,$$

јер ово решење Лапласове једначине даје лопте као еквипотенцијалне површине, и одредимо константу a тако, да њена вредност одговара проблему. Нека U_1 и U_2 буду вредности потенцијала на лоптама. Дакле је $U_2 = \frac{e}{r_2} + a$ и према томе

$$U = \frac{e}{r} - \frac{e}{r_2} + U_2$$

и

$$U_1 = e\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) + U_2 .$$

Капацитетом кондензатора зваћемо количник оптерећења и разлике потенцијала $U_1 - U_2$:

(41) $$C = \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} .$$

Ако претпоставимо да је полупречник $r_2 = \infty$, биће капацитет усамљене лопте

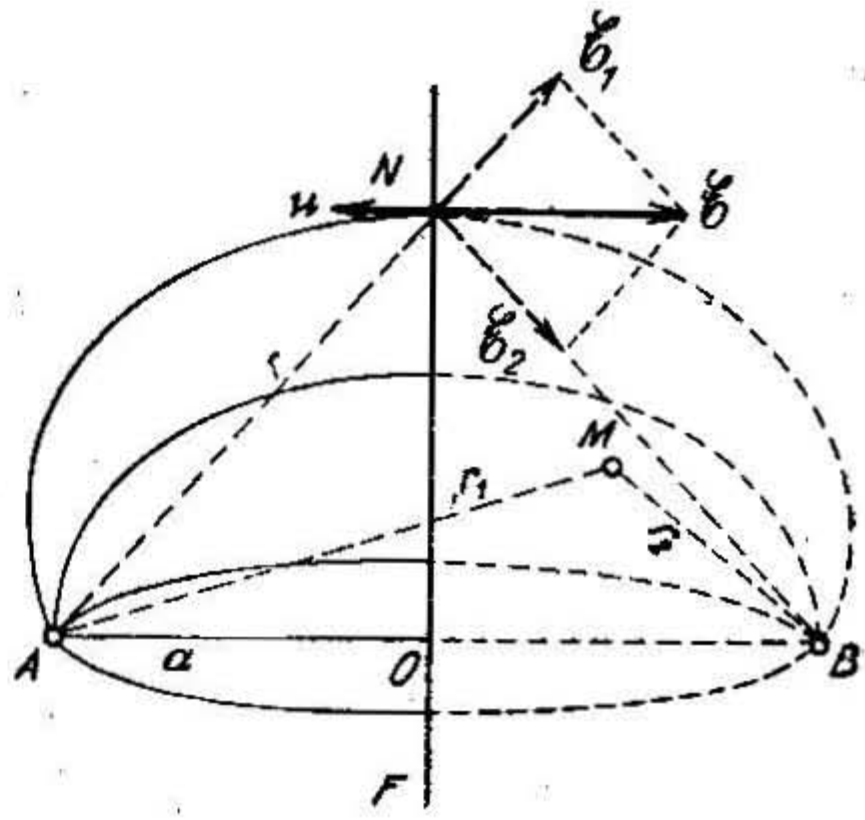
(42) $$C = r_1 ,$$

тј. једнак полупречнику лопте. Како је $r_2 > r_2 - r_1$, образац (41) показује да присуство друге лопте повећава капацитет.

Низ проблема у Електростатици који стоје у вези са појавом инфлуенције може да се реши т. зв. *методом слика* коју је дао W. Thomson. Уопште, у овим се проблемима даје неко оптерећење које изазива електрицитет на неком проводнику; слободни електрицитет који се појављује услед инфлуенције узима се да је нестао, на пр. због тога што је проводник спојен жицом са земљом. Тражи се поље електричне силе и распоред електрицитета на површини проводника која треба да буде једна од еквипотенцијалних, да се не би стање целог система мењало у току времена. Према методи слика треба замислити неко друго оптерећење с друге стране проводника или у његовој унутрашњости, отстранити проводник и ово друго оптерећење сместити тако, како би оно,

заједно са првим, дало поље чија ће једна од еквипотенцијалних површина имати исти облик и положај које је имао проводник. Поље ће, тачније његов део између првог оптерећења и проводника, бити исто са траженим пољем, ако се стави да је густина електрицитета на проводнику одређена протицањем електричне силе овог замишљеног поља на истом месту.

Објаснимо ову методу на најпростијем примеру. У некој тачки A налази се позитивно оптерећење e, а на растојању a лежи равни проводник (бесконачно раширен), спојен са земљом (сл. 23). На овом проводнику, који ћемо звати зид, биће услед инфлуенције негативно оптерећење $-e$. Зид треба да буде еквипотенцијална површина, а електрична сила $\mathfrak{E}$ у некој његовој тачки треба да стоји управно на њој. Из примера поља двају тачкастих разноимених оптерећења исте величине знамо, да раван може да буде једна од еквипотенцијалних површина. Замислимо сад оптерећење $-e$ у тачки B узетој тако, да A и B леже симетрично према зиду. Ако зид не постоји, електрична сила у пољу оптерећења A и B има потенцијал



Сл. 23

$$U = \frac{e}{r_1} - \frac{e}{r_2},$$

где су r_1 и r_2 растојања неке тачке M од A и B, а површина F је једна од еквипотенцијалних. Електричне силе $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ које су изазвала тачкаста оптерећења имају исте интензитете за коју било тачку N на F, јер је онда $r_1 = r_2 = r$, и резултанта $\mathfrak{E}$ стоји, наравно, управно на зиду. Претпоставимо сад да смо се вратили условима нашега проблема, и да је на зиду F густина електрицитета η одређена протицањем поменутог вектора $\mathfrak{E}$, и то према обрасцу (34')

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\eta .$$

Да бисмо израчунали извод потенцијала у правцу нормале, узимајући да је сам потенцијал дат горњим обрасцем, уочимо правоугли координатни систем са почетком у тачки O (сл. 23) и осом x у правцу AB. Онда ће на зиду бити

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=0} = e\left\{\frac{1}{r_1^2}\frac{\partial r_1}{\partial x} - \frac{1}{r_2^2}\frac{\partial r_2}{\partial x}\right\}_{x=0} = \frac{2ae}{r^3}$$

јер је $r_1 = r_2 = r$ за $x = 0$. Дакле густина електрицитета биће

$$\eta = -\frac{ae}{2\pi r^3}.$$

Ради контроле израчунајмо оптерећење на зиду. Ако се за површински елемент узме кружни прстен са средиштем у O, полупречника ρ и дебљине $d\rho$, оптерећење ће бити

$$\int_0^\infty 2\pi\rho\eta\, d\rho = -\frac{e}{2}\int_0^\infty \frac{du}{(1+u)^{\frac{3}{2}}} = -e\ ,$$

као што је и требало да буде. Овај се интеграл израчунава, ако се стави претходна вредност η, затим $r^2 = a^2 + \rho^2$ и изврши замена променљиве: $u = \frac{\rho^2}{a^2}$.

§ 21.4 Поље у нехомогеном диелектрику. Према Кулон-Фарадејеву закону (5), електрична сила зависи од медијума који опкољава наелектрисана тела и одређена је изразом

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{\varepsilon}\frac{e}{r^2}\mathfrak{r}_0 \tag{6}$$

у случају једног тачкастог оптерећења. Зависи од особина медијума, какве је природе величина ε коју смо назвали диелектрична константа. Можемо, наиме, претпоставити да је медијум, диелектрик, хомоген или нехомоген, изотропан или анизотропан. Ако је диелектрик хомоген и изотропан, ε треба сматрати за праву константу, и како присуство овог константног множитеља не утиче на рачун, важиће за овај случај сви обрасци изведени у § 21.2, у које треба само увести множитељ $\frac{1}{\varepsilon}$.

Међутим, ако је диелектрик нехомоген (а изотропан) скалар ε постаје функција положаја (координата) и о томе треба водити рачуна при проучавању поља електричне силе. Али се може, упоредо са вектором $\mathfrak{E}$, прво проучавати поље друге величине

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\mathfrak{E} \tag{43}$$

која се зове *померање диелектрика*. Вектор $\mathfrak{D}$ не зависи никад од диелектричне константе, као што се види при упоређивању образаца (6) и (43), и разликује се од електричне силе у вакууму само константним

множитељем $\frac{1}{4\pi}$. Зато за овај вектор можемо преписати одговарајуће обрасце

(44) $$\operatorname{div} \mathfrak{D} = 0 \,, \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{D} = 0 \qquad \text{обр. (10) и (12)} \,,$$

тј. поље вектора $\mathfrak{D}$ је Лапласово ван оптерећења.

(45) $$\int_F \mathfrak{D}\, d\mathfrak{f} = 0 \,, \quad \frac{e}{2} \,, \; e \qquad \text{обр. (14)} \,.$$

У тачкама области у којој имамо непрекидни просторни распоред електрицитета биће

(46) $$\operatorname{div} \mathfrak{D} = \rho \qquad \text{обр. (27)} \,.$$

На површини проводника нормална компонента врши скок те је

(47) $$D_{\mathfrak{n}} = (\mathfrak{D}\, \mathfrak{n}) = \eta \qquad \text{обр. (34)} \,.$$

При пролазу кроз оптерећену површину, тангенцијална компонента вектора $\mathfrak{D}$ мења се непрекидно (обр. (36)), а нормална врши скок:

(48) $$D_{2\mathfrak{n}} - D_{1\mathfrak{n}} = \eta \qquad \text{обр. (37)} \,.$$

Но претпоставка да је ε скалар није довољна у случају анизотропних тела, и увођење вектора $\mathfrak{D}$ за овај случај од нарочите је важности. Вектор $\mathfrak{D}$ не зависи од диелектричне константе а, према дефиницији, веза између њега и електричне силе изражена је обрасцем (43), и за анизотропна тела претпоставља се да је ε тензор (в. § 0.3).

Вектор $\mathfrak{D}$ увели смо сад чисто формалним путем. Ако узмемо у обзир она схватања о природи електрицитета која смо споменули у § 21.1, видимо да, када се електрицитет сматра за неки флуидум, вектор $\mathfrak{D}$ има само математички смисао. Али ако се усвоји Фарадејева и Максвелова концепција о улози диелектрика, количина електрицитета e добива чисто математички смисао и она је, према обрасцу (45 трећа вредност), само протицање вектора $\mathfrak{D}$.

Проучићемо сад подробније случај нехомогеног и изотропног диелектрика. У пољу вектора $\mathfrak{D}$, померања диелектрика, који не зависи од диелектричне константе, важе услови: (44) за тачке оних области које нису наелектрисане и (46) за оне тачке у којима не ишчезава густина електрицитета ρ. Узмимо поље електричне силе

$$\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon} \mathfrak{D}.$$

Како у нехомогеном диелектрику скалар ε зависи од положаја

тачке у простору биће, према обрасцу (***) § 0.2,

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = \operatorname{div}\frac{4\pi}{\varepsilon}\mathfrak{D} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\operatorname{div}\mathfrak{D} + 4\pi\,\mathfrak{D}\operatorname{grad}\frac{1}{\varepsilon}\,.$$

У простору између оптерећења, где је $\rho = 0$, имаћемо због услова (44)

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\,\mathfrak{D}\operatorname{grad}\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

тј. свака тачка игра улогу извора у пољу вектора $\mathfrak{E}$ у нехомогеном диелектрику, јер уопште израз с десне стране не мора бити једнак 0. Ставимо ли

(49) $$\rho' = \mathfrak{D}\operatorname{grad}\frac{1}{\varepsilon}\,,$$

можемо претходну једначину написати у облику:

(50) $$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 4\pi\rho'\,.$$

Упоредимо ли ову једначину са (27) која је истог облика, можемо величини ρ' дати нарочито тумачење: ρ' је густина оног електрицитета који би у вакууму изазвао електричну силу једнаку сили која се сад појављује у нехомогеном диелектрику, када је густина електрицитета (у датим областима) ρ. Ову величину ρ зовемо *густином правог електрицитета*, а ρ' — *густином слободног* (замишљеног) *електрицитета*. У хомогеном диелектрику: $\varepsilon = \text{const.}$ и $\rho' = 0$ (обр. 49), — нема слободног електрицитета.

Уочимо сада границу двају диелектрика чије су константе различите ε_1 и ε_2, тј. ону површину на којој вредност диелектричне константе врши коначни скок $\varepsilon_1 - \varepsilon_2$. Померање диелектрика $\mathfrak{D}$ које не зависи од диелектричне константе мења се при пролазу кроз ову површину непрекидно, и зато пројекције на нормалу вредности вектора $\mathfrak{D}$ на разним странама површине задовољавају услов

$$D_{1n} - D_{2n} = 0\,.$$

Када се уведу у овај услов према обрасцу (43) одговарајуће пројекције електричне силе добива се

$$\varepsilon_2 E_{2n} - \varepsilon_1 E_{1n} = 0\,.$$

Не мења се, дакле, непрекидно нормална компонента вектора $\mathfrak{E}$, а могу се само изједначити производи њених вредности на разним странама уочене површине са одговарајућим вредностима ε. Како је $E_{2n} \neq E_{1n}$, можемо ставити

$$E_{2n} - E_{1n} = 4\pi\eta'$$

и, као што смо мало пре учинили у случају просторног распореда

електрицитета, упоредити ову једначину са (37) која је истог облика. Величину

$$\eta' = \frac{1}{4\pi}\left(E_{2n} - E_{1n}\right) \tag{51}$$

зваћемо *густином слободног површинског електрицитета*, чије је седиште (замишљено) на граници двају диелектрика са разним вредностима ε. Величина η је густина *правог површинског електрицитета*. Из образаца (51) и (43) следује да је

$$\eta' = D_n\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right), \tag{52}$$

јер се са D_n може означити број $D_{2n} = D_{1n}$.

Из реченога видимо да, ако имамо низ оптерећења (распоређених у простору и на површинама) а између њих се налази диелектрик, поље електричне силе у овом диелектрику, нарочито ако је он нехомоген, разликује се од поља електричне силе истих оптерећења без диелектрика. Означимо са U_1 потенцијал у вакууму ($\varepsilon = 1$). Према обрасцима (24) и (32), овај је дат изразом

$$U_1 = \int \frac{\rho\, dV}{r} + \int \frac{\eta\, df}{r}, \tag{53}$$

где се интеграли узимају по запреминама (први) и површинама (други наелектрисаних области.

Нека U буде вредност потенцијала када се налази диелектрик Како се може ставити да је

$$U = U_1 + (U - U_1), \tag{54}$$

последњи члан треба сматрати као потенцијал који долази услед нарочитог стања диелектрика, као што је то претпоставио Фарадеј. А ово се стање зове *поларизација диелектрика*. Узмимо да су $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}$ вредности електричне силе у вакууму, одн. када постоји диелектрик. Разлику ових вектора, подељену са 4π, назовимо такође поларизација диелектрика и означимо је са $\mathfrak{P}$:

$$4\pi\mathfrak{P} = \mathfrak{E}_1 - \mathfrak{E} = 4\pi\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = (\varepsilon - 1)\,\mathfrak{E} \tag{55}$$

према обрасцу (43). Дакле је

$$\mathfrak{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\mathfrak{E} = \varkappa\,\mathfrak{E} \tag{56}$$

и $\varkappa$ се зове електрични *сусцептибилитет*.

Узимајући у обзир обрасце (50) и (27), који сада треба написати у облику $\operatorname{div} \mathfrak{E}_1 = 4\pi\rho$, имаћемо, због једначине (55),

(57) $$\operatorname{div} \mathfrak{P} = \rho - \rho' \ ;$$

у простору где нема правог електрицитета биће, наравно, $\rho = 0$.

Поље електричне силе $\mathfrak{E}$ у диелектрику, према тумачењу које смо дали обрасцима (50) и (51), ствара се и слободним електрицитетом чија је запреминска густина ρ' и површинска η'. Можемо, дакле, ставити да је у свакој тачки диелектрика

(58) $$U = \int \frac{\rho' dV}{r} + \int \frac{\eta' df}{r} \ ,$$

где се први интеграл узима по запремини диелектрика, а други по свима оним површинама на којима диелектрична константа врши скок. Ово ће бити границе двају диелектрика, границе диелектрика и проводника и, најзад, границе диелектрика и вакуума. Густина η одговара случају када се око оптерећених површина налази вакуум, а онда место пројекција електричне силе у обрасцу (37) можемо ставити пројекције вектора $\mathfrak{D}$ помножене са 4π (види образац (43) за $\varepsilon = 1$). Из овог обрасца добићемо

$$\eta = D_{2n} - D_{1n}$$

(на граници двају диелектрика $\eta = 0$), а за η' имамо образац (51). Ако пројецирамо једначину (55) на нормалу $\mathfrak{n}_1$ уперену у унутрашњост диелектрика добићемо

$$4\pi(\mathfrak{P}\mathfrak{n}_1) = 4\pi D_{1n} - E_{1n} \ .$$

А како је у вакууму ($\varepsilon = 1$) $\mathfrak{P} = 0$, што се види из обрасца (56), његова пројекција на нормалу $\mathfrak{n}_2$ уперену у вакуум биће

$$0 = 4\pi D_{2n} - E_{2n} \ ,$$

тј. на граници са вакуумом увек је

$$4\pi(\mathfrak{P}\mathfrak{n}_1) = 4\pi(D_{1n} - D_{2n}) + E_{2n} - E_{1n} \ ,$$

те је, дакле,

(59) $$\eta' - \eta = (\mathfrak{P}\mathfrak{n}_1) \ .$$

Претпоставимо сада, ради олакшавања схватања појаве поларизације, да се бесконачно танки слој вакуума налази свугде између уочених тела. Онда ће на свима површинама бити задовољен услов (59).

Напишимо разлику

$$U - U_1 = \int \frac{\rho' dV}{r} + \int \frac{\eta' df}{r} - \int \frac{\rho\, dV}{r} - \int \frac{\eta\, df}{r} \ .$$

У њој можемо сматрати да су границе свих интеграла проширене на цео простор који заузимају наелектрисана тела и диелектрик.

У унутрашњости првих може да буде $\rho' = 0$, у другом $\rho = 0$. Исто важи и за све уочене површине. И тако имамо

$$U - U_1 = \int \frac{\rho' - \rho}{r} dV + \int \frac{\eta' - \eta}{r} df \ ,$$

и, према обрасцима (54), (57) и (59),

$$U = U_1 - \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{P}}{r} dV + \int \frac{\mathfrak{P} d\mathfrak{f}}{r} \ . \tag{60}$$

Применимо ли Гринов образац (33 § 0.2 за случај вектора $\mathfrak{v} = \frac{1}{r}\mathfrak{P}$) имаћемо

$$\int \frac{\mathfrak{P} d\mathfrak{f}}{r} - \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{P}}{r} dV = \int \left(\mathfrak{P} \operatorname{grad}_M \frac{1}{r} \right) dV \ ,$$

јер треба тачку M, у којој се тражи вредност потенцијала, сматрати за непомичну, као што смо то учинили при извођењу обрасца (38) за потенцијал двојне површине. Даље видимо, да израз

$$\left(\mathfrak{P} \operatorname{grad}_M \frac{1}{r} \right)$$

има облик потенцијала дипола (обр. (19)). Зато се у једначини

$$U = \int \frac{\rho \, dV}{r} + \int \frac{\eta \, df}{r} + \int \left(\mathfrak{P} \operatorname{grad}_M \frac{1}{r} \right) dV \ , \tag{61}$$

коју добивамо из једначина (60) и (53), последњи интеграл може сматрати као потенцијал диполова распоређених у диелектрику.*)

§ 21.5 Основни проблем Електростатике. Електрична сила $\mathfrak{E}$ има увек у случају Кулонова закона потенцијал и зато је њено поље одређено, ако је позната ова функција. Дакле, ако су дата оптерећења и њихов положај у пољу, проблем одређивања електростатичког поља своди се на тражење потенцијала из услова које смо већ нашли, наиме:

1) да свугде у простору потенцијал U мора бити решење Поасонове једначине

$$\Delta U = -4\pi\rho \tag{28'}$$

(у неким областима ρ може да буде једнако нули),

2) да на површинама где има оптерећења (просте и двојне повр-

---

*) Овај се резултат тумачи са гледишта атомске хипотезе на разне начине: на пр. молекули са позитивним и негативним оптерећењима могу се сматрати за диполове. Да би објаснио везу диелектричне константе и температуре код течних тела, Debye претпоставља да у диелектрику *постоје* одређени диполови.

шине), где постоје скокови вредности електричне силе $\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U$, на границама поља, треба да буду задовољени услови:

$$\frac{\partial U}{\partial n_1} - \frac{\partial U}{\partial n_2} = -4\pi\eta \ , \tag{37'}$$

који се добивају из (37), ако се смене пројекције E_{1n}, E_{2n} и ако се узме за позитивну унутрашња нормала поља;

$$U_e - U_i = \mp 4\pi\eta^* \ , \tag{40}$$

на двојним површинама; на површинама проводника је $U = \text{const.}$,

3) да за Кулонов закон, као и за Њутнов закон гравитације, потенцијал у бесконачном пољу и његов градијент задовољавају услове

$$\lim_{r\to\infty} rU = A \ , \quad \lim_{r\to\infty} r^2 \frac{\partial U}{\partial r} = B \ , \tag{62}$$

где су A и B коначне величине, а r растојање од координатног почетка. То се непосредно види из образаца (8), (8′) и (9).

Овај општи проблем упрошћава се, кад имамо само низ проводника у вакууму. Онда је у свима тачкама простора $\rho = 0$ и потенцијал је решење Лапласове једначине

$$\Delta U = 0 \ , \tag{11}$$

место (28′). На површинама проводника f_i потенцијал треба да има константне вредности $U = C_i$ (познате); може да се да, место овог, услов $\int_{f_i} \eta\, df = e_i$ — дата су оптерећења на површинама проводника. Услов пак

$$\frac{\partial U}{\partial n} = -4\pi\eta \tag{34'}$$

непосредно даје одговор, јер кад је познато η, потенцијал је

$$U = \sum_{i=1}^{n} \int_{f_i} \frac{\eta\, df}{r}$$

према обрасцу (32) и проблем је решен.

Најзад, услови (62) остају исти.

Решавање Поасонове или Лапласове једначине уз остале, граничне, услове претставља компликован математички проблем из којега се развила нарочита грана математике — Теорија потенцијала.

Овде ћемо навести само један пример — потенцијал хомогене лопте (густина електричног оптерећења $\rho = \text{const.}$). Ван ове лопте потенцијал

U је решење Лапласове једначине (11) и, ако узмемо у обзир симетрију лопте, можемо ставити

$$U_e = \frac{A}{r} .$$

Протицање вектора $\mathfrak{E}$ кроз неку лопту полупречника r, која обухвата дату лопту чији ћемо полупречник означити са a, биће

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = -\int \operatorname{grad} U_e\, d\mathfrak{f} = \frac{A}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi e ,$$

а оптерећење

$$e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho .$$

Дакле имамо

$$A = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho \qquad \text{и} \qquad U_e = \frac{4\pi a^3 \rho}{3r} . \tag{63}$$

Потенцијал треба да се мења непрекидно при пролазу кроз површину оптерећене лопте, и у некој тачки у унутрашњости треба да задовољава Поасонову једначину. Уочимо тачку у унутрашњости лопте на растојању $r < a$. Протицање $\mathfrak{E}$ кроз лопту полупречника r биће

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = 4\pi e = 4\pi \cdot \frac{4\pi r^3}{3} \rho .$$

Ако са U_i означимо вредност потенцијала у унутрашњости, биће

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = -\int \operatorname{grad} U_i\, d\mathfrak{f} = -\frac{\partial U_i}{\partial r} \cdot 4\pi r^2 ,$$

јер у свима тачкама лоптине површине електрична сила има правац полупречника и исти интензитет. Упоређивањем ових једначина добивамо

$$-\frac{\partial U_i}{\partial r} = \frac{4\pi}{3}\rho r .$$

Дакле је

$$U_i = -\frac{2\pi}{3}\rho r^2 + \text{const.} .$$

На површини дате лопте ($r = a$) треба да буде $U_i = U_e$

$$-\frac{2\pi}{3}\rho a^2 + \text{const.} = \frac{4\pi}{3} a^2 \rho .$$

Зато је

$$U_i = 2\pi\rho\left(a^2 - \frac{r^2}{3}\right) . \tag{64}$$

Лако је видети да је функција (64) решење Поасонове једначине. Доиста

$$\triangle r^2 = \operatorname{div} \operatorname{grad} r^2 = \operatorname{div} 2\mathfrak{r} = 6 \ .$$

и

$$\triangle U_i = -\frac{2\pi\rho}{3} \triangle r^2 = -4\pi\rho \ .$$

Решење низа електростатичких проблема добива се помоћу већ познатих поља тачкастих оптерећења. Узмимо, на пр., случај два тачкаста оптерећења (види сл. 19) и претпоставимо да се свако од њих обавије површином проводника која има облик неке од еквипотенцијалних површина. Узмимо да се на њима налазе оптерећења e и e_1, и да је густина електрицитета на сваком месту пропорционална протицању вектора $\mathfrak{E}$ (образац (13)). Онда ће слика распореда линија сила и еквипотенцијалних површина остати ван проводника иста као и пре. Само соленоиди почињу сада на површинама проводника и стоје на њима управно. Раније поменути услови за електростатичко поље биће задовољени, и за ову врсту проводника можемо сматрати да је поље познато.

Но поставља се само собом питање да ли је решење електростатичког проблема једнозначно, тј. да ли постоји само једна функција U која задовољава низ побројаних услова, — ако је решење уопште могућно. Да бисмо доказали да доиста само једно решење постоји, претпоставимо да их има два U_* и U^*. Зауставимо се на случају проводника, и сматрајмо да су дате вредности потенцијала на површинама или тотална оптерећења проводника. У првом случају имамо на површинама проводника

(65) $$U_* = C_i = U^*$$

и, према томе, разлика између решења ишчезава на овим површинама:

(66) $$\Phi = U_* - U^* = 0 \ .$$

Осим тога, функција Φ задовољава Лапласову једначину (11)

(67) $$\triangle \Phi = \triangle U_* - \triangle U^* = 0 \ .$$

Применимо на ову функцију Гринов образац (33) § 0.2, стављајући $U = W = \Phi$. Како се опет запремински интеграли узимају по запремини целог поља, а површински дуж површина проводника и, најзад, по површини бесконачно велике лопте за коју ћемо претпоставити да служи као спољња граница поља имаћемо:

(68) $$\Sigma \int \Phi \, (\operatorname{grad} \Phi \, d\mathfrak{f}) = \int (\operatorname{grad} \Phi)^2 \, dV + \int \Phi \triangle \Phi \, dV \ .$$

Последњи интеграл отпада због услова (67). Лева страна биће

такође једнака нули. У овом збиру интеграла узимају се сви сем једног по површинама проводника f_i и

$$\int \Phi(\operatorname{grad}\Phi\, d\mathfrak{f}) = \Phi\left[\int \operatorname{grad} U_* \, d\mathfrak{f} - \int \operatorname{grad} U^* \, d\mathfrak{f}\right] = -4\pi\Phi(e_* - e^*) \ ,$$

пошто је Φ константно на површини, а протицања градијената дају производе $-4\pi e_*$ одн. $-4\pi e^*$, где су e_*, e^* евентуална оптерећења површина (в. извођење обр. (34)). Ако су дате вредности потенцијала C_i, због услова (66) горњи израз је једнак нули. Ако су задата оптерећења e_i на проводницима, биће $e_* = e^* = e_i$ и горњи интеграл поново је једнак нули.

Остаје да испитамо какву вредност има овај интеграл на површини бесконачно велике лопте. Према условима (62) потенцијал и градијент теже нули кад се полупречник лопте повећава, и овај површински интеграл у обрасцу (68) отпада. Зато ћемо имати

$$\int (\operatorname{grad}\Phi)^2 \, dV = 0$$

и, како је интегранд позитиван, добивамо

$$\begin{gathered} \operatorname{grad}\Phi = 0 \ , \qquad \operatorname{grad} U_* = \operatorname{grad} U^* \ , \\ \Phi = U_* - U^* = \text{const} \ . \end{gathered} \tag{69}$$

Потенцијали U_* и U^* могу бити једнаки или се могу разликовати за неку константу, али електростатичко поље, због услова (69), добива се једно.

У § 4.4 увели смо појам потенцијалне енергије материјалног система. Електрични потенцијал U нема димензију механичког потенцијала. Али, ако се узме у случају двају тачкастих оптерећења функција

$$W = e_1 U = \frac{e_1 e}{r} \ ,$$

она ће имати димензију механичке потенцијалне енергије и

$$-\operatorname{grad} W = e_1 \mathfrak{E} = \mathfrak{K} \ ,$$

тј. једнак је сили по Кулонову закону (в. обрасце (9), (6′), (2′)).

Ако имамо поље од n тачкастих оптерећења e_i, величина

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{j=1}^{j=1} \frac{e_i e_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i U_i \ , \qquad (i \neq j) \tag{70}$$

где су r_{ij} растојања између оптерећења са одговарајућим индексима,

зове се *енергија електростатичког поља.* У једначини (70) означили смо са U_i збир

$$U_i = \Sigma \frac{e_j}{r_{ij}} ,$$

где се, као што показује услов $i \neq j$, изоставља i-то оптерећење. Овај израз претставља вредност електричног потенцијала који изазивају у тачки e_i сва остала оптерећења. При израчунавању двоструког збира у изразу (70), свака комбинација индекса i и j долази два пута и зато треба да се стави коефицијент $\frac{1}{2}$.

Израз за енергију поља непрекидно распоређених оптерећења добива се уопштавањем (70), па ћемо добити ($e_i \sim \rho\, dV$)

(71) $$W = \frac{1}{2} \int \rho U\, dV$$

и, ако има површинских оптерећења,

(72) $$W = \frac{1}{2} \int \rho U\, dV + \frac{1}{2} \int \eta U\, df .$$

Зауставимо се на изразу (71). Према Поасоновој једначини је

$$\rho = -\frac{1}{4\pi} \Delta U ,$$

и зато је

$$W = -\frac{1}{4\pi} \int U \Delta U\, dV .$$

Ако у Гринову обрасцу ставимо да је $W = U$, добићемо

$$\int U \Delta U\, dV = -\int (\text{grad}\, U)^2\, dV + \int U\, \text{grad}\, U\, df .$$

Узмимо да је поље бесконачно раширено и да не постоје површине прекида вредности електричне силе. Површински интеграл који стоји с десне стране, као што можемо претпоставити, узима се онда по површини бесконачно велике лопте и, како $U \to 0$ и grad $U \to 0$ у бесконачности, он ће бити једнак нули. Последња два обрасца дају онда

(73) $$W = \frac{1}{8\pi} \int (\text{grad}\, U)^2\, dV = \frac{1}{8\pi} \int \mathfrak{E}^2\, dV$$

Величина

(74) $$\delta = \frac{1}{8\pi} \mathfrak{E}^2$$

зове се *густина енергије* електростатичког поља. Ако се у простору налази диелектрик, она се даје изразом

(75) $$\delta = \frac{\varepsilon}{8\pi} \mathfrak{E}^2 = \frac{1}{2} (\mathfrak{E}\, \mathfrak{D}) .$$

B. ЕЛЕКТРИЧНА СТРУЈА

§ 22 Основне величине. Омов закон. У Електростатици проучили смо услове равнотеже, тј. услове непроменљивости електричног стања тела. Ако ови услови нису задовољени у неком тренутку, наступиће промене стања. На пр., ако спојимо жицом два проводника оптерећена до неједнаких потенцијала, биће услови равнотеже поремећени. Сва три тела сачињаваће један проводник и, како је за равнотежу потребан услов да његова површина буде једна од еквипотенцијалних површина, промена стања трајаће све док се не успостави равнотежа. Са гледишта „флуидалне" хипотезе о природи електрицитета, у овом случају померају се количине електрицитета. Према Фарадеј-Максвелову схватању промена стања одиграва се у медијуму. Но без обзира на схватања суштине појаве служићемо се истом терминологијом, и за ову појаву усвојићемо назив *електричне струје*. Поред ове појаве, наиме промене електричног стања у низу везаних проводника до изједначења потенцијала, за коју се каже обично да у проводницима *тече струја*, од места са вишим ка месту са нижим потенцијалом, експерименти дају другу појаву — галванску струју. Постанак галванске струје везан је за извесне хемиске појаве, а проучавање електролизе показује да се у електролиту доиста померају честице оптерећене електрицитетом.

Сада, дакле, можемо учинити две *претпоставке:* I две наведене појаве, наиме промена електричног стања у проводницима наелектрисаним до разних потенцијала и спојеним жицом — и галванска струја исте су природе; II електрична оптерећења могу се померати у проводницима.

Део теорије електрицитета у којем се проучава појава електричне струје зове се *Електродинамика.*

Али електрична струја није проста појава која се састоји само у померању оптерећења, јер се проводник у исто време загрева а магнетска игла која се налази у близини скреће.

Прво ћемо проучити саму појаву електричне струје и увести низ величина које служе за њену карактеристику, затим — њено топлотно дејство. А веза између електричних и магнетских појава сачињаваће одељак *D*.

Уочимо пресек проводника (на пр. жице) у којем тече струја. Због претпоставке II можемо говорити о количини електрицитета која пролази кроз овај пресек (у овом се наша претстава разликује од оне у Електростатици, где смо узимали само померања електрицитета на површинама проводника). Означимо са Δe количину електрицитета која пролази за време Δt и назовимо *јачина струје* величину

$$J = \frac{de}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t} \quad . \tag{1}$$

Ако је ма у ком тренутку J исто за све пресеке проводника, струја се зове *хомогена*, а ако се J не мења у току времена, она се зове *стационарна*.

Нека буде df површински елемент пресека, $d\mathfrak{f}$ — управљени површински елемент. На основи претпоставке II, постоји на сваком месту одређени правац померања струје. Означимо са $\mathfrak{i}_0$ јединични вектор овог правца који има смер померања позитивног електрицитета, и нека dJ буде количина електрицитета која пролази кроз df за јединицу времена.

Величина

$$i = \frac{dJ}{(d\mathfrak{f}\ \mathfrak{i}_0)} \tag{2}$$

зове се *густина* струје. Ако узмемо пресек управни на струји, $d\mathfrak{f}$ је колинеарно са $\mathfrak{i}_0$ и

$$i = \frac{dJ}{df} \quad . \tag{2'}$$

Вектор

$$\mathfrak{i} = i\,\mathfrak{i}_0 \tag{3}$$

такође зовемо густина струје. Из једначина (2) и (3) следује

$$dJ = (\mathfrak{i}\ d\mathfrak{f}) \ ,$$

а кроз пресек f протиче за јединицу времена

$$J = \int_{\mathfrak{f}} (\mathfrak{i}\ d\mathfrak{f}) \ . \tag{4}$$

Ако сада узмемо протицање вектора $\mathfrak{i}$ кроз затворену површину

F, која обухвата неки произвољни део проводника, и претпоставимо да се у њему не ствара електрицитет, биће

$$\int_F \mathfrak{i}\, d\mathfrak{f} = \int_V \operatorname{div} \mathfrak{i}\, dV = 0$$

а, због произвољности запремине V уоченог дела, имаћемо

$$\operatorname{div} \mathfrak{i} = 0 \ . \tag{5}$$

Електрична струја појављује се у проводницима услед дејства различитих узрока, на пр. при додиру тела различитих по свом хемиском саставу, при загревању једног од спојева разних метала итд. *Електромоторном силом* зове се узрок стварања једнаких количина позитивног и негативног електрицитета и њиховог померања у супротним смеровима. Како у Електростатици померање електрицитета наступа кад су разна места проводника оптерећена до различитих потенцијала, то ћемо, по аналогији, појам електромоторне силе прецизирати на следећи начин. У поменутим случајевима, површину додира двају тела сматрамо као двојну површину, на чијим странама потенцијал има различите вредности U_1 и U_2 (*претпоставка* III) и електромоторном силом зовемо разлику

$$U_1 - U_2 \neq 0 \ .$$

Хемиско, одн. топлотно дејство стално одржава разлику потенцијала. Даље ћемо сретати појаве за које ћемо уводити нове дефиниције електромоторне силе. Као што и сам назив показује, ову треба разликовати од пондеромоторне: прва тежи да покрене сама електрична оптерећења, док друга тежи да покрене наелектрисана материјална тела.

Најзад, како се у унутрашњости проводника такође ствара поље електричне силе, када тече струја, то померање електрицитета на неком месту сматрамо као резултат дејства ове силе (*претпоставка* IV).

Означимо са $\mathfrak{E}$ електричну силу (резултанту) која има одређену вредност на неком месту проводника. Густина струје $\mathfrak{i}$ има према дефиницији такође одређене вредности на сваком месту проводника. Овај вектор има правац и смер струје, тј. смер померања позитивних електричних оптерећења. Како се ова померања врше под дејством силе $\mathfrak{E}$, између два вектора $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{E}$ постоји веза. Претпоставимо да је ова веза најпростијег облика, тј. да су ови вектори колинеарни. Онда можемо написати

$$\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E} \ , \tag{6}$$

где је σ скалар, који ћемо звати *специфична проводљивост* или, просто, *проводљивост*. Једначина (6) претставља нову *претпоставку* (V) у теорији електрицитета, коју увек можемо заменити другом (на пр. да је

σ неки оператор, тензор, тј. да се правци $\mathfrak{i}$ и $\mathfrak{E}$ уопште разликују). Али последице ове претпоставке добро се слажу са експерименталним подацима, што јој служи као ослонац. Као што ћемо одмах видети, помоћу једначине (6) изводи се Ohm-ов закон за линиске проводнике, зато се једначина (6) и зове Омов закон у диференцијалном облику.

Проводљивост σ је уопште променљива величина. Она не зависи од правца померања струје, ни од облика проводника у случају изотропних проводника, али њене вредности су различите за различите супстанце и зависе од температуре. Код неких тела примећује се веза и са другим околностима, на пр. код селена — са осветлењем, код бизмута — са магнетским пољем у којем се овај налази.

Ове чињенице показују да у Електродинамици играју улогу материјалне особине проводника, док у Електростатици оне и при померању оптерећења нису долазиле у обзир.

Претпоставимо да стационарна и хомогена струја тече у линиском проводнику. Овакав проводник одређује се особином да је његов нормални пресек (q) свугде толико мали, да се део проводника између два бескрајно блиска пресека (на растојању $d\mathfrak{l}$) може сматрати за елемент запремине (dv), тј.

$$q\, d\mathfrak{l} = dv \ .$$

Дакле q се може сматрати бескрајно малом величином другог реда. Означимо са $d\mathfrak{l}$ управљени лук проводника и, према томе, са $\frac{d\mathfrak{l}}{dl}$ јединични вектор у правцу дирке. Због малих димензија q можемо сматрати да $\mathfrak{i}$ има исту вредност у свима тачкама нормалног пресека. Кроз омотач проводника нема протицања вектора $\mathfrak{i}$, струја тече у проводнику и свугде $\mathfrak{i}$ има исти правац са дирком, одн. нормалом на пресек q. Управљени нормални пресек постаје сад

$$d\mathfrak{f} = q\,\frac{d\mathfrak{l}}{dl} \ ,$$

и у обрасцу (4), због наведених димензија пресека, треба изоставити интеграл. Онда ћемо имати

$$J = q\left(\mathfrak{i}\,\frac{d\mathfrak{l}}{dl}\right) . \tag{*}$$

Сменимо $\mathfrak{i}$ изразом (6). Добићемо

$$J\,\frac{dl}{\sigma q} = \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} \ ,$$

и, ако интегралимо дуж проводника од неке тачке A до друге тачке B,

$$\int_A^B \frac{J}{\sigma q}\, dl = \int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} \ .$$

Како је струја стационарна и хомогена, $J = \text{const.}$, па се може ставити испред интеграла. Величина

$$R = \int_A^B \frac{dl}{\sigma q} \tag{7}$$

зове се *отпор* проводника. Лева страна једначине биће RJ. Десна може даље да се трансформише, ако се претпостави да је поље вектора $\mathfrak{E}$ потенцијално, тј. ако је

$$\mathfrak{E} = -\operatorname{grad} U .$$

Онда је (в. образац (19) § 0.2)

$$\int_A^B \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\int_A^B \operatorname{grad} U\, d\mathfrak{l} = U_A - U_B .$$

У општем случају је

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 = -\operatorname{grad} U + \mathfrak{E}_2 ,$$

где друга компонента не мора имати потенцијал.

Због наведених претпоставака имаћемо, дакле,

$$RJ = U_A - U_B \tag{8}$$

и ова једначина изражава Омов закон (у интегралном облику) који је пронађен експерименталним путем. У случају хомогених и изотропних проводника, чији се сви делови налазе под истим физичким условима, $\sigma = \text{const.}$ и, ако се узме још проводник константног пресека q, његов отпор биће

$$R = \frac{l}{\sigma q} . \tag{9}$$

где је l дужина проводника између тачака A и B.

Напоменимо још да смо при извођењу Омова закона, одн. при постављању једначине (6), учинили још једну, врло важну *претпоставку* (VI): да кретање самих проводника не игра никакву улогу у појави електричне струје, одн. да ова једначина важи за непокретне проводнике.

Ако се проводник у некој тачки дели у гране које се даље поново састају, онда се из једначина (8), (4) и (5) лако могу извести Кирхофова правила: 1) у сваком затвореном колу у мрежи збир производа $R_i J_i$ (на појединим деловима) је једнак збиру електромоторних сила (разликâ потенцијала), 2) у свакој тачки гранања збир јачина струја које утичу једнак је збиру јачина струја које истичу.

§ 23 Топлотно дејство струје. Џаулов закон. Проводник у којем тече струја загрева се. Joule је нашао везу између количине топлоте која се ствара у проводнику, јачине струје и отпора. Његов експери-

ментални закон може да се изведе из чињеница које смо већ проучили. Претпоставимо, једноставности ради, да је проводник линиски. За време dt прође кроз пресек оптерећење de, и производ $de\,\mathfrak{E}$, према дефиницији електричне силе, претставља механичку силу, а скаларни производ $de\,(\mathfrak{E}\,d\mathfrak{l})$, где је $d\mathfrak{l}$ управљени елемент лука, претставља рад који ова сила врши на померању $d\mathfrak{l}$.

Зато је величина

$$J\,(\mathfrak{E}\,d\mathfrak{l}) = \frac{1}{dt}\,de\,(\mathfrak{E}\,d\mathfrak{l})$$

рад у јединици времена. Узмимо да је струја стационарна и да се за јединицу времена оптерећења у проводнику померају од тачке M до неке тачке N. Онда ће одговарајући рад бити

$$\int_M^N J(\mathfrak{E}\,d\mathfrak{l}) = J\int_M^N \mathfrak{E}\,d\mathfrak{l}\ .$$

Интеграл с десне стране једнак је разлици потенцијала $U_M - U_N$ а према Омову закону — производу RJ. Дакле за уочени рад имамо израз RJ^2.

Количина топлоте пропорционална је утрошеном раду и, ако је c топлотни еквивалент рада, она ће за јединицу времена бити једнака

$$Q_1 = cRJ^2\ . \tag{10}$$

У интервалу времена t, према томе, биће

$$Q = cRJ^2 t\ . \tag{10'}$$

Једначине (10) и (10′) изражавају Џаулов закон.

У бесконачно малом елементу ствара се за јединицу времена количина топлоте

$$dQ_1 = c\frac{dl}{\sigma q}\cdot q^2\,|\mathfrak{i}|^2 = \frac{c}{\sigma}\,\mathfrak{i}^2\,dv = c\sigma\,\mathfrak{E}^2\,dv\ , \tag{11}$$

као што то следује из образаца: $q\,dl = dv$, (6) и (*).

§ 24 Струја у диелектрику. Права струја. Експерименталне чињенице које су служиле као основа за увођење појма електричне струје, величинâ помоћу којих се описује ова појава, и одговарајући закони дошли су као резултат проучавања струје у затвореном колу. Према досадањем схватању струја може да тече трајно у проводницима, када су они повезани у затворено коло. Зваћемо ову струју *кондукторска*. Али струја при пражњењу кондензатора тече у незатвореном колу и овоме треба додати случај индуковане струје, о којој ће подробније даље бити говора, а која се може појавити и у незатвореном колу. Ове чи-

њенице стварају велику тешкоћу горњем схватању. Излаз из ове тешкоће омогућује Максвелова концепција, којом се доводи у везу улога диелектрика са појавом струје у проводницима.

Уочимо поново два проводника A и B, оптерећена до различитих потенцијала. (Нека се, на пр., на првом налази оптерећење e, на другом $-e$. Спојимо ли их жицом, у њој ће се појавити кондукторска струја која тече од A ка B. Али у диелектрику који опкољава тела A и B можемо замислити систем векторских линија електричне силе и вектора $\mathfrak{D}$, померања диелектрика, које се, полазећи од A, завршавају на површини тела B. Према Максвелову схватању, померање електрицитета врши се од A до B кроз жицу (кондукторска струја) а даље, од B до A, дуж ових векторских линија у диелектрику. Ово последње померање зове се *струја у диелектрику* и оно постоји када се поље мења у току времена (*претпоставка* VII)*).

За карактеристику струје ове врсте морамо такође увести неке величине. Замислимо зато неку површину F која обухвата тело A. Протицање вектора $\mathfrak{D}$ кроз ову површину биће

$$\int_F (\mathfrak{D}\, d\mathfrak{f}) = e \ .$$

Док нису спојена жицом тела A и B, ова величина је константна, а кад почне да тече струја, њена вредност постаје функција времена, те ћемо имати

$$\frac{d}{dt}\int_F (\mathfrak{D}\, d\mathfrak{f}) = \frac{de}{dt} \ .$$

Како се површина F не мења у току времена и како смо уочили промене вектора $\mathfrak{D}$ само у току времена (он је иначе још и функција положаја), то ћемо ставити знак парцијалног извода при диференцирању под знаком интеграла и добићемо

$$\frac{de}{dt} = \int_F \left(\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t}\, d\mathfrak{f}\right) \ . \tag{12}$$

Ова једначина има облик сличан (4) (в. још и једначину (1)), па ћемо величину

$$\frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} = \mathfrak{a} \tag{13}$$

*) Појава се, дакле, замишља као да у проводницима тече једна течност (електрицитет) која истиче даље из B у диелектрик, где потискује другу, а део ове улази у проводник A. Према Максвелу, за струју у диелектрику не важе Омов и Џаулов закон.

звати *густином струје у диелектрику*. Дакле је

$$\frac{de}{dt} = \int_F (\mathfrak{a}\, d\mathfrak{f}) \ . \tag{12'}$$

Сменимо у обрасцу (13) померање диелектрика са електричном силом $\mathfrak{E} = \frac{4\pi}{\varepsilon}\mathfrak{D}$ и, уз претпоставку да се ε не мења у току времена, добићемо

$$\mathfrak{a} = \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \ . \tag{14}$$

Но Максвелова теорија иде још корак даље; у њој се уводи нова *претпоставка* (VIII), да сва тела у природи имају у исти мах особине проводника и изолатора, тако да се у њима може истовремено појавити кондукторска струја и струја у диелектрику. Математички ово формулишемо на тај начин, што уводимо појам *праве струје* која је збир обеју струја, и зовемо *густином праве струје* величину

$$\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{a} \ . \tag{15}$$

Обрасци (6) и (14) дају онда

$$\mathfrak{c} = \sigma\,\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \ . \tag{15'}$$

За стационарна стања је $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} = 0$ и, наравно, једначина (15') прелази у (6). У *потпуним* или *савршеним* проводницима густина праве струје своди се на први члан у једначини (15'), а за *потпуне* изолаторе на други. За остала тела морамо претпоставити да проводници у већој мери проводе кондукторску струју, изолатори пак — струју у диелектрику.

С. МАГНЕТОСТАТИКА

§ 25 Основне чињенице. Кулонов закон. Познато је из експеримената да се нека тела (гвожђе, челик и др.) могу налазити у т.зв. *магнетном* стању. Слично случају електричног стања, магнетно стање се такође испољава у појави пондеромоторних сила (*чињеница* 1). Ако се узму два *намагнетисана* тела (тј. она која се налазе у магнетном стању), механичка сила која ће на њих дејствовати може да буде привлачење или одбијање. Из тога закључујемо да постоје две врсте магнетних стања (*чињеница* 2). Узрок ових стања зовемо *магнетизам*. О природи магнетизма чињене су разне претпоставке; једна од ових је била, да постоје две врсте магнетних флуидума, затим — да су молекули мали магнети итд. Држећи се феноменолошког правца, ми се нећемо ослањати ни на једну од оваквих претпоставака ни у случају магнетизма, а при описивању магнетских појава служићемо се само низом основних чињеница.

Ако се испитају особине намагнетисаног тела, *магнета*, за који ћемо узети да има облик штапића, види се да се углавном његови крајеви налазе у магнетном стању. Зовимо ове крајеве *полови* магнета. Они су увек разних врста (*чињеница* 3). Један се зове северни, други — јужни, у вези са понашањем магнетне игле на површини Земље. Можемо их такође звати позитиван и негативан, јер, ако се разноимени полови двају магнета саставе њихова се стања неутралишу (*чињеница* 4). Разноимена магнетна стања не могу се никад раздвојити, тј. деобом магнета ма у колико мале делиће добивају се увек, све мањи и мањи магнети са по два пола (*чињеница* 5). Даље, нису познати никакви проводници магнетизма, тј. магнетно стање остаје увек везано за одређена места тела (*чињеница* 6).

Извесну особину магнетног стања тела можемо такође да одредимо слично случају електричног стања, помоћу једног скалара. Ако се мери механичка сила $\mathfrak{K}$ која дејствује између полова двају разних магнета, и ако се мења стање првог магнета (било трењем неким трећим

магнетом, било на неки други начин) а положај магнета и стање другог магнета остају исти, онда се види да се може ставити

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{K}_1 \ , \tag{1}$$

где вектор $\mathfrak{K}_1$ зависи једино од стања другог магнета и његова положаја према првом. Скалар m одређује магнетно стање пола првог магнета *(чињеница* 7). Он се зове *јачина пола* или *магнетно оптерећење*. У једном магнету апсолутне вредности јачинâ двају полова су исте *(чињеница* 8). Јачину северног пола можемо означити са $+m$, јужног са $-m$.

Ако су m и m_1 јачине полова двају магнета, мерења силâ које дејствују на ове полове показују да је

$$\mathfrak{K} = f\frac{mm_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 \ , \tag{2}$$

где је f коефицијент пропорционалности, r растојање између уочена два пола (разних магнета) и $\mathfrak{r}_0$ јединични вектор правца који пролази кроз њих. Из овог закона се види да се истоимени полови одбијају, док се разноимени привлаче. Потпуно тачан је овај израз наравно за тачкасте полове. Овај Кулонов закон у Теорији магнетизма има математички облик сличан закону у Теорији електрицитета. По Гаусову предлогу, ставимо да је коефицијент $f = 1$ и ако се магнети налазе у вакууму, имаћемо

$$\mathfrak{K} = \frac{mm_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 \ . \tag{3}$$

Ако се узму магнетни полови коначних димензија, онда се са dm и dm_1 означавају јачине запреминских елемената полова, па ће бити

$$\mathfrak{K} = \int_V \int_{V_1} \frac{dm\, dm_1}{r^2}\mathfrak{r}_0 \ , \tag{4}$$

где су V и V_1 запремине полова, одн. намагнетисаних тела, а r растојање између два елемента.

Кулонов закон (3) омогућује да се одреди димензија величине m. Рачун којим смо се послужили и у случају електричних оптерећења ((4) § 21.1) показује да је

$$[m] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1} \ . \tag{5}$$

Осим тога, служећи се законом (3), можемо увести јединицу јачине пола: у систему *CGS* ово ће бити јачина пола који исти овакав пол, на растојању од 1 cm, одбија силом од једног дина.

Као и у случају електрицитета, Фарадеј је увео поправку због

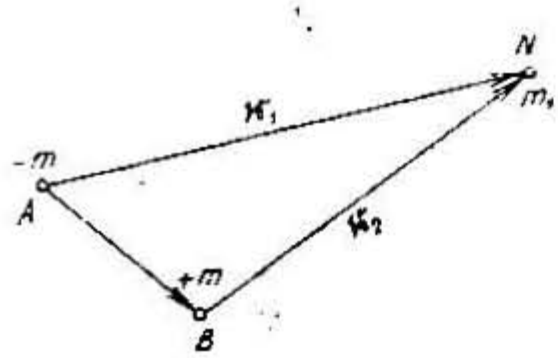
утицаја медијума који опкољава магнетне полове. Сила привлачења (или одбијања) зависи од природе овог медијума па се ставља

$$\mathfrak{K} = \frac{1}{\mu} \frac{m m_1}{r^2} \mathfrak{r}_0 \tag{6}$$

а μ се зове *магнетски пермеабилитет*. У овом Фарадеј-Кулонову закону могли бисмо узети у општијем облику утицај медијума, сматрајући $\frac{1}{\mu}$ за неки оператор (на пр. тензор). Претпоставка да је μ скалар даје нам за многа тела задовољавајуће резултате али за кристале она не важи. За вакуум је, дакле, $\mu = 1$. Материјалне средине разликују се у вредностима магнетског пермеабилитета. За тела која се зову *дијамагнетна* (антимон, бакар, бизмут, злато, сребро, цинк) он је < 1, за другу групу тела, *парамагнетних* $\mu > 1$ (хром, паладијум, платина). Но постоји и група тела (гвожђе, никел и кобалт) за која μ има велике вредности чак и променљиве. Ово су т.зв. *феромагнетна* тела.

§ 26 Магнетска поља перманентних магнета. Перманентни магнети, тј. магнети код којих се јачина полова не мења у току времена, стварају у простору поље силâ. Ово поље постоји према Фарадеј-Максвеловој концепцији и онда, кад нигде у простору нема других магнетних полова, јер медијум који опкољава магнет прелази у неко нарочито стање. Са другог гледишта, сила се на неком месту појављује само ако се на том месту налази неки магнетни пол.

Како се магнетна оптерећења не могу раздвојити, то ћемо почети проучавање поља са случајем т.зв. елементарних магнета. Елементарни магнет замишљамо као дипол, тј. претпостављамо да се два магнетна пола, јачине $+m$ и $-m$, налазе у тачкама (A и B) на бесконачно блиском растојању. Нека буде $d\mathfrak{l}$ вектор положаја северног пола према јужном. Његов правац је оса магнета.



Сл. 24

Ако се у тачки N појави пол m_1 и ако су $\mathfrak{r}_1$ и $\mathfrak{r}_2$ (в. сл. 24) вектори положаја ове тачке у односу на A, одн. B, на овај пол дејствоваће резултанта сила, која је према Кулонову закону дата изразом

$$\mathfrak{K} = -\frac{1}{\mu} \frac{m m_1}{r_1^3} \mathfrak{r}_1 + \frac{1}{\mu} \frac{m m_1}{r_2^3} \mathfrak{r}_2 .$$

Ако ставимо да је $m_1 = 1$, добићемо поље вектора који зависи само од елементарног магнета. Али, као што се види из претходног обрасца, поље силе $\mathfrak{K}$ можемо сматрати као резултат суперпозиције

двају поља. Дакле можемо одвојено проучавати и особине поља вектора

(7) $$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \frac{m}{r^3} \mathfrak{r}$$

који ћемо звати *магнетска сила* или *магнетски вектор*. Ако претпоставимо да се m не мења у току времена и да је пол непокретан, ово ће поље бити *магнетостатичко*, а део Теорије магнетизма у којем се проучавају оваква поља зове се *Магнетостатика*.

За вакуум је

(8) $$\mathfrak{H} = \frac{m}{r^3} \mathfrak{r}$$

и, како је m константа, поље овог вектора биће Лапласово (в. § 21.2). Можемо, дакле, ставити да је

(9) $$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} U_m \ , \qquad U_m = \frac{m}{r}$$

и U_m је *магнетски потенцијал*.

Када се магнетни пол налази у неком медијуму, магнетски вектор $\mathfrak{H}$ зависи од његових особина. У обрасцу (7) ова се веза поставља множитељем $\frac{1}{\mu}$, и μ је уопште функција координата. Као и у Теорији електрицитета, можемо увести други вектор

(10) $$\mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} = \frac{m}{r^3} \mathfrak{r}$$

који не зависи од особина медијума. У случају нехомогеног и анизотропног медијума, веза између вектора $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{H}$ не може се дати скаларом μ, него множитељ $\frac{1}{\mu}$ у обрасцу (7) или μ у обрасцу (10) треба сматрати за тензор. Овај случај нећемо засада узети у обзир.

Вектор $\mathfrak{B}$ зове се *магнетска индукција*, и, према оном што смо мало пре казали за вектор (8), биће

(11) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \, , \quad \operatorname{rot} \mathfrak{B} = 0$$

за све тачке поља осим уоченог усамљеног пола који игра улогу извора или понора. Али, како морамо узети елементарне магнете, то ћемо имати изворне парове и претпоставићемо да свака затворена површина која обухвата један обухвата и други пол. Нека $\mathfrak{B}_1$ и $\mathfrak{B}_2$ буду магнетске индукције полова m и $-m$, а $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ — магнетска индукција

елементарног магнета. Протицања прва два вектора кроз ову површину (према обр. 10 и 69 § 0.4) биће

$$\int_F \mathfrak{B}_1 d\mathfrak{f} = 4\pi m \ , \qquad \int_F \mathfrak{B}_2 \, d\mathfrak{f} = -4\pi m$$

те је, дакле,

$$\int_F \mathfrak{B} \, d\mathfrak{f} = 0 \ .$$

Према Гаусовој теореми биће онда и $\int_V \operatorname{div} \mathfrak{B} \, dV = 0$ и, због произвољности површине F, одн. обухваћене запремине V, имаћемо увек

(12) $$\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 \ .$$

Поље магнетске индукције је безизворно и, другим речима, нема нигде *правог магнетизма*. Зато, да бисмо објаснили постанак магнетског поља, уводимо појам *слободног магнетизма*. Сматрамо да се овај магнетизам појављује на оним местима где се мењају вредности магнетског пермеабилитета, тј. у нехомогеним медијумима, у феромагнетним телима или на границама тела која имају различите магнетске пермеабилитете.

Дефинисаћемо *просторну густину* (ρ_m) *слободног магнетизма* једначином

(13) $$4\pi\rho_m = \operatorname{div} \mathfrak{H} \ .$$

Ако се стави $\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu} \mathfrak{B}$, и узме у обзир обр. (11) или (12) добива се

(13′) $$\rho_m = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div} \frac{1}{\mu} \mathfrak{B} = -\frac{1}{4\pi\mu^2} (\mathfrak{B} \operatorname{grad} \mu) = -\frac{1}{4\pi\mu} (\mathfrak{H} \operatorname{grad} \mu) \ .$$

Површинску густину (η_m) *слободног магнетизма* одређујемо помоћу једначине

(14) $$4\pi\eta_m = H_{2n} - H_{1n} \ ,$$

где су H_{2n} и H_{1n} интензитети нормалних компонената магнетског вектора $\mathfrak{H}$ на разним странама границе двају медијума са различитим вредностима магнетског пермеабилитета (упореди образац (51) § 21.4).

Зауставимо се на случају вакуума. Поље вектора $\mathfrak{H}$, који је у овом случају једнак вектору $\mathfrak{B}$ ($\mu = 1$), биће потенцијално (обр. 9). Нека

сада $\mathfrak{H}$ означава магнетски вектор елементарног магнета, тј. (в. израз за силу $\mathfrak{K}$ у почетку овог параграфа)

(15) $$\mathfrak{H} = m\left(\frac{\mathfrak{r}_2}{r_2^3} - \frac{\mathfrak{r}_1}{r_1^3}\right) .$$

Означимо ли са

(16) $$U_{\mathrm{m}} = m\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) ,$$

биће

(17) $$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad} U_{\mathrm{m}} .$$

U_{m} је потенцијал елементарног магнета.

Као у случају дипола (обр. (19) § 21.2), а према обрасцу (70) или (70′) § 0.4, можемо потенцијалу (16) елементарног магнета дати облик

(18) $$U_{\mathrm{m}} = \mathfrak{m} \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} \frac{1}{r} ,$$

ако означимо $\mathfrak{m} = m\,\delta s\,\mathfrak{n}$, где је $\mathfrak{n}$ јединични вектор осе магнета (од јужнога пола ка северном), δs растојање полова. Вектор $\mathfrak{m}$ зове се *магнетни момент*.

У случају магнета коначних димензија, потенцијал се у некој тачки ван магнета може наћи на овај начин. Сматрајмо да се у елементу запремине dV налази елементарни магнет и означимо величину $m\,\delta s\,\mathfrak{n}$ са $\mathfrak{m}\,dV$. Потенцијал овог елементарног магнета биће, према обрасцу (18), $dU_{\mathrm{m}} = \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} \frac{1}{r}\right) dV$, а потенцијал целог магнета

$$U_{\mathrm{m}} = \int_{\mathrm{V}} \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} \frac{1}{r}\right) dV .$$

У Гаусову обрасцу (15) § 0.2 ставимо

$$\mathfrak{v} = \frac{\mathfrak{m}}{r} .$$

Како је $\operatorname{div} \frac{1}{r}\mathfrak{m} = \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad} \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathfrak{m}$ и како се у нашем случају узима вредност градијента у оној тачки простора где се налази елементарни магнет, добићемо

$$\int_{\mathrm{F}} \frac{\mathfrak{m}}{r}\, d\mathfrak{f} = \int_{\mathrm{V}} \left(\mathfrak{m} \operatorname{grad}_{\mathrm{M}} \frac{1}{r}\right) dV + \int_{\mathrm{V}} \frac{\operatorname{div} \mathfrak{m}}{r}\, dV .$$

Из ове једначине следује, да се израз за потенцијал U_{m} може написати у облику збира два потенцијала: први даје слој магнетизма на

површини магнета F са густином $\sigma = (\mathfrak{m}\,\mathfrak{n})$ јер је $d\mathfrak{f} = \mathfrak{n}\,df$, а други даје магнетизам у запремини V чија је густина $\rho_m = -\operatorname{div}\mathfrak{m}$, тј.

$$U_m = \int_F \frac{\sigma\,df}{r} + \int_V \frac{\rho_m\,dV}{r} \quad . \tag{18'}$$

Поред наведених распореда магнетизма можемо замислити магнетну двојну површину, тј. плочу бесконачно мале дебљине δ која је ограничена са две подударне површине. Нека једна страна ове површине буде оптерећена северним магнетизмом а друга јужним. Ако је $\mathfrak{n}$ јединични вектор нормале који иде од јужног ка северном магнетизму, а η_m површинска густина, основе бесконачно малог цилиндра са осом $\mathfrak{n}$ можемо сматрати за полове елементарног магнета. Њихове јачине биће $\eta_m\,df$ и $-\eta_m\,df$, а момент овог магнета $d\mathfrak{m} = \eta_m\,\delta\,df\,\mathfrak{n}$. Извођење потенцијала магнетне двојне површине слично је оном које смо већ имали за случај електричне, па је, према обрасцу (38) § 21.3,

$$U_m = \int_F \eta_m\,\delta\left(d\mathfrak{f}\,\operatorname{grad}_M \frac{1}{r}\right) \tag{19}$$

вредност потенцијала у некој тачки M, изазвана овом површином (F). Цела се површина види из тачке M под углом ω (39) § 21.3 и, ако је $\eta_m\,\delta = \eta_m^*$ исто за све тачке површине F, биће

$$U_m = \eta_m^*\,\omega \tag{19'}$$

према наведеним обрасцима. Двојна површина са овом особином зове се *магнетни лист*. Особине оваквог потенцијала видели смо у § 21.3. Сходно изразима (73), (74) и (75) § 21.5, зовемо *енергијом* магнетског поља израз

$$W_m = \frac{1}{8\pi}\int \mathfrak{H}^2\,dV \tag{20}$$

(у вакууму), густином енергије магнетског поља

$$\delta_m = \frac{1}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 \tag{21}$$

а, у случају $\mu \neq 1$,

$$\delta_m = \frac{\mu}{8\pi}\,\mathfrak{H}^2 = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{H}\,\mathfrak{B}) \quad . \tag{21'}$$

Видели смо да величине m, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{B}$, μ играју у Магнетостатици улоге слично улогама величина e, $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{D}$, ε у Електростатици. Ова аналогија проистиче из истог математичког облика двају Кулонових закона. Међутим постоји и разлика између неких карактеристичних особина магнетског и електричног поља: 1) изоловани магнетни полови не постоје,

2) не постоје проводници магнетизма, 3) μ може имати вредности веће и мање од јединице, док је $\varepsilon \geqq 1$.

Према хипотези дејства са даљине, реални смисао се даје поново скалару m, док се векторима $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{B}$ — даје математички. Према Фарадеј - Максвелову схватању, ови вектори карактеришу извесно стање медијума и зато имају реални смисао, док јачина пола постаје математички израз, наиме број пропорционалан протицању вектора $\mathfrak{B}$ (види обрасце који претходе (12)).

По аналогији са обрасцем (56) § 21.4, можемо увести нову величину *магнетизирање* коју ћемо дефинисати једначином

$$\mathfrak{M} = \frac{\mu - 1}{4\pi} \mathfrak{H} , \tag{22}$$

а величину

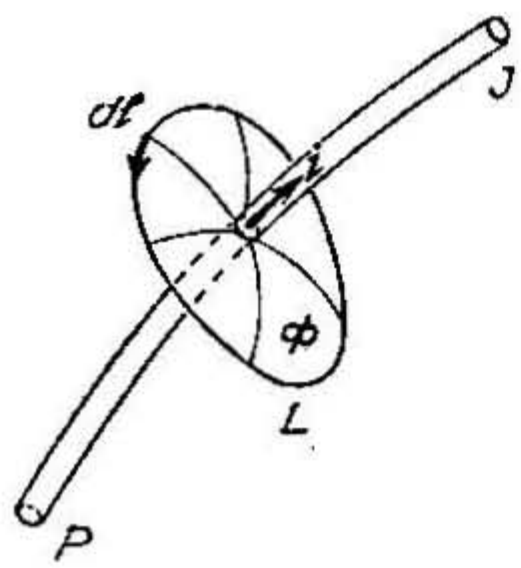
$$\varkappa_m = \frac{\mu - 1}{4\pi} \tag{23}$$

зваћемо магнетски *сусцептибилитет*.

D. ЕЛЕКТРОМАГНЕТИЗАМ

§ 27 Магнетско поље електричне струје. Био-Саваров закон. Прва опажања везе између електричних и магнетских појава датирају од пре двеста година, али се тек 1820 појављују Oersted'ова, чија су посматрања скретања магнетне игле у близини жице, којом тече електрична струја, послужила као основа за нову област науке. Ова област, у којој се проучавају везе електричних и магнетских појава, електромагнетизам, била је од изванредне важности за технику, а ништа мањи није ни њен значај за Теорије електрицитета и магнетизма.

Први квалитативни резултати показали су да се у простору који опкољава проводник у којем тече струја ствара магнетско поље. На магнет, када се унесе у овај простор, дејствује сила чији правац и смер могу да се одреде према познатом Ampère-ову правилу. Убрзо затим, још исте 1820 г., Biot и Savart нашли су и квантитативни закон, узимајући испочетка праволиниску струју. За овај случај Био-Саваров закон има прости математички облик, али за произвољни проводник овај облик се знатно компликује, тако да као чињеница која треба да буде полазна, није довољно очевидан. Стога ћемо поћи од друге чињенице чији се смисао лакше може схватити.



Сл. 25

У Експерименталној физици располажемо методама за мерење вредности магнетског вектора $\mathfrak{H}$ у свакој тачки поља, а исто тако и за мерење јачине струје. Дакле, ако кроз проводник P (сл. 25) тече струја јачине J, у свакој тачки неке затворене криве L која опкољава проводник можемо наћи вредност вектора $\mathfrak{H}$. Можемо даље израчунати линиски интеграл $\int_L \mathfrak{H}\, dl$. Мењајући јачину J, видећемо да су ове две величине пропорционалне. Означимо коефицијент пропорционалности са $\frac{4\pi}{c}$ (због тога што

ћемо онда добити тачан израз за Био-Саваров закон). Како нађена веза важи ма за коју криву L, то ћемо ставити

$$\int_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{l} = \frac{4\pi}{c} J \tag{1}$$

(*чињеница* 1). Из ове једначине, која се понекад зове прва главна једначина електромагнетског поља, може се извести нова једначина која игра основну улогу у Теорији електромагнетизма.

Лева страна једначине (1) трансформише се према Стоксовој теореми у израз $\int_\Phi \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}$, где је са Φ означена произвољна површина, ограничена контуром L. Нека f буде пресек ове површине са проводником P. Према обрасцу (4) § 22, јачина струје J је једнака протицању густине $\mathfrak{i}$ кроз f; али пошто последњи вектор ишчезава на другим деловима површине Φ, то ће овај интеграл по f бити једнак интегралу по Φ, тј.

$$J = \int_f \mathfrak{i}\, d\mathfrak{f} = \int_\Phi \mathfrak{i}\, d\mathfrak{f} .$$

Дакле, сменом ових израза у једначини (1) добивамо

$$\int_\Phi \operatorname{rot} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \frac{4\pi}{c} \int_\Phi \mathfrak{i}\, d\mathfrak{f} .$$

Овај услов важи ма за какву површину Φ и, према томе, мора бити

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i} . \tag{2}$$

Према Омову закону је $\mathfrak{i} = \sigma \mathfrak{E}$, а са гледишта Фарадеј-Максвелове теорије у свима тачкама простора вектори $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{E}$ одређују извесна стања медијума. Једначина

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathfrak{E} \tag{2'}$$

даје онда везу између електричне силе $\mathfrak{E}$ и магнетске $\mathfrak{H}$ у свакој тачки поља ових вектора, т.зв. електромагнетског поља. Њу ћемо звати прва главна једначина електромагнетског поља.

Дефинишимо сад вектор $\mathfrak{B}$ помоћу услова

$$\operatorname{rot} \mathfrak{B} = \mathfrak{H} \quad , \quad \operatorname{div} \mathfrak{B} = 0 . \tag{3}$$

Због једначина (2) и (3) имаћемо

$$\text{rot rot } \mathfrak{B} = \text{grad div } \mathfrak{B} - \Delta \mathfrak{B} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{i}$$

и

(4) $$\Delta \mathfrak{B} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{i} \ .$$

Ако раставимо сваки од вектора у компоненте, пројекције V_α и i_α ($\alpha = 1, 2, 3$) на три ортогоналне осе биће решења једначина

(5) $$\Delta V_\alpha = -\frac{4\pi}{c} i_\alpha \ .$$

А ова једначина је истог облика са Поасоновом (28′) § 21.3. Њено решење је функција

(6) $$V_\alpha = \frac{1}{c} \int \frac{i_\alpha \, dV}{r} \ ,$$

која се добива из обрасца (24) § 21.3, ако се само замене ознаке: ρ са $\frac{i_\alpha}{c}$, l са r, — ако се при том са r означи растојање од елемента запремине dV до неке тачке поља за коју се узима вредност V_α; интеграл се узима по запремини V проводника.

Враћајући се векторима $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{i}$ видимо дакле, да је

(7) $$\mathfrak{B} = \frac{1}{c} \int \frac{\mathfrak{i} \, dV}{r} \ .$$

Овај вектор се зове *вектор-потенцијал* због сличности са потенцијалом U који задовољава Поасонову једначину.

Израз за вектор-потенцијал може да се упрости за линиски проводник. Према једначини (*) § 22 и ранијим условима, имаћемо

(8) $$\mathfrak{i} \, dV = \mathfrak{i} \, q dl = iq d\mathfrak{l} = q \left(\mathfrak{i} \frac{d\mathfrak{l}}{dl} \right) d\mathfrak{l} = J d\mathfrak{l}$$

— услов који карактерише линиске проводнике. Сматрамо ли да се сад интеграљење врши дуж оваквог проводника, то ће се израз (7) трансформисати у

(9) $$\mathfrak{B} = \frac{1}{c} \int \frac{J \, d\mathfrak{l}}{r} \ .$$

Израчунајмо rot $\mathfrak{B}$, тј. вектор $\mathfrak{H}$, претпостављајући да је струја стационарна и хомогена, тј. да је $J = \text{const.}$. Онда имамо

$$\text{rot } \mathfrak{B} = \left[\nabla \mathfrak{B} \right] = \frac{J}{c} \left[\nabla \int \frac{d\mathfrak{l}}{r} \right] \ .$$

Вредност овог вектора тражи се у некој тачки M поља, и при про-

сторном диференцирању треба водити рачуна о томе да од координата ове тачке зависи само r. Дакле је

$$\left[\nabla \int \frac{d\mathfrak{l}}{r}\right] = \int \left[\nabla \frac{1}{r}, d\mathfrak{l}\right] = -\int \frac{1}{r^2}\left[\operatorname{grad} r, d\mathfrak{l}\right] .$$

За почетну тачку узимамо овде ону тачку N проводника од које почиње $d\mathfrak{l}$; $\operatorname{grad} r$ је јединични вектор правца NM. Али, ако сматрамо да је почетна тачка M, увешћемо вектор супротна смера

$$\mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0 = -r \operatorname{grad} r .$$

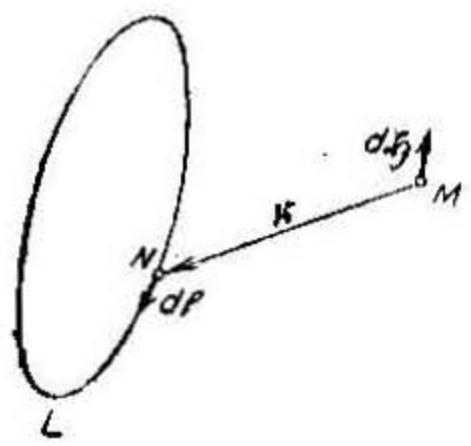
И добићемо, сменом ових израза у првој од једначина (3), да у тачки M поља вектор $\mathfrak{H}$ има вредност

$$\mathfrak{H} = \frac{J}{c} \int_{O} \frac{1}{r^3} [\mathfrak{r}\, d\mathfrak{l}] , \tag{10}$$

где се интеграљење врши дуж кола. Ова једначина изражава Био-Саваров закон. Диференцирајући је, можемо сматрати да сваки елемент струје $J\,d\mathfrak{l}$ изазива у тачки M бесконачно мали вектор

$$d\mathfrak{H} = \frac{J}{cr^3} [\mathfrak{r}\, d\mathfrak{l}] \tag{11}$$

(види сл. 26).



Сл. 26

Изразу (10) може се дати други облик. Трансформишимо зато израз

$$\left(\mathfrak{C}, \int_{O} \left[\frac{\mathfrak{r}}{r^3} d\mathfrak{l}\right]\right) = \int_{O} \left(\left[\mathfrak{C} \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right] d\mathfrak{l}\right) , \tag{12}$$

где је $\mathfrak{C}$ произвољан али константан вектор. Према Стоксовој теореми овај интеграл је једнак површинском интегралу

$$\int_{F} \left(\operatorname{rot}\left[\mathfrak{C} \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right] d\mathfrak{f}\right) ,$$

где је F нека површина оивичена колом. Ако напишемо ∇ место rot и развијемо двоструки векторски производ, добићемо

$$\left(\left[\nabla\left[\mathfrak{C} \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right]\right] d\mathfrak{f}\right) = \left(d\mathfrak{f}\, \mathfrak{C}\right)\left(\nabla \frac{\mathfrak{r}}{r^3}\right) - \left(\mathfrak{C} \nabla\right)\left(\frac{\mathfrak{r}}{r^3} d\mathfrak{f}\right) .$$

Али је $\nabla \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = \operatorname{div} \frac{\mathfrak{r}}{r^3} = 0$, и зато је израз (12) једнак

$$-\left(\mathfrak{C}, \nabla \int_{F} \left(\frac{\mathfrak{r}}{r^3} d\mathfrak{f}\right)\right) . \tag{13}$$

Упоређивање израза (12) и (13), уз напомену да је $\mathfrak{C}$ произвољан вектор, даје

$$\int_{O}\left[\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\,d\mathfrak{l}\right] = -\operatorname{grad}\int_{F}\left(\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\,d\mathfrak{f}\right) . \tag{14}$$

Овде се за почетну тачку вектора $\mathfrak{r}$ сматра тачка M. Узмимо да је сад почетна тачка P на површини F, а операција grad_M да се односи на диференцирање по координатама тачке M.

Онда магнетски вектор $\mathfrak{H}$ може да се претстави као градијент скалара ($\mathfrak{r}$ је сада $\overrightarrow{PM}$)

$$U_m = \frac{J}{c}\int\frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{f}}{r^3} = \frac{J}{c}\int_{F}\frac{\cos(\mathfrak{n}\mathfrak{r})}{r^2}\,df , \tag{15}$$

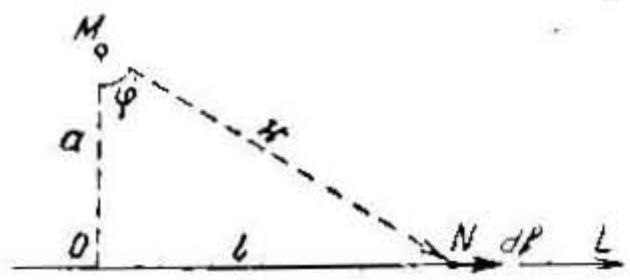
$$\mathfrak{H} = -\operatorname{grad}_M U_m$$

ако је $\mathfrak{n}$ јединични вектор нормале на површини F. Према томе можемо сматрати да је магнетско поље, изазвано електричном струјом, еквивалентно пољу магнетне двојне површине F, којој коло служи као контура (види образац (19) § 26).

Испитајмо још и природу константе c. Одредимо прво димензију ове величине. $\mathfrak{H}$ је магнетски вектор, који има димензију $\left[\frac{m}{r^2}\right] = M^{\frac{1}{2}} L^{-\frac{1}{2}} T^{-1}$ (види обр. (5) § 25). Јачина струје J има димензију $\left[\frac{de}{dt}\right] = M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-2}$ (види обр. (4) § 21.1). Према томе и на основи обрасца (10), лако је наћи да је

$$[c] = LT^{-1} ,$$

тј. да константа c има димензију брзине. Колраушови и В. Веберови експерименти (1856 г.) дали су за c вредност врло блиску брзини светлости, што су доцнија испитивања потврдила.



Сл. 27

§ 27.1 Примери. а) *Магнетско поље бесконачне праволиниске струје* можемо наћи помоћу општег обрасца (10) на овај начин. Магнетски вектор $\mathfrak{H}$ у некој тачки M стоји управно на равни која пролази кроз ту тачку и праву L дуж које тече струја јер сви елементи $d\mathfrak{H}$ (11) стоје на њој управно. Нека буде $J = \text{const.}$, $MO = a$ растојање тачке M од праве L, φ угао између праве MO и вектора $\mathfrak{r}$, l — отсечак ON. Како сви вектори

$d\mathfrak{H}$ имају исти правац и исти смер, модуо вектора $\mathfrak{H}$ биће

$$H = \frac{J}{c}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{r^3}\left|\left[\mathfrak{r}d\mathfrak{l}\right]\right| .$$

Из слике 27, види се да је модуо овог векторског производа

$$rdl\sin(\mathfrak{r}\,d\mathfrak{l}) = a\,dl$$

и

$$l = a\,\mathrm{tg}\varphi\ , \qquad r = \frac{a}{\cos\varphi}\ .$$

Како је

$$dl = \frac{a}{\cos^2\varphi}\,d\varphi\ ,$$

биће, после смене променљивих и граница интеграла,

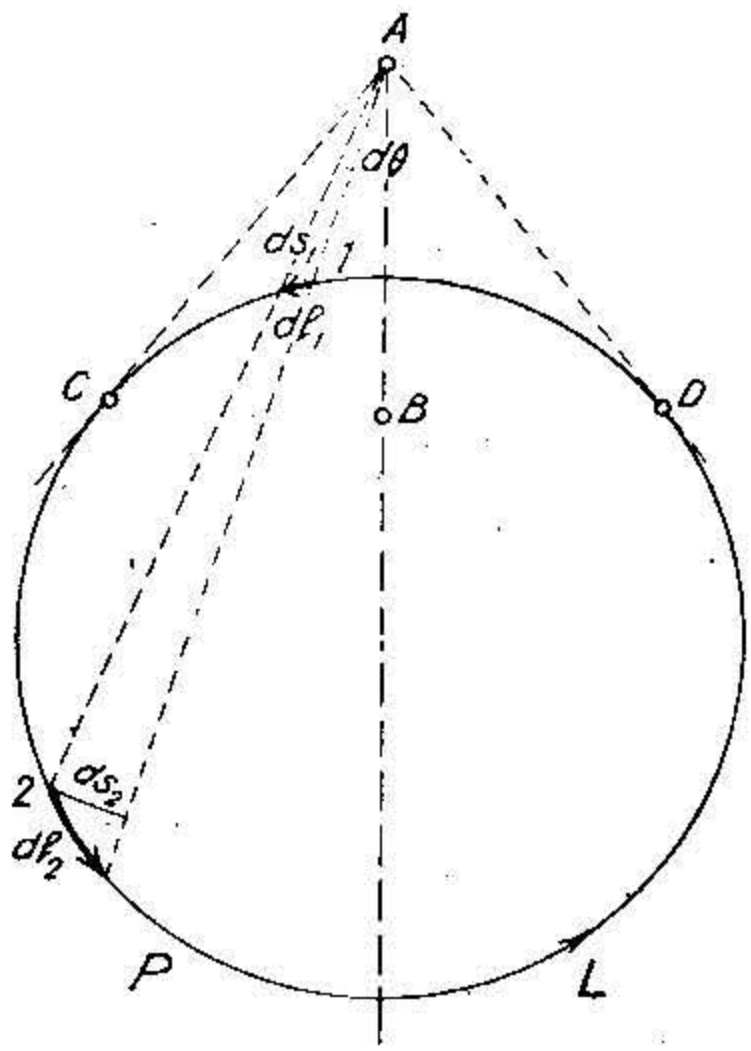
$$H = \frac{J}{c}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos\varphi}{a}\,d\varphi$$

или

$$H = \frac{J}{c}\,\frac{2}{a}\ . \tag{16}$$

За све тачке кружног цилиндра, дуж чије осе тече струја, модуо магнетског вектора има исте вредности. Овај модуо опада када полупречник цилиндра расте. У свакој равни која стоји управно на струји, векторске линије чине систем кружних концентричних линија, са средиштем на правој L.

в) *Магнетско поље кружне струје.* Дуж кружне линије L тече струја константне јачине J. Из неке тачке A ван круга али у његовој равни повучене су две дирке AC и AD (в. слику 28). Део струје на већем луку CLD даје резултанту магнетских вектора $d\mathfrak{H}$ у тачки A која стоји нормално на равни слике, а усмерена је ка нама, као што следује из обрасца (11) и сл. 28. Резултанта вектора $d\mathfrak{H}$, које изазивају елементи струје $Jd\mathfrak{l}$ на мањем луку DC, такође стоји управно на равни слике, само је супротна смера. Доказаћемо да је друга резултанта већа од прве. Упоредимо зато пар елемената $d\mathfrak{H}$ које дају елементи струје у истом углу



Сл. 28

$d\theta$ у тачкама 1 и 2. Њихови су модули:

$$\frac{J}{c}\frac{1}{r_1^2}\,dl_1 \sin(\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{l}_1)\ , \qquad \frac{J}{c}\frac{1}{r_2^2}\,dl_2 \sin(\mathfrak{r}_2 d\mathfrak{l}_2)$$

(в. образац 11). Из слике 28 добивамо

$$dl_1 \sin(\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{l}_1) = ds_1 \quad , \quad dl_2 \sin(\mathfrak{r}_2 dl_2) = ds_2 \ ,$$

где су ds_1 и ds_2 кружни лукови са средиштем у тачки A и односе се као полупречници, тј. $ds_1 : ds_2 = r_1 : r_2$.

Зато се модули вектора $d\mathfrak{H}_1$ и $d\mathfrak{H}_2$ односе као

$$\frac{ds_1}{r_1^2} : \frac{ds_2}{r_2^2} = \frac{r_2}{r_1} > 1 \ .$$

Како је количник модула већи од 1, то ближи елементи дају већу резултанту, и у тачки A магнетски вектор $\mathfrak{H}$ усмерен је од нас. Уочимо ли раван P, која пролази кроз тачку A и средиште круга и стоји управно на његовој равни, то, услед симетрије, векторске линије $\mathfrak{H}$ треба да леже у равни P. У свакој тачки B у унутрашњости круга L вектори $d\mathfrak{H}$ имаће исти правац и исти смер, и (за уочени смер струје) биће усмерене ка нама.

Векторске линије биће затворене криве које обухватају L.

§ 28 Индукција. Појава електричне инфлуенције (§ 21.31) навела је Фарадеја на мисао да се у једном проводнику мора појавити струја ако у другом проводнику, у његовој близини, тече струја. Низ експеримената довео је до ових резултата (Фарадеј, 1831 г.).

Појава *електромагнетске индукције*, тј. постанак електричне струје у затвореном колу где чак и нема извора електрицитета, наступа:

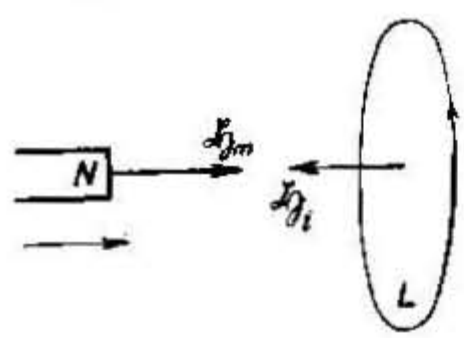
1) када се мења положај кола према другом колу, у којем тече стационарна струја (*чињеница* 2);

2) кад у другом колу тече струја променљиве јачине (*чињеница* 3); овом случају припада прекид или пуштање струје;

3) када се мења положај кола према магнету (*чињеница* 4);

4) када се магнет појачава или слаби (*чињеница* 5).

У сваком од ових случајева мења се положај кола у магнетском пољу. Знамо израније да постоји веза између електричних и магнетских



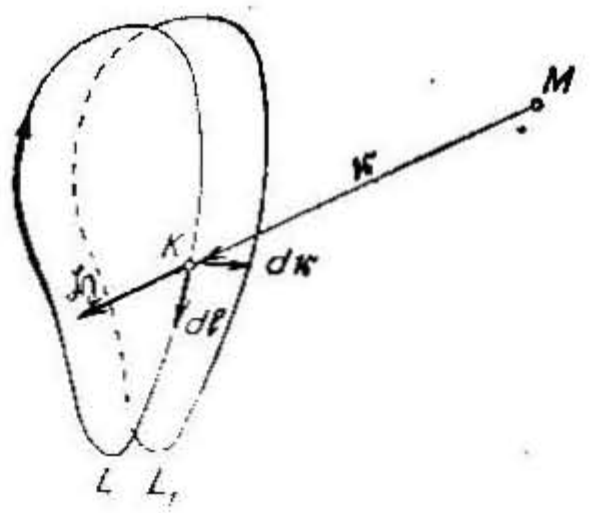
Сл. 29

појава, да електрична струја дејствује на магнет. Овај нови низ чињеница служи да се утврди, поред Био-Саварова закона и прве главне једначине електромагнетског поља коју смо извели, нова особина наведене везе. Lenz (1834 г.) је нашао правило којим се одређује смер *индуковане*, тј. изазване струје у неком колу, наиме: смер индуковане струје биће такав да се њено магнетско поље противи кретању (померању) магнетског поља примарне струје, одн. магнета (појачавање струје или магнета

одговара примицању, слабљење — одмицању). Лако је нацртати слике које одговарају разним случајевима и зато дајемо само једну од њих (сл. 29): северни пол магнета примиче се колу L, $\mathfrak{H}_m$ је магнетски вектор који изазива магнет; смер индуковане струје мора бити онај који је означен на слици, јер ће се онда магнетски вектор $\mathfrak{H}_i$ који је изазвала струја противити датом померању пола N.

Закон индукције дао је F. Neumann (1845); ми ћемо га овде извести помоћу принципа одржања енергије (§ 0.7) за један тачкасти магнетни пол. Добивени резултат може се лако уопштити за више полова, а такође и за магнетска поља изазвана примарном струјом.

Узмимо да се у тачки M налази северни магнетни пол јачине m (сл. 30). L нека буде затворено коло које се налази у магнетском пољу и $\mathfrak{H}$ — магнетски вектор у некој тачки K који је изазвао пол m. Вектор $\mathfrak{r}$ одређује положај тачке K према M. За појаву индукције важно је релативно померање кола и магнета, стога ћемо претпоставити да је коло, приближавајући се магнету, прешло из положаја L у L_1 и да су померања свих елемената $d\mathfrak{l}$ иста: $d\mathfrak{r}$. Површини коју је описао елемент $d\mathfrak{l}$ одговара управљени површински елемент:



Сл. 30

$$d\mathfrak{f} = [d\mathfrak{l}\, d\mathfrak{r}].$$

Протицање магнетског вектора кроз површину коју описује коло, а која има облик траке ограничене контурама L и L_1, биће

$$\int_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \int_L (\mathfrak{H}\, [d\mathfrak{l}\, d\mathfrak{r}]) \ .$$

Замислимо сад неку површину F којој коло L служи као контура. Онда горње протицање можемо схватити као промену протицања магнетског вектора $\mathfrak{H}$ кроз површину F за време dt, за које ће се она померити из првог положаја у други. Ова ће промена наступити, јер ће при померању површина F сећи разне векторске линије поља вектора $\mathfrak{H}$.

Дакле можемо ставити

$$d\int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \int_L \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} \ .$$

Магнетски вектор има према нашој претпоставци вредност (7) § 26

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{\mu}\, \frac{m\mathfrak{r}}{r^3} \ ,$$

и ми ћемо се задржати на случају $\mu = 1$. Ако $\mu \neq 1$, можемо сва даља расуђивања поновити за вектор $\mathfrak{B} = \mu\mathfrak{H}$.

Са уоченом вредношћу вектора $\mathfrak{H}$, и узимајући у обзир да је $d\mathfrak{r}$ исто за све елементе кола, можемо извршити овакву трансформацију:

$$d\int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \int_L \left(\frac{m\mathfrak{r}}{r^3}\left[d\mathfrak{l}\, d\mathfrak{r}\right]\right) = \left(d\mathfrak{r}, \int_L \left[\frac{m\mathfrak{r}}{r^3}\, d\mathfrak{l}\right]\right) .$$

Треба само објаснити смисао последњег израза. Услед релативног померања кола према полу M, у колу се појављује индукована струја, која ће, према Ленцову правилу, имати смер означени на слици. Обележимо њену јачину са J. Она ће изазвати ново магнетско поље — вектора $\mathfrak{H}'$ и дејствоваће на пол m силом

$$\mathfrak{K} = m\mathfrak{H}' .$$

А према Био-Саварову закону (10) § 27, ако претпоставимо да је $J = \text{const.}$, биће

$$\mathfrak{K} = m\frac{J}{c}\int_L \left[\frac{\mathfrak{r}}{r^3}\, d\mathfrak{l}\right] .$$

Сменимо линиски интеграл који се добива из ове једначине у изразу за промену протицања вектора $\mathfrak{H}$, па ћемо добити

$$\frac{J}{c}\, d\int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = (\mathfrak{K}\, d\mathfrak{r}) .$$

Овај израз са знаком — претставља рад који би сила $\mathfrak{K}$ извршила, кад би се пол M померио за вектор — $d\mathfrak{r}$. Знајући да у појави индукције игра улогу релативно померање, можемо учинити ову претпоставку. Према принципу одржања енергије, рад који ће се утрошити на померању магнетног пола мора бити једнак раду који ће обавити струја у колу. Према Џаулову закону (10′) § 23, рад који ће струја обавити за време dt биће

$$RJ^2dt = Jdt\int_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} ,$$

када се узме у обзир и Омов закон.

Изједначимо ли сада два израза за рад, добићемо

$$\int_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} . \tag{17}$$

Израз $\int_L \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}$ који се узима дуж затвореног кола зове се електромоторна сила индуковане струје, а једначина (17) изражава закон индукције.

За неколико магнетних полова или за магнетско поље примарне струје треба у овој једначини сматрати вектор $\mathfrak{H}$ као резултанту свих компонената које изазивају поједини полови, одн. елементи примарне струје.

У случају константног магнетског пермеабилитета имаћемо

$$\int_{O} \mathfrak{E}\, d\mathfrak{l} = -\frac{\mu}{c}\frac{d}{dt}\int_{F} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}\ , \tag{17'}$$

а за променљиво μ имаћемо у једначини (17) вектор $\mathfrak{B}$ место $\mathfrak{H}$.

При извођењу Био - Саварова закона индукције претпостављали смо да је $J = \text{const.}$, тј. да је струја стационарна и хомогена. Међутим за појаву индукције неопходно је потребно да се расмотри случај променљивих струја. Но врло је тешко поставити математичку теорију нарочито за брзо променљиве струје, где је јачина периодичка функција времена и врше осцилације хиљаду и више пута за секунду. Зато се теорија оснива на појму *квазистационарних* струја. Ове се дефинишу као променљиве струје, чије су периоде довољно велике у односу на време које је потребно да електромагнетске промене стигну од ког било места у посматраном систему тела до најудаљенијих његових делова. Онда се магнетско поље израчунава под претпоставком да је струја стационарна, а помоћу овог поља одређује се појава индукције.

За струје чије периоде нису мање од хиљадитог дела секунде, ова претпоставка даје прихватљиве резултате, за велики број трептаја (као што имамо на пр. у бежичној телеграфији) она више не може да важи.

§ 29 Главне једначине електромагнетског поља. У § 27 добили смо једначину (2) или (2′) која претставља прву везу између вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ који истовремено постоје у свакој тачки електромагнетског поља. Но може се из закона индукције извести и друга веза. Трансформишимо линиски интеграл који стоји на левој страни једначине (17) према Стоксовој теореми у површински, па ћемо добити

$$\int_{F} \text{rot}\, \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\int_{F} \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}\ .$$

Сматрајмо да произвољна површина F не зависи од времена. Онда можемо променити ред интеграљења и диференцирања по времену, па ће бити

$$\int_{F} \text{rot}\, \mathfrak{E}\, d\mathfrak{f} = \int_{F}\left(-\frac{1}{c}\frac{d}{dt}\mathfrak{H}, d\mathfrak{f}\right)\ .$$

Узимајући у обзир да су стварно у закону индукције уочене временске промене вектора $\mathfrak{H}$, јер сад сматрамо да је коло а, према томе,

и површина F непокретни, променимо ознаку $\frac{d}{dt}$ у $\frac{\partial}{\partial t}$ *). Како је F произвољна површина, последња једначина може да постоји само онда када је

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,. \tag{18}$$

Под претпоставком да је $\mu = \text{const.}$ имаћемо другу од једначина:

$$\text{rot}\,\mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E}\,, \qquad \text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \tag{19}$$

и, као што се види, овим се једначинама изражава веза између вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$.

Но ове везе добиле су нарочити значај у Максвеловој теорији. Уопштавајући им смисао, Максвел претпоставља да једначина (2) важи не само за кондукторску, стационарну, хомогену и затворену струју него уопште за праву струју. Дакле у њој треба ставити место вектора $\mathfrak{i}$ вектор $\mathfrak{c}$ (15′) § 24

$$\mathfrak{c} = \sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\,.$$

На овај начин две главне једначине електромагнетског поља добивају облик

$$\begin{aligned} \text{rot}\,\mathfrak{H} &= \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}\,, \\ \text{rot}\,\mathfrak{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,, \end{aligned} \tag{20}$$

и сматра се, према Максвеловој претпоставци, да оне важе и ма за какве брзо променљиве струје.

Овај облик Максвелових једначина (20) потиче од Heaviside-ових и Hertz-ових радова, и карактерише електродинамичке појаве за тела која се налазе у миру. Херц је дао и систем једначина које важе за кретања тела. Пре Максвела развио је другу теорију Helmholtz и Максвелова је гранични случај његове. Горње једначине се могу написати у још симетричнијем облику. Наиме, ако се са $\mathfrak{g}$ означи израз

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} = \frac{\mu}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\,,$$

који се понекад зове, по аналогији са густином струје у диелектрику,

*) У случају покретног кола обрасци који следују имаће сложенији облик.

густина магнетске струје, — имаћемо, место (20), систем једначина

(21) $$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{c} \ , \qquad \operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\frac{4\pi}{c} \mathfrak{g} \ .$$

§ 29.1 Појнтингова теорема. У општем случају електрична сила $\mathfrak{E}$ и магнетски вектор $\mathfrak{H}$ зависе од места и времена, тј. електромагнетско поље је променљиво у току времена. У §§ 21.5 и 26 (обрасци 73 — 75 и 20 — 21') дали смо дефиниције енергија електричног, одн. магнетског поља. Величину

(22) $$W_{em} = \frac{1}{8\pi} \int \left(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2 \right) dV \ ,$$

зовимо сада енергија електромагнетског поља. Ако је поље променљиво и ова ће величина зависити од времена, и Poynting је из Максвелових једначина извео везу између промена енергије електромагнетског поља, вектора $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ и Џаулове топлоте.

Да бисмо добили ову везу, помножимо прву од једначина (20) скаларно вектором $\mathfrak{E}$, а другу — вектором $\mathfrak{H}$. Онда ћемо добити

$$(\mathfrak{E} \operatorname{rot} \mathfrak{H}) - (\mathfrak{H} \operatorname{rot} \mathfrak{E}) = \frac{4\pi}{c} \sigma \mathfrak{E}^2 + \frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)$$

(уз претпоставку да ε и μ не зависе од времена).

Лева страна ове једначине може овако да се трансформише. Уочимо израз

$$\operatorname{div} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] = (\nabla [\mathfrak{E} \mathfrak{H}]) \ .$$

Како оператор ∇ треба применити на сваки од вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, то ће овај израз бити једнак

$$(\nabla [\mathfrak{E} \mathfrak{H}_{\text{const.}}]) + (\nabla [\mathfrak{E}_{\text{const.}} \mathfrak{H}]) = (\mathfrak{H} [\nabla \mathfrak{E}]) - (\mathfrak{E} [\nabla \mathfrak{H}]) \ ,$$

јер, у случају када се $\mathfrak{H}$ или $\mathfrak{E}$ сматрају за константне векторе, можемо извршити цикличку пермутацију у одговарајућем члану. Узмемо ли у обзир да је $[\nabla \mathfrak{E}] = \operatorname{rot} \mathfrak{E}$ и $[\nabla \mathfrak{H}] = \operatorname{rot} \mathfrak{H}$ и означимо ли са

(23) $$\mathfrak{S} = \frac{4\pi}{c} [\mathfrak{E} \mathfrak{H}] \ ,$$

видимо да је лева страна наведене једначине једнака

$$-\frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathfrak{S} \ .$$

$\mathfrak{S}$ зове се Појнтингов вектор. Ако га уведемо у нашу једначину

и ако је интегралимо по некој запремини у електромагнетском пољу, добићемо услов

$$(24) \qquad -\int \operatorname{div} \mathfrak{S}\, dV = \int \sigma \mathfrak{E}^2 dV + \frac{1}{8\pi}\int \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)\, dV \ .$$

Према Гаусовој теореми, лева страна ове једначине трансформише се у површински интеграл

$$-\int \operatorname{div} \mathfrak{S}\, dV = -\int_{\Phi} \mathfrak{S}\, d\mathfrak{f} \ ,$$

где је Ф површина која обухвата уочени део простора.

Претпоставимо ли да не мењамо у току времена уочену запремину, можемо у последњем члану променити ред интеграљења по запремини и диференцирања по времену, па ћемо добити, због обрасца (22),

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{8\pi}\int (\varepsilon \mathfrak{E}^2 + \mu \mathfrak{H}^2)\, dV = \frac{\partial W_{em}}{\partial t} \ .$$

Најзад, као што се види из обрасца (11) § 23, израз $\int \sigma \mathfrak{E}^2 dV$ биће механички еквивалент Џаулове топлоте која се ствара у уоченом делу простора. Означимо га са A и напишимо једначину (24) у облику:

$$(24') \qquad -\int_{\Phi} \mathfrak{S}\, d\mathfrak{f} = A + \frac{\partial W_{em}}{\partial t}$$

и она ће изражавати Пojнтингову теорему која гласи: Протицање вектора $\mathfrak{S}$ у унутрашњост неке запремине једнако је збиру механичког еквивалента Џаулове топлоте која се ствара у њој и промене енергије електромагнетског поља за јединицу времена у овој запремини.

§ 30 Примене закона индукције. Општим везама између вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ у електромагнетском пољу послужићемо се за проучавање неколико појава. Примењујући закон индукције сматраћемо углавном да имамо квазистационарне струје и то у случајевима самоиндукције, узајамне индукције и пражњења кондензатора.

§ 30.1 Самоиндукција. Ако у неком затвореном колу тече променљива струја, тј. јачина струје J је функција времена, то се коло налази у променљивом магнетском пољу које је изазвала сама струја. Онда треба да се у њему индукује струја — нова, накнадна, и ова се појава зове *самоиндукција*.

Задржаћемо се на случају непокретног кола. Означимо са E електромоторну силу променљиве струје која је изазвана на неки начин

(хемиским путем или др.) и са R — отпор кола. Електромоторна сила индуковане струје, која се суперпонује првој, биће, према закону индукције (17) § 28,

$$\int_L (\mathfrak{E}\, d\mathfrak{l}) = -\frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt},$$

ако означимо са

$$\varphi = \int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} \tag{25}$$

— протицање магнетског вектора $\mathfrak{H}$ кроз неку површину F, којој коло служи као контура. Осим тога зауставили смо се на случају вакуума $\mu = 1$. Узимајући збир електромоторних сила имаћемо, према Омову закону,

$$RJ = E - \frac{1}{c}\frac{d\varphi}{dt}.$$

Израз (25) може се због обрасца (3) § 27 написати у облику

$$\varphi = \int_F \mathfrak{H}\, d\mathfrak{f} = \int_F \operatorname{rot} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{f},$$

а према Стоксовој теореми и обрасцу (9) § 27 имаћемо

$$\varphi = \int_O \mathfrak{B}\, d\mathfrak{l} = \frac{J}{c}\int_O \int_O \frac{d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{l}}{r}. \tag{25'}$$

У последњем изразу могли смо J ставити пред интеграл, јер смо претпоставили да јачина струје зависи само од времена.

Величина

$$L = \int_O \int_O \frac{d\mathfrak{s}\, d\mathfrak{l}}{r} \tag{26}$$

зове се *коефицијент самоиндукције*. Ако се коло не деформише, он је константна величина, која зависи само од облика кола. Ако претпоставимо да се коло налази у средини чији је магнетски пермеабилитет $\mu = \text{const.}$, овај коефицијент множи се са μ па ће зависити и од ове величине.

Сменимо ли ове изразе у наведеној једначини, добићемо Омов закон за променљиве струје у облику

$$E = RJ + \frac{L}{c^2}\frac{dJ}{dt}. \tag{27}$$

Тачно израчунавање коефицијента L (26) задаје тешкоће, и утолико веће уколико је компликованији геометриски облик кола.

§ 30 2 Узајамна индукција. Уочимо два кола, S_1 и S_2, у којима теку струје. Свака од струја изазива магнетско поље и ова се поља суперпонују, тј. биће у некој тачки магнетски вектор $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$. Ако су јачине струја J_1 и J_2 функције времена, поље ће бити променљиво. У сваком од њих, поред постојеће, индуковаће се нова струја. Можемо, наравно, сматрати да један део промена поља наступа због промена вектора $\mathfrak{H}_1$, други — због $\mathfrak{H}_2$, тј. да свака променљива струја изазива индуковану у свом колу (самоиндукција) а, осим тога, и у другом колу. Означимо са E_1 и E_2 електромоторне силе датих променљивих струја, са R_1 и R_2 — отпоре кола S_1 и S_2.

Узимајући у обзир образац (3) § 27 за сваки од вектора $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$, имаћемо

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{B}_1 + \operatorname{rot} \mathfrak{B}_2$$

и

$$\mathfrak{B}_1 = \frac{1}{c} \int_{S_1} \frac{J_1 \, d\mathfrak{s}_1}{r}, \qquad \mathfrak{B}_2 = \frac{1}{c} \int_{S_2} \frac{J_2 \, d\mathfrak{s}_2}{r}.$$

Ако јачине струја зависе само од времена, можемо их ставити пред знак интеграла, јер се интеграљење врши дуж контуре. Уочимо сада неке површине F_1 и F_2 чије су контуре S_1, одн. S_2.

Дакле за протицање кроз површину F_1 имаћемо, према обрасцу (25'),

$$\varphi_1 = \int_{S_1} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \, d\mathfrak{l}) = \frac{J_1}{c} \int_{S_1} \int_{S_1} \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{l}}{r} + \frac{J_2}{c} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{d\mathfrak{s}_2 \, d\mathfrak{l}}{r}.$$

У првом од двоструких линиских интеграла r означава растојање двају елемената првог кола, у другом r је растојање између управљених елемената првог и другог кола.

На исти начин добивамо за протицање кроз површину F_2:

$$\varphi_2 = \int_{S_2} (\mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2, \, d\mathfrak{l}) = \frac{J_1}{c} \int_{S_2} \int_{S_1} \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{l}}{r} + \frac{J_2}{c} \int_{S_2} \int_{S_2} \frac{d\mathfrak{s}_2 \, d\mathfrak{l}}{r}.$$

У другом двоструком интегралу r је растојање између елемената другог кола. У изразу за φ_1 означава $d\mathfrak{l}$ управљени елемент првог кола, у изразу за φ_2 — елемент другог. Од ових интеграла:

$$L_1 = \int_{S_1} \int_{S_1} \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{l}}{r} \quad \text{и} \quad L_2 = \int_{S_2} \int_{S_2} \frac{d\mathfrak{s}_2 \, d\mathfrak{l}}{r} \tag{28}$$

су коефицијенти самоиндукција у првом, одн. у другом колу, а

$$L_{12} = \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{d\mathfrak{s}_2 \, d\mathfrak{l}}{r} = \int_{S_2} \int_{S_1} \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{l}}{r} \tag{29}$$

је т.зв. *коефицијент узајамне индукције.* Прве две величине зависе од

облика сваког кола посебно, а трећа од облика кола и њихова релативна положаја. Оне ће бити константне величине само у случају када се кола не деформишу и не мењају узајамни положај.

Дакле добили смо

$$\varphi_1 = \frac{L_1}{c} J_1 + \frac{L_{12}}{c} J_2 , \qquad \varphi_2 = \frac{L_{12}}{c} J_1 + \frac{L_2}{c} J_2 , \tag{30}$$

те, према Омову закону и обрасцу (17), а узимајући у обзир дефиницију (25) величина φ_1 и φ_2, налазимо једначине

$$\begin{aligned} E_1 &= R_1 J_1 + \frac{L_1}{c^2} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_{12}}{c^2} \frac{dJ_2}{dt} , \\ E_2 &= R_2 J_2 + \frac{L_{12}}{c^2} \frac{dJ_1}{dt} + \frac{L_2}{c^2} \frac{dJ_2}{dt} \end{aligned} \tag{31}$$

које изражавају да је у сваком колу збир електромоторних сила (примарне струје и индуковане) једнак производу отпора и јачине струје.

Када су дате E_1 и E_2, а познати отпори и облици кола, из система диференцијалних једначина (31) могу се наћи јачине струја J_1 и J_2.

§ 30.3 Пражњење кондензатора. Значајну улогу у савременој техници игра променљива струја која тече у колу које је спојено са кондензатором. Стога проучимо прво саму појаву пражњења кондензатора. Нека буде K капацитет кондензатора на чијој се унутрашњој облози налази количина електрицитета E_0, а чија је спољња облога спојена са земљом. Ако са E означимо количину електрицитета у неком тренутку, потенцијал на првој облози биће,

$$U = \frac{\mathsf{E}}{K} .$$

Ако спојимо облоге жицом, у овој ће тећи струја, и цео ће се систем наћи у магнетском пољу које дотада није постојало. Онда ће се индуковати струја (чињеница 2 § 28) и појава самоиндукције утиче, као што ће то сад показати анализа овог питања, на ток пражњења кондензатора. Нека буде R отпор система. Према Омову закону за променљиве струје (27), јачина струје J задовољава једначину:

$$E \equiv U_A - U_B \equiv U = RJ + \frac{L}{c^2} \frac{dJ}{dt} ,$$

јер је потенцијал друге облоге једнак нули. Количина електрицитета E постаје функција времена. И, како се кондензатор празни, она ће опадати. Стога треба да ставимо

$$J = -\frac{d\mathsf{E}}{dt} .$$

Означимо ли још са L' количник $\frac{L}{c^2}$, на основи Омова закона и претходне једначине имаћемо

$$L'\frac{d^2\mathbf{E}}{dt^2}+R\frac{d\mathbf{E}}{dt}+\frac{\mathbf{E}}{K}=0\ . \tag{32}$$

Овде смо применили једначину (27) на случај незатвореног кола и треба да имамо у виду да морају бити испуњени услови под којима је коефицијент самоиндукције константна величина.

Количину електрицитета $\mathbf{E}$ која је функција времена можемо наћи интеграљењем једначине (32), која се зове Lord Kelvin-ова једначина, водећи рачуна о почетним условима: у почетном тренутку, $t=0$, количина електрицитета је $\mathbf{E}_0$ а јачина струје $[J]_{t=0}=0$.

Општи интеграл једначине (32) биће

$$\mathbf{E}=C_1e^{\alpha_1 t}+C_2e^{\alpha_2 t}, \tag{33}$$

где су C_1 и C_2 произвољне константе, чије вредности треба наћи из услова у почетку пражњења, а α_1 и α_2 су корени карактеристичне једначине

$$L'\alpha^2+R\alpha+\frac{1}{K}=0.$$

Дакле је

$$\alpha_{1,2}=-\frac{R}{2L'}\pm\sqrt{\frac{R^2}{4L'^2}-\frac{1}{KL'}} \tag{34}$$

и, пошто ове величине зависе само од особина кондензатора и жице, тј. од K, L' и R, то од вредности ових зависи и начин пражњења.

Како је, због услова у почетку ($t=0$),

$$\mathbf{E}_0=C_1+C_2\ ,\qquad 0=C_1\alpha_1+C_2\alpha_2\ ,$$

биће

$$C_1=\frac{\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1}\mathbf{E}_0\ ,\qquad C_2=-\frac{\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}\mathbf{E}_0\ . \tag{35}$$

Разликујмо три случаја према томе да ли су корени α_1 и α_2 реални, неједнаки или једнаки, или имагинарни.

1°. Ако је $\frac{R^2}{4L'^2}>\frac{1}{KL'}$, корени су реални, неједнаки и негативни. Количина електрицитета $\mathbf{E}$ опада приближавајући се асимптотски нули, када $t\to\infty$. Пражњење ће бити апериодичко, тј. прогресивно.

2°. Ако је $\frac{R^2}{4L'^2}=\frac{1}{KL'}$, корени карактеристичне једначине су једнаки. Онда у изразу (33) у другом члану, иза C_2, долази множитељ t и имамо

поново апериодичко решење. Ова два случаја нису од интереса за примене у Физици, док је трећи од важности.

3°. Ако је $\frac{R^2}{4L'^2} < \frac{1}{KL'}$, корени су имагинарни. Означимо ли са

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{KL'} - \frac{R^2}{4L'^2}},$$

имаћемо

(34′) $$\alpha_1 = -\frac{R}{2L'} + \beta i, \quad \alpha_2 = -\frac{R}{2L'} - \beta i$$

и

(33′) $$\mathsf{E} = e^{-\frac{R}{2L'}t} (C_1 e^{\beta t i} + C_2 e^{-\beta t i}).$$

Трансформишимо сад израз у заградама, тј.

$$(C_1 + C_2) \cos \beta t + i (C_1 - C_2) \sin \beta t.$$

Због услова (35) добивамо

$$\mathsf{E}_0 \left(\cos \beta t + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} i \sin \beta t \right)$$

а због (34′)

$$\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} i = \frac{R}{2L'\beta}.$$

Ставимо ли

(36) $$1 = a \sin \gamma, \quad \frac{R}{2L'\beta} = a \cos \gamma,$$

добићемо

(33″) $$\mathsf{E} = a \mathsf{E}_0 e^{-\frac{R}{2L'}t} \sin (\beta t + \gamma).$$

Дакле функција E мења своје вредности осцилаторно. Периода ових осцилација остаје иста, а амплитуде опадају у току времена. На овај начин доказали смо, да пражњење кондензатора може да има осцилаторни карактер; ову појаву нашао је Feddersen. Очевидно је да се и јачина струје мења осцилаторно тако да се и њене вредности амортизују.

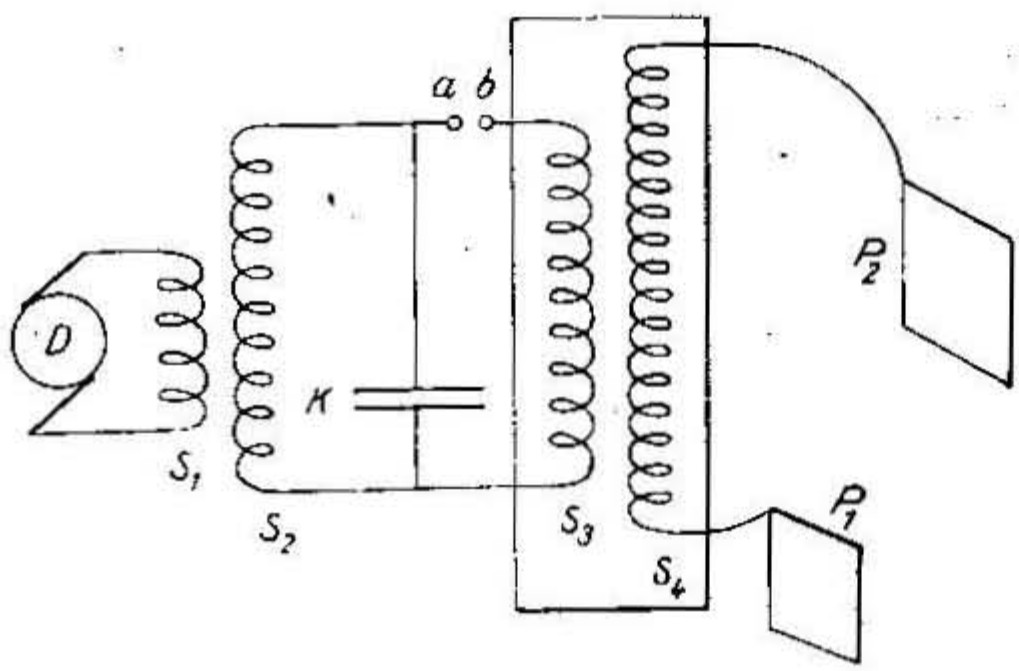
Теорија пражњења кондензатора коју смо овде дали важи за константне величине L, R и K. Али се може остварити случај када су и ове величине променљиве. Појава ће бити онда сложенија, но и тада се јављају два случаја: апериодичко пражњење и осцилаторно.*) Најзад, може се проучити још општији случај, кад се под утицајем каквог

*) види подробније, на пр., *М. Петровић:* Један диференцијални алгоритам и његове примене. Београд 1936 стр. 199.

магнетског поља у систему, кондензатор + жица, индукује нова струја по неком познатом закону. Ово би одговарало случају принудних осцилација.

§ 30.4 Теслине струје. Помоћу обичних динамомашина стварају се променљиве струје чије фреквенције могу достизати 30000 у секунди. Искористи ли се појава пражњења кондензатора, могу се добити и много веће фреквенције. Тесла је дао начин на који се могу добити фреквенције и до 10^8 у сек. и зато се овакве високо фреквентне струје зову Теслине. Схема одговарајуће апаратуре приказана је на сл. 31.

У генератору D ствара се променљива струја која тече кроз калем S_1 и у калему S_2 индукује струју. Са колом S_2 S_3 спојен је кондензатор K (лајденска боца) који може да се празни када између лоптица (прекидач) a и b скаче варница. Сваки пут када се створи у овом другом колу разлика потенцијала, настаје у кондензатору осцилаторно пражњење, ако су величине отпора, коефицијента самоиндукције (у ствари је овде случај узајамне индукције) и капацитета сходно изабране. Према томе број осцилација у другом колу биће већи него ли у првом.



Сл. 31

Као што се види из обрасца (33″), периода осцилације је $T = \frac{2\pi}{\beta}$, а

$$\beta = \frac{1}{2L'}\sqrt{\frac{4L' - R^2K}{K}}\,.$$

Ако је отпор R врло мали можемо занемарити R^2 и онда ћемо добити

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{KL'}} \quad \text{или} \quad T = 2\pi\sqrt{KL'}\,.$$

Наравно овај је образац само приближан.

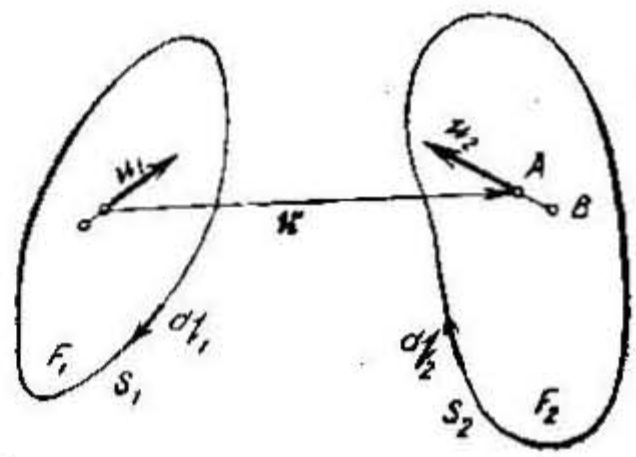
Струја која пролази кроз калем S_3 индукује нову струју у калему S_4 који има већи број завоја. Како је електромоторна сила индуковане струје пропорционална брзини промене протицања магнетског вектора кроз завоје S_4 (образац (17)), а ова брзина код високофреквентних струја је врло велика, то ће се у калему S_4 створити струја такође високофреквентна и, осим тога, високог напона. Због овога се калеми S_3 и S_4 налазе у нарочитом суду са уљем од парафина. (Те-

слин трансформатор), како не би скакале варнице између завоја. Струје у калему S_4 теку чак и онда, кад ово коло није затворено, на пр., ако се један његов крај споји са плочом P_1 а други са P_2 које висе на извесној даљини једна од друге. И, ако се између ових плоча налази Гајслерова цев, она ће светлити. Познато је такође да ове, Теслине струје имају врло слабо физиолошко дејство и безопасне су по живот: кроз руку може се пустити варница од неколико центиметара, а да се при томе ништа не осети. Ове струје вероватно се померају по површини тела (d'Arsonval'ов експеримент).

§ 30.5 Узајамно дејство двеју струја. Ускоро после Ерстедова открића проучио је Ампер пондеромоторно дејство двеју струја и нашао је да се оно може формулисати помоћу четири експериментална правила. Он је дао и аналитички израз за силу која дејствује између два елемента струје. Али је Grassmann, критикујући извођење Амперова закона, дошао до другог закона.

Овде ћемо извести аналитички израз за резултанту сила којом једно коло дејствује на друго (тј. интегрални закон).

Нека буду F_1 и F_2 површине за које су кола S_1 и S_2 контуре и $\mathfrak{n}_1$ и $\mathfrak{n}$ јединични вектори нормала. Означимо јачине са J_1 и J_2, са $d\mathfrak{s}_1$ и $d\mathfrak{s}_2$ управљене линиске елементе (сл. 32).



Сл. 32

При извођењу обрасца (15) видели смо да је магнетско поље које изазива струја еквивалентно пољу магнетне двојне површине. Дакле магнетски вектор $\mathfrak{H}_1$, који ће изазвати прва струја у некој тачки A, биће према овом обрасцу

$$(37) \qquad \mathfrak{H}_1 = -\operatorname{grad} U_1 \qquad \text{и} \qquad U_1 = \frac{J_1}{c}\int_{F_1} \frac{\cos(\mathfrak{n}_1 \mathfrak{r})}{r^2}\, df_1 \ .$$

Значи, ако се у овој тачки налази пол чија је јачина m_2, струја ће на њ дејствовати силом

$$\mathfrak{K}_1 = -m_2 \operatorname{grad} U_1 \ .$$

С друге стране магнетско поље друге струје је

$$\mathfrak{H}_2 = -\operatorname{grad} U_2 \ , \qquad U_2 = \frac{J_2}{c}\int_{F_2} \frac{\cos(\mathfrak{n}_2 \mathfrak{r})}{r^2}\, df_2 \ ,$$

јер се ово коло може заменити магнетном двојном површином F_2*).

*) У последњем изразу је $\mathfrak{r}$ вектор положаја тачке A у односу на ону тачку површине F_2 за коју се узима елемент df_2.

Упоређујући последњи израз за потенцијал са (19) § 26 видимо да треба да ставимо

$$\mathfrak{n}_m \delta = \mathfrak{n}_m^* = \frac{J_2}{c} .$$

Одавде следује да позитивни пол у тачки A, за коју ћемо претпоставити сада да се налази на површини F_2, има јачину

$$m_2 = \mathfrak{n}_m \, df = \frac{J_2}{c\delta} \, df_2 .$$

Означимо силу којом дејствује F_1 на овај пол са $d\mathfrak{K}_1$:

$$d\mathfrak{K}_1 = -\frac{J_2}{c\delta} \, df_2 \operatorname{grad} U_1 .$$

У исти мах на пол $B(-m_2)$ изворног пара AB дејствоваће прва површина силом

$$d\mathfrak{K}_2 = \frac{J_2}{c\delta} \, df_2 \operatorname{grad} U_1' ,$$

где је $U_1' = U_1 + dU_1$ вредност потенцијала у овој тачки. Дакле на изворни пар (дипол) AB дејствоваће резултанта

$$d\mathfrak{K} = + \frac{J_2}{c\delta} \, df_2 \operatorname{grad} dU_1 ,$$

а на целу површину сила

$$\mathfrak{K} = \operatorname{grad} \int_{F_2} \frac{J_2}{c\delta} \, df_2 \, dU_1 . \tag{38}$$

Како је dU_1 прираштај функције U_1 када се померамо из тачке A у B, тј. за вектор $-\mathfrak{n}_2\delta$, то је

$$dU_1 = (\operatorname{grad} U_1, -\mathfrak{n}_2\delta) = (\mathfrak{H}_1, \mathfrak{n}_2\delta) ,$$

а према обрасцима (3) и (9),

$$\mathfrak{H}_1 = \operatorname{rot} \mathfrak{B}_1 , \qquad \mathfrak{B}_1 = \frac{J_1}{c} \int_{S_1} \frac{d\mathfrak{s}_1}{r} .$$

Дакле је

$$V^* = \int_{F_2} \frac{J_2}{c\delta} \, df_2 \, dU_1 = \frac{J_2}{c} \int_{F_2} \operatorname{rot} . \mathfrak{B}_1 \, d\mathfrak{f}_2 = \frac{J_1 J_2}{c^2} \int_{S_1} \int_{S_2} \frac{d\mathfrak{s}_1 \, d\mathfrak{s}_2}{r} \tag{39}$$

према Стоксовој теореми. Из образаца (38) и (39) следује да је сила $\mathfrak{K}$, којом једно коло дејствује на друго, једнака градијенту скалара V^*, који се зове Нојманов потенцијал двеју струја.

Е. ЕЛЕКТРОМАГНЕТСКИ ТАЛАСИ

§ 31 Једначине електромагнетских таласа. Према Максвеловој теорији, у електромагнетском пољу вредности електричне силе $\mathfrak{E}$ и магнетског вектора $\mathfrak{H}$ везане су у свакој тачки двема једначинама (20) § 29:

$$\text{(1)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{4\pi}{c}\sigma\mathfrak{E} + \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}, \end{aligned}$$

где је σ проводљивост, ε и μ диелектрична константа и магнетски пермеабилитет на истом месту поља. Вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ су функције времена и положаја, и из једначина (1) могу се, уз извесне претпоставке, извести једначине које сваки од ових вектора треба да задовољи. Наиме, ако се узму ротори вектора из друге једначине, имаћемо

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{E} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{E} - \Delta\mathfrak{E} = -\operatorname{rot}\frac{\mu}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}.$$

Учинимо сада претпоставке: 1) да су σ, ε и μ константе, 2) да у пољу нема извора правог електрицитета и магнетизма:

$$\text{(2)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{E} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathfrak{H} = 0.$$

Како се ред rot и $\frac{\partial}{\partial t}$, као независних операција, може променити, а вредност rot $\mathfrak{H}$ може се сменити због прве од једначина (1) изразом у којем се јавља само вектор $\mathfrak{E}$, то ћемо добити прву од једначина:

$$\text{(3)} \qquad \begin{aligned} \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} &= \Delta\mathfrak{E}, \\ \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} &= \Delta\mathfrak{H}. \end{aligned}$$

Друга се једначина изводи на сличан начин.

У случају поља у потпуном изолатору (хомогеном и изотропном), када је $\sigma = 0$, вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ биће решења исте једначине

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \mathfrak{E} \ , \tag{4}$$

где је

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \ . \tag{5}$$

Ако се узму Декартове координате, једначина (4) има облик

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial z^2} \right) \tag{4'}$$

и, ако се вектор $\mathfrak{E}$ растави у компоненте дуж координатних оса, пројекција E_u $(u = x, y, z)$ биће решење скаларне једначине

$$\frac{\partial^2 E_u}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta E_u \equiv \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 E_u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_u}{\partial z^2} \right) . \tag{6}$$

За питања која ћемо овде проучити биће од важности само нека решења парцијалне диференцијалне једначине другог реда (6). Стога ћемо прво учинити о функцијама E_u претпоставку због које ће се упростити и облик ове једначине.

Уопште су

$$E_u = E_u (x, y, z, t). \tag{7}$$

Потражимо сад решења једначине (6), која зависе од времена и од растојања r од неке дате тачке, коју ћемо сматрати за координатни почетак. Имаћемо

$$\begin{gathered} \mathfrak{r} = r\mathfrak{r}_0 \ , \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \ , \\ E_u = f_u (r, t) \ . \end{gathered} \tag{8}$$

Због последње једначине, десна страна једначине (6) може се трансформисати на овај начин:

$$\begin{aligned} \Delta E_u = \operatorname{div} \operatorname{grad} E_u = \operatorname{div} f_u' (r) \operatorname{grad} r = \operatorname{div} f' (r) \mathfrak{r}_0 = \\ = \frac{\partial^2 E_u}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial E_u}{\partial r} \ , \end{aligned}$$

ако се примени познати образац $\operatorname{div} \varphi \mathfrak{v} = \mathfrak{v} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \mathfrak{v}$.

Извршимо ли смену

$$V_u = r E_u \ , \tag{9}$$

претходни израз се своди на $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 V_u}{\partial r^2}$ и из једначине (6) добивамо једначину

$$\frac{\partial^2 V_u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 V_u}{\partial r^2}, \tag{10}$$

која служи за одређивање функције V_u.

Опште решење ове једначине биће

$$V_u = \varphi_1\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \varphi_2\left(t + \frac{r}{\alpha}\right), \tag{11}$$

где су φ_1 и φ_2 произвољне функције означених аргумената. Ово је лако проверити непосредним рачуном замењујући у једначини (10) V_u изразом (11).

Дакле је

$$E_u = \frac{1}{r}\varphi_1\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \frac{1}{r}\varphi_2\left(t + \frac{r}{\alpha}\right). \tag{12}$$

Од нарочитог су интереса за Теориску физику периодична решења једначине (6) од којих најпростија можемо написати у облику

$$E_u = \frac{C_u}{r}\cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \delta_u\right], \tag{13}$$

где је C_u произвољна константа, а T константа чији ћемо смисао видети мало даље, или са аргументом $t + \frac{r}{\alpha}$, или, најзад, узимајући синус место косинуса. Константу фаза δ_u можемо сад и изоставити. Очевидно је да функција E_u има у сваком тренутку, у свима тачкама површине лопте $r = \text{const.}$, исте вредности. А њене вредности у датом тренутку зависе само од полупречника r фамилије концентричних лопти. У свакој тачки у току времена E_u врши хармониске осцилације чија је амплитуда $\frac{C_u}{r}$. Ова амплитуда опада, ако се удаљујемо од заједничког центра. Заустависмо се на анализи промена функције

$$V_u = C_u \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)\right]. \tag{14}$$

Ако време повећамо за T, аргументу косинуса додаје се 2π. Дакле T је периода осцилација функција V_u и E_u. Али, ако пођемо ма од које тачке M дуж зрака који полази из O у тачку M_1 на растојању $T\alpha$, аргумент функције V_u (за исти тренутак) повећаће се поново за 2π, тј. у тачки M_1 имаћемо исту вредност функције. Из овог следује да у сваком тренутку, на површинама лопти чији се полупречници разликују за $n \cdot T\alpha$ (n цео број), имамо исте вредности функције V_u (ово

не важи за E_u). Дуж сваког зрака из O функција V_u периодичка је функција од r, и отсечак

$$\lambda = T\alpha \tag{15}$$

зове се *дужина таласа*. Знајући распоред вредности функције V_u у сваком тренутку, проучићемо њене промене у току времена. У некој тачки M на растојању r од O, у датом тренутку t, функција V_u има вредност (14). Ако се време промени за dt, у овој тачки имаћемо нову вредност V_u. Али дуж зрака који пролази кроз M можемо наћи тачку M', у којој ће сада V_u имати вредност (14). Наиме, у тренутку $t + dt$ ову тачку M' треба узети на растојању $dr = \alpha dt$ од M, јер је

$$t + dt - \frac{r + dr}{\alpha} = t - \frac{r}{\alpha} \cdot$$

Дакле, у току времена вредности функције V_u померају се дуж зракова који полазе из тачке O, и, ако ова функција одређује неко стање (медијума), можемо казати да се ово стање простире дуж зракова. Осим тога на свакој од споменутих лопти биће, у сваком тренутку, исто стање у свима тачкама. Промене стања које се одређују на овај начин зовемо *сферни талас*, а ове концентричне лопте — таласне површине. Величина

$$\alpha = \frac{dr}{dt} \tag{16}$$

зове се *брзина распростирања таласа*. Из овог и претходног обрасца види се да, у случају аргумената $t - \frac{r}{\alpha}$, за $dt > 0$ треба узимати $dr > 0$. Према томе тачка M' лежи на већем растојању од O него ли M, тј. талас се распростире од заједничког центра. Аргументу $t + \frac{r}{\alpha}$ одговарао би случај, када се талас приближује тачки O.

Ова слика промена функције V_u преноси се и на промене стања која карактерише функција E_u, с том разликом што ће амплитуде у овом случају опадати, када растојање од O расте.

Свака од функција E_u (13) је решење једначине (6). Сматрајмо произвољне константе C_x, C_y, C_z као пројекције вектора $\mathfrak{C}$ и узмимо случај када су $\delta_u = 0$. Онда ће вектор

$$\mathfrak{E} = \frac{\mathfrak{C}}{r} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)\right] \tag{17}$$

бити једно од решења векторске диференцијалне једначине (4).

Из друге од једначина (3) следује да магнетски вектор $\mathfrak{H}$ мора

бити, у пољу у потпуном изолатору, решење једначине

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{H}}{\partial t^2} = \alpha^2 \Delta \mathfrak{H} \ , \tag{18}$$

која је истог облика са (4). Дакле, за њега и његове компоненте важи све оно, што смо мало пре извели за вектор $\mathfrak{E}$ и, према томе, $\mathfrak{H}$ може да буде периодичка функција времена и координата, на пр. облика (17).

Доказали смо могућност периодичних решења̂ једначина (4) и (18) и, ако претпоставимо да вредности $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ карактеришу извесно стање, ово ће се стање распростирати у простору, а у свакој тачки оно ће се мењати периодички, на пр. на начин који одређује функција (17). Ово ћемо променљиво стање звати *електромагнетски талас* који се распростире у потпуном изолатору. Решењу (17) одговара талас сферног облика. Али, наравно, могући су таласи и других облика, јер таласна једначина (4) допушта сем наведеног и друга периодична решења. Са њима ћемо се упознати у идућем параграфу.

На специјалном случају сферног таласа видели смо смисао константе α^2 у једначини (4): α чија је вредност дата обрасцем (5) биће брзина распростирања таласа у потпуном изолатору. У вакууму ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$) биће $\alpha = c$, тј. једнако је брзини распростирања светлости.

Поједини таласи истог облика могу се разликовати периодом (T), фазом (δ_u) и дужином која је према обрасцима (5) и (15) једнака

$$\lambda = \frac{cT}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \ . \tag{19}$$

Резултате овог параграфа упоредити са резултатима § 12.4.

§ 31.1 Два случаја електромагнетских таласа: равански и Херцово решење. Зауставићемо се на подробнијој анализи: 1) случаја т.зв. раванског таласа и 2) Херцова решења таласне једначине.

1) Потражимо електромагнетски талас који задовољава услове: а) да се у сваком тренутку може у пољу повући фамилија паралелних равни које имају особину, да за све тачке једне равни електрични вектор има исте вредности, б) да ово важи (за исте равни) и за магнетски вектор, в) да се талас простире у правцу нормале на овим равнима.

Због услова а) и б) овај талас се зове равански. Докажимо да се овакво стање у изотропном хомогеном диелектрику (потпуном изолатору) који се протеже у бесконачност на све стране, може замислити у складу са Максвеловим једначинама, одн. са таласном једначином.

Нека x-оса буде усмерена у правцу распростирања таласа, а осе

y и z нека леже у једној од равни уочене фамилије. Свака од пројекција вектора

$$\mathfrak{E} = E_x \mathfrak{i} + E_y \mathfrak{j} + E_z \mathfrak{k} \ , \qquad \mathfrak{H} = H_x \mathfrak{i} + H_y \mathfrak{j} + H_z \mathfrak{k}$$

биће, према према претпоставци функција само од x и t. Дакле, свака од ових величина мора бити решење једначине

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \tag{20}$$

која следује из једначине (6), јер ове пројекције не зависе од y и z Осим тога из услова (2) добивамо

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0 \ , \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} = 0 \ . \tag{21}$$

Ставимо ли у једначини (20) да је $\varphi = E_x$ или $\varphi = H_x$, због последњих једначина имаћемо

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^2 H_x}{\partial t^2} = 0 \ .$$

С друге стране, Максвелове једначине (1), у којима треба ставити $\sigma = 0$, дају

$$\frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = 0 \ , \qquad -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = 0 \ .$$

Први изводи по времену функције E_x и H_x, као и изводи ових величина по x, једнаки су увек нули, тј. $E_x = \text{const.}$ и $H_x = \text{const.}$. Према томе можемо сматрати да уочено електромагнетско поље настаје суперпозицијом двају поља: константног $E_x \mathfrak{i}$ и $H_x \mathfrak{i}$ и променљивог

$$\mathfrak{E} = E_y \mathfrak{j} + E_z \mathfrak{k} \ , \qquad \mathfrak{H} = H_y \mathfrak{j} + H_z \mathfrak{k} \ .$$

Како нам је потребно само друго од ових поља (променљиво), можемо, не мењајући суштину ствари, прво изоставити из расматрања. Дакле, у уоченом случају вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ у свакој тачки поља лежаће у равнима управним на правцу распростирања таласа. Талас ове врсте припада низу *трансверзалних*. Како се у овом случају осцилације вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ не могу вршити у свима могућним правцима у простору, но само у равни yz овај талас се зове још *равно поларизовани*. Проучимо функције E_y, E_z, H_y, H_z.

Четири пројекције E_y, E_z, H_y и H_z треба да буду решења једначине (20). Но, поред тога, морамо између свих могућних решења ове

једначине изабрати она, која ће у исти мах задовољити и Максвелове једначине за потпуне изолаторе:

$$\text{(1')} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} , \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} . \end{aligned}$$

Ако се пак ове пројицирају на осе y и z, добива се систем четири скаларне једначине

$$\text{(22)} \qquad \begin{aligned} \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} &= -\frac{\partial H_z}{\partial x} , & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial E_y}{\partial x} , \\ \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{\partial H_y}{\partial x} , & -\frac{\mu}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{\partial E_z}{\partial x} , \end{aligned}$$

јер су остали изводи једнаки нули.

Ове једначине показују да постоје везе између функција E_y и H_z, а исто тако и између E_z и H_y.

Ако претпоставимо да се талас простире у позитивном смеру осе x и упоредимо једначине (20) и (10), видећемо да се може ставити

$$\text{(23)} \qquad E_y = \varphi_1\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) ,$$

где је φ_1 произвољна функција. Кад би се талас простирао у супротном смеру, требало би узети аргумент $t + \frac{x}{\alpha}$. Онда је, као што следује из прве две једначине (22) и (5),

$$\text{(24)} \qquad H_z = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, \varphi_1\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) .$$

Ако се стави

$$\text{(25)} \qquad E_z = f_1\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) ,$$

где је f_1 нека произвољна функција, биће, због треће и четврте од једначина (22) и (5),

$$\text{(26)} \qquad H_y = -\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\, f_1\left(t - \frac{x}{\alpha}\right) .$$

Ове четири вредности показују да је увек за уочено поље

$$\text{(27)} \qquad (\mathfrak{E}\mathfrak{H}) = E_y H_y + E_z H_z = 0 ,$$

тј. да вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ стоје у свакој тачки управно један на другом. За таласе, наравно, φ_1 и f_1 треба да буду периодичке функције.

Ако се сваки од вектора своди само на једну компоненту, на пр. $\mathfrak{E} = E_y \mathfrak{j}$, $\mathfrak{H} = H_z \mathfrak{k}$ имаћемо *линиски поларизован* талас. Тада сваки од вектора врши осцилације дуж одговарајуће осе (када се ове сходно изаберу). Као и код решења (14) једначине (10), можемо уочити осцилације најпростије врсте, на пр. стављајући

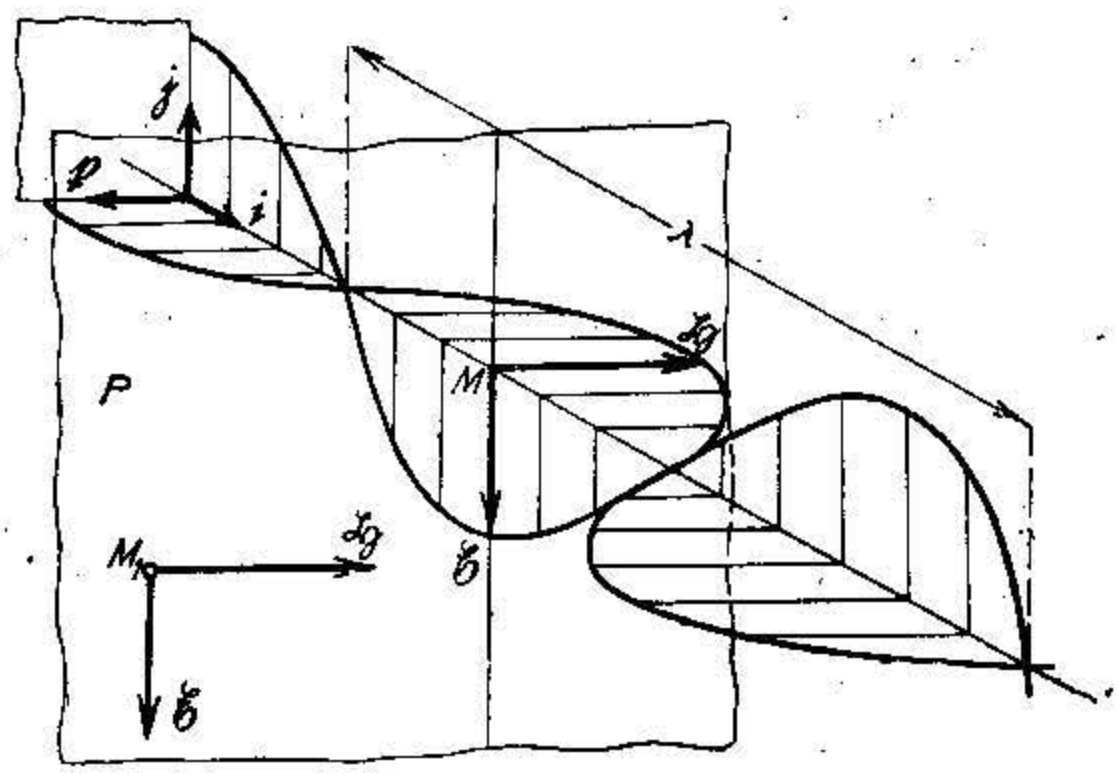
$$E_y = a \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

(28)

$$H_z = a\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

а узимајући у обзир образац (15).

Дакле, у сваком тренутку $t = t^*$ крајеви вектора $\mathfrak{E} = E_y \mathfrak{j}$ за тачке x-осе леже на косинусоиди у равни xy, а крајеви $\mathfrak{H} = H_z \mathfrak{k}$ на косинусоиди у равни xz (сл. 33). Уочимо ли неку тачку M, у којој $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ имају вредности означене на слици, то ће ма у којој тачки M_1 равни P, која пролази кроз M а стоји управно на x-оси, вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ имати исте вредности.



Сл. 33

Изаберемо ли два тренутка t_1 и t_2, то ће у тачки M (као и у свакој другој) бити уопште разне вредности вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, но други распоред се разликује од првог само тиме што су косинусоиде померене дуж x-осе.

Ово непосредно следује из образаца (28), јер, када се мења време, мењају се фазе а остају амплитуде и периоде. На извесном месту (на пр. M) сваки од вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ врши осцилације између крајњих тачака $\left(a\mathfrak{j}, -a\mathfrak{j}\right.$ одн. $\left. a\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathfrak{k}, -a\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\mathfrak{k}\right)$.

2) *Херцово решење* Максвелових једначина више одговара условима под којима се могу остварити електромагнетски таласи него ли равански талас. Код раванског таласа није било говора о његовом извору, тј. месту где се он ствара. Међутим, као што је Херц показао, може се добити решење из кога се види како се распростире електромагнетски талас од неког извора.

Зауставимо се на распростирању таласа у вакууму ($\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\alpha = c$). Тада су вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ везани једначинама

$$\text{(29)} \qquad \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div} \mathfrak{E} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \qquad & \operatorname{div} \mathfrak{H} &= 0, \end{aligned}$$

које су специјалан случај једначина (1') и (2).

Анализа таласне једначине (4), коју ћемо написати у облику

$$\text{(30)} \qquad \frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} = c^2 \Delta \mathfrak{Z},$$

показала је (в. обрасце (12), (13) и (17)) да ће вектор

$$\text{(31)} \qquad \mathfrak{Z} = \frac{1}{r}\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right),$$

где је $\mathfrak{p}$ уопште произвољна функција аргумента $t - \frac{r}{c}$, бити решење ове једначине. Пројекција вектора $Z_u = \frac{1}{r}p_u\left(t - \frac{r}{c}\right)$, где је p_u нека функција, има исти облик са функцијом (12), ако се изостави последњи члан.

Да бисмо задовољили једначине (29) ставимо

$$\text{(32)} \qquad \mathfrak{E} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z}.$$

Из треће од ових једначина следује онда да морамо ставити

$$\text{(33)} \qquad \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathfrak{Z},$$

јер се може мењати ред операција $\frac{\partial}{\partial t}$ и rot.

Друга и четврта од једначина (29) биће задовољене, јер је

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z} = 0,$$

$$\operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{1}{c}\operatorname{div} \operatorname{rot}\frac{\partial \mathfrak{Z}}{\partial t} = 0$$

(обр. 30 § 0.2). Остаје да видимо да ли је задовољена и прва од једначина (29). Ако ставимо у њу изразе (32) и (33) добићемо

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{Z} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\operatorname{rot}\mathfrak{Z}$$

или

$$\operatorname{rot}\left\{\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{Z} - \Delta \mathfrak{Z}\right\} = -\frac{1}{c^2}\operatorname{rot}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2}.$$

Али је ротор градијента увек једнак нули и остаје

$$\mathrm{rot}\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathfrak{Z}}{\partial t^2} - \Delta \mathfrak{Z}\right) = 0 \ ,$$

као што и треба да буде, јер је $\mathfrak{Z}$ решење једначине (30). Знајући вектор $\mathfrak{Z}$ (31), који се зове Херцов вектор, можемо израчунати векторе $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, тј. наћи електромагнетско поље у сваком тренутку помоћу образаца (32) и (33). Трансформишимо изразе

$$\mathfrak{E} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \frac{1}{r}\mathfrak{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \ ,$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\ \mathrm{rot}\ \frac{1}{r}\ \dot{\mathfrak{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \ ,$$

где смо са $\dot{\mathfrak{p}}$ означили извод $\mathfrak{p}$ по времену који је у исти мах и извод по аргументу $t - \frac{r}{c}$. Као и раније, r означава растојање од координатног почетка, тј. модуо вектора положаја неке тачке $\mathfrak{r} = x\mathfrak{i} + y\mathfrak{j} + z\mathfrak{k}$. Биће уопште за неки вектор $\mathfrak{A}(r)$, чије су пројекције A_x, A_y, A_z,

$$[\nabla \mathfrak{A}] = \mathrm{rot}\ \mathfrak{A}(r) = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \cdots = \left(A_z' \frac{\partial r}{\partial y} - A_y' \frac{\partial r}{\partial z}\right)\mathfrak{i} + \cdots = [\mathfrak{r}_0 \mathfrak{A}]$$

ако се индексом $'$ означе изводи по r.

Приметимо ли да између извода вектора $\mathfrak{p}$ по r и по времену постоји веза

$$\dot{\mathfrak{p}}_r = -\frac{1}{c}\dot{\mathfrak{p}} \ ,$$

имаћемо

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{c}\left[\nabla, \frac{1}{r}\dot{\mathfrak{p}}\right] = \frac{1}{c}\left[\nabla\frac{1}{r}, \dot{\mathfrak{p}}\right] + \frac{1}{cr}\left[\nabla\dot{\mathfrak{p}}\right] \ ,$$

или, због

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\,\mathrm{grad}\ r = -\frac{1}{r^2}\mathfrak{r}_0 \ ,$$

$$\mathfrak{H} = \frac{1}{cr^2}\left[\dot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_0\right] + \frac{1}{c^2 r}\left[\ddot{\mathfrak{p}}\mathfrak{r}_0\right] \ . \tag{33'}$$

И вектор $\mathfrak{E}$ може се раставити у две компоненте

$$\mathfrak{E} = \mathrm{grad}\ \mathrm{div}\frac{1}{r}\mathfrak{p} - \frac{1}{c^2 r}\ddot{\mathfrak{p}} \ . \tag{32'}$$

Друга од ових компонената има овакав облик због једначина (30) и (31).

Досада смо сматрали да је $\mathfrak{p}$ произвољан вектор. Али, како нам

је потребно решење које одговара електромагнетским таласима узећемо периодична решења, или ћемо ставити

(34) $$\mathfrak{p} = e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{c}\right)}\mathfrak{p}_* ,$$

и према томе

(35) $$\mathfrak{Z} = \frac{\mathfrak{p}_*}{r} e^{i\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{c}\right)} ,$$

где је $\mathfrak{p}_*$ неки константни вектор. Из обрасца (33′) следује да се модули првог и другог члана односе као

$$\frac{1}{cr^2}\frac{2\pi}{T} : \frac{1}{c^2 r}\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \lambda : 2\pi r ,$$

јер је $\lambda = cT$. Можемо, дакле, разликовати три области: 1) у непосредној близини „извора“, координатног почетка одакле се талас, распростире, где је $2\pi r < \lambda$ и то толико да је први члан знатно већи од другог, — можемо у изразу за $\mathfrak{H}$ само њега задржати; 2) област где су оба члана истог реда и 3) где је $2\pi r > \lambda$ и то растојање r знатно надмашује таласну дужину. Онда се може узети у обзир други члан, а први се занемарује. Имаћемо, према томе, у првој, одн. трећој области

(36) $$\mathfrak{H}_1 = \frac{1}{cr^2}\left[\frac{2\pi i}{T} e^{i\frac{2\pi t}{T}} \mathfrak{p}_* \mathfrak{r}_0\right] e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}} ,$$

$$\mathfrak{H}_3 = \frac{1}{c^2 r}\left[-\frac{4\pi^2}{T^2} e^{i\frac{2\pi t}{T}} \mathfrak{p}_* \mathfrak{r}_0\right] e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}} .$$

Слично овоме можемо испитати релативне величине два члана у изразу (32′) за $\mathfrak{E}$. Због другог извода од $\mathfrak{p}$ по времену, види се непосредно да је други члан истог реда као и $\mathfrak{H}_3$. Ако се овај члан у близини извора занемари, онда је у првој области

(37) $$\mathfrak{E}_1 = \operatorname{grad} U_1$$

и потенцијал

(38) $$U_1 = -\operatorname{div}\frac{1}{r}\mathfrak{p} = -\operatorname{div}\mathfrak{Z} .$$

Израчунајмо овај израз

$$\operatorname{div}\frac{1}{r}\mathfrak{p} = \operatorname{div}\frac{1}{r} e^{-\frac{2\pi r i}{\lambda}} e^{\frac{2\pi t i}{T}} \mathfrak{p}^* = e^{\frac{2\pi t i}{T}}\left(\mathfrak{p}_* \operatorname{grad}\frac{1}{r} e^{-\frac{2\pi r i}{\lambda}}\right)$$

$$= e^{\frac{2\pi t i}{T}}\left(-\frac{1}{r^2} - \frac{2\pi i}{\lambda r}\right) e^{-\frac{2\pi r i}{\lambda}} (\mathfrak{r}_0 \mathfrak{p}_*) .$$

Ако се овде поново занемари члан са множитељем $\frac{1}{r}$ који је у првој области знатно мањи од првог, имаћемо за приближну вредност потенцијала (в. обр. (34))

$$U_1 = \frac{(\mathfrak{p}\mathfrak{r}_0)}{r^2} = \frac{e^{\frac{2\pi t i}{T}} \mathfrak{p}_* \mathfrak{r}_0}{r^2} e^{-\frac{2\pi r i}{\lambda}} . \tag{39}$$

Изразима за $\mathfrak{H}_1$ и U_1 може се дати следеће тумачење. Упоредимо израз (36) и (11) § 27, узимајући у обзир да у последњем $\mathfrak{r}$ означава вектор чији почетак лежи у некој тачки M у простору, док се у првом крај вектора $\mathfrak{r}$ налази у овој тачки за коју се посматра вредност вектора $\mathfrak{H}$. Ако не узмемо у обзир множитељ $e^{-i\frac{2\pi r}{\lambda}}$, онда можемо ставити

$$J d\mathfrak{l} = \frac{2\pi i}{T} e^{\frac{2\pi t i}{T}} \mathfrak{p}_* . \tag{40}$$

Ако се узме у обзир реални део десне стране, добива се вектор који периодички мења смер, који се дакле може протумачити као елемент променљиве струје. С друге стране, уочимо на крајевима $d\mathfrak{l}$ изворни пар чији је момент периодичка функција времена (в. крај § 21.2), тј. на крајевима се налазе количине електрицитета

$$E = E_0 e^{\frac{2\pi t i}{T}} .$$

Онда ће бити модуо *момента* овог дипола

$$E dl \tag{41}$$

и

$$J d\mathfrak{l} = \frac{dE}{dt} d\mathfrak{l} ,$$

тј.

$$J = \frac{dE}{dt} .$$

Такав дипол зове се *линеарни електрични осцилатор*. Што се пак тиче изостављеног множитеља, можемо сматрати да он долази због коначне брзине распростирања магнетског таласа, док се при извођењу Био-Саварова закона ова није узимала у обзир.

Исто тако упоређење образаца (39) и (19) § 21.2 показује, да се потенцијал U_1 може растумачити као потенцијал дипола (41) са истом улогом експоненцијалне функције од r.

Нађено решење Максвелових једначина је од велике важности за теорију бежичне телеграфије, јер се поље које се ствара око антене, одн. електромагнетски таласи који се распростиру могу наћи приближно помоћу њега. Подробније испитивање Херцова решења даје целу слику распореда векторских линија електричне силе у неком тренутку за споменути дипол (в. на пр. G. Joos. Theor. Ph. стр. 294).

§ 31.2 Распростирање таласа у полупроводницима и проводницима. Да се вредности електричног и магнетског вектора могу мењати периодички у времену и простору нашли смо решавајући једначине (4) и (18). Оваква решења дају нам електромагнетски талас који се распростире у потпуном изолатору, хомогеном и изотропном. Сад се поставља питање, могу ли се распростирати електромагнетски таласи у полупроводницима и проводницима. Како у овом случају специфичка проводљивост σ није једнака нули, треба да потражимо одговарајућа решења једначина

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\Delta\mathfrak{E}\ ,$$

(3)

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}=\Delta\mathfrak{H}\ ,$$

уз услове

(2) $$\operatorname{div}\mathfrak{E}=0\ ,\qquad \operatorname{div}\mathfrak{H}=0\ ,$$

од којих ће први важити када нема другог електричног поља сем таласног. Интеграљење овог система парцијалних диференцијалних једначина у општем случају задаје велике тешкоће и зато ћемо изабрати најпростији случај — линеарно поларизовани талас.

Претпоставимо да на површину полупроводника ($\varepsilon\neq 0$, $\mu\neq 0$, $\sigma\neq 0$), која је раван, пада управно линеарно поларизовани електромагнетски талас. Нека оса x буде усмерена у правцу унутрашње нормале, а осе y и z у правцу електричног, одн. магнетског вектора. Ако се овај талас распростире у унутрашњости полупроводника и остаје линеарно поларизован, координате E_y и H_z електричног, одн. магнетског вектора биће функције

(42) $$E_y=E\ (x,t)\ ,\qquad H_z=H_z(x,t)$$

које треба да буду решења једначина

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2E_y}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial E_y}{\partial t}=\frac{\partial^2E_y}{\partial x^2}\ ,$$

(43)

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2H_z}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial H_z}{\partial t}=\frac{\partial^2H_z}{\partial x^2}\ .$$

Ове једначине добивамо, ако пројицирамо једначине (3) на коорди

натне осе и узмемо у обзир, да непознате функције не зависе од y и z. Диференцијална једначина облика (43) зове се *телеграфска*.

Она је линеарна и зато можемо потражити решење у облику експоненцијалне функције

$$E_y = a e^{i\frac{2\pi}{T}(t - bx)}, \tag{44}$$

јер нас интересује питање, постоје ли периодична решења. Од две константе, a и b, прва даје амплитуду за $x = 0$, тј. у равни yz и биће, дакле, једнака амплитуди електричног таласа који пада на полупроводник. Другу (b) ваља одредити тако да буде задовољена прва од једначина (43). Ставимо ли у њу израз (44), после скраћивања добићемо услов

$$b^2 = \frac{\varepsilon\mu - 2\mu\sigma T i}{c^2},$$

који показује да је b комплексан број. Ставимо

$$b = \frac{m - ni}{c} \tag{45}$$

и израчунајмо бројеве m и n помоћу претходне једначине. Онда ће бити

$$m^2 - n^2 = \varepsilon\mu, \qquad m^2 n^2 = \mu^2 \sigma^2 T^2;$$

дакле, бројеви m^2 и $-n^2$ су корени квадратне једначине

$$\xi^2 - \varepsilon\mu\xi - \mu^2\sigma^2 T^2 = 0,$$

тј.

$$\begin{aligned} m &= \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2 T^2} + \varepsilon\right)}, \\ n &= \sqrt{\frac{\mu}{2}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + 4\sigma^2 T^2} - \varepsilon\right)}. \end{aligned} \tag{46}$$

Како знамо ε, μ, σ и периоду таласа T који пада, можемо израчунати m и n. Дакле је (в. образац (44), $cT = \lambda$)

$$E_y = a e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}} e^{\frac{2\pi i}{T}\left(t - \frac{mx}{c}\right)}. \tag{47}$$

Одвајајући реални део ове функције, добићемо електрични вектор

$$\mathfrak{E} = E_y \mathfrak{i} = a e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}} \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx}{c}\right) \mathfrak{i}. \tag{48}$$

Видимо да ће ма на ком месту полупроводника или проводника ($x = \text{const.}$, y и z такође константне) електрични вектор бити периодичка

функција времена. Но овај се талас разликује од таласа у изолатору, јер његова амплитуда,

$$a e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}},$$

опада када x, тј. растојање од граничне равни расте. Дакле електромагнетски талас (за магнетски вектор $\mathfrak{H}$ или његову координату H_z имамо исту диференцијалну једначину и, према томе, слично решење) амортизује се при распростирању у полупроводнику или проводнику. Другим речима ови га апсорбују. Број n, *коефицијент апсорпције*, зависи од периоде T таласа или таласне дужине λ. За метале ε има мале вредности, уопште непознате, и ако се оно занемари у изразима (46) биће

$$m = n = \sqrt{\mu\sigma T}\ .$$

На растојању $x = \lambda$ од граничне равни амплитуда таласа има вредност $ae^{-2\pi n}$, тј. смањује се у размери $e^{-2\pi n} : 1$.

Из друге од једначина (22), јер и у случају полупроводника важи друга од једначина (1), следује

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{c}{\mu}\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

А ако се узме у обзир вредност E_y из обрасца (48), биће

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} = \frac{2\pi}{\mu T}(n\cos\alpha - m\sin\alpha)\, e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}},$$

где смо са α означили аргумент косинуса. Стављајући

$$\sin\beta = \frac{n}{\sqrt{n^2+m^2}}, \qquad \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{n^2+m^2}},$$

добићемо у заградама $-\sin(\alpha-\beta)$, и само α зависи од времена. Интеграљећи претходну једначину, добивамо

$$H_z = \frac{1}{\mu}\sqrt{n^2+m^2}\, a e^{-\frac{2\pi n x}{\lambda}} \cos\left[\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{mx}{c}\right) - \beta\right], \tag{49}$$

и из овог обрасца се види, да су амплитуде вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ различите, да разлика у фазама β зависи, поред величина ε, μ и σ, и од периоде таласа, јер је

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{n}{m}\ .$$

§ 32 Појаве при распростирању електромагнетских таласа. Извесна аналогија између електромагнетских таласа и светлости послужила је Максвелу као полазна тачка за његову теорију светлости коју ћемо проучити касније. Овде ћемо се зауставити на испитивању низа појава које се, као што следује из теорије, могу одигравати при распростирању електромагнетских таласа. А познати резултати Херцових експеримената (1888 г.) потврђују да се доиста ове појаве могу посматрати. Наравно, теориско објашњење ових појава, одбијања и преламања таласа на граници двају медијума, поларизације, као и других не следује у потпуности из самих једначина таласа. Оно се изводи уз низ накнадних претпоставака, као што ћемо одмах видети.

§ 32.1 Одбијање и преламање таласа на граници двају диелектрика. Узмимо, једноставности ради, да је граница двају диелектрика (ε_1, μ_1 и ε_2, μ_2) раван. У првом диелектрику распростире се равански линиски поларизовани талас у неком правцу и пада на граничну раван. Претпоставимо да овај талас изазива два таласа: одбијени који се распростире у првом диелектрику. Претпоставимо још да су ови таласи равански линиски поларизовани, код којих такође електрични и магнетски вектори врше осцилације у правцима нормалним на правце својих распростирања.

Означимо ли са $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{E}_2$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}_2$ електричне, одн. магнетске векторе, са $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$ јединичне векторе праваца распростирања — зракова, то ћемо због једначина (28) имати

$$(50)\quad \mathfrak{H}=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\,[\mathfrak{l}\mathfrak{E}]\,,\qquad \mathfrak{H}_1=\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\mu_1}}\,[\mathfrak{m}\mathfrak{E}_1]\,,\qquad \mathfrak{H}_2=\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\mu_2}}\,[\mathfrak{n}\mathfrak{E}_2]\,.$$

Ако поново узмемо осцилације најпростије врсте (28) имаћемо

$$(51)\qquad \mathfrak{E}=\mathfrak{A}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),$$

где је $\mathfrak{A}$ константни вектор који стоји управно на $\mathfrak{l}$, T — периода, α — брзина распростирања таласа (в. обр. 15), а r неко растојање дуж зрака (овај се сада не поклапа са осом x) којим се одређује фаза осцилација. За друге електричне векторе ставићемо сличне изразе:

$$(52)\qquad \mathfrak{E}_1=\mathfrak{A}_1\cos\frac{2\pi}{T_1}\left(t-\frac{r_1}{\alpha}\right),\qquad \mathfrak{E}_2=\mathfrak{A}_2\cos\frac{2\pi}{T_2}\left(t-\frac{r_2}{\alpha_2}\right)$$

($\alpha_1=\alpha$, јер се одбијени талас распростире у истом диелектрику са упадним). Имамо у првом диелектрику поље вектора $\mathfrak{E}+\mathfrak{E}_1$. И, пошто су тангенцијалне компоненте електричних вектора, које ћемо означити

индексом $_t$, на граници диелектрика једнаке (§ 21.3), добићемо услов (гранични)

$$\mathfrak{E}_t + \mathfrak{E}_{1t} = \mathfrak{E}_{2t}$$

или, због једначина (51) и (52),

$$(53) \qquad \mathfrak{A}_t \cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right) + \mathfrak{A}_{1t} \cos\frac{2\pi}{T_1}\left(t - \frac{r_1}{\alpha}\right) = \mathfrak{A}_{2t} \cos\frac{2\pi}{T_2}\left(t - \frac{r_2}{\alpha_2}\right)$$

који треба да буде задовољен у свакој тачки граничне равни и у сваком тренутку. Време, дакле, не може да остане у овој једначини, тј. ма за какво t косинуси треба да ишчезну. А ово је могућно само онда, ако је

$$(54) \qquad \begin{gathered} T = T_1 = T_2 \\ r = r_1 , \qquad \frac{r_1}{\alpha} = \frac{r_2}{\alpha_2} . \end{gathered}$$

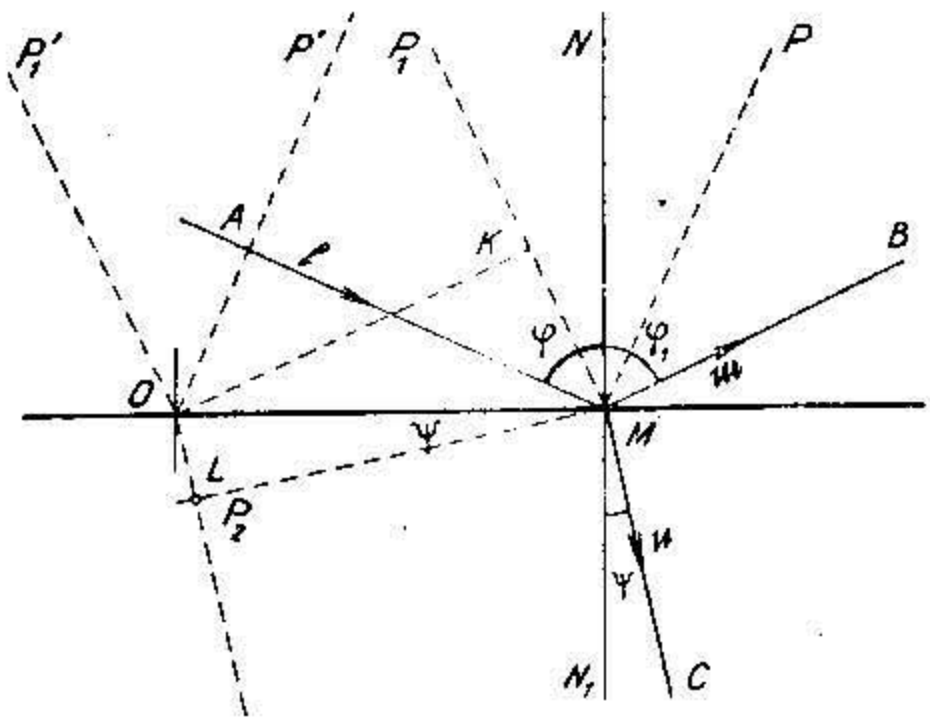
Онда ће бити

$$(55) \qquad \mathfrak{A}_t + \mathfrak{A}_{1t} = \mathfrak{A}_{2t} .$$

И ако се у граничној равни повуку осе x и y и уведу пројекције горњих вектора, имаћемо

$$(56) \qquad A_x + A_{1x} = A_{2x} , \qquad A_y + A_{1y} = A_{2y} .$$

Из услова (54) могу се извести закони одбијања и преламања таласа. Уочимо зато слику 34 на којој су: AM — упадни зрак, MB — одбијени и MC — преломни у извесном тренутку t. Из разлога симетрије сва три зрака леже у истој равни са нормалом MN на граничној равни OM. У тренутку t, кроз тачку M пролазе три таласне равни: MP, MP_1 и MP_2, у којима леже вектори $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$. Означимо са φ, φ_1 и ψ углове AMN, NMB, N_1MC.



Сл. 34

Тачка A нека лежи од M на растојању r, OP' је таласна раван која пролази кроз ову тачку. OP' стоји управно на AM као и MP. Усто таласна раван OP_1' одбијеног зрака стоји управно на $OK \parallel MB$. Нека OL буде паралелно са MC. За исто време за које таласна раван упадног зрака OP' пређе у положај MP, раван OP_1' стићи ће у MP_1, а раван која улази у други диелектрик у тачки O заузеће положај ML. Фазе првог и другог зрака

одређују се отсечцима $AM = r = OK = r_1$. Зато из једнаких троуглова AOM и KMO следује

(57) $$\varphi = \varphi_1 ,$$

тј. познати закон из Оптике, наиме: упадни и одбијени углови су једнаки. С друге стране, отсечак OL одређује фазу преломног зрака, тј. $OL = r_2$. Имамо: $r_2 = OM \sin\psi$ и $r = OM \sin\varphi$. Дакле, из последњег услова (54) следује

(58) $$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = \frac{\alpha}{\alpha_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}} ,$$

ако се узме још у обзир образац (5). Означавајући са n индекс преламања и стављајући $\mu_1 = \mu_2 = 1$, што се може претпоставити у више случајева јер феромагнетни изолатори нису познати, имаћемо:

(59) $$\frac{\sin\varphi}{\sin\psi} = n = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} .$$

Ако узмемо да је први диелектрик вакуум ($\varepsilon_1 = 1$), и са n_a означимо апсолутни индекс преламања, из Snellius-ова закона (59) добићемо

(60) $$\varepsilon_2 = n_a^2 .$$

Ово је т.зв. Максвелов образац. За таласе дуге периоде, у случају гасова, он приближно важи. За више врста течности и чврста тела отступања су велика.

Пређимо на магнетске векторе (50). Због услова: да се и тангенцијалне компоненте магнетских вектора мењају непрекидно при пролазу кроз граничну површину двају медијума, имамо, као и за електричне векторе,

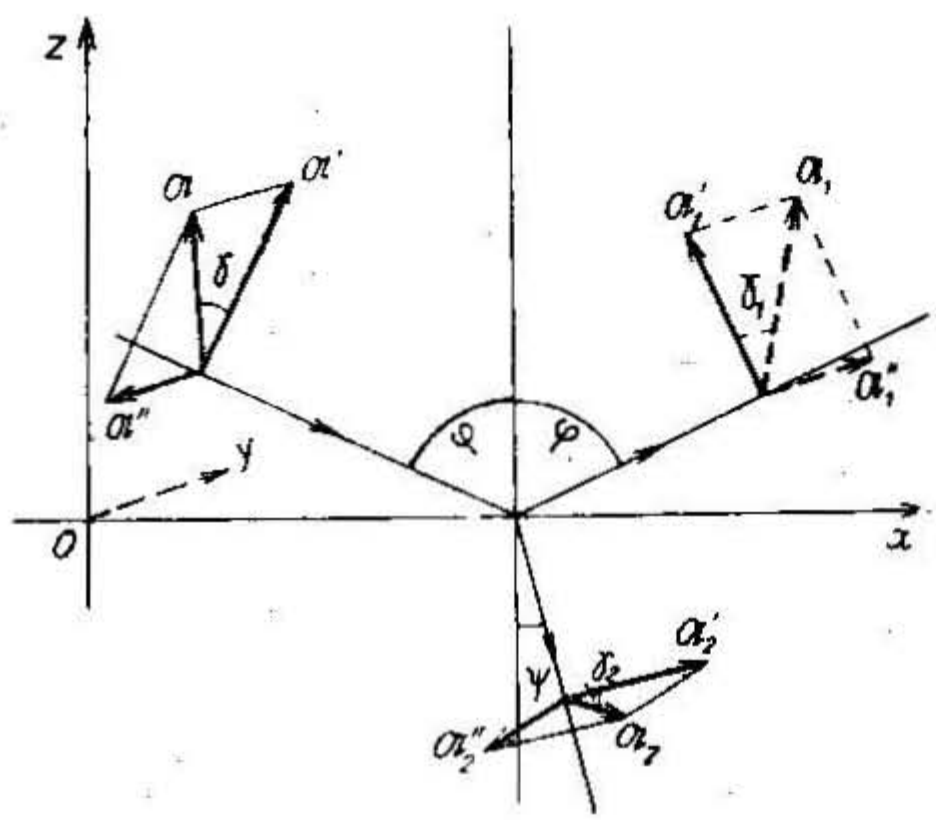
$$\mathfrak{H}_t + \mathfrak{H}_{1t} = \mathfrak{H}_{2t}$$

у равни Oxy. Из ове једначине и из (50) и (59) следује

(61) $$[\mathfrak{l}\mathfrak{E}]_t + [\mathfrak{m}\mathfrak{E}_1]_t = n\,[\mathfrak{n}\mathfrak{E}_2]_t .$$

И овде ће се скратити скаларни множитељ који зависи од времена, па ће бити

(62) $$[\mathfrak{l}\mathfrak{A}]_t + [\mathfrak{m}\mathfrak{A}_1]_t = n\,[\mathfrak{n}\mathfrak{A}_2]_t .$$



Сл. 35

Да бисмо извели одговарајуће две скаларне једначине положимо осу x дуж праве OM, у равни слике (34), осу z у правац нормале, y-оса биће усмерена од нас. Раставимо сваки од вектора $\mathfrak{A}$,

$\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ који стоје управно на правцима $\mathfrak{l}$, $\mathfrak{m}$, одн. $\mathfrak{n}$ у компоненте $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2'$ у равни слике и $\mathfrak{A}''$, $\mathfrak{A}_1''$, $\mathfrak{A}_2''$ у правцу y осе. A', A_1', A_2' и A'', A_1'', A_2'' нека буду пројекције које одговарају овим компонентама. Види се из сл. 35 да јединични вектори имају за пројекције на координатним осама: $\mathfrak{l}(\sin\varphi, 0, -\cos\varphi)$, $\mathfrak{m}(\sin\varphi, 0, \cos\varphi)$, $\mathfrak{n}(\sin\psi, 0, -\cos\psi)$, а пројекције вектора $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$ су:

$$
(63)\qquad
\begin{aligned}
A_x &= A'\cos\varphi\,, & A_y &= A''\,, & A_z &= A'\sin\varphi\,,\\
A_{1x} &= -A_1'\cos\varphi\,, & A_{1y} &= A_1''\,, & A_{1z} &= A_1'\sin\varphi\,,\\
A_{2x} &= A_2'\cos\psi\,, & A_{2y} &= A_2''\,, & A_{2z} &= A_2'\sin\psi\,.
\end{aligned}
$$

Пројицирајући векторске производе који стоје у једначини (62) на осе x и y, добићемо

$$A_y\cos\varphi - A_{1y}\cos\varphi = n\,A_{2y}\cos\psi\,,$$

$$A_x\cos\varphi + A_z\sin\varphi - A_{1x}\cos\varphi + A_{1z}\sin\varphi = n\,(A_{2x}\cos\psi + A_{2z}\sin\psi)\,.$$

Ставимо сад вредности пројекција (63) у једначине (56) и претходне. Добивамо систем од четири једначине, ако још сменимо n изразом (59)

$$
(64)\qquad
\begin{aligned}
(A' - A_1')\cos\varphi &= A_2'\cos\psi\,,\\
A'' + A_1'' &= A_2''\,,\\
(A'' - A_1'')\cos\varphi &= A_2''\,\frac{\sin\varphi\cos\psi}{\sin\psi}\,,\\
A' + A_1' &= A_2'\,\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}\,.
\end{aligned}
$$

Ако претпоставимо да знамо линиски поларизовани талас који пада на границу двају диелектрика, тј. вектор $\mathfrak{A}$, а, према томе, A' и A'', — ове једначине омогућују да нађемо четири остале величине A_1', A_1'', A_2', A_2'', јер ће и углови φ и ψ (последњи из обр. 59) бити познати. Онда можемо израчунати све пројекције помоћу образаца (63), наћи векторе $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$, тј. одредити електричне и магнетске векторе одбијеног и преломног таласа. Решења претходног система једначина дају четири једначине које следују (а од ових се прва једначина добива из прве и четврте, друга из друге и треће система (64)):

$$
(65)\qquad
\begin{aligned}
A_1' &= A'\,\frac{\operatorname{tg}(\varphi-\psi)}{\operatorname{tg}(\varphi+\psi)}\,, & A_1'' &= -A''\,\frac{\sin(\varphi-\psi)}{\sin(\varphi+\psi)}\,,\\
A_2' &= A'\,\frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)\cos(\varphi-\psi)}\,, & A_2'' &= A''\,\frac{2\cos\varphi\sin\psi}{\sin(\varphi+\psi)}\,.
\end{aligned}
$$

Оне се зову Fresnel-ове једначине, и из њих се види да вектори $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ одбијеног и преломног таласа зависе од особина медијума, јер,

кад се дâ угао φ, преломни угао ψ може се наћи из обрасца (59), у којем вредност индекса преламања треба израчунати помоћу диелектричних констаната ε_1 и ε_2. Дакле, од ових бројева зависе и пројекције (65). Ако је $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$, биће $n > 1$ и $\varphi > \psi$. У овом случају је $\sin(\varphi - \psi) > 0$ и $\operatorname{tg}(\varphi - \psi) > 0$. A_1'' имаће знак супротни пројекцији A''. Ако је $\varphi + \psi > 90^0$, имаће A_1' знак такође супротни знаку A', па ће, при одбијању, вектор $\mathfrak{A}$, одн. електрични вектор извршити скок за угао π у положај $\mathfrak{A}_1$. Како коефицијенти величина A' и A'' у трећој и четвртој од Френелових једначина остају увек позитивни, вектор $\mathfrak{A}_2$ ће бити стално управљен на исту страну као и $\mathfrak{A}$.

Из прве од Френелових једначина следује, да ће константа $\mathfrak{A}_1'$ ишчезнути ако је

$$\operatorname{tg}(\varphi + \psi) = \infty, \tag{6o}$$

тј. $\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$. А вредност угла φ која одговара овом случају можемо наћи помоћу једначине (59), јер је онда $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Означавајући је са φ^* имаћемо

$$\operatorname{tg} \varphi^* = n \ . \tag{67}$$

Ова се једначина у Оптици зове *Brewster-ов закон*. Кад је она задовољена, остаје само једна компонента вектора $\mathfrak{A}_1$, наиме $\mathfrak{A}_1''$ управна на равни слике. На овај начин се ствара нарочити правац осцилација електричног вектора одбијеног таласа, па се ова појава зове *поларизација* при одбијању. Магнетски вектор који стоји управно на правцу простирања као и на електричном вектору, код одбијеног таласа, вршиће осцилације у равни слике. Ако је електрични вектор упадног таласа био линиски поларизован у равни слике ($A'' = 0$) ишчезнуће и компонента A_1''.

Означимо углове између $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_1'$, $\mathfrak{A}_2$ и $\mathfrak{A}_2'$ са γ, γ_1, γ_2. Добићемо деобом друге са првом, одн. четврте са трећом од Френелових једначина

$$\begin{aligned} |\operatorname{tg} \gamma_1| &= \operatorname{tg} \gamma \, \frac{\cos(\varphi - \psi)}{\cos(\varphi + \psi)} \ , \\ \operatorname{tg} \gamma_2 &= \operatorname{tg} \gamma \cos(\varphi - \psi) \ . \end{aligned} \tag{68}$$

Углови φ и ψ не могу бити већи од $\frac{\pi}{2}$, дакле $\cos(\varphi - \psi)$ је позитиван и

$$\operatorname{tg} \gamma_2 < \operatorname{tg} \gamma \ . \tag{69}$$

Ова неједнакост показује да раван осцилација електричног вектора, тј. раван која пролази кроз зрак и вектор $\mathfrak{A}$, образује код преломног таласа

са равни слике мањи угао него ли код упадног таласа. Код одбијеног таласа имамо обрнути случај, јер из прве од једначина (68) следује, када су косинуси позитивни,

$$|\operatorname{tg}\gamma_1| > \operatorname{tg}\gamma$$

тј. раван осцилација електричног вектора удаљује се од равни слике. Френелове једначине не дају одређене вредности за A_1', A_1'', ... када талас пада управно на граничну раван, јер је онда $\varphi = \psi = 0$. Стога треба да се вратимо обрасцима (64) и да у њима заменимо количник $\sin\varphi : \sin\psi$ са n. Из њих се могу лако наћи вредности A_1' као и оне друге.

Досада смо претпостављали да је $n > 1$. Ако је $n < 1$, из обрасца (59) имаћемо

$$\sin\psi = \frac{1}{n}\sin\varphi \ ,$$

и, за упадне углове који задовољавају услов $\sin\varphi > n$, добивамо вредности $\sin\psi > 1$, тј. имагинарне вредности угла ψ. Ако се зауставимо на елементарном тумачењу, може се рећи преломни талас не постоји у овом случају и наступа појава потпуног одбијања.

§ 32.2 Интерференција. Ако се распростиру два таласа, може да наступи позната појава интерференције. Да видимо, следује ли из решења која смо добили да ће ова појава наступити и у случају електромагнетских таласа. Тражено објашњење добићемо најбрже, ако учинимо извесне претпоставке које ће олакшати рачун. Узмимо да у тачку M стижу два линиски поларизована таласа, и нека

$$\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{A}_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) \ ,$$

(70)

$$\mathfrak{E}_2 = \mathfrak{A}_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right)$$

буду њихови електрични вектори. Претпоставили смо, дакле, да су таласи исте периоде (а према томе су и таласне дужине исте), али да имају различите амплитуде и фазе. Претпоставићемо још једноставности ради да су вектори $\mathfrak{E}_1$ и $\mathfrak{E}_2$ колинеарни и да се таласи простиру дуж исте праве $P_1 P_2 M$. Растојања r_1 и r_2 која дају фазе одређују на овој правој тачке P_1 и P_2, тако да је $P_1 M = r_1$ и $P_2 M = r_2$. Нека буде $\rho = r_1 - r_2$. Због колинеарности електричних вектора, талас при суперпозицији двају датих таласа одређује вектор

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 \ .$$

Овај вектор има модуо који се може наћи помоћу једначине

$$E = E_1 + E_2 = A_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) + A_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_2}{\lambda}\right) .$$

Ако у последњи члан ставимо $r_2 = r_1 - \rho$, добићемо

$$E = \left(A_1 + A_2 \cos\frac{2\pi\rho}{\lambda}\right) \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) - A_2 \sin\frac{2\pi\rho}{\lambda} \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda}\right) .$$

Означимо ли

$$(71) \qquad \begin{aligned} A_1 + A_2 \cos\frac{2\pi\rho}{\lambda} &= A \cos\frac{2\pi R}{\lambda} , \\ A_2 \sin\frac{2\pi\rho}{\lambda} &= A \sin\frac{2\pi R}{\lambda} , \end{aligned}$$

имаћемо

$$E = A \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{\lambda} + \frac{R}{\lambda}\right) .$$

Дакле, ако означимо са $r = r_1 - R$, можемо електрични вектор резултантног таласа, који ће бити колинеаран са два дата вектора, написати у облику

$$(72) \qquad \mathfrak{E} = \mathfrak{A} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) .$$

Амплитуда резултантног таласа A биће, према обрасцима (71):

$$A = \sqrt{A_1^2 + 2A_1A_2 \cos\frac{2\pi\rho}{\lambda} + A_2^2} ;$$

зависи, дакле, од амплитуда датих двају таласа и од ρ, тј. од разлике фаза.

Ако је n цео број и

$$\rho = (2n + 1)\frac{\lambda}{2} ,$$

биће

$$A = A_1 - A_2 .$$

Али, ако је

$$\rho = 2n \cdot \frac{\lambda}{2} ,$$

имаћемо

$$A = A_1 + A_2 .$$

Мењајући $\rho = r_1 - r_2$, можемо, према томе, постићи да амплитуда резултантног таласа буде једнака разлици или збиру амплитуда датих таласа. Ако су ове амплитуде једнаке ($A_1 = A_2$) и ρ једнако непарном броју половина таласних дужина, биће $A = 0$, тј. талас ће се угасити. Слични закључци могу се извести и за магнетски вектор.

Херц је посматрао стојне електромагнетске таласе који су били резултат интерференције раванских таласа од којих један пада на метални зид а други је одбијени. Клеменчић и Чермак постигли су интерференцију електромагнетских таласа на следећи начин. Два паралелна метална огледала била су смештена у правцу таласа који се распростирао од једног осцилатора. Како су ова огледала била померена једно према другом, наступала је код одбијених таласа разлика у фазама. Зато, када су таласи при одбијању од огледала резонатора интерферирали, могло се посматрати појачавање, одн. слабљење амплитуда. Како ова разлика фаза зависи од ρ, а ρ од λ, као што се види из претходних образаца, мерењем растојања између два паралелна огледала која су одговарала, на пр. узастопним слабљењима могла се добити таласна дужина λ.

§ 32.3 Друге појаве. У 32.1 проучили смо подробно одбијање и преламање електромагнетских таласа на граници два диелектрика. Ако се узме да је друга средина проводник, на пр. метално огледало, теорија појаве се компликује. Анализа показује да се и у овом случају можемо послужити Френеловим обрасцима, но треба увести комплексни „индекс преламања". Закон одбијања остаје исти и потврђују га многобројни експерименти почев од Херцових.

Даље се може посматрати и појава двојног преламања, као што су показали Righi-еви, Mack-ови, Bose-ови и др. експерименти са пролазом електромагнетских таласа кроз дрвене блокове који претстављају анизотропне средине, кроз минерале итд..

Исто тако се може констатовати и дифракција.

§ 33 Распростирање електромагнетских таласа у анизотропним срединама. Једначине (1) § 31 или (20) § 29 извели смо уз претпоставку, да су диелектрична константа ε и магнетски пермеабилитет μ скалари. Средине за које она важи зову се изотропне. Но познате су средине и са другим особинама, на пр. неки кристали, и ове се зову анизотропне. Одбацимо ли претпоставку да су ε и μ скалари, мораћемо потражити нов облик главних једначина електромагнетског поља. Зато ћемо поћи од првих веза, које су служиле за извођење ових једначина, и у којима су се појавиле ε и μ.

У првој од једначина (1), диелектрична константа се појавила због увођења густине праве струје (види §§ 29 и 24) $\mathfrak{c} = \mathfrak{i} + \mathfrak{a}$, а израз (14) § 24 за густину струје у диелектрику добили смо из обрасца (13) § 24, претпостављајући да је (обр. 43 § 21.4)

$$\mathfrak{D} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \mathfrak{E} .$$

Померање диелектрика $\mathfrak{D}$ увели смо зато да бисмо имали вектор-

ску величину која не зависи од особина диелектрика, док електрични вектор зависи од ε. Ова веза између вектора $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ је најпростија; она показује да су вектори $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ колинеарни. Међутим за анизотропна тела је карактеристично то, да су њихове особине различите у разним правцима који полазе из неке произвољне тачке. Општија од горње везе је линеарна, тј. случај када је вектор $\mathfrak{D}$ линеарна функција од $\mathfrak{E}$. А оваква се веза може одредити помоћу тензора Φ симетричног (у још општијем случају помоћу афинора). Ставимо зато да је (в. § 0.3)

$$4\pi\mathfrak{D} = \Phi\mathfrak{E} \tag{73}$$

и проучимо извесне електромагнетске појаве у срединама које имају овакву особину. Као што показује упоређивање појава са резултатима изведеним на основи ове претпоставке, она је довољна. Напишимо компоненте $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$ тензора Φ у виду схеме ((42) § 0.3)

$$\Phi \begin{cases} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{cases} . \tag{74}$$

У вези са овим тензором стоји површина другог реда (обр. (52) § 0.3)

$$\varepsilon_{11} x^2 + \varepsilon_{22} y^2 + \varepsilon_{33} z^2 + 2\varepsilon_{23} yz + 2\varepsilon_{31} zx + 2\varepsilon_{12} xy = 1 \tag{75}$$

која се зове *Френелов елипсоид*. Ако се за координатне осе узму главне осе овог елипсоида, његову једначину добивамо у облику

$$\varepsilon_1 X^2 + \varepsilon_2 Y^2 + \varepsilon_3 Z^2 = 1 \tag{76}$$

и бројеве ε_1, ε_2, ε_3 зовемо *главне диелектричне константе* (кристала).

За ове осе тензор Φ ће имати компоненте (обр. 54 § 0.3)

$$\Phi \begin{cases} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{cases} . \tag{77}$$

Осе Френелова елипсоида биће пропорционалне бројевима $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}$, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}}$, $\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_3}}$.

У исти мах можемо написати једначину и другог, т.зв. *индекс-елипсоида*

$$\frac{X^2}{\varepsilon_1} + \frac{Y^2}{\varepsilon_2} + \frac{Z^2}{\varepsilon_3} = 1 . \tag{78}$$

Поларизација анизотропног диелектрика одређује се такође помоћу тензора, јер из образаца (55) § 21.4 и (73) следује

$$4\pi\mathfrak{P} = 4\pi\mathfrak{D} - \mathfrak{E} = \Phi\mathfrak{E} - \mathfrak{E} = \Psi\mathfrak{E} , \tag{79}$$

ако се јединични тензор означи са J (обр. 32 § 11.1) и $\Psi = \Phi - J$. Обе-

лежимо са $E_X, E_Y, E_Z, D_X, D_Y, D_Z$ пројекције вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{D}$ на осе X, Y, Z. Онда из схеме (77) и образаца (37) § 0.3 налазимо

$$4\pi D_X = \varepsilon_1 E_X, \qquad 4\pi D_Y = \varepsilon_2 E_Y, \qquad 4\pi D_Z = \varepsilon_3 E_Z \ ; \tag{80}$$

а како уопште $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ имају неједнаке вредности, вектори $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{E}$ нису колинеарни. Обрнуто, из једначина (80) добивамо

$$E_X = \frac{4\pi}{\varepsilon_1} D_X \ , \qquad E_Y = \frac{4\pi}{\varepsilon_2} D_Y \ , \qquad E_Z = \frac{4\pi}{\varepsilon_3} D_Z \tag{81}$$

и бројеви $\frac{1}{\varepsilon_1}, \frac{1}{\varepsilon_2}, \frac{1}{\varepsilon_3}$ одређују тензор Φ^{-1}, *реципрочни* тензору Φ, којем одговара елипсоид (78)*). Можемо дакле ставити

$$\mathfrak{E} = 4\pi \Phi^{-1} \mathfrak{D} \ , \tag{82}$$

јер је $\mathfrak{E}$ линеарна функција $\mathfrak{D}$.

Зауставићемо се на случају када се диелектричне константе, тј. и тензор Φ не мењају у току времена, тако да из обрасца (13) § 24 за густину струје у диелектрику

$$\mathfrak{a} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} \tag{83}$$

и (73) добивамо

$$4\pi \mathfrak{a} = \Phi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \ . \tag{84}$$

Вектори $\mathfrak{a}$ и $\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}$ имају исти правац само ако је $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$, тј. средина изотропна. За овај израз густине струје у диелектрику и кад је $\sigma = 0$, прва од главних једначина електромагнетског поља (20) § 29 узима облик

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{1}{c} \Phi \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \ , \tag{85}$$

тако да, означавајући краткоће ради индексима пројекције ротора на осе, добивамо три скаларне једначине

$$\frac{\varepsilon_1}{c} \frac{\partial E_X}{\partial t} = \operatorname{rot}_X \mathfrak{H} \ , \qquad \frac{\varepsilon_2}{c} \frac{\partial E_Y}{\partial t} = \operatorname{rot}_Y \mathfrak{H} \ , \qquad \frac{\varepsilon_3}{c} \frac{\partial E_Z}{\partial t} = \operatorname{rot}_Z \mathfrak{H} \ . \tag{86}$$

Како се резултати ове теорије примењују на она анизотропна тела која немају особине феромагнетних тела, сматра се да је $\mu = \text{const.}$, шта више, ставља се $\mu = 1$. А како диелектричне константе не улазе у

*) Служећи се схемом (77) лако је написати и схему која одговара тензору Φ^{-1}.

другу главну једначину електромагнетског поља, она се узима у истом облику као и код изотропних тела, тј.

$$\text{rot}\,\mathfrak{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\ . \tag{87}$$

Ако диференцирамо једначину (85) по времену биће

$$\frac{1}{c}\Phi\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \text{rot}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\ .$$

Сменимо извод магнетског вектора помоћу једначине (87) и применимо образац

$$\text{rot rot}\,\mathfrak{E} = \text{grad div}\,\mathfrak{E} - \Delta\mathfrak{E}\ .$$

Онда ћемо имати

$$\frac{\mu}{c^2}\Phi\frac{\partial^2 \mathfrak{E}}{\partial t^2} = \Delta\mathfrak{E} - \text{grad div}\,\mathfrak{E}\ . \tag{88}$$

Овде div $\mathfrak{E}$ не ишчезава, јер, чак ако и нема слободног електрицитета, диелектричне константе су функције положаја, тј. координата (в. § 21.4). Једначина (88) и схема (77) дају онда три скаларне једначине, у којима се још може ставити $\mu = 1$:

$$\begin{aligned}
\frac{\varepsilon_1\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_X}{\partial t^2} &= \Delta E_X - \frac{\partial}{\partial X}\text{div}\,\mathfrak{E}\ ,\\
\frac{\varepsilon_2\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_Y}{\partial t^2} &= \Delta E_Y - \frac{\partial}{\partial Y}\text{div}\,\mathfrak{E}\ ,\\
\frac{\varepsilon_3\mu}{c^2}\frac{\partial^2 E_Z}{\partial t^2} &= \Delta E_Z - \frac{\partial}{\partial Z}\text{div}\,\mathfrak{E}\ .
\end{aligned} \tag{89}$$

Једначине (88) и (89) замењују за анизотропне средине таласну једначину (4), одн. једначине (6). Но и у овом случају можемо испитати услове који допуштају решење у облику

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{A}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t - \frac{r}{\alpha}\right)\ , \tag{90}$$

где је r извесно неко растојање у правцу датог јединичног вектора $\mathfrak{n}$. Другим речима потражићемо услове под којима се линиски поларизовани талас може у анизотропној средини распростирати брзином α. Претпоставићемо још да је талас равански, и то да су, за све тачке равни која стоји управно на $\mathfrak{n}$, фазе исте. Нека буду $\cos\varphi$, $\cos\psi$, $\cos\theta$ про-

јекције $\mathfrak{n}$ на координатним осама XYZ, а $\mathfrak{r}$ је вектор у правцу $\mathfrak{n}$ који има координате X, Y, Z и модуо r. Онда је

$$r = (\mathfrak{r}\mathfrak{n}) = X\cos\varphi + Y\cos\psi + Z\cos\theta \ . \tag{91}$$

Из једначина (87) и (90) следује

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -c\,[\nabla\mathfrak{E}] = -c\left[\nabla\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\ \mathfrak{A}\right] ,$$

а због (91)

$$\operatorname{grad}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right) = \frac{2\pi}{T\alpha}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\operatorname{grad} r = \frac{2\pi}{T\alpha}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\mathfrak{n} \tag{92}$$

Дакле је

$$\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} = -\frac{c}{\alpha}\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)[\mathfrak{n}\mathfrak{A}] ,$$

и када се овај израз интеграли, биће, с обзиром на једначину (90),

$$\mathfrak{H} = \frac{c}{\alpha}\,[\mathfrak{n}\mathfrak{E}] , \tag{93}$$

тј. магнетски вектор треба да стоји управно на електричном и на правцу распростирања таласа.

Сад је лако наћи израз за вектор $\mathfrak{D}$. Из једначина (83—85) следује

$$4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = c\operatorname{rot}\mathfrak{H}$$

а, због (93), (92), овој претходне и (90), биће

$$4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{c^2}{\alpha}\Big[\nabla[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]\Big] = \frac{c^2}{\alpha}\left[\nabla,[\mathfrak{n}\mathfrak{A}]\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\right]$$

$$= \frac{c^2}{\alpha}\left[\operatorname{grad}\cos\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right),\ \mathfrak{n}\,[\mathfrak{n}\mathfrak{A}]\right]$$

или

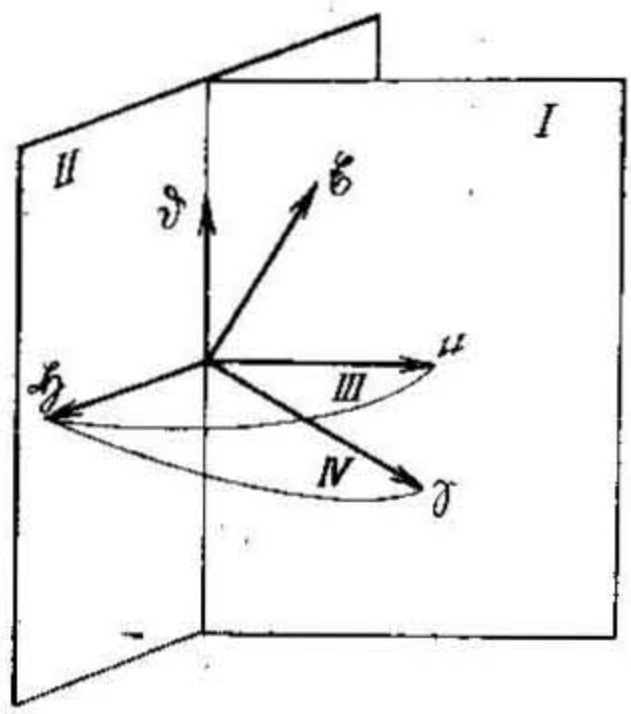
$$4\pi\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial t} = \frac{c^2}{\alpha^2}\frac{2\pi}{T}\sin\frac{2\pi}{T}\left(t-\frac{r}{\alpha}\right)\Big[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{n}\mathfrak{A}]\Big] .$$

Ако се овај израз интеграли добива се вредност померања диелектрика

$$4\pi\,\mathfrak{D} = -\frac{c^2}{\alpha^2}\Big[\mathfrak{n}\,[\mathfrak{n}\mathfrak{E}]\Big] . \tag{94}$$

Из овог обрасца види се непосредно, да се вектор $\mathfrak{D}$ налази у

равни вектора $\mathfrak{n}$ и $\mathfrak{E}$. Ако се он помножи скаларно са $\mathfrak{n}$, десна страна постаје једнака нули и, према томе,



Сл. 36

I је раван осцилација, II таласна раван, III раван поларизације, IV „раван поларизације зрака".

$$(95) \qquad (\mathfrak{D}\mathfrak{n}) = 0 \ .$$

Дакле померање диелектрика стоји управно на правцу распростирања, као и на магнетском вектору (в. обр. (93)). Растављајући двоструки векторски производ у (94) добивамо образац

$$(96) \qquad 4\pi \frac{\alpha^2}{c^2} \mathfrak{D} - \mathfrak{E} + (\mathfrak{E}\mathfrak{n})\mathfrak{n} = 0 \ .$$

Најзад Појнтингов вектор

$$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathfrak{E}\mathfrak{H}]$$

лежи такође у равни вектора $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{n}$, само није управљен у правцу распростирања таласа (сл. 36).

Пројицирајмо једначину (96) на координатне осе и узмимо у обзир једначине (80). Онда ћемо добити

$$\left(\frac{\varepsilon_1 \alpha^2}{c^2} - 1\right) E_x + (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \cos\varphi = 0 \ ,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2 \alpha^2}{c^2} - 1\right) E_y + (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \cos\psi = 0 \ ,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_3 \alpha^2}{c^2} - 1\right) E_z + (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \cos\theta = 0 \ .$$

Ставимо

$$(97) \qquad \frac{c^2}{\varepsilon_1} = \alpha_1^2 \ , \quad \frac{c^2}{\varepsilon_2} = \alpha_2^2 \ , \quad \frac{c^2}{\varepsilon_3} = \alpha_3^2 \ .$$

Из претходних једначина добивамо

$$(98) \qquad E_x = \frac{\alpha_1^2 \cos\varphi}{\alpha_1^2 - \alpha^2} (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \ , \quad E_y = \frac{\alpha_2^2 \cos\psi}{\alpha_2^2 - \alpha^2} (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \ , \quad E_z = \frac{\alpha_3^2 \cos\theta}{\alpha_3^2 - \alpha^2} (\mathfrak{E}\mathfrak{n}) \ .$$

Помножимо ли ове изразе са $\cos\varphi$, $\cos\psi$ и $\cos\theta$ и саберемо ли их, наћи ћемо

$$1 = \frac{\alpha_1^2 \cos^2\varphi}{\alpha_1^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha_2^2 \cos^2\psi}{\alpha_2^2 - \alpha^2} + \frac{\alpha_3^2 \cos^2\theta}{\alpha_3^2 - \alpha^2} \ .$$

Додајући и одузимајући у бројитељима $\alpha^2 \cos^2\varphi$, добићемо, после лаке трансформације, једначину

$$(99) \qquad \frac{\cos^2\varphi}{\alpha_1^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2\psi}{\alpha_2^2 - \alpha^2} + \frac{\cos^2\theta}{\alpha_3^2 - \alpha^2} = 0 \ ,$$

која изражава т.зв. *Френелов закон* распростирања светлости у кри-

сталима, а која важи и за електромагнетске таласе. Напишимо ову једначину у облику:

$$\cos^2\varphi\,(\alpha_2^2-\alpha^2)(\alpha_3^2-\alpha^2)+\cos^2\psi\,(\alpha_3^2-\alpha^2)(\alpha_1^2-\alpha^2)+ \\ +\cos^2\theta\,(\alpha_1^2-\alpha^2)(\alpha_2^2-\alpha^2)=0\ . \tag{100}$$

Она је другог степена по α^2 и зато уопште имамо за сваки правац две вредности брзине распростирања. На пр., за X осу је $\cos\psi=0$, $\cos\theta=0$ и

$$\alpha'=\alpha_2\ ,\quad \alpha''=\alpha_3\ ; \tag{101}$$

уствари добивамо $\pm\alpha_2$ и $\pm\alpha_3$, но смер распростирања не игра улогу. Брзине α_1, α_2, α_3 (97) зову се главне брзине распростирања.

Како су за сваки правац могућне две брзине распростирања, тј. две вредности $\alpha:\alpha'$ и α'', а према обрасцима (98), у које улази ова величина, добивамо две вредности вектора $\mathfrak{E}:\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{E}''$, имаћемо и две вредности померања диелектрика $\mathfrak{D}:\mathfrak{D}'$ и $\mathfrak{D}''$ (образац (73)), магнетског вектора $\mathfrak{H}:\mathfrak{H}'$ и $\mathfrak{H}''$ (обр. (93)) и Појнтингова вектора $\mathfrak{S}:\mathfrak{S}'$ и $\mathfrak{S}''$.

Израчунајмо скаларни производ $(\mathfrak{D}'\,\mathfrak{D}'')$ из образаца (80), (97) и (98), које треба написати за оба вектора:

$$(\mathfrak{D}'\,\mathfrak{D}'')=\frac{c^4}{16\pi^2}(\mathfrak{E}'\mathfrak{n})(\mathfrak{E}''\mathfrak{n})\,\Sigma\,\frac{\cos^2\varphi}{(\alpha_1^2-\alpha'^2)(\alpha_1^2-\alpha''^2)}\ ,$$

где се узима збир три члана (α_1, φ; α_2, ψ; α_3, θ). Овај збир је једнак

$$\frac{1}{\alpha'^2-\alpha''^2}\,\Sigma\left\{\frac{\cos^2\varphi}{\alpha_1^2-\alpha'^2}-\frac{\cos^2\varphi}{\alpha_1^2-\alpha''^2}\right\}=0\ ,$$

јер су α' и α'' корени једначине (100), тј. (99) те је, према томе, збир чланова са знаком плус, а такође и збир чланова са знаком минус једнак нули.

Дакле је

$$(\mathfrak{D}'\,\mathfrak{D}'')=0\ . \tag{102}$$

Међутим вектори $\mathfrak{E}'$ и $\mathfrak{E}''$ не морају да стоје управно један на другоме.

Једначина (100), у којој су уопште све три главне брзине α_1, α_2, α_3 различите, важиће и за специјалан случај, када су две од главних брзина једнаке. Ставимо на пр. да је $\alpha_3=\alpha_2$. Онда се анизотропна средина (кристал) зове једноосна, и оса X је *главна оптичка оса* кристала (овде смо навели назив из Оптике, за коју су ова разлагања од важности). Како је

$$\cos^2\varphi+\cos^2\psi+\cos^2\theta=1\ ,$$

једначина (100) ће имати облик

$$\cos^2\varphi\,(\alpha_2^2-\alpha^2)^2+\sin^2\varphi\,(\alpha_1^2-\alpha^2)(\alpha_2^2-\alpha^2)=0\ . \tag{103}$$

Постоје два решења ове једначине:

$$(104)\qquad \begin{aligned} \alpha'^2 &= \alpha_2^2 \ , \\ \alpha''^2 &= \alpha_2^2 \cos^2\varphi + \alpha_1^2 \sin^2\varphi \ , \end{aligned}$$

и прво од њих не зависи од углова φ, ψ, θ које образује јединични вектор $\mathfrak{n}$ са координатним осама. Дакле за сваки правац распростирања имамо два таласа: први ($\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{D}'$, $\mathfrak{H}'$, $\mathfrak{S}'$) се распростире брзином која не зависи од правца — то је т.зв. *обични* (редовни) *талас*, док је брзина другог ($\mathfrak{E}''$, $\mathfrak{D}''$, $\mathfrak{H}''$, $\mathfrak{S}''$) *ванредног* одређена углом φ између $\mathfrak{n}$ и осе X.

Ако у обрасце (80) унесемо изразе (98) и (97), добићемо

$$D_X : D_Y : D_Z = \frac{\alpha_2^2 - \alpha^2}{\alpha_1^2 - \alpha^2} \cos\varphi : \cos\psi : \cos\theta \ .$$

За обични талас имамо, због (104), $\alpha^2 = \alpha'^2 = \alpha_2^2$ те, према томе, мора да буде увек $D_X' = 0$.

Овим питањима ћемо се још вратити приликом анализе теорија светлости.

§ 33* Еволуција схватања природе електрицитета и магнетизма. Иако су прве електричне и магнетске појаве познате већ више од 2000 година, тек у току последња три века дошло се до значајних открића, а, у вези са њима, и до претстава о природи електрицитета и магнетизма. Систематско проучавање почиње са W. Gilbert-овим делом De magnete (1600 г.). Уочивши линије сила у близини магнета, Џилберт их је сматрао за неке вртлоге, а, уопште, електрицитет и магнетизам објашњавао неким „струјањима“ која поједина тела испуштају. Битна разлика између њих је у томе, што су електрична струјања више „материјална“ а магнетска више „духовна“. Џилбертова теорија је важила у XVII веку и генијални Њутн није у овој области дао ништа битно. Почетком XVIII века рађа се идеја да је муња појава исте природе као и варница која скаче са наелектрисаног ћилибара (Wall). А 1734 г., Du Fay долази до закључка да постоје две врсте електрицитета. Напоредо са овом „дуалистичком“ теоријом електрицитета, коју је доцније прихватио R. Symmer, појављује се и „унитаристичка“ чији је творац Benjamin Franklin. Његова је дефиниција: „олујна или електрична материја је изванредно фина течност која продире у друга тела и у њима се подједнако распоређује“.

Продубљивању схватања електричних и магнетских појава допринели су Aepinus-ови радови, који је поставио и важно питање: имају ли магнетске и електричне силе исти или сродне узроке. Wilke је дошао до појма линија сила, које тумачи као резултат напрезања изазваних у ваздуху. Овим се први пут придаје извесна улога средини која опкољава наелектрисана тела. У исто то доба било је и других мишљења

о природи електрицитета. М. Ломоносов је, на пр., уопште одбацивао претставе о неким флуидумима и сматрао је да се електрицитет састоји у обртању делића етра.

Што се тиче начина дејства електрицитета, почињу у то време да се развијају две претставе: 1) дејства са даљине и 2) дејства путем непосредног додира, у којем главну улогу игра преношење стања у средини која се налази између материјалних тела. У другој половини XVIII века, упоредо са квалитативним иде и квантитативно проучавање: тражи се закон који би дао величину електричне, одн. магнетске силе. За овај закон везано је име Кулона који га је коначно извео 1785 г.; но он је имао и низ претходника. У закону се ништа не претпоставља о начину преношења дејства електричне, одн. магнетске силе од једног на друго тело.

Када су Galvani и Volta, крајем XVIII века, нашли начине трајног стварања електричне струје, електрицитет се сматрао већ за неку врсту флуидума који припада „imponderabilia"-ма. Волта је мислио да на месту додира различитих супстанција (у елементу) дејствује нека сила која тера позитивни и негативни електрицитет на супротне стране. Доцније је ова теорија додира (контакта) уступила место хемиској теорији. Испочетка се појава електричне струје схватала сасвим материјалистички, док Фарадеј није устао против тога. По његову схватању, чак и онда кад се каже да је струја нешто импондерабилно, не треба ипак сматрати да у том случају стварно нешто тече. Почетком XIX века наше знање постаје дубље, јер је пронађена веза између електричних и магнетских појава. Oersted, Arago, Gay-Lussac, Ampère, Biot и Savart раде на томе. Ампер дефинише као смер струје онај у којем се помера позитивни електрицитет, док се у супротном, према његову схватању, у проводнику помера негативни. Он даје и теорију магнетизма. Према њој, у молекулима тела (од гвожђа, никла и кобалта) постоје електричне струје и оне су узрок магнетизма. Овом идејом спојене су магнетске појаве са електричнима.

Током ових година, 1820 — 1821, дошло се до још два важна открића: Араго је први пут посматрао индукцију, а Seebeck је нашао термоелектрицитет. У овој чињеници откривена је друга страна везе између топлотних и електричних појава, док се прва испољава у загревању проводника (Џаулов закон 1841 год.). Појаву електромагнетске индукције проучио је затим темељно Фарадеј. Он је нашао дијамагнетизам, који му је показао да магнетска сила дејствује не само код гвожђа, никла и кобалта но и код других супстанца. Под утицајем свих ових чињеница, стао је на гледиште да услед дејства електричних и магнетских сила материја прелази у неко ново стање. Закључивши да би се ово стање могло испољавати у дејству материје на свет-

лост, он је доиста нашао скретање равни поларизације светлосног зрака у магнетском пољу.

Пре него што пређемо на даљи развитак Фарадејева схватања природе електрицитета и магнетизма морамо напоменути, да многи од истакнутих физичара, и за његова доба и доцније нису напуштали гледиште флуидалне хипотезе. Тако је Poisson сматрао да су код тела у природном стању обе врсте електричних флуидума распоређене подједнако. Ова се равнотежа ремети ако се тело наелектрише. У проводницима се електрични флуидуми могу кретати потпуно слободно, те ће се нагомилавати на површинама, међутим у изолаторима ово није могућно. И Weber, који наводи четири могућности за објашњење дијамагнетизма, наиме: 1) да постоје две врсте магнетских флуидума, који се могу померати у телима — Кулоново и Поасоново гледиште које се не може примити, 2) да се два флуидума могу кретати само заједно са молекулима, а ово се своди на 3) Амперово објашњење, да постоје молекуларне електричне струје које се могу обртати заједно са молекулима и, најзад, 4) да постоје два електрична флуидума који се крећу без отпора дуж неких путања у молекулима, када то неки узрок изазива, — нагиње овој последњој.

Обично се сматра да је претпоставка о електричном флуидуму скопчана са хипотезом о дејству са даљине. Кулонов закон и Амперов закон, као што смо видели, затим Веберов и Riemann-ов, у којима се узима у обзир брзина распростирања дејства једног оптерећења на друго, формулишу се тако да начин дејства не долази у обзир. Clausius је зато покушавао, 1880 г., да дâ нов закон електродинамике према којем извесну улогу у узајамном дејству електричних оптерећења игра и средина.

Другим правцем упутио је схватање електричних и магнетских појава Фарадеј. Он је прво расветлио важно питање о природи електрицитета, јер је у првој половини XIX века било већ познато неколико начина за добивање електрицитета: путем трења, галванска струја, инфлуенција, термоелектрицитет и индукција. Систематским проучавањем особина електрицитета и његова дејства, Фарадеј је дошао до закључка да је природа електрицитета у свима случајевима иста. Даље је узео у обзир улогу диелектрика који опкољава „наелектрисана“ (по старом схватању) тела и сматра да сâм диелектрик прелази у неко нарочито стање. А 1852 г., он доводи у везу са стањем диелектрика претставу о линијама електричних и магнетских сила. W. Thomson је затим подвукао сличност између електричних појава и еластичности, по којој би се стање диелектрика могло схватити тако да се у свакој његовој тачки појављују извесни напони. На овај начин премешта се седиште електричних појава из „наелектрисаних“ тела, где, дакле, нема више никаква флуидума, у медијум — диелектрик који их опкољава. Фа-

радејевој претстави даје Максвел (1873 г.) коначан облик. Према овој теорији, електрицитет и магнетизам се објашњавају као нарочито стање медијума које у свакој његовој тачки карактеришу вредности електричне и магнетске силе. Фарадеј је замишљао да линије електричне силе одређују правце напона, а магнетске да су нека врста вртлога. И Максвел је полазио од извесних механичких модела, но резултати теорије важе и ако се сви ови модели изоставе. Што се пак суштине овог гледишта тиче, Millikan је потпуно правилно приметио да није било доказано да је електрицитет нека врста напетог стања медијума, него је било само утврђено да при појави електричног оптерећења на извесном телу средина која га опкољава постаје седиште нових сила. Електромагнетске појаве одигравају се и у вакууму, где очевидно недостаје материјални носилац стања. Зато је при доследном спровођењу Фарадеј-Максвелова схватања било потребно, да се уведе хипотеза о нематеријалном медијуму који се налази свугде у простору — етру. У идућој глави ћемо видети како је Максвел са овим у вези створио т.зв. електромагнетску теорију светлости. И када је Hertz низом експеримената успео да покаже, да се електромагнетски таласи покоравају законима Оптике, с правом је могао да каже (1889 г.): „Тако се проширује област електрицитета на сву природу". Но у исти мах појављују се и тешкоће за Фарадеј-Максвелову теорију. Фарадеј је, наиме, већ раније, при проучавању електролизе, дошао био до закључка да постоје у природи извесне одређене елементарне количине електрицитета. А доцније је низ нових појава са којима ћемо се даље упознати показао да теорији недостаје појам електричног оптерећења. И 1881 г. Helmholtz је истакао могућност да се уведе појам атома позитивног и негативног електрицитета. Пре њега је Varley 1871 г., сматрао, када су били пронађени катодни зраци, да су они рој материјалних честица оптерећених негативним електрицитетом. Ово гледиште је више пута оспоравано било, све док Fitzgerald (1897 г.) није навео разлоге који су одлучили у његову корист. И, према В. Веберову схватању (1874-75 г.), молекул водоника садржи једну негативну честицу електрицитета, док их молекули других супстанца имају више. Битна разлика између овог схватања природе електрицитета и оног првог, према којем је електрицитет неки флуидум, састоји се у новој претпоставци о дискретној структури електрицитета. Атомска хипотеза почиње и овде да осваја терен. Наравно, нека дефиниција стања слична агрегатном стању ових елементарних честица електрицитета тешко се може прецизирати. Испочетка се говори о електрицитету распоређеном на површини честице, а затим — о кондензованом у његовој запремини. G. J. Stoney, полазећи од Фарадејевих закона електролизе, покушава да одреди количину електрицитета везану за јон водоника, за коју мисли да остаје иста. 1891 г. уводи он назив *електрон*, да би означио природну јединицу електрицитета, наиме, оно

оптерећење које се везује за сваку валенцију у хемиском атому, а 1895 г. овај назив служи за ознаку атома електрицитета у Веберову смислу. Одређенији облик добива ново схватање о природи електрицитета у H. A. Lorentz-овој теорији електрона, о којој ће бити говора при проучавању склопа материје. Овде ћемо само још споменути да је Abraham предлагао да се сам електрон схвати као лопта непроменљива облика, док је Лоренц допуштао да се она може деформисати. Са XX веком, дакле, у схватању природе електрицитета, враћа се реални смисао оптерећења, којем се усто приписује способност да се увек састоји од једнаких квантума електрицитета распоређених дискретно у простору. Четрдесет година је скоро реч електрон, поред свега што се одмах од почетка стварања теорије говорило и о позитивним и о негативним честицама, везивана за извесни квантум негативног електрицитета; тек 1934 г. доноси откриће *позитона* — честице истог реда и позитивно оптерећене.

ГЛАВА V

СВЕТЛОСТ

Улога светлости у животу, у продирању у тајне природе, у развитку нашег схватања космоса оправдавала је од увек важност која је придавана проучавању свих појава у вези са њом. И скуп појава, прво само оних које се односе на саму светлост, а затим и других које испољавају њене везе са осталим гранама Физике, појава које говоре о најбитнијим питањима структуре материје, образује сада врло пространу област. Природно је било да је људски дух стално тежио да створи претставу о томе, шта је светлост. Као резултат ове тежње појавиле су се различите теорије. Али интензивни рад на проучавању светлосних појава доводио је редовно до све новијих открића, од којих су нека ишла у прилог, друга пак показивала слабе стране појединих од тих теорија, и због тога се стварале нове. Све старије теорије деле се у две групе: у првој доминира претстава о светлости као роју неких честица — корпускула, друга се заснива на појму таласа. Ми ћемо се упознати са овим теоријама, но претходно ћемо се зауставити на извесним чињеницама које потичу из посматрања. Један део светлосних појава — оних наиме које се односе на распростирање светлости, на одбијање и преламање, — може се описати без нарочите претпоставке о суштини светлости. Овај део науке о светлости, Геометриска оптика, има, поред своје важности као први корак ка упознавању светлосних појава, и практичну вредност, јер садржи и основе за проучавање и конструкцију оптичких инструмената. Стога ћемо се прво упознати са неким подацима из ове гране Оптике.

§ 34 Геометриска оптика. Најпростији експерименти показују да се светлост у хомогеним срединама простире праволиниски *(чињеница* 1);

правце простирања зовемо *светлосни зраци.* Средине могу бити материјалне, но светлост се распростире и у вакууму (*чињеница* 2), где јој је брзина распростирања $300\,000 \frac{\text{км}}{\text{сек}}$ (*чињеница* 3). Последња чињеница не игра улогу у Геометриској оптици, јер време у њој уопште не долази у обзир. Основну улогу игра средина, одн. њене оптичке особине. И разликују се хомогене и нехомогене, изотропне и анизотропне средине (*чињеница* 4). Даље, при одбијању светлости важи закон: упадни угао (φ) је једнак одбијеном (*чињеница* 5); а при преламању — важи закон

$$\sin\varphi : \sin\psi = n \tag{1}$$

(*чињеница* 6), где је ψ преломни угао, а n константни број, т.зв. *индекс преламања* за две хомогене средине на чијим границама се врши преламање. У нехомогеној средини светлост се не простире праволиниски. И, ако претпоставимо да се особине средине мењају непрекидно, да се у њој промене правца врше непрекидно од једног до другог делића, индекс преламања ће бити непрекидна функција положаја: $n = n(x, y, z)$. Но ова претпоставка, којом се индекс преламања дефинише као скалар, важи само за изотропне средине. За анизотропне треба увести нову величину, која спада у тензоре. Најзад, за Геометриску оптику су од важности још две претпоставке. Различити снопови светлосних зракова не зависе један од другога (*чињеница* 7) и зраку се може променити смер, тј. ако зрак из неке тачке M стиже у M_1, онда ће зрак из тачке M_1 стићи у M (*чињеница* 8). По себи се разуме, да се са овим простим претпоставкама не може објаснити скуп свих оптичких појава, на пр. дифракција.

У основи Геометриске оптике налазимо два става: *Fermat-ов принцип* и *Malus-ов закон.* Ови ставови стоје у вези са Снелиусовим (1), и ако претпоставимо да од ова три става један важи, важиће и остала два.

Уочимо неку изотропну средину. Нека буде уопште нехомогена, тако да њене оптичне особине буду окарактерисане вредностима скалара $n = n(x, y, z)$. Повуцимо неку криву која спаја тачке M и M_1 и означимо са ds лук ове криве. Интеграл

$$S = \int_{M}^{M_1} n\, ds \tag{2}$$

зове се *оптичка дужина* криве. Према Ферматову принципу: распростирање светлости врши се дуж оне криве за коју је оптичка дужина extremum (ако се упореди са суседним линијама):

$$S = \text{extremum}. \tag{3}$$

Дакле, за зрак, линију којом се простире светлост из M у M_1, мора бити

$$\delta S = \delta \int_M^{M_1} n\, ds = 0 \ . \tag{4}$$

У хомогеном медијуму је $n = \text{const.}$; светлост се распростире дуж праве MM_1 и $S = ns$ очевидно је за ову праву минимум.

У случају једног преламања зрака на граници два хомогена медијума имамо $S = n_1 s_1 + n_2 s_2$, где су n_1 и n_2 индекси преламања, s_1 и s_2 отсечци правих MO и OM_1, ако је O тачка продора. Значи

$$\delta S = n_1 \delta s_1 + n_2 \delta s_2 = 0 \ .$$

Узмемо ли граничну раван за раван xy, тачка продора суседне линије O' имаће координате δx и δy. Ако су $-x, 0, z$ координате тачке M, а x_1, 0, $-z_1$ — тачке M_1 (оса y стоји управно на равни MOM_1) биће

$$\delta s_1 = \sqrt{(x + \delta x)^2 + \delta y^2 + z^2} - \sqrt{x^2 + z^2} \ ,$$
$$\delta s_2 = \sqrt{(x_1 - \delta x)^2 + \delta y^2 + z_1^2} - \sqrt{x_1^2 + z_1^2} \ .$$

Ако се сваки од ових израза развије у ред, па занемаре величине вишег реда, биће

$$\delta s_1 = \frac{x \delta x}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \sin \varphi\, \delta x \ ,$$

$$\delta s_2 = -\frac{x_1 \delta x}{\sqrt{x_1^2 + z_1^2}} = -\sin \psi\, \delta x \ .$$

Унесемо ли ове изразе у горњу једначину, добићемо

$$n_1 \sin \varphi - n_2 \sin \psi = 0 \ .$$

Ако количник $n_2 : n_1$ означимо са n, ова једначина прелази у (1), и тако смо из Ферматова принципа извели закон преламања светлости.

Ферматова функција S зависи од координата тачке M (x, y, z) и M_1 (ξ, η, ζ). Да видимо сад којим правцем иде из тачке M_1 зрак који је стигао из M. Бесконачно блиска тачка M_2, у коју ће зрак прећи из M_1, лежаће на *оптичком растојању* $S + dS$ од M, ако M_1 лежи на оптичком растојању S (ово значи да је оптичка дужина зрака M_1 једнака S). Кроз тачке M_1 и M_2 пролазе дакле површине

$$S = \text{const.} \ , \qquad S + dS = \text{const.} \ . \tag{5}$$

С друге стране, оптичко растојање M_2 од M_1 је $dS = n\, ds$. И, како се у бесконачно малој близини тачке M_1 медијум може сматрати као хомоген, то ће геометриско место тачака чија су оптичка растојања од M_1 једнака бити лопта са полупречником ds. Ова лопта додирује

другу од површина (5), и зато M_2 лежи у тачки додира, тј. на правцу управном на њој. Ако са $\mathfrak{t}$ означимо јединични вектор у правцу зрака, биће $ds\,\mathfrak{t} = d\mathfrak{l}$, а уопште је $dS = \operatorname{grad} S\, d\mathfrak{l} = n\, ds$. Узимајући само у обзир да се овде вектор $\operatorname{grad} S$ конструише у тачки $M_1(\xi, \eta, \zeta)$ и означавајући га зато са $\operatorname{grad}^* S$, имаћемо

$$\operatorname{grad}^* S = n\mathfrak{t}\,; \tag{6}$$

овом се једначином одређује правац зрака у свакој тачки медијума, кад је позната Ферматова функција.

Узмимо сада неку површину S_0. За сваку тачку ове површине може се конструисати фамилија површинâ чије се тачке налазе на истим оптичким растојањима. Ова растојања од M_0 нека буду: S, S_1, S_2, ... Мењајући положај тачке M_0 на S_0 добићемо, с друге стране, фамилију површинâ које одговарају истом оптичком растојању S (или $S_1, S_2, \ldots$). Узмемо ли обвојницу ове фамилије, то ће најкраће оптичко растојање њених тачака $M\ (x, y, z)$ од тачака M_0 бити S и исто за све, тј.

$$S\ (x, y, z) = \text{const.} \tag{7}$$

биће њена једначина. Ова обвојница се зове *површином ајконала,* а ајконал је интеграл $\int_1^2 dS$, који између тачака две површине $S = S_1$ и $S = S_2$ има, дакле, вредност $S_2 - S_1$. Како зрак који полази из тачке M_0 стоји управно на површини (5), а обвојница је додирује, то ће он стајати управно и на обвојници. Нека буду сад x, y, z координате тачке M на обвојници, тј. на површини (7); према томе, мењамо ознаку градијента у једначини (6) на обичну и написаћемо ову једначину у облику

$$\operatorname{grad} S = n\mathfrak{t}\ . \tag{8}$$

Одавде следује

$$(\operatorname{grad} S)^2 = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2. \tag{9}$$

Када је индекс преламања n позната функција координата, ова парцијална диференцијална једначина може послужити за одређивање фамилије површина ајконала.

У једначини (8) лежи суштина другог става Геометриске оптике — Малусова закона, према којем светлосни зраци чине сноп линија за које се увек може наћи фамилија ортогоналних површина. Дакле, ако је медијум хомоген и зраци праволиниски, овај скуп правих линија лежи дуж нормала неке површине. Ова се особина не губи, према Малусову закону, ни после одбијања и преламања. Овакав сноп правих линија зове се *ортотомни.*

Општи ставови које смо овде навели служе, даље, за образложење метода или за извођења правила за конструисање ликова предмета који се добивају после одбијања или преламања зракова у различитим оптичким апаратима. Али када се израђује теорија ових апарата, одн. начини конструисања, није довољно да се узму у обзир само поменуте појаве, јер се јавља потреба да се поведе рачуна о дифракцији, интерференцији и дисперсији. У анализу свих ових питања, од великог практичног значаја, овде, наравно, нећемо улазити.

§ 35 Прве теорије светлости. У другој половини XVII века, кад су већ били познати закони одбијања и преламања светлости (Снелиус и Descartes), коначна брзина њеног распростирања (Olaf Römer), дифракција (Grimaldi) и двојно преламање у кристалима (Bartolinus), рађају се, скоро у исто време, прве две теорије светлости: Њутнова и Хајгенсова, сасвим различитих полазних тачака. Од великог је интереса чињеница да се у даљем развитку основне идеје ових теорија боре о превласт са променљивим успехом.

Њутн, који је публиковао своју Оптику тек 1704 г., није само теорију дао. Он је и сам вршио експерименте и мерења, и то не ради тумачења само поменутих појава, него и других као: дисперсије коју је он проучавао помоћу стаклене призме (још су Marcus (1648) и Грималди (1665) знали за појаву дисперсије), интерференције — Њутнови прстенови, боје танких листова (Hooke је дао начин посматрања ових прстенова), и његова теорија била је скицирана много пре наведеног датума. Он ју је формулисао у облику низа дефиниција, аксиома и ставова који се доказују експериментима. А прва и основна њена идеја је да су зраци ројеви честица (корпускула), врло малих, које шаље извор светлости. Како имамо рој честица које лете, то се очевидно не поставља питање о некој нарочитој средини која би била потребна, када се светлост распростире у вакууму. Наравно да сама ова идеја није довољна да се објасне већ у оно доба познате оптичке појаве. Чак и за најпростије: одбијање и преламање светлости, била је Њутну потребна, нова претпоставка, којом би се образложио постанак, на граничној површини двају медијума, одбијених и преломних зракова. Према тој претпоставци, дуж зракова „постоје променљиви напади“ (јуриши, fits, Anwandlungen) и то „напади лакшег одбијања“ и „напади лакшег преламања“. Затим Њутн претпоставља да светлосне честице не долазе у додир са честицама материје, но ове дејствују на прве са даљине, и то: при одбијању светлости имамо одбојне, при преламању привлачне силе. Из експеримената са бојама танких листова закључио је Њутн да је светлост у суштини појава која има периодични карактер и, по његову схватању, овај се испољава у поменутим наизменичним нападима. Ова идеја, о периодичности, постаје основа за све касније

теорије. Но и поред тога што је објашњавала низ светлосних појава, Њутнова *емисиона* теорија наилазила је и на тешкоће. Прву тешкоћу је претстављало питање, зашто се сви корпускули избацују истом брзином из извора светлости. Друга тешкоћа је лежала у поменутој претпоставци о раздвајању упадног зрака. Када се даље са овим тумачењем проучи преламање светлости следује да уколико је гушћа средина утолико су јача привлачења честица, и брзина светлосних честица у срединама треба да расте са индексом преламања. Тек средином 19 века доказао је Foucault помоћу експеримената да је овај закључак у опреци са посматрањима. Тако се Њутнова теорија светлости држала више од сто година и тек тада је уступила место Хајгенсовој теорији.

Ондулациона теорија води порекло од прве Хајгенсове идеје о начину распростирања светлости коју је он дао 1676 г. Постоји, наиме, према првој претпоставци ове теорије нарочити медијум, који се налази у вакууму и продире у материјална тела, — етар — носилац светлосних појава. Светлост се распростире у њему на начин сличан таласима на води или звучним таласима у ваздуху, значи коначном брзином (Хук је већ имао идеју о етру, али није узимао у обзир коначну брзину распростирања). Тачкасти извор светлости даје суседним делићима етра извесни импулс који у хомогеном медијуму, после извесног времена, стиже до тачака на површини лопте са средиштем у извору. Ова површина зове се таласна површина. Али сам начин распростирања налази објашњење у т.зв. *Хајгенсову принципу*, наиме, сваки делић медијума у којем се распростире талас постаје средиште из којег се шири елементарни талас, јер кретање делића преноси се на све остале који га опкољавају; сви се овакви таласи суперпонују, тј. површина резултантног таласа бива обвојница фамилије елементарних. Помоћу ове претставе о елементарним таласима може се извести праволиниско простирање светлости у хомогеном медијуму, одбијање и преламање на граници двају медијума, где тачке постају средишта двеју фамилија елементарних таласа. Од нових таласа једни се враћају у први медијум, други, ако други медијум има већу густину, распростиру се у њему са мањим полупречницима. Ондулациона теорија могла је да објасни дифракцију и двојно преламање, али је у оно доба стајала немоћна пред појавом дисперсије и, уопште, пред свима питањима везаним за разне боје. Последња чињеница имала је за последицу да емисиона теорија буде примљена од већине физичара, но ни Њутн испочетка није био противан ондулационој теорији. У питању брзине распростирања светлости, ондулациона теорија доводила је до резултата супротног од поменутог резултата емисионе теорије. Наиме, брзина распростирања у гушћем медијуму (са већим индексом преламања) требало је према њој да буде обрнуто пропорционална индексу преламања. Међутим, као што смо навели, тек је Фукоов експеримент показао тачност овог закључка.

Велика заслуга за даљи развитак ондулационе теорије припада Ојлеру који и у њу уводи мисао о периодичном карактеру светлосних појава. Према њему, свакој боји одговарају осцилације одређене периоде. Када је Young допунио теорију принципом интерференције, она је била у стању да објасни Њутнове прстенове и неке друге појаве. Али је за даљи развитак било потребно да се прецизирају особине хипотетичног медијума — светлосног етра.

У овом питању, у математичком формулисању измена првобитних Хајгенсових идеја од највеће су важности били Fresnel'ови радови, који је разрадио механичку теорију светлости. Пре њега етар су сматрали за средину која има особине гасова. Међутим за објашњење поларизације била је потребна претпоставка о трансверзалном карактеру осцилација, а трансверзални таласи могући су у чврстим телима, док се у гасовитим распростиру лонгитудинални (в. § 12.4, обр. 59). Полазећи од претпоставке да етар има особине чврстог тела, Френел разрађује математички ондулациону теорију. Но ни даљи радови, F. Neumann-ови, Mac Cullagh-ови, W. Thomson-ови и многих других, нису могли довести механичко схватање светлосних појава до потпуно убедљива облика. Један од најважнијих разлога за то била је вредност брзине распростирања таласа која је код трансверзалних таласа испала пропорционална $\sqrt{\frac{E}{\rho}}$ (где је E Јунгов модуо, а ρ густина медијума — в. обр. (60) § 12.4 и претходне). Међутим за све врсте таласа, било трансверзалне, било лонгитудиналне, добива се само једна брзина која зависи једино од особина медијума. Дакле, појава дисперсије на овај начин се не може објаснити. Cauchy је покушавао да заобиђе ову тешкоћу претпоставком да етар има молекуларну структуру, али даљи развитак ове идеје носио је у себи са открићем нових светлосних појава нове тешкоће и захтевао нове претпоставке.

Много је од ових тешкоћа нестало, када је Максвел дао електромагнетску теорију светлости, о којој ће бити речи у идућем параграфу.

Но овде треба да споменемо и други правац у стварању теорије светлости — феноменолошки. Из наведеног прегледа види се да су разне теорије светлости полазиле од одређених хипотеза — претстава о природи светлости. Може се рећи да се неке од ових идеја скоро саме собом намећу, када се проучавају светлосне појаве, због разних аналогија. С друге стране, у великом броју експерименталних чињеница које се односе на светлост било је тешко одабрати оне, које би могле да послуже за основу феноменолошког схватања, теже него ли ма у којој другој грани Физике. Основне чињенице, као што су праволиниско простирање, закони преламања и одбијања у том погледу не дају скоро ништа. Ипак се покушавало да се пође и овим правцем и највише је разрадио феноменолошко схватање W. Voigt (в. Bd. 2 његовог дела: Compendium der theoretischen Physik).

§ 36 Електромагнетска теорија светлости. У електромагнетском пољу могу се стварати стања која се могу периодички мењати у простору и времену, т.зв. електромагнетски таласи које смо проучили у одељку Е главе IV. У Максвеловим једначинама (§ 31) које одређују везе између величина које карактеришу електромагнетско поље налази се и константа c. Као што су показали Колраушови и Веберови експерименти, њена вредност је $300\,000\,\frac{\text{km}}{\text{sec}}$ и она је једнака брзини којом се распростиру у вакууму електромагнетски таласи. Није могло проћи а да не падне уочи да се ови таласи распростиру истом брзином као и светлост. Осим тога, видели смо да електромагнетски таласи могу бити трансверзални, тј. да електрични и магнетски вектори врше осцилације у равни која стоји управно на правцу простирања.

Таласни карактер светлости признавале су и друге теорије, поменуте у претходном параграфу, и тада се већ сматрало да осцилације делића етра морају бити трансверзалне. Сличност ових чињеница послужила је као повод да Максвел створи електромагнетску теорију светлости. Као носилац електромагнетских појава у вакууму сматрао се етар. Али и као носилац светлосних појава био је такође потребан етар. Но требало је претпоставити да су ова два етра уствари једна иста средина. И када је узет један једини етар за носиоца и електромагнетских и светлосних појава, могло се казати да су ове исте природе, тј. да су електромагнетски и светлосни таласи појаве исте врсте. Разлика између њих лежи само у таласним дужинама. Због ове претпоставке могла би се Оптика сматрати као специјални део теорије електромагнетизма, и објашњење свих светлосних појава требало би да следује из решења једначина ове теорије. С друге, стране, познате појаве из Оптике показују какве особине треба да имају уопште сви електромагнетски таласи. У ову групу појава улазе: одбијање таласа на граници двају медијума и преламање, интерференција, дифракција, поларизација и др.. Зато су резултати Херцових експеримената (1888), којима је први пут утврђено да електромагнетски таласи следују при одбијању и преламању законима давно познатим у Оптици, много допринели Максвелову гледишту. Његова хипотеза добила је на тај начин експерименталну потврду, а како се теориски могу образложити поменуте појаве видели смо већ раније (§§ 32 и 33).

Овде ћемо се задржати на објашњењу још неких појава. Претходно морамо указати на тешкоћу, сличну оној на коју смо наишли у механичкој теорији етра, наиме, да брзина распростирања електромагнетских таласа (обр. (5) § 31)

$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}},$$

где је c брзина светлости у вакууму, ε и μ величине које зависе од особина медијума, има исту вредност за све могућне таласе.

Дакле, према Максвеловој теорији брзина распростирања не стоји ни у каквој вези са периодом таласа (одн. фреквенцијом) и зато немамо могућности да објаснимо дисперсију без увођења нових претпоставака. Но није ово једина појава која је тражила извесне промене у Фарадеј-Максвеловој концепцији. Перманентни магнетизам, затим електролиза, Zeeman-ов ефект и радиоактивне појаве такође нису нашли своја објашњења у оквиру теорије електромагнетског поља. За ову другу групу појава недостајао је баш појам електричног оптерећења који је она била одбацила. Овај се доследно уводи у Лоренцовој теорији електрона, са којом ћемо се подробније упознати у идућој глави. Међутим је електромагнетска теорија светлости наилазила још на тешкоће и у појавама зрачења и апсорпције, у законима „црног зрачења" који су M. Planck-у дали повода за нову претпоставку различиту од досадањих. Ове чињенице овде само помињемо; њихову анализу извешћемо у вези са питањем структуре материје у идућој глави.

А у овом (и идућем) параграфу проучићемо још она питања за која се, као и за раније наведена, могу наћи одговори у електромагнетској теорији светлости.

Вектори $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$ електромагнетског поља биће решења једначина (3) § 31:

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\Delta\mathfrak{E}\,,$$

(10)

$$\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2}+\frac{4\pi\mu\sigma}{c^2}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t}=\Delta\mathfrak{H}\,,$$

ако су σ, ε и μ константе, а нема у пољу (делу простора) извора, тј. ако је $\operatorname{div}\mathfrak{E}=0$, $\operatorname{div}\mathfrak{H}=0$. С друге стране једначине (53) § 12.4

(11) $$\rho\frac{\partial^2\mathfrak{s}}{\partial t^2}=\mu\Delta\mathfrak{s}+(\lambda+\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{s}$$

и (55), од којих се прва поклапа са (61) § 11.3, дају распростирање светлости са гледишта механичке теорије; у њима је $\mathfrak{s}$ померање делића етра и овај вектор биће решење таласне једначине, ако је $\operatorname{div}\mathfrak{s}=0$, тј. ако се претпостави да је етар нестишљива средина. Осим тога, у овој теорији је могао за „светлосни вектор", тј. величину која стоји у непосредној вези са узроком осећаја светлости, да се узме било сам вектор $\mathfrak{s}$, и тада би узрок била померања етра, — било његов ротор који задовољава сличну једначину, и тада би узрок била обртања делића етра.

Ако се узме изолатор ($\sigma=0$), обе једначине (10) имаће облик (11) без последњег члана. Зато се, природно, поставља питање који од два вектора, $\mathfrak{E}$ или $\mathfrak{H}$, треба сматрати за „светлосни". Према Fresnel-овим погледима, по којима су вибрације управне на равни поларизације, вектор $\mathfrak{E}$ претставља брзину честица етра, а према Mac Cullagh-овим

и F. Neumann-овим погледима ова улога припада вектору $\mathfrak{H}$, тј. вибрације су паралелне са равни поларизације. Сама теорија поља не даје одговор на ово питање, тако да треба да се узму у обзир неке друге појаве. У Амперовој теорији магнетизма, а исто тако и у модерним теоријама структуре материје, почев од теорије електрона, даје се прва улога електричним појавама. Најзад у Zeeman-овом и Stark-овом ефекту неполаризована светлост (нека спектрална линија) у магнетском, одн. електричном пољу претвара се у поларизовану (у спектралним линијама које се добивају после раздвајања). Све ове чињенице говоре у прилог гледишту да се електричном вектору дâ улога светлосног. Зато смо, при проучавању појава одбијања, преламања и других појава, на прво место ставили електрични вектор, имајући такође у виду не само електромагнетске таласе но и светлосне. Приметимо још да светлост коју шаљу природни извори уопште није поларизована.

Зауставимо се сада подробније на питању поларизације светлости. Једначине (10), којима се одређује распростирање светлости, линеарне су и хомогене. Стога ће збир два (и више) решења бити такође њихово решење и овај став зове се *принцип суперпозиције* (ако је реч о осцилацијама, и то малим, ово је принцип суперпозиције малих кретања). Он игра улогу при закључцима о поларизацији и интерференцији.

При проучавању равâнских електромагнетских таласа (§ 31.1) имали смо случај линиски поларизованог таласа који, ако се узму осцилације најпростије врсте, одређују вектори

$$\mathfrak{E}_1 = a_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\mathfrak{j}\ ,$$

(12)

$$\mathfrak{H}_1 = a_1 \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)\mathfrak{k}$$

(в. једначине (28) § 31.1). Светлост код које су осцилације ове врсте такође се зове линиски поларизована. Узмимо сад компликованији случај, када је

(13) $$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2$$

и

$$\mathfrak{E}_1 = a_1 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_1\right)\mathfrak{j}\ ,$$

(14)

$$\mathfrak{E}_2 = a_2 \cos 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_2\right)\mathfrak{k}\ .$$

Кад би константе фаза биле исте ($\delta_1 = \delta_2$), збир ова два вектора био би увек вектор константног правца, тј. суперпозиција оваква два

линиски поларизована таласа даје поново линиски поларизовани талас.

Ставимо

$$\delta_1 - \delta_2 = \frac{1}{4}, \qquad \gamma = 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} + \delta_2\right).$$

Имаћемо

(15) $$\mathfrak{E}_1 = a_1 \sin\gamma\,\mathfrak{j}, \qquad \mathfrak{E}_2 = a_2 \cos\gamma\,\mathfrak{k}.$$

Из једначина (13) и (15) следује онда да крај вектора $\mathfrak{E}$ описује елипсу

(16) $$\frac{E_y^2}{a_1^2} + \frac{E_z^2}{a_2^2} = 1$$

која се за једнаке амплитуде $a_1 = a_2$ претвара у круг. Светлост код које осцилације имају ову особину зове се *елиптички*, одн. *кружно поларизована*. Разликује се светлост поларизована у десно ако, гледан из смера у коме се распростире талас, електрични вектор описује круг у смеру кретања казаљке на сату, и у лево — ако се крај овог вектора креће у супротном смеру.

У § 32.2 проучили смо интерференцију електромагнетских таласа служећи се истим принципом суперпозиције. Али за објашњење ове појаве требало је узети два таласа који се распростиру у истом правцу, који су линиски поларизовани у истом правцу и имају исте константе фаза. Јасно је да је тешко наћи два одвојена извора светлости за које би била испуњена последња два услова. Међутим зраке који иду од једног извора можемо раздвојити у два снопа, као што се то ради у познатом Френелову експерименту са два, једно према другом врло мало нагнута, равна огледала. Фазе у овим сноповима разликују се за извесну константу у току извесног времена, довољног да се утисак изазове у оку, и тада се може посматрати појава интерференције. Зраци који задовољавају наведени услов зову се *кохерентни*.

Што се распростирања светлости тиче, имамо ово да приметимо. Са гледишта електромагнетске теорије светлости постоји увек низ површина таласа које следују једна другој и „зраци“ су у свакој тачки медијума одређени правцима нормала на овим површинама. На овај начин, особина ортотомије зракова поменута у Геометриској оптици постаје у електромагнетској теорији очевидна. Поред електричног и магнетског вектора увели смо и Пojнтингов (§ 29.1 обр. (23))

(17) $$\mathfrak{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathfrak{E}\mathfrak{H}].$$

Ако уочимо равно поларизоване таласе (осцилације трансверзалне) овај вектор ће имати правац нормале на површини таласа. За талас

дат обрасцима (28) § 31.1, а који се распростире у вакууму ($\varepsilon = \mu = 1$, $\sigma = 0$), биће модуо овог вектора

$$S = \frac{ca^2}{4\pi} \cos^2 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) .$$

У овом случају биће у обрасцу (24′) § 29.1, због $\sigma = 0$, и $A = 0$, а зато је

$$-\int_{\Phi} \mathfrak{S}\, d\mathfrak{f} = \frac{\partial W_{em}}{\partial t} . \tag{18}$$

тј. промена енергије у некој запремини једнака је протицању Појнтингова вектора у унутрашњост. Према томе овај вектор претставља ону енергију која се распростире са светлосним зрацима.

Ако сад уочимо равно поларизовани сферни талас, решење (17) § 31 таласне једначине за вектор $\mathfrak{E}$ и одговарајуће решење за вектор $\mathfrak{H}$ према једначини (18) § 31, видимо да амплитуда сваког од њих опада када растојање од центра таласа расте. Вектор $\mathfrak{S}$ који је једнак векторском производу (17) имаће модуо који је обрнуто пропорционалан квадрату растојања r. На овај начин постаје јасан познати став из Оптике, да се интензитет светлости која иде од тачкастог извора мења обрнуто пропорционално квадрату растојања од извора.

При распростирању светлости у материјалној средини чија специфична проводљивост није једнака нули важи, наравно, потпуна једначина (24′) § 29.1 место (18). С друге стране, у § 31.2 видели смо да се електромагнетски таласи апсорбују у полупроводницима или проводницима. Дакле извесни део енергије коју носе светлосни таласи ослобађа се у полупроводницима и претвара се у топлоту.

Међутим извесни закључци које смо добили за електромагнетске таласе нису у складу са одговарајућим експериментима са светлошћу. На пр., према теорији § 31 — сви изолатори треба да буду прозирни, сви проводници треба да апсорбују светлост. Међутим, постоје изолатори (гума) који не пропуштају светлост и, обрнуто, постоје прозирни проводници. Затим експерименти показују да за прозирне супстанце индекси преламања зависе од таласне дужине — први расту, када ове опадају. Ову чињеницу, као и друге већ поменуте чињенице, електромагнетска теорија светлости није у стању да објасни без нових претпоставака. Једна од ових је претпоставка о дискретној структури материје.

Но за појаве одбијања и преламања, као и тоталног одбијања дошли смо до резултата који потпуно задовољавају. Исто тако електромагнетска теорија светлости у стању је да објасни и појаву дифракције, но на овој се ипак нећемо овде заустављати, јер су та разлагања скопчана са извођењем многих компликованих образаца*).

*) види на пр. W. König-ов чланак у Hdb. der Physik B. XX. стр. 173—183.

Овде ћемо додирнути још једну појаву за чије откриће дугујемо електромагнетској теорији светлости, наиме, притисак светлости. Још је Максвел закључио да светлост која пада на неко тело (материјално), ако је ово одбија или апсорбује, мора да врши притисак. Овај се притисак изводио теориским путем на разне начине, а Љебедевљеви, затим E. Nichols-ови и G. Hull-ови и других експерименти утврдили су да овај притисак, ма да изванредно мали, постоји. Ми ћемо га извести у идућој глави на основи теорије електрона.

§ 36.1 Електромагнетски таласи у покретним срединама. Низ светлосних појава стоји у непосредној вези са питањем, како се распростиру електромагнетски таласи у покретним материјалним срединама. Доиста, сматрајући да је етар носилац електромагнетских и светлосних таласа можемо навести три претпоставке: 1) да етар потпуно мирује, што значи, ако се неко материјално тело креће, и етар се у сваком тренутку налази и у оном делу простора који заузима тело, кретање овога никако не утиче на делове етра; 2) да покретно материјално тело делимично носи са собом и етар; 3) да и најмање материјално тело носи са собом потпуно и етар који се налази у истој запремини.

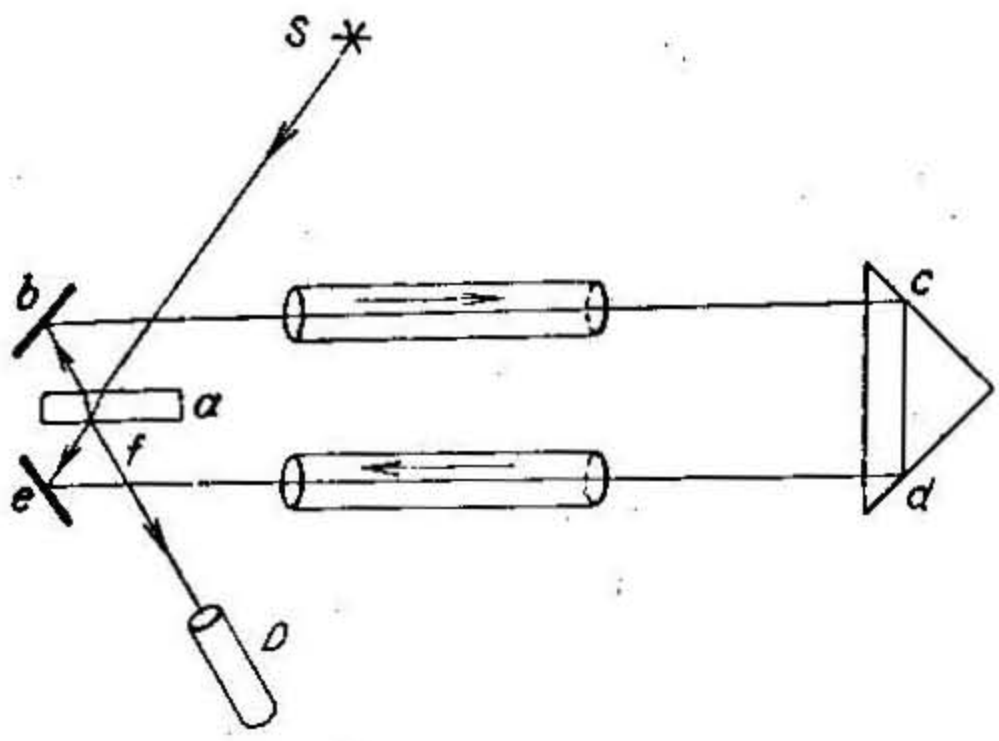
Свакако је за ово питање везано и друго: питање о једној од основних особина етра, наиме, да ли га треба сматрати као нестишљиву или стишљиву средину. У теоријама светлости заступљена су сва три гледишта изражена у горњим претпоставкама. Максвелова теорија, коју су разрађивали Херц, Лоренц и други, допринела је објашњењу многих појава које се односе на тела која мирују и, на крају, Лоренц је разрадио теорију електрона (§ 39.2) на основи ове претставе етра као средине која мирује у апсолутном простору. Друго гледиште заступљено је у Френеловој теорији. Према њој, ако тело има индекс преламања n, етар ће у овом делу простора имати згушњавање у размери $n^2:1$. Тело које се креће повлачи делимично овај етар, тако да се „центар инерције“ етра помера брзином која је део брзине тела. (Ако је друга v, прва ће бити $v\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$). Што се тиче етра ван тела, према Френелу он мирује, док према Стоксу настаје струјање ван тела, слично струјању течности, за које постоји потенцијал брзина. Најзад, последње гледиште — да је етар у истој запремини са телом потпуно за њ везан, имамо у Херцовој теорији.

Које би се од ових гледишта могло сматрати за тачно, покушавали су да реше на основи експеримената. Зато ћемо се овде упознати летимично са резултатима најважнијих од њих. Поред ових долазе у обзир и друге појаве које досада нисмо помињали, као аберација светлости и Доплеров ефект.

Једну групу сачињавају експерименти у којима се проучава рас-

простирање светлости у покретним срединама, то су експерименти: Fizeau-ов, Michelson-ов и Sagnac-ов. Другој групи припадају експерименти из Електродинамике који показују утицај покретних средина, одн. извора на посматрања.

а) *Физоов експеримент*. Зраци који иду од извора светлости S падају на стаклену плочицу (сл. 37). Како је ова упола посребрена, то се они раздвајају и даље иду као два снопа, $abcde$ и $aedcb$, који се поново сједињују у f. Ово су такође кохерентни зраци који у дурбину D дају интерференцијалне пруге. На своме путу светлосни зраци пролазе кроз цеви у којима тече вода, и то за један од зракова у његову смеру, за други у супротном. Ако се светлост распростире у покретној средини (у води) другом брзином (α) него ли када она мирује, онда би за први зрак наступило повећање брзине у унутрашњости цеви, док би за други дошло до успоравања.



Сл. 37

Означимо са α' и α'' те брзине светлости. Ако је n индекс преламања воде, c брзина светлости у вакууму, α^0 брзина светлости у води, када ова мирује, биће, због образаца (58) и (59) § 32.1, где треба сменити α са c, а α_2 са α^0,

$$\alpha^0 = \frac{c}{n} \,. \tag{19}$$

Брзине α' и α'' разликују се врло мало од α^0, због малих вредности брзине воде (v), и зато можемо ставити

$$\alpha' = \frac{c}{n} + \kappa v \,, \qquad \alpha'' = \frac{c}{n} - \kappa v \,, \tag{20}$$

означавајући са κ константни коефицијент. Ако је l дужина једне цеви, то ће други зрак задоцнити према првом за

$$\Delta t = \frac{2l}{\alpha''} - \frac{2l}{\alpha'} \,.$$

Ако се ставе вредности α' и α'', добива се

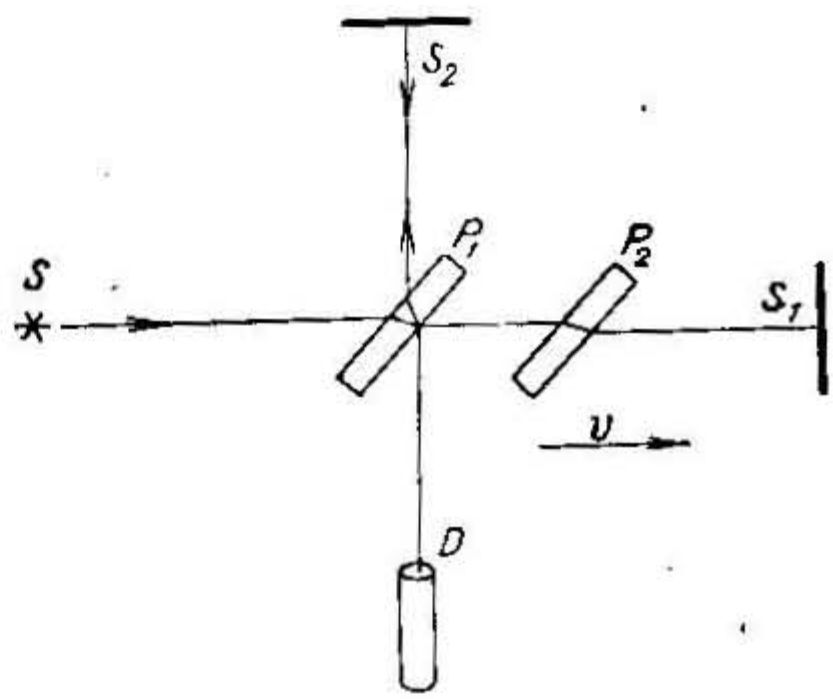
$$\Delta t = \frac{4\kappa l n^2 v}{c^2}\left(1 - n^2\kappa^2\frac{v^2}{c^2}\right)^{-1} \,. \tag{21}$$

Померање интерференцијалних пруга које одговара овом задоцњењу може се измерити, па се помоћу њега може израчунати вредност коефицијента κ. Овај експеримент изводили су и Michelson и Morley, Земан,

а са чврстим телима место течности Zeeman и Snethlage (1920 г.). Вредности за k које су они добивали не слажу се са наведеном вредношћу: $\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, према Френелову гледишту, а ближе су оној која се јавља у Лоренцовој теорији електрона.

Овај дакле резултат Физоова експеримента иде више у прилог гледишту да етар потпуно мирује (односно да у њему може да постоји само треперење).

в) *Мајкелсонов експеримент*. Претпоставка да је етар средина која потпуно мирује у простору одржавала је наду да се може наћи апсолутно кретање (према етру) посматрача или извора светлости. Још је Максвел дао идеју за експеримент чије би извођење имало за циљ да ово покаже. Мајкелсон га је извео на начин који је приказан на сл. 38. Светлосни зраци који иду од извора S у планпаралелној стакленој плочици P_1, која је упола посребрена, растављају се у два снопа. Први иде до огледала S_1, враћа се до P_1 и одбија се у дурбин D. Други сноп иде у правцу огледала S_2 и, после одбијања, стиже такође у D. Плочица P_2 ставља се зато, да би сваки од снопова кохерентних зракова који интерферирају у D прелазио исти број пута кроз стакло. Дужина $P_1S_1 = P_1S_2 = l$. Овај апарат преноси се заједно са Земљом. Дакле, ако се узме у обзир само брзина Земље при обилажењу око Сунца, брзина апарата је $v = 30\frac{\text{km}}{\text{sec}}$. Два поменута снопа светлосних зракова пролазе различите путање. Узмимо да је раван слике хоризонтална (апарат је постављен на плочи која плива на живи) и да се креће у правцу P_1S_1. Ако етар мирује, а c је брзина светлости у њему, у односу на апарат зрак P_1S_1 има релативну брзину $c-v$ а зрак S_1P_1 брзину: $c+v$. Време за које ће први сноп превалити пут $P_1S_1P_1$ биће



Сл. 38

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2} + \ldots\right).$$

Као што је лако видети, брзина којом ће други сноп превалити пут P_1S_2 или S_2P_1, управни на правцу кретања Земље, биће $\sqrt{c^2-v^2}$. Зато путу $P_1S_2P_1$ одговара интервал времена

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2-v^2}} = \frac{2l}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \ldots\right).$$

Према томе, са тачношћу до другог степена мале величине

(22) $$\beta = \frac{v}{c},$$

разлика у времену, тј. закашњење једног снопа према другом биће

(23) $$\Delta t = t_1 - t_2 = \frac{l}{c}\beta^2 .$$

Ако се овај број подели периодом одређеног таласа (зрака одређене боје који се у апарату пушта) добиће се број трептаја N. Из образаца (15) § 31 и (5) имамо да је $\alpha = c$ у вакууму (приближно у ваздуху) и $T = \frac{\lambda}{c}$. Дакле је

(24) $$N = \frac{\Delta t}{T} = \frac{c}{\lambda}\Delta t = \frac{l}{\lambda}\beta^2$$

$\left(\text{за жути зрак је } N \approx \frac{1}{2}\right)$.

Ако обрнемо апарат за 90°, зраци P_1S_1 и P_1S_2 мењају улоге и израз (23) за Δt мења знак. У дурбину D требало би због тога да се посматра померање интерференцијалних пруга, које би одговарало закашњењу једног снопа зракова према другом за

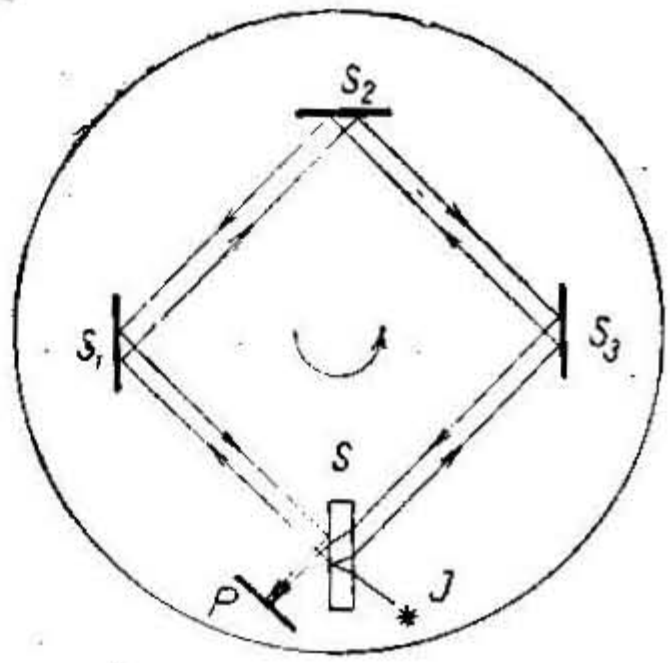
(25) $$\frac{2l}{\lambda}\beta^2 .$$

Резултати првог Мајкелсонова покушаја (1881 г.), A. A. Michelson - E. W. Morley-ева (1887) експеримента, Morley - D. C. Miller-ова (1904, 1905) испали су негативни, тј. очекивано померање интерференцијалних пруга није се могло запазити, па, према томе, није се могла одредити ни брзина кретања Земље према етру. Тачније речено, резултат последњег од поменутих експеримената могао се протумачити тако да релативна брзина Земље према етру није већа од $3^1/_2$ km/sec. Милер затим, на основи експеримената вршених 1921—26 г., повећао је ову границу до $9\,\frac{\text{km}}{\text{sec}}$, но ипак је она и сувише мала, јер само при обилажењу око Сунца Земља има брзину од 30 km/sec. С друге стране, ове Милерове бројне податке нису потврдила мерења која су изводила друга лица. Шта више, R. Tomaschek (1924) је експериментално утврдио да не игра улогу, да ли се при томе узима светлост извора на Земљи или светлост звезда.

Дакле резултат Мајкелсонова експеримента испао је неповољан за гледиште по коме би етар био средина која мирује у апсолутном простору.

c) *Сањаков експеримент.* Док је Мајкелсонов експеримент требало

да покаже померање Земље према етру при транслаторном кретању (јер за кратко време за које се експеримент изводи може се кретање Земље сматрати за транслаторно), помоћу другог експеримента, Сањакова (1913), може се узети у обзир ротационо кретање. Да би се ово постигло, узмимо да су на покретној плочи постављена три огледала (S_1, S_2, S_3) и планпаралелна плоча S — види сл. 39*); сноп зракова који иде од извора J раздваја се у плочи S тако да један од снопова иде даље у смеру супротном кретању казаљке на сату $S S_3 S_2 S_1 SP$, а други у смеру казаљке $S S_1 S_2 S_3 SP$. На фотографској плочи P долази до интерференције и интерференцијалне пруге могу да се сниме: 1) када цео апарат мирује, 2) и 3) када се он обрће у једном или другом смеру.



Сл. 39

Ако се претпостави да етар мирује, тј. да се у њему *само расиростиру* светлосни таласи, како један од снопова иде у смеру обртања, а други у супротном мора доћи до померања интерференцијалних пруга у односу на онај положај у коме апарат мирује. Елементарна теорија ове појаве показује да ово померање зависи од количника $\frac{v}{c}$ и, ако се са ω означи тренутна угловна брзина обртања апарата, са λ таласна дужина зракова, са F површина полигона који ће ограничити зраци, оно ће износити

$$\frac{4\omega F}{c\lambda}. \tag{26}$$

Ово је померање могло бити запажено у многим случајевима, у којима се експеримент изводио са различитим угловним брзинама и димензијама апарата.

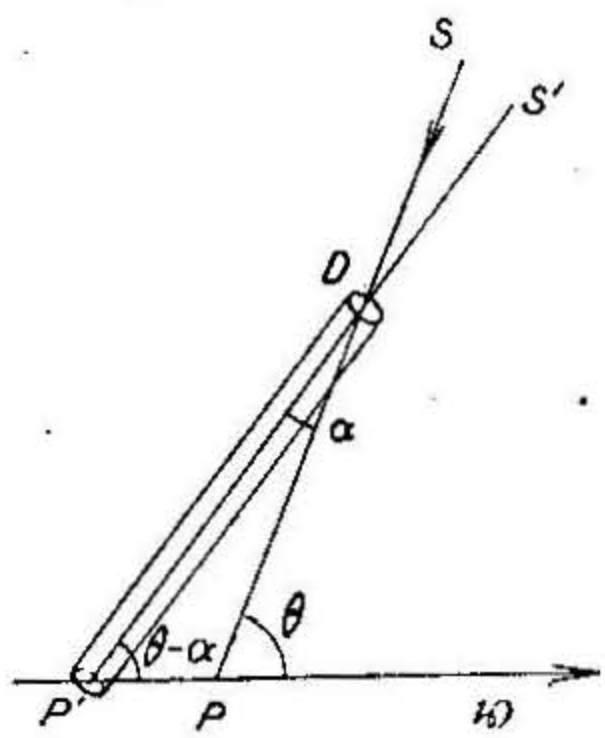
Сличну Сањаковој идеји налазимо у основи Мајкелсон - Gale-ова експеримента (1925 г.), а потиче од Мајкелсона (1904 г.). Као систем који се обрће према етру узима се сама Земља, а због њеног спорог обртања, тј. мале вредности ω, повећава се површина F (осим тога онда у израз (26) улази и синус географске ширине места посматрања). Посматрања су и овога пута дала померања интерференцијалних пруга која се слажу са теориским.

Дакле, резултати ових експеримената иду у прилог гледишту да етар мирује, тачније, да постоји кретање Земље према етру. Осим тога Мајкелсон - Галеов експеримент одлучно говори против претпоставке да би етар могао да се креће заједно са Земљом (у њеној запремини), јер

*) Ово је упрошћена схема експеримента — Сањак је узимао четири огледала.

онда не би уопште наступило померање интерференцијалних пруга. Према томе отпада и могућност да се овом претпоставком објасни резултат првог Мајкелсонова експеримента.

d) *Аберација.* У појаве које играју улогу при решавању питања о природи светлости убраја се и аберација. Она се састоји у привидном померању звезда које долази услед кретања посматрача и распростирања светлости коначном брзином (у вакууму: c). Нека звезда шаље у извесном тренутку светлост у правцу SP посматрачу који се креће брзином v. Нека буде θ угао који образују ова два правца. Како је потребно извесно време да светлост у дурбину D стигне од објектива до окулара, мора посматрач нагнути дурбин у смеру кретања. У троуглу DPP', очевидно, стране PP' и PD треба да буду пропорционалне брзинама v и c и звезда се види у правцу $P'S'$. Дакле имамо (види сл. 40)



Сл. 40

$$\sin\alpha : \sin(\theta - \alpha) = v : c \ ,$$

одакле добивамо

$$v \sin\theta \operatorname{ctg}\alpha - v\cos\theta = c$$

и, према томе,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v\sin\theta}{c + v\cos\theta} \ .$$

Ако се занемаре чланови са $\frac{v}{c}$ са степенима вишим од првог, биће

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c}\sin\theta \ , \tag{27}$$

и ово је основни образац. За $\theta = 90^0$ добивамо величину

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg}\frac{v}{c} = 20'',47 \tag{28}$$

која се зове *константа аберације.* Услед аберације, коју је утврдио Bradley (1726) и која се зове годишња, описује свака звезда на небеском своду елипсу, јер се Земља креће, у току године по „затвореној" путањи. Појава аберације може се лако објаснити емисионом теоријом светлости, а и на основу претставе о етру који се делимично креће заједно са Земљом (Френелово гледиште). Аберација не би наступила да Земља потпуно повлачи етар, тј. не иде у прилог Херцову гледишту. Airy је нашао да се иста вредност аберационе константе добива и када се узме дурбин напуњен водом. Дакле аберација не зависи од индекса преламања средине у дурбину.

е) *Доплеров ефект*. Померање спектралних линија које се посматра кад се извор светлости и посматрач крећу један према другом претставља једну од најважнијих појава, јер се на њу ослањају многи закључци не само у Теориској физици него у и Астрофизици. Доплеров ефект који важи у Акустици, где се он испољава у повишењу тона звучног извора, када се овај приближује посматрачу, а снижењу у супротном случају, може да се објасни на исти начин као и у Оптици. Само, у Оптици полазимо, наравно, од таласа који се распростиру у етру.

Претпоставимо, једноставности ради, да је талас равански и разликујмо два случаја: 1) кад се посматрач креће и 2) кад посматрач мирује. Нека усто буде талас линиски поларизован, тако да је дат изразом (28) § 31.1, ако је x-оса управљена у правцу простирања таласа

$$E_y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right),$$

а $\lambda = cT$. Нека се посматрач креће у истом смеру, тј. узимамо да се удаљује од „извора" брзином v. Дакле његов положај је увек одређен вредношћу $x = vt$ (ако је за $t = 0$ било и $x = 0$). Вредност пројекције E_y коју ће посматрач констатовати ма у ком тренутку биће, према томе,

$$E_y = a \cos 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{vt}{cT}\right) = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(1 - \frac{v}{c}\right) t \ .$$

Дакле фреквенција коју ће посматрати биће

$$\nu_1 = \frac{1}{T}\left(1 - \frac{v}{c}\right) = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right), \tag{29}$$

ако је ν она фреквенција коју би посматрач нашао када би и он и „извор" светлости мировали.

У другом случају — када се извор светлости креће, а посматрач мирује, претпоставићемо да ово не утиче на брзину распростирања светлости: $c = \text{const}$. Нека се сада „извор" удаљује од посматрача брзином v, а растојање између њих у почетном тренутку $t = 0$ нека буде једнако x. Талас који у овом тренутку шаље извор стићи ће до посматрача у тренутку $t_1 = \frac{x}{c}$. После јединице времена извор ће се налазити већ на растојању $x + v$ и шаље талас који ће посматрач примити у тренутку $t_2 = 1 + \frac{x+v}{c}$. Дакле таласи које извор шаље у току јединице времена стижу посматрачу у интервалу времена

$$t_2 - t_1 = 1 + \frac{v}{c}$$

и, према томе, он ће констатовати фреквенцију

$$\nu_2 = \nu\left(1+\frac{v}{c}\right)^{-1} = \nu\left(1-\frac{v}{c}+\ldots\right). \tag{30}$$

Вредности фреквенција (29) и (30) поклапају се са тачношћу само до првог степена количника $\frac{v}{c}$. Из ових образаца види се да се, код Доплерова ефекта, спектралне линије померају ка црвеном крају спектра када растојање између посматрача и извора светлости расте (ν се смањује, периода, а, према томе, и таласна дужина онда расту), а ка љубичастом, када се они приближавају један другом.

Зауставимо се на другој групи експеримената, наиме на Rowland-ову, Röntgen-ову и Eichenwald-ову, Trouton-ову и Noble-ову експерименту који су утицали на схватање електромагнетских појава и играли улогу при прецизирању наших погледа на природу светлости.

α) *Роуландов експеримент* (1876). Поново га је извео А. Ајхенвалд на овај начин. На плочици од ебонита налази се трака од станијола која је прекинута на једном месту. Ова се плочица може обртати. Ако се облога од станијола оптерети електрицитетом, и плочица почне да обрће, онда ће астатичка игла у њеној близини окретати за извесан угао. Дакле, електрична оптерећења везана за неко материјално тело, које се помера, стварају у околини магнетско поље слично случају кондукторске струје. Ако се крајеви траке на месту прекида споје са батеријом, па се пусти струја док цео апарат мирује, може се чак наћи она кондукторска струја која има исто магнетско дејство као и обртање плоче (са одређеним бројем обрта). Назовемо ли *конвекционом струјом* покретно оптерећење које се помера заједно са материјалним телом, видимо да је она, у погледу стварања магнетског поља, еквивалентна кондукторској.

β) *Рендгенови и Ајхенвалдови експерименти* са плочицом од изолатора између плоча равног кондензатора још више потврђују ову еквивалентност. На странама плочице појављују се супротна оптерећења услед поларизације диелектрика, и, ако се она обрће, две конвекционе струје које се на овај начин стварају одговарају кондукторским, тако да ће изазвати магнетска поља. Овде се могу стварати разна магнетска поља, ако се врше различите комбинације — обрће се једна, или више плоча. Од нарочитог је интереса случај када се обрћу обе плоче кондензатора са диелектриком заједно. Према Херцову гледишту да се етар креће заједно са телима, у овом систему не би требало да се ствара магнетско поље. Међутим оно се ипак посматра и ова је чињеница у противречности са Херцовом теоријом.

γ) *Траутон-Ноблов експеримент.* Док се Мајкелсоновим експериментом тежило да се нађе утицај на светлосне појаве померања Земље

у односу на етар (уз претпоставку да овај мирује), други експеримент, који су први пут извели Траутон и Нобл, требало је да открије сличан утицај у области Електродинамике. Да би се ово постигло узима се равни кондензатор који виси тако, да се може лако обртати око осе паралелне плочама. Означимо са ϑ угао који образује нормала на плочама кондензатора са његовом брзином у односу на етар (тј. брзином Земље чији је модуо v). Нека буду $+e$ и $-e$ оптерећења на плочама и E_0 електростатककча енергија кондензатора. Онда би при релативном померању апарата у односу на етар дејствовао на плоче кондензатора момент који би тежио да га доведе у положај у коме су плоче паралелне правцу померања у односу на етар. Ако се узме да је покретно оптерећење еквивалентно струји (конвекциона струја), па се на основу Био - Саварова закона израчуна овај момент, добива се за његову вредност

$$E_0 \frac{v^2}{c^2} \sin 2\vartheta \ ,$$

што би се при савременим осетљивим апаратима свакако могло констатовати*). Међутим ни први покушаји, ни усавршени начин извођења који је дао Томашек нису довели до позитивног резултата — кондензатор се није окретао онако како захтева теорија. Према томе се сматра да и овај експеримент стоји у противречности са претпоставком да етар мирује у апсолутном простору. Наравно, теорија овог експеримента зависи и од других претпоставака (теорије електрона).

У овом параграфу наведени експериментални подаци стварали су за теорију светлости нове тешкоће поред оних на које је она раније већ наилазила. Ове тешкоће су се осећале нарочито при даљем развитку електромагнетске теорије, јер резултати појединих експеримената стоје у опреци са извесним основним претпоставкама.

Пре свега је искључена могућност да се усвоји Херцова теорија, према којој је етар потпуно везан за материју на оним местима где ова постоји и да се преноси заједно с њом. Овом хипотезом могли бисмо да објаснимо Мајкелсон - Морлејев, Траутон - Ноблов експеримент, но она се не може довести у склад са Физоовим и Ајхенвалдовим експериментима.

Друга претпоставка коју можемо учинити о етру у којем се распростиру електромагнетски таласи биће Стоксова, коју су разрадили Планк и Лоренц. Према њој, на површини Земље етар је „потпуно" везан за материју, а са све већим растојањем од ње наступа и све веће њено померање према етру. Дакле, у лабораторијумима не може се ни запазити релативно померање према етру, и резултат Мајкелсонова

*) Теорију овог експеримента види код M. v. Laue, Die Relativitätstheorie Bd. 1. 1921.

експеримента постаје јасан. Али на већим надморским висинама, као што је показао рачун који је извео Лоренц, оно се већ може констатовати иако не достиже ону бројну вредност коју даје Милеров експеримент. Кретање етра (ван материје) слично кретању течности не стоји у противречности (чак ако се етру припишу особине стишљиве течности) са Мајкелсоновим и Траутоновим експериментима, али није у складу са бројним резултатима Мајкелсон-Галеова експеримента.

Изгледа онда као последња могућност да се претпостави да етар мирује (није везан за материју). Онда се негативни резултат Мајкелсонова експеримента може објаснити само помоћу нове хипотезе. И овакву хипотезу увели су Лоренц и Fitzgerald, претпостављајући да тела која се крећу у односу на етар брзином v бивају спљоштена у правцу померања. Ако је, наиме, l дужина тела у стању мира, она ће се претворити у

$$l' = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \tag{31}$$

када лежи у правцу померања, а остаје непромењена када стоји управно на том правцу.

Зато у изразу за t_1, који претходи обрасцу (23) и који представља време за које ће први сноп светлости у Мајкелсонову експерименту превалити пут $P_1 S_1 P_1$, треба ставити l' место l, па ће бити

$$t_1' = \frac{2l'c}{c^2 - v^2} = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - v^2}} = t_2$$

(због обр. 31). Дакле, не постоји разлика Δt (23) и не морају интерференцијалне пруге да се померају.

Лоренцова претпоставка о контракцији тела има очевидни недостатак: образац (31) бирамо унапред (без образложења) тако да испадне познати резултат Мајкелсонова експеримента.

Електродинамика може, као што је показао W. Ritz, да се преради на један нови начин, како би се узела у обзир нова могућност, наиме да кретање извора светлости утиче на њено распростирање. Онда се ова теорија приближује емисионој па се зове балистичка. Према њој се електромагнетски таласи распростиру тако да се брзина њихова сабира векторски са брзином извора. Сматра се обично да Рицова теорија стоји у противречности са „чињеницом" коју је „доказао" W. de Sitter, са принципом константности брзине светлости о којем ће бити речи мало даље. Не улазећи овде дубље у ово питање напоменућемо само, да овакви докази немају уствари довољно чврсте логичне основе, одн. строгости.

Како су се испољавале све нове и новије тешкоће за довде поменуте теорије, појавила се тежња да се нађе нов пут за излаз из стања у које су их довели противречни резултати појединих експеримената.

Овај нови правац дала је т.зв. Теорија релативитета. Иако је она доцније обухватила и механичке појаве ми ћемо се у овој глави укратко упознати са њеним основним идејама, јер она узима за полазне светлосне, одн. електромагнетске појаве. Осим тога и Теорија релативитета спада у Теорије поља, а у идућој глави ћемо проучавати последице атомске хипотезе.

§ 36.2 Основне идеје Теорије релативитета. Начини схватања механичких и електромагнетских појава разликују се у једном врло важном питању. У основама Механике и Електродинамике налазили су се досада појмови апсолутног простора и апсолутног времена (§§ 1—2.1). Једначине Механике имају такав облик да за њих важи Галилејев принцип релативитета, тј. оне важе за триједре оса које мирују у апсолутном простору или се померају једнако и транслаторно. У Механици, оној коју смо досада формулисали, имали смо силе које дејствују између тела са даљине и нисмо се заустављали на питању, како се ово дејство преноси, тј. нисмо узимали у обзир евентуалну улогу средине. Чињеница да је бескрајан низ триједара оса који се померају један у односу на други потпуно еквивалентан оном који мирује у апсолутном простору показује да се у односу на њ транслаторно и једнако кретање не може посматрати. Међутим у Електромагнетизму и, затим, у Теорији светлости прву улогу играо је медијум — етар у којем се ове појаве одигравају и основне једначине ових теорија важе не ма за какве координатне системе но само за онај у односу на који мирује етар. Зато се и очекивало да ће се моћи одредити помоћу светлосних, одн. електромагнетских појава померање у односу на њ и, дакле, у односу на апсолутни простор. Но ове се наде нису испуниле и A. Einstein предлаже (1905) да се физичке теорије измене у том смислу што ће се увести ново формулисање основних закона, наиме, да се оперише само са релативним просторима и временима, тј. да се закони Електродинамике формулишу тако, да важе за све т.зв. „инерцијалне“ координатне системе. Овај последњи појам уводи се на овај начин: ако за неки триједар оса важе закони Механике, онда се он, као и сваки други који се у односу на њ помера транслаторно и једнако, зове *инерцијални* систем.

Једначина (1) § 2.1

$$\mathfrak{F} = m\mathfrak{a} \ , \tag{32}$$

основна у Механици, којом се одређује кретање материјалне тачке, имаће исти облик, ако се вектор положаја $\mathfrak{r}$ ове тачке, у односу на један од инерцијалних система, замени другим, $\mathfrak{r}'$, који је везан за први условом

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}' + \mathfrak{v}t \ , \tag{33}$$

где је $\mathfrak{v}$ константни вектор, а t — време. Доиста,

$$\mathfrak{a} = \ddot{\mathfrak{r}} = \ddot{\mathfrak{r}}' ,$$

а сила $\mathfrak{F}$ од ових вектора не зависи. Вектор

$$\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}} - \dot{\mathfrak{r}}' \tag{34}$$

биће константна брзина којом се други инерцијални систем помера у односу на први. Овде смо наравно узели у обзир апсолутно време, тј. претпоставили смо да се за све инерцијалне системе може узети исто време. Горњи закључак можемо изразити другим речима овако: једначина (32) не мења облик (има инваријантни облик) при трансформацији (33). Ако, једноставности ради, узмемо x-осу у правцу померања другог инерцијалног система, а исто тако и x'-осу овог система, а оставимо да осе y' и z' покретног триједра $O'x'y'z'$ буду паралелне y и z-осама триједра $Oxyz$, због (33) имаћемо прве три једначине

$$x = x' + vt , \qquad y = y' , \qquad z = z' , \qquad t = t' , \tag{33'}$$

последња изражава да је време у инерцијалним системима исто. Ова трансформација координата и времена зове се Галилејева.

Уочимо другу појаву; распростирање у вакууму сферног таласа (светлосног) из координатног почетка O. Ако у обрасцу (16) § 31 ставимо $\alpha = c$ и интегралимо добићемо $ct = r$, под условом да је у почетном тренутку $t = 0$ и $r = 0$. Дигнемо ли на квадрат ову једначину имаћемо услов

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = 0 \tag{35}$$

који ће важити за сферни талас (светлосни). Претпоставимо сад да посматрач који је везан за систем $O'x'y'z'$ има, тј. мери, своје време t' Кад би се сферни талас распростирао у овом систему, за њ би важио услов сличан (35). Ако се прими т.зв. *принцип константности брзине светлости*, наиме, да без обзира на стање мира и кретања извора брзина светлости у вакууму коју извор шаље има универзалну вредност c [$= 2{,}998_5 . 10^{10}$ cm/sec], и ако се узме да из извора пође светлост у оном тренутку када се координатни почеци поклапају, биће у односу на сваки систем талас сферни, па ћемо ставити

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 \equiv x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2t'^2 = 0 . \tag{36}$$

Овај закључак намеће нам резултат Мајкелсонова експеримента, према којем је брзина светлости на покретној Земљи у свима правцима иста, па се овај закључак преноси и на све инерцијалне системе.

На основу услова (36) треба да одредимо ону трансформацију координата и времена која ће бити с њим у складу. Уочимо поново

најпростији случај, кад осе y' и z' остају паралелне осама y и z, тако да се, дакле, тачка O' помера дуж осе x. Услов (36) ће се упростити, јер добива облик

$$x^2 - c^2 t^2 \equiv x'^2 - c^2 t'^2 \tag{37}$$

Ставимо

$$\begin{aligned} \kappa x' &= x - vt \ , \\ \kappa x &= x' + vt' \ , \end{aligned} \tag{38}$$

и вредности x' и t':

$$t' = \frac{t}{\kappa} + \frac{x}{\kappa v}(\kappa^2 - 1) \tag{39}$$

које следују из ових услова заменимо у идентитету (37).

Добићемо

$$x^2 - c^2 t^2 - \frac{1}{\kappa^2}(x^2 - 2xvt + v^2 t^2) + \frac{c^2}{\kappa^2}\left[t^2 + \frac{2tx}{v}(\kappa^2 - 1) + \frac{x^2}{v^2}(\kappa^2 - 1)^2\right] \equiv 0 \ .$$

Ако изједначимо са нулом коефицијент код t^2 биће

$$-c^2 - \frac{v^2}{\kappa^2} + \frac{c^2}{\kappa^2} = 0$$

или

$$\kappa^2 = 1 - \frac{v^2}{c^2} \ , \quad \text{тј.} \quad \kappa = \sqrt{1 - \beta^2} \tag{40}$$

(в. обр. 22). Сада је лако видети да са овом вредношћу κ ишчезавају и коефицијенти код x^2 и tx, тј. да ће наш услов бити задовољен. Из једначина (38—40) следује

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ \Big| \ x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ \Big| \ y' = y \\ t' &= \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ \Big| \ t = \frac{t' + \frac{v}{c^2}x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \ \Big| \ z' = z \end{aligned} \tag{41}$$

и ова т.зв. *Лоренцова трансформација* оставља израз (35), одн. (37) инваријантан (Лоренцова трансформација за једну димензију; $y = y'$, $z = z'$). Галилејева трансформација, тј. обрасци (33′), биће гранични случај ове, када $c \to \infty$, као што се непосредно види из друге групе једначина (41).

У претходним разлагањима искористили смо две претпоставке. Прва је т.зв. принцип релативитета који је M. Laue формулисао на овај начин: „Из скупа појава у природи може се са повишавањем апроксимације одређивати све тачније такав систем референције (тј. координатне осе x, y, z; време t), за који ће закони природе важити у од-

ређеном, математички једноставном облику. Али овај систем није помоћу појава једнозначно одређен. Постоји троструко бесконачна множина таквих, еквивалентних система који се померају један у односу на други константним брзинама". Друга је претпоставка наведени принцип константности брзине светлости.

Ове две претпоставке неће бити у противречности, прво, ако се Електродинамика ослободи претставе о етру, и друго, ако се служимо само појмовима о релативним просторима и временима. Онда прелаз од једног система референције ка другом врши се, као што смо мало пре видели, помоћу Лоренцове трансформације. Да видимо само још зашто би ова два принципа била у противречности ако останемо при старим схватањима.

Нека буде Σ један инерцијални систем, који сматрамо да се налази у миру, а S неки извор светлости који се једнако помера у односу на овај систем брзином $\mathfrak{v}$. Нека се други инерцијални систем Σ' са координатним почетком у S помера транслаторно у односу на први. Ако важи принцип релативитета, онда ће се у систему Σ' светлост распростирати слично случају извора непокретног у Σ, тј. у свима правцима константном брзином у односу на Σ'. Означимо сад вектор-брзину са $\mathfrak{c}$. Онда посматрачи који мирују у Σ треба да констатују да се у односу на њих, у правцу померања Σ', светлост распростире брзином $\mathfrak{c}+\mathfrak{v}$, а у супротном правцу брзином $\mathfrak{c}-\mathfrak{v}$. Дакле у овом систему не важи други принцип. Међутим ови су принципи доведени у склад у обрасцу (36) и то — учињеним претпоставкама.

Део Теорије релативитета који се оснива на овим принципима зове се *Специјална теорија релативитета*. У њој се, као што се види, принцип релативитета односи само на једнака праволиниска кретања.

У низу основних питања која се проучавају у овој теорији имамо и питање истовремености догађаја и синхронизације часовника. Ако се два догађаја дешавају у разним местима, A и B, онда је, при претпоставци да постоји апсолутно време, потпуно јасно шта значи да су они истовремени. Требало би да имамо у A и B два синхронизована часовника да бисмо одредили истовременост. Исти поступак имамо и у другом случају (нема апсолутног времена), само треба да имамо начин да синхронизујемо часовнике A и B. Према Ајнштајну треба усвојити следећи поступак (који се оснива на принципу константности брзине светлости): нека се растојање A и B не мења; у тренутку $t=t_0$, по часовнику A, шаље се светлост из A у B; огледало у B је одбија ка A где светлост стиже у тренутку $t_0+\tau$. Онда часовник у B треба навити тако, да показује $t=t_0+\frac{\tau}{2}$ у тренутку када тамо стиже светлост.

Сад, пошто смо формулисали основне идеје Специјалне теорије релативитета, можемо да видимо какви се закључци могу изводити на

основи Лоренцове трансформације која даје везу између посматрања у системима референције Σ и Σ'.

Посматрајмо два догађаја који се у систему Σ сматрају за истовремене ($t_1 = t_2$) а дешавају се на разним местима $x_1 \neq x_2$. Онда ће се она запазити у систему Σ' у тренуцима (в. обр. 41)

$$t_1' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad t_2' = \frac{t_1 - \frac{v}{c^2}x_2}{\sqrt{1-\beta^2}}, \tag{42}$$

тј. у овом систему они се не могу сматрати за истовремене.

Истовременост, дакле, је релативан појам.

Ако је $t_2 > t_1$, имаћемо

$$t_2' - t_1' = \frac{t_2 - t_1 - \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{43}$$

Да би у систему Σ' тренуци t_1' и t_2' имали реалне вредности треба да буде $\beta < 1$, тј. $v < c$. Према томе брзина светлости јавља се као горња граница могућних брзина материјалних тела при релативним кретањима. Из обрасца (43) видимо да ће бити $t_2' - t_1' > 0$, кад је

$$t_2 - t_1 > \frac{x_2 - x_1}{c}, \qquad \text{тј.} \quad c > \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}.$$

Дакле при поменутом услову за могућне брзине, ред којим се могу запазити догађаји остаје исти и у систему Σ'.

Ако узмемо два догађаја на истом месту ($x_1 = x_2$) у тренуцима $t_1 < t_2$, биће, према другом обрасцу (43),

$$(t_2' - t_1)\sqrt{1-\beta^2} = t_2 - t_1, \tag{44}$$

тј. интервал времена у систему Σ' изгледа дужи. Али и обрнуто, ако узмемо у систему Σ' два догађаја на истом месту $x_1' = x_2'$, биће због другог обрасца у средњој групи (41),

$$(t_2 - t_1)\sqrt{1-\beta^2} = t_2' - t_1'. \tag{45}$$

Дужина интервала времена коју ће запазити неки посматрач зависи од брзине померања (релативног) његова система референције.

Испитајмо постоји ли нека веза између мерења исте дужи од стране посматрача у системима Σ и Σ'. Нека буде $l = x_2 - x_1$ отсечак дуж x-осе који, дакле, одређујемо у Σ тако да у одређеном тренутку t уочимо на лењиру, постављеном дуж отсечка, места која одговарају крајевима отсечка. Исти поступак треба применити и у систему Σ', само у тренутку t'. Али ако прочитамо поделе на лењиру у тренуцима

t_1' и t_2' и, даље узмемо $t_1' = t_2' = t'$, времена t_1 и t_2 која им одговарају неће бити једнака. Из једначине (43) добивамо за овај случај

$$t_2 - t_1 = \frac{v}{c^2}(x_2 - x_1) .$$

А из прве једначине (41) следује

$$l' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1 - v(t_2 - t_1)}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{46}$$

Стављајући претходну вредност разлике $t_2 - t_1$, добићемо после скраћивања

$$l' = l\sqrt{1-\beta^2}, \tag{47}$$

тј. образац (31) који чини суштину Лоренц-Фицџералдове хипотезе, по којој покретном посматрачу изгледају дужи у правцу померања скраћене.

Дакле и временски и просторни интервали у правцу померања зависе од брзине кретања посматрачева (у правцу нормалном они се не мењају). Но постоји врста интервала који и према Теорији релативитета остају инваријантни. Ако претпоставимо да се из координатног почетка распростире сферни талас, и да је за време dt прешао растојање dr (dx, dy, dz), одн. за dt' у систему Σ' dr' (dx', dy', dz'), биће према обрасцу (36)

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2\,dt^2 \equiv dx'^2 + dy'^2 + dz'^2 - c^2\,dt'^2 . \tag{48}$$

Овај образац можемо проверити, наравно, и помоћу низа следећих образаца који се добивају диференцирањем образаца (41)

$$dx' = \frac{dx - v\,dt}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad dy' = dy, \quad dz' = dz', \quad dt' = \frac{dt - \frac{v}{c^2}dx}{\sqrt{1-\beta^2}} . \tag{49}$$

Променимо сад ознаке координата и времена стављајући $x = x_1$, $y = x_2$, $z = x_3$ и $ict = x_4$. Простор од четири димензије у којем улогу четврте координате игра време зове се у Теорији релативитета *свет*. Метрику у овом простору одређује израз за линиски елемент ds који је према обрасцу (48) инваријантан и чији је облик

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2 . \tag{50}$$

Деобом прве од једначина (49) са последњом добивамо за вредност брзине тачке у правцу x'-осе, у систему Σ',

$$u' = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx - v\,dt}{dt - \frac{v}{c^2}dx}$$

или, ако поделимо бројитељ и именитељ са dt и ставимо за брзину исте тачке у систему Σ

$$u = \frac{dx}{dt},$$

имаћемо

$$u' = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{51}$$

Одатле је

$$u = \frac{u' + v}{1 + \frac{u'v}{c^2}}. \tag{52}$$

Ове једначине претстављају Ајнштајнову теорему о сабирању брзина која се, очевидно, разликује од оне у класичној Механици, и према којој би било $u = u' + v$.

Образац који смо добили може одмах да послужи за објашњење Физоова експеримента. Узмимо да је вода (течност) у цеви средина за коју је везан покретни систем Σ'. Нека буде n њен индекс преламања. У овом систему светлост може да се распростире на све стране брзином $\frac{c}{n}$, значи у Физоову експерименту у цеви, у којој се течност помера у истом смеру са светлошћу брзином v у односу на непокретни систем Σ, је $u' = \frac{c}{n}$. Брзина светлости у односу на систем Σ биће, због обрасца (52),

$$u = \frac{\frac{c}{n} + v}{1 + \frac{v}{nc}}.$$

Када се именитељ развије у ред по степенима мале величине $\frac{v}{c}$, и чланови вишег реда занемаре, добива се

$$u = \frac{c}{n} + v\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \tag{53}$$

(упореди са почетком § 36.1). На овај начин добили смо Френелов израз за коефицијент k који смо увели у обр. (20).

Како смо мало пре добили образац (47) који даје Лоренцову контракцију са гледишта Теорије релативитета, јасно је да смо у исти мах нашли и објашњење негативног резултата Мајкелсонова експеримента.

Исто тако могу се из основних образаца Теорије релативитета извести обрасци за аберацију (који се поклапају са онима из елементарне теорије ове појаве, ако се занемаре β^2 и виши степени) и за Доплеров ефект. Затим се могу објаснити и резултати Сањакова и других експеримената. Овде се нећемо упуштати у подробније излагање ових објашњења. Али ћемо се задржати на увођењу појма „света" — четвородимензионалног простора.

Још је Лагранж говорио о могућности проучавања Кинематике као геометрије овог „простора" у којем улогу четврте координате игра време. Како израз (50) за квадрат линиског елемента има облик сличан изразу у Еуклидовој геометрији, наш четвородимензионални простор одговара Еуклидовој множини у којој је једна од димензија (x_4) имагинарна. Овде ћемо дати нови смисао Лоренцове трансформације. Услов (36) можемо преписати са новим ознакама, па ћемо имати

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \equiv x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 + x_4'^2 \ , \tag{36'}$$

што значи да се при Лоренцовој трансформацији не мења квадрат модула вектора положаја. Требало би према томе очекивати да овој трансформација одговара обртање координатних оса. Да бисмо ово видели ставимо

$$\begin{aligned} x_4' &= \ \ x_4 \cos\varphi + x_1 \sin\varphi \ , \\ x_1' &= -x_4 \sin\varphi + x_1 \cos\varphi \ , \\ \operatorname{tg}\varphi &= -i\beta \ . \end{aligned} \tag{54}$$

Прве две једначине, као што је познато, одговарају обртању оса $x_1 x_4$ око праве нормалне на њиховој равни; из треће пак следује

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{55}$$

Ставимо ли ове изразе у прве две једначине (54) и узмемо ли у обзир да је $x_4 = ict$, $x_4' = ict'$, добићемо одмах једначине (41). Дакле прелаз од једног система референције на други, који се релативно у односу на први помера, одговара обртању координатних оса у систему координата x_1, x_2, x_3, x_4. Наравно узима се ортогоналан систем референције, као што се види из облика образаца (36), одн. (36'), и у овом простору можемо се служити Теоријом вектора. Само ће у овом случају вектори имати уопште четири компоненте дуж координатних оса. Нека e_i буду јединични вектори ових оса. Услед ортогоналности имамо услове

$$(e_i\, e_i) = 1 \ , \qquad (e_i\, e_j) = 0 \ , \qquad j \neq i \ , \qquad i, j = 1, 2, 3, 4 \ , \tag{56}$$

где поново мале заграде означавају скаларни производ. Ова се врста

производа дефинише као и код три димензије, тј., ако су дати вектори

$$\mathfrak{A} = A_1 \mathfrak{e}_1 + A_2 \mathfrak{e}_2 + A_3 \mathfrak{e}_3 + A_4 \mathfrak{e}_4 \ , \qquad (57)$$
$$\mathfrak{B} = B_1 \mathfrak{e}_1 + B_2 \mathfrak{e}_2 + B_3 \mathfrak{e}_3 + B_4 \mathfrak{e}_4 \ ,$$

биће

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \sum_1^4 A_i B_i \ . \qquad (58)$$

Тензор у простору од четири димензије има уопште 16 компонената (упореди § 0.3 схема 42). Код симетричног тензора имаћемо свега десет различитих компонената (дуж дијагонале и с једне њене стране), а антиметричан тензор одређују шест компонената. Векторски производ за четири димензије не дефинише се на исти начин као у тродимензионалном простору. Зато морамо дати другу дефиницију. Да бисмо до ње дошли напишимо пројекције двају вектора у облику матрице

$$\left\| \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{matrix} \right\| , \qquad (59)$$

помоћу које можемо наћи шест детерминаната

$$a_{ij} = A_i B_j - A_j B_i \ , \qquad j > i \ ; \qquad (60)$$

бројеве a_{ij} сматрајмо за компоненте антиметричног тензора Φ који ћемо звати векторски производ и означаваћемо га

$$\Phi = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}] \ ^{*)} \ . \qquad (61)$$

Појам просторног извода можемо наравно уопштити и за случај четири димензије, и можемо разне врсте просторних извода добивати помоћу уопштеног Хамилтонова оператора:

$$\nabla = \mathfrak{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathfrak{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathfrak{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + \mathfrak{e}_4 \frac{\partial}{\partial x_4} \ . \qquad (62)$$

Дакле имаћемо, ако је φ неки скалар а $\mathfrak{v}$ (v_1, v_2, v_3, v_4) вектор,

$$\nabla\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} \mathfrak{e}_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \mathfrak{e}_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} \mathfrak{e}_3 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_4} \mathfrak{e}_4 \qquad (63)$$

или Grad φ ,

$$(\nabla\mathfrak{v}) = \Sigma \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \qquad (64)$$

или Div $\mathfrak{v}$, а

$$[\nabla\mathfrak{v}] = \mathrm{Rot}\ \mathfrak{v} \qquad (65)$$

---

*) У тродимензионалном простору њему одговара вектор — векторски производ.

је антиметричан тензор чије су координате, према обрасцима (62) и (60),

$$\Phi_{ij} = \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \ . \tag{66}$$

Како Rot $\mathfrak{v}$ није вектор, не може да се тражи дивергенција ротора. Но лако је наћи услове које ће задовољавати увек компоненте (66):

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{31}}{\partial x_2} = 0 \ , \\
&\frac{\partial \Phi_{23}}{\partial x_4} + \frac{\partial \Phi_{34}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{42}}{\partial x_3} = 0 \ , \\
&\frac{\partial \Phi_{34}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Phi_{41}}{\partial x_3} + \frac{\partial \Phi_{13}}{\partial x_4} = 0 \ , \\
&\frac{\partial \Phi_{41}}{\partial x_2} + \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial x_4} + \frac{\partial \Phi_{24}}{\partial x_1} = 0 \ ,
\end{aligned} \tag{67}$$

тражећи изводе израза (66) и комбинујући их како је означено.

После овог уопштавања основних појмова Теорије вектора за случај четвородимензионалног простора можемо да пређемо на оне појмове који су потребни за Кинематику, Динамику и Електродинамику у оквиру Теорије релативитета.

Нека четири броја x_1, x_2, x_3, x_4 одређују тачку у „свету", — ми ћемо је звати фигуративна тачка. Ако се она помера, може се увести појам брзине и убрзања у овом простору (свету), али зато треба да сматрамо x_i као функције неког параметра (пете величине, која ће играти исту улогу као време у класичној Кинематици). Имамо, дакле, систем Σ и тачку M која у овом систему има брзину $\mathfrak{v}$ (v); у „свету" је њен вектор положаја (према обрасцу 57)

$$\mathfrak{r}_P = \Sigma x_i \mathfrak{e}_i \tag{68}$$

другим речима — вектор положаја фигуративне тачке P. Са тачком M можемо повезати систем Σ^0 у којем она мирује, тј. и овај се помера брзином $\mathfrak{v}$. Време у овом систему референције Σ^0 зовемо *сопствено*, означавамо га са τ и сам систем зовемо мирни. А координате у њему нека буду x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0. Сопствено време τ узимамо за поменути параметар. Применимо ли четврти образац (41), због $t' = \tau$ и $x_1^0 = \text{const.}$, биће

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ . \tag{69}$$

Осим тога имамо $x_4^0 = ic\tau$ и

(70) $$dx_4^0 = icd\tau\ , \qquad dx_1^0 = 0\ , \qquad dx_2^0 = 0\ , \qquad dx_3^0 = 0\ .$$

Количник

(71) $$\mathfrak{q} = \frac{d\mathfrak{r}_P}{d\tau} = \frac{d\mathfrak{r}_P}{dt}\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\Sigma\,\frac{dx_i}{dt}\,\mathfrak{e}_i\ ,$$

због једначина (68) и (69), зовемо брзином фигуративне тачке. У систему Σ^0 има овај вектор, због образаца (70), само једну компоненту:

(72) $$\mathfrak{q} = ic\,\mathfrak{e}_4$$

и, према томе, квадрат његова модула не зависи од координатног система, а једнак је $-c^2$.

Убрзање фигуративне тачке дефинишемо једначином

(73) $$\mathfrak{b} = \frac{d\mathfrak{q}}{d\tau} = \frac{d^2\mathfrak{r}_P}{d\tau^2}\ .$$

Како је модуо $\mathfrak{q}$ константна величина, убрзање стоји управно на брзини фигуративне тачке

(74) $$(\mathfrak{q}\,\mathfrak{b}) = \left(\mathfrak{q}\,\frac{d\mathfrak{q}}{d\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}\mathfrak{q}^2 = 0\ .$$

Најзад, ако означимо са $\mathfrak{r}$ вектор положаја тачке M у простору (тродимензионалном), имаћемо

(75) $$\mathfrak{r}_P = \mathfrak{r} + ict\,\mathfrak{e}_4$$

и, после диференцирања по τ, а због једначине (69) и дефиниције $\mathfrak{v} = \dot{\mathfrak{r}}_t$

(76) $$\mathfrak{q} = \frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{ic}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\mathfrak{e}_4\ .$$

Према основним идејама Теорије релативитета, законе природе треба формулисати у таквом облику да га они задржавају када прелазимо од једног система референције на други, а овај прелаз се покорава обрасцима Лоренцове трансформације, јер је само она у складу са основним једначинама Електродинамике.

Да би се и Механика довела у склад са њом, треба основну једначину (1) § 2.1 у њој,

$$m\mathfrak{a} = \mathfrak{F}\ ,$$

заменити једначином која ће задовољавати постављени услов, место да допушта Галилејеву трансформацију. Претходна Њутнова једначина,

пошто се маса сматра за константну величину, може да се напише у облику

$$\frac{d}{dt}(m\mathfrak{v}) = \mathfrak{F} \tag{77}$$

која претставља закон количине кретања (в. § 4.1).

Уочимо материјалну тачку M и означимо са m_0 вредност њене масе коју добива мерењем посматрач који мирује у односу на M. Ову величину зовимо „мирна“ маса. Вектор

$$\mathfrak{J} = m_0\mathfrak{q} = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{v} + \frac{icm_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{e}_4 \tag{78}$$

имаће прву компоненту једнаку количини кретања коју смо дефинисали у Механици, ако ставимо

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} \,. \tag{79}$$

Зовимо овај скалар *маса*. Дефинишимо сад у „свету“ вектор

$$\mathfrak{K} = \frac{\mathfrak{F}}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{d}{d\tau}\frac{icm_0}{\sqrt{1-\beta^2}}\mathfrak{e}_4 \,, \tag{80}$$

где је $\mathfrak{F}$ сила која дејствује на тачку M, а τ сопствено време. Онда основну једначину Механике можемо написати у облику који одговара постављеним принципима Теорије релативитета, тј. да она буде инваријантна при Лоренцовој трансформацији:

$$\dot{\mathfrak{J}}_\tau = \mathfrak{K} \tag{81}$$

или

$$\frac{d}{d\tau}m_0\mathfrak{q} = \mathfrak{K} \,. \tag{82}$$

Из последње једначине следује, наравно, и једначина (77) ако се узму у обзир обрасци (80), (76), (79) и (69). $\mathfrak{J}$ можемо сматрати за количину кретања фигуративне тачке у „свету“, $\mathfrak{K}$ за четвородимензионалну силу која на њу дејствује. Но сад у једначини (77) не сме се маса m ставити пред знак диференцирања, јер је и она променљива величина. Зато ће уопште сила и убрзање ($\dot{\mathfrak{v}}$) имати различите правце.

Узмемо ли скаларни производ

$$\mathfrak{K}\mathfrak{q} = \mathfrak{q}\frac{d}{d\tau}m_0\mathfrak{q} = \frac{1}{2}\frac{d}{d\tau}(m_0\mathfrak{q}^2) = 0 \,,$$

он је једнак нули због обр. (72), тј. због константности модула вектора

q. Трансформишимо овај производ помоћу образаца (80) и (76), узимајући у обзир да вектори $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{F}$ стоје управно на e_4:

$$\frac{1}{1-\beta^2}(\mathfrak{F}\mathfrak{v}) - \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}\frac{d}{d\tau}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = 0$$

или

$$\mathfrak{F}\mathfrak{v} = \frac{d}{dt}\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad . \tag{83}$$

Величина

$$E_m = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 \frac{v^4}{c^2} + \dots \tag{84}$$

има димензију живе силе:

$$T = \frac{mv^2}{2} \quad .$$

Лева страна једначине (83) има димензију рада у јединици времена. Ако је напишемо у облику

$$\frac{d}{dt} E_m = \mathfrak{F}\mathfrak{v} \tag{83'}$$

и сматрамо да при дефиницији величине E_m можемо увести интеграциону константу $- m_0 c^2$, онда ће израз (84) почињати од другог члана. Једначина (83′) показује како у Теорији релативитета теорема живе силе задржава познати облик (20 § 2.3).

Да видимо какав ће облик имати основне једначине Електродинамике у Теорији релативитета. За полазне узимају се једначине Лоренцове теорије електрона (в. даље § 39.3) које имају облик

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\mathfrak{H} &= \frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\rho\mathfrak{v} \ , & \operatorname{div}\mathfrak{H} &= 0 \ , \\ \operatorname{rot}\mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{H}}{\partial t} \ , & \operatorname{div}\mathfrak{E} &= 4\pi\rho \ , \end{aligned} \tag{85}$$

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{K} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}[\mathfrak{v}\mathfrak{H}] \ .$$

У Теорији релативитета претпоставља се да је електрично оптерећење e константно, дакле ова се величина не мења при Лоренцовој трансформацији. Али ако се запремине мењају и то у размери $\sqrt{1-\beta^2}:1$ (в. обр. (47) — трансверзалне се димензије не мењају), то ће и вредности густине за разне посматраче бити: за оног који се креће заједно са оптерећењем — ρ_0 (инваријанта), за оног који се помера релативно: $\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$.

Напишимо скаларне једначине које одговарају (85) и спојимо их у две групе. Прва ће бити

$$
(86)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial H_3}{\partial x_2} - \frac{\partial H_2}{\partial x_3} - \frac{\partial iE_1}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}\rho v_1 ,\\
-\frac{\partial H_3}{\partial x_1} + \frac{\partial H_1}{\partial x_3} - \frac{\partial iE_2}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}\rho v_2 ,\\
\frac{\partial H_2}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial x_2} - \frac{\partial iE_3}{\partial x_4} &= \frac{4\pi}{c}\rho v_3 ,\\
\frac{\partial iE_1}{\partial x_1} + \frac{\partial iE_2}{\partial x_2} + \frac{\partial iE_3}{\partial x_3} &= 4\pi i\rho ,
\end{aligned}
$$

ако са E_1, E_2, E_3, H_1, ... означимо пројекције вектора $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{v}$ на осе $x_1\, x_2\, x_3$ (в. ознаке после образаца (49)). Друга група биће

$$
(87)\qquad
\begin{aligned}
\frac{\partial iE_3}{\partial x_2} - \frac{\partial iE_2}{\partial x_3} - \frac{\partial H_1}{\partial x_4} &= 0 ,\\
\frac{\partial iE_1}{\partial x_3} - \frac{\partial iE_3}{\partial x_1} - \frac{\partial H_2}{\partial x_4} &= 0 ,\\
\frac{\partial iE_2}{\partial x_1} - \frac{\partial iE_1}{\partial x_2} - \frac{\partial H_3}{\partial x_4} &= 0 ,\\
\frac{\partial H_1}{\partial x_1} + \frac{\partial H_2}{\partial x_2} + \frac{\partial H_3}{\partial x_3} &= 0 .
\end{aligned}
$$

Узмимо сад тензор (четвородимензионални и антиметрични)

$$
(88)\qquad
\Psi\begin{cases}
0 & H_3 & -H_2 & -iE_1\\
-H_3 & 0 & H_1 & -iE_2\\
H_2 & -H_1 & 0 & -iE_3\\
iE_1 & iE_2 & iE_3 & 0
\end{cases} .
$$

Упоређујући га са једначинама (86) видимо да ће лева страна сваке (i) од ових једначина бити дивергенција (в. обр. (64)) вектора $\mathfrak{A}_i$ чије координате стоје у i-том реду схеме (88). По аналогији са обрасцем (58) § 0.3 који важи за тродимензионални простор, можемо онда увести величину

$$
(89)\qquad \nabla\Psi = \mathrm{Div}\,\Psi = \sum_1^4 \mathfrak{e}_i \,\mathrm{div}\,\mathfrak{A}_i .
$$

Дефинишемо ли вектор „струју у четвородимензионалном простору“

$$
(90)\qquad \mathfrak{s} = \rho_0 \mathfrak{q} = \rho\mathfrak{v} + i\rho c\,\mathfrak{e}_4
$$

(в. обр., (76)), можемо четири једначине (86) спојити у једну

$$\nabla \Psi = \frac{4\pi}{c} \mathfrak{s} \ . \tag{91}$$

Упоредимо једначине (87) и (67). Како је, на пр., $\Phi_{12} = H_3$, $\Phi_{23} = H_1$, $\Phi_{31} = H_2$ видимо да је прва од једначина (67) идентична са последњом у (87) итд. Према томе можемо сматрати да се тензор Ψ добива као резултат операције Rot (в. образац (65)) примењене на извесан вектор $\mathfrak{B}$ — вектор-потенцијал (четвородимензионални). Ставимо зато

$$\Psi = \mathrm{Rot}\, \mathfrak{B} = [\nabla \mathfrak{B}] \ . \tag{92}$$

На овај начин четири једначине теорије електрона (85) спојене су у две (86) и (87), које имају инваријантни облик с обзиром на Лоренцову трансформацију. Но треба имати у виду да ће једначине електромагнетског поља имати за (покретни) систем референције Σ' исти облик као и за систем Σ онда, када се уведе низ нарочитих образаца које дају везе између нових вредности $\mathfrak{E}'$, $\mathfrak{H}'$, ρ', $\mathfrak{v}'$ и старих $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, ρ, $\mathfrak{v}$. Као последица ових образаца следује и израз за силу $\mathfrak{K}$ (пета од једначина 85). На подробном извођењу овога не можемо се овде заустављати. Важно је да се истакне да се електрично и магнетско поље заједно карактеришу једним тензором Ψ. Растављање у два поља зависи од система референције, јер ће у разним системима Ψ имати различите компоненте. У Теорији релативитета добива се према томе овај резултат: поље које је за мирног посматрача магнетско може за покретног изгледати као електромагнетско.

Систем једначина (91) и (92), које у Теорији релативитета одређују електромагнетско поље, не садржи хипотезу о атомској природи електрицитета о којој ћемо говорити у идућој глави.

Специјална теорија релативитета, чије смо основне идеје навели у овом параграфу а коју су углавном разрадили Ајнштајн и Минковски (последњи је увео појам „света“), није могла да обухвати и појаву гравитације. Да би ово постигао, Ајнштајн уопштава извесне идеје и на тај начин се ствара т.зв. Општа теорија релативитета. Овде можемо само да скицирамо њене ставове.

У Специјалној теорији релативитета поставили смо као принцип захтев да једначине Електродинамике и Механике буду инваријантне с обзиром на Лоренцову трансформацију. Важи ли ово, онда споменуте једначине задржавају свој облик ма за који од инерцијалних система, тј. оних који се померају један у односу на други једнако и транслаторно. Али онда остаје питање, може ли се одредити кретање у односу на апсолутни простор, када се кретање неког материјалног тела своди на обртање. Њутнова Механика даје на ово питање позитиван одговор. Међутим Теорија релативитета, одбацујући и сам појам апсолутног про-

стора, тражи да се и проучавање појаве обртања формулише на начин како би се горњи закључак искључио. Зато, на пр., у случају обртања Земље морамо говорити о обртању не у односу на апсолутни простор него у односу на скуп осталих тела у васиони.

Основне идеје Опште теорије релативитета можемо формулисати овако: 1) важи претпоставка Специјалне теорије релативитета да, ако неки координатни систем који се поклапа са другим, због убрзања напусти ово стање, онда ће координате и време у првом систему бити везани са координатама и временом у другом систему помоћу Лоренцове трансформације; 2) инертна и тешка маса су идентичне. Овај став тумачи се овако. Масе појединих тела одређујемо обично мерењем тежине, јер знамо да је маса неког тела сразмерна његовој тежини. Резултат овог начина одређивања зовимо *тешка* маса. Међутим познате су нам и силе инерције, на пр. центрифугална сила. Ове се силе према Њутновој Механици појављују услед убрзања у односу на апсолутни простор. Вредност масе неког тела која се добива мерењем ове силе зове се *инертна* маса. Према Ајнштајновом гледишту није унапред јасно да тешка и инертна масе морају бити једнаке, па се ово мора претпоставити. А из ове претпоставке може се извести т.зв. *принцип еквиваленције:* да је поље инерције еквивалентно пољу гравитације. Он се тумачи на примеру посматрача који се налази у некој затвореној ћелији и може да види само оно што се у њој дешава. Ако ова ћелија мирује у односу на неки инерцијални систем, експерименти које врши посматрач даваће исте резултате као и када се све креће сходно особини инерције. Ако ћелија има убрзано кретање, посматрач ће видети како, на пр., слободно материјално тело пада убрзано у односу на зидове ћелије. Он може ову појаву протумачити дејством неке силе на тело; може чак да закључи да на тело дејствује тежа, јер због ње тела падају убрзано. Но може, наравно, да каже да се и сама ћелија креће убрзано, а тело због инерције. Дакле, за њега је поље сила инерције еквивалентно пољу сила гравитације.*)

При математичком формулисању Опште теорије релативитета које полази од две наведене претпоставке водило се још рачуна и о томе, да се у првој апроксимацији добију резултати Њутнове Механике. Бројни резултати који се добивају у разним питањима мало се разликују међу собом било да се узме једна или друга теорија. Према Општој теорији релативитета материја ствара у простору поље гравитације а, у исти мах, одређује и особине простора. Наиме, само у бесконачно малим деловима простора можемо да се служимо Еуклидовом геометријом (као код криве површине где се само за један њен бескрајно

*) Онај посматрач који се налази ван ћелије зна, међутим, да убрзање има сама ћелија!

мали део може претпоставити да се поклапа са делом своје додирне равни). Јединице дужине и времена постају функције места у простору. А метрику треба у „свету“ изабрати у вези са распоредом материје и њених брзина и то тако, да би силе инерције у односу на сваки инерцијални систем излазиле саме, чисто рачунским путем. У Општој теорији релативитета говори се о пољу као нечем што има физичке особине и, према томе, у Физику се враћа појам етра који су хтели почетком XX века да одбаце, јер је очевидно да име које се даје овом „нечем“ не игра улогу.

На првим корацима Теорије релативитета изгледало је као нешто сигурно, да ће се помоћу неколико појава коначно решити питање која је од теорија тачна, Њутнова или сама Теорија релативитета. Прву од ових појава претстављају извесне особине у кретању Сунцу најближе планете, Меркура, које Небеска механика није могла да објасни помоћу Њутнова закона гравитације и распореда тела у Сунчеву систему. Друга је појава — повијање зракова који иду од звезда а пролазе у близини Сунца; ово се повијање одређује мерењем положаја звезде за време помрачења Сунца. Најзад, трећа појава је померање, ка црвеном крају, спектралних линија светлости коју шаље нека велика маса, на пр. Сунце, у односу на положај тих линија у спектру који даје неки извор светлости на Земљи. Данас, међутим, знамо да се ниједна од ових појава, и поред тога што стварно постоје, не може сматрати као доказ тачности Теорије релативитета. Ајнштајн (у сарадњи са другим научницима) као и други покушавали су да створе још општију теорију, која би обухватила сва питања, тј. спојила поља гравитације и електромагнетско у једно. Но овде се не можемо зауставити ни на анализи ових идеја, као ни на тешкоћама на које оне наилазе поглавито у вези са развитком Атомистике.

§ 37 Зрачење, апсорпција, дисперсија. У оном делу Теорије светлости који смо досада анализирали дотакли смо се углавном начина распростирања и појава које стоје са њим у вези. Било корпускуларна теорија, било електромагнетска, онакве какве су биле изложене, могу да растумаче овај низ појава, но не обухватају још саму појаву зрачења. Објашњење механизма, начина на који постаје светлост захтева нове претпоставке. Замишљајући тачкасте изворе, осцилаторе који се налазе у некој тачки из које се распростиру таласи, зрачење површине неког усијаног тела, знатно упрошћавамо процес који се уствари врши. Питање зрачења стоји у вези са питањем структуре материје. Ово ћемо морати подробније проучити у идућој глави, где ћемо се вратити и на низ питања из Оптике. Овде ћемо издвојити извесне чињенице, а пре свих ону која се односи на улоге разних тела у процесу зрачења. Једна околност, наиме, која олакшава стварање теорије

састоји се у томе да, ако извесно тело зрачи, тела која га опкољавају не утичу на његово зрачење.

Као што нисмо били у стању да објаснимо како се зрачи светлост, не можемо још потпуно схватити ни процес апсорције. Тек од дубљег проучавања структуре материје могу се очекивати више или мање прихватљиве слике за овај процес. Проучавајући ове процесе наилазимо на основна питања у Физици те је појмљиво, зашто није лако створити теорију светлости која би могла објаснити ове појаве.

Имали смо прилике да се већ упознамо са другом једном појавом која ствара тешкоће за електромагнетску теорију светлости чак и у питању распростирања, са дисперсијом светлости. У овој теорији нашли смо т.зв. Максвелов образац (60) § 32.1, који ћемо написати у облику

$$n^2 = \varepsilon .$$

По њему, индекс преламања n зависи само од диелектричне константе медијума у којем се распростире талас. Дакле Максвелове једначине не могу без неких нових претпоставака да даду чињеницу познату из Експерименталне оптике, наиме, да постоји веза између индекса преламања n и таласне дужине λ:

$$n = f(\lambda) . \tag{93}$$

И код појаве дисперсије светлости морамо, према томе, да уђемо дубље у особине материје. Зато је Коши још у механичкој теорији светлости увео претпоставку о молекуларној структури материје, те је тако могао ближе да одреди претходну функцију. Образац који се добива у овој проширеној еластичној теорији

$$n = a + \frac{b}{\lambda^2} + \frac{c}{\lambda^4} + \dots , \tag{94}$$

где су a, b, c константе, омогућује, чак ако се узму у обзир само прва два члана, да се израчунају довољно тачно вредности n за нормалну дисперсију. Теорију дисперсије усавршио је даље W. Sellmeier, који је увео претпоставку да честице материје, молекули, врше осцилације заједно са етром. А после развитка електромагнетске теорије светлости, обрасци претходне теорије који се односе на појаву дисперсије добили су ново тумачење; улогу честица које врше осцилације у етру добили су електрони и јони.

Питање зрачења светлости стоји у уској вези са питањем топлотног зрачења о којем смо опширније говорили у § 20. Као што смо онда видели, закони зрачења се добивају у облику који најбоље засада одговара посматрањима тек ако се прими квантна хипотеза, и ако се уведу статистичке методе. Притом сматрамо да је, статистички, сваки талас еквивалентан осцилатору, да се у запремини тела које зрачи на-

лази коначни број ових осцилатора и онда добивамо Планков закон (126) § 20 који даје распоред вредности енергије зрачења потпуног радијатора (црног тела) по фреквенцијама. Видимо даље да овај распоред, ове вредности енергије зависе од апсолутне температуре тела. На овај начин смањен је број величина од којих зависи зрачење, тј. број „степена слободе". Феноменолошким начином за решавање ових питања за сада не располажемо, а тешкоће на који су наилазили ранији покушаји објашњења светлосних појава приморале су нас да потражимо нове теорије. Са новим правцем решења проблема светлости упознаћемо се у наредном параграфу.

§ 38 Таласна механика. Ова нова теорија води порекло од извесних аналогија које можемо запазити у принципима Геометриске оптике и Механике. Зато се вратимо подацима које пружа прва од ових. Према Ферматову принципу, распростирање светлости у медијуму чији индекс преламања n може да буде функција положаја одређује се функцијом S. Ова функција мора бити решење једначине (9) § 34 и онда у свакој тачки правац зрака (криве линије) одређује услов (8). У теорији парцијалних диференцијалних једначина дефинише се функција $S(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ која задовољава ову једначину

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2 = n^2 , \tag{9}$$

а зависи од три константе $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ као *потпуни интеграл.* Једначина

$$S(x, y, z, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = S = \text{const.} . \tag{95}$$

биће, наравно, једначина једне од површина ајконала.

Докажимо да ће једначине

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_\kappa} = \beta_\kappa , \tag{96}$$

где су β_κ нове константе, одређивати светлосне зраке, тј. да су оне еквивалентне услову

$$\text{grad}\, S = n\mathfrak{t} . \tag{8}$$

У једначини (9), која следује из (8), функција n не зависи од α_κ и зато је

$$\frac{\partial n^2}{\partial \alpha_\kappa} = 2\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha_\kappa} + \ldots = 0 .$$

Једначине (96) одређују неку тачку (за одређене вредности константа) на површини (95). Када се мења вредност константе, тј. вредности S, ова тачка описиваће криву линију. Нека буде τ параметар од

којег зависе њене координате: $x = x(\tau)$, $y = y(\tau)$, $z = z(\tau)$. Очевидно је да $\beta_к$ и $\alpha_к$ не зависе од овог параметра, те ће бити

$$\frac{d\beta_к}{d\tau} = \frac{\partial^2 S}{\partial \alpha_к \partial x}\frac{dx}{d\tau} + \ldots = 0 .$$

Упоређивањем последњих двеју једначина добивамо први од услова:

$$\frac{dx}{d\tau} = \gamma \frac{\partial S}{\partial x}, \qquad \frac{dy}{d\tau} = \gamma \frac{\partial S}{\partial y}, \qquad \frac{dz}{d\tau} = \gamma \frac{\partial S}{\partial z} .$$

На сличан начин добивају се и друга два услова.

Дакле управљени елемент лука уочене криве $d\mathfrak{s}$ (dx, dy, dz) има у свакој тачки правац grad S, па је према томе она светлосни зрак. У претходним једначинама γ је коефицијент пропорционалности који је лако наћи. Имамо због услова (8)

$$\frac{d\mathfrak{s}}{ds} = \mathfrak{t} = \frac{d\mathfrak{s}}{d\tau}\frac{d\tau}{ds} = \frac{1}{n}\,\mathrm{grad}\, S .$$

Према томе је

$$\gamma = \frac{1}{n}\frac{ds}{d\tau} = \frac{s'}{n} ,$$

и место горње три скаларне једначине добивамо векторску

$$\frac{d\mathfrak{s}}{d\tau} = \frac{s'}{n}\,\mathrm{grad}\, S . \tag{97}$$

Лук зрака s, а, према томе, и оптичка дужина S су функције параметра τ и $ds = s'\,d\tau$, јер су ове величине функције координата. Како из једначине (2) § 34 следује

$$dS = n\,ds = n\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} , \tag{98}$$

тако да је

$$n\,ds = \frac{dS}{d\tau}\frac{d\tau}{ds}\,ds = S'\,d\tau ,$$

Ферматов принцип (4) се може написати у облику

$$\delta \int_{\tau}^{\tau_1} S'\,d\tau = 0 , \tag{99}$$

где су τ и τ_1 вредности параметра τ које одговарају тачкама M и M_1. Ако упоредимо ову једначину са Хамилтоновим принципом (9) § 5, знајући да из последњег следују Лагранжове једначине друге врсте (23)

§ 3.2, можемо, по аналогији (а по правилима рачуна варијација), написати

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial S'}{\partial x'}\right)-\frac{\partial S'}{\partial x}=0 \tag{100}$$

као и друге две једначине, за координате y и z. Треба само да узмемо у обзир да се стави S', која је функција координата и њихових првих извода по τ, место функције T, као и то да је $U=0$.

Из једначине (98) следује

$$S'^2=n^2 s'^2=n^2(x'^2+y'^2+z'^2)$$

и зато се једначина (100) трансформише у

$$\frac{d}{d\tau}\left(n\frac{\partial s'}{\partial x'}\right)=\frac{\partial(ns')}{\partial x} \tag{101}$$

или, као што се може лако израчунати помоћу претходне,

$$\frac{d}{d\tau}\left(n\frac{dx}{ds}\right)=s'\frac{\partial n}{\partial x}\ .$$

Напишемо ли остале две једначине, видећемо да је

$$\frac{d}{ds}(n\mathfrak{t})=\operatorname{grad} n\ , \tag{102}$$

јер су $\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}$ пројекције вектора $\mathfrak{t}$.

Параметру τ који смо увели нисмо досада давали неки одређени смисао. Сматрајмо да је $\tau=t$ време. А функцију

$$\varphi(x,\alpha,t)\equiv S(x,\alpha)-ct \tag{103}$$

назовимо *фаза* површине (95); означавајући на наведени начин укратко да функција S (95) зависи од координата x, y, z и параметара $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Фаза, дакле, зависи од истих променљивих и времена, а c нека буде брзина светлости у вакууму. Уочимо тачку зрака која се у неком датом, почетном тренутку $t=0$ налази на некој површини (95). Онда ће вредност фазе бити

$$\varphi(x,\alpha,t)=S=\text{const.},$$

где је S параметар који смо ставили у једначину (95). После времена dt, иста вредност фазе налазиће се у другој тачки зрака, одн. на другој површини, и пошто мора бити $d\varphi=0$, помоћу услова (103) наћи ћемо ову тачку из једначине

$$dS-c\,dt=0\ . \tag{104}$$

Упоређујући ову једначину са (98) добивамо

$$\frac{ds}{dt} = \frac{c}{n} = u \ , \tag{105}$$

т.зв. *брзину расиростирања фазе*, јер је ds лук зрака који ће уочена тачка прећи за време dt.

Из једначине (103) следује

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} S \ , \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -c \ . \tag{106}$$

Ставимо ли ове вредности у једначину (9), узимајући још у обзир услов (105), добићемо

$$(\operatorname{grad} \varphi)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 = 0 \ . \tag{107}$$

Променимо вредности параметара α_κ за бесконачно мале величине $\delta\alpha_\kappa$. Онда ћемо имати нову фамилију површина

$$S(x, \alpha + \delta\alpha) = \text{const.} \tag{95'}$$

и нове вредности фаза биће

$$\begin{aligned} \varphi(x, \alpha + \delta\alpha, t) &= S(x, \alpha + \delta\alpha) - ct \\ &= S(x, \alpha) - ct + \sum_1^3 \frac{\partial S}{\partial \alpha_\kappa} \delta\alpha_\kappa \ . \end{aligned} \tag{103'}$$

За неку тачку $M(x, y, z)$ биће према томе разлика фаза (103') и (103)

$$\Sigma \frac{\partial S(x, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} \delta\alpha_\kappa \ ; \tag{108}$$

за другу тачку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ она ће бити

$$\Sigma \frac{\partial S(x_0, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} \delta\alpha_\kappa \ .$$

Ако поставимо услов да у M буде увек иста разлика фаза као и у M_0, због произвољности прираштаја $\delta\alpha_\kappa$ имаћемо три једначине

$$\frac{\partial S(x, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} = \frac{\partial S(x_0, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} = \beta_\kappa \ . \tag{109}$$

Како је десна страна константна, њу смо означили са β_κ те смо добили једначине (96), тј. једначине светлосних зракова. Дакле, светлосни зрак који због (8) стоји управно на површинама ајконала (95) биће геометриско место тачака за које разлика фаза између фамилије површина $S(x, \alpha + \delta\alpha) = \text{const.}$ и фамилије (95) остаје иста. Фаза φ

коју смо увели мора бити решење парцијалне диференцијалне једначине првог реда (107). Међутим видели смо улогу коју у теорији светлости игра таласна једначина. Напишемо ли сада ову једначину у облику

$$\Delta\psi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \tag{110}$$

(упореди са (56) § 12.4, (11) § 36) u ће означавати брзину распростирања таласа (према електромагнетској теорији светлости, електрични и магнетски су вектори решења ове једначине). Периодичка решења таласне једначине (за разне величине у разним теоријама) могу да се напишу, као што смо видели, у облику функције

$$\psi = Ae^{\frac{2\pi i\varphi}{\varkappa}}, \tag{111}$$

где су A и $\varkappa$ неке константе, а φ је функција положаја и времена. Ставимо ли израз (111) у таласну једначину, добићемо да ова функција $\varphi\ (x, y, z, t)$ мора бити решење друге диференцијалне једначине

$$\frac{2i\pi}{\varkappa}\left[\Delta\varphi - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right] + \left(\frac{2i\pi}{\varkappa}\right)^2\left[(\text{grad}\ \varphi)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2\right] = 0. \tag{112}$$

Ова парцијална диференцијална једначина другог реда, наравно, разликује се од једначине (107). Према томе, могли бисмо у изразу (111) за функцију φ узети решење једначине (107) место (112) само у случају, када је $\varkappa$ врло мала величина, тј. када се у једначини (112) може занемарити први од сабирака.

Осим брзине распростирања фазе, која је, према једначинама (105) и (9), једнака

$$u = \frac{c}{n} = \frac{c}{|\text{grad}\ S|}, \tag{105'}$$

дефинишимо у вези са функцијом ψ т.зв. *брзину распростирања групе.* Претходно ћемо учинити још једну претпоставку којом се проширује област примена резултата теорије. Сматраћемо, наиме, да индекс преламања n зависи, поред координата, још и од једног параметра ν. Онда ће функција S, због једначине (9), и φ, због услова (103), зависити од овог параметра. Дакле за сваку вредност ν имаћемо извесну вредност, према услову (111), $\psi = \psi(\nu)$, те ћемо и константу A означити са A_ν, тј. биће

$$\psi(\nu) = A_\nu e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}\varphi} = A_\nu e^{\frac{2\pi i}{\varkappa}\left[S(x, \alpha, \nu) - ct\right]}. \tag{113}$$

Као што се види непосредно из овог израза, $\psi(\nu)$ је на неком

месту, за дате вредности α_κ и ν, периодичка функција времена периоде $T=\frac{\varkappa}{c}$. Ставимо

$$\nu=\frac{1}{T}=\frac{c}{\varkappa}\,. \tag{114}$$

Како је ψ решење диференцијалне једначине (110), вредности ове функције распростиру се у простору брзином u. А таласна дужина (в. на пр. (15) § 31) биће

$$\lambda=Tu=\frac{u}{\nu} \tag{115}$$

и она зависи, дакле, од ν. Посматрајмо сада групу таласа таласних дужина које одговарају вредностима параметра ν у интервалу $(\nu, \nu+\delta\nu)$. На основи обрасца (113) имамо

$$\psi(\nu+\delta\nu)=A_{\nu+\delta\nu}\,e^{\frac{2\pi i(\nu+\delta\nu)}{c}\left[S(x,\alpha,\nu+\delta\nu)-ct\right]}\,. \tag{116}$$

Функције (113) и (116) имају различите фазе. Развијмо у ред функцију S

$$S(x,\alpha,\nu+\delta\nu)=S(x,\alpha,\nu)+\frac{\partial S}{\partial\nu}\delta\nu+\ldots$$

Разлика фаза функција (116) и (113) биће сада одређена изразом

$$\frac{2\pi}{c}\left[\nu\frac{\partial S}{\partial\nu}+S-ct\right]\delta\nu=\frac{2\pi}{c}\left[\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}-ct\right]\delta\nu\,. \tag{117}$$

За неке одређене вредности ν и $\delta\nu$, у неком тренутку t, биће у свима тачкама површине чија је једначина

$$\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}-ct=\text{const.} \tag{118}$$

разлика фаза иста. Како у једначину (118) улази време, то ће се ова површина померати у простору. На исти начин на који смо из једначине (103) извели (105), добићемо

$$\delta\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}-c\,\delta t=\left(\delta s\,\text{grad}\,\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}\right)-c\,\delta t=0\,. \tag{119}$$

и, када се тачка површине помера у правцу градијента, тј. кад је δs са овим колинеарно, израз

$$g=\frac{\delta s}{\delta t}=\frac{c}{\left|\text{grad}\,\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}\right|} \tag{120}$$

зове се *брзина распростирања групе.* Даље имамо

$$\left|\operatorname{grad}\frac{\partial(\nu S)}{\partial\nu}\right| = \left|\frac{\partial\nu\operatorname{grad}S}{\partial\nu}\right| = c\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{\nu}{u}\right)$$

због (105′) и, због (115) и (120), биће

$$\frac{1}{g} = \frac{\partial}{\partial\nu}\left(\frac{1}{\lambda}\right) . \tag{121}$$

Ако поделимо једначину (4) константом c и заменимо израз $n:c$ изразом $1:u$ онда ће, због једначине (105′), Ферматов принцип добити облик

$$\delta\int_{M}^{M_1}\frac{n}{c}\,ds = \delta\int\frac{1}{u}\,ds = 0 , \tag{122}$$

а његов други облик (99) потсећа нас на Лагранж-Мопертјуиов принцип у Механици (12) § 5. Да бисмо спровели аналогију поменуту на почетку овог параграфа, трансформисаћемо претходно овај принцип, тј. једначину

$$\delta\int_{t_0}^{t_1} 2T\,dt = 0 ,$$

где је T жива сила материјалног система. Претпоставимо да смо узели холономни систем, да у овом дејствују само силе које имају потенцијал U — функцију само координата, и да систем има p степена слободе. Нека буду q_i генералисане координате ($i = 1, 2, \ldots p$). Имаћемо

$$U = U(q_1, q_2, \ldots q_p) , \tag{123}$$

а жива сила биће квадратна функција извода q_i' — генералисаних брзина коју можемо наћи помоћу образаца (20a), (16) и (19) § 3.2. (Узимамо да време t не улази експлицитно). Према томе, означавајући са m неки број који има димензију масе, можемо овој квадратној функцији дати облик

$$2T = m\sum_i\sum_j g^{ij}q_i'q_j' .$$

Коефицијенти g^{ij} зависе уопште од q_i. Двоструки збир који стоји у овој једначини има димензију квадрата брзине и зато ће

$$ds = \sqrt{\Sigma\Sigma g^{ij}dq_i dq_j} \tag{124}$$

имати димензију лука криве. Сматрајмо да је овај израз лук криве у

p - димензионалном неевклидову простору*) и ставимо

(125) $$T = \frac{m}{2}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 .$$

Осим тога, за наш систем важи закон одржања енергије (20) § 4.4

(126) $$T = U + h_* .$$

Узимајући још да се фигуративна тачка у p - димензионалном простору, у тренутку t_0, налази у M, а у t_1 у положају M_1, можемо у Лагранжову принципу заменити променљиву t са s, $\sqrt{2T}dt$ са $\sqrt{m}\,ds$, због (125), и $\sqrt{2T}$ са $\sqrt{2(U+h_*)}$ због услова (126). Поделимо ли још тај израз константом h_*, имаћемо

(127) $$\delta \int_M^{M_1} \frac{\sqrt{2m(U+h_*)}}{h_*}\, ds = 0 .$$

Резултати Оптике добивају се из Ферматова принципа (122) где је интегранд $\frac{n}{c} = \frac{1}{u}$. Резултати Механике следују међутим из Лагранжова принципа (127). Изрази

(128) $$\frac{n}{c} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt{2m(U+h_*)}}{h_*}$$

играју према томе сличну улогу. А основна идеја таласне механике је да резултате једне гране Теориске физике, Оптике, можемо преносити у другу, замењујући само наведене изразе. На пр., из једначине (102)

---

*) Образац (124) претставља уопштење за p - димензионални простор израза за лук криве на некој површини. Нека буде једначина ове површине

(α) $$\mathfrak{r} = \mathfrak{r}(q_1, q_2) ,$$

где су q_1 и q_2 Гаусови параметри. Вектор

(β) $$d\mathfrak{r} = \dot{\mathfrak{r}}_1\, dq_1 + \dot{\mathfrak{r}}_2\, dq_2 ,$$

где су $\dot{\mathfrak{r}}_1$, $\dot{\mathfrak{r}}_2$ изводи по координатама q_1, одн. q_2, лежи у додирној равни површине (α). Квадрат његова модула означимо са ds^2, тј. са ds елемент лука ма које криве на површини (α) који ће наравно лежати у додирној равни. Имамо $ds^2 = d\mathfrak{r}^2$ и, ако означимо са

(γ) $$g^{11} = (\dot{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_1) , \qquad g^{12} = g^{21} = (\dot{\mathfrak{r}}_1 \dot{\mathfrak{r}}_2) , \qquad g^{22} = (\dot{\mathfrak{r}}_2 \dot{\mathfrak{r}}_2) ,$$

из једначине (β) наћи ћемо

(δ) $$ds^2 = \sum_{i,j} g^{ij} dq_i\, dq_j .$$

може се извести Њутнова једначина (8) § 2.2 када постоји потенцијал $(-U)$:

$$m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}=\mathfrak{F}=\operatorname{grad}U\ . \tag{129}$$

Доиста, напишимо једначину (102) у облику

$$\frac{d}{dt}n\mathfrak{t}=\frac{ds}{dt}\operatorname{grad}n\ .$$

Поделимо је константом c, заменимо $\frac{n}{c}$ другим од израза (128) и одбацимо константни делитељ h_* који се појављује и на левој и на десној страни. Добивамо

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{t}\sqrt{2m(U+h_*)}\right)=s'\operatorname{grad}\sqrt{2m(U+h_*)}\ .$$

Због једначина (125) и (126) биће десна страна

$$s'\operatorname{grad}ms'=\frac{1}{2m}\operatorname{grad}(ms')^2=\operatorname{grad}U\ ,$$

а лева

$$\frac{d}{dt}\left(\mathfrak{t}ms'\right)=\frac{d}{dt}m\mathfrak{v}=m\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\ ,$$

тј. лева страна једначине (129), јер је $\mathfrak{t}$ јединични вектор у правцу дирке путање, дакле, брзине $\mathfrak{v}$.

Помноживши константом c, добићемо Лагранж-Мопертјуиов принцип (127) у облику

$$\delta S_*=\delta\frac{c}{h_*}\int_{M}^{M_1}\sqrt{2m(U+h_*)}\,ds=0 \tag{130}$$

и назовимо функцију

$$S_*=\frac{c}{h_*}\int_{M}^{M_1}\sqrt{2m(U+h_*)}\,ds=\frac{c}{h_*}\int_{M}^{M_1}\sqrt{2mT}\,ds \tag{131}$$

дејством. Ова функција је једнака производу дејства (по Лагранжу, (10) § 5) L са $c:h_*$. Увођењем функције S_* постижемо потпуну аналогију са Ферматовом функцијом, па ће S_* бити решење једначине

$$(\operatorname{grad}S_*)^2=\frac{2c^2m(U+h_*)}{h_*^2}=\frac{c^2m}{h_*}\frac{2T}{h_*} \tag{132}$$

(в. (128) и (9)). Фамилија путања стоји управно на површинама константног дејства $S_*=\text{const.}$. Као што смо мало пре говорили о поме-

рању фазе (103), можемо и у Механику увести појам *фазе површине дејства:*

(133) $$\varphi_* = S_* - ct$$

и *брзине распростирања ове фазе* (упореди једначину (105)), због (128):

(134) $$u_* = \frac{h_*}{\sqrt{2m(U + h_*)}} = \frac{h_*}{\sqrt{2mT}} \cdot$$

А једначина

(135) $$\varphi_* = S_* - ct = S_*^0 = \text{const.}$$

даје површину дејства која се у току времена помера брзином u_* (134).

Ако имамо холономни механички систем са p степена слободе, онда знамо живу силу (125) и потенцијал (123). Тада можемо замислити и фигуративну тачку која одговара нашем систему, и која се креће у p-димензионалном простору, где је метрика дата обрасцем (124). Уопштавајући досадање резултате, можемо сматрати да наши обрасци изведени у почетку овог параграфа важе не само за три но и за p димензија те ћемо, дакле, имати координате $q_1, \ldots q_p$, константе $\alpha_1, \ldots \alpha_p$, и функцију S ових величина. Онда ће једначине

(109′) $$\frac{\partial S(q, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} = \frac{\partial S(q_0, \alpha)}{\partial \alpha_\kappa} = \beta_\kappa$$

бити у исти мах, према горе реченом, и једначине зракова и једначине путање фигуративне тачке механичког система. А како смо дошли до закључка, да су светлосни зраци геометриска места тачака за које разлика фаза између површина $S(x, \alpha + \delta\alpha) = \text{const.}$ и $S = \text{const.}$ остаје иста, то се он преноси и на путање фигуративне тачке механичког система, одн. на функцију S_*.

Најзад, у Механику уводимо појмове сличне онима које смо раније надовезали на светлосне зраке, посматрајући периодичке функције фазе φ које су решења таласне једначине (110). Дакле у Механици при кретању механичког система, холономног и конзервативног, када је жива сила квадратна функција брзина и потенцијал функција једино координата, важиће обрасци од (111) до (121), у којима треба само водити рачуна о замени прве од величина (128) другом. Према томе, слично случају светлосних појава, уводи се појам *таласа дејства* који је одређен функцијом ψ (111), где је φ сад дато обрасцем (133). Дакле можемо даље говорити о таласној дужини (115), брзини фазе (105′), функцији ψ, а уводећи још функцију (113), и о брзини распростирања групе (120) или (121). За последњу ћемо добити врло важан резултат, наиме, да је брзина групе таласа дејства једнака брзини фигуративне тачке механичког система. Ову теорему нашао је 1924 г. L. de Broglie,

и лако ћемо је доказати, узимајући у обзир нову, врло важну претпоставку таласне механике. На првим корацима ове теорије сматрало се да функција ψ карактерише неку стварну појаву, тј. да осцилаторна појава — таласи дејства имају неки стварни смисао. Онда је била постављена веза између претходних резултата и квантне хипотезе. Према једначини (113) функција ψ зависи од „фреквенције" таласа (ν) од које ће зависити онда и брзина распростирања фазе (134) и то преко тоталне енергије h_* (потенцијал зависи само од координата). Биће, дакле, уопште

$$u_*(\nu) = \frac{h_*(\nu)}{\sqrt{2m(U + h_*(\nu))}} \cdot \tag{134'}$$

Претпоставимо сад, у складу са основном идејом квантне хипотезе (в. § 20 обр. (119)), да је

$$h_*(\nu) = h\nu \ , \tag{136}$$

где је h Планкова константа. Имамо, дакле,

$$u_* = \frac{h\nu}{\sqrt{2m(U + h\nu)}} \tag{134''}$$

и, због (120) и (121),

$$g = 1 : \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\frac{\nu}{u}\right) = \sqrt{\frac{2(U + h\nu)}{m}}$$

а, због (126) и (125), биће

$$g = \sqrt{\frac{2T}{m}} = \frac{ds}{dt} = v \tag{137}$$

где је v брзина фигуративне тачке. Према томе, доказали смо де Брољиеву теорему.

Таласна дужина λ биће према обрасцима (115), где треба ставити u_* место u, (134″) и (126)

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2m(U + h\nu)}} = \frac{h}{\sqrt{2mT}} \cdot$$

А, како је због услова (125)

$$\sqrt{2mT} = mv \ ,$$

тј. једнак модулу количине кретања, имаћемо, означавајући га са p,

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{138}$$

— де Брољиеву једначину.

Идеја увођења функције ψ у таласну механику припада E. Schrödinger-у, другом од стваралаца ове теорије. Ова Шредингерова функција мора, према реченом, да буде решење таласне једначине

$$\Delta\psi - \frac{1}{u_*^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0 \,, \tag{110'}$$

где брзина распростирања фазе има ону вредност коју даје израз (134″). Фаза пак φ_* (133) мора бити уопште решење једначине (112) са вредношћу $u = u_*$.

Ми ћемо овде навести још једну врсту формалне трансформације којом се служе у таласној механици при прелазу од једначина Геометриске оптике ка таласној. Напишимо једначину (107) у облику

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 - \frac{1}{u^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)^2 = 0 \,.$$

Ако заменимо сваки од извода у њој оператором према услову:

$$\text{место } \frac{\partial\varphi}{\partial x} \text{ ставимо } \frac{\varkappa}{2i\pi}\frac{\partial}{\partial x} \text{ итд.} \tag{139}$$

добићемо „операторску једначину"

$$\left(\frac{\varkappa}{2i\pi}\right)^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) = 0 \,. \tag{140}$$

Применимо ли ову операцију на функцију ψ, добићемо овим формалним путем таласну једначину (110).

Као што смо видели, S ће, а према обрасцу (113) и функција ψ, бити функција координата. Како је она усто и експоненцијална функција времена раставићемо је у два множитеља:

$$\psi = \psi_* e^{-\gamma t} \,. \tag{141}$$

Први од њих нека буде функција само координата, а изложитељ бирајмо тако да буде

$$\gamma = \frac{2i\pi}{h} h^*$$

(види обрасце (113), (114), (136)). Ставимо ли изразе (141) и (134′) у једначину (110′) добићемо, после скраћивања,

$$\Delta\psi_* + \frac{8\pi^2 m}{h^2}\left(U + h_*\right)\psi_* = 0 \,. \tag{142}$$

Функција ψ_* мора бити решење ове, Шредингерове, једначине која игра основну улогу у таласној механици.

Ми се нећемо овде даље бавити математичком анализом питања Механике која се надовезују на решења ове једначине којима ћемо се вратити у идућој глави. Али ћемо се задржати на даљем развиткуидеја о природи светлости. Таласна теорија светлости, чак у оном скоро са вршеном облику који имамо у електромагнетској теорији, наишла је на извесне тешкоће у низу појава о којима ће још бити речи и у идућој глави, пошто су оне послужиле за образложење атомске хипотезе и стоје у вези са структуром материје. Процеси зрачења и апсорпције довели су Планка до квантне хипотезе. И, као извесни развитак ове идеје, појављује се Ајнштајнова хипотеза о *светлосним квантима*, честицама које полазећи од извора светлости носе собом извесне количине енергије. Ово би значило враћање ка старој емисионој теорији. Међутим улога таласне механике била је на првим корацима њена развитка у томе да споји два на први поглед противречна гледишта: гледишта емисионе и таласне теорије, тј. претставе о светлости као роју честица и као таласа.

По ономе како се тумаче посматрања, светлосни кванти постоје и јесу честице, носиоци извесне енергије и количине кретања. Роју кванта који имају енергију $h_* = h\nu$ одговара према таласној теорији монохроматски талас. Очевидно је да су биле потребне неке хипотезе о природи светлосних честица, јер из Максвелових једначина нити оне следују нити се може назрети њихова веза са Планковом константом h. Као једна од претпоставака дошла је Шредингерова идеја о „свежњима таласа" — како су названа решења једначине (142) за која ψ, као функција координата и времена у извесном тренутку (t'), само у близини извесне тачке (M') има доста велику амплитуду, а на већим растојањима од те тачке њена амплитуда постаје незнатна. Кретање оваквог свежња таласа слично је кретању материјалне тачке. Али, како показује рачун, овај се свежањ таласа расплиће, наиме максимум амплитуде у близини покретне тачке M' нестаје, значи нестаје и сам свежањ таласа. Иако је за то расплитање потребно доста дуго времена, ипак је доста тешко схватити светлосне кванте и *материјалне честице* као свежњеве таласа.

Због тога се у таласној механици, ускоро после почетка њена стварања, развија статистички правац тумачења величина које служе за описивање појава. Функција ψ (141) је комплексна. Ако узмемо и њену коњуговану функцију $\tilde{\psi}$

$$\psi = A e^{i\chi}, \qquad \tilde{\psi} = A e^{-i\chi}, \tag{143}$$

где је изложитељ, краткоће ради, означен само словом χ, биће

$$\psi\tilde{\psi} = A^2 = |\psi|^2, \tag{144}$$

а *интензитет* таласа дефинише се као величина пропорционална ква-

драту амплитуде. Претпоставља се даље да је величина (144) мера густине распореда светлосних кванта у простору. Онда је $|\psi|^2 dV$ пропорционално броју светлосних кванта у запремини dV, одн. *вероватноћа*, да се у овој запремини налази један квант. Видимо да на тај начин величина ψ престаје да карактерише неко физичко стање; поље ψ није реално, но само математичко које „прати" реалне светлосне кванте (M. Born, P. Jordan, P.A.M. Dirac). Али када се светлост тумачи као рој честица, треба увек имати у виду и интерференцијалне појаве које се лако објашњавају са гледишта таласних теорија.

Различите тешкоће, од којих смо овде само неке поменули, довеле су до даљих покушаја опет са тежњом да се постави теорија светлости која би спојила појмове корпускуларних и таласних теорија. Са њима ћемо се упознати у идућој глави.

38* Еволуција схватања природе светлости. Преглед теорија изложених у претходним параграфима даје већ сам претставу о томе, како су се мењала схватања природе светлости. Зато ћемо га овде само допунити. Идеје о природи светлости до XVII века толико се одвајају од савремених научних основа да се на њима нећемо ни заустављати. У оно доба само Геометриска оптика могла се сматрати за научну грану.

У XVII веку стварају се две теорије светлости. Основне идеје прве, емисионе, еманационе или корпускуларне потичу од Gassendi-а и Њутна, који је развија од 1666 г. и даје јој завршни облик у својој „Оптици" (1704). Прва дефиниција у њој гласи: „светлосне зраке схватам као најмање делиће светлости и то једне за другима у истим правцима и истовремено у различитим". Пре Њутна, Grimaldi и Hooke сматрали су да је светлост неко таласање, те се и сам Њутн служио испочетка претставом о трепереньима етра. Корпускуларна теорија могла је да објасни низ светлосних појава: 1) одбијање, 2) преламање, 3) дисперсију, 4) поларизацију (донекле) и 5) двојно преламање.*) Но, 6) интерференција и 7) дифракција остајале су ван њена оквира. И поред тога већина научника прихватала је ову теорију у XVIII веку; у XIX њене присталице су били Malus, Laplace, Poisson и Biot. У XX веку, при постанку нових теорија светлости, види се да је у корпускуларној било језгро идеја које нас приближавају схватању праве природе светлости.

1690 г., дакле пре још него што је Њутнова Оптика изашла, даје Christian Huygens, у делу Traité de la lumière, основе друге, таласне или ондулационе теорије светлости. По њој се светлост састоји у трепереньу честица етра, супстанце чију чврстоћу треба по Хајгенсу сматрати скоро потпуном. Овој теорији створила је тешкоће појава ди-

---

*) За објашњење двојног преламања искористио је Malus (1810) Њутнову идеју, по којој се могу увести претпоставке о облику светлосних честица, на пр., да у два или чак четири правца имају различите димензије.

сперсије, а испочетка и двојно преламање. Хајгенс је мислио да је трепереље честица лонгитудинално и зато није успевао да објасни двојно преламање. Међутим Хук је, још 1672 г., сматрао да се светлост састоји у трансверзалним треперењима. Један од присталица таласне теорије у XVIII веку био је Ојлер који је за корпускуларну теорију истакао ову тешкоћу: у свакој тачки простора укрштају се зраци који иду од различитих извора, и због судара честица разних зракова требало би да наступе промене праваца њихових кретања, међутим се тела виде без сметњи. Етар, према Ојлеру, има особине течности, јер се у њему небеска тела крећу без отпора. Th. Young је 1801 г. показао да се на основи таласне теорије може лако објаснити интерференција светлости. Да би се схватила поларизација светлости, показала се као потребна претпоставка о трансверзалним треперењима честица, коју је поново увео 1821 г. Fresnel. Но уједно је требало променити и особине етра, јер су оваква треперења могућна у чврстом телу, а друге тешкоће за схватање етра, као средине која се карактерише механичким особинама, споменули смо већ раније (§ 55).

Ново схватање светлосних појава, у другој половини XIX века, у облику електромагнетске теорије, које је заменило пређашњу таласну теорију углавном је било од великог значаја. И поред тешкоћа, које смо видели, основе ове теорије сачувале су извесну важност и до данас. Али се нада да је постигнута потпуна идентичност појаве светлости и електромагнетских таласа није остварила. За доказ њихове идентичности било би потребно, као што је то приметио Херц, да можемо из светлости непосредно добивати електрична и магнетска дејства. Нова теорија светлости, пошто су се механички модели етра показали као неприхватљиви, захтевала је да се потраже нове претставе о природи етра (Bjerknes, Fitzgerald, Sommerfeld, Larmor, W. Thomson, Korn), но ниједна од њих се није у науци одомаћила. Било је покушаја да се уопштавањем Максвелових једначина дође до објашњења и оних појава које се нису могле довести у склад са првобитним обликом електромагнетске теорије. На пр., Ebert је на овај начин нашао једно објашњење дисперсије. У корист електромагнетске теорије говориле су углавном, почетком почетком XX века, ове четири чињенице: 1) она може да објасни интерференцију, што није у стању да учини корпускуларна; 2) према њој је брзина простирања таласа у ваздуху већа него ли у води, што се слаже са Физоовим експериментом (§ 36.1а); корпускуларна међутим доводи до супротног закључка; 3) брзина простирања таласа не зависи од кретања извора, што је такође више у складу са посматрањима, док према корпускуларној теорији постоји веза између брзина простирања светлости и кретања извора и 4) нађени су електромагнетски таласи, — појава која се не може објаснити са гледишта корпускуларне теорије.

Потпуна теорија светлости мора да обухвати не само начин про-

стирања светлости но и појаву зрачења. У Максвеловим једначинама није изражена веза између материјалног извора и зрачења светлости, и извор се накнадно замишља, на пр., као нека врста Херцова осцилатора. С друге стране, закони зрачења довели су до квантне хипотезе, коју је поставио Планк (§ 20). А са њом се враћа у живот корпускуларна теорија, ма да у другом облику: по овој сад од извора лети рој дискретних светлосних кванта, или т.зв. *фотона*. Претпоставка о фотонима, од којих сваки претставља одређену количину енергије, отвара пут, као што је показао Einstein, за објашњење т.зв. фотоелектричног ефекта (§ 39.2). Интензитет светлости зависи, према овом новом схватању, од броја фотона, а разним бојама одговарају различити светлосни кванти. Појам енергије замењује пређашњи појам таласне дужине — црвеној светлости одговарају фотони чија је енергија двапут мања од енергије фотона љубичасте светлости. Како је међутим за појаву интерференције, а и дифракције, била потребна таласна природа светлости, то је у таласној механици учињен покушај да се споје ове две претставе у једну. Ниже, у § 42, биће говора о још новијим претпоставкама о природи светлости. Изгледа да смо у овом питању дошли до закључка о некој врсти дуализма светлости, која се у извесним појавама испољава као талас, док у другима као рој честица.

ГЛАВА VI

СТРУКТУРА МАТЕРИЈЕ

Теорије појава из разних грана Физике показале су јасно да уопште постоје везе између њих. Док се на првим корацима у свакој од тих грана обично проучавају само оне појаве које њој припадају, уколико дубље иду наша испитивања у њој, утолико се све више испољавају поменуте везе. И ову чињеницу можемо сматрати за сасвим природну, јер ток физичких појава и њихова суштина зависе од особина оног чиниоца у којем се оне одигравају, у првом реду дакле од најосновнијих особина материје.

У већини теорија са којима смо се овде упознали, првенствено у онима које су се развијале са феноменолошког гледишта, о овим особинама материје водило се рачуна помоћу различитих претпоставака о величинама које карактеришу једну или другу особину. На пр., коефицијент проводљивости био је скаларна величина која карактерише способност извесне материје да проводи топлоту; диелектрична константа — скалар у изотропној средини; тензор у анизотропној — одређивала је особину материје која је утицала на електричне појаве. Усто смо материју схватали уопште као неку непрекидну средину. Но многа истраживања која су вршена у току последњих деценија везана су била за други правац схватања склопа материје — за атомистику (в. § 0.6). Јасно је да увођење атомске хипотезе отвара многе нове путеве за стварање теорија, јер сама претпоставка о дискретној структури материје није још довољна да се из ње изведу неки закључци. Осим тога знамо и то како се брзо у наше доба, под утицајем нових експерименталних чињеница, мењају претставе о честицама од којих се, према атомској хипотези, састоји материја. Зато смо издвојили скуп оних чињеница које сада налазе своје тумачење у светлости ове хипотезе, да се са

њима упознамо заједно са променама које оне уносе у схватање структуре материје.

§ 39 Теорија електрона. Претпоставка о дискретној структури материје, о њеним честицама — атомима и молекулима, уз низ појава, где она игра улогу, довела је до стварања појма електричних (или наелектрисаних) честица које су добиле име *електрони.* И као даљи корак у развитку наше претставе о природи електрицитета и магнетизма, после Максвелове теорије, појавила се *теорија електрона* коју је развио Лоренц. Но пре него што пређемо на математичко формулисање идеја ове теорије, морамо да се упознамо са чињеницама које су довеле до идеје о електрону.

§ 39.1 Елементарна количина електрицитета. а) *Електролиза.* Течности постају добри проводници струје ако су раствори. У раствору се врши разлагање хемиског једињења у састојке. Са гледишта молекуларне хипотезе, треба да претпоставимо да се у електролиту известан број молекула већ распао у делове који се зову *јони* (јони носе извесна електрична оптерећења: анјон — негативна, катјон — позитивна), тј. да је наступила *дисоцијација.* По Фарадеју, ово стање изазива електрична струја; по доцнијем схватању (Клаузиус и др.) дејство струје се своди на кретање већ дисоцијираних јона, од којих се анјони крећу ка аноди — на којој се неутралишу, катјони ка катоди [сумпорна киселина $H_2SO_4 = H_2$ (катјон) $+ SO_4$ (анјон)].

За појаву електролизе важе Фарадејеви закони, који се могу спојити у овај став: Потребна је стално иста количина електрицитета да се добије грам-еквивалент неке материје; она износи

(1) $$E_* = 2.895.10^{14} \text{ електрост. јед.} = 96490 \text{ кулона} \;;$$

грам-еквивалент је маса неке материје која хемиски може заменити 1 грам-молекул водоника. Узмимо да јони преносе извесну количину електрицитета, када струја тече кроз електролит, и уочимо случај када је јон атом (једновалентни). Нека буде онда e та количина електрицитета. Пошто знамо број атома L неке супстанце у једном грам-молекулу, можемо ставити да сваки једновалентни атом носи просечно количину електрицитета

(2) $$e = E_* : L = 4{,}77 \cdot 10^{-10} \text{ електрост. јед.}.$$

Овај број игра и даље важну улогу. Из тока електролизе закључује се обично да се оптерећење јона не ствара при распадању молекула, но да су атоми већ у самом молекулу оптерећени електрицитетом. Када се цела појава електролизе замисли као кретање ројева јона у правцима електрода, онда се мора претпоставити да на њих дејствује

отпор течности. Како се може наћи и брзина њихова померања, то се из ових података могу, уз претпоставку да јони имају облик лопте, израчунати њихове димензије. И како се, на пр. вредност полупречника слаже са димензијама атома које следују из Кинетичке теорије, ови закључци се узимају као потврда тачности учињених претпостава. Нама неће бити потребна детаљнија анализа ових питања, стога ћемо поменути само још једну последицу.

Како смо узели да јони имају оно електрично оптерећење које су имали у молекулима, а нису га добили при дисоцијацији, то молекуле уопште треба сматрати за неке врсте диполова (док се нису распали у јоне). Ово стоји у непосредној вези са особинама диелектрика, да, на пр., положај осе дипола утиче на електрично поље и т. сл. Но јасно је да се, због разноликости хемиских супстанца, не може сваки молекул схватити као један, прости дипол.

b) *Millikan - Ehrenhaft-ова метода.* Претстава о количини електрицитета e (2), створена на основи електролизе, допуњује се претпоставком да је она елемент, дакле одређена количина, т.зв. *елементарни квант електрицитета.* Поред тога се претпоставља да се у природи јављају само оне количине електрицитета, које су једнаке целом броју ових кванта. Прве покушаје да се одреди e на други, непосредни начин вршили су још Townsend и J. J. Thomson 1897-98 г., но тек је у томе Millikan успео 1909 г.. Метода за мерење елементарних кванта електрицитета, коју је усавршио Ehrenhaft, састоји се у посматрању микроскопом кретања врло ситних капљица уља. Овакве капљице, полупречника око 10^{-4} цм, убризгавају се прскалицом у комору у којој се може створити вертикално електрично поље. Како се капљице образују тако се и електришу. Испочетка се посматра, како прво падају, врло споро услед трења у ваздуху и њихових малих димензија. Ако означимо са a полупречник капљице, претпостављајући да је она лопта, са η коефицијент вискозности ваздуха, са v_1 брзину пада, биће отпор услед трења, према Стоксову обрасцу у Хидромеханици, $6\pi\eta a v_1$. Можемо, због спорог пада, ставити да је отпор једнак тежини капљице, тј.

$$6\pi\eta a v_1 = \frac{4\pi}{3} a^3 (\rho - \rho_0) g \ ,$$

где је $\rho - \rho_0$ разлика густина уља, одн. ваздуха, g јачина убрзања Земљине теже. Из ове једначине се обично израчунава полупречник капљице. Када се створи електрично поље, капљица почиње да пада, но опет споро. Ако је v_2 нова брзина, e_* оптерећење капљице и E електрична сила, можемо ставити, замењујући тежину првим изразом из претходне једначине,

$$6\pi\eta a v_2 = e_* E + 6\pi\eta a v_1 \ .$$

Одавде је

(3) $$e_* = \frac{6\pi\eta a\,(v_2 - v_1)}{E}\ .$$

Вредности посматраних брзина су такве (наравно приближно) да се ова једначина може задовољити, ако се узме да је e_* једнака целом броју (малом) количина електрицитета

(2′) $$e = (4{,}768 \pm 0{,}005).\,10^{-10}$$ електрост. јед.

Ова је вредност у складу са горњом (2), те се узима за елементарни квант електрицитета.

§ 39.2 Провођење електрицитета у гасовима била је друга појава која је послужила као повод за увођење појма електрона. У Гајслеровим цевима, које садрже разређен гас, када се кроз њих пропушта електрична струја појављује се тињава светлост. Ток и особине ове појаве зависе од степена разређености гаса. Док је гас умерено разређен (до $^1/_{800}$ атм. пр.), сноп светлости се пружа од аноде готово кроз сву цев. И овај сноп се понаша као покретан проводник, тј. скреће када му се принесе магнет или друга електрична струја. А код катоде се јавља тињава светлост одвојена тамним међупросторима и од овог снопа и од саме катоде. При даљем разређивању, (10^{-5} атм.), сноп који је ишао од аноде ишчезава (постаје невидљив), а од катоде се пружа једва видљива светлост. Независно од положаја аноде појављује се на зиду цеви супротном катоди светло место где, дакле, стакло флуоресцира. Узрок ове појаве зове се *катодни зраци*. Ови имају низ особина из којих треба извести закључак о њиховој природи, а специјално да ли их треба сматрати за рој електричних честица или као таласе.*)

Катодни зраци распростиру се праволиниски и управно на површину катоде (Hittorf и Goldstein извели су ово из посматрања сенке чврстог тела које се налази на путу зракова). Последњу чињеницу је C. F. Varley (1871) објаснио претпоставком, коју су прихватили и J. J. Thomson и Kaufmann, наиме да су катодни зраци ројеви честица који носе негативни електрицитет. И као такви они ће се повијати у близини магнета или у електричном пољу, што се доиста и посматра. Повијање катодних зракова није се могло објаснити са гледишта таласне теорије. Поставило се затим и питање димензија ових честица и њихових оптерећења. Да ове честице не могу бити атоми, следовало је из Херцових експеримената у којима су катодни зраци пролазили кроз металне листиће. Атом би био и сувише крупна честица да би могао да кроз ове прође. Зато је Ленард заменио на извесном месту на цеви стакло листићем алуминијума и на тај начин пустио катодне зраке да изиђу

) види § 33

из цеви. Wiechert је опет из експеримената закључио, да ове честице треба да буду ситније од јона. А главну улогу су одиграли Ц. Ц. Томсонови експерименти, који су подупирали претпоставке да се ове честице крећу великим брзинама и да су малих димензија (њихова маса је 1838 пута мања од масе водоникова атома, тј. износи $9{,}04.10^{-28}$ грама). Узме ли се да оваква честица носи електрични квант *е* негативног електрицитета, то се на овај начин дефинише т.зв. *електрон* (Stoney). Наравно, питање његова геометриског облика, као и питање да ли га треба сматрати као неку чврсту честицу, остају отворена. Електрони су постали, откада су уведени, основне честице од којих је изграђен атом. Зато ћемо у наредним параграфима анализирати питање, на који се начин ово може замислити. Имајмо засада само у виду да се по схватањима у том стадијуму развитка претставе о структури материје сматрало да је позитиван електрицитет везан за атоме.

Још је Goldstein нашао т.зв. *каналске зраке,* тј. оне који се посматрају иза пробушене катоде. По W. Wien-у и Ц. Томсону и ови се повијају у магнетском пољу но на супротну страну од катодних зракова, и сматра се да су они рој различитих гасних јона позитивно оптерећених (излази да је маса ових честица знатно већа, а брзина кретања мања од брзине катодних зракова). Још треба да споменемо и *анодне зраке* (E. Gehrke и D. Reichenheim) који се вероватно састоје од позитивних јона материјала анода.

При највећој разређености гаса у цевима електрично се пражњење не врши (а и под обичним околностима гасови су рђави проводници), али катодни зраци могу да прођу кроз овакав простор, кад на њ наиђу.

Сличне природе са катоднима су β зраци радиоактивних супстанца. Зато је откриће ових супстанца (Becquerel, 1896, P. и M. Curie, 1898) било од велике важности за стварање теорије електрона. Но још већи је њихов значај био за дубље проучавање структуре материје но што је то давала ова теорија. Ми ћемо се овом врстом појава позабавити подробније доцније. Овде ћемо само додати да, ако су β зраци ројеви електрона, ови се крећу великом брзином (10 до 99,8% брзине светлости). Треба да споменемо још неке појаве у којима се такође назире учешће електрона: 1) електрони лете од бело усијаних метала (Richardson, 1903), 2) т.зв. фотоелектрични ефект. При овој појави метали на које падају ултраљубичасти зраци шаљу зраке исте врсте као и катодни (Lenard). Најзад, позитиван електрицитет носе т.зв. *H* зраци (Marsden, 1914) које шаље водоник, када кроза њ пролазе α зраци од радијума *C*.

§ 39.3 Једначине и закључци теорије електрона. Појаве са којима смо се упознали у претходним параграфима иду у прилог оном схватању структуре материје које се оснива на атомској хипотези. Улога честица електрицитета била је значајна још у теорији електромагнет-

ских појава, коју су у првој половини XIX века дали W. Weber и G. Fechner. Међутим савремено формулисање теорије електрона припада Лоренцу, који је претставу о дискретном склопу материје и електрицитета повезао са теоријом електромагнетских поља како су је дали Фарадеј и Максвел. Пре него што напишемо једначине ове теорије, навешћемо њене основне претпоставке.

Материја има дискретну структуру и састоји се од делића и то: атома, јона и електрона који лебде у етру. За ове честице су везане одређене количине електрицитета, елементарни кванти, јер и електрицитет има дискретну структуру. По атомској хипотези — атоми и молекули стално се крећу и зато је потребна претпоставка о томе, како ово њихово кретање утиче на етар. Лоренц претпоставља да ове ситне честице не повлаче за собом етар, он чак продире у њих но ипак га оне не покрећу. Очевидно је да онда можемо говорити о пољу у етру, не само ван ових честица него чак и у њиховој унутрашњости.

Лоренц даље уводи појам *конвекционе* струје. Роуландов експеримент (§ 36.1) показао је да електрично оптерећење које се креће заједно са материјалним телом испољава исте особине које запажамо код кондукторске струје. Конвекциона струја, тј. ово покретно оптерећење, замењује појам кондукторске струје. Ову последњу треба сматрати као збир конвекционих струја појединих оптерећења. Извесна тешкоћа за ово схватање долази од струје у металима, јер, ако у колу повежемо један метал за други, услед кретања честица дуж кола, изгледа да ће наступити хемиско изједначење. Међутим ово се никад не посматра. Но Ц. Ц. Томсон је дао идеју како се може протумачити појава. По њему су носиоци струје „слободни" електрони који, дакле, нису везани за јоне, и то су честице чије кретање ствара конвекциону струју. Скуп ових слободних електрона у металима чини неку врсту „електронског гаса", чије се померање проучава статистичким методама (Sommerfeld и др.). И поред многих напора, ова хипотеза није могла досада пребродити све тешкоће.

Тело које смо звали диелектрик разликује се од метала, по теорији електрона, у томе, што су у њему сви електрони везани (нема слободних електрона). Дакле, одбацује се појам диелектрика, као средине чији се утицај на електричне појаве, одн. магнетске, може одредити величинама као што су диелектрична константа или магнетски пермеабилитет. Овај утицај се објашњава сад дејством електричних оптерећења везаних за материјалне делиће средине. Ако упоредимо молекуле са диполовима, онда може бити говора о њиховим електричним, одн. магнетским моментима. Резултантни момент за јединицу запремине биће поларизација — вектор $\mathfrak{P}$ (56, § 21.4) или магнетизирање — вектор $\mathfrak{M}$ (22, § 26), а вектори $\mathfrak{D}$ — померање диелектрика и $\mathfrak{B}$ — магнетска индукција губе смисао. Постанак поларизације, одн. магнетизирања може

се објаснити било тиме, да поље ствара извесни ред у распореду (испочетка хаотичном) оса диполова, било претпоставком да електромагнетско поље изазива постанак диполова у молекулима. Правог магнетизма нема — постоје само Амперове струје.

У вези са овим новим погледима треба изменити дефиницију струје у диелектрику (в. § 24). Густином „струје померања" зваћемо сада вектор

$$\mathfrak{g} = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \tag{4}$$

који замењује вектор $\mathfrak{a}$ (14) § 24.

Овде претпостављамо да се права струја с састоји од две компоненте: струје померања етра и конвекционе струје — електричних честица које се крећу. Ако ове две врсте струја постоје у неком телу и ако је $\mathfrak{k}$ густина конвекционе струје, о утицају овог тела водићемо рачуна на тај начин што ћемо увести величину ε, која се дефинише једначином:

$$\varepsilon \mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k} \,. \tag{5}$$

За изотропна тела узимамо да су $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{k}$ колинеарни вектори, те ће ε бити скаларна величина; за анизотропна — ε је тензор.

Само је у етру струја у диелектрику, по Максвеловој теорији, идентична са струјом померања у теорији електрона. А у „диелектрицима" се она састоји од струје померања етра и конвекционе струје, која настаје због померања електрона при стварању стања поларизације у медијуму.

Као нове претпоставке узима још теорија електрона да је $\mu = 1$ за сва тела и да, најзад, важи Максвелов образац $\varepsilon = n^2$ из теорије електромагнетских таласа.

Једначине теорије електрона добио је Лоренц, делом, уводећи нове појмове у Максвелове једначине (20) § 29. Другим речима у њих треба ставити конвекциону струју $\mathfrak{k}$ место кондукторске $\sigma\mathfrak{E}$, струју померања (4) место $\mathfrak{a}$ у последњем члану у првој једначини, тј. $\varepsilon = 1$ и $\mu = 1$.

А узмемо ли електрично оптерећење чија је густина ρ, које се креће брзином $\mathfrak{v}$, биће према дефиницији густина конвекционе струје

$$\mathfrak{k} = \rho \mathfrak{v} \,. \tag{6}$$

Лоренцове једначине имају онда облик

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathfrak{H} &= \frac{4\pi}{c}\rho\mathfrak{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} \,, \\ \operatorname{rot} \mathfrak{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} \end{aligned} \tag{7}$$

и усто

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\rho \,, \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = 0 \,. \tag{8}$$

Према последњој једначини у пољу вектора $\mathfrak{H}$ не постоје извори — тј. магнетске честице. Поље овога вектора је вртложно а изазива га права струја. У овим једначинама нема уствари атомске хипотезе.

Ако узмемо дивергенцију вектора прве од једначина (7), биће $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathfrak{H}=0$, $\operatorname{div}\frac{\partial\mathfrak{E}}{\partial t}=\frac{\partial 4\pi\rho}{\partial t}$ због једначине (8) и, дакле,

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\mathfrak{v}=0\ , \tag{9}$$

тј. густина електрицитета задовољава једначину континуитета, коју смо извели за течности (37) § 11.1.

Према теорији електрона пондеромоторне силе дејствују на материју само онда, ако је она наелектрисана. Зато систем једначина (7—8), који даје електромагнетско поље, треба допунити једначином кретања електрона. Означимо са m његову масу, са e његово оптерећење. Он се креће у електромагнетском пољу и зато сматрајмо да је механичка сила која на њ дејствује резултанта двеју сила. Првој компоненти одговара електрична сила $\mathfrak{E}$. Ова је компонента, дакле, $e\mathfrak{E}$ (обр. (7) § 21.2). Другу, која потиче од магнетског поља, израчунаћемо на основи Био-Саварова закона. Према једначини (11) § 27 елемент струје $J d\mathfrak{l}$ дејствује на неки магнетни пол силом

$$\frac{Jm}{cr^3}\left[\mathfrak{r}\,d\mathfrak{l}\right]\ .$$

Обрнуто, овај пол, који ствара поље вектора

$$\mathfrak{H}=\frac{m}{r^3}\mathfrak{r}\ ,$$

дејствоваће по принципу акције и реакције на тај елемент струје силом

$$\frac{J}{c}\left[d\mathfrak{l}\,\frac{m\mathfrak{r}}{r^3}\right]=\frac{J}{c}\left[d\mathfrak{l}\,\mathfrak{H}\right]\ .$$

Узимајући у обзир да се за линеарну струју ставља $J d\mathfrak{l}$, место општег израза $\mathfrak{i}\,d\tau$, замењујемо претходни израз овим:

$$\frac{d\tau}{c}\left[\mathfrak{i}\,\mathfrak{H}\right]$$

и уводимо, место вектора $\mathfrak{i}$, густину конвекционе струје (6). Служећи се наведеним разлозима, написаћемо другу компоненту механичке силе која дејствује на електрон у облику

$$\frac{\rho\,d\tau}{c}\left[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}\right]\ .$$

Најзад, место $\rho\,d\tau$ ставићемо да је оптерећење електрона e и до-

бивамо, на основи другог Њутнова закона, једначину кретања електрона у облику

$$m\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{E}\right] . \tag{10}$$

Количник $e:m = \gamma$ зове се *специфичко оптерећење*. Ако га уведемо, претходна једначина добива облик

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \gamma\mathfrak{E} + \frac{\gamma}{c}\left[\mathfrak{v}\mathfrak{H}\right] . \tag{11}$$

Дакле, према теорији електрона проучавање електромагнетских појава своди се на решавање система једначина (7, 8, 11). Ако се напишу скаларне једначине које одговарају првој, другој и петој векторској у овом систему добива се 11 једначина. Уопште треба да сматрамо као непознате функције: векторе $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{v}$ (одн. девет њихових координата); а треба да одредимо још и γ и ρ.

Из једначина (7) и (8) можемо извести, као и у Максвеловој теорији (§ 31), систем у којем су електрични и магнетски вектори раздвојени, тј. у свакој од једначина се јавља само један од њих. Зато је потребно само да се узму ротори левих страна једначина (7), и, због обрасца $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathfrak{H} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathfrak{H} - \Delta\mathfrak{H}$ и једначина (8), добивамо

$$\begin{aligned} \Delta\mathfrak{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{E}}{\partial t^2} &= 4\pi\operatorname{grad}\rho + \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\,\mathfrak{v}) , \\ \Delta\mathfrak{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\mathfrak{H}}{\partial t^2} &= -\frac{4\pi}{c}\operatorname{rot}(\rho\,\mathfrak{v}) . \end{aligned} \tag{12}$$

За решавање овог система могу се поново увести потенцијали: вектор потенцијал $\mathfrak{B}$ за $\mathfrak{H}$, тј. може се ставити

$$\mathfrak{H} = \operatorname{rot}\mathfrak{B} \tag{13}$$

и, због друге од једначина (7),

$$\mathfrak{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathfrak{B}}{\partial t} - \operatorname{grad}\varphi . \tag{14}$$

Градијент произвољног скалара φ се додаје у општем случају, јер када се узме $\operatorname{rot}\mathfrak{E}$, одговарајући члан $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$ отпада. За потпуно одређивање ових потенцијала треба увести накнадне услове, но на овом питању се нећемо дуже заустављати*). Овде ћемо проучити низ последица ове теорије, а пре свега оне које се односе на кретање електрона. Ако знамо електромагнетско поље, тј. векторе $\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{H}$, онда се кретање електрона одређује једначином (11). Ово можемо применити

*) види на пр. *F. Zerner*-ов чланак у Hdb. d. Physik. B.II. Кар. 2 где се даје анализа теорије електрона.

на катодне зраке, ако претпоставимо да су они рој електрона, а знамо да се повијају у електричном или магнетском пољу. Уочимо прво само константно магнетско поље које узимамо да стоји управно на правцу кретања електрона. Онда, место једначине (11), имамо

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{\gamma}{c}\left[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}\right] . \tag{15}$$

Дакле је $\mathfrak{H} \perp \mathfrak{v}$ а, осим тога, убрзање такође стоји управно на брзини $\mathfrak{v}$. Према томе, треба да узмемо само његову нормалну компоненту (обр. (9) § 1) чији је модуо $\frac{v^2}{R}$, а R полупречник кривине путање. Из једначине (15) добивамо, после скраћивања,

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{c}\frac{\gamma}{v}H , \tag{16}$$

где су v и H модули вектора $\mathfrak{v}$ и $\mathfrak{H}$. Тангенцијална компонента убрзања је једнака нули, тј.

$$\frac{dv}{dt} = 0 , \qquad v = \text{const.} .$$

Како је, због константности H, цела десна страна у једначини (16) константа, тј. $R = \text{const.}$, путања електрона је кружна линија. Кад бисмо из посматрања нашли њен полупречник, из једначине (16) могли бисмо израчунати количник $\gamma : v$.

Претпоставимо сада да се електрон креће у константном електричном пољу:

$$\frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \gamma\mathfrak{E} , \tag{17}$$

и нека $\mathfrak{E}$ стоји управно на правцу кретања у почетном тренутку. Ова је једначина истог облика као и једначина кретања хоризонталног хица, те ће путања електрона бити парабола. Изведимо њену једначину. Нека x-оса има правац почетне брзине, а z-оса нека буде усмерена дуж вектора $\mathfrak{E}$. Нека се у почетном тренутку $t = 0$ електрон налази у координатном почетку. Дакле, за $t = 0$, биће $\mathfrak{r}_0 = 0$ и $\mathfrak{v}_0 = v_0\mathfrak{i}$.

Интегралимо једначину (17):

$$\frac{d\mathfrak{r}}{dt} = \mathfrak{v} = \gamma\mathfrak{E}t + \mathfrak{v}_0$$

и

$$\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\gamma\mathfrak{E}t^2 + \mathfrak{v}_0 t . \tag{18}$$

Одавде следује

$$x = v_0 t \ , \qquad y = 0 \ , \qquad z = \frac{1}{2} \gamma E t^2$$

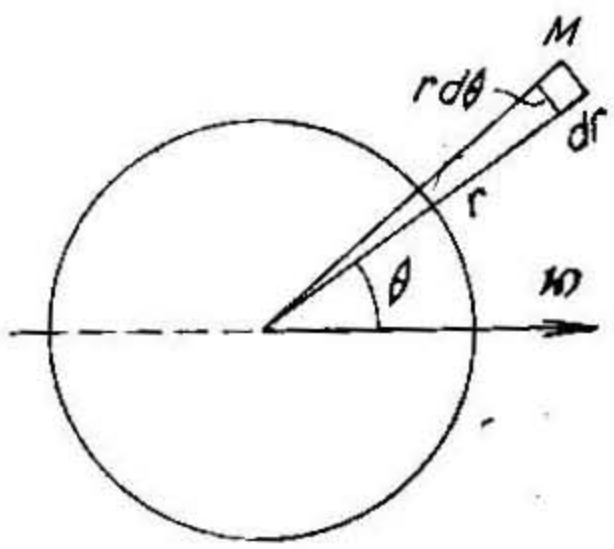
и

$$z = \frac{1}{2} \frac{\gamma}{v_0^2} E x^2 \ . \tag{19}$$

Ако посматрањем одредимо параболу, тј. количник $z:x^2$, из ове једначине можемо наћи вредност количника $\gamma:v_0^2$. Сматрајмо да је у обрасцу (16) $v = v_0$, па ћемо онда моћи израчунати вредности γ и v_0.

Брзина електрона у катодним зрацима креће се између петине и трећине брзине светлости, а помоћу вредности $\gamma = e:m$ и вредности елементарног кванта електрицитета, добива се у § 39.2 наведена вредност масе електрона.

При овом начину проучавања кретања електрона очевидно се он сматра као материјална тачка, јер смо једначину кретања ове тачке усвојили као основу. Али, наравно, теорија се може развити и даље, наиме, ако се узму у обзир коначне димензије електрона. О облику електрона немамо наравно никаквих података и зато можемо да испитамо разне претпоставке. Узмемо ли најпростију — да електрон има облик лопте, знамо да слично неком чврстом телу он може да се помера транслаторно и да се обрће. А претпоставку, да се електрон понаша као апсолутно чврсто тело можемо заменити и компликованијом, наиме, да се електрон може деформисати. Ови случајеви проучени су подробно у теорији електрона, но ми се овде њима нећемо бавити. Зауставићемо се међутим, прво, на израчунавању енергије магнетског поља које изазива покретно сферно оптерећење — електрон. Нека буде његов полупречник a и нека се електрон креће константном брзином $\mathfrak{v}$.



Сл. 41

Како сад, према схватању теорије електрона, имамо појаву конвекционе струје (покретно оптерећење), а ова струја је еквивалентна кондукторској, тј. њу прате познате друге појаве, то ћемо претпоставити да се појавило магнетско поље. Нека буде H_0 модуо магнетског вектора $\mathfrak{H}_0$ тог поља. Густину енергије магнетског поља дефинисали смо изразом (21′) § 26, који ће постати

$$\delta_m = \frac{1}{8\pi} H_0^2 \ , \tag{20}$$

јер сад морамо ставити $\mu = 1$. Модуо магнетског вектора, пошто је

овај вектор изазвала струја, израчунајмо по Био-Саварову закону; у овом случају помоћу обрасца (11) § 27

$$H_0 = \frac{Jdl}{cr^2} \sin(\mathfrak{r}dl) \ .$$

Но овде треба сменити производ $Jdl = \frac{de}{dt} dl = de \cdot \frac{dl}{dt}$ производом оптерећења електрона $\dot{e}$ и модула брзине $\mathfrak{v}$, тј. $v = \frac{ds}{dt}$. Ако са θ означимо угао $(\mathfrak{r}, d\mathfrak{l})$, сл. 41, израз за модуо магнетског вектора имаће облик

(21) $$H_0 = \frac{ev \sin\theta}{cr^2} \ .$$

Дакле је

(20′) $$\delta_m = \frac{e^2 v^2 \sin^2\theta}{8\pi c^2 r^4} \ ,$$

а енергија магнетског поља биће

(22) $$W_m = \frac{1}{8\pi} \int \frac{e^2 v^2 \sin^2\theta}{c^2 r^4} dV \ .$$

Ово поље се протеже од површине лопте у бесконачност. Добивени интеграл можемо лако израчунати. Конструишимо површински елемент у поларним координатама $dr. r\, d\theta$ (сл. 41) и за запремински елемент узмимо прстен који се добива обртањем овог површинског елемента око правца кретања електрона. Биће

$$dV = 2\pi r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr \ .$$

Дакле је

$$W_m = \frac{e^2 v^2}{4c^2} \int_a^\infty \int_0^\pi \frac{\sin^3\theta}{r^2} dr\, d\theta \ ,$$

или

(23) $$W_m = \frac{e^2 v^2}{3c^2 a} \ .$$

Ако електрон мирује, $v = 0$ и $W_m = 0$.

Да би се створило уочено магнетско поље потребно је да се електрон креће, одн. да би се створила енергија поља потребно је да се утроши исти износ енергије. Како се усамљен електрон креће, његова се енергија своди на кинетичку. Схватимо сада горњи израз за W_m као кинетичку енергију електрона. Како се ова уопште дефинише као израз који има облик $\frac{m_e v^2}{2}$, где је m_e маса материјалне тачке, величина

(24) $$m_e = \frac{2}{3} \frac{e^2}{ac^2} \ ,$$

која се добива помоћу обрасца (23), зове се *електромагнетска маса*. Овај

појам увео је Ц. Ц. Томсон и, према томе, на овај начин можемо сматрати да је за покретно оптерећење везана позитивна величина — електромагнетска маса. Но треба имати у виду да смо се овде ограничили само на случај када се електрон креће константном брзином.

Ако се електрон налази у неком електромагнетском пољу, његово кретање неће бити једнако. Поред дејства овог поља долази у обзир још и дејство поља које ствара сам електрон. Али се последње не убраја у низ спољњих, тј. у теорији електрона не сматра се да ово поље ствара неку резултанту сила и момент, но се узима само да оно утиче на вредност сила инерције. Према томе количина кретања електрона вектор $\mathfrak{M}$ и момент количине кретања $\mathfrak{G}$ не дефинишу се више на исти начин као у Њутновој механици (§§ 4.1 и 4.2); наиме као $m\mathfrak{v}$, одн. $[\mathfrak{r}, m\mathfrak{v}]$. Вектори $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{G}$ су овде неке функције брзине, но не линеарне. Претпоставићемо само да је распоред електрицитета у електрону такав, да $\mathfrak{M}$ има правац и смер кретања тј. јединичног вектора $\mathfrak{v}_0$:

$$\mathfrak{M} = M\mathfrak{v}_0 , \qquad M = M(v) , \tag{25}$$

где је v модуо брзине. При постављању једначина ове теорије узима се да је кретање електрона квазистационарно. По дефиницији, дакле, поље при овом стању може се сматрати као поље које ствара електрон при једнаком кретању.

Узимајући да закони количине кретања и момента количине кретања важе и за овакво кретање електрона, једначине кретања написаћемо у овом облику:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{M} = \mathfrak{F} , \qquad \frac{d}{dt}\mathfrak{G} = L . \tag{26}$$

Зауставимо се на првој од њих. Диференцирајмо једначину (25)

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{dM}{dv}\frac{dv}{dt}\mathfrak{v}_0 + M\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} .$$

На основи образаца (9) § 1 ($\mathfrak{v}_0 = \mathfrak{t}$) имамо за убрзање

$$\mathfrak{a} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{v}_0 + \frac{v^2}{R}\mathfrak{n} = \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathfrak{v}_0 + v\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} .$$

Одавде је

$$\frac{d\mathfrak{v}_0}{dt} = \frac{v}{R}\mathfrak{n}$$

а, зато је

$$\frac{d\mathfrak{M}}{dt} = \frac{dM}{dv}\frac{dv}{dt}\mathfrak{v}_0 + \frac{M}{v}\frac{v^2}{R}\mathfrak{n} , \tag{27}$$

где је $\mathfrak{n}$ јединични вектор главне нормале путање електрона, а R полу-

пречник кривине. Узмимо пројекције прве од једначина (26) на правце дирке и главне нормале путање

(28) $$F_T = \frac{dM}{dv}\frac{dv}{dt}, \qquad F_N = \frac{M}{v}\frac{v^2}{R}.$$

Упоређујући ове једначине са Ојлеровим диференцијалним једначинама (13) § 2.2, видимо да у првој улогу масе игра множитељ $\frac{dM}{dv}$, у другој $\frac{M}{v}$. Ове две функције зову се у теорији електрона такође електромагнетске масе и то

(29) $$m_l = \frac{dM}{dv}$$

— *лонгитудинална*, а

(30) $$m_t = \frac{M}{v}$$

трансверзална. У овоме лежи битна разлика између Њутнове механике и механике електрона (M. Abraham). Вредности лонгитудиналне и трансверзалне масе зависе од претпоставака о облику и „агрегатном" стању електрона (тј. од претпоставке да ли је он чврст или се може деформисати). Како су, осим тога, изрази (29) и (30) функције брзина, и количник $e:m = \gamma$ који смо увели у једначину (11) мора да се мења. А из Кауфманових експеримената следује да γ опада, када брзина електрона расте.

Једначине теорије електрона омогућују да се објасни притисак светлости који она врши на тела на која пада, као што смо то споменули на крају § 36. Овај се притисак може израчунати, ако се узме у обзир сила којом електромагнетско поље дејствује на електрон а чији израз имамо у једначини (10). Оваква сила израчуната за јединицу оптерећења биће

(31) $$\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}\right].$$

Дакле, ако се узме тело коначних димензија, па се са ρ означи густина електрицитета у њему, на ово ће тело дејствовати резултанта

(32) $$\mathfrak{F} = \int_V \mathfrak{F}_1 \rho\, dV.$$

Интегранд се може трансформисати помоћу других једначина теорије електрона (7) и (8). Наиме, због услова (31), добивамо

$$\mathfrak{F}_1 \rho = \rho\,\mathfrak{E} + \frac{1}{c}\left[\rho\,\mathfrak{v}, \mathfrak{H}\right]$$
$$= \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} + \left[\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}, \mathfrak{H}\right] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H}\right]\right\}.$$

У последњем члану имамо

$$\left[\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}, \mathfrak{H}\right] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}\right] - \left[\mathfrak{E}\,\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t}\right]$$

или, према дефиницији Појнтингова вектора (23) § 29.1 и према другој од једначина (7)

$$\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} + c\left[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right] .$$

Осим тога, због друге од једначина (8) можемо у интеграну додати члан $\frac{1}{4\pi}\mathfrak{H}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{H}$ који је једнак нули, па ћемо имати

$$(33)\qquad \mathfrak{F}_1\rho = \frac{1}{4\pi}\left\{\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right] + \mathfrak{H}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{H} - \left[\mathfrak{H}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{H}\right]\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial t} .$$

Трансформишимо сад израз

$$(34)\qquad \int_V \left\{\mathfrak{E}\,\mathrm{div}\,\mathfrak{E} - \left[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right]\right\} dV .$$

Прво имамо

$$\left[\mathfrak{E}\,\mathrm{rot}\,\mathfrak{E}\right] = \left[\mathfrak{E}[\nabla\mathfrak{E}]\right] = \frac{1}{2}\nabla\mathfrak{E}^2 - (\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{E} ,$$

па се израз (34) раставља у два

$$-\frac{1}{2}\int_V \nabla\mathfrak{E}^2 dV \qquad \text{и} \qquad \int_V \left\{\mathfrak{E}(\nabla\mathfrak{E}) + (\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{E}\right\} dV ,$$

које ћемо трансформисати одвојено. Ако се у Гаусову обрасцу (15) § 0.2 стави место $\mathfrak{v}: w\mathfrak{i}$, $w\mathfrak{j}$ и $w\mathfrak{k}$ добивају се три једначине, од којих је прва

$$\int_S w(\mathfrak{i}\,d\mathfrak{f}) = \int_V \frac{\partial w}{\partial x}\, dV ,$$

а S је површина која обухвата запремину V. Помножимо ли ове једначине са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ и саберимо ли их, добићемо векторски образац

$$\int_S w\, d\mathfrak{f} = \int_V \mathrm{grad}\, w\, dV ,$$

према којем је

$$(35)\qquad -\frac{1}{2}\int_V \nabla\mathfrak{E}^2 dV = -\frac{1}{2}\int_S \mathfrak{E}^2\, d\mathfrak{f} .$$

Исти Гаусов образац даје

$$\int_S A\mathfrak{B}\, d\mathfrak{f} = \int_V \mathfrak{B}\, \mathrm{grad}\, A\, dV + \int_V A\, \mathrm{div}\, \mathfrak{B}\, dV$$

$$= \int_V (\mathfrak{B}\nabla) A\, dV + \int_V A\, (\nabla\mathfrak{B})\, dV\ .$$

Ако место скалара A напишемо A_x, A_y, A_z, помножимо ове три једначине са $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ и саберемо, и ако још уведемо вектор $\mathfrak{A} = A_x\mathfrak{i} + A_y\mathfrak{j} + A_z\mathfrak{k}$, добићемо образац

$$\int_S \mathfrak{A}\,(\mathfrak{B} d\mathfrak{f}) = \int_V (\mathfrak{B}\nabla)\mathfrak{A} dV + \int_V \mathfrak{A}(\nabla\mathfrak{B})\, dV\ , \tag{36}$$

који омогућује да се израчуна други део израза (34). Треба само ставити да је $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, па се добива

$$\int_V (\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{E}\, dV + \int_V \mathfrak{E}\,(\nabla\mathfrak{E})\, dV = \int_S \mathfrak{E}\,(\mathfrak{E} d\mathfrak{f})\ . \tag{37}$$

Сличан рачун примењујемо и на израз

$$\int_V \{\mathfrak{H}\, \mathrm{div}\, \mathfrak{H} - [\mathfrak{H}\, \mathrm{rot}\, \mathfrak{H}]\}\, dV\ , \tag{38}$$

па ћемо, на основи образаца (32—38), добити

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi}\left\{\int_S \mathfrak{E}\,(\mathfrak{E} d\mathfrak{f}) + \int_S \mathfrak{H}(\mathfrak{H} d\mathfrak{f})\right\} - \frac{1}{8\pi}\int_S (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, d\mathfrak{f} - \frac{1}{c^2}\int_V \frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t}\, dV\ . \tag{39}$$

Дакле, ако се тело коначних димензија налази у уоченом електромагнетском пољу, ово поље дејствује на тело силом $\mathfrak{F}$ (39). Ако, у смислу електромагнетске теорије светлости, сматрамо да су уочени таласи — светлосни таласи, они ће бити веома брзи и средња вредност Пojнтингова вектора може се приближно узети за константу, тј. стављамо $\frac{\partial\mathfrak{S}}{\partial t} = 0$. Онда сила $\mathfrak{F}$ постаје површинска, па се може звати *притисак светлости* на површину тела. Уведемо ли, ради упрошћавања израза, нове претпоставке, наиме, да је

$$(\mathfrak{E}\, d\mathfrak{f}) = (\mathfrak{H}\, d\mathfrak{f}) = 0\ ,$$

тј. да на равну површину тела пада управно трансверзални равно по-

ларизовани талас, израз (39) трансформише се у

$$\mathfrak{F} = -\int_{S} \delta_{em}\, d\mathfrak{f} \,, \tag{40}$$

ако се означи са

$$\delta_{em} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2\right) \tag{41}$$

густина енергије електромагнетског поља (в. обр. (74) § 21.5 и (21) § 26).

Уз извесне нове претпоставке изводи се у теорији електрона нарочити образац за дисперсију светлости, образац, наиме, у којем се индекс преламања појављује као функција фреквенције таласа. Због Максвелова обрасца $\varepsilon = n^2$ и једначине (5) имамо прво, за изотропна тела,

$$n^2\mathfrak{g} = \mathfrak{g} + \mathfrak{k} \,, \tag{5'}$$

где вектор $\mathfrak{g}$ има вредност изражену у обрасцу (4). Ако схватимо светлост као електромагнетски талас, то значи да ће се електрони налазити у периодичном електромагнетском пољу. Они ће се померати из свог стања „равнотеже" (претпостављамо да ово стање постоји када кроз средину не пролази светлост) па ће, због тога, наступити стање поларизације „диелектрика". Онда ће на електрон дејствовати, поред сила наведених у једначини (11), нека нова сила. Сматраћемо да је ова сила квазиеластична, тј. пропорционална удаљењу од положаја равнотеже (в. § 2.5). Нека се у пољу налази један електрон. Положимо координатни почетак у његов положај равнотеже. Једначину његова кретања можемо тада написати у облику

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \kappa^2\mathfrak{r} = \gamma\mathfrak{E} + \frac{\gamma}{c}\left[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}\right] \tag{11'}$$

(в. (35) § 2.5 и (11)). При овим осцилацијама брзина $\mathfrak{v}$ померања електрона је мала величина у односу на брзину светлости c, те се последњи члан занемарује, тј. добивамо

$$\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2} + \kappa^2\mathfrak{r} = \gamma\mathfrak{E} \,. \tag{11''}$$

Електрон према томе врши принудне осцилације. Даље упрошћавамо проблем узимајући место ове векторске — скаларну једначину

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \kappa^2 x = \gamma E_0 \sin \mu t \tag{11'''}$$

коју добивамо, ако означимо са x удаљење електрона од положаја равнотеже у правцу вектора $\mathfrak{E}$, у којем се врше осцилације, и ставимо да је овај вектор једнак $E_0 \sin \mu t\, \mathfrak{E}_0$.

Ова једначина за принудне осцилације је специјалан случај једначине (47) § 2.5 ($\alpha = 0$, $\sigma = 0$ в. обр. 48—50 § 2.5) а може се и непосредно проверити да је функција

$$x = \frac{\gamma E_0 \sin \mu t}{\kappa^2 - \mu^2}$$

њен интеграл. На основи овог обрасца можемо добити за брзину електрона $\mathfrak{v}$ образац

$$\mathfrak{v} = \frac{\gamma}{\kappa^2 - \mu^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} .$$

Претпоставимо сада да се електрони у јединици запремине могу поделити у групе и да једној групи (i) припадају електрони који имају брзине $\mathfrak{v}_i$ које одговарају истој вредности μ_i. Нека N_i буде њихов број. Слично једначини (6) можемо сада ставити да је густина конвекционе струје

$$\mathfrak{k} = \Sigma \frac{N_i e \gamma}{\kappa^2 - \mu_i^2} \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t} .$$

Стављајући ову вредност вектора $\mathfrak{k}$ и (4) — вектора $\mathfrak{g}$ у једначину (5′), добивамо

$$n^2 = 1 + 4\pi e \gamma \Sigma \frac{N_i}{\kappa^2 - \mu_i^2} .$$

Ако се узму средине са индексима преламања блиским 1, може се место $n^2 - 1$ приближно ставити $2(n-1)$. Означимо ли са ν и ω_i фреквенције сопствених осцилација електрона, одн. светлости која пада на средину, биће $\kappa = 2\pi\nu$, $\mu_i = 2\pi\omega_i$ и претходни образац добива облик

$$n = 1 + \frac{e\gamma}{2\pi} \Sigma \frac{N_i}{\nu^2 - \omega_i^2}$$

који показује да индекс преламања зависи од фреквенције светлосног таласа. Претходни обрасци за дисперсију светлости, коју су на основи теорије електрона објаснили Drude и Voigt, од извесне су користи за фреквенције ω_i које нису сувише блиске ν. Као што се види, за $\omega_i \to \nu$, добивамо да $n \to \infty$, а за $\omega_i > \nu$ n^2 испада шта више негативан. У таласној механици појава дисперсије добила је објашњење другим путем и оно обухвата случајеве нормалне и аномалне дисперсије.

У теорији електрона учињен је покушај да се објасни и зрачење светлости. Наиме, требало би сматрати да атом осцилира као Херцов електрични осцилатор (а у овоме се осцилације стварају због периодичког пражњења кондензатора). Но при проучавању зрачења овај модел светлосног извора доводи до великих тешкоћа, те се њиме нећемо подробније ни бавити.

Од важности је било да се испита, да ли је теорија електрона у складу са општим принципима Теориске физике. Може се показати да принцип одржања енергије важи за ову теорију, да се закони количине кретања и момента количина кретања могу, после извесног уопштавања, довести у склад са теоријом електрона. Али принцип акције и реакције више не важи, јер, ако постоји сила која у електромагнетском пољу дејствује на електрон, другу, њој супротну не видимо. На етар, по теорији електрона, не дејствују никакве силе; у Максвеловој теорији сматра се међутим да се у етру појављују унутрашње силе. Покушаји да се овај принцип друкчије формулише, како би се довео у склад са теоријом електрона, није успео. Узрок треба тражити у томе, што за једначине теорије електрона не важи више Галилејев принцип релативитета: оне нису инваријантне за Галилејеву трансформацију (§ 36.2).

У теорији магнетизма, као што смо видели у § 26, играо је важну улогу појам елементарног магнета. Теорија електрона даје и за овај појам извесно објашњење, пошто се могу поставити такви услови да једна група електрона, скупљених у једном молекулу, ствара само константно магнетско поље (дакле без електричног), па ће, према томе, бити еквивалентна елементарном магнету. Ова група електрона зове се *магнетон*. И низ електричних и магнетских особина материје нашао је своје објашњење у теорији електрона и у облику који је она имала у току првих 20—30 година овог века. Но ипак је дошло и до нових открића која су, с једне стране, довела до бољег прецизирања проблема структуре материје, с друге стране захтевала су увођење честица нових врста. Са њима ћемо се упознати у наредним параграфима.

§ 40 Атомски модели. Извесне појаве о којима смо досада говорили нашле су у теорији електрона своја објашњења. Овим појавама припадају повијање катодних зракова (роја електрона) у електричном или магнетском пољу, електрична струја и др., но очевидно је да се теорија мора проширити, јер досада није била прецизирана веза између атома и електрона. Зрачење радиоактивних супстанца показује да је седиште честица оптерећених електрицитетом негде у унутрашњости ових тела. Ако се прими атомска теорија материје, онда је природна претпоставка да је ово седиште у самом атому. Онда β зраци, на пр., претстављају скуп оних електрона који су се одвојили од атома (услед неког још непознатог узрока). Увођење хипотезе о седишту електрона у унутрашњости атома има врло велики значај, јер у исти мах атом престаје да буде нека недељива честица. И одмах се поставља питање, где се у атому налазе позитивна и негативна електрична оптерећења. Потребно је, дакле, да поставимо хипотезу о склопу атома, другим речима, да замислимо неки модел атома.

Први атомски модел дао је Ц. Ц. Томсон и он изгледа овако: атом је лопта по чијој је целој запремини распоређен позитиван електрицитет; а осим тога, по његовој унутрашњости круже електрони. Рачун показује да под овим условима на електрон дејствује привлачење ка средишту сразмерно растојању електрона од средишта. Но са другим атомским моделом, који припада Резерфорду, постиже се објашњење већег броја чињеница, нарочито ако се приме измене које је доцније увео N. Bohr. По основној Резерфордовој идеји атом са замишља као скуп честица сличан Сунчеву систему. Око језгра, у којем је углавном окупљена маса атома и које је оптерећено позитивним електрицитетом, круже електрони као планете око Сунца. Језгро их привлачи по Кулонову закону. Као подлога за ову претпоставку служе резултати посматрања кретања α зракова радиоактивних супстанца који су у стању да прођу кроз дебеле слојеве материје не мењајући при томе свој правац кретања. Кретања роја α честица посматрају се у Вилсоновој комори, где се на путу сваке α честице, око јона̂ као језгара за кондензацију, образују капљице у засићеној воденој пари, тако да цела њена путања постаје видљива. Овде наравно чинимо претпоставку да је ово путања *једне* α честице. Маса електрона сувише је мала да би могла утицати при судару α честице са електроном. Дакле, ова честица слободно пролази кроз простор сваког атома, не приближујући се сувише језгру, које би могло да утиче на њено кретање. Најзад, претпостављамо да су димензије језгра врло мале (реда 10^{-12} цм) у поређењу са његовим растојањима од електрона који припадају истом атому (ред његових димензија цени се на 10^{-8} цм). Процена ових димензија врши се на основи података Кинетичке теорије гасова, но у детаље рачуна овде нећемо улазити. У Резерфордову моделу није било прецизирано, колики је полупречник атома, тј. простора који овај заузима, а, наравно, ни облик језгра, ни електрона. Упоређивање кретања α честица у разним материјама пружа извесне разлоге за нове врло важне претпоставке. Наиме, досада нисмо одређивали број електрона који кружи око језгра. Узима се да је број ових електрона-планета у атому неког хемиског елемента једнак његову редном броју у периодном систему. А како је атом уопште као целина у погледу електрицитета неутралан, претпоставља се да језгро атома има онолико позитивно оптерећење, колико износи тотално оптерећење свих електрона који га прате. Како на првом месту у периодном систему стоји водоник, то се он сматра, према горе реченом, за систем језгро (са јединичним позитивним оптерећењем) + један електрон. Ово се језгро зове *протон* (његова маса је разлика између масе атома водоника и масе једног електрона).

Пре него што проучимо Боров атомски модел, зауставићемо се још једном на низу важних експерименталних чињеница.

§ 40.1 Спектрална анализа. Први и најважнији податак, основа спектралне анализе је чињеница да свако тело, сваки хемиски елемент шаље, када је у стању да зрачи светлост, карактеристичне по себе зраке и, према томе, даје одређени спектар. Положај линија у спектру одређује се једним бројем: ако се прими таласна теорија светлости, таласном дужином λ која одговара једној линији (одређене боје), или — фреквенцијом $\nu = \frac{1}{T}$, тј. бројем трептаја у секунди. Имали смо образац $\lambda = cT$ ((15) § 31, где треба сменити α брзином светлости c), но у спектроскопији је уобичајено да се рачуни изводе са обрнутом вредношћу таласне дужине $\left(\frac{1}{\lambda}\right)$ место са фреквенцијом $\nu = \frac{c}{\lambda}$, те се и први број зове фреквенција $\left(\text{тј. } \frac{1}{cT}\right)$. Означаваћемо га даље са ν_*. Мерења положаја линија у спектрима показала су да између фреквенција појединих линија у спектру неког елемента постоје везе, тј. да ове линије образују групе, серије, тако да се фреквенције појединих линија у серији могу наћи помоћу врло простих образаца. За водоник имамо образац

$$\nu_* = R\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{42}$$

где су n и k цели бројеви, а $R = 109678\ \text{cm}^{-1}$ је т.зв. Rydberg-ова константа. Прву серију ових линија (в. сл. 42) открио је Balmer (1885) који је горњи образац писао у облику

$$\lambda = C\frac{n^2}{n^2 - 4}, \quad \text{тј. } \nu_* = R\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}\right), \tag{43}$$

где броју n треба давати редом вредности $3, 4, 5, \ldots$ (око 50 линија). Другу серију пронашао је Lyman (1914) у ултраљубичастом делу спектра са $k = 1$, $n = 2, 3, 4, \ldots$ Трећа је Paschen-ова серија (1909) у инфрацрвеном делу спектра $k = 3$, $n = 4, 5, \ldots$ Четврта је Brackett-ова серија (1922) $k = 4$, $n = 5, 6, \ldots$ и, најзад 1924 г. нашао је A. H. Pfund једну линију која одговара бројевима $k = 5$, $n = 6$.

Сл. 42. — *Серије линија*. — *a* — Бракетова серија, *b* — Пашенова, *c* — Балмерова, *d* — Лиманова (ултраљубичасти део) у спектру атома водоника.

За спектар јонизованог хелијума постоји образац

$$\nu_* = R\left\{\frac{1}{\left(\frac{k}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right\} \tag{44}$$

и познате су серије: Pickering-ова ($k = 4$) и Fowler-ова ($k = 3$) од којих

је прву нашао Пикеринг (1897) у спектру звезде ζ Puppis. Прво се сматрало да линије ових серија припадају водонику, али су, 1914 г., Пашен и Бартелс коначно доказали да оне припадају хелијуму.

Сличне просте обрасце поставио је Ридберг за серије линија у спектрима алкалних метала које су пронашли Kayser и Runge. Код ових разликују се четири врсте серија: главна, прва споредна (или дифузна), друга споредна (оштра) и основна или Bergmann-ова.

Но пре свега је требало наћи објашњење главној чињеници да постоје нарочите серије линија у спектрима.

По себи се разуме да је дубље проучавање спектара показало и нове особине; н.пр., да у једној серији линије конвергирају према некој одређеној граници, да заједно са смањивањем таласне дужине опада јачина и др.

Нове чињенице у спектроскопији донело је усавршавање спектроскопа (одн. дифракционе решетке). Од веће или мање способности расипања боја зависи и облик спектра. Прво је утврђено да се неке познате усамљене линије у спектрима разних елемената растављају у групе линија. Зато се разликују линије које остају усамљене, т.зв. *синглети*, од оних које постају двојне, тројне и уопште вишеструке. Ове се зову: *дублети*, *триплети*, одн. *мултиплети*. А у најјачим апаратима посматра се ново растављање простих линија у групе, нарочито у спектрима елемената са већом атомском тежином.

Познато је, даље, да на облик спектра могу да утичу извесне чињенице чији извор лежи ван спектроскопа. Овој врсти појава припадају Земанов (Zeeman, 1896 г.) ефект и Штарков (Stark, 1913) ефект. Ове две појаве доказују да постоје везе између светлосних, с једне, и магнетских и електричних појава, с друге стране. Код првог ефекта, неке линије у спектру постају вишеструке када се на путу зракова створи јако магнетско, код другог ефекта — кад се створи електрично поље. Но код Земанова ефекта разликују се два случаја: нормални и аномални. У првом се појављују у спектру, поред основне линије, још две, симетричне, с десне и леве стране, — и то само за одређене линије. Код аномалног ефекта може да се појави и више нових линија.

Нове податке, који су се показали као врло важни за разумевање структуре материје и проучавање њених особина, дала је нова грана спектроскопије, т.зв. Рендгенова спектроскопија.

Ако на неко тело падају Рендгенови зраци (зовимо их *примарни*), оно испушта, као што је открио Barkla (1905), друге Рендгенове зраке (секундарне). У т.зв. „вакуум-спектрографу“ пошло је Moseley-у (1913) за руком да добије спектре секундарних зракова. Досадања проучавања ових спектара показала су да се у спектру сваког хемиског елемента појављују четири серије линија. Оне се означавају као *K, L, M, N*-

серија. Њихов положај зависи од природе тела, иначе ови Рендгенови зраци су природе сличне природи светлосних зракова.

И положај линија у Рендгеновим спектрима покорава се извесним правилима. Прво је Мозелеј поставио правило којим се одређује фреквенција најјаче линије (K_α) у K-серији. Ако означимо са Z број елемента у периодном систему, са a константу чија се вредност за велики број тела мало разликује од 1.6, са $\nu_{K\alpha}$ „фреквенцију" или т.зв. таласни број ове линије, биће

$$\nu_{K\alpha} = \frac{3}{4} R (Z - a)^2 , \tag{45}$$

где је R опет Ридбергова константа. Сличан образац узима се и за најјачу линију L-серије, но он важи са мањом тачношћу. Теорија Рендгенових спектара, ово морамо одмах напоменути, задаје велике тешкоће чак ако се и прими квантна хипотеза.

За савремено схватање структуре материје од важности је још т.зв. Compton-ов ефект (1923). И он је у вези са Рендгеновим зрацима. Ако монохроматски Рендгенов зрак пада на извесно тело (на пр. комад парафина), и ако се испита спектар зракова после одбијања (и растурања), онда се сем основне линије појављује још једна чија је фреквенција мања. Шта више, положај нове линије зависи од угла између примарног зрака и правца тело — посматрач. Ова се појава извесно време сматрала за поуздан доказ корпускуларне природе светлости, а ниже ћемо видети њено објашњење.

Слична је појава и т.зв. Raman-ов ефект (1928). Он се посматра при растурању видљивих зракова у течностима и гасовима, када се, поред основне линије, појављују у спектру још и нове. Али у овом случају фреквенције нових линија не зависе од правца растурања — у овом је битна разлика између Раманова и Комптонова ефекта.

Најзад, од споменутих спектара који се састоје од светлих линија треба разликовати оне који се састоје од широких светлих пруга. Док се први јављају код хемиских елемената и зову се атомски спектри, друга врста се посматра код тела која се састоје, по атомској хипотези, од молекула, код којих је у сваком појединoм везано по неколико атома. Ова друга врста спектара је много компликованија а, наравно, и њихова теорија.

§ 40.2 Периодни систем. Ако се сви хемиски елементи поређају по реду све већих атомских тежина, може се, као што је открио Менделејев, упоређивањем карактеристичних физичких и хемиских особина утврдити за њих извесна периодичност. Ова се изражава у начину писања — приказана у табели стр. 372. У овом чувеном периодном систему имамо осам стубаца, и у сваком од њих по две групе. Елементи

Периодни систем

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII		
1	1 *H* 1,0078									2 *He* 4,002
2	3 *Li* 6,94	4 *Be* 9,02	5 *B* 10,82	6 *C* 12,00	7 *N* 14,01	8 *O* 16,00	9 *F* 19,00			10 *Ne* 20,18
3	11 *Na* 23,00	12 *Mg* 24,32	13 *Al* 26,97	14 *Si* 28,06	15 *P* 31,02	16 *S* 32,06	17 *Cl* 35,46			18 *Ar* 39,94
4	19 *K* 39,10	20 *Ca* 40,08	21 *Sc* 45,10	22 *Ti* 47,90	23 *V* 50,95	24 *Cr* 52,01	25 *Mn* 54,93	26 *Fe* 55,84	27 *Co* 58,94	28 *Ni* 58,69
	29 *Cu* 63,57	30 *Zn* 65,38	31 *Ga* 69,72	32 *Ge* 72,60	33 *As* 74,93	34 *Se* 79,2	35 *Br* 79,92			36 *Kr* 83,7
5	37 *Rb* 85,44	38 *Sr* 87,63	39 *Y* 88,92	40 *Zr* 91,22	41 *Nb* 93,3	42 *Mo* 96,0	43 *Ma* —	44 *Ru* 101,7	45 *Rh* 102,9	46 *Pd* 106,7
	47 *Ag* 107,88	48 *Cd* 112,41	49 *In* 114,8	50 *Sn* 118,7	51 *Sb* 121,76	52 *Te* 127,5	53 *I* 126,93			54 *X* 131,3
6	55 *Cs* 132,81	56 *Ba* 137,36	57 *La* *) 138,90	72 *Hf* 178,6	73 *Ta* 181,4	74 *W* 184,0	75 *Re* 186,31	76 *Os* 190,8	77 *Ir* 193,1	78 *Pt* 195,23
	79 *Au* 197,2	80 *Hg* 200,61	81 *Tl* 204,39	82 *Pb* 207,22	83 *Bi* 209,0	84 *Po* 210,0	85*			86 *Nt* 222
7	87*	88 *Ra* 225,97	89 *Ac* 226	90 *Th* 232,1	91 *Pa* 230	92 *U* 238,14				

*)	58 *Ce* 140,13	59 *Pr* 140,9	60 *Nd* 144,3	61 *Il* —	62 *Sm* 150,0	63 *Eu* 152,4	64 *Gd* 157,3	65 *Tb* 159,2	66 *Dy* 162,5	67 *Ho* 163,5	68 *Er* 166,2	69 *Tu* 169,4	70 *Yb* 173,5	71 *Cp* 175,0

исте групе исписани су једни испод других и имају сличне особине. Племенити гасови (хелијум (2), неон (10), аргон (18), криптон (38), ксенон (54), еманација радијума (86) стоје на крају сваке периоде (у водоравном правцу); у првој периоди су два елемента (водоник и хелијум), у другој и трећој по осам, у четвртој и петој по осамнаест, шести обухвата тридесет и два елемента, а седма је непотпуна (шест елемената и завршава се ураном).

Као што се види, образац (45) може се тумачити и на овај начин: квадратни корен из фреквенције одређене Рендгенове линије расте линеарно са бројем хемиског елемента у периодном систему. Поређају ли се спектри по положају на пр. *K* серије*), по њиховим таласним дужинама, добива се т.зв. *природни ред* елемената. У начелу, овај природни ред није донео нових података, разлика која постоји између њега и периодног система је мала: у последњем стоји аргон пред калијумом, кобалт пред никлом, телур пред јодом и торијум пред протактинијумом.

Атомске тежине елемената које стоје у периодном систему нису цели бројеви. Међутим према атомском моделу, о којем ће бити даље речи, требало би да буду изражене целим бројевима. Зато је било од велике важности откриће да су скоро сви хемиски елементи мешавине т.зв. *изотопа*, тј. тела која имају исте хемиске особине, а разликују се атомском тежином, и која се раније нису могла раздвајати хемиским путем. Прва идеја о томе припада Соди-у (Soddy, 1910), а прву потврду је она нашла у Ц. Ц. Томсоновим експериментима (1913) са неоном. Ови експерименти су доказали да се неон (атомске тежине 20,18) састоји од два изотопа, чије су атомске тежине 20 и 22. А од 1919 г., када је Астон (Aston) увео нарочиту методу за изналажење изотопа, број познатих стабилних изотопа попео се на 250. Од интереса је да за елементе са парним редним бројем постоји много више изотопа, на пр. за елемент Zinn (бр. 50) познато их је 11. Уопште, изотопи који припадају једном елементу имају сви исте хемиске и многе физичке особине; само изотоп водоника, т.зв. тешки водоник или *деутеријум*, претставља изузетак. Овај елемент, који се означава са *D* или H^2, пронашао је Urey (1932) спектроскопским путем. Језгро атома деутеријума зове се *деутерон* и сматра се да оно има масу 2 (двоструку водоникову масу).

§ 40.3 Позитон и неутрон. Број хипотетичних честица мора да се повећа због извесних појава које су посматране у току последњих година. Прва од ових пронађена је при проучавању т.зв. космичког зра-

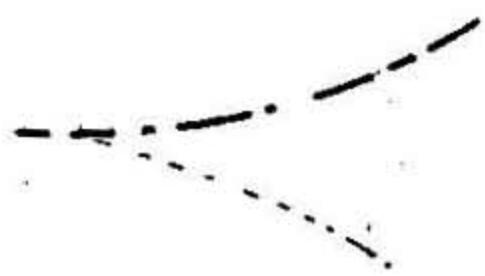
---

*) Ове серије имају за разне елементе сличан облик.

**) Већ 1934 г. могла се добивати „тешка вода“ D_2O чија је густина 1,11. Она мрзне на температури $+3{,}8^0$C, а кључа на $101{,}4^0$C. Највећу густину има на температури $11{,}6^0$C.

чења. Познато је да се са површине Земље распростиру радиоактивни зраци. Hess и Kolhörster нашли су (1912—14 г.) да јачина овог зрачења опада кад се висина над земљом повећава — до висине од 400 м.; за веће висине ова јачина почиње да расте. На висини од 7 км. ово зрачење је двадесет пута веће него при тлу. Међутим, да ово зрачење иде само од тла, оно би се већ изгубило на висини од једног километра. Многобројна испитивања овог необично јаког зрачења чији зраци продиру у воду и до дубине од неколико стотина метара, — као што су то нашли Millikan и Cameron, довела су до закључка да се његов извор налази негде у васиони. Зато се оно и зове *космичко*. Сматра се да на границу Земљине атмосфере стиже из васионе рој честица и то је т.зв. примарно зрачење. Ове честице, продирући у атмосферу, изазивају у њој таласно зрачење. Трећи део појаве је — поновно стварање роја честица.

Проучавајући фотографске снимке трагова електрона који су се појавили у Вилсоновој комори услед космичког зрачења, нашао је Андерсон (Anderson, 1932 г.) један траг који се извијао супротно траговима електрона (слично J. Curie-F. Joliot-овој слици (43) на којој имамо истовремено два трага). Оставила га је несумњиво честица оптерећена позитивним електрицитетом. Даља испитивања, при којима су вршени покушаји да се нарочитим методама створе овакве честице, доказала су да се доиста може говорити о „позитивним“ електронима. Ове честице зову се сада *позитони*. Проналазак позитона био је од нарочите важности, јер се у теоријама које су се развијале за последњих 40 година претпостављала егзистенција само електрона као честица негативног електрицитета.



Сл. 43.

Осим три споменуте врсте основних честица: електрона, протона и позитона, било је потребно да се уведе и четврта т.зв. *неутрони*. Хипотезу о неутрону захтевала је ова појава. Ако на елемент берилијум падају α зраци, они изазивају секундарно зрачење. Ово секундарно зрачење необично је јако и, ако се пусти да прође кроз неку другу материју, изазива ново зрачење. Проучавајући берилијумово зрачење, нашао је Chadwick да је оно корпускуларне природе, ма да га прате јаки γ зраци. Но честице од којих се састоји ово зрачење разликују се од α и β честица, — оне су неутралне, тј. немају ни позитивног, ни негативног електрицитета. Зато се зову неутрони. Рачунским путем је процењено да је њихова маса нешто већа од масе протона, а атомска тежина 1,008. Како ови зраци, ројеви неутрона, пролазе слободно кроз плочу олова, дебљине 30 см. (ово показује јачину зрачења!), претпоставља се да је њихова запремина мања од запремине протона.

Чињенице наведене у последњим трима параграфима утицале су да се измени првобитни атомски модел, те ћемо се стога овде упознати са новим схватањем које је донела Н. Борова теорија.

§ 40.4 Борова теорија атомског склопа. У Резерфордову атомском моделу који смо изложили у § 40 треба да се прецизира више претпоставака. Имамо, прво, да језгро привлачи електроне силом (по Кулонову закону) коју смо нашли у Електростатици. Затим се претпоставља да електрон не пада на језгро него кружи око њега, јер, сем привлачења, постоји и друга сила, — центрифугална, чија егзистенција изгледа природна, пошто је и електрон материјална честица. Остало је отворено питање и о димензијама и облику путања електрона. Што се димензија система тиче, н.пр., полупречника кружне путање електрона у најпростијем систему, тј. језгро + један електрон, он би уопште могао имати ма какву вредност. Међутим треба узети у обзир још једну врло важну чињеницу. Ако се прихвати да негативна честица, електрон, кружи око језгра оптерећена позитивним електрицитетом, овај систем се може, са гледишта Електродинамике, упоредити са малом антеном у којој се врше осцилације. Од овог система, дакле, треба да се распростиру електромагнетски таласи, Према томе, атом зрачи извесну количину енергије, коју преносе ови таласи. И тако се појавила потреба да се прецизира однос између самог склопа атома и зрачења.

Борова теорија покушава да дâ одговор на ова питања. Први њен облик датира из 1913 г., а од 1921 Бор ју је знатно усавршио. Овде ћемо се упознати са првим њеним формулисањем*), следујући углавном излагању Б. Петронијевића.

Основу теорије сачињавају ови постулати:

1°. Између свих путања електрона око језгра, које се могу замислити, постоји дискретан низ т.зв. стационарних путања које су окарактерисане условом да се за време кретања електрона дуж једне овакве путање не врши ни зрачење ни апсорпција енергије.

Овим првим Боровим постулатом издвајају се неке нарочито истакнуте путање електрона.

2°. Зрачење (светлости, енергије) врши се онда када електрон прелази са удаљеније стационарне путање на другу стационарну путању, ближу језгру, а апсорпција се врши када са ближе електрон скаче на удаљенију путању.

У овом другом постулату ништа се не говори о механизму, тј. о самом начину зрачења или апсорпције. Као важан разлог за увођење овог постулата треба сматрати губитак енергије при испуштању таласа. Овај губитак се надокнађује повећањем потенцијалне енергије електрона услед његова приближавања језгру.

3°. Зрачење и апсорпција енергије врши се у скоковима (прекидно), у квантима.

---

*) *B. Petronijevics*, Exposé systématique de la première théorie atomique de Bohr (Revue générale des Sciences. 15 déc. 1937).

Овим постулатом, као и четвртим и шестим, доводи се атомски модел и процес зрачења у везу са *теоријом кванта*.

4°. Количина енергије ΔE која се зрачи или апсорбује сразмерна је фреквенцији одговарајуће спектралне линије, и коефицијент пропорционалности је Планкова константа h. Дакле је $\Delta E = h\nu$.

5°. Стационарне путање електрона су кружне линије. Овом претпоставком упрошћава се математичко формулисање теорије.

6°. Производ количине кретања mv електрона и обима путање једнак је производу Планкове константе и неког целог броја.*) Ако означимо са a_n полупречник путање која одговара овом броју n, биће

$$mv \,.\, 2\pi a_n = hn \;. \tag{46}$$

Овај производ је једнак фазном интегралу (120) § 20

$$J = \int p\, dq$$

за систем језгро + један електрон. Доиста, означимо ли са ω модуо тренутне угловне брзине електрона, са θ поларни угао који игра улогу координате q, биће $v = a_n \omega$ и $\omega = \frac{d\theta}{dt}$. Његова жива сила је

$$T = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m a_n^2 \omega^2 = \frac{1}{2} m a_n^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \tag{47}$$

и импулс

$$p = m a_n^2 \frac{d\theta}{dt} = m a_n^2 \omega \;. \tag{48}$$

Дакле је

$$J = \int p dq = \int_0^{2\pi} m a_n^2 \omega\, d\theta = 2\pi m a_n^2\, \omega = 2\pi a_n \cdot mv \;.$$

На основи ових постулата можемо сад доказати низ теорема. Нека буде e елементарни квант електрицитета, тј. оптерећење једног од N електрона који круже око језгра атома. Ово у Резерфордову моделу има позитивно оптерећење $-Ne$ (знак $-$, јер је e негативно) па ће, према Кулонову закону, интензитет силе која дејствује на електрон бити $+\frac{Ne^2}{a_n^2}$. Како је стационарна путања кружна, на њој убрзање има

*) У овом облику претпоставка важи само за кружне путање. Уопште пак треба ставити $T = \frac{1}{2} nh\omega$, где је T средња вредност кинетичке енергије система, ω угловна брзина.

увек правац полупречника, тј. постоји само нормално убрзање $\frac{v^2}{a_n}$ (9) § 1, те образац (1) § 2 даје услов

$$\frac{mv^2}{a_n} = \frac{Ne^2}{a_n^2} .$$

Дакле на стационарној путањи је

(49) $$T = \frac{mv^2}{2} = \frac{Ne^2}{2a_n} .$$

Нека τ буде периода обилажења електрона дуж путање. Онда је $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$. Број обилазака путање за јединицу времена (у једној секунди) биће $\omega_n = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega}{2\pi}$. Зато је модуо брзине

(50) $$v = \frac{2\pi a_n}{\tau} = 2\pi a_n \omega_n .$$

Ставимо ли овај израз у једначину (49), добићемо услов

(51) $$\omega_n^1 a_n^3 = \frac{Ne^2}{4\pi^2 m} ,$$

који одговара трећем Кеплерову закону за кретање планета $n^2 a^3 = \text{const.}$, ако n означава средње дневно кретање планете, а a велику полуосу њене путање. Десна страна једначине (51) заиста не зависи од димензија путање електрона.

Сад можемо доказати да се полупречници стационарних путања односе као квадрати одговарајућих целих бројева. Нека n и k буду ови бројеви. Ставимо израз (50) у једначину (46) и добивамо

(52) $$\omega_n = \frac{hn}{4\pi^2 a_n^2 m} .$$

Због услова (51) имаћемо

(53) $$a_n = \frac{h^2 n^2}{4\pi^2 m Ne^2} ,$$

те, према томе, за полупречнике a_n и a_k двеју стационарних путања важиће услов

(54) $$a_n : a_k = n^2 : k^2 .$$

За број обилазака може се дати други израз, који показује да је ω_n обрнуто пропорционално са n^3. Ставимо зато вредност a_n (53) у израз (52), па ћемо добити

(55) $$\omega_n = \frac{4\pi^2 m N^2 e^4}{h^3} \cdot \frac{1}{n^3} ,$$

где је први множитељ константна величина за дати електрон. И за

живу силу електрона на стационарној путањи имамо други израз, који показује да је она обрнуто пропорционална са n^2. Треба само да сменимо у једначини (49) a_n изразом (53), те ће бити

$$T = \frac{2\pi^2 m N^2 e^4}{h^2} \cdot \frac{1}{n^2} \tag{56}$$

и поново је први множитељ константан број за уочени електрон.

Сад можемо потражити израз за тоталну енергију електрона $E_n = T + U$, где је U потенцијал, на n-тој стационарној путањи. Потенцијал који одговара сили по Кулонову закону биће

$$U = -\frac{Ne^2}{a_n} + C \ .$$

Ова константа сада се одређује условом да на путањи $n = 1$ потенцијал буде једнак нули. Онда ће бити

$$U = \frac{Ne^2}{a_1} - \frac{Ne^2}{a_n} \ . \tag{57}$$

Узимајући у обзир образац (49) имаћемо

$$E_n = \frac{Ne^2}{a_1} - \frac{Ne^2}{2a_n} \ . \tag{58}$$

Због претходног услова за C добивамо позитивне вредности тоталне енергије, стављајући $C = 0$ имали бисмо негативне. Ако је $n > \kappa$, биће $a_n > a_\kappa$ и $E_n > E_\kappa$.

Према четвртом постулату

$$\Delta E = E_n - E_\kappa = h\nu \ ,$$

ако електрон прелази са удаљеније путање a_n на ближу a_κ.

А према обрасцу (58) је

$$E_n - E_\kappa = \frac{Ne^2}{2}\left(\frac{1}{a_\kappa} - \frac{1}{a_n}\right) \ .$$

Онда из претходних образаца и (53) следује вредност фреквенције оног таласа који се испушта када електрон скаче са путање n на другу стационарну путању κ, наиме:

$$\nu = \frac{2\pi^2 m N^2 e^4}{h^3}\left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{n^2}\right) \ . \tag{59}$$

Овај образац претставља велики успех Борове теорије, јер, ако га упоредимо са обрасцем (42) који су дала спектроскопска мерења, видимо да су они истог облика. За водоник, први елемент у периодном систему, треба, према Резерфордову моделу, ставити $N = 1$, јер само

један електрон кружи око језгра. Како је број $v_* = v : c$, то, да би се обрасци (59) и (42) поклапали, треба ставити

$$R = \frac{2\pi^2 m e^4}{c h^3} \,. \tag{60}$$

С десне стране су сви бројеви познати (елементарни квант електрицитета $e = 4.77.10^{-10}$ ел. јед., маса $m = 9.10^{-28}$ gr., $h = 6{,}55.10^{-27}$ erg sec) и зато се добива $R = 109678$, тј. вредност која следује из мерења спектара. Овај резултат према томе могао би да се сматра доиста као најбоља потврда тачности Борове теорије. Ово је утолико интересантније, што су постулати ове теорије постављени прилично произвољно, без довољно јасне подлоге.

Иако је маса електрона врло мала може се претходно формулисање теорије усавршити, узимајући у обзир да се електрон и језгро обрћу око заједничког тежишта. Зауставимо се на случају водоника. Нека буду m и M масе електрона и језгра, a и ρ њихова растојања од тежишта. Онда имамо услов

$$M\rho = ma \,. \tag{61}$$

Претпоставимо да свака од честица описује кружну путању са средиштем у тежишту, и да је ω угловна брзина овог обртања. Као и при извођењу једначине (49), имаћемо само нормална убрзања $\frac{v^2}{a}$, одн. $\frac{v^2}{\rho}$, те, опет на основи једначине (1) § 2, пишемо услове: за језгро ($v = \rho\omega$)

$$M\rho\omega^2 = \frac{e^2}{(a+\rho)^2} = F_N \tag{62}$$

и за електрон ($v = a\omega$)

$$ma\omega^2 = \frac{e^2}{(a+\rho)^2} \,. \tag{63}$$

Ако са μ означимо т.зв. редуковану масу, која се одређује из услова

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M} \,, \tag{64}$$

и из ове једначине и (61) елиминишемо M, добићемо

$$ma = \mu(a+\rho) \,,$$

па ће једначина (63) имати облик

$$\mu(a+\rho)\omega^2 = \frac{e^2}{(a+\rho)^2} \,. \tag{63'}$$

Ова сад замењује једначину која претходи (49). У њој $a + \rho$ стоји место a_n, а μ место m. Ако поновимо цео рачун за Ридбергову константу (60), добићемо израз где место m стоји редукована маса. Дакле, означимо ли је за водоник са μ_H, биће

$$R_H = \frac{2\pi^2 e^4 \mu_H}{ch^3}, \qquad \frac{1}{\mu_H} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M_H}. \tag{65}$$

За хелијум

$$R_{He} = \frac{2\pi^2 e^4 \mu_{He}}{ch^3}, \qquad \frac{1}{\mu_{He}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{M_{He}}. \tag{66}$$

Само у последњем случају треба имати у виду да језгро хелијума које има двоструко оптерећење ($N = 2$) прати само један електрон, тј. да је реч о јонизованом хелијуму (He^+). Извесне линије водоника поклапаће се са линијама јонизованог хелијума. Као што се види из обрасца (59), серија линија која одговара $\kappa = 4$ имаће фреквенције

$$\nu_* = 4R_{He}\left(\frac{1}{4^2} - \frac{1}{n^2}\right) = R_{He}\left\{\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\left(\frac{n}{2}\right)^2}\right\}. \tag{67}$$

Добива се, дакле, Пикерингова серија линија и образац (44).

Спектар водоникова изотопа, деутерона, који смо поменули на крају § 40.2 добива се, ако се у обрасцима (65) узме двострука маса, тј. $2M_H$ место M_H.

Према Резерфордову моделу, око језгра атома сваког елемента кружи онолико електрона колики је његов редни број. Али можемо уочити и јонизоване атоме ових елемената, који су дакле изгубили известан број електрона. Ако узмемо да је остао само један електрон, обрасци (59) и (60) дају за вредност фреквенције спектралних линија које ће одговарати скоковима овог електрона с једне стационарне путање на другу:

$$\nu_* = N^2 R\left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{n^2}\right). \tag{68}$$

Као што се види, ν_* расте са квадратом редног броја елемента N и већ за $N = 30$ фреквенције су толико велике, тј. таласне дужине су толико мале да им спектралне линије падају у област Рендгенових зракова. Али за линије у овој области важи Мозелејев закон (45). Да би се нашло објашњење овог обрасца треба претходну теорију допунити новим претпоставкама.

Стање једног електрона одређује број n, који означава на којој се стационарној путањи налази електрон; n ћемо даље звати *главни квантни број*. О атому са више електрона - сателита може се претпоставити да

једној вредности $n = 1$ или 2, 3, 4 одговарају путање неколиких електрона, тј. да су електрони подељени у групе, од којих свакој одговара одређена вредност n. За једну групу каже се да образује *слој* и, како се разликују четири серије Рендгенових линија, то се и слојеви зову K, L, M и N-слој.

По себи се разуме да присуство других електрона треба да утиче на кретање сваког појединог. Кретање целог система: језгро + електрони претставља проблем сличан познатом проблему n тела у Небеској механици који, због великих математичких тешкоћа, није могућно решити у општем облику. Зато се и у теорији атомског модела извесна питања решавају приближно. Језгро привлачи електрон силом која је пропорционална броју N и зато се квадрат овог појављује у обрасцу (68). Али како га други електрони одбијају, претпоставља се да се и за сваки слој може узети број a_n тако, да ће смањена сила бити пропорционална броју $N - a_n$. Онда би образац имао облик

$$\nu_* = (N - a_n)^2 R\left(\frac{1}{\kappa^2} - \frac{1}{n^2}\right) \tag{68'}$$

и за $a_n = 1$, $\kappa = 1$, $n = 2$ добива се

$$\nu_* = \frac{3}{4} R (N - 1)^2 ,$$

тј. Мозелејев закон (45); електрон онда прелази са слоја L на M.

Даљи корак ове теорије састоји се у замени петог постулата компликованијим, наиме, да су путање електрона елипсе, што је и општији случај централног кретања (§ 1). Но пре него што се зауставимо на овом случају, увешћемо са Бором нову претпоставку, т.зв. *принцип корестонденције.*

За водоник даћемо обрасцу (59), због (60), облик

$$\nu = Rc \frac{n^2 - \kappa^2}{\kappa^2 n^2} .$$

Ако је $(n - \kappa):n$ мали број, овај образац се може заменити приближним

$$\nu = Rc \frac{n - \kappa}{\kappa^2 n^2} 2n = \frac{2Rc}{n^3} (n - \kappa) . \tag{69}$$

С друге стране, за број обилазака електрона $\omega_n = \frac{\omega}{2\pi}$ имамо, према обрасцима (55), (60) и $N = 1$:

$$\omega_n = \frac{2Rc}{n^3} . \tag{70}$$

Кад би се у некој антени вршио овај број електричних осцилација, онда би ω_n била и фреквенција електромагнетских таласа које она шаље у простор.

Упоређивањем образаца (69) и (70) долазимо до закључка, да скок с једне стационарне путање n на најближу унутрашњу $\kappa = n - 1$ даје основну осцилацију (70), скоку електрона на $\kappa = n - 2$ одговара прва хармониска $2\omega_n$ итд.. Између механичке фреквенције (70) и оне (69) коју смо нашли помоћу Борове теорије, а која се оснива, дакле, на теорији кванта, постоји извесна кореспонденција асимптотског карактера, јер образац (69) важи за врло велике вредности n.

Из досада наведених постулата не може се ништа закључити о јачини зрачења или о поларизацији. Јачини одговара у Боровој теорији умножавање скокова, одн. кванта светлости. Према принципу кореспонденције ово умножавање може се одредити помоћу амплитуде зрачења.

Узмимо да су путање електрона елипсе и сматрајмо да у обрасцима овог параграфа a_n означавају велике полуосе путања место полупречника кругова.

Елипсу би уствари могао да описује електрон, кад би се сâм кретао око језгра (централно кретање). Иако мало, други електрони ипак утичу на кретање једног и путања постаје компликованија. У Небеској механици овакав утицај планета на путању једне од њих спада у т.зв. теорију поремећаја*). У извесном интервалу времена може се лук стварне путање сматрати за лук неке елипсе. Ова т.зв. *оскулаторна* елипса мења услед поремећаја облик и положај у простору, те стварна путања више личи на неку розету, јер се оскулаторна елипса обрће око осе скоро управне на равни путање. Од свих поремећаја путање електрона углавном долази у обзир ово обртање, другим речима померање перихела.

Према гледишту квантне теорије, и ово обртање треба да карактерише неки квантни број $\varkappa$, који се зове *споредни*, јер мора и у овом случају извесни фазни интеграл (који се односи на сферне углове који одређују положај електрона) бити пропорционалан Планковој константи: $J' = \varkappa h$.

Помоћу наведених претпоставака а због разних комбинација вредности бројева n и $\varkappa$ у Боровој теорији постигло се објашњење постанка четири врсте серија линија у споменутим спектрима алкалних метала.

Код појава које се посматрају у спектрима навели смо Штарков и Земанов ефект. У првом игра улогу електростатичко поље које се ствара на путу зракова. Очевидно је да постанак овог поља, тј. нових електричних сила које дејствују на електрон, може да утиче и на његово кретање око језгра. И, уз низ нових претпоставака, Борова теорија објашњава Штарков ефект. У атому, у слоју где електрони имају

*) в. н.пр. М. Миланковић. Небеска механика. Београд 1935.

једнаке велике полуосе, њихова енергија је иста када нема спољњег електричног поља. Но чим се ово створи, оно утиче на разне електроне чије путање имају различите оријентације и доводи до разних промена енергије. У једној групи електрона исте енергије оно доводи до цепања групе и, према томе, до растављања спектралних линија. Исто тако и стварање спољњег магнетског поља изазива извесне поремећаје у кретању електрона и Larmor је, на основу Борове теорије, доказао став да се, у првој апроксимацији, цео систем електрона у атому обрће у спољњем магнетском пољу око правца овог поља („Ларморова прецесија"). Но поново треба узети у обзир основну идеју квантне хипотезе и сматрати да нису могућни произвољни нагиби путања електрона, да правац нормале на њеној равни може са правцем поља образовати само углове из одређеног дискретног низа. И за карактеристику оваквих могућних оријентација уводи се нов квантни број (*магнетски*), који се означава са m. Уз нарочита правила за избор могућних вредности m постиже теорија извесни резултат, наиме, објашњење нормалног Земановa ефекта. Али аномални Земанов ефект није се претходним хипотезама могао објаснити. Исти је случај био и са растављањем спектралних линија у усавршеним спектроскопима и без стварања магнетског поља. Зато су учињене нове претпоставке, које овде нећемо наводити, а које су скопчане са увођењем новог квантног броја j, т.зв. *унутрашњег* чије су вредности различите за поједине компоненте у једном мултиплету (Sommerfeld). Од велике важности била је међутим претпоставка, коју су учинили Goudsmit и Uhlenbeck (1925), да се електрично оптерећење у електрону обрће. Момент количине кретања електрона при овом обртању зове се „Spin" (вретено). Према овој хипотези, сâм електрон ствара у атому магнетско поље.

Сада, дакле, слика оног што се дешава у атому према Резерфорд-Борову моделу атома изгледа овако: око позитивног језгра*) кружи скуп електрона, а сваки од њих обрће се око неке осе. У овом скупу електрона, који се назива *љуском* атома, морамо разликовати неколико група, према вредностима главног квантног броја. Електрони исте групе образују један „слој". Знамо да стања електрона зависе од вредности четири поменута квантна броја. Ове вредности, по квантној хипотези, не могу бити произвољне. Најзад, као један нарочити услов уводи се ово: да се два електрона у једном атому морају разликовати вредношћу бар једног квантног броја. Да би се објаснила периодичност особина елемената, претпоставља се да су у спољњим деловима љуске, код атома оних елемената који показују сличне физичке и хемиске особине, електрони распоређени на исти начин.

Ова хипотеза о љусци електрона омогућила је да се развије теорија спектара и да се објасни структура молекула и хемиска вален-

*) о његову склопу говорићемо ниже

ција. Према гледишту модерне атомистике, електрони атомске љуске, и то они који су на већим растојањима од језгра, играју улогу у хемиским појавама, тако да се хемиско дејство своди на тај начин на дејство електричних сила међу атомима.

Било је и таквих појава, међутим, од којих смо неке већ поменули, на пр. постанак изотопа, које су захтевале да се Резерфорд-Боров модел допуни новим претпоставкама.

§ 41 Атомска механика. Према Резерфорд-Борову моделу, атом је систем честица чије се кретање може одређивати методама које смо проучили у Механици, но уз претпоставку да је реч о нарочитим стационарним путањама. С друге стране, прелази, скокови атома с једне од стационарних путања на другу не допуштају примене ових метода. А за ове скокове је везан сам постанак светлосних појава, који се карактерише Боровим постулатима. Појаве које служе за проверавање ових претпоставака, које смо, с друге стране, увели баш за то да се ове појаве објасне, припадају углавном Оптици. Може се одмах поставити питање, је ли могућно толико усавршити методе да би се могла непосредно посматрати поменута кретања електрона у атому. Но пре него што нађемо одговор на ово питање, зауставићемо се на другом питању, јер од одговора на ово зависи донекле и одговор на прво питање.

На крају анализе теоријâ светлости (Гл. V) видели смо да се сада служимо двема претставама о њој. С једне стране светлост за нас има таласну природу, а с друге стране, има особине роја светлосних честица, светлосних кванта или фотона. Које је од ових схватања тачно? Изгледало је у прво време да у прилог последњег схватања иде Комптонов ефект, који смо поменули у § 40.1. Како је овај од важности и за прво од постављених питања, то ћемо овде дати објашњење ове појаве.

Проучићемо зато судар електрона и фотона (сл. 44) који се дешава, када примарни зраци падају на неко тело. Претпостављамо: 1) да фотон има енергију $h\nu$, ако је ν фреквенција одговарајуће линије у спектру, 2) да има масу m_* која је, према обрасцу (84) § 36.2, једнака*)

$$m_* = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{E_m}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \,. \tag{71}$$

Дакле, он има и количину кретања, чији је модуо

$$m_* c = \frac{h\nu}{c} \,. \tag{72}$$

---

*) Дакле у основи овог објашњења наилазимо на претпоставке Теорије релативитета. Но још већу тешкоћу чини то да за мирну масу m_0 фотона онда треба да се узме, због $\beta = 1$, вредност 0.

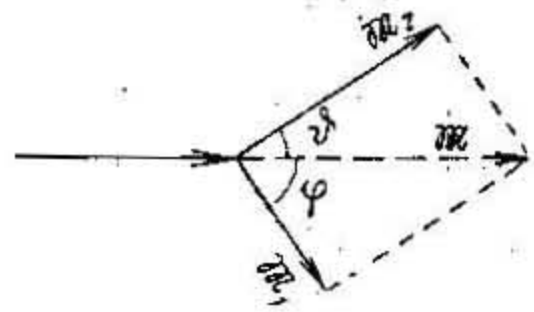
3) да при судару електрона и фотона важе закони одржања енергије и количина кретања.

4) да је електрон слободан и његова је енергија после судара једнака живој сили $\frac{1}{2} mv^2$.

5) да ће се, због тога што је фотон један део своје енергије дао електрону, његова енергија, а према томе (обр. (71)) и фреквенција, смањити; нека ова буде ν'.

Онда је, према закону одржања енергије,

$$h\nu = h\nu' + \frac{1}{2} mv^2 , \tag{73}$$



Сл. 44

а према интегралу количина кретања је

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 = \text{const.} ,$$

Но $\mathfrak{M}$ има модуо (72), а $|\mathfrak{M}_1| = \frac{h\nu'}{c}$ и $|\mathfrak{M}_2| = mv$. Означавајући са φ и ϑ углове које последња два вектора образују са правцем $\mathfrak{M}$, имаћемо

$$\begin{aligned} \frac{h\nu}{c} &= \frac{h\nu'}{c} \cos\varphi + mv \cos\vartheta , \\ 0 &= \frac{h\nu'}{c} \sin\varphi + mv \sin\vartheta . \end{aligned} \tag{74}$$

Одавде добивамо, ако још узмемо у обзир једначину (73),

$$m^2v^2 = \frac{h^2}{c^2} (\nu^2 + \nu'^2 - 2\nu\nu' \cos\varphi) = 2mh (\nu - \nu') \tag{75}$$

и фреквенција ν' одбијеног зрака доиста је функција угла φ који он образује са примарним (Комптонов ефект). Претходни образац трансформисаћемо даље уз претпоставку, да се ν' мало разликује од ν, те се у квадратним члановима може ставити $\nu' = \nu$. Онда ћемо добити

$$h\nu = h\nu' + \frac{h^2\nu^2}{mc^2} (1 - \cos\varphi) \tag{76}$$

или

$$\Delta\nu = \nu' - \nu = - \frac{2h\nu^2}{mc^2} \sin^2 \frac{\varphi}{2} . \tag{77}$$

Таласна дужина је

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} .$$

Ако у образац (77) уведемо промену ове величине

$$\Delta\lambda = -\frac{c}{\nu^2}\Delta\nu$$

добићемо

(78) $$\Delta\lambda = \frac{2h}{mc}\sin^2\frac{\varphi}{2}$$

и коефицијент $\frac{2h}{mc}$ има вредност 24.10^{-11} цм.

Ма да наведено објашњење полази од појма светлосне честице, у њега се увлаче и појмови из таласне теорије светлости, што је у складу са поменутом тежњом у глави V, да се корпускуларна и таласна теорије светлости споје у једну. Са овим подацима можемо сад приступити анализи првог од постављених питања.

Узмимо да треба одредити посматрањем место електрона. Како се полупречник атома цени на 10^{-8} цм, тачност посматрања треба да буде већа. Ако поставимо услов да је потребна у одређивању положаја тачност до $1^0/_{00}$, треба да смо у могућности да оценимо отсечак величине 10^{-11} цм. Онда електрон треба осветлити светлошћу таласне дужине истог реда. А при судару овог фотона са електроном, услед Комптонова ефекта, наступа промена таласне дужине $\Delta\lambda$, која је, према обрасцу (78), истог реда, — ако се посматрања врше под углом $\frac{\pi}{2}$. У исти мах, судар фотона са електроном мења његову количину кретања. Како је $\Delta\lambda$ истог реда као и λ, биће и $\Delta\nu$ истог реда као и ν (упореди два обрасца који претходе (78)), а промена количине кретања електрона Δp, као што се то види из обрасца (74), биће реда

$$\Delta p = mv \approx \frac{h\nu}{c} = \frac{h}{\lambda}\ .$$

Ако, према ономе што смо рекли, положај електрона одређујемо са тачношћу таласне дужине λ светлости која на њ пада, другим речима ако је грешка у координати Δq реда λ, онда ће, због последње једначине, производ грешака Δp и Δq бити приближно једнак h:

(79) $$\Delta p\,\Delta q \approx h\ .$$

Овај *услов неодређености* посматрања каже да уколико се тачније измери положај (Δq је мало) утолико је већа нетачност при одређивању уопштеног импулса p, одн. брзине. Од интереса је то да граница посматрања зависи од Планкове константе. Дакле, на основи накнадних претпоставака и путем разних апроксимација, изводи се закључак да је немогућно истовремено тачно мерити и положај и брзину електрона, и то у принципу а не само због техничких недостатака савремених апарата.

У теорији кванта коју је развио Heisenberg, овај резултат игра видну улогу, јер се због њега покушава да се атомској физици да нови правац.

Пошто нисмо у стању да тачно измеримо почетни положај и почетну брзину електрона, не можемо ни резултате Механике примењивати за одређивање његова кретања. Како се у основи теорије кретања тела или честица коју даје Механика налази принцип каузалности (узрочности), то према новом гледишту треба напустити и овај принцип.

Услов неодређености можемо написати и за друге величине. Ако је q праволиниска координата, количник $\frac{\Delta q}{\Delta t}$ имаће димензију брзине, а његов производ са $\Delta p = mv$ димензију енергије. Дакле, означавајући овај производ са ΔE, имаћемо

(80) $$\Delta E \cdot \Delta t \approx h \,,$$

тј. лева страна је истог реда као и h. А како је енергија фотона $E = h\nu$, то је $\Delta E = h\,\Delta\nu$, те ће за њега важити услов

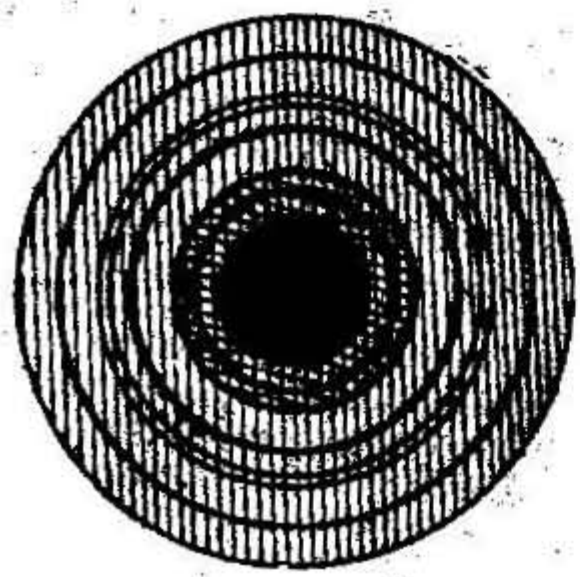
(81) $$\Delta\nu \cdot \Delta t \approx 1 \,.$$

Овај услов следује очевидно из претпоставке да услов неодређености мора да важи за све врсте честица (језгра, фотоне итд.) а не само за електроне.

Цео скуп светлосних појава познатих до данас довео је до извесног двојног схватања природе светлости, до идеје да светлост има две стране, тј. да се у неким појавама испољава као таласање, у другима — као рој честица. Полазећи од овог гледишта дошао је де Бројли на идеју да и појаве у атомима иду у прилог сличне двојне природе материје. Другим речима, кретање електрона стоји у вези са неком врстом материјалних таласа. На који се начин могу чисто формалним путем, на основи аналогија, преносити појмови из Оптике у Механику видели смо већ у § 38. Онде смо напоменули да се може сматрати да материјалну честицу прати извесни материјални талас, т.зв. асоцијирани талас. И када се израчуна његова таласна дужина за електроне (в. једн. ((138) § 38), види се да се она мало разликује од таласних дужина Рендгенових зракова. 1912 г. открио је Лауе т.зв. дифракцију у кристалима: када сноп Рендгенових зракова пролази кроз кристал, на фотографској плочи иза овог остаје одређени систем тамних правилно распоређених мрља. Сличну појаву према реченом треба очекивати и за ројеве електрона, јер ако њих прате асоцијирани таласи, могле би наступити интерференцијалне или дифракционе појаве. И заиста, Davison и Germer (1927) дошли су до овог резултата први пут посматрајући одбијање снопа од кристала никла, а после њих и други, пропуштајући ројеве електрона кроз врло танке металне листиће, у којима су кристали оријентисани

на разне начине. Тада се добивају слике исте врсте као и са Рендгеновим зрацима — тамне мрље дуж кругова (сл. 45, Mark и Wierl).

Иако су ови експерименти, на које нас је навела претстава о материјалним, асоцијираним таласима, успели, ипак је постојала тешкоћа у схватању саме природе таласа. А о томе како се мењало схватање овог таласа било је већ говора на крају § 38. Покушаји да се нађе физички смисао асоцијираног таласа нису имали успеха. Но и поред тога су од интереса и важности била дубље разумевање и образложење Борових постулата која су дошла као резултат проучавања особина решења Шредингерове једначине ((142) § 38*).



Сл. 45

Осим тога, таласна механика омогућила је да се реше нека питања која су стајала ван оквира Борове теорије атома, као на пр. проблем дисперсије.

Али наведени облик Шредингерове једначине није био довољан ни да објасни Земанов ефект. Зато се она уопштавала и добила је у Diracовој теорији, у коју је овај увео и претпоставку о обртању електрона, врло компликован облик. Анализа свих ових питања захтева примену врло сложеног математичког апарата.

§ 42 Склоп атомског језгра. У досадањим теоријама и питањима тежили смо да дођемо до објашњења поменутих појава помоћу извесних претстава о оном скупу електрона који сачињава љуску атома. Што се тиче његова језгра, претпоставили смо само да оно носи позитивно оптерећење, једнако оноликом броју кванта електрицитета колико износи његов редни број у периодном систему. Но потребно је да се прецизира и склоп самог језгра. Док је од осталих честица било одређено само језгро водоникова атома, протон, сматрало се да су језгра атома других елемената грађена од протона и електрона. Ако је A атомска тежина неког елемента, а N његов редни број, било би према претпоставци у његову језгру A протона и $A - N$ електрона. Ближе се склоп језгра није могао прецизирати. Као разлог за претпоставку да се и у језгру налазе електрони служило је зрачење радиоактивних супстанца. Ове избацују, осим краткоталасних γ зракова, ројеве честица, јонизоване атоме хелијума — α зракове и ројеве електрона — β зракове. На ову појаву није се могло утицати никаквим хемиским или физичким процесом, у којима обично играју улогу, као што смо већ казали, електрони у љусци. Према томе електроне у β зрацима изба-

*) Подробније о томе види, на пр., у делу *G. Joos*, Lehrbuch der theoretischen Physik. стр. 589 и даље.

цују језгра. Али, ако су атоми свију елемената грађени од протона и електрона, атомске тежине треба да буду цели бројеви, када се водоникова узме за јединицу (врло мале електронске масе не играју улогу у овом рачуну). Откриће изотопа било је потпуно у складу са овим закључком. Како изотопи једног елемента имају (изузев деутеријум) исте хемиске, исте и многе физичке особине, могло се сматрати у Резерфорд-Борову моделу да оне имају исте љуске састављене од електрона а само се разликују склопом језгра.

Када је пронађен неутрон, изменило се мишљење о саставу језгра. Наиме, уведена је претпоставка да се језгро састоји од протона и неутрона: првих има N, других $A - N$.

Ни овога пута нема прецизнијих претпоставака о начину на који су ове честице спојене, што онемогућује даљу математичку анализу питања. Склоп језгра постао је према ранијима тежи проблем и њему је посвећен сада део Физике који се и зове „Физика језгра".

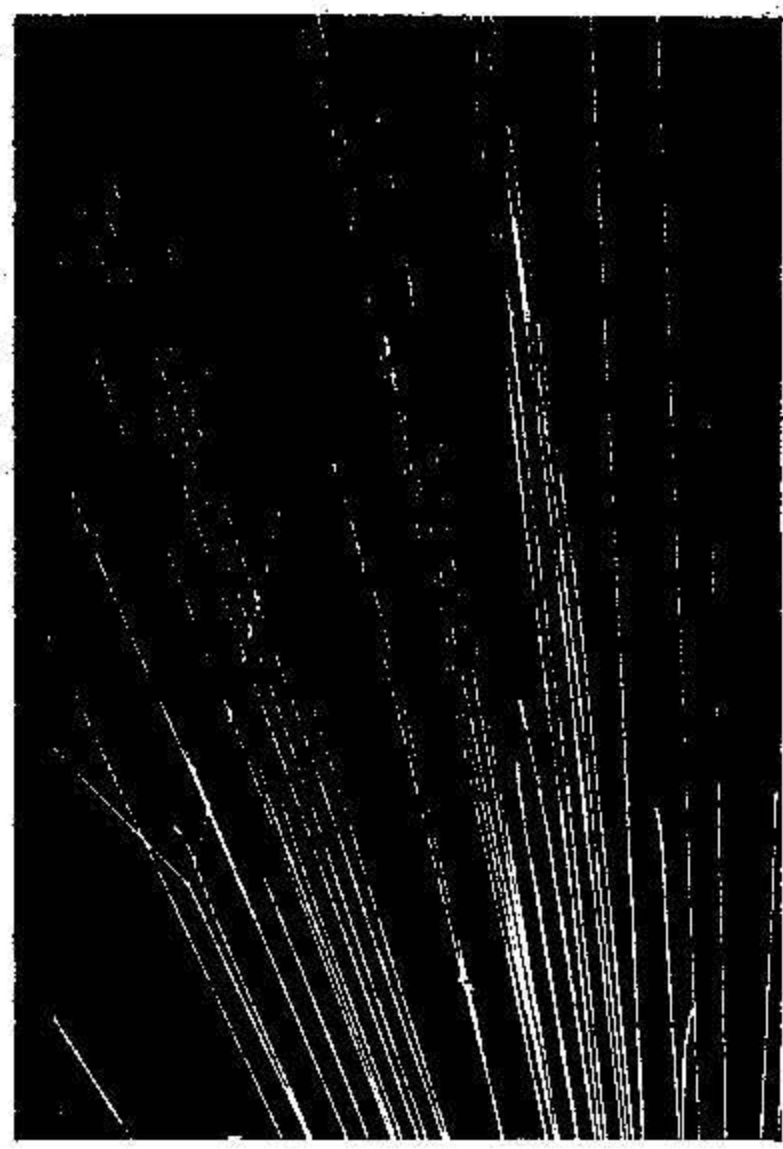
Овде ћемо поменути још неколико чињеница које дају експерименти и које, према атомској хипотези, стоје у вези са склопом језгра.

У теорији спектара испочетка игра улогу кретање електрона. Али ако се узме у обзир да се у атому и језгро креће, онда његово кретање, одн. момент количина кретања, а евентуално и магнетни момент утичу на структуру спектара, што се испољава у т.зв. хиперфиној структури линија. Но подаци из ове области не могу још да расветле склоп језгра.

Од веће су важности радиоактивне појаве, нарочито оне које су везане за т.зв. распад атома. 1902 г. Резерфорд и Соди истакли су хипотезу о распаду атома радиоактивних супстанца на основи посматраних преображаја једних елемената у друге. На крају периодног система постоје три низа: уранрадијумов, актинијумов и торијумов са скоро 40 природних елемената који заузимају места бр. 81—92 (елементи бр. 85 и 87 нису познати). У сваком од ових низова преображај елемената иде уз зрачење α и β зракова, а поједини елементи имају различита времена живота (од 10^{-9} сек до 10^{12} година). Само промене у језгру могу објаснити промене у атомској тежини. Процес распада атома врши се у њему према поменутој хипотези, јер на њ није могло утицати ни на који начин. Тек 1919 г. Резерфорд је нашао методу за „вештачко разбијање атома" испочетка, у случају азота, затим алуминијума и др.. Ако се пуштају α зраци, тј., према атомској хипотези, ако се азот бомбардује α честицама, ове разбијају језгра атома азота. Из разбијених језгара постају језгра водоникова атома, тј. долази до преображаја једног елемента у други. На овај начин се објашњавају резултати експеримената који нам дају сл. 46 (Blackett-ову), где се на крају

Сл. 46

извесне путање налази дебљи цикцак део и тање продужење. Цео сноп линија даје путање α честица у Вилсоновој комори. На крају једне имамо судар α честице са језгром азота — дугачка тања линија после судара је путања протона који је излетео из језгра, а краћа и дебља је путања језгра азота у којем је остала α честица. Ова честица према томе постала би језгро изотопа кисеоника 0^{17}. За ову појаву, која се зове *вештачко разбијање језгра*, употребљују се сада зраци који се састоје од протона, неутрона и деутерона (Cockroft и Walton, 1932 г., вршили су разбијање језгара помоћу каналских зракова, Fermi 1934 г. помоћу неутрона). На слици 46, која претставља појаву вештачког разбијања језгра, облик линија разликује се од облика путања α зракова при њихову растурању, на пр., у азоту и водонику (упореди са сл. 47). На овај начин испитан је преображај елемената тежих од калијума ($N = 19$) па до цинка ($N = 30$). Код тежих елемената дешава се само то, да језгро неког елемента само улови неутрон. Због овога мења се једине његова маса, док његово електрично оптерећење остаје исто. Према томе ствара се изотоп. Ферми изводи из експеримената закључак да се на овај начин добивају не само изотоп урана, него и нови елементи — *трансурани* (бр. 93 и 94).



Сл. 47

Као нова појава која има да допринесе схватању склопа језгра дошла је вештачка радиоактивност. Супрузи Жолио показали су на који се начин она може изазвати. Ако α зраци полонијума падају на алуминијум, овај почиње да зрачи позитоне. Ово зрачење траје извесно време, и пошто се обустави бомбардовање α зрацима. Осим тога овакав алуминијум, који зрачи као радиоактиван елемент, показује особине фосфора. Анализа коју су затим извели Ферми и други довела је до открића преко 50 оваквих вештачких радиоактивних тела. Ова тела не подударају се ни са једним од познатих стабилних изотопа, а зраче позитоне или електроне. Према томе разлика између природних и вештачких радиоактивних супстанца је велика: код првих не постоји зрачење позитона, а, осим тога, код других се никад није посматрало α зрачење. С друге стране ни једне ни друге не зраче протоне или неутроне.

Питање склопа језгра није овим појавама расветљено, чак је можда оно још више компликовано новом појавом коју су открили такође супрузи Жолио.

Ако јаки γ зраци падају на површину метала, појављују се истовремено парови електрона и позитона чије ће се путање у магнетском пољу извијати на разне стране (на сл. 43 виде се ове путање пара: електрон — позитон).

Резултат ових експеримената тумачи се чак као способност фотона да се „материјализује".

Као што смо видели, за позитоне није се нашло место у атомском моделу. Али у квантној теорији, коју је дао Дирак, теориски следује могућност постанка позитона.

Скуп честица које се уводе према атомској хипотези допуњује се сада још двема: *неутрином* и *антинеутрином*. Ова хипотеза потиче из посматрања β зрачења радиоактивних супстанца. Посматрана енергија ових β честица мања је од израчунате у теорији. Да би се овај мањак енергије надокнадио, претпоставља се да атоми радиоактивних супстанца избацују и друге честице које се зову неутрино. Њихова маса је много мања од масе неутрона. Ове честице не носе електрична оптерећења, а њихова енергија је толика да заједно са енергијом β честица даје тачно износ који је потребан.

Хипотеза о неутрино дала је повода де Брољиу да их доведе у везу са фотонима. Он је претпоставио, наиме, да је светлост рој неутрино и других честица — антинеутрино. Енергија сваке од ових честица била би једнака половини енергије једног кванта светлости. Фотони би били, према томе, само неки привидни објекти који се јављају у тренуцима узајамног дејства неутрино, антинеутрино и неких оптерећења. P. Jordan, који је прихватио и даље развио ову хипотезу, заменио је претходну процену енергије другом према којој неутрино и антинеутрино имају разне количине енергије.

Видимо у овим новим хипотезама тежњу да се постави веза између структуре материје и светлости. Али теорије које смо спомињали, а које нисмо овде подробно изложили због велике компликованости математичке анализе, и поред низа успеха у објашњењу разних појава, нису успеле да продру у структуру атомских језгара.

§ 43* Еволуција схватања структуре материје. Основне претпоставке атомске теорије навели смо у § 0.6, а у овој глави проучили смо њен савремени облик. Зато ћемо сада дати кратак преглед разних схватања структуре материје. Као почетак атомске теорије сматра се у историји Физике идеја Анаксагоре о прамаси, првобитној маси која се састоји од најмањих честица. На њу се надовезује Леукипова претпоставка, коју је развио Демокрит, да улогу прамасе играју атоми који се у разним

врстама тела разликују обликом и димензијама, а између којих се налази празан простор. Насупрот идеји о дискретној структури, појављује се претстава о континууму, непрекидној средини. Аристотел одбацује егзистенцију празног простора, сматрајући да се све састоји од пет основних елемената; ватре, земље, ваздуха, воде и етра. На ове две претставе: о дискретној структури и о непрекидној средини, надовезују се од доба старих грчких филозофа до наших дана друге идеје којима се прецизирају особине материје. Улогу претпоставке да је материја непрекидно распоређена у телима видели смо при проучавању теорија које иду феноменолошким путем. Увођење нових величина, када су долазиле у обзир новопронађене појаве, служи увек за карактеристику нових особина материје. На овај начин не мења се претстава о структури материје него се само употпуњује низ њених особина. Друкчије стоји са атомском хипотезом, јер се постављају питања о природи недељивих честица од којих је састављена материја. XVII век доноси нове допунске претпоставке: Basso и Huygens сматрају да се атоми разних тела састоје од различитих врста материје, а Boyle да је материја свугде иста, само се атоми разликују обликом, димензијама и кретањем.

Улогу теорије топлоте у прецизирању особина ових најмањих честица видели смо у § 20*. Но и у исто доба нису често били погледи присталица атомске хипотезе идентични. Као пример можемо навести супротна схватања М. Ломоносова и Р. Бошковића. Први замишља да најмање честице материје имају одређене димензије, облик, масу и инерцију и да се у разним телима оне разликују овим особинама, а и распоредом и кретањима. Као и код Бојла, оне су чврсте. Схватање Бошковићево је више апстрактно, јер су према њему тела изграђена од „материјалних тачака", које немају димензија, само су окарактерисане особином да између њих дејствују силе у правцима што пролазе кроз њих (на врло малим растојањима ове се силе претварају наизменично из привлачења у одбијање). Већег прецизирања XVIII век није донео. У почетку XIX века атомска хипотеза развија се у Хемији, и Dalton уствари даје честицама оне особине које је раније навео Ломоносов. Што се облика атома и молекула тиче, њихова агрегатног стања итд., већег прецизирања проучавање хемиских појава није донело. Али из ове области потиче она идеја која је добила важност, као што смо видели, тек у XX веку, наиме W. Prout-ова претпоставка, да се сва тела састоје од једног елемента. Извесним моделима служила се Кинетичка теорија гасова, по којој се атом замишља као еластична лопта, двоатомни молекул као ђуле за гимнастику и томе слично. У овом погледу, претстава о структури материје није напредовала с обзиром на идеје XVIII века, само су ове једноставне претпоставке олакшавале математичко формулисање проблема. Велики корак унапред и битне промене у схватању структуре материје донеле су тек оне теорије које чине садржај претходних параграфа.

Закључак

У овој глави дали смо преглед еволуције атомистичког схватања појава у природи. Видели смо како се за њихово објашњење морају увести појмови о новим честицама од којих је саграђен атом. Но модел атома, који би објаснио све појаве, нисмо нашли. Зато су истраживачи као Хајзенберг, Бор и Јордан почели да заступају мишљење како уопште треба престати са тражењем модела. Анализу појава ваља вршити само помоћу оних величина које се могу непосредно мерити. А за процесе у атому, по овој *квантној механици*, долазе у обзир само фреквенције и јачина спектралних линија и различити степени атомске енергије који се могу мерити у оним експериментима, где, према ранијем схватању, постоје судари честица.

При схватању појава које се тичу структуре материје, неки испољавају чак извесни скептицизам. Али је вероватно његов извор у претераним надама.

Ако се и прими атомска хипотеза, не треба губити из вида извесне начелне тешкоће скопчане с овим гледиштем. Атом као недељива честица имао је без сумње загонетни склоп за стара схватања. Али, ако се усвоји неки атомски модел, исто питање преноси се на оне честице од којих је грађен атом. Питање облика, стања, особине оваквих честица: електрона, протона итд. остаје нерешено. Осим тога, остаје загонетно још једно питање. Ако замишљамо да атоме или друге честице раздваја празан простор, онда тек нисмо у стању да схватимо како оне дејствују једна на другу са даљине, јер нисмо могли примити хипотезу actio in distans ни у макрокосмосу. А ако примимо хипотезу о етру, поставља се питање о вези између ових честица и етра. Почетком овог века, када је био уведен само појам електрона, покушавао је Ми (G. Mie, 1912) да објасни процес у атому са унитаристичког гледишта. Полазна тачка ове теорије материје била је мисао да је електрон неко језгро са атмосфером, место у етру где се овај налази у нарочитом стању које зовемо електрично оптерећење. Ову мисао налазимо још код Фарадеја, према којем су делићи материје неке врсте чворови у етру.

За ово схватање ишчезавају неке од поменутих тешкоћа, али откриће позитона, неутрона и других честица ствара нове тешкоће.

Ми немамо данас дефинитивних погледа на структуру материје. А вероватно је да је разлог томе што је наша жеља била да и сувише дубоко продремо у тајне природе, као и када постављамо питање шта је електрицитет или шта је светлост.

Но теорије које стварамо и којима помоћу математичке анализе дајемо све савршенији облик воде нас без сумње ка све дубљем схватању и ка синтези појава.

АЗБУЧНИ ПРЕГЛЕД

α-зраци 368
Аберација 310
Авогадров закон 184
Адијабата 161
Адијабатска промена 157
Ајконал 296
Ајнштајн 315
Ајхенвалдов експеримент 312
Actio et reactio 35
Actio in distans 194
Амплитуда 48
Амортизоване осцилације 48
Анизотропна средина 97
Анодни зраци 353
Антинеутрино 391
Апериодичко кретање 47
Апсолутна нула 133
Апсолутна температура 133
Апсолутне осе 36
Апсорпција светлости 331
„ ел.-м. таласа 273
Апсорпциона способност 188
Атомски модел 367
Атомска хипотеза 26
Афина трансформација 16
Афинитет 172
Афинор 12

β-зраци 353
Балмерова серија 369
Бинеова једначина 34
Био-Саваров закон 238
Бозе-Ајнштајнова статистика 22
Боја тона 113
Бојл-Мариотов закон 151
Болцманов постулат 181
Болцманова константа 180
„ статистика 22
Боров атомски модел 375
Брзина 31
„ апсолутна 78
„ групе 339
„ ел.-магн. таласа 263
„ звука 131
„ преносна 78
„ релативна 78
„ светлости 294
„ принцип конст. брз. св. 316
„ угловна 75
„ фазе 366
Брјустеров закон 278
де Брољиева теорема 343

Ван дер Валсов закон 152
Веза 39
Вектор-потенцијал 240
Векторско поље 6
Вероватноћа статистичка 21
Висина тона 113
Вискозност 98
Водоникова атома модел 378
Вртложно кретање 100

γ-зраци 388
Галилејева трансформација 316
Гасна константа 184
Гаусов принцип 69
Гаусова теорема 7
Ге-Лисаков експеримент 159
„ закон 151
Геометриска оптика 293
Главна серија 370

Главне дилатације 91
„ осе инерције 82
Главни квантни број 380
Гравитација 17
Градијент 4
Гранични услови 137, 205
Гринови обрасци 11
Густина електрицитета 199, 203, 213, 214
„ енергије 221
„ магнетизма 234
„ струје 223, 229, 249

Даламберов принцип 68
Далтонов закон 184
Двојна површина 206
Двојно преламање 287
Дегенерација гасова 174
Дејства квант 185
Дејство 28, 72
Декремент логаритмички 48
Дел 5
Депрецова метода 146
Деутерон 373
Дивергенција 6
Диелектрик 191
Диелектрика померања 211
Диелектрична константа 194
„ „ главна 282
Дијада 12
Дијамагнетна тела 232
Дилатација 92
Динамика 34
Дипол 199
Директни пут 71
Дисоцијација 350
Дисперсија 331
Доплеров принцип 131, 311

Еквискаларне линије и површине 4
Еластично тело 102
Еластичности модуо 105
Еластокинетика 106
Еластостатика 106
Електрична сила 195
Електрицитета количина 192
Електродинамика 222
„ покрет. средина 305
Електролиза 350
Електромагнетски талас 263
„ тензор 328
Електромагнетско поље 239
Електромоторна сила 224
Електрон 291
„ -а маса 353
„ -а пар 391
„ -а теорија 353
Електростатика 194
Елементарна кол. електр. 350
Елипсоид деформација 90
„ индекс - 282
„ инерције 82
„ напона 96
„ тензорски 13
„ Френелов 282
Елиптичка осцилација 45
„ поларизација 303
Енергија електромагнетска 249
„ ел.-стат. поља 221
„ кинетичка 41
„ магн. поља 236
„ механичка 41
„ потенцијална 41
„ слободна 166
„ топлотна 153
„ тотална 41
„ унутрашња 153
Енергије принцип одржања 27
Ентропија 154
Ентхалпија 167
Етар 194

Жива сила 40
Жица 118
Жолио 390

Задржавајућа веза 54
Закон живе силе 63
„ количине кретања 62
„ момента кол. кр. 63
Земанов ефект 302
Зрачење 331

Идеална течност 97
Идеални гас 155
Извор 18
Изворни пар 19
Издашност 19
Изобара 151
Изолатор потпуни 229
Изотерма 151
Изотермна површина 135
Изотоп 373

Изотропна средина 97
Изохора 151
Импулс генералисани 60
Индекс-елипсоид 282
„ преламања 276
Индукције закон 245
Инертна маса 36
Инерција 35
Инерцијални систем 315
Иницијални услов 35
Интеграл живе силе 41
Интеграл површине 65
Интензитет таласа 345
Интерференција 110
Инфлуенција 208
Иреверзибилни процес 161
Истовремен 30, 318

Јачина пола 231
„ спектр. линија 370
„ струје 223
„ тона 113
Језгро атома 388
Јон 350
Јордан 391
Јунгов модуо 105

К-серија 370
Калорија 134
Каналски зраци 353
Каноничке једначине 59
Канонички распоред 23
Капацитет кондензатора 209
Карактеристична једначина 99, 150
„ функција 120
Карактеристични број 120
Карноов циклус 162
Катодни зраци 352
Квазиеластична сила 46
Квазикоордината 62
Квазистационарна струја 247
Квант дејства 185
„ електрицитета 352
„ светлости 345
Квантна механика 393
Квантни број главни 380
„ „ споредни 382
Келвинова једначина 254
Кеплерови закони 34, 44
Кинематика 29
Кинетика 29
Кири 353
Кирхофов закон 188
„ -а правила 226
Клатно 49
Клаузиусова теорема 166
Клизања 92
Коефицијент апсорпције 273
„ вискозности 101
„ деформације 103
„ истезања 151
„ корисног дејства 163
„ напонски 151
„ проводљивости 135, 137, 138
„ самоиндукције 251
„ узајамне индукције 252
Количина електрицитета 192
„ кретања 62
„ топлоте 134
Колраушов експеримент 242
Комплекс 21
Комптонов ефект 371
Кондензатор 208
„ -а пражњење 253
Конзервативне силе 59
Конзервативни систем 65
Константа фазе 46
Координате криволиниске 32
„ генералисане 57
Координатне линије 32
Кореспонденције принцип 381
Кориолисово убрзање 80
Космичко зрачење 374
Кохерентни зраци 303
Кретање апсолутно 78
„ релативно 78
Кристала оптика 281
Кружни процес 161
Кулонов закон у Електростатици 192
„ „ „ Магнетизму 231

Лагранжов принцип 72
Лагранжова функција 59
Лагранжове једначине 57, 59
Ламела 4
Лапласов оператор 10
„ -а једначина 9
„ -о поље 9
Лебдење 111
Линиски поларизован 266
Лисажуове фигуре 112
Лонгитудинални талас 127
Лоренцова трансформација 317

Лоренц-Фицџералдова хипотеза 314
Лошмитов број 184

Љуска атомска 383

Магнет елементарни 232
Магнетизирање 237
Магнетни лист 236
Магнетни момент 235
Магнетон 367
Магнетостатика 230
Магнетска индукција 233
Магнетски вектор 233
Мајкелсонов експеримент 307
Максвелов образац 276
Максвелове једначине 248
Малусов закон 296
Мариотов закон 151
Маса 35, 326
„ електромагнетска 360
„ инертна 36, 330
„ лонгитудинална 362
„ тешка 330
„ трансверзална 362
Материјализовање зракова 391
Материје таласи 345
Мембрана 123
Метода слика 209
Механички еквивалент топлоте 153
Миликанова метода 351
Множитељ везе 56
Могућна варијација 55
Могућно померање 55
Модуо компресије 151
„ распореда 24
Мозелејев закон 371
Момент изворног пара 19, 20
„ инерције 81
„ количинâ кретања 63
Мопертјуиов принцип 28
Мултиплет 370

Навје-Стоксове једначине 102
Напон 92
Неповратни процес 161
Непомични триједар 30
Нернстова теорема 174
Нестишљива течност 99
Неутрино 391
Неутрон 374
Нехолономни систем 54
Нојманова метода 148
Нормалне координате 117
Нормално убрзање 32

Њутнов закон гравитације 17
„ „ за спољњу проводљивост 138

Одбијање таласа 274
Одржање енергије 27
Ојлерове једначине 38, 85, 100
Ојлерови углови 77
Омов закон 225
Оптерећење електрично 192
Оптичка дужина 294
Оптичка оса кристала 287
Ортогоналне функције 121
Оса обртања 74
Осцилатор 270
Осцилације елиптичке 45
„ принудне 48
„ хармониске 46
Отпор 226

Парамагнетна тела 232
Периода осцилација 45
Периодни систем 372
Пермеабилитет 232
Perpetuum mobile 155
Планков закон 189
„ квант дејства 185
„ принцип 154
„ -а функција 167
Пластично тело 107
Поасонов коефицијент 105
„ -а једначина 201
Повратни процес 161
Површинска сила 92
Позитон 374
Појнтингова теорема 249
Поларизација диелектрика 214
„ светлости 302
Поларизације раван 286
Политропа 161
Полупроводник 271
Поље 3
Померање апсолутно 29
„ диелектрика 211
„ могућно 55
Пондеромоторна сила 191
Понор 18
Потенцијал брзина 101
„ вектор- 240
„ електрични 196

Потенцијал магнетски 233
„ Нојманов 258
„ сила 37
„ термодинамички 166
Потенцијално кретање 100
„ поље 7
Потпуно одбијање 279
Почетак развлачења 108
Почетни услови 35, 137
Пражњење кондензатора 253
Преламања закон 276
Преламање ел.-м. таласа 274
Преношење топлоте 132
Принцип могућних померања 69
„ релативитета 317
Природне једначине 38
Природни ред елемената 373
Притисак 98
„ светлости 364
Проводљивост 224
Проводник потпуни 203
Провођење топлоте 134
Производ инерције 81
Простор фаза 186
Просторно диференцирање 5, 6
Протицање вектора 7
Протон 368

Равански талас 126, 263
Равно поларизован 264
Равнотежа 114
„ статистичка 180
„ термодинамичка 166
Рад 36
Радијатор 188
Радиоактивно тело 353
Радиоактивност вештачка 390
Разбијање атомског језгра 389
Раманов ефект 371
Реакција везе 39, 55
Реверзибилни процес 161
Резерфордов атомски модел 368
Резонанција 49
Релативитета теорија 315
Рендгенов експеримент 312
„ -и зраци 370
Реономни систем 54
Ридбергов број 369
Рицова теорија 314
Ротор 6
Роуландов експеримент 312

Самоиндукција 250
Сањаков експеримент 308

Свежањ таласа 345
Свет 320
Секторска брзина 33
Сила 35
„ генералисана 59
Систем референције 317
Скаларно поље 3
Склерономни систем 54
Соленоид 6
Сопствена осцилација 49, 117
Сопствено време 324
Спектралне серије 369
Специфичка проводљивост 224
„ топлота 134
Специфичко оптерећење 357
Спин 383
Спрезање 117
Статика 29
Статистичка вероватноћа 21
„ сила 181
Стационарно стање 140
Степен слободе 57, 181
Стефан-Болцманов закон 188
Стојни талас 129
Стоксова теорема 7
Струја у диелектрику 228
„ електрична 222
„ конвекциона 312
„ кондукторска 227
„ померања 355
„ права 227
„ стационарна 223
„ хомогена 223
Суседни пут 71
Сусцептибилитет 214, 237
Сферни талас 127

Талас дејства 342
„ еластични 126
„ звучни 130
„ светлосни 301
„ електромагнетски 263
Таласна дужина 129
„ једначина 125
„ механика 333
Тангентно убрзање 32
Телеграфска једначина 272
Температура 133
Тензор 12
„ деформација 90
„ напона 96
„ реципрочни 283

Термодинамичка сила 167
Теслине струје 256
Ток топлоте 135
Томсонов атомски модел 368
Томсон-Џаулов експеримент 159
Тон 110
Трансверзални талас 127
Транслаторно кретање 74
Трансурани 390
Траутон-Ноблов експеримент 312

Услов неодређености 386

Фаза 171, 335
Фаза осцилација 46
Фазна путања 186
Фазни интеграл 186
Фарадејев закон 193
Фарадејева концепција 194
Феноменолошко проучавање 25
Ферматов принцип 294
Ферми-Диракова статистика 23
Феромагнетна тела 232
Физоов експеримент 306
Фотон 348
Фреквенција 46
Френелов закон 286
„ -а теорија 305
„ -е једначине 277
Функција положаја 3
„ расипања 115
„ силе 37
Фуријеов интеграл 112
„ ред 112

Хајгенсов принцип 298
Хајзенберг 387
Хамилтонов оператор 5
„ принцип 70
„ -е једначине 61
Хевисајд 248
Хелмхолц 97, 100, 166, 248
Хемиско сродство 172
Херцов вектор 267
Хидромеханика 97
Хладнијеве фигуре 125
Холономни систем 54
Хомогени систем 170
„ услов 138
Хуков закон 103

Центар инерције 62
Централне силе 41
Централно кретање 33
Цикличка координата 61
Циклус 161
Циркулација 8

Чвор 129

Џаулов експеримент 159
„ закон 226
Џибс-Хелмхолцова једначина 166
Џибсов потенцијал 167
Џибсово правило 171

Шипка 122
Шредингерова једначина 344
Штарков ефект 302

ПРИМЕЋЕНЕ ШТАМПАРСКЕ ГРЕШКЕ

Стр.	Ред	Стоји	Треба
14	17 одозго	a	α
71	6 одоздо	$\frac{d}{dt}\delta q_i'$	$\frac{d}{dt}\delta q_i$
100	6 одозго	v	v_x
173	2 одоздо	E	E'
„	1 одоздо	$T\rightarrow$	$T\rightarrow 0$
174	11 одоздо	$G\partial_1$	∂G_1
249	4 одоздо	$\frac{4\pi}{c}$	$\frac{c}{4\pi}$