UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO-MATEMATIČKI FAKULTET

Miroslav M. Petrović

PRILOG SPEKTRALNOJ TEORIJI GRAFOVA

- Doktorska disertacija -

Beograd 1983.

S A D R Ž A J

Strana

U V O D

Svaki graf (kako konačan tako i beskonačan) može biti predstavljen pomoću matrice susedstva. U vezi sa ovim prirodno se nameće sledeće pitanje: Kako se inače veoma razvijena teorija matrica (konačnih odnosno beskonačnih) može iskoristiti u cilju dobijanja informacija o strukturi grafova? Jedan od najvažnijih pojmova koji se u tu svrhu može iskoristiti jeste spektar grafa, matematički objekat pridružen grafu posredstvom odgovarajuće matrice susedstva.

Pod spektralnom metodom u teoriji grafova podrazumevamo "skup postupaka za dobijanje i dokazivanje iskaza o strukturi grafova koji u svojim bitnim tačkama koriste spektre grafova". Za teoreme koje daju vezu izmedju brojeva koji sačinjavaju spektar grafa a ne sadrže pojmove strukturne prirode kažemo da opisuju spektralne osobine grafova. Medjutim, u teoriji grafova su mnogo značajnije one teoreme koje daju vezu izmedju strukturnih osobina grafa i njemu pridruženog spektra. Takve teoreme predstavljaju glavno sredstvo spektralne metode i omogućuju odredjivanje strukturnih osobina grafova pomoću njihovog spektra.

Spektralna metoda je veoma razvijena u teoriji konačnih grafova a zasnovana je na korišćenju spektra 0-1 matrice susedstva datog grafa. Ona spada u grupu algebarskih metoda u teoriji grafova i do danas iz te oblasti je objavljen veliki broj radova. Monografiju iz ove oblasti napisali su 1980. godine D. Cvetković, M. Doob i H. Sachs [9].

Spektralna metoda u teoriji beskonačnih prebrojivih grafova je u suštini metoda funkcionalne analize i zasniva se na korišćenju spektra kompaktnog linearnog operatora u separabilnom Hilbertovom prostoru pridruženog datom grafu. Osnovni rad iz ove oblasti objavio je 1981. godine A. Torgašev [39]. Isti autor je objavio ili pripremio za objavljivanje i radove [40], [41], [42], [43], [44], [45], [46] i [47] koji se odnose na primenu spektralne metode u teoriji beskonačnih prebrojivih grafova. Na drugačiji način je B. Mohar u radu [24] objavljenom 1982. godine postavio osnove spektralne metode lokalno konačnih prebrojivih grafova.

Navedeni radovi podstakli su autora da preduzme istraživanja iz spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova. Rezultati do kojih je došao izloženi su u prvom delu ove teze (poglavlja 1., 2. i 3.). U drugom delu teze (poglavlja 4., 5. i 6.) posmatrani su samo konačni grafovi i proučavane spektralne karakterizacije nekih klasa ovih grafova. Neki od tih rezultata mogu se bez posebnih teškoća preneti i na beskonačne prebrojive grafove.

Teza je podeljena na uvod, šest poglavlja i spisak korišćene literature. Poglavlja se dalje dele na izvestan broj odeljaka.

Prvo poglavlje je uvodnog karaktera. Odeljak 1.1 sadrži izvesne pojmove i tvrdjenja iz spektralne teorije kompaktnih linearnih operatora definisanih na separabilnom Hilbertovom prostoru. U odeljku 1.2 dati su osnovni pojmovi i definicije iz spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova a u odeljku 1.3 osnovne osobine spektra beskonačnog prebrojivog grafa.

U drugom poglavlju izložene su neke relacije izmedju spektralnih i strukturnih osobina beskonačnih prebrojivih grafova. Relacije izmedju strukture i spektra digrafova izložene su u odeljku 2.1 a relacije izmedju strukture i spektra grafova u odeljku 2.2. U odeljku 2.3 proučava se spektar kompletnih multipartitnih grafova i daje jedna spektralna karakterizacija takvih grafova. Odeljak 2.4 sadrži neke relacije kojima se karakteristična funkcija beskonačnog prebrojivog grafa izražava pomoću karakterističnih funkcija nekih njegovih indukovanih podgrafova.

U trećem poglavlju proučava se osobina konačnosti tipa beskonačnih prebrojivih grafova dobijenih nekim operacijama nad beskonačnim grafovima. Posmatraju se neke unarne (odeljak 3.1), zatim neke binarne (odeljak 3.2) i na kraju neke n-arne (odeljak 3.3) operacije nad beskonačnim grafovima.

U četvrtom poglavlju odredjeni su svi minimalni grafovi sa spektralnim rasponom većim od 4 (odeljak 4.1). Takodje su opisani grafovi čiji spektralni raspon nije veći od 4. U odeljku 4.2 odredjeni su svi minimalni grafovi sa osobinom da imaju drugi spektralni raspon veći od 3/2 a opisani su i grafovi čiji drugi spektralni raspon nije veći od 3/2.

U petom poglavlju posmatrani su grafovi sa ograničenom redukovanom pozitivnom odnosno negativnom energijom. U odeljku 5.1 opisani su grafovi čija redukovana pozitivna energija nije veća od 1/2 a u odeljku 5.2 grafovi čija redukovana negativna energija nije veća od 1. Pored toga, odredjeni su svi minimalni grafovi sa redukovanom negativnom energijom većom od 1.

U šestom poglavlju odredjena su sva stabla sa tačno p pozitivnih sopstvenih vrednosti (p=2,3,4) (odeljak 6.1). Takodje su odredjeni svi povezani grafovi sa malim brojem (jedan, dva ili tri) kontura i sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti (odeljak 6.2). U odeljku 6.3 izložen je problem opisivanja strukture grafova sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti, koji nije do kraja rešen.

Rezultati do kojih sam došao izloženi su u vidu lema, teorema, posledica i primera. Svako poglavlje ima svoju numeraciju izloženih definicija, lema, teorema, primera, tabela i slika a svaki odeljak svoju numeraciju formula. Izvestan broj teorema odnosno lema drugih autora, koje koristim u izvodjenju svojih dokaza, navedene su bez dokaza.

Autorovi prilozi u ovom radu su različite kategorije: nove teoreme odnosno generalizacije poznatih teorema.

Odeljci 2.1, 2.2 i 2.4 bazirani su na rezultatima rada [29] i sadrže uglavnom generalizacije poznatih teorema iz spektralne teorije konačnih grafova. Odeljak 2.3 i delimično 1.3 zasnovani su na rezultatima rada [26]. Poglavlje 3. je nastalo na osnovu radova [27], [28] i [33]. Rezultati radova [30] i [31] uključeni su u poglavlje 4. a rada [32] u poglavlje 6.

Sledeći rezultati iz ove teze: Uvodjenje pojma karakteristične funkcije beskonačnog prebrojivog grafa, teoreme 1.7, 1.8, 2.14, 2.15, 2.16, 2.20, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 3.10, 4.3, 4.4, 4.5, 4.6, 4.7, 5.1, 5.2, 5.3, 5.4, 6.4, 6.5, 6.6, 6.7, leme 3.1, 3.2, 4.3, 6.1, 6.2 i 6.3 mogu se smatrati osnovnim autorovim originalnim prilozima.

Koristim ovu priliku da izrazim zahvalnost docentu A. Torgaševu koji mi je u svim fazama izrade ovog rada pomogao svojim savetima, idejama i kritikom.

Zahvaljujem se profesorima D. Cvetkoviću i I. Gutmanu što su pročitali većinu mojih radova, koji su poslužili kao osnova za izradu ove disertacije, i dali korisne primedbe i sugestije.

A u t o r

1. OSNOVE SPEKTRALNE TEORIJE BESKONAČNIH PREBROJIVIH GRAFOVA

Ovo poglavlje sadrži u prvom odeljku neke pojmove i tvrdjenja iz spektralne teorije kompaktnih linearnih operatora koji su potrebni za zasnivanje spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova. Pri tome je samo manji broj tvrdjenja izložen u obliku teorema a veći broj u obliku pregleda spektralnih osobina kompaktnih linearnih operatora i nekih posebnih klasa ovih operatora.

Osnovni pojmovi i definicije iz spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova i osnovne osobine spektra beskonačnog prebrojivog grafa izloženi su u naredna dva odeljka.

1.1 Spektralne osobine kompaktnih linearnih operatora

Definicija 1.1 Neka je H kompleksan separabilan Hilbertov prostor. Operator $A:H\rightarrow H$ zove se kompaktan linearan operator ako je A linearan i ako je za svaki ograničen podskup M od H, A(M) kompaktan skup. □

Svaki kompaktan linearan operator je ograničen i njegove osobine su veoma bliske osobinama linearnih operatora na konačno-dimenzionalnim prostorima.

Spektralna teorija kompaktnih linearnih operatora je relativno jednostavna generalizacija teorije sopstvenih vrednosti konačnih matrica i podseća na mnogo načina na spektralnu teoriju linearnih operatora u konačno-dimenzionalnom slučaju. Ovo može da se vidi iz sledećeg pregleda nekih spektralnih osobina kompaktnih linearnih operatora.

1° Skup sopstvenih vrednosti operatora A je najviše prebrojiv a može biti i prazan.

2° Ako je skup sopstvenih vrednosti operatora A prebrojiv tada je $\lambda=0$ jedina tačka nagomilavanja tog skupa.

3° Svaka spektralna vrednost $\lambda\neq 0$ je sopstvena vrednost operatora A.

4° Nula je spektralna vrednost operatora A.

5° Sopstvene vrednosti različite od nule su konačne geometrijske i algebarske višestrukosti.

Zbir algebarskih višestrukosti svih ne-nula sopstvenih vrednosti kompaktnog linearnog operatora A označimo sa $\nu(A)$.

Važnu klasu kompaktnih linearnih operatora čine kompaktni samoadjungovani linearni operatori. Njihov spektar pored navedenih ima i sledeće osobine:

1° Spektar $\sigma(A)$ operatora A je realan.

2° Sopstveni vektori koji odgovaraju različitim sopstvenim vrednostima operatora A su ortogonalni.

3° Spektar $\sigma(A)$ operatora A leži u zatvorenom intervalu $[m,M]$ realne ose, gde je

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax,x)\ , \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax,x)\ .$$

4° Za operator A važi

$$\|A\| = \max\{|m|, |M|\} = \sup_{\|x\|=1} |(Ax,x)|\ .$$

5° m i M su spektralne vrednosti operatora A.

6° Rezidualni spektar $\sigma_r(A)$ je prazan.

7° Algebarska višestrukost sopstvene vrednosti $\lambda \neq 0$ jednaka je njenoj geometrijskoj višestrukosti.

8° Spektar $\sigma(A)$ operatora A je konačan tj.

$$\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_p; 0\} \quad (\lambda_i \neq 0)$$

ako i samo ako je njegov rang R(A) konačne dimenzije p. Ovde $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ mogu biti različite ili ne ali njihov ukupan broj je p.

U zasnivanju spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova posebno važnu ulogu igra jedna uska klasa kompaktnih linearnih operatora tzv. nuklearni operatori.

Ako je A kompaktan linearan operator, tada su i operatori A^* (adjungovani operator od A) i $(A^*A)^{1/2}$ kompaktni linearni operatori. Sopstvene vrednosti operatora $(A^*A)^{1/2}$ zovu se s-brojevima operatora A i označavaju sa s_j $(j=1,2,\ldots)$.

Definicija 1.2 Kompaktan linearan operator A je nuklearan ako je

$$\sum_{j=1}^{\infty} s_j < \infty \quad . \square$$

Sada ćemo navesti jednu drugu karakteristiku nuklearnih operatora, koja dozvoljava da se za takve operatore uvede pojam matričnog traga.

Kažemo da ograničen linearan operator A, definisan na H ima konačan matrični trag ako za svaki ortonormirani bazis $\{e_j\}_1^\infty$ prostora H red

$$\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$$

konvergira.

Teorema 1.1 ([14], str. 127) Ograničen linearan operator A je nuklearan ako i samo ako ima konačan matrični trag. Ako je A nuklearan operator, tada suma

$$\sum_{j=1}^{\infty} (Ae_j, e_j)$$

ne zavisi od izbora ortonormiranog bazisa $\{e_j\}_1^{\infty}$ prostora H. □

Ova suma se označava sa trA i naziva matrični trag operatora A.

Navodimo i jednu veoma važnu teoremu V. B. Lidskoga, koja uopštava izvesna tvrdjenja iz teorije matrica.

Teorema 1.2 ([14], str. 131) Ako je operator A nuklearan tada se njegov matrični trag poklapa sa njegovim spektralnim tragom tj.

$$\mathrm{tr}A = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j \quad .$$

Nuklearnom operatoru A možemo na jedinstven način pridružiti jednu celu analitičku funkciju $D_A(\lambda)$ na sledeći način:

$$D_A(\lambda) = \det(I-\lambda A) = \prod_{j=1}^{\nu(A)} (1-\lambda\lambda_j) \quad , \tag{1}$$

gde su λ_j ne-nula sopstvene vrednosti operatora A. Funkcija $D_A(\lambda)$ zove se karakteristična determinanta operatora A.

Funkcija $D_A(\lambda)$ dopušta razvitak u red

$$D_A(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n$$

koji je konvergentan za svako λ.

Kao posledica apsolutne konvergencije proizvoda na desnoj strani jednakosti (1) lako može da se nadje da je

$$a_0 = 1, \; a_n = (-1)^n \sum_{i_1,\dots,i_n} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n} \qquad (n=1,2,\dots)$$

$(i_1,\dots,i_n$ - različiti).

Na kraju ovog odeljka istaknimo da ograničen linearan operator definisan na separabilnom Hilbertovom prostoru dopušta matrično predstavljanje potpuno analogno (iz linearne algebre poznatom) matričnom predstavljanju linearnih operatora u konačno-dimenzionalnim prostorima.

Neka je $\{e_j\}_1^\infty$ proizvoljan ortornonormiran bazis u H i neka su a_{ij} Furijeovi koeficijenti vektora Ae_j u odnosu na bazis $\{e_j\}_1^\infty$ tj.

$$(Ae_j, e_i) = a_{ij} \quad (i=1,2,\dots) .$$

Tada je za svako $j=1,2,\dots$

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ij} e_i \tag{2}$$

pri čemu je ispunjen uslov

$$\sum_{i=1}^{\infty} |a_{ij}|^2 < \infty \quad (j=1,2,\dots) . \tag{3}$$

U odnosu na ortonormiran bazis $\{e_j\}_1^\infty$ ograničenom linearnom operatoru A korespondirali smo beskonačnu matricu

$$(a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \tag{4}$$

čiji elementi zadovoljavaju uslov (3).

Polazeći od matrice (4) koja odgovara ograničenom linearnom operatoru A, možemo na jednoznačan način rekonstruisati operator A. Zaista, njegove vrednosti u vektorima bazisa $e_1, e_2, \dots$ odredjene su sa (2). Na osnovu linearnosti definisane su njegove vrednosti na linealu $\mathcal{L}\{e_1, e_2, \dots\}$. No kako je $\overline{\mathcal{L}\{e_1, e_2, \dots\}} = H$, neprekidnošću su definisane vrednosti operatora na čitavom prostoru H.

Ako je (a_{ij}) beskonačna matrica koja predstavlja nuklearan operator A tada je

$$\mathrm{tr}A = \sum_{j=1}^{\infty} a_{jj} \ .$$

Sledeća teorema predstavlja tzv. matrični kriterijum za utvrdjivanje nuklearnosti ograničenog linearnog operatora.

Teorema 1.3 ([14], str. 125) Ograničen linearan operator A je nuklearan ako beskonačna matrica (a_{ij}) koja ga predstavlja u odnosu na dati ortonormirani bazis $\{e_j\}_1^{\infty}$ zadovoljava uslov

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| < \infty \ . \square$$

H. von Koch koji je prvi uveo pojam determinante beskonačne matrice (tj. ograničenog linearnog operatora) 1900. godine u radu [18] dokazao je izmedju ostalog da su koeficijenti a_n $(n=1,2,\dots)$ karakteristične determinante $D_A(\lambda)$ jednaki zbiru svih glavnih minora reda n matrice (a_{ij}) sa znakom $(-1)^n$ tj.

$$(5) \qquad a_n = (-1)^n \sum_{i_1<\dots<i_n} D_n(i_1,\dots,i_n) =$$

$$= (-1)^n \sum_{i_1<\dots<i_n} \begin{vmatrix} a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} \dots & a_{i_1i_n} \\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} \dots & a_{i_2i_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_ni_1} & a_{i_ni_2} \dots & a_{i_ni_n} \end{vmatrix} \ .$$

1.2 Osnovni pojmovi i definicije spektralne teorije beskonačnih prebrojivih grafova

Mnogi pojmovi i definicije iz teorije konačnih grafova prenose se na beskonačne prebrojive grafove (delimični graf, indukovani podgraf, put, povezan graf, izomorfni grafovi, hromatski broj itd.). Neke druge pojmove kao što su matrica susedstva grafa, spektar grafa i karakteristična funkcija grafa potrebno je definisati na nešto drugačiji način od onoga kako se ti pojmovi definišu u teoriji konačnih grafova.

Terminologija korišćena u ovom radu oslanja se na terminologiju korišćenu u monografiji [9]. Značenje nekih termina će ipak biti objašnjeno i u ovom radu.

Najpre navodimo definicije nekih osnovnih pojmova.

Definicija 1.3 Neka je $X=\{x,y,...\}$ prebrojiv skup i U skup dvočlanih podskupova od X. Uredjen par $G=(X,U)$ naziva se beskonačan prebrojiv graf. Elementi skupa X zovu se čvorovi grafa a elementi skupa U grane grafa. □

Definicija 1.4 Neka je $X=\{x,y,...\}$ prebrojiv skup i U skup uredjenih parova elemenata iz X. Uredjen par $G=(X,U)$ naziva se beskonačan prebrojiv digraf. Elementi skupa X zovu se čvorovi a elementi skupa U orijentisane grane (kratko grane) digrafa. □

U daljem tekstu beskonačan prebrojiv (di)graf ćemo, kratkoće radi, zvati beskonačan (di)graf ili jednostavno samo (di)graf. Dakle, pod pojmom grafa podrazumevamo ono što se u mnogim radovima iz teorije grafova označava kao "neorijentisan graf bez petlji i višestrukih grana". Primetimo takodje da definicija digrafa takodje ne dopušta mogućnost postojanja višestrukih orijentisanih grana.

Za beskonačan (di)graf G kažemo da je φ-numerisan ili samo numerisan ako je uspostavljena bijekcija $\varphi : N \to X$, skupa N prirodnih brojeva u skup X čvorova (di)grafa G. Tada možemo pisati $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$ i vrlo često skup X identifikujemo sa skupom N.

Numerisan (di)graf G može biti predstavljen i jednom beskonačnom $N\times N$ matricom.

Definicija 1.5 Matrica susedstva $\mathbf{A}=\mathbf{A}(G)$ beskonačnog (di)grafa G, čiji je skup čvorova $X=\{x_1,x_2,\ldots\}$, je beskonačna $N\times N$ matrica (a_{ij}) pri čemu je

$$a_{ij} = \begin{cases} a^{i+j-2} & , (x_i,x_j) \in U \\ 0 & , (x_i,x_j) \notin U \end{cases}$$

i gde je $\underline{a}$ fiksirana pozitivna konstanta $(0 < a < 1)$. □

Na ovaj način jednom beskonačnom (di)grafu G možemo pridružiti različite matrice susedstva u zavisnosti od izvršene numeracije njegovih čvorova i u zavisnosti od konstante a.

Ponekad je podesno identifikovati graf G sa digrafom koji ima istu matricu susedstva. Nešto opštije: svaku neorijentisanu granu koja povezuje dva različita čvora možemo posmatrati i kao par orijentisanih grana suprotnih orijentacija koje povezuju iste čvorove i obrnuto.

Neka je $\{e_j\}_1^\infty$ dati ortonormirani bazis u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Tada matricu susedstva beskonačnog (di)grafa G možemo interpretirati kao ograničen linearan operator A definisan na H na sledeći način: U vektorima bazisa e_j operator A je definisan formulom (2) odeljka 1.1 a zatim pomoću linearnosti i neprekidnosti produžen na čitav prostor H. Ovaj operator zvaćemo operator susedstva beskonačnog (di)grafa G. Na osnovu teoreme 1.3 on je nuklearan, pošto je

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |a_{ij}| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} a^{i+j-2} = \frac{1}{(1-a)^2} .$$

Definicija 1.6 Neka je G beskonačan numerisan (di)graf i A njegov operator susedstva. Spektar $\sigma(G)$ (di)grafa G jednak je spektru $\sigma(A)$ operatora A. □

Kako je operator A kompaktan linearan operator, njegov spektar se sastoji iz niza $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ ne-nula sopstvenih vrednosti, pri čemu se svaka od njih pojavljuje u nizu onoliko puta kolika je njena algebarska višestrukost, i nule. Neka su ne-nula sopstvene vrednosti poredjane u niz tako da je ispunjen uslov $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \ldots$. Niz $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ može biti i konačan ili prazan a ako je beskonačan tada $\lambda_n \to 0$ kada $n \to \infty$. Dakle,

$$\sigma(G) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots ; 0\} .$$

Definicija 1.7 Karakteristična funkcija $f(G,\lambda)$ beskonačnog numerisanog (di)grafa G jednaka je karakterističnoj determinanti $D_A(\lambda)$ operatora susedstva A (di)grafa G tj.

$$f(G,\lambda) = D_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{\nu(A)} (1-\lambda\lambda_i) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lambda^n . \; \square$$

Jednačina

(1) $$f(G,\lambda) = 0$$

zove se karakteristična jednačina (di)grafa G.

Njeni koreni su tačno vrednosti $1/\lambda_i$, gde su λ_i ne-nula sopstvene vrednosti (di)grafa G.

Jednačina (1) ima uvek beskonačan (ili pak konačan) niz rešenja $\tilde{\lambda}_i$ $(i=1,2,\ldots)$, gde $\tilde{\lambda}_i \to \infty$ kada $i \to \infty$, ako je ovaj niz beskonačan. Otuda je

$$\sigma(G) = \left\{\lambda_i = \frac{1}{\tilde{\lambda}_i}\ i=1,2,\ldots\right\} \cup \{0\}\ .$$

Očigledno je da spektar $\sigma(G)$ (di)grafa G zavisi od konstante a $(0<a<1)$ i izvršene numeracije njegovih čvorova. U opštem slučaju on se menja pri prenumeraciji skupa čvorova.

Ako je **A** matrica susedstva φ-numerisanog (di)grafa G a $\mathbf{A}_1$ matrica susedstva ψ-numerisanog (di)grafa G $(\varphi\neq\psi)$, tada postoji matrica **P** (permutaciona matrica) takva da je

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$$

gde smo sa $\mathbf{P}^T$ označili transponovanu matricu matrice **P**.

Za matricu $\mathbf{P}=(p_{ij})$ biće

$$p_{ij} = \begin{cases} a^{(\varphi\circ\psi^{-1})(i)-i} & , \ j=(\varphi\circ\psi^{-1})(i) \\ 0 & , \ j\neq(\varphi\circ\psi^{-1})(i) \end{cases},$$

gde je $\varphi\circ\psi^{-1}$ kompozicija bijekcija $\varphi: N\to X$ i $\psi^{-1}: X\to N$.

Lako može da se pokaže da je

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^T = \mathrm{diag}(a^{2(\varphi\circ\psi^{-1})(1)-2},\ a^{2(\varphi\circ\psi^{-1})(2)-4},\ldots)$$

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = \mathrm{diag}(a^{2-2(\varphi\circ\psi^{-1})(1)},\ a^{4-2(\varphi\circ\psi^{-1})(1)},\ldots)$$

tako da matrica **P** nije ortogonalna (sem u trivijalnom slučaju).

To je glavni razlog da ne važi jednakost $\sigma(A)=\sigma(A_1)$, osobina invarijatnosti spektra pri prenumeraciji skupa čvorova.

Uprkos ovom nedostatku, postoji izvestan broj spektralnih osobina grafa G koje ne zavise od konstante a i numeracije čvorova. Jedna takva osobina je konačnost spektra grafa G.

<u>Teorema 1.4</u> ([42]) Broj ne-nula sopstvenih vrednosti beskonačnog grafa G ne zavisi od izbora konstante a i načina obeležavanja njegovih čvorova. □

Očigledno je od velikog interesa da se pronadje što veći broj takvih osobina.

Na kraju ovog odeljka dajemo definiciju jedne važne klase beskonačnih grafova po osobinama dosta bliske konačnim grafovima.

Definišimo najpre u skupu čvorova X beskonačnog grafa G relaciju ekvivalencije $\sim$ na sledeći način: čvorovi x i y su ekvivalentni ako i samo ako imaju iste susede (tj. odgovarajuće kolone matrice susedstva su proporcionalne). Neka je $X/\sim = \{X_1, X_2, \ldots\}$ odgovarajući količnik skup.

Definicija 1.8 Beskonačan graf G je konačnog tipa k ako i samo ako je $\mathrm{card}(X/\sim)=k$.

Beskonačan graf G je beskonačnog tipa ako i samo ako je $\mathrm{card}(X/\sim)=\aleph_0$. □

Podskupovi $X_1, X_2, \ldots$ (karakteristični podskupovi grafa G) imaju sledeću osobinu: svaka dva čvora iz istog podskupa su nesusedna a svaka dva podskupa su kompletno susedna ili kompletno nesusedna u grafu G.

Indukovani podgraf g grafa G dobijen izborom po jednog čvora iz svakog karakterističnog podskupa zove se kanonički graf grafa G. Ako graf G ima konačan tip k, često ga označavamo sa $G=g(X_1, \ldots, X_k)$.

Napomenimo da ispitivanje mnogih strukturnih osobina beskonačnih grafova konačnog tipa može biti svedeno na ispitivanje odgovarajućih osobina njihovih kanoničkih grafova (dakle, konačnih grafova).

1.3 Osnovne osobine spektra beskonačnog prebrojivog grafa

U ovom odeljku posmatraćemo samo grafove i neke njihove osnovne spektralne osobine.

Matrica susedstva **A** grafa G je simetrična tj. $\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$. Zbog toga je operator susedstva A grafa G samoadjungovan kompaktan linearan operator. Njegov spektar je realan i leži u intervalu $[-\|A\|, \|A\|]$ (videti odeljak 1.1).

$r=\|A\|$ je maksimalna sopstvena vrednost operatora A i zove se indeks grafa G. Sve ostale sopstvene vrednosti su po apsolutnoj vrednosti manje ili jednake $\|A\|$.

Kako matrica susedstva grafa G ispunjava uslov $a_{ii}=0$ $(i=1,2,\ldots)$ to je matrični trag operatora A jednak nuli tj.

$$\mathrm{tr}A = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = 0 .$$

Na osnovu teoreme 1.2 zaključujemo da ne-nula sopstvene vrednosti grafa G zadovoljavaju uslov

$$\sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j = 0 .$$

Karakteristična funkcija $f(G,\lambda)$ grafa G ima oblik

$$f(G,\lambda) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\lambda^n$$

pošto je $a_0=1$ a $a_1= -\sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j=0$.

Teoreme koje slede opisuju još neke spektralne osobine grafova.

Teorema 1.5 Indeksu $r=\|A\|$ grafa G odgovara bar jedan sopstveni vektor sa ne-negativnim koordinatama.

Dokaz. Neka je $x=(x_1,x_2,\ldots)$ proizvoljan sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\|A\|$ i za koji je $\|x\|=1$. Neka je dalje $x^+=(|x_1|,|x_2|,\ldots)$. Tada je $\|x^+\|=1$ i važi

$$\|A\| = (Ax,x) = \Big|\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}x_i\bar{x}_j\Big| \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}|x_i||\bar{x}_j| =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}x_i^+x_j^+ = (Ax^+,x^+) \leq \|A\| .$$

Zaključujemo da je $\|A\|=(Ax^+,x^+)$, pa na osnovu Švarcove nejednakosti sledi da su Ax^+ i x^+ linearno zavisni i da je $Ax^+=\|A\|x^+$, čime je dokaz završen. □

Teorema 1.6 Indeks delimičnog grafa G_1 grafa G nije veći od indeksa grafa G.

Dokaz. Neka je G_1 delimični graf grafa G a $A=(a_{ij})$ i $B=(b_{ij})$ matrice susedstva grafova G i G_1, respektivno. Neka je x ($\|x\|=1$) sopstveni vektor sa nenegativnim koordinatama koji odgovara indeksu $\|B\|$ grafa G_1 (teorema 1.5). Kako je $a_{ij} \geq b_{ij}$ za svako $i,j \in N$, to važi

$$\|B\| = (Bx,x) = \sum_{i,j=1}^{\infty} b_{ij}x_ix_j \leq \sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}x_ix_j = (Ax,x) \leq \|A\| . \square$$

Neka je dalje G_0 konačan ili beskonačan indukovani podgraf beskonačnog grafa G, sa skupom čvorova $X_0=\{x_{i_1},x_{i_2},\ldots\}$. Tada je njegova matrica susedstva A_0 odgovarajuća podmatrica $(a_{i_p i_q})$ matrice A, takva da čvorovi od G_0 imaju težine a^{i_1-1}, a^{i_2-1}, ..., respektivno.

Neka je $H_0=\overline{\mathcal{L}\{e_{i_1},e_{i_2},\ldots\}}$ zatvoreni lineal nad vektorima bazisa $e_{i_1},e_{i_2},\ldots$ i $P:H\to H_0$ ortogonalna projekcija prostora H na podprostor H_0. Tada je operator $A_0=PAP|_{H_0}$ operator susedstva indukovanog podgrafa G_0 i spektar $\sigma(G_0)$ podgrafa G_0 jednak je spektru $\sigma(A_0)$ operatora A_0.

Sledeća teorema daje relacije izmedju spektra grafa G i spektra njegovog indukovanog podgrafa G_o.

<u>Teorema 1.7</u> Neka su

$$\lambda_1^+ \geqslant \lambda_2^+ \geqslant \ldots > 0; \quad \lambda_1^- \leqslant \lambda_2^- \leqslant \ldots < 0$$

nizovi pozitivnih i negativnih sopstvenih vrednosti grafa G, respektivno, i neka su

$$\mu_1^+ \geqslant \mu_2^+ \geqslant \ldots > 0; \quad \mu_1^- \leqslant \mu_2^- \leqslant \ldots < 0$$

odgovarajući nizovi pozitivnih i negativnih sopstvenih vrednosti indukovanog podgrafa G_o. Tada je

$$\lambda_n^+ \geqslant \mu_n^+ \; ; \quad \lambda_n^- \leqslant \mu_n^- \qquad (n=1,2,\ldots) .$$

<u>Dokaz</u>. Na osnovu poznate teoreme (videti [34], str. 256) imamo da je

$$\lambda_n^+ = \min_{y_1,\ldots,y_{n-1}\in H} \Big[\max_{\substack{x\in H,\, \|x\|=1 \\ x\perp y_1,\ldots,y_{n-1}}} (Ax,x) \Big], \quad \mu_n^+ = \min_{z_1,\ldots,z_{n-1}\in H_o} \Big[\max_{\substack{x\in H_o,\, \|x\|=1 \\ x\perp z_1,\ldots,z_{n-1}}} (A_o x,x) \Big].$$

Pošto je

$$\max_{\substack{x\in H,\, \|x\|=1 \\ x\perp y_1,\ldots,y_{n-1}}} (Ax,x) \geqslant \max_{\substack{x\in H_o,\, \|x\|=1 \\ x\perp y_1,\ldots,y_{n-1}}} (Ax,x) = \max_{\substack{x\in H_o,\, \|x\|=1 \\ x\perp Py_1,\ldots,Py_{n-1}}} (A_o x,x)$$

neposredno dobijamo da je

$$\lambda_n^+ = \min_{y_1,\ldots,y_{n-1}\in H} \Big[\max_{\substack{x\in H,\, \|x\|=1 \\ x\perp y_1,\ldots,y_{n-1}}} (Ax,x) \Big] \geqslant \min_{y_1,\ldots,y_{n-1}\in H} \Big[\max_{\substack{x\in H_o,\, \|x\|=1 \\ x\perp Py_1,\ldots,Py_{n-1}}} (A_o x,x) \Big] = \mu_n^+ .$$

Primenom sličnih tvrdjenja koja se odnose na λ_n^- i μ_n^- možemo pokazati da je $\lambda_n^- \leqslant \mu_n^-$.

Ovim je teorema dokazana. □

Neka je sada G beskonačan nepovezan graf sa komponentama povezanosti $G_1, G_2, \ldots$. Svaka komponenta povezanosti G_i grafa G je indukovani podgraf grafa G.

Teorema 1.8 Spektar beskonačnog nepovezanog grafa G jednak je uniji spektara njegovih komponenti povezanosti G_i uključujući i nulu tj.

$$\sigma(G) = \bigcup_i \sigma(G_i) \cup \{0\} \ .$$

Dokaz. Neka je $X_i=\{x_{j_1},x_{j_2},\dots\}$ skup čvorova komponente povezanosti G_i i $H_i=\overline{\mathcal{L}\{e_{j_1},e_{j_2},\dots\}}$ odgovarajući zatvoreni lineal nad vektorima bazisa $e_{j_1},e_{j_2},\dots$. Tada su $H_i(i=1,2,\dots)$ zatvoreni medjusobno ortogonalni podprostori od H i $H = H_1 \oplus H_2 \oplus \dots$.

Neka je dalje A_i odgovarajući operator susedstva pridružen komponenti povezanosti G_i grafa G, definisan svuda na H_i.

Podprostor H_i je invarijantan u odnosu na operator A tj. $A(H_i)\subset H_i$ i $A|_{H_i}=A_i$ $(i=1,2,\dots)$.

Neka $\lambda\in\sigma(G)$. Tada postoji sopstveni vektor $x=\sum_i x_i$ $(x_i\in H_i,\ i=1,2,\dots)$ takav da je $x\neq 0$ i $Ax=\lambda x$. Odavde sledi da je $Ax_i=\lambda x_i$ $(i=1,2,\dots)$. Kako postoji $i_o\in N$, takvo da je $x_{i_o}\neq 0$, to je $A_{i_o}x_{i_o}=Ax_{i_o}=\lambda x_{i_o}$. Dakle $\lambda\in\sigma(G_{i_o})$, čime je dokazana inkluzija $\sigma(G)\subset\bigcup_i \sigma(G_i)$.

Dokaz inkluzije $(\bigcup_i \sigma(G_i))\cup\{0\}\subset\sigma(G)$ je očigledan. □

Na osnovu definicije 1.7 zaključujemo da je karakteristična funkcija beskonačnog nepovezanog grafa G jednaka proizvodu karakterističnih funkcija njegovih komponenti povezanosti G_i tj.

$$f(G,\lambda) = \prod_i f(G_i,\lambda) \ . \tag{1}$$

Ako je beskonačan graf G povezan, tada njegov operator susedstva A ima osobinu "ireducibilnosti" tj. ne postoji koordinatni podprostor $\mathcal{K}=\overline{\mathcal{L}\{e_{i_1},e_{i_2},\dots\}}$, koji je invarijantan za A.

Sledeća teorema opisuje neke specifične spektralne osobine povezanog beskonačnog grafa.

Teorema 1.9 ([39]) Indeksu $r=\|A\|$ beskonačnog povezanog grafa G odgovara bar jedan sopstveni vektor sa pozitivnim koordinatama.

Indeks r je prosta sopstvena vrednost.

Ako $-r\in\sigma(G)$, tada je $-r$ takodje prosta sopstvena vrednost. □

Za jednu ocenu indeksa r beskonačnog povezanog grafa G potrebna je sledeća lema. Navodimo je bez dokaza, zbog sličnosti sa dokazom u konačnom slučaju ([3], str. 313).

Lema 1.1 Neka je G beskonačan povezan graf i y proizvoljan pozitivan vektor u separabilnom Hilbertovom prostoru H. Tada je

$$\frac{(Ay,y)}{(y,y)} \leq r \leq \sup_{1\leq i\leq\infty} \frac{(Ay,e_i)}{(y,e_i)} ,$$

gde jednakost važi ako i samo ako je $y=cx$ (x je pozitivan sopstveni vektor koji odgovara indeksu r grafa G). □

Neposredno iz ove leme stavljajući $y=(1,a,a^2,\ldots)$ dobijamo sledeći rezultat.

Teorema 1.10 Ako je G beskonačan povezan graf, tada je

$$(1-a^2)\cdot\sum_{i,j=1}^{\infty} a_{ij}^2 \leq r \leq \sup_{1\leq i\leq\infty} \Big(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}^2\Big)/a^{2(i-1)} . \ \square$$

2. RELACIJE IZMEDJU SPEKTRALNIH I STRUKTURNIH OSOBINA BESKONAČNIH PREBROJIVIH GRAFOVA

Spektri beskonačnih prebrojivih grafova mogu da posluže kao korisno sredstvo u analizi različitih problema sa grafovima. Dva osnovna pitanja koja se mogu postaviti u vezi sa spektralnom metodom su sledeća:

(i) Kako se strukturne osobine grafa odražavaju u spektru grafa?

(ii) Koji se strukturni detalji grafa mogu odrediti pomoću spektra grafa i na koji način?

Ovo poglavlje posvećeno je problemima koji su u vezi sa gore postavljenim pitanjima. Opisane su neke relacije izmedju spektra i strukture beskonačnih prebrojivih grafova, pri čemu mnogi od dobijenih rezultata predstavljaju generalizacije poznatih teorema iz spektralne teorije konačnih grafova.

2.1 Neke relacije izmedju spektralnih i strukturnih osobina digrafova

Koeficijenti karakteristične funkcije $f(G,\lambda)$ beskonačnog digrafa G mogu biti odredjeni iz njegove strukture, kao što pokazuje sledeća teorema.

Teorema 2.1 Ako je $f(G,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ $(a_0=1)$ karakteristična funkcija beskonačnog digrafa G, tada je

$$a_n = \sum_{L\in\mathcal{L}_n} (-1)^{p(L)} \prod(L) \qquad (n=1,2,\dots) \tag{1}$$

gde je $\mathcal{L}_n$ skup svih linearnih orijentisanih podgrafova L od G sa tačno n čvorova; p(L) označava broj komponenti povezanosti od L a $\prod(L)$ označava proizvod težina svih grana koje pripadaju L (težina grane (x_i, x_j) je $a_{ij} = a^{i+j-2}$).

Dokaz. Skup $\mathcal{L}_n$ možemo predstaviti na sledeći način:

$$\mathcal{L}_n = \bigcup_{i_1 < \cdots < i_n} \mathcal{L}(i_1, \ldots, i_n)$$

gde je $\mathcal{L}(i_1, \ldots, i_n)$ skup svih linearnih orijentisanih podgrafova digrafa G sa skupom čvorova $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\}$.

Kao što je poznato koeficijenat a_n jednak je zbiru svih glavnih minora reda n matrice susedstva A digrafa G sa znakom $(-1)^n$ tj.

$$a_n = (-1)^n \sum_{i_1 < \cdots < i_n} D_n(i_1, \ldots, i_n)$$

(videti formule (5) odeljka 1.1).

Izmedju skupa svih ovih minora i skupa svih indukovanih podgrafova digrafa G sa tačno n čvorova postoji bijekcija.

U skladu sa Leibniz-ovom definicijom determinante

$$(2) \qquad (-1)^n D_n(i_1, \ldots, i_n) = \sum_P (-1)^{n+I(P)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$$

pri čemu se sumiranje vrši nad svim permutacijama

$$P = \begin{pmatrix} i_1 i_2 \ldots i_n \\ j_1 j_2 \ldots j_n \end{pmatrix}.$$

Ovde I(P) označava parnost permutacije P. Izraz

$$S_P = (-1)^{n+I(P)} a_{i_1 j_1} \cdots a_{i_n j_n}$$

sume (2) je različit od nule ako i samo ako su grane (x_{i_1}, x_{j_1}), $\ldots, (x_{i_n}, x_{j_n})$ sadržane u digrafu G. Permutacija P može biti predstavljena kao proizvod

$$P = (i_1 j_1 \ldots)(\ldots)\ldots(\ldots)$$

disjunktnih cikli.

Očigledno, ako je $S_P \neq 0$ onda svakoj cikli od P odgovara orijentisana kontura (kratko, kontura) u G; otuda permutaciji P odgovara linearan orijentisan podgraf $L \in \mathcal{L}(i_1,\ldots,i_n)$. Obrnuto: svakom linearnom orijentisanom podgrafu $L \in \mathcal{L}(i_1,\ldots,i_n)$ odgovara permutacija P i izraz $S_P = \pm\prod(L)$, gde znak zavisi jedino od broja $e(L)$ parnih kontura (tj. kontura parne dužine) medju svim konturama od L:

$$S_P = (-1)^{n+e(L)}\prod(L) \quad .$$

Očigledno je

$$n+e(L) \equiv p(L) \pmod 2$$

odakle je

$$(-1)^n D_n(i_1,\ldots,i_n) = \sum S_P = \sum_{L\in\mathcal{L}(i_1,\ldots,i_n)} (-1)^{p(L)}\prod(L) \quad .$$

Sumiranjem po svim glavnim minorima konačno dobijamo da (1) važi, čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.1 može se smatrati osnovnom teoremom spektralne teorije beskonačnih digrafova i predstavlja neposrednu generalizaciju odgovarajuće teoreme za konačne digrafove ([9], str. 32).

Obrnuti problem prepoznavanja strukturnih osobina digrafa G iz vrednosti koeficijenata a_n je mnogo teži. Pre nego što formulišemo neke teoreme, navodimo nekoliko prostih činjenica.

1. Suma težina svih orijentisanih petlji jednaka je veličini $-a_1$.

2. Ako je G digraf bez petlji, tada nijedan par njegovih čvorova nije spojen sa dve grane suprotnih orijentacija

ako i samo ako je $a_2=0$. Ova činjenica može biti lako proverena posmatranjem svih glavnih minora drugoga reda matrice susedstva.

3. Dobro je poznato da je ij-ti član od A^k jednak sumi težina svih puteva u G dužine k koji spajaju čvorove x_i i x_j (težina puta u G jednaka je proizvodu težina svih grana koje formiraju ovaj put). Otuda je suma težina t_k svih zatvorenih puteva dužine k jednaka tragu od A^k. Korišćenjem osnovne teoreme o spektralnom preslikavanju mogu se izračunati sopstvene vrednosti operatora A^k; dobijamo da je

$$t_k = \operatorname{tr} A^k = \sum_{j=1}^{\nu(A)} \lambda_j^k \qquad (k=1,2,\dots) .$$

Sada navodimo neke teoreme koje se odnose na strukturu kontura beskonačnog digrafa. Dužina $g(G)$ najkraće konture u digrafu G (ako takva kontura postoji) zove se struk digrafa G. Ako G nema kontura, tada je $g(G)=+\infty$.

<u>Teorema 2.2</u> Neka je G beskonačan digraf sa karakterističnom funkcijom $f(G,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ i neka je $g=g(G)$ struk digrafa G. Ako je $n<2g$, tada je $-a_n$ jednako sumi težina svih kontura dužine n sadržanih u G. Struk g digrafa G jednak je najmanjem indeksu n za koji je $a_n\neq 0$.

<u>Dokaz</u>. Očigledno, svaki linearni orijentisani podgraf L od G sa manje od 2g čvorova je kontura. Na osnovu teoreme 2.1 dobijamo

$$a_n = \sum_{L\in\mathfrak{L}_n} (-1)^{p(L)} \prod(L) = - \sum_{\vec{C}_n\subset G} \prod(\vec{C}_n) \qquad (n<2g) . \square$$

Dalje, za proizvoljan ceo broj $d>1$ i digraf G, d-struk $g_d(G)$ je po definiciji dužina najkraće konture medju konturama čija dužina nije deljiva sa d. Ako ne postoje takve konture, tada je $g_d(G)=+\infty$.

Teorema 2.3 Neka je G beskonačan digraf sa karakterističnom funkcijom $f(G,\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\lambda^n$ i $g_d(G)=g_d$. Neka je dalje $n<g+g_d-1$ i $n\not\equiv 0 \pmod d$. Tada je $-a_n$ jednako sumi težina svih kontura dužine n sadržanih u G. d-struk g_d digrafa G jednak je najmanjem indeksu n koji nije deljiv sa d i za koji je $a_n\neq 0$.

Dokaz. Neka je $n<g+g_d-1$ i $n\not\equiv 0 \pmod d$. Tada je svaki linearni orijentisani podgraf L od G sa n čvorova kontura. Iz teoreme 2.1 dobijamo

$$a_n = \sum_{L\in\mathfrak{L}_n} (-1)^{p(L)}\prod(L) = -\sum_{\vec{C}_n\subset G}\prod(\vec{C}_n)$$

što kompletira dokaz teoreme. □

Posledica 2.3.1 Dužina g_2 najkraće neparne konture u G jednaka je indeksu prvog ne-nula koeficijenta medju $a_1,a_3,a_5,\ldots$; suma težina najkraćih neparnih kontura jednaka je $-a_{g_2}$. □

Na osnovu ove posledice lako se može dokazati sledeća teorema.

Teorema 2.4 Beskonačan digraf G nema neparnih kontura ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka u kompleksnoj ravni, simetričan u odnosu na nulu.

Dokaz. Ako G nema neparnih kontura, tada je prema posledici 2.3.1, $a_1=a_3=\ldots=0$ i karakteristična funkcija digrafa G ima sledeći oblik

$$f(G,\lambda) = 1 + a_2\lambda^2 + a_4\lambda^4 + \ldots .$$

Dakle, spektar $\sigma(G)$ je 0-simetričan.

Obrnuto, ako je spektar digrafa G 0-simetričan, tada je $f(G,\lambda)$ parna funkcija tj. $f(G,-\lambda)=f(G,\lambda)$. Pošto je $f(G,\lambda)$ cela analitička funkcija, tada su svi koeficijenti neparnog reda $a_1,a_3,\ldots$ jednaki nuli i digraf G nema neparnih kontura. □

2.2 Neke relacije izmedju spektralnih i strukturnih osobina grafova

Ako digraf H ima simetričnu matricu susedstva A, tada matrica A može biti shvaćena i kao matrica susedstva grafa G. Na taj način mi možemo primeniti rezultate iz odeljka 2.1 na grafove. Ali sada zahvaljujući simetričnosti matrice susedstva, imamo neke dalje rezultate.

Teorema 2.1 za grafove ima specijalan oblik.

Osnovna figura U grafa G je svaki konačan graf čije sve komponente povezanosti su kompletni grafovi K_2 ili/i konture C_k $(k \geqslant 3)$. Neka je p(U) broj komponenti povezanosti a c(U) broj kontura sadržanih u U i neka je

$$\Pi(U) = \prod_{u \in E(U)} (w(u))^{\xi(u,U)} ,$$

gde je E(U) skup svih grana od U, w(u) je težina grane u a

$$\xi(u,U) = \begin{cases} 1 & \text{ako je u sadržana u konturi od U} \\ 2 & \text{u suprotnom slučaju.} \end{cases}$$

<u>Teorema 2.5</u> Neka je $f(G,\lambda)=1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n \lambda^n$ karakteristična funkcija beskonačnog grafa G. Tada je

$$(1) \qquad a_n = \sum_{U \in \mathcal{U}_n} (-1)^{p(U)} \, 2^{c(U)} \, \Pi(U) \qquad (n=2,3,\ldots) ,$$

gde je $\mathcal{U}_n$ skup svih osnovnih figura sa tačno n čvorova. □

Neka je dalje b_k suma težina svih osnovnih figura koje se sastoje od tačno k nezavisnih grana grafa G tj.

$$b_k = \sum_{(u_1,\ldots,u_k)} \prod_{j=1}^{k} (w(u_j))^2 .$$

Ako je graf G šuma, tada sve osnovne figure U koje su kao delimični podgrafovi sadržane u G imaju osobinu c(U)=0.

Prema tome, svaka osnovna figura U šume G odgovara jednom izboru grafova K_2 koji su kao podgrafovi sadržani u G tj. jednom izboru nezavisnih grana u G. Na osnovu toga zaključujemo da je $\mathcal{U}_{2k+1}=\emptyset$, pa je $a_{2k+1}=0$ $(k=1,2,\ldots)$ a

$$(2) \qquad a_{2k} = \sum_{U\in\mathcal{U}_{2k}} (-1)^{p(U)} 2^{c(U)} \prod(U) = \sum_{(u_1,\ldots,u_k)} (-1)^k \prod_{j=1}^{k} (w(u_j))^2 =$$

$$= (-1)^k\, b_k \qquad (k=1,2,\ldots) \; .$$

Dakle, karakteristična funkcija šume G ima sledeći oblik

$$(3) \qquad f(G,\lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k\, b_k\, \lambda^{2k} \; .$$

Dokažimo da (3) ne važi ako G nije šuma. Neka G sadrži konture i neka je n_o veličina najmanje konture u G. Tada koeficijenat karakteristične funkcije uz λ^{n_o} glasi

$$a_{n_o} = \begin{cases} (-1)^{n_o/2}\, b_{n_o/2} - 2\sum\limits_{C_{n_o}\subset G} \prod(C_{n_o}), & n_o \text{ - parno} \\ - 2\sum\limits_{C_{n_o}\subset G} \prod(C_{n_o}) \; , & n_o \text{ - neparno} \; . \end{cases}$$

U oba slučaja (3) ne važi.

Ovim je dokazana sledeća u spektralnoj teoriji stabala veoma važna teorema.

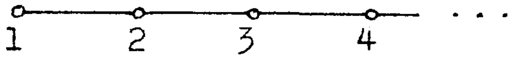
Teorema 2.6 Karakteristična funkcija beskonačnog grafa G ima oblik (3) ako i samo ako je graf G šuma. □

Koristeći relacije (5) odeljka 1.1 i relacije (2) ovog odeljka možemo izračunati koeficijente karakterističnih funkcija nekih prostih beskonačnih grafova.

Primer 2.1 Ako je $G=K_\infty$ kompletan beskonačan graf, tada je

$$f(G,\lambda) = 1 - \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{a^{n(n-1)}}{(1-a^2)\ldots(1-a^{2n})} \lambda^n . \square$$

Primer 2.2 Ako je $G=P_\infty$ beskonačan jednostrani put



tada je $a_{2n+1}=0$ $(n=1,2,\ldots)$ i

$$f(G,\lambda) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n(2n-1)}}{(1-a^4)\ldots(1-a^{4n})} \lambda^{2n} . \square$$

Sada ćemo posmatrati problem odredjivanja struka grafa. Kao kod digrafova, dužina $g(G)$ najkraće konture grafa G (ako takva kontura postoji) zove se struk grafa G. Mi izostavljamo dokaz sledeće teoreme, s obzirom na sličnost sa dokazom odgovarajuće teoreme za konačne grafove ([35]).

Teorema 2.7 Neka je G beskonačan graf sa karakterističnom funkcijom $f(G,\lambda)=1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n \lambda^n$ i neka je b_k suma težina svih osnovnih figura koje se sastoje od tačno k nezavisnih grana. Neka je dalje

$$\tilde{a}_n = \begin{cases} a_n & \text{za neparno } n \\ a_n - (-1)^k b_k & \text{za } n=2k . \end{cases}$$

Tada je $g(G)$ jednak indeksu prvog ne-nula broja medju $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots$ a suma težina svih kontura dužine $g(G)$ jednaka je $-\frac{1}{2}\tilde{a}_{g(G)}$. $\square$

Posledica 2.3.1 može biti preformulisana za grafove. Tako dobijamo sledeću teoremu.

Teorema 2.8 Neka je G beskonačan graf sa karakterističnom funkcijom $f(G,\lambda)=1+\sum_{n=2}^{\infty} a_n \lambda^n$. Dužina f najkraće neparne konture u grafu G jednaka je prvom ne-nula koeficijentu medju $a_1, a_3, a_5, \ldots$. Suma težina najkraćih neparnih kontura jednaka je $-\frac{1}{2} a_f$. $\square$

Neposredna posledica ove teoreme je sledeća teorema.

Teorema 2.9 Beskonačan graf G koji sadrži bar jednu granu je bipartitan ako i samo ako je njegov spektar, posmatran kao skup tačaka realne ose, simetričan u odnosu na nulu. □

Sledeći stav daje karakterizaciju povezanih bipartitnih grafova.

Teorema 2.10 Beskonačan povezan graf G sa najvećom sopstvenom vrednošću r je bipartitan ako i samo ako je -r sopstvena vrednost grafa G.

Dokaz. S obzirom na prethodnu teoremu, dovoljno je dokazati da je svaki graf G sa $-r \in \sigma(G)$ bipartitan.

Neka je $-r \in \sigma(G)$. Tada je $Ay=-ry$, gde je $y=(y_1,y_2,\dots)$ odgovarajući sopstveni vektor sa realnim koordinatama. Ako stavimo da je $y^+=(|y_1|,|y_2|,\dots)$ tada je

$$r = |(Ay,y)| \leq (Ay^+,y^+) \leq r ,$$

te sledi da je $Ay^+=ry^+$ tj. $y^+ \in \mathcal{N}(A-\lambda I)$. Iz očigledne jednakosti

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}y_j^+ = \lambda y_i^+ \quad (i=1,2,\dots)$$

možemo dokazati da je $y_j^+ > 0$ za svako $j=1,2,\dots$. Zaista, ako je $N_o=\{i|y_i=0\}$ tada iz poslednje jednakosti dobijamo

$$\sum_{j\notin N_o} a_{ij}y_j^+ = 0 \qquad (i \in N_o) .$$

Odavde sledi da je $a_{ij}=0$ $(i\in N_o, j\notin N_o)$, te je matrica susedstva A grafa G reducibilna, što je suprotno pretpostavci teoreme o povezanosti grafa G. Dakle, $y_j \neq 0$ za svako $j=1,2,\dots$. Kako su podprostori $\mathcal{N}(A+rI)$ i $\mathcal{N}(A-rI)$ medjusobno ortogonalni dobijamo da je

$$(y,y^+) = \sum_{i=1}^{\infty} y_iy_i^+ = \sum_{i=1}^{\infty} (\mathrm{sgn}\,y_i)y_i^2 = 0 ,$$

odakle sledi da sve koordinate vektora y nisu istoga znaka.

Neka je $\mathbf{D}=\mathrm{diag}(\mathrm{sgn}y_1,\mathrm{sgn}y_2,\ldots)$ beskonačna dijagonalna matrica. Slično kao za konačne matrice ([12], str. 358) može se proveriti jednakost

$$\mathbf{A} = -\,\mathbf{DAD}\,. \tag{4}$$

Permutacijom odgovarajućih vrsta i kolona matrica $\mathbf{A}$ i $\mathbf{D}$, dobijamo da $\mathbf{D}$ ima sledeći kvazidijagonalni oblik

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

gde su I_1 i I_2 jedinične matrice. Pišući A kao blok matricu u skladu sa (5)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

možemo zameniti (4) sledećim sistemom:

$$A_{11} = -A_{11},\ A_{12} = A_{12},\ A_{21} = A_{21},\ A_{22} = -A_{22}\,.$$

Odavde je $A_{11}=0$, $A_{22}=0$, te zaključujemo da je graf G bipartitan. Ovim je teorema dokazana. □

Teorema 2.11 Ako indeks r beskonačnog grafa G ima multiplicitet p, i ako postoji pozitivan sopstveni vektor koji mu odgovara, tada G ima tačno p komponenti povezanosti.

Dokaz. Matrica susedstva beskonačnog nepovezanog grafa G ima oblik

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & A_2 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & A_3 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Neka je z pozitivan sopstveni vektor koji odgovara indeksu r grafa G. U skladu sa (6) vektor z možemo predstaviti u obliku $z=(z^1,z^2,\ldots)$, odakle koristeći jednakost $Az=rz$ dobijamo

$$A_i z^i = r z^i \quad (i=1,2,\ldots) .$$

Pošto je A_i operator susedstva povezanog grafa G_i, na osnovu teorema 1.8 i 1.9 zaključujemo da G ima tačno p komponenti povezanosti. □

Rezultat koji sledi je neposredna posledica teorema 1.9 i 2.11.

Teorema 2.12 Beskonačan graf G je povezan ako i samo ako je njegov indeks prosta sopstvena vrednost sa odgovarajućim pozitivnim sopstvenim vektorom. □

Neka su $X_1, X_2, \ldots$ karakteristični podskupovi beskonačnog grafa G i neka su njegovi čvorovi numerisani tako da je $X_1=\{x_{i_1^1}, x_{i_2^1}, \ldots\}$, $X_2=\{x_{i_1^2}, x_{i_2^2}, \ldots\}, \ldots$. Neka je dalje $N_p=\{i_1^p, i_2^p, \ldots\}$ $(p=1,2,\ldots)$ a c_p zbir kvadrata težina čvorova skupa X_p tj.

$$c_p = \sum_{i_k^p \in N_p} a^{2(i_k^p-1)} \quad (p=1,2,\ldots) .$$

Na kraju ovog odeljka navodimo jednu spektralnu karakterizaciju beskonačnih grafova konačnog tipa.

Teorema 2.13 ([40]) Beskonačan graf G je konačnog tipa ako i samo ako ima konačan spektar. Ako je $G=g(X_1, \ldots, X_k)$, tada su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \det\left(b_{ij} - \frac{\lambda}{c_i}\,\delta_{ij}\right) = 0 ,$$

gde je $B=[b_{ij}]$ 0-1 matrica susedstva kanoničkog grafa g a δ_{ij} Kronekerov δ-simbol.

Broj n(G) ne-nula sopstvenih vrednosti grafa G jednak je broju n(g) ne-nula sopstvenih vrednosti kanoničkog grafa g. □

2.3 Spektralna karakterizacija kompletnih multipartitnih grafova

U ovom odeljku proučavamo spektar beskonačnih kompletnih multipartitnih grafova i dajemo jednu spektralnu karakterizaciju takvih grafova.

Beskonačan graf G zovemo kompletan multipartitan graf ako su svaka dva karakteristična podskupa X_i i X_j $(i \neq j)$ kompletno susedna u grafu G.

Kompletan multipartitan graf G koji ima tačno k karakterističnih podskupova $X_1, \ldots, X_k$ označićemo sa $K_{X_1,\ldots,X_k}$. Kompletan multipartitan graf G koji ima beskonačno mnogo karakterističnih podskupova $X_1, X_2, \ldots$ označićemo sa $K_{X_1,X_2,\ldots}$.

Ako su čvorovi kompletnog multipartitnog grafa G numerisani tako da je $X_1=\{x_{i_1^1}, x_{i_2^1}, \ldots\}$, $X_2=\{x_{i_1^2}, x_{i_2^2}, \ldots\}, \ldots$ tada u permutovanom bazisu $\{e_{i_1^1}, e_{i_2^1}, \ldots\} \cup \{e_{i_1^2}, e_{i_2^2}, \ldots\} \cup \ldots$ separabilnog Hilbertovog prostora H matrica susedstva A grafa G ima oblik

$$(1) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} & A_{13} & \ldots \\ A_{21} & 0 & A_{23} & \ldots \\ A_{31} & A_{32} & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix},$$

gde je

$$A_{pq} = \begin{bmatrix} a^{i_1^p+i_1^q-2} & a^{i_1^p+i_2^q-2} & \ldots \\ a^{i_2^p+i_1^q-2} & a^{i_2^p+i_2^q-2} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix}(p=1,2,\ldots; \\ q=p+1,p+2,\ldots)\end{matrix}$$

a $A_{qp}=A_{pq}^T$.

Neka je $N_k=\{i_1^k, i_2^k, \ldots\}$ $(k=1,2,\ldots)$ i

$$(2) \qquad c_k = \sum_{i_\ell^k \in N_k} a^{2i_\ell^k - 2} \qquad (k=1,2,\ldots) .$$

Sledeće dve teoreme opisuju spektar kompletnih multipartitnih grafova. Najpre posmatramo slučaj kada takav graf ima beskonačno mnogo karakterističnih podskupova.

<u>Teorema 2.14</u> Neka je $G=K_{X_1,X_2,\ldots}$ kompletan multipartitan graf sa beskonačno mnogo karakterističnih podskupova. Tada je njegov spektar beskonačan i važi sledeće:

a) Ako je $G \neq K_\infty$ (tj. ako svi X_i nisu jednočlani skupovi) tada je $\lambda=0$ njegova sopstvena vrednost. Ako je $G=K_\infty$, tada $\lambda=0$ nije sopstvena vrednost grafa G;

b) $\lambda=-c_i (i=1,2,\ldots)$ je sopstvena vrednost grafa G ako i samo ako se broj c_i javlja u nizu $c_1,c_2,\ldots$ p-puta $(p>1)$ i tada je njena višestrukost $p-1$;

c) Postoji tačno jedna pozitivna sopstvena vrednost grafa G. Sve sopstvene vrednosti različite od 0 i $-c_i$ $(i=1,2,\ldots)$ su proste i odredjene jednačinom

$$(3) \qquad f(\lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda + c_k} = 1 \quad .$$

<u>Dokaz.</u> Neka je λ proizvoljna sopstvena vrednost grafa $G=K_{X_1,\ldots,X_k}$ i $x=(x_1,x_2,\ldots)^T \neq 0$ odgovarajući sopstveni vektor. Tada iz jednakosti $Ax=\lambda x$ imamo

$$(4) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} x_j = \lambda x_i \qquad (i=1,2,\ldots) .$$

Red na levoj strani jednakosti (4) je apsolutno konvergentan (sledi iz nejednakosti Caychy-Schwarz-a). Na osnovu toga i činjenice da matrica susedstva grafa G ima oblik (1), jednakosti (4) mogu biti napisane u obliku

$$(5) \quad \sum_{i_q^1 \in N_1} a^{i_q^1-2} x_{i_q^1} + \dots + \sum_{i_q^{k-1} \in N_{k-1}} a^{i_q^{k-1}-2} x_{i_q^{k-1}} + \sum_{i_q^{k+1} \in N_{k+1}} a^{i_q^{k+1}-2} x_{i_q^{k+1}} + \dots =$$

$$= \frac{\lambda}{a^{i_p^k}} x_{i_p^k} \qquad (i_p^k \in N_k;\ k=1,2,\dots) .$$

Razmotrimo najpre slučaj $\lambda=0$. Iz sistema jednakosti (5) dobijamo uslov

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} Y_\nu = Y_k \qquad (k=1,2,\dots) ,$$

gde je $Y_\nu = \sum_{i_q^\nu \in N_\nu} a^{i_q^\nu-2} x_{i_q^\nu}$ $(\nu=1,2,\dots)$. Kako je red $\sum_{\nu=1}^{\infty} Y_\nu$ konvergentan, sledi da je $Y_1=Y_2=\dots=0$ tj.

$$\sum_{i_q^\nu \in N_\nu} a^{i_q^\nu} x_{i_q^\nu} = 0 \qquad (\nu=1,2,\dots) .$$

Ako sa d_ν označimo kardinalni broj skupa X_ν, tada za $d_\nu=1$ sledi da je $x_{i_1^\nu}=0$ a za $d_\nu>1$ sledi da je vektor $x^\nu = \sum_{i_q^\nu \in N_\nu} x_{i_q^\nu} e_{i_q^\nu}$ ortogonalan na vektor $a^\nu = \sum_{i_q^\nu \in N_\nu} a^{i_q^\nu} e_{i_q^\nu}$, gde $x^\nu, a^\nu \in H_\nu = \overline{\mathcal{L}\{e_{i_1^\nu}, e_{i_2^\nu}, \dots\}}$. U poslednjem slučaju vektori x^ν formiraju odgovarajući zatvoreni hiperpodprostor $H_\nu^{\prime}$ prostora H_ν. Odavde sledi da je, osim u slučaju kada je $d_\nu=1$ $(\nu=1,2,\dots)$ tj. kada je G kompletan graf K_∞, $\lambda=0$ sopstvena vrednost grafa G a odgovarajući sopstveni podprostor je $H_1^{\prime} \oplus H_2^{\prime} \oplus \dots$. Dakle, $\lambda=0$ može biti kako konačne tako i beskonačne višestrukosti, što zavisi od strukture grafa G.

Neka je sada $\lambda \neq 0$. Iz jednakosti (5) lako nalazimo da je

$$x_{i_p^k} = a^{i_p^k - i_1^k} x_{i_1^k} \qquad (i_p^k \in N_k;\ k=1,2,\dots)$$

i sistem jednakosti (5) svodi se na sledeći sistem jednakosti

$$(6) \qquad \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu}{a^{i_1^\nu}} x_{i_1^\nu} = \frac{\lambda + c_k}{a^{i_1^k}} x_{i_1^k} \qquad (k=1,2,\dots) .$$

Kako je $x\neq 0$ to bar jedan od $x_{i_1^1}, x_{i_1^2}, \dots$ mora biti različit od nule. Neka je $x_{i_1^1} \neq 0$. Iz jednakosti (6) nalazimo da je

$$(7) \qquad (\lambda+c_k)x_{i_1^k} = a^{i_1^k - i_1^1}(\lambda+c_1)x_{i_1^1} \qquad (k=2,3,\dots) .$$

Sada možemo da zaključimo da $\lambda=-c_k$ $(k=1,2,\dots)$ nije sopstvena vrednost grafa G ako se c_k pojavljuje u nizu (2) tačno jedanput.

Ako se c_k u nizu (2) pojavljuje p-puta $(p>1)$, tada je $\lambda=-c_k$ sopstvena vrednost grafa G višestrukosti p-1. Ako je, na primer, $c_1=c_2=c_3$, tada je vektor x (gde su $x_{i_1^2}$ i $x_{i_1^3}$ proizvoljni, $x_{i_1^4}=x_{i_1^5}=\dots=0$ a $x_{i_1^1}$ odredjen iz (6)) sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda=-c_1$.

Napomenimo da niz (2) ne sadrži beskonačno mnogo jednakih članova c_k jer je svako $c_k>0$ i

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = \sum_{i=1}^{\infty} a^{2i-2} = \frac{1}{1-a^2} .$$

Za $\lambda\neq -c_k$ $(k=1,2,\dots)$ iz jednakosti (7) dobijamo

$$x_{i_1^\nu} = \frac{a^{i_1^\nu - i_1^1}(\lambda+c_1)}{\lambda+c_\nu} x_{i_1^1} \qquad (\nu=2,3,\dots) .$$

Zamenom $x_{i_1^\nu}$ $(\nu=2,3,\dots)$ u prvoj jednakosti iz (6) dobijamo da ne-nula sopstvene vrednosti grafa G različite od $-c_k$ $(k=1,2,\dots)$ zadovoljavaju jednačinu (3). Kako su odgovarajući sopstveni vektori jedinstveno odredjeni ove sopstvene vrednosti su proste.

Lako se može videti i obrnuto tj. ako je λ proizvoljan koren jednačine (3) tada je λ prosta sopstvena vrednost grafa G.

Neka su svi medjusobno različiti članovi niza (2) poredjani u opadajućem poretku u niz $c_{i_1}, c_{i_2}, \dots$ i neka je $I_\nu=(-c_{i_\nu}, -c_{i_{\nu+1}})$ $(\nu=1,2,\dots)$.

Može se pokazati da je moguće diferencirati funkcionalni red na levoj strani jednakosti (3) član po član u svakom intervalu $(-\infty, -c_{i_1})$, $I_\nu(\nu=1,2,\dots)$, $(0,\infty)$ i dobija se da je u svim tim intervalima

$$f'(\lambda) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(\lambda+c_k)^2} < 0 \ .$$

Odavde zaključujemo da je funkcija $f(\lambda)$ strogo monotono opadajuća u svim tim intervalima.

Takodje se može pokazati da je za $\nu=1,2,\dots$

$$\lim_{\lambda\to -c_{i_\nu}-0} f(\lambda) = -\infty, \quad \lim_{\lambda\to -c_{i_\nu}+0} f(\lambda) = +\infty \text{ i } \lim_{\lambda\to\pm\infty} f(\lambda) = 0 \ .$$

Na osnovu ovoga zaključujemo da jednačina (3) ima tačno jedan koren u intervalima I_ν $(\nu=1,2,\dots)$ i $(0,+\infty)$.

Ovim je teorema dokazana. □

Sada ćemo posmatrati slučaj kada G ima konačno mnogo karakterističnih podskupova.

Teorema 2.15 Neka je $G=K_{X_1,\dots X_k}$ kompletan multipartitan graf sa konačno mnogo karakterističnih podskupova. Tada je

a) $\lambda=0$ sopstvena vrednost grafa G;

b) $\lambda=-c_i$ $(i=1,\dots,k)$ je sopstvena vrednost grafa G ako i samo ako se broj c_i pojavljuje u nizu $c_1,\dots,c_k$ p-puta $(1<p\le k)$ i tada je njena višestrukost jednaka p-1;

c) G ima tačno k ne-nula sopstvenih vrednosti, od kojih je tačno jedna pozitivna. Sopstvene vrednosti različite od 0 i $-c_i$ $(i=1,\dots,k)$ su proste i odredjene su jednačinom

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\lambda+c_i} = 1 \ .$$

Dokaz. Graf $G=K_{X_1,\dots,X_k}$ je konačnog tipa k a njegov kanonički graf g je kompletan graf sa tačno k čvorova. Pošto g ima tačno k ne-nula sopstvenih vrednosti (uzimajući u obzir njihov multiplicitet, takodje), na osnovu teoreme 2.13 zaključujemo da graf G ima takodje tačno k ne-nula sopstvenih vrednosti.

Pošto je spektar kompaktnog samoadjungovanog operatora A konačan ako i samo ako njegov rang R(A) je konačne dimenzije, zaključujemo da je $\lambda=0$ sopstvena vrednost grafa G.

Preostali deo teoreme 2.15 može se dokazati na isti način kao odgovarajući deo teoreme 2.14. □

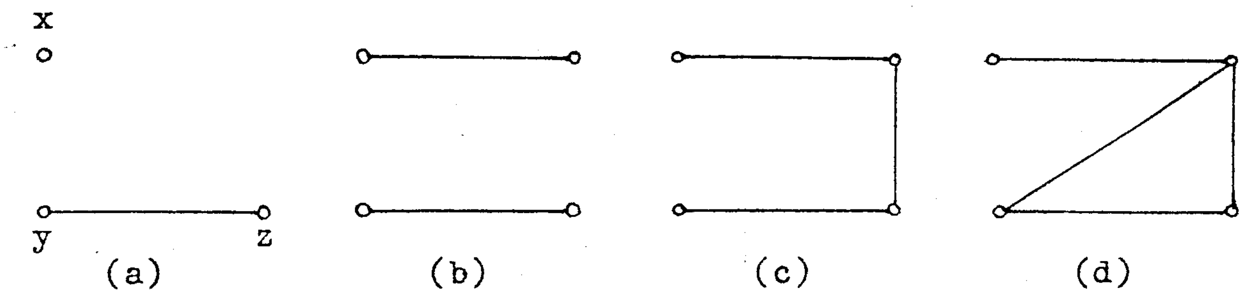
Sledeći rezultat daje jednu spektralnu karakterizaciju beskonačnih kompletnih multipartitnih grafova.

<u>Teorema 2.16</u> Beskonačan graf G ima tačno jednu pozitivnu sopstvenu vrednost ako i samo ako njegovi neizolovani čvorovi formiraju kompletan multipartitan graf.

<u>Dokaz</u>. Zahvaljujući teoremi 1.8 i činjenici da je $\lambda=0$ jedina sopstvena vrednost grafa bez grana, ne umanjujući opštost dokaza možemo pretpostaviti da graf G nema izolovane čvorove.

Na osnovu teorema 2.14 i 2.15 zaključujemo da kompletan multipartitan graf G ima tačno jednu pozitivnu sopstvenu vrednost.

Obrnuto, pretpostavimo da G nije kompletan multipartitan graf. Tada postoje nesusedni čvorovi x i y iz različitih karakterističnih podskupova i postoji čvor z koji je, na primer, susedan čvoru y a nije susedan čvoru x. Dakle, graf G sadrži indukovani podgraf prikazan na slici 2.1(a). Pošto x nije izolovani čvor u G, graf G sadrži najmanje jedan graf (b), (c),(d) sa slike 2.1 kao indukovani podgraf. Može biti pokazano da sa proizvoljnim težinama $(a^{i-1}, a^{j-1}, a^{k-1}, a^{\ell-1})$ ovi grafovi



Sl. 2.1

imaju tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. Na osnovu teoreme 1.7 zaključujemo da i graf G ima najmanje dve pozitivne sopstvene vrednosti, što je nemoguće.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Teorema 2.17 Indeks r kompletnog k-partitnog grafa $K_{X_1,\ldots,X_k}$ zadovoljava nejednakost

$$r \leq \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{1-a^2} .$$

Jednakost u ovoj nejednakosti važi ako je $c_1 = \ldots = c_k$.

Dokaz. Iz teoreme 2.15 sledi da je indeks r grafa $K_{X_1,\ldots X_k}$ jedini pozitivni koren polinoma

$$p(\lambda) = \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\lambda + c_i}\right) \prod_{i=1}^{k} (\lambda + c_i)$$

koji je prost (teorema 1.9). Zbog toga je za $\lambda > 0$

(8) $$p(\lambda) \geqslant 0 \iff \lambda \geqslant r .$$

Pošto je $\sum_{i=1}^{k} c_i = \sum_{n=1}^{\infty} a^{2n-2} = \frac{1}{1-a^2}$, posmatrajmo za $\lambda > 0$ izraz

(9) $$\sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{\lambda + c_i} .$$

Pretpostavimo za trenutak da c_i mogu uzimati pozitivne realne vrednosti. Tada (9) dostiže svoju maksimalnu vrednost kada su svi c_i jednaki. Zaista, ako je $c_i \neq c_j$ onda stavljajući $c'_i = c'_j = \frac{1}{2}(c_i + c_j)$ a ostavljajući sve druge vrednosti nepromenjene izraz (9) se povećava. Otuda je

$$p(\lambda) \geqslant \left(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\frac{1}{k(1-a^2)}}{\lambda + \frac{1}{k(1-a^2)}}\right) \prod_{i=1}^{k} (\lambda + c_i) .$$

Posebno za $\lambda = \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{1-a^2}$ dobijamo $p(\lambda) \geqslant 0$. Na osnovu (8) zaključujemo da važi nejednakost

$$r \leqslant \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{1-a^2} ,$$

čime je teorema dokazana. □

Na kraju ovog odeljka pokazaćemo kako se hromatski broj beskonačnog grafa može oceniti na osnovu indeksa grafa. Naime, dobićemo jednu donju granicu hromatskog broja grafa.

Teorema 2.18 Ako je G beskonačan graf, r njegov indeks a $\chi(G)$ hromatski broj tada važi nejednakost

$$\chi(G) \geqslant \frac{1}{1 - r(1-a^2)} . \tag{10}$$

Dokaz. Ako je $\chi(G) = k$, tada skup čvorova grafa G može biti podeljen na k nepraznih podskupova $X_1, \ldots, X_k$, tako da podgraf indukovan svakim od ovih podskupova ne sadrži grane. Dodavanjem novih grana grafu G možemo dobiti kompletan k-partitan graf $K_{X_1,\ldots,X_k}$. Na osnovu teoreme 1.6 indeks r grafa G nije veći od indeksa grafa $K_{X_1,\ldots,X_k}$. Na osnovu teoreme 2.17 imamo da je

$$r \leqslant \frac{k-1}{k} \cdot \frac{1}{1-a^2} ,$$

odakle se neposredno dobija nejednakost (10). □

2.4 Neki redukcioni postupci za izračunavanje karakteristične funkcije beskonačnog grafa

U ovom odeljku dobijene su neke relacije kojima je karakteristična funkcija beskonačnog grafa izražena pomoću karakterističnih funkcija nekih njegovih indukovanih podgrafova.

Teorema 2.19 Neka su u beskonačnom grafu G čvorovi v_r i v_s spojeni granom e_{rs}. Tada je

$$(1) \qquad f(G,\lambda) = f(G-e_{rs},\lambda) - a^{2(r+s-2)}\lambda^2 f(G-v_r-v_s,\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C} \Pi(C)\,\lambda^{n(C)} f(G-C,\lambda) ,$$

gde se sumiranje vrši po svim konturama grafa G koje sadrže granu e_{rs}; $n(C)$ označava broj čvorova konture C a $\Pi(C)$ njenu težinu.

Dokaz. Ideja dokaza je ista kao za konačne grafove ([36]). S obzirom na apsolutnu konvergenciju odgovarajućeg reda, karakteristična funkcija beskonačnog grafa G može biti napisana u sledećem obliku

$$(2) \qquad f(G,\lambda) = \sum_{U\in\mathcal{U}(G)} (-1)^{p(U)}\, 2^{c(U)}\, \Pi(U)\, \lambda^{n(U)} =$$

$$= \sum_{U\in\mathcal{U}(G)} \omega(U)\, \lambda^{n(U)} ,$$

gde je $\mathcal{U}(G)$ skup svih osnovnih figura grafa G (prazan graf je takodje uključen u osnovne figure sa $p(\emptyset)=c(\emptyset)=0$, $\Pi(\emptyset)=1$) a $n(U)$ je broj čvorova osnovne figure U.

S obzirom na (2), relacija (1) se može napisati u sledećem obliku

$$(3) \qquad \sum_{U\in\mathcal{U}(G)} \omega(U)\,\lambda^{n(U)} = \sum_{U\in\mathcal{U}(G-e_{rs})} \omega(U)\,\lambda^{n(U)} -$$

$$- \sum_{U\in\mathcal{U}(G-v_r-v_s)} a^{2(r+s-2)}\,\omega(U)\,\lambda^{n(U)+2} -$$

$$- 2\sum_{C}\sum_{U\in\mathcal{U}(G-C)} \Pi(C)\,\omega(U)\,\lambda^{n(U)+n(C)} .$$

Izmedju svih osnovnih figura na levoj strani jednakosti (3) i svih osnovnih figura u jednoj od suma na desnoj strani jednakosti (3) postoji bijekcija. Naime, svakoj osnovnoj figuri $U\in\mathcal{U}(G)$ odgovara osnovna figura U' iz $G-e_{rs}$, $G-v_r-v_s$ ili $G-C$ na sledeći način:

1° Ako $e_{rs}\notin U$, tada je $U'=U$.

2° Ako $e_{rs}\in K_2\subset U$, tada je $U'=U-K_2$ (kao podgraf od $G-v_r-v_s$).

3° Ako $e_{rs}\in C\subset U$, tada je $U'=U-C$ (kao podgraf od $G-C$).

Doprinos osnovne figure $U\in\mathcal{U}(G)$ koeficijentu uz $\lambda^{n(U)}$ na levoj strani jednakosti (3) jednak je doprinosu odgovarajuće figure U' koeficijentu uz $\lambda^{n(U)}$ na desnoj strani jednakosti (3). Zaista,

1° Ako je $U'=U$, tada je $\omega(U')=\omega(U)$.

2° Ako je $U'=U-K_2$, tada je

$$- a^{2(r+s-2)}\,\omega(U') = - a^{2(r+s-2)}\,(-1)^{p(U')}\,2^{c(U')}\,\Pi(U') =$$

$$= (-1)^{p(U)}\,2^{c(U)}\,\Pi(U) = \omega(U) .$$

3° Ako je $U'=U-C$, tada je

$$- 2\,\Pi(C)\,\omega(U') = - 2\,\Pi(C)\,(-1)^{p(U')}\,2^{c(U')}\,\Pi(U') =$$

$$= (-1)^{p(U)}\,2^{c(U)}\,\Pi(U) = \omega(U) .$$

Otuda zaključujemo da (3) važi, čime je teorema dokazana. □

Grafovi za koje važi jednakost

$$(4) \qquad f(G,\lambda) = f(G-e_{rs},\lambda) - a^{2(r+s-2)}\lambda^2 f(G-v_r-v_s,\lambda)$$

mogu biti od posebnog interesa.

U vezi sa tim navodimo sledeću definiciju. Grana e_{rs} je most u grafu G ako je $H-e_{rs}=H_1\dot{+}H_2$, gde je H komponenta povezanosti grafa G koja sadrži granu e_{rs}.

Teorema 2.20 Jednakost (4) važi ako i samo ako je grana e_{rs} most u grafu G.

Dokaz. Ako (4) važi, tada na osnovu teoreme 2.19 zaključujemo da je

$$(5) \qquad \sum_C \Pi(C)\, \lambda^{n(C)}\, f(G-C,\lambda) \equiv 0 \quad .$$

Neka je C_p najkraća kontura koja sadrži granu e_{rs}. Tada je koeficijenat uz λ^p u (5)

$$\sum_{C_p} \Pi(C_p) \neq 0 \quad ,$$

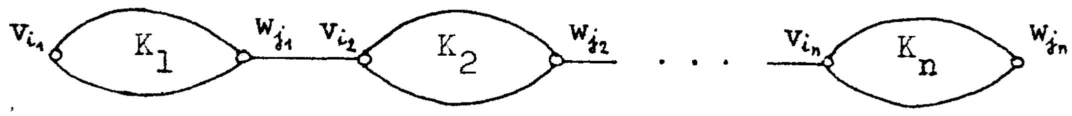
gde je sumiranje izvršeno po svim konturama dužine p koje sadrže granu e_{rs}. Ovo je u suprotnosti sa (5), odakle zaključujemo da ne postoji kontura koja sadrži granu e_{rs}. Dakle, e_{rs} je most u grafu G.

Obrnuto, ako je e_{rs} most u grafu G, tada ne postoji kontura u G koja sadrži granu e_{rs}. Na osnovu teoreme 2.20 zaključujemo da (4) važi. □

Napomena. Jednakost (4) može biti dokazana direktno korišćenjem relacija (5) odeljka 1.1 za grafove za koje je e_{rs} most. U ovom slučaju skup čvorova X grafa G može biti podeljen na dva podskupa $X_1=\{v_r,v_{i_1},v_{i_2},\dots\}$ i $X_2=\{v_s,v_{j_1},v_{j_2},\dots\}$ tako da $G-e_{rs}=G_1\dot{+}G_2$, gde su G_1 i G_2 podgrafovi indukovani skupovima čvorova X_1 i X_2, respektivno. Jednakost (4) sledi tada iz odgovarajućeg Laplasovog razvoja determinanti u relaciji (5) odeljka 1.1. □

Korišćenjem jednakosti (4) može se izraziti karakteristična funkcija nekih složenih grafova pomoću karakterističnih funkcija njegovih prostijih indukovanih podgrafova.

Posmatrajmo niz beskonačnih (ili konačnih) grafova $K_1,\dots K_n$. Neka su v_{i_p} i w_{j_p} dva proizvoljna (ne nužno različita) čvora grafa K_p $(p=1,\dots,n)$. Neka je G_n graf dobijen iz grafova $K_1,\dots,K_n$ uvodjenjem novih grana koje spajaju čvorove w_{j_p} i $v_{i_{p+1}}$ $(p=1,\dots,n-1)$. Ove grane su mostovi u G_n i sledeća teorema važi.



G_n

Teorema 2.21

$$\begin{bmatrix} f(G_n) \\ f(G_n-w_{j_n}) \end{bmatrix} = M_n\dots M_2 \begin{bmatrix} f(K_1) \\ f(K_1-w_{j_1}) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

gde je

$$M_p = \begin{bmatrix} f(K_p) & -\,a^{2(i_p+j_{p-1}-2)}\,\lambda^2\, f(K_p-v_{i_p}) \\ f(K_p-w_{j_p}) & -\,a^{2(i_p+j_{p-1}-2)}\,\lambda^2\, f(K_p-v_{i_p}-w_{j_p}) \end{bmatrix} \quad (p=2,\dots,n) .$$

Dokaz. Pomoću teoreme 2.20 i relacija (1) odeljka 1.3 imamo da je

$$f(G_n)=f(K_n)f(G_{n-1})-a^{2(i_n+j_{n-1}-2)}\,\lambda^2\, f(K_n-v_{i_n})f(G_{n-1}-w_{j_{n-1}})$$

$$f(G_n - w_{j_n}) = f(K_n - w_{j_n}) f(G_{n-1}) - a^{2(i_n+j_{n-1}-2)} \lambda^2 f(K_n - v_{i_n} - w_{j_n}) f(G_{n-1} - w_{j_{n-1}})$$

tj.

$$\begin{bmatrix} f(G_n) \\ f(G_n - w_{j_n}) \end{bmatrix} = M_n \begin{bmatrix} f(G_{n-1}) \\ f(G_{n-1} - w_{j_{n-1}}) \end{bmatrix},$$

gde je

$$M_n = \begin{bmatrix} f(K_n) & -a^{2(i_n+j_{n-1}-2)} \lambda^2 f(K_n - v_{i_n}) \\ f(K_n - w_{j_n}) & -a^{2(i_n+j_{n-1}-2)} \lambda^2 f(K_n - v_{i_n} - w_{j_n}) \end{bmatrix}.$$

Primenom teoreme 2.20 (n-1)-puta dobija se relacija (6), čime je teorema dokazana. □

Teorema 2.22 Neka je u beskonačnom grafu G čvor v_r susedan čvorovima w_{s_j} $(j=1,2,\ldots)$ i neka je $\mathcal{K}$ kolekcija svih kontura u G koje sadrže čvor v_r. Tada je

$$(7) \qquad f(G,\lambda) = f(G-v_r,\lambda) - \sum_j a^{2(r+s_j-2)} \lambda^2 f(G-v_r-w_{s_j},\lambda) - 2\sum_{C\in\mathcal{K}} \prod(C)\, \lambda^{n(C)} f(G-C,\lambda) \ . \ \square$$

Dokaz ove teoreme izostavljamo, pošto je metod dokaza isti kao kod teoreme 2.19.

Posledica 2.22.1 Ako je v_r čvor stepena jedan u beskonačnom grafu G i ako je on susedan čvoru v_s, tada je

$$f(G,\lambda) = f(G-v_r,\lambda) - a^{2(r+s-2)} \lambda^2 f(G-v_r-v_s,\lambda) \ . \ \square$$

Korišćenjem jednakosti (7) može se izraziti karakteristična funkcija nekih složenih grafova pomoću karakterističnih funkcija njegovih prostijih indukovanih podgrafova.

Neka su G i H dva beskonačna korenska grafa. Identifikovanjem njihovih korena dobija se graf GH koji se zove koalescencija grafova G i H i sledeća teorema važi.

Teorema 2.23 Ako su G i H dva korenska grafa tada je karakteristična funkcija koalescencije GH

$$f(GH,\lambda) = f(G,\lambda)f(H-v_r,\lambda) + f(G-v_r,\lambda)f(H,\lambda) - f(G-v_r,\lambda)f(H-v_r,\lambda),$$

gde je v_r koalescentni čvor.

Dokaz. Primenom teoreme 2.22 na graf GH sa koalescentnim čvorom v_r dobijamo da je

$$f(GH,\lambda) = f(GH-v_r,\lambda) - \sum_j a^{2(r+s_j-2)} \lambda^2 f(GH-v_r-w_{s_j},\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C\in\mathcal{K}} \prod(C) \lambda^{n(C)} f(GH-C,\lambda) .$$

Svaki čvor susedan čvoru v_r je ili u grafu G ili u grafu H. Neka su $w_{s_{j'}}$ čvorovi u G susedni čvoru v_r a $w_{s_{j''}}$ čvorovi u H susedni čvoru v_r. Pored toga, svaka kontura koja sadrži čvor v_r je ili kontura u grafu G ili kontura u grafu H. Neka je $\mathcal{K}'$ kolekcija kontura u G koje sadrže čvor v_r a $\mathcal{K}''$ kolekcija kontura u H koje sadrže čvor v_r. Korišćenjem relacija (1) odeljka 1.3 imamo da je

$$f(GH,\lambda) = f(GH-v_r,\lambda) - \sum_{j'} a^{2(r+s_{j'}-2)} \lambda^2 f(GH-v_r-w_{s_{j'}},\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C\in\mathcal{K}'} \prod(C)\lambda^{n(C)} f(GH-C,\lambda) - \sum_{j''} a^{2(r+s_{j''}-2)} \lambda^2 f(GH-v_r-w_{s_{j''}},\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C\in\mathcal{K}''} \prod(C)\lambda^{n(C)} f(GH-C,\lambda) = f(G-v_r,\lambda)\, f(H-v_r,\lambda) +$$

$$+ f(H-v_r,\lambda)\Big[- \sum_{j'} a^{2(r+s_{j'}-2)} \lambda^2 f(G-v_r-w_{s_{j'}},\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C\in\mathcal{K}'} \prod(C) \lambda^{n(C)} f(G-C,\lambda)\Big] +$$

$$+ f(G-v_r,\lambda)\Big[-\sum_{j''} a^{2(r+s_{j''}-2)}\lambda^2 f(H-v_r-w_{s_{j''}},\lambda) -$$

$$- 2\sum_{C\in\mathcal{K}''}\prod(C)\,\lambda^{n(C)} f(H-C,\lambda)\Big] \; .$$

Ponovnom primenom teoreme 2.22 konačno dobijamo

$$f(GH,\lambda) = f(G-v_r,\lambda)f(H-v_r,\lambda) + f(H-v_r,\lambda)\Big[f(G,\lambda) - f(G-v_r,\lambda)\Big] +$$

$$+ f(G-v_r,\lambda)\Big[f(H,\lambda) - f(H-v_r,\lambda)\Big] = f(G,\lambda)f(H-v_r,\lambda) +$$

$$+ f(G-v_r,\lambda)f(H,\lambda) - f(G-v_r,\lambda)f(H-v_r,\lambda) \; . \; \square$$

3. BESKONAČNI GRAFOVI KONAČNOG TIPA I NEKE OPERACIJE SA GRAFOVIMA

Beskonačni grafovi konačnog tipa definisani su u odeljku 1.2 (definicija 1.8) i čine jednu važnu klasu beskonačnih grafova koji su po osobinama dosta bliski konačnim grafovima. Naime, ispitivanje mnogih strukturnih osobina ovih grafova može biti svedeno na ispitivanje odgovarajućih osobina njihovih kanoničkih grafova (dakle, konačnih grafova). U toj činjenici nalazi se glavni razlog za proučavanje beskonačnih grafova konačnog tipa.

Sa spektralne tačke gledišta, glavna motivacija za proučavanje beskonačnih grafova konačnog tipa potiče iz činjenice da imaju konačan spektar i da su to jedini beskonačni grafovi sa tom osobinom (teorema 2.13).

U ovom poglavlju proučava se osobina konačnosti tipa beskonačnih grafova dobijenih nekim operacijama nad beskonačnim grafovima. Posmatraju se neke unarne (odeljak 3.1), zatim neke binarne (odeljak 3.2)i na kraju neke n-arne (odeljak 3.3) operacije nad beskonačnim grafovima. Nekim teoremama se utvrdjuje da je dobijeni graf uvek beskonačnog tipa a drugim se daju potrebni i dovoljni uslovi za konačnost tipa dobijenog grafa.

3.1 Unarne operacije

U ovom odeljku posmatraćemo neke grafove koji se iz datog beskonačnog grafa G dobijaju dodavanjem novih čvorova ili novih čvorova i novih grana.

Definicija 3.1 Graf S(G) beskonačnog grafa G je graf dobijen dodavanjem novog čvora na svaku granu grafa G. □

S(G) je bipartitan graf tj. S(G)=(X,Y,U), gde je X skup čvorova grafa G a Y skup dodatih čvorova.

Teorema 3.1 Graf S(G) beskonačnog grafa G koji nema izolovane čvorove je uvek beskonačnog tipa.

Dokaz. Dovoljno je uočiti da nijedna dva čvora $x,y \in Y$ nemaju iste susede, pošto pripadaju različitim granama koje mogu imati najviše jedan zajednički čvor. Dakle, nijedna dva čvora x i y iz Y nisu ekvivalentna. Kako je skup Y beskonačan, zaključujemo da je graf S(G) beskonačnog tipa. □

Definicija 3.2 Graf R(G) beskonačnog grafa G je graf dobijen dodavanjem novog čvora koji odgovara svakoj grani od G i spajanjem svakog novog čvora sa krajnjim tačkama grane kojoj odgovara. □

Teorema 3.2 Graf R(G) beskonačnog grafa G koji nema izolovane čvorove je uvek beskonačnog tipa. □

Ova teorema se dokazuje slično kao teorema 3.1, pa zbog toga njen dokaz izostavljamo.

Definicija 3.3 Graf Q(G) beskonačnog grafa G je graf dobijen dodavanjem novog čvora na svakoj grani grafa G i spajanjem granom onih parova novih čvorova koji leže na susednim granama. □

Teorema 3.3 Graf Q(G) beskonačnog grafa G koji nema izolovane čvorove je uvek beskonačnog tipa. □

I dokaz ove teoreme izostavljamo pošto je sličan dokazu teoreme 3.1.

3.2 Binarne operacije

U ovom odeljku prvo ćemo posmatrati grafove koji se dobijaju iz grafova G_1 i G_2 stapanjem (identifikovanjem, poklapanjem) nekih čvorova grafa G_1 sa nekim čvorovima grafa G_2.

Definicija 3.4 Unija $G_1 \cup G_2$ beskonačnih grafova $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ je graf $G=(X,U)$, gde je $X=X_1 \cup X_2$ a $U=U_1 \cup U_2$. □

Definicija 3.5 Razlika beskonačnog grafa $G=(X,U)$ i njegovog podgrafa $H=(Y,V)$ je graf $G \setminus H=(X,U \setminus V)$. □

Definicija 3.6 Beskonačni grafovi $G_1=(X,U_1)$ i $G_2=(X,U_2)$ su konačno dopunjivi grafovi ako i samo ako je moguće razbiti skup X na konačan broj medjusobno disjunktnih podskupova $X_1,\dots,X_n$ sa sledećim osobinama:

1° Nijedna dva čvora iz istog podskupa X_i $(i=1,\dots,n)$ nisu susedna ni u grafu G_1 ni u grafu G_2.

2° Tačno jedan od sledećih uslova važi:

a) Za svako $x \in X_i, y \in X_j$ $(i \neq j)$ $(x,y) \in U_1$ ili $(x,y) \in U_2$;

b) Za svako $x \in X_i, y \in X_j$ $(i \neq j)$ $(x,y) \notin U_1$ i $(x,y) \notin U_2$. □

Teorema 3.4 Ako su beskonačni grafovi $G_1=(X,U_1)$ i $G_2=(X,U_2)$ konačnog tipa tada su oni konačno dopunjivi.

Dokaz. Neka su G_1 i G_2 beskonačni grafovi konačnog tipa k_1 i k_2, respektivno, tj. $G_1=g_1(X_1',\dots,X_{k_1}')$, $G_2=g_2(X_1'',\dots,X_{k_2}'')$.

Skup X može biti razbijen na konačan broj medjusobno disjunktnih podskupova $X_i' \cap X_j''$ $(i=1,\dots,k_1;\ j=1,\dots,k_2)$ koji zadovoljavaju uslove 1° i 2° definicije 3.6. To neposredno sledi iz činjenica da je $X_i' \cap X_j'' \subset X_i'$, $X_i' \cap X_j'' \subset X_j''$ i da su X_i' i X_j'' karakteristični podskupovi grafova G_1 i G_2, respektivno. □

Teorema 3.5 Neka su $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ beskonačni grafovi a $H_1=(X_1 \cap X_2,V_1)$ i $H_2=(X_1 \cap X_2,V_2)$ odgovarajući indukovani podgrafovi grafova G_1 i G_2, respektivno. Unija $G_1 \cup G_2$ je graf konačnog tipa ako i samo ako su grafovi $G_1 \setminus H_1$ i $G_2 \setminus H_2$ konačnog tipa a grafovi H_1 i H_2 konačno dopunjivi.

Dokaz. Uslov je potreban. Neka je $G_1 \cup G_2$ graf konačnog tipa k tj. $G_1 \cup G_2=g(X_1',\ldots,X_k')$.

Skup čvorova X_1 grafa $G_1 \setminus H_1$ može biti razbijen na sledeće medjusobno disjunktne podskupove

$$(X_1 \setminus X_2) \cap X_i' \qquad (i=1,\ldots,k)$$

$$(X_1 \cap X_2) \cap X_i' \qquad (i=1,\ldots,k) \quad .$$

Svaki od ovih podskupova sadrži u $G_1 \setminus H_1$ samo ekvivalentne čvorove. To sledi iz činjenice da je $(X_1 \setminus X_2) \cap X_i' \subset X_i'$, $(X_1 \cap X_2) \cap X_i' \subset X_i'$ i da su X_i' karakteristični podskupovi grafa $G_1 \cup G_2$. Otuda odgovarajućih klasa ekvivalencija ne može biti više od 2k, čime je dokazano da je $G_1 \setminus H_1$ graf konačnog tipa.

Potpuno analogno dokazuje se da je $G_2 \setminus H_2$ graf konačnog tipa.

Skup čvorova $X_1 \cap X_2$ grafova H_1 i H_2 može biti razbijen na konačan broj medjusobno disjunktnih podskupova

$$(X_1 \cap X_2) \cap X_i' \qquad (i=1,\ldots,k)$$

koji zadovoljavaju uslove 1^o i 2^o definicije 3.6. Dakle, H_1 i H_2 su konačno dopunjivi grafovi.

Uslov je dovoljan. Neka su $G_1 \setminus H_1$ i $G_2 \setminus H_2$ grafovi konačnog tipa k_1 i k_2, respektivno, tj. $G_1 \setminus H_1=g_1(X_1',\ldots,X_{k_1}')$, $G_2 \setminus H_2=g_2(X_1'',\ldots,X_{k_2}'')$ i neka su H_1 i H_2 konačno dopunjivi grafovi. Tada je skup $X_1 \cap X_2$ moguće razbiti na konačan broj medjusobno disjunktnih podskupova $X_1''',\ldots,X_n'''$ koji zadovoljavaju uslove 1° i 2° definicije 3.6.

Skup čvorova $X=X_1\cup X_2$ grafa $G_1\cup G_2$ moguće je razbiti na sledeće medjusobno disjunktne podskupove:

(1) $X_i'\setminus X_2$ $(i=1,\ldots,k_1)$

(2) $X_j''\setminus X_1$ $(j=1,\ldots,k_2)$

(3) $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''$ $(i=1,\ldots,k_1;\ j=1,\ldots,k_2;\ k=1,\ldots,n)$.

Pošto je $X_i'\setminus X_2\subset X_i'$ zaključujemo da podskup $X_i'\setminus X_2$ ne sadrži susedne čvorove i ima iste susede kako u $X_1\setminus X_2$ tako i u $X_1\cap X_2$ tj. podskup $X_i'\setminus X_2$ sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Iz istih razloga i podskup $X_j''\setminus X_1$ sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Pošto je $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''\subset X_k'''$, podskup $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''$ ne sadrži susedne čvorove i ima iste susede u $X_1\cap X_2$. Dalje, pošto je $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''\subset X_i'$ on ima iste susede u $X_1\setminus X_2$ a pošto je $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''\subset X_j''$ iste susede u $X_2\setminus X_1$. Dakle, i podskup $X_i'\cap X_j''\cap X_k'''$ sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Dakle svaki od navedenih podskupova (1), (2) i (3) sadrži samo ekvivalentne čvorove. Pošto je njihov broj konačan, zaključujemo da je graf $G_1\cup G_2$ konačnog tipa.

Ovim je teorema dokazana. □

<u>Posledica 3.5.1</u> Ako su beskonačni grafovi $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ takvi da je $X_1\cap X_2=\emptyset$, tada je $G_1\cup G_2$ graf konačnog tipa ako i samo ako su grafovi G_1 i G_2 konačnog tipa. □

<u>Posledica 3.5.2</u> Unija beskonačnih grafova $G_1=(X,U_1)$ i $G_2=(X,U_2)$ je graf konačnog tipa ako i samo ako su grafovi G_1 i G_2 konačno dopunjivi. □

U nastavku ćemo posmatrati grafove koji se dobijaju iz grafova G_1 i G_2 na taj način što granama spajamo neke čvorove grafa G_1 sa nekim čvorovima grafa G_2.

Definicija 3.7 Neka su $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ beskonačni grafovi, pri čemu je $X_1 \cap X_2=\emptyset$, i $G=(X_1,X_2,U)$ bipartitan graf. Tada je

$$(G_1 \circ G_2)_G \overset{\text{def}}{=\!=} G_1 \cup G_2 \cup G \quad . \square$$

Teorema 3.6 Graf $(G_1 \circ G_2)_G$ je konačnog tipa ako i samo ako su grafovi G_1, G_2 i G konačnog tipa.

Dokaz. Uslov je potreban. Neka je $(G_1 \circ G_2)_G$ beskonačan graf konačnog tipa k tj. $(G_1 \circ G_2)_G=g(X_1',\ldots,X_k')$.

Beskonačni grafovi G_1 i G_2 kao indukovani podgrafovi grafa $(G_1 \circ G_2)_G$ su konačnog tipa. Dalje, skup čvorova grafa G može biti razbijen na sledeće medjusobno disjunktne podskupove

$$X_1 \cap X_i' \qquad (i=1,\ldots,k)$$
$$X_2 \cap X_i' \qquad (i=1,\ldots,k) .$$

Pošto je graf G bipartitan i $X_1 \cap X_i' \subset X_i'$, $X_2 \cap X_i' \subset X_i'$, zaključujemo da čvorovi navedenih podskupova nisu susedni i imaju iste susede u grafu G tj. sadrže samo ekvivalentne čvorove. Dakle, i graf G je konačnog tipa.

Uslov je dovoljan. Neka su G_1, G_2 i G grafovi konačnog tipa k_1, k_2 i k_3, respektivno, tj. $G_1=g_1(X_1',\ldots,X_{k_1}')$, $G_2=g_2(X_1'',\ldots,X_{k_2}'')$ i $G=g_3(X_1''',\ldots,X_{k_3}''')$.

Skup čvorova $X_1 \cup X_2$ grafa $(G_1 \circ G_2)_G$ moguće je razbiti na medjusobno disjunktne podskupove

$$X_i' \cap X_k''' \qquad (i=1,\ldots,k_1;\ k=1,\ldots,k_3)$$
$$X_j'' \cap X_k''' \qquad (j=1,\ldots,k_2;\ k=1,\ldots,k_3) \quad .$$

Pošto je $X_i' \cap X_k''' \subset X_i'$, zaključujemo da podskup $X_i' \cap X_k'''$ ne sadrži susedne čvorove i ima iste susede u X_1 a zbog $X_i' \cap X_k''' \subset X_k'''$ on ima iste susede i u X_2. Dakle, podskup $X_i' \cap X_k'''$ sadrži samo ekvivalentne čvorove u grafu $(G_1\circ G_2)_G$.

Slično se pokazuje da podskup $X''_j\cap X'''_k$ sadrži samo ekvivalentne čvorove u grafu $(G_1\circ G_2)_G$.

Kako nepraznih gore navedenih podskupova ima najviše $(k_1+k_2)k_3$, zaključujemo da je $(G_1\circ G_2)_G$ graf konačnog tipa ℓ, pri čemu je $\ell\leq(k_1+k_2)k_3$. □

Na kraju ovog odeljka posmatraćemo proizvod dva beskonačna grafa.

Definicija 3.8 Proizvod G_1G_2 beskonačnih grafova $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ je graf $G=(X,U)$, gde je $X=X_1\cup X_2$ a skup U je definisan na sledeći način. Čvorovi x i y iz X su spojeni granom ako i samo ako postoji par grana (u',u'') sa sledećom osobinom: $u'\in U_1$, $u''\in U_2$ i grane u' i u'' imaju jedan zajednički čvor z različit od x i y a preostala dva čvora su im x i y. □

Ako je $X_1\cap X_2=\emptyset$, tada je G_1G_2 graf koji nema nijednu granu. Ako je $X_1\cap X_2\neq\emptyset$ a grafovi G_1 i G_2 nemaju izolovane čvorove, tada graf G_1G_2 ima najmanje jednu granu.

Ako su G_1 i G_2 grafovi konačnog tipa, tada njihov proizvod G_1G_2 može biti kako graf konačnog tipa tako i graf beskonačnog tipa. Sledeća teorema daje potrebne i dovoljne uslove da proizvod dva grafa konačnog tipa bude graf konačnog tipa.

Teorema 3.7 Neka su $G_1=(X_1,U_1)$ i $G_2=(X_2,U_2)$ beskonačni grafovi konačnog tipa. Njihov proizvod G_1G_2 je beskonačan graf konačnog tipa ako i samo ako grafovi G_1 i G_2 imaju najviše konačno mnogo zajedničkih grana.

Dokaz. Neka su dati beskonačni grafovi G_1 i G_2 konačnog tipa k_1 i k_2, respektivno, tj. $G_1=g_1(X'_1,\ldots,X'_{k_1})$, $G_2=g_2(X''_1,\ldots,X''_{k_2})$.

Uslov je potreban. Neka su $X'_i\cap X''_j$ $(i=1,\ldots,k_1;$

$j=1,\dots,k_2$) preseci odgovarajućih karakterističnih podskupova grafova G_1 i G_2. Ako je grana u zajednička grana grafova G_1 i G_2 tada njeni krajnji čvorovi x i y moraju pripadati podskupovima $X'_{i_1}\cap X''_{j_1}$ i $X'_{i_2}\cap X''_{j_2}$, respektivno, pri čemu je $i_1\neq i_2$ a $j_1\neq j_2$. Pored toga ovi podskupovi su kompletno povezani zajedničkim granama. Iz skupa $\{X'_i\cap X''_j \mid i=1,\dots,k_1;j=1,\dots,k_2\}$ može se izdvojiti ukupno $k_1k_2(k_1-1)(k_2-1)/2$ parova podskupova $(X'_{i_1}\cap X''_{j_1}, X'_{i_2}\cap X''_{j_2})$ takvih da je $i_1\neq i_2$ a $j_1\neq j_2$. Bilo koji par takvih podskupova ili nije povezan nijednom zajedničkom granom ili je kompletno povezan zajedničkim granama grafova G_1 i G_2.

Pretpostavimo, suprotno, da grafovi G_1 i G_2 imaju beskonačno mnogo zajedničkih grana. Tada u skupu parova $(X'_{i_1}\cap X''_{j_1}, X'_{i_2}\cap X''_{j_2})$ $(i_1\neq i_2, j_1\neq j_2)$ kompletno povezanih zajedničkim granama postoji najmanje jedan par čija bar jedna komponenta, recimo $X'_{i_1}\cap X''_{j_1}$, sadrži beskonačno mnogo čvorova. Tada je indukovani podgraf G_0 grafa G_1G_2 sa skupom čvorova $X'_{i_1}\cap X''_{j_1}$ kompletan, pa je on beskonačnog tipa. Na osnovu ovoga zaključujemo da je i graf G_1G_2 beskonačnog tipa. Kontradikcija.

<u>Uslov je dovoljan</u>. Skup čvorova X grafa G_1G_2 može biti razbijen na sledeće disjunktne podskupove

(4) $\quad X'_i \setminus X_2 \quad (i=1,\dots,k_1)$

(5) $\quad X''_j \setminus X_1 \quad (j=1,\dots,k_2)$

(6) $\quad X'_i\cap X''_j \quad (i=1,\dots,k_1;\ j=1,\dots,k_2)$.

Naravno neki od ovih podskupova mogu biti i prazni. U slučaju $X_1=X_2$ podskupovi (4) i (5) su prazni.

Dokažimo da podskupovi (4), (5) i podskupovi (6) sa beskonačno mnogo čvorova sadrže samo ekvivalentne čvorove.

Neka $x,y\in X'_i\setminus X_2$. Čvorovi x i y nisu susedni pošto ne postoji grana u U_2 koja jedan od ova dva čvora povezuje sa nekim trećim čvorom iz X. Ako je čvor z susedan čvoru x, tada postoji čvor v povezan granom $u' \in U_1$ sa x a granom $u'' \in U_2$ sa z. Kako $x, y \in X'_i$ to je i čvor y granom $u''' \in U_1$ povezan sa čvorom v, pa su čvorovi y i z takodje susedni. Prema tome čvorovi x i y imaju iste susede. Time smo dokazali da svaki neprazan podskup $X'_i \setminus X_2$ sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Na potpuno isti način dokazuje se da svaki neprazan podskup $X''_j \setminus X_1$ takodje sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Neka $x, y \in X'_i \cap X''_j$, koji ima beskonačno mnogo čvorova. Ako bi čvorovi x i y bili susedni tada bi postojao čvor z povezan granom $u' \in U_1$ sa x, na primer, a granom $u'' \in U_2$ sa y. Zbog $X'_i \cap X''_j \subset X'_i$ i $X'_i \cap X''_j \subset X''_j$ čvor z bi bio povezan zajedničkom granom sa svakim čvorom iz $X'_i \cap X''_j$. Dakle, postoji beskonačno mnogo zajedničkih grana grafova G_1 i G_2, što je nemoguće. Ovim je dokazano da čvorovi x i y nisu susedni. Da čvorovi x i y imaju iste susede dokazuje se na isti način kao kod podskupova (4) i (5). Tako smo dokazali da svaki podskup $X'_i \cap X''_j$ sa beskonačno mnogo elemenata, sadrži samo ekvivalentne čvorove.

Na osnovu rečenog zaključujemo da je broj klasa ekvivalencija odgovarajuće relacije ekvivalencije u grafu G_1G_2 konačan, odakle sledi da je G_1G_2 graf konačnog tipa.

Ovim je teorema dokazana. □

3.3 n-arne operacije

U ovom odeljku posmatraćemo različite n-arne operacije kod kojih je skup čvorova rezultirajućeg grafa jednak Dekartovom proizvodu skupova čvorova onih grafova nad kojima je operacija primenjena. Tačnije, posmatraćemo nepotpunu proširenu n-sumu (kratko NEPS), Bulovu funkciju i kompoziciju grafova.

<u>Definicija 3.9</u> Neka su $G_i=(X_i,U_i)$ $(i=1,\dots,n)$ beskonačni grafovi, gde X_i i U_i označavaju odgovarajuće skupove čvorova i grana. Dalje, neka je $\mathcal{B}$ skup n-torki $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ od simbola 0 i 1, koji ne sadrži n-torku $(0,\dots,0)$. Nepotpuna proširena p-suma sa bazisom $\mathcal{B}$ beskonačnih grafova $G_1,\dots,G_n$ je graf $G=(X,U)$, gde je $X=X_1\times\dots\times X_n$ i u kome su dva čvora $(x_1,\dots,x_n)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ susedna ako i samo ako postoji n-torka $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ u $\mathcal{B}$ takva da je $x_i=y_i$ kad god je $\beta_i=0$ i x_i susedno sa y_i kad god je $\beta_i=1$. $\square$

Označimo sa $\mathcal{B}_p$ skup svih mogućih n-torki sa tačno p jedinica. Ako je $\mathcal{B}=\mathcal{B}_p$ operacija se naziva p-suma grafova. Specijalno, za p=1 dobijamo sumu $G_1+\dots+G_n$ a za p=n Dekartov proizvod $G_1\times\dots\times G_n$ grafova $G_1,\dots,G_n$. Ako je $\mathcal{B}=\bigcup_{p=1}^{n}\mathcal{B}_p$ operacija se naziva jaki proizvod grafova.

Graf koji sadrži bar jednu granu zove se netrivijalan graf.

<u>Teorema 3.8</u> Neka je G nepotpuna proširena p-suma beskonačnih netrivijalnih grafova $G_1,\dots,G_n$. Dalje, neka je $\{i_1,\dots,i_p\}$ skup svih celih brojeva takvih da svaka n-torka iz $\mathcal{B}$ ima jedinicu na i_ν-tom mestu $(\nu=1,\dots,p)$ i $\{j_1,\dots,j_q\}=$ $=\{1,\dots,n\}\setminus\{i_1,\dots,i_p\}$. Tada je graf G konačnog tipa ako i samo ako sledeći uslovi važe:

1° $1\leq p\leq n$;

2° Skup $\{(\beta_{j_1},\dots,\beta_{j_q})\mid\beta\in\mathcal{B}\}$ sadrži sve q-torke od simbola 0 i 1;

3° Grafovi $G_{i_1},\dots,G_{i_p},\overline{G}_{j_1},\dots,\overline{G}_{j_q}$ ($\overline{G}_{j_\nu}$-komplement grafa G_{j_ν}) su konačnog tipa.

Ako je $k(G_{i_\nu})=k_\nu$ $(\nu=1,\dots,p)$ a $k(\overline{G}_{j_\nu})=k_{p+\nu}$ $(\nu=1,\dots,q)$, tada je $k(G)\leq k_1\dots k_n$, pri čemu jednakost važi ako i samo ako su

G_{i_ν} $(\nu=1,\dots,p)$ grafovi bez izolovanih čvorova.

Najpre dokazujemo sledeću lemu.

Lema 3.1 Pod uslovima teoreme 3.8 nepotpuna proširena p-suma G je graf beskonačnog tipa ako je $p=0$.

Dokaz. Primetimo na početku da postoji bar jedna grana $(x_i^o, y_i^o) \in U_i$ $(i=1,\dots,n)$. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

(1) Postoje dve n-torke $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathcal{B}$ i $(\beta_1,\dots,\beta_n) \notin \mathcal{B}$ takve da je $\alpha_{i_o}=0$, $\beta_{i_o}=1$ za tačno jedno i_o $(1 \leq i_o \leq n)$ i $\alpha_i=\beta_i$ za $i \neq i_o$.

Pretpostavimo da je $(0,\beta_2,\dots,\beta_n) \in \mathcal{B}$, $(1,\beta_2,\dots,\beta_n) \notin \mathcal{B}$. Dokažimo da nijedna dva čvora iz skupa $Y=\{(x_1,x_2^o,\dots,x_n^o) \mid x_1 \in X_1\}$ nisu ekvivalentna. Neka $(x_1,x_2^o,\dots,x_n^o),(y_1,x_2^o,\dots,x_n^o) \in Y$. Dalje, neka je $z_i=x_i^o$ ako je $\beta_i=0$ a $z_i=y_i^o$ ako je $\beta_i=1$. Tada je čvor $(x_1,z_2,\dots,z_n)$ susedan čvoru $(x_1,x_2^o,\dots,x_n^o)$ ali nije čvoru $(y_1,x_2^o,\dots,x_n^o)$. Dakle, čvorovi $(x_1,x_2^o,\dots,x_n^o)$ i $(y_1,x_2^o,\dots,x_n^o)$ nemaju iste susede, pa nisu ekvivalentni. Zaključujemo da je graf G beskonačnog tipa.

(2) Ne postoje n-torke $(\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathcal{B}$ i $(\beta_1,\dots,\beta_n) \notin \mathcal{B}$ sa opisanim osobinama. Tada n-torke koje ne pripadaju skupu $\mathcal{B}$ mogu imati najviše k jedinica, gde je $0 \leq k < n-1$. Pretpostavimo da $(\underbrace{1,\dots,1}_{k},0,\dots,0) \notin \mathcal{B}$.

Neka je G_n graf konačnog tipa tj. $G_n=g(N_1,\dots,N_k)$ i neka je skup N_1 beskonačan. Tada nijedna dva čvora skupa $Z=\{(x_1^o,\dots,x_{n-1}^o,x_n) \mid x_n \in N_1\}$ nemaju iste susede. Zaista ako $(x_1^o,\dots,x_{n-1}^o,x_n),(x_1^o,\dots,x_{n-1}^o,y_n) \in Z$ tada je čvor $(y_1^o,\dots,y_{k+1}^o, x_{k+2}^o,\dots,x_{n-1}^o,x_n)$ susedan čvoru $(x_1^o,\dots,x_{n-1}^o,x_n)$ ali nije čvoru $(x_1^o,\dots,x_{n-1}^o,y_n)$. Dakle, ne postoje ekvivalentni čvorovi u Z, pa zaključujemo da je graf G beskonačnog tipa.

Ako je G_n graf beskonačnog tipa tj. $G_n=g(N_1,N_2,\dots)$, tada nijedna dva čvora iz skupa $Z=\{(x_1^o,\ldots,x_{n-1}^o,x_n^i)\mid x_n^i\in N_i\}$ nemaju iste susede. Neka $(x_1^o,\ldots,x_{n-1}^o,x_n^i),(x_1^o,\ldots,x_{n-1}^o,x_n^j)\in Z$ $(i\neq j)$. Tada postoji čvor $y\in X_n$ takav da $(x_n^i,y)\in U_n$ a $(x_n^j,y)\notin U_n$. Otuda je čvor $(y_1^o,\ldots,y_k^o,x_{k+1}^o,\ldots,x_{n-1}^o,y)$ susedan čvoru $(x_1^o,\ldots,x_{n-1}^o,x_n^i)$ ali nije susedan čvoru $(x_1^o,\ldots,x_{n-1}^o,x_n^j)$. Dakle, ni u ovom slučaju ne postoje ekvivalentni čvorovi u Z pa zaključujemo da je graf G beskonačnog tipa.

Ovim je dokaz leme završen. $\square$

Posledica 3.8.1 p-suma $(1\leq p<n)$ netrivijalnih beskonačnih grafova $G_1,\ldots,G_n$ je graf beskonačnog tipa. $\square$

Posledica 3.8.2 Jaki proizvod netrivijalnih beskonačnih grafova $G_1,\ldots,G_n$ je graf beskonačnog tipa. $\square$

Lema 3.2 Pod uslovima teoreme 3.8 nepotpuna proširena p-suma G je graf beskonačnog tipa ako je $1\leq p<n$ i ako skup $\{(\beta_{j_1},\ldots,\beta_{j_q})\mid \beta\in\mathcal{B}\}$ ne sadrži sve q-torke od simbola 0 i 1. $\square$

Dokaz ove leme izostavljamo zbog sličnosti sa dokazom leme 3.1.

Dokaz teoreme 3.8 Neka je $1\leq p\leq n$ i neka skup $\{(\beta_{j_1},\ldots,\beta_{j_q})\mid \beta\in\mathcal{B}\}$ sadrži sve q-torke od simbola 0 i 1. Dokazaćemo da je graf G konačnog tipa ako i samo ako su grafovi $G_{i_1},\ldots,G_{i_p},\overline{G}_{j_1},\ldots,\overline{G}_{j_q}$ konačnog tipa.

Ne umanjujući opštost možemo pretpostaviti da je $i_\nu=\nu$ $(\nu=1,\ldots,p)$.

Uslov je dovoljan. Neka su grafovi $G_1,\ldots,G_p,\overline{G}_{p+1},\ldots,\overline{G}_n$ konačnog tipa tj. $G_i=g_i(N_1^i,\ldots,N_{k_i}^i)$ $(i=1,\ldots,p)$ i $\overline{G}_i=g_i(N_1^i,\ldots,N_{k_i}^i)$ $(i=p+1,\ldots,n)$.

Skup čvorova X grafa G može biti podeljen na $k_1\ldots k_n$ medjusobno disjunktnih podskupova

$$(1)\qquad Y_{i_1\ldots i_n}=N_{i_1}^1\times\ldots\times N_{i_n}^n\qquad (i_p=1,\ldots,k_p;\ p=1,\ldots,n)\ .$$

Nijedna dva čvora $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(y_1,\ldots,y_n)$ iz skupa $Y_{i_1\ldots i_n}$ nisu susedna u grafu G, pošto njihovih prvih p koordinata nisu parovi susednih čvorova u grafovima G_i $(i=1,\ldots,p)$, respektivno. Neka $((x_1,\ldots,x_n),(z_1,\ldots,z_n))\in U$. Tada $(x_k,z_k)\in U_k$ $(k=1,\ldots,p)$ i ili je $x_k=z_k$ ili $(x_k,z_k)\in U_k$ $(k=p+1,\ldots,n)$. Sledi da $(y_k,z_k)\in U_k$ $(k=1,\ldots,p)$, pošto čvorovi iz $N^k_{i_k}$ imaju iste susede. Pored toga, ili je $y_k=z_k$ ili $(y_k,z_k)\in U_k$ $(k=p+1,\ldots,n)$ s obzirom na odgovarajuće osobine skupova $N^k_{i_k}$. Otuda $((y_1,\ldots,y_n),(z_1,\ldots,z_n))\in U$, pa zaključujemo da čvorovi $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(y_1,\ldots,y_n)$ imaju iste susede. Dakle, svaki od skupova (1) sadrži samo ekvivalentne čvorove, te sledi da je graf G konačnog tipa k i $k\leq k_1\ldots k_n$.

Neka su sada $G_1,\ldots,G_p$ grafovi bez izolovanih čvorova. Dokažimo da su čvorovi x_1 i $y_1,\ldots,$ x_n i y_n ekvivalentni u $G_1,\ldots,G_p,\overline{G}_{p+1},\ldots,\overline{G}_n$, respektivno, pod pretpostavkom da su čvorovi $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(y_1,\ldots,y_n)$ ekvivalentni u G.

Ne umanjujući opštost, pretpostavimo da je $x_i\neq y_i$ $(i=1,\ldots,n)$ i dokažimo da $(x_i,y_i)\notin U_i$ $(i=1,\ldots,p)$ i $(x_i,y_i)\in U_i$ $(i=p+1,\ldots,n)$. Neka je z_i proizvoljan čvor u G_i takav da $(x_i,z_i)\in U_i$ $(i=1,\ldots,p)$ i $x_i=z_i$ $(i=p+1,\ldots,n)$. Ako na primer $(x_1,y_1)\in U_1$, tada je čvor $(y_1,z_2,\ldots,z_n)$ susedan čvoru $(x_1,\ldots,x_n)$ ali nije susedan čvoru $(y_1,\ldots,y_n)$, što je nemoguće. Ako na primer $(x_n,y_n)\notin U_n$, tada je čvor $(z_1,\ldots,z_{n-1},x_n)$ susedan čvoru $(x_1,\ldots,x_n)$ ali nije susedan čvoru $(y_1,\ldots,y_n)$, što je takodje nemoguće.

Dalje, pretpostavimo da postoji čvor v_i u G_i $(i=1,\ldots,n)$ takav da je $v_i\neq x_i$, $v_i\neq y_i$, $(x_i,v_i)\in U_i$ i $(y_i,v_i)\notin U_i$. Tada je čvor $(z_1,\ldots,z_{i-1},v_i,z_{i+1},\ldots,z_n)$ susedan čvoru $(x_1,\ldots,x_n)$ ali nije susedan čvoru $(y_1,\ldots,y_n)$, što je nemoguće. Dakle, čvorovi x_1 i y_1, ..., x_n i y_n su ekvivalentni u $G_1,\dots,G_p$, $\overline{G}_{p+1},\dots,\overline{G}_n$, respektivno.

Zaključujemo da proizvoljna dva čvora iz različitih skupova (1) nisu ekvivalentni. Otuda, skupovi (1) su karakteristični podskupovi grafa G i $k=k_1\dots k_n$.

Ako bar jedan od grafova $G_1,\dots,G_p$ ima izolovane čvorove, tada je očigledno $k<k_1\dots k_n$.

Uslov je potreban. Neka je bar jedan od grafova $G_1,\dots,G_p,\overline{G}_{p+1},\dots,\overline{G}_n$ beskonačnog tipa. Nepotpuna proširena p-suma G_o grafova $G_1^o,\dots,G_p^o,G_{p+1},\dots,G_n$, gde je graf G_i^o dobijen izostavljanjem izolovanih čvorova grafa G_i $(i=1,\dots,p)$, je indukovani podgraf grafa G. Kao u prethodnom delu, može se dokazati da Dekartov proizvod karakterističnih podskupova grafova $G_1^o,\dots,G_p^o,\overline{G}_{p+1},\dots,\overline{G}_n$ obrazuje karakteristične podskupove grafa G_o. Pošto je ovaj skup sada beskonačan to je G_o graf beskonačnog tipa. Otuda je i graf G beskonačnog tipa, takodje.

Ovo zajedno sa lemama 3.1 i 3.2 kompletira dokaz teoreme 3.8. □

Posledica 3.8.3 Dekartov proizvod $G_1\times\dots\times G_n$ netrivijalnih beskonačnih grafova $G_1,\dots,G_n$ je graf konačnog tipa ako i samo ako su $G_1,\dots,G_n$ grafovi konačnog tipa. □

Definicija 3.10 Neka su $G_i=(X_i,U_i)$ $(i=1,\dots,n)$ beskonačni grafovi. Dalje, neka je $f:\{0,1\}^n\to\{0,1\}$ proizvoljna Bulova funkcija i $\mathcal{F}$ skup svih n-torki $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ za koje f uzima vrednost 1. Bulova funkcija $G=f(G_1,\dots,G_n)$ grafova $G_1,\dots,G_n$ je graf $G=(X,U)$, gde je $X=X_1\times\dots\times X_n$ i gde je U definisan na sledeći način. Čvorovi $(x_1,\dots,x_n)$ i $(y_1,\dots,y_n)$ su susedni u G ako i samo ako, za svako i, $x_i\neq y_i$ i postoji n-torka $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ u $\mathcal{F}$ takva da su čvorovi x_i i y_i susedni u $G_i^{[\beta_i]}$ $(G_i^{[1]}=G_i,\ G_i^{[0]}=\overline{G}_i)$. □

Teorema 3.9 Neka su $G_1,\dots,G_n$ netrivijalni i nekompletni beskonačni grafovi. Bulova funkcija $G=f(G_1,\dots,G_n)$ je graf konačnog tipa ako i samo ako $\mathcal{F}$ sadrži tačno jednu n-torku $(\beta_1,\dots,\beta_n)$ i $G_1^{[\beta_1]},\dots,G_n^{[\beta_n]}$ su grafovi konačnog tipa.

Ako je $k(G_i^{[\beta_i]})=k_i$ $(i=1,\dots,n)$, tada je $k(G)\le k_1\cdots k_n$, pri čemu znak jednakosti važi ako i samo ako su $G_i^{[\beta_i]}$ $(i=1,\dots,n)$ grafovi bez izolovanih čvorova.

Dokaz. Ako je $|\mathcal{F}|=1$, tada G predstavlja Dekartov proizvod grafova $G_1^{[\beta_1]},\dots,G_n^{[\beta_n]}$. Prema posledici 3.8.3 graf G je konačnog tipa ako i samo ako su $G_1^{[\beta_1]},\dots,G_n^{[\beta_n]}$ grafovi konačnog tipa. U skladu sa teoremom 3.8 sledi drugi deo teoreme 3.9.

Neka je $|\mathcal{F}|>1$ i $(\alpha_1,\dots,\alpha_n),(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathcal{F}$. Dalje, neka je $\alpha_1\ne\beta_1$. Tada je bar jedan od grafova $G_1^{[\alpha_1]}$, $G_1^{[\beta_1]}$ beskonačnog tipa. Zaista, ako je G_1 graf konačnog tipa, tada je $\overline{G}_1$ graf beskonačnog tipa, jer sadrži beskonačan kompletan graf kao indukovani podgraf. Neka je $G_1^{[\beta_1]}$ graf beskonačnog tipa. Posmatrajmo indukovani podgraf $G_o=(Y,Z,U_o)$ grafa G, gde je $Y=\{(x_1,x_2^o,\dots,x_n^o)\mid x_1\in X_1\}$, $Z=\{(x_1,y_2^o,\dots,y_n^o)\mid x_1\in X_1\}$ i gde su čvorovi x_i^o i y_i^o susedni u grafu $G_i^{[\beta_i]}$ $(i=2,\dots,n)$. Ako $(\overline{\beta}_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\in\mathcal{F}$, gde je

$$\overline{\beta}_1=\begin{cases}1 & \text{ako je } \beta_1=0\\ 0 & \text{ako je } \beta_1=1\end{cases},$$

i $x_1\ne y_1$, tada $((x_1,x_2^o,\dots,x_n^o),(y_1,y_2^o,\dots,y_n^o))\in U$. Ako $(\overline{\beta}_1,\beta_2,\dots,\beta_n)\notin\mathcal{F}$, tada $((x_1,x_2^o,\dots,x_n^o),(y_1,y_2^o,\dots,y_n^o))\in U$ ako i samo ako su čvorovi x_1 i y_1 susedni u grafu $G_1^{[\beta_1]}$. U oba slučaja G_o je graf beskonačnog tipa, pošto sadrži beskonačno mnogo medjusobno neekvivalentnih čvorova. Zaključujemo da je graf G beskonačnog tipa, takodje.

Ovim je dokaz teoreme završen. $\square$

Na kraju ovog odeljka posmatraćemo kompoziciju beskonačnih grafova.

Definicija 3.11 Neka su $G_i=(X_i,U_i)$ $(i=1,\ldots,n)$ beskonačni grafovi. Kompozicija $G_1[G_2[\ldots[G_n]\ldots]$ grafova $G_1,\ldots,G_n$ je graf $G=(X,U)$, gde je $X=X_1\times\ldots\times X_n$ i u kome su dva čvora $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(y_1,\ldots,y_n)$ susedna ako i samo ako postoji ceo broj k $(1\leq k\leq n)$ takav da je $x_i=y_i$ $(i=1,\ldots,k-1)$ i $(x_k,y_k)\in U_k$. □

Teorema 3.10 Kompozicija beskonačnih grafova $G_1,\ldots,G_n$ je graf konačnog tipa ako i samo ako je G_1 graf konačnog tipa a $G_2,\ldots,G_n$ su grafovi bez grana.

Dokaz. Neka su $G_2,\ldots,G_n$ grafovi bez grana. Tada su dva čvora $(x_1,\ldots,x_n)$ i $(y_1,\ldots,y_n)$ grafa G susedna ako i samo ako su čvorovi x_1 i y_1 susedni u grafu G_1. Dakle, graf G je konačnog tipa ako i samo ako je graf G_1 konačnog tipa. Ako je $G_1=g(N_1,\ldots,N_k)$ tada je $G=g(N_1',\ldots,N_k')$, gde je $N_i'=N_i\times X_2\times\ldots\times X_n$ $(i=1,\ldots,k)$.

Obrnuto, neka je G_n netrivijalan graf tj. $(x_n^o,y_n^o)\in U_n$. Dokažimo da skup $Y=\{(x_1,x_2^o,\ldots,x_n^o)\mid x_1\in X_1\}$ ne sadrži ekvivalentne čvorove. Dovoljno je dokazati da svaka dva nesusedna čvora $(x_1,x_2^o,\ldots,x_n^o)$ i $(y_1,x_2^o,\ldots,x_n^o)$ iz Y nemaju iste susede. Zaista, čvor $(x_1,x_2^o,\ldots,x_{n-1}^o,y_n^o)$ je susedan čvoru $(x_1,x_2^o,\ldots,x_n^o)$ ali nije susedan čvoru $(y_1,x_2^o,\ldots,x_n^o)$. Dakle u ovom slučaju graf G je beskonačnog tipa.

Ovim je dokaz kompletiran. □

4. GRAFOVI SA OGRANIČENIM SPEKTRALNIM RASPONIMA

U ovom i poslednja dva poglavlja posmatraćemo samo konačne neorijentisane grafove bez petlji ili višestrukih grana. Pod sopstvenim vrednostima grafa G podrazumevamo sopstvene vrednosti njegove 0-1 matrice susedstva.

Osnovni problem koji se u ovim poglavljima razmatra može da se iskaže na sledeći način.

Data je neka spektralna karakteristika grafa. Odrediti sve grafove koji imaju zadatu spektralnu karakteristiku.

Dakle, razmatra se mogućnost identifikacije grafa kao celine. Pri tome zadate spektralne karakteristike su heriditarne, što znači da ako graf G ima datu spektralnu karakteristiku tada i svaki njegov indukovani podgraf H ima tu karakteristiku. Ovakav problem rešavaćemo jednom varijantom poznate metode zabranjenih grafova, koju zbog njenih osobina uslovno možemo nazvati "metodom sistematskog pretraživanja".

Istaknimo da je heriditarnost posmatranih spektralnih karakteristika grafova posledica sledeće poznate teoreme (videti na primer [9], str. 19).

<u>Teorema 4.1</u> (The Interlacing theorem) Neka je G graf sa spektrom $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$ i neka je H njegov indukovani podgraf sa spektrom $\mu_1 \geqslant \mu_2 \geqslant \ldots \geqslant \mu_m$. Tada važe sledeće nejednakosti

$$\lambda_{n-m+i} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad (i=1,\ldots,m) \;. \square$$

Drugi problem koji se razmatra uporedno sa prvim jeste problem odredjivanja tzv. minimalnih grafova. Podsetimo da je graf G minimalan u odnosu na osobinu P ako on ima osobinu P a nijedan njegov pravi indukovani podgraf nema tu osobinu.

Pri rešavanju postavljenih problema koristili smo tabele spektra grafova sa šest i manje čvorova kao i pomoć kompjutera za izračunavanje sopstvenih vrednosti nekih grafova sa više od šest čvorova.

Na kraju ovog uvodnog dela istaknimo još jedan rezultat koji često koristimo u našim dokazima.

Naime, u skupu čvorova V(G) grafa G može da se definiše relacija ekvivalencije $\sim$ na isti način kao kod beskonačnih prebrojivih grafova (odeljak 1.2): čvorovi x i y su ekvivalentni ako i samo ako imaju iste susede. Neka je $\{N_1,\dots,N_k\}$ odgovarajući količnik skup i $|N_i| = n_i$ $(i=1,\dots,k)$. Neka je dalje g kanonički graf grafa G. Teorema 2.13 može biti preformulisana za konačne grafove.

<u>Teorema 4.2</u>* Neka je G konačan graf i g njegov kanonički graf. Tada je broj n(G) ne-nula sopstvenih vrednosti grafa G jednak broju n(g) ne-nula sopstvenih vrednosti njegove kanoničke slike g.

Ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene su jednačinom

$$f(\lambda) = \det(b_{ij} - \frac{\lambda}{n_i}\delta_{ij}) = 0 ,$$

gde je $B=[b_{ij}]$ matrica susedstva grafa g a δ_{ij} Kronekerov δ-simbol. □

---

*Dokaz teoreme za konačne grafove je sličan dokazu odgovarajuće teoreme za beskonačne grafove [40].

4.1 O grafovima čiji spektralni raspon nije veći od 4

Definicija 4.1 Neka je G graf sa spektrom $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Spektralni raspon s(G) grafa G jednak je rasponu s(A) njegove matrice susedstva A tj.

$$s(G) = s(A) = \lambda_1(G) - \lambda_n(G) \,. \square$$

Za definiciju i osobine raspona matrica može se konsultovati [23]. U daljem tekstu ćemo spektralni raspon, kratkoće radi, jednostavno zvati raspon. Takodje ćemo najveću i najmanju sopstvenu vrednost grafa G označavati sa r(G) i $\lambda(G)$, respektivno.

J. H. Smith [37] je odredio sve grafove čija najveća sopstvena vrednost nije veća od 2; posle toga D. Cvetković, M. Doob i I. Gutman [8] su odredili sve minimalne grafove sa osobinom da imaju najveću sopstvenu vrednost veću od 2. U ovom odeljku mi proširujemo njihove rezultate u izvesnom smislu.

Neka je H indukovani podgraf grafa G tj. $H \subseteq G$. Iz teoreme 4.1 sledi da je $r(G) \geqslant r(H)$ i $\lambda(G) \leqslant \lambda(H)$, tj. $s(G) \geqslant s(H)$. Otuda za svaki realan broj $L > 0$ možemo posmatrati grafove sa osobinom $s(G) > L$ koji su minimalni u odnosu na ovu osobinu. U ovom odeljku mi ćemo naći sve takve grafove za $L=4$.

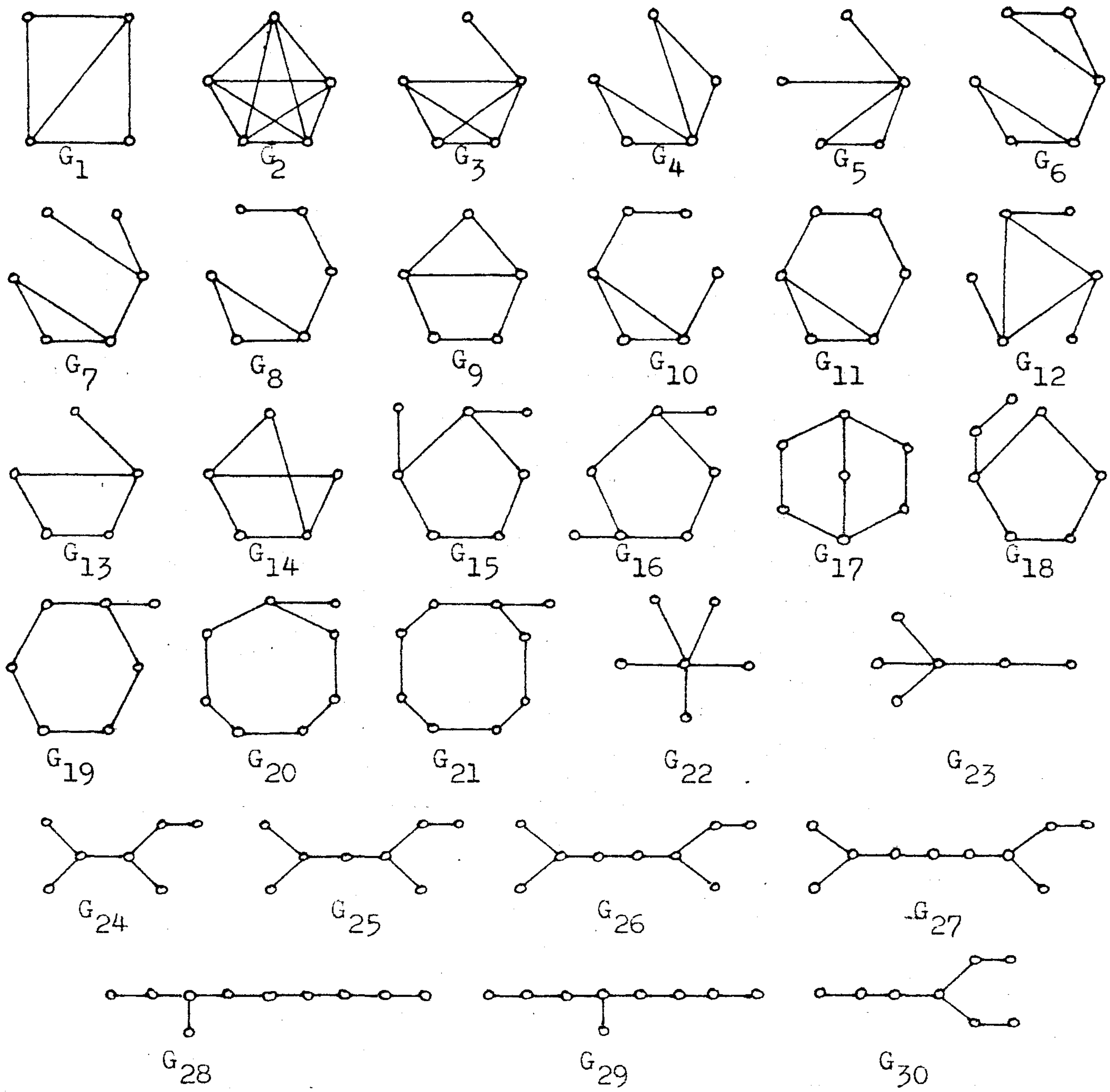
Može se takodje razmatrati sledeće pitanje: Za realan broj $L > 0$ naći sve grafove sa $s(G) \leqslant L$. U ovom odeljku opisujemo sve povezane grafove za koje je $s(G) \leqslant 4$. Kombinujući ovo sa rezultatima Smith-a [37], videćemo da postoji tačno pet grafova sa $r(G) > 2$ i $s(G) \leqslant 4$.

Prvo ćemo odrediti sve povezane minimalne grafove G sa osobinom $s(G) > 4$.

Odredjivanje minimalnih stabala sa rasponom većim od 4 ekvivalentno je odredjivanju minimalnih stabala sa najvećom sopstvenom vrednošću većom od 2.

Lema 4.1 ([8]) Postoji tačno 9 minimalnih stabala sa rasponom većim od 4 i to su grafovi G_{22}-G_{30} sa sl. 4.1. □

Teorema 4.3 Postoji tačno 30 minimalnih povezanih grafova sa rasponom većim od 4 i oni su predstavljeni na sl. 4.1.



Sl. 4.1

Dokaz. Lako može da se pokaže da su grafovi G_1-G_{30} sa sl. 4.1 minimalni u odnosu na osobinu da imaju raspon veći od 4.

Dokažimo da ako je povezan graf G minimalan u odnosu na osobinu $s(G)>4$, tada je G jedan od grafova G_1-G_{30} sa sl. 4.1. Lema 4.1 vodi računa o slučaju kada je G stablo. Zbog toga je dovoljno posmatrati samo grafove sa konturama.

Neka je G povezan minimalan graf sa rasponom većim od 4 i neka je n dužina najkraće konture grafa G. Označimo čvorove proizvoljne konture C_n grafa G sa $v_1,\ldots,v_n$, tako da su čvorovi v_i i v_{i+1} $(i=1,\ldots,n-1)$, v_1 i v_n susedni. Neka je $T_{i_1\ldots i_k}$ $(1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n;\ 1\leq k\leq n)$ skup čvorova iz $V(G)\setminus V(C_n)$ koji su susedni tačno čvorovima $v_{i_1},\ldots,v_{i_k}$ konture C_n. Neka je T_o skup čvorova iz $V(G)\setminus V(C_n)$ koji nisu susedni nijednom čvoru konture C_n.

Ako je $n\geqslant 9$, tada graf G sadrži pravi indukovani podgraf G_{29}, što je suprotno uslovu minimalnosti. Prema tome možemo razlikovati sledeće slučajeve:

Slučaj 1. $n=3$

Ako je bar jedan od skupova T_{ij} $(1\leq i<j\leq 3)$ neprazan, tada je graf G_1 indukovani podgraf grafa G i otuda je $G=G_1$. Neka je $T_{ij}=\emptyset$ $(1\leq i<j\leq 3)$. Tada ako je $|T_{123}|\geqslant 2$ i nijedna dva čvora skupa T_{123} nisu susedna, graf G sadrži pravi indukovani podgraf G_1, što je suprotno uslovu minimalnosti. Dakle, ako je $|T_{123}|\geqslant 2$, tada je graf G_2 sadržan u G i otuda je $G=G_2$. Ako je $|T_{123}|=1$, tada je $G=G_3$. Neka je $T_{123}=\emptyset$. Ako neki od skupova T_i $(1\leqslant i\leqslant 3)$ sadrži više od jednog čvora, tada je $G=G_4$ ili $G=G_5$. Neka je $|T_i|\leq 1$ $(1\leqslant i\leqslant 3)$. Vodeći računa o simetričnosti, razlikovaćemo sledeće podslučajeve:

1^o $|T_1|=1$, $T_2=T_3=\emptyset$. Ako skup T_o sadrži bar dva čvora susedna čvoru $x\in T_1$, tada je $G=G_6$ ili $G=G_7$. Ako T_o sadrži samo jedan čvor susedan čvoru $x\in T_1$, tada je $G=G_8$.

2^o $|T_1|=|T_2|=1$, $T_3=\emptyset$. Ako su čvorovi $x\in T_1$ i $y\in T_2$ susedni, tada je $G=G_9$. Ako čvorovi x i y nisu susedni, tada je $G=G_{10}$ ili $G=G_{11}$.

3^o $|T_1|=|T_2|=|T_3|=1$. Ako su bar dva čvora izmedju čvorova $x\in T_1$, $y\in T_2$ i $z\in T_3$ susedna, tada graf G sadrži pravi indukovani podgraf G_9, što je suprotno uslovu minimalnosti. Otuda je $G=G_{12}$.

Slučaj 2. $n=4$

Tada je $T_{12}=T_{14}=T_{23}=T_{34}=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=T_{1234}=\emptyset$, pošto graf G ne sadrži trouglove. Ako je bar jedan od skupova T_i $(1\leq i\leq 4)$ neprazan, tada je $G=G_{13}$. Neka je $T_i=\emptyset$ $(1\leq i\leq 4)$. Ako je $T_{13}\neq\emptyset$ a $T_{24}=\emptyset$, tada je $G=G_{14}$. Ako je $T_{13}\neq\emptyset$ i $T_{24}\neq\emptyset$, tada G sadrži pravi indukovani podgraf G_{14}, što je suprotno uslovu minimalnosti.

U ostalim slučajevima $(5\leq n\leq 8)$ imamo da je $T_{i_1\cdots i_k}=\emptyset$ $(1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n;\ 2\leq k\leq n)$, pošto graf G ne sadrži konture čija je dužina manja od n. Ako bar jedan od skupova T_i $(1\leq i\leq n)$ sadrži više od jednog čvora, tada graf G sadrži pravi indukovani podgraf G_{23} suprotno uslovu minimalnosti. Neka je $|T_i|\leq 1$ $(1\leq i\leq n)$.

Slučaj 3. $n=5$

Ako su bar dva od podskupova T_i $(1\leq i\leq 5)$ neprazna, graf G je jedan od grafova G_{15},G_{16},G_{17}. Ako je tačno jedan od podskupova T_i $(1\leq i\leq 5)$ neprazan, tada je $G=G_{18}$.

Slučaj 4. $6\leq n\leq 8$

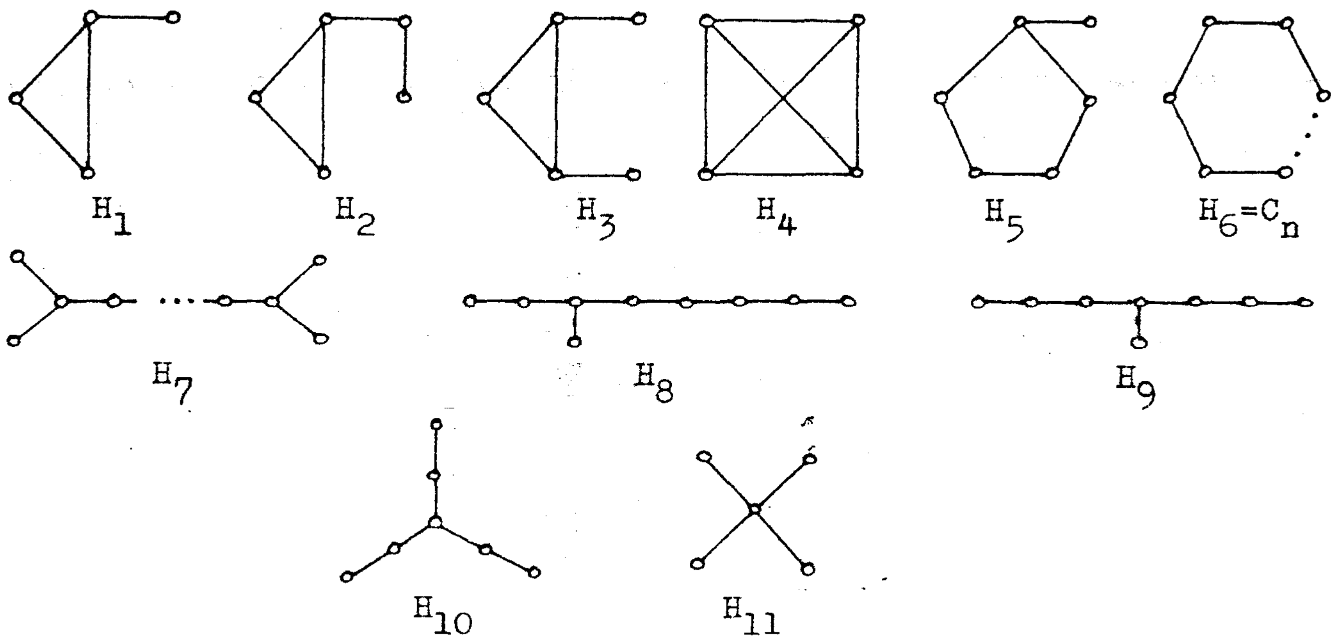
Za $n=6,7,8$ grafovi G_{19},G_{20} i G_{21}, respektivno, sadržani su u (i otuda jednaki) grafu G.

Ovim je dokaz teoreme 4.1 kompletiran. □

U nastavku ćemo odrediti sve povezane grafove čiji raspon nije veći od 4. U dokazu teoreme 4.4 koristimo sledeću lemu.

Lema 4.2 ([37]) Neka je G graf sa najvećom sopstvenom vrednošću r(G). Tada je $r(G) \leq 2$ ako i samo ako je svaka komponenta povezanosti grafa G indukovani podgraf jednog od grafova H_6-H_{11} sa sl. 4.2. □

Teorema 4.4 Neka je G povezan graf sa rasponom s(G). Tada je $s(G) \leq 4$ ako i samo ako je G indukovani podgraf jednog od grafova sa sl. 4.2.



Sl. 4.2

Dokaz. Lema 4.2 vodi računa o slučaju kada je G stablo. Naime, odredjivanje stabala sa rasponom manjim ili jednakim 4 ekvivalentno je odredjivanju stabala čija najveća sopstvena vrednost nije veća od 2. Otuda je dovoljno posmatrati samo grafove sa konturama.

Lako je pokazati da grafovi H_1-H_{11} imaju raspon manji ili jednak 4. Otuda, svaki indukovani podgraf ovih grafova ima raspon koji je manji ili jednak 4.

Obrnuto, neka je G povezan graf sa konturama, čiji raspon nije veći od 4. Da bi opisali graf G, koristićemo metod zabranjenih grafova. Primetimo da graf G ne sadrži nijedan od grafova G_1-G_{30} sa sl. 4.1 kao indukovani podgraf, pošto je njihov raspon veći od 4.

Neka je C_n najmanja kontura u grafu G i neka $T_{i_1 \dots i_k}$ i T_o imaju isto značenje kao u teoremi 4.3. Razlikovaćemo sledeće slučajeve.

Slučaj 1. n=3

Tada je $T_{ij}=\emptyset$ $(1 \leq i < j \leq 3)$ pošto u suprotnom slučaju G sadrži indukovani podgraf G_1. Pored toga skupovi T_i $(1 \leq i \leq 3)$ mogu sadržati najviše jedan čvor (inače G sadrži G_4 ili G_5 kao indukovani podgraf); dakle, $|T_i| \leq 1$ $(1 \leq i \leq 3)$. Takodje i skup T_{123} može sadržati najviše jedan čvor (inače je $G_1 \subseteq G$ ili $G_2 \subseteq G$).

Neposrednim proveravanjem utvrdjujemo relacije (povezanost granama) izmedju pojedinih skupova. Najpre, čvorovi skupova T_i i T_j $(1 \leq i < j \leq 3)$ ne mogu biti susedni (inače je $G_9 \subseteq G$). Dalje, skupovi T_i i T_{123} su nekoegzistentni (u suprotnom slučaju je $G_1 \subseteq G$ ili $G_3 \subseteq G$).

Uzimajući u obzir sve moguće kombinacije i vodeći računa o simetričnosti, razlikovaćemo sledeće podslučajeve:

1^o $T_1=T_2=T_3=T_{123}=\emptyset$. Tada je $G=C_3$.

2^o $|T_1|=1$, $T_2=T_3=T_{123}=\emptyset$. Tada je $|T_o| \leq 1$, pošto u suprotnom slučaju graf G sadrži bar jedan od grafova G_6, G_7, G_8 kao indukovani podgraf. Dakle, $G=H_1$ ili $G=H_2$.

3° $|T_{123}|=1$, $T_1=T_2=T_3=\emptyset$. U ovom slučaju je $T_o=\emptyset$ (inače je $G_3 \subseteq G$) i $G=H_4$.

4° $|T_1|=|T_2|=1$, $T_3=T_{123}=\emptyset$. Tada je $T_o=\emptyset$, pošto je u suprotnom $G_{10} \subseteq G$ ili $G_{11} \subseteq G$. Dakle, $G=H_3$.

Primetimo da kombinacija $|T_1|=|T_2|=|T_3|=1$, $T_{123}=\emptyset$ nije moguća. Zaista, u suprotnom slučaju G sadrži G_{12} kao indukovani podgraf.

Slučaj 2. $n=4$

Tada je $T_i=\emptyset$ $(1 \leq i \leq 4)$, pošto je u suprotnom $G_{13} \subseteq G$, što je nemoguće. Pored toga, $T_{13}=T_{24}=\emptyset$, inače je $G_{14} \subseteq G$. Dakle, $G=C_4$.

Slučaj 3. $n=5$

Tada je $|T_i| \leq 1$ $(1 \leq i \leq 5)$, inače je $G_{23} \subseteq G$. Pored toga, skupovi T_i i T_j $(1 \leq i < j \leq 5)$ su nekoegzistentni (u suprotnom slučaju G sadrži bar jedan od grafova G_{15}, G_{16}, G_{17} kao indukovani podgraf, što je nemoguće). Dakle, imamo samo dve mogućnosti:

1° $T_i=\emptyset$ $(1 \leq i \leq 5)$. Tada je $G=C_5$.

2° $|T_1|=1$, $T_i=\emptyset$ $(2 \leq i \leq 5)$. U ovom slučaju je $T_o=\emptyset$, inače je $G_{18} \subseteq G$. Dakle, $G=H_5$.

Slučaj 4. $n \geq 6$

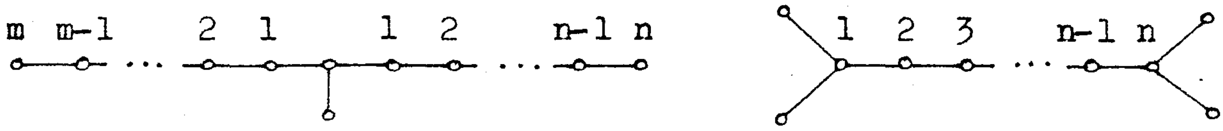
Tada je $T_i=\emptyset$ $(1 \leq i \leq n)$. Zaista, u suprotnom slučaju je $G_{19} \subseteq G$, $G_{20} \subseteq G$ i $G_{21} \subseteq G$ za $n=6,7,8$, respektivno, a $G_{29} \subseteq G$ za $n \geq 9$, što je nemoguće. Dakle, $G=C_n$.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Posledica 4.3.1 Postoji tačno pet povezanih grafova sa $r(G) > \cancel{2}$ i $s(G) \leq 4$ i to su grafovi H_1-H_5 sa sl. 4.2. □

Na kraju ovog odeljka odredićemo sve nepovezane minimalne grafove sa rasponom većim od 4.

Neka je C_n kontura dužine n, P_n put dužine n-1, S_n zvezda sa n+1 čvorom a $V_{m,n}$ i W_n grafovi predstavljeni na sl. 4.3.



$V_{m,n}$ W_n

Sl. 4.3

<u>Teorema 4.5</u> Postoji tačno 17 nepovezanih minimalnih grafova sa rasponom većim od 4. To su

$$(1)\quad \begin{array}{l} H_1\dot{+}C_4,\ H_1\dot{+}C_6,\ H_1\dot{+}P_7,\ H_1\dot{+}V_{1,2},\ H_1\dot{+}S_4,\ H_2\dot{+}P_6, \\ H_3\dot{+}P_5,\ H_3\dot{+}S_3,\ H_4\dot{+}P_3,\ H_5\dot{+}C_4,\ H_5\dot{+}C_6,\ H_5\dot{+}C_8, \\ H_5\dot{+}P_9,\ H_5\dot{+}V_{1,3},\ H_5\dot{+}V_{2,2},\ H_5\dot{+}W_2,\ H_5\dot{+}S_4. \end{array}$$

<u>Dokaz.</u> Lako se proverava da su grafovi (1) minimalni grafovi u odnosu na osobinu da imaju raspon veći od 4.

Neka je G proizvoljan nepovezan minimalan graf sa rasponom većim od 4. Tada graf G nema izolovanih čvorova i zadovoljava sledeće uslove:

1) Graf G ima tačno dve komponente povezanosti tj. $G=G_1\dot{+}G_2$, pri čemu je $r(G_1)\neq r(G_2)$ i $\lambda(G_1)\neq\lambda(G_2)$. Pretpostavljajući da je $r(G_1)>r(G_2)$, imamo da je $\lambda(G_1)>\lambda(G_2)$.

2) Svaka komponenta povezanosti ima osobinu

$$s(G_i) = r(G_i) - \lambda(G_i) \leq 4 \quad (i=1,2) .$$

Prema teoremi 4.4 zaključujemo da je svaka komponenta povezanosti indukovani podgraf jednog od grafova sa sl. 4.2.

3) Najmanje jedna komponenta povezanosti ima najveću sopstvenu vrednost veću od 2.

4) Komponenta povezanosti G_1 je jedan od grafova H_1-H_5

sa sl. 4.2, pošto su to jedini povezani grafovi koji zadovoljavaju istovremeno uslove 2) i 3) (posledica 4.3.1).

5) Komponenta povezanosti G_2 je minimalni graf u odnosu na osobinu

$$\lambda(G_2) < r(G_1) - 4 \quad .$$

Razlikovaćemo sledećih pet slučajeva:

1^o $G_1=H_1$. Tada je G_2 jedan od grafova $C_4, C_6, P_7, V_{1,2}$ i S_4, pošto su to jedini grafovi koji zadovoljavaju uslove 2) i 5).

2^o $G_1=H_2$. Pošto je H_1 pravi indukovani podgraf grafa H_2, graf G_2 pored uslova 2) i 5) mora da zadovoljava i sledeći uslov

$$\lambda(G_2) > r(H_1) - 4 \quad . \qquad (2)$$

Graf P_6 je jedini graf koji zadovoljava sve gore pomenute uslove.

3^o $G_1=H_3$. I u ovom slučaju H_1 je pravi indukovani podgraf grafa H_2, pa graf G_2 mora zadovoljavati pored uslova 2) i 5) i uslov (2). Grafovi P_5 i S_3 su jedini takvi grafovi.

4^o $G_1=H_4$. Graf P_3 je jedini graf koji zadovoljava uslove 2) i 5).

5^o $G_1=H_5$. Tada je graf G_2 jedan od grafova $C_4, C_6, C_8, P_9, V_{1,3}, V_{2,2}, W_2$ i S_4, pošto su to jedini grafovi koji u ovom slučaju zadovoljavaju uslove 2) i 5).

Ovim je kompletiran dokaz teoreme 4.3. $\square$

4.2 O grafovima čiji drugi spektralni raspon nije veći od 3/2

U ovom odeljku posmatraćemo grafove koji imaju najmanje četiri čvora.

Definicija 4.2 Neka je G graf sa spektrom $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \geq \ldots \geq \lambda_n$ $(n \geq 4)$. Drugi spektralni raspon $s_2(G)$ grafa G jednak je razlici druge najveće i druge najmanje sopstvene vrednosti grafa G tj.

$$s_2(G) = \lambda_2(G) - \lambda_{n-1}(G) .$$

U daljem tekstu ćemo drugi spektralni raspon, kratkoće radi, jednostavno zvati drugi raspon.

U ovom odeljku odredićemo sve minimalne grafove sa osobinom da imaju drugi raspon veći od $\frac{3}{2}$ a takodje i sve grafove čiji drugi raspon nije veći od $\frac{3}{2}$. Ova poslednja osobina grafova je heriditarna, što se lako pokazuje korišćenjem teoreme 4.1.

Najpre ćemo dokazati nekoliko pomoćnih lema pomoću kojih su u nekim posebnim klasama grafova odredjeni oni grafovi koji imaju osobinu $s_2(G) \leq 3/2$.

Lema 4.3 Kompletan multipartitan graf $G=K_{n_1,\ldots,n_k}$ ima osobinu $s_2(G) \leq 3/2$ ako i samo ako je G jedan od sledećih grafova:

1° $G=K_{n_1,n_2}$ $(n_1 \geq n_2 \geq 1)$;
2° $G=K_{n_1,1,\ldots,1}$ $(k \geq 3,\ n_1 \geq 1)$;
3° $G=K_{n_1,n_2,1}$ $(n_1 \geq n_2,\ 2 \leq n_2 \leq 3$ ili $4 \leq n_1 \leq 5,\ n_2=4)$;
4° $G=K_{n_1,2,1,1}$ $(n_1 \geq 2)$;
5° $G=K_{2,2,1,1,1}$.

Dokaz. Karakteristični polinom kompletnog multipartitnog grafa G glasi

$$p(\lambda) = \lambda^{n-k}\Big(1 - \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{\lambda+n_i}\Big) \prod_{j=1}^{k} (\lambda+n_j) .$$

Ako je G kompletan bipartitan graf K_{n_1,n_2}, tada on ima tačno dve ne-nula sopstvene vrednosti (teorema 4.2) i $s_2(G)=0$.

Neka je $k \geq 3$. Razlikovaćemo sledeća četiri slučaja:

1) Svi karakteristični podskupovi grafa G su jednočlani tj. $G=K_n$. Tada je $\lambda_2=\lambda_{n-1}=-1$ i $s_2(G)=0$.

2) Tačno jedan karakteristični podskup grafa G sadrži više od jednog čvora. Neka je $n_1 \geq 2$, $n_2=\ldots=n_k=1$. Tada je

$$p(\lambda) = \lambda^{n-k}(\lambda+1)^{k-2}(\lambda^2-(k-2)\lambda-n_1(k-1)) ,$$

pa zaključujemo da je $\lambda_2=0$, $\lambda_{n-1}=-1$ i $s_2(G)=1$.

3) Tačno dva karakteristična podskupa grafa G sadrže više od jednog čvora. Neka je $n_1 \geq n_2 \geq 2$, $n_3=\ldots=n_k=1$. Tada je

$$p(\lambda) = \lambda^{n-k}(\lambda+1)^{k-3}\, p_1(\lambda) ,$$

gde je

$$p_1(\lambda) = \lambda^3-(k-3)\lambda^2-(n_1n_2+(k-2)(n_1+n_2))\lambda-(k-1)n_1n_2 .$$

Pošto je $\lambda_2=0$, to je $s_2(G) \leq 3/2$ ako i samo ako je $\lambda_{n-1} \geq -3/2$. Kako je $K_{2,2,1} \subseteq G$ sledi da je $\lambda_n(G) \leq \lambda_5(K_{2,2,1})=-2$. Pošto je $p_1(0)=-(k-1)n_1n_2<0$ to je $\lambda_{n-1} \geq -3/2$ ako i samo ako je $p_1(-\frac{3}{2}) \geq 0$ tj. ako i samo ako važi sledeća nejednakost

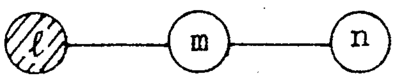
$$(12-8(k-1))n_1n_2+12(k-2)(n_1+n_2)-(18(k-3)+27) \geq 0 .$$

Poslednja nejednakost je ispunjena ako i samo ako je G jedan od grafova 3^o, 4^o ili 5^o.

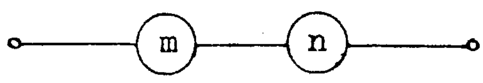
4) Najmanje tri karakteristična podskupa grafa G sadrže više od jednog čvora. Tada je $K_{2,2,2} \subseteq G$ i $s_2(G) \geq s_2(K_{2,2,2}) > \frac{3}{2}$.

Ovim je lema u potpunosti dokazana. □

Označimo sa (n) graf sa n čvorova koji nema grane. Dalje, označimo sa (m) kompletan graf K_m. Linija izmedju dva kruga označava da postoje sve moguće grane izmedju odgovarajućih grafova. Neka su sa $A_{\ell,m,n}$ i $B_{m,n}$ označeni sledeći grafovi:



$A_{\ell,m,n}$



$B_{m,n}$

Lema 4.4 Graf $G=A_{\ell,m,n}$ ($\ell \geqslant 2$) ima osobinu $s_2(G) \leq \frac{3}{2}$ ako i samo ako jedan od sledećih uslova važi:

1° $\ell=2$, $m \geqslant 1$, $n \leq 2$;

2° $\ell=3$, $m \geqslant 1$, $n=1$;

3° $\ell=4$, $m=1$, $n=1$.

Dokaz. Ako je $\ell \geqslant 2$, tada prema teoremi 4.2 imamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \frac{(-1)\ (\lambda+1)^{\ell-1}}{m\,n} (\lambda^3-(\ell-1)\lambda^2-m(n+\ell)\lambda+(\ell-1)mn) = 0 .$$

Odavde zaključujemo da je $\lambda_{n-1}=-1$ a $\lambda_2 \leq \frac{1}{2}$ ako i samo ako jedan od uslova 1°, 2° i 3° važi. □

Lema 4.5 Graf $G=B_{m,n}$ ima osobinu $s_2(G) \leq \frac{3}{2}$ ako i samo ako jedan od sledećih uslova važi:

1° $m=1$, $n \geqslant 1$;

2° $m=2$, $n=2$.

Dokaz. Pomoću teoreme 4.2 dobijamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \frac{\lambda}{m\,n} (\lambda^4-(mn+m+n)\lambda^2+mn) = 0 .$$

Odavde možemo da zaključimo da je $\lambda_2=|\lambda_{n-1}| \leq \frac{3}{4}$ ako i samo ako je $m=1$, $n \geqslant 1$ ili $m=n=2$. □

Označimo dalje sa D_n ($n \geqslant 3$) graf dobijen iz kompletnog grafa K_n izostavljanjem dve susedne grane.

Lema 4.6 Graf $G=D_n$ ima osobinu $s_2(G) \leq \frac{3}{2}$ za svako $n \geqslant 4$.

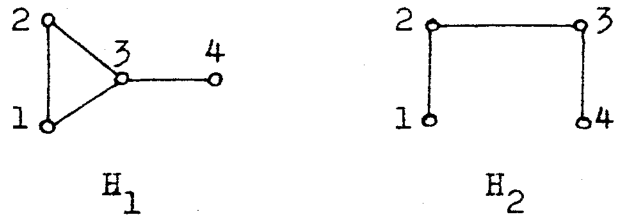
Dokaz. Lako može da se pokaže da karakteristični polinom grafa G glasi

$$p(\lambda) = (\lambda+1)^{n-3}(\lambda^3-(n-3)\lambda^2-(2n-5)\lambda+(n-3)) .$$

Odavde sledi da je $\lambda_{n-1}=-1$ a $\lambda_2 \leq 1/2$ za svako $n \geq 4$. □

U dokazima teorema koje slede koristićemo i sledeću lemu, koja je neposredna posledica rezultata J. H. Smith-a [37].

Lema 4.7 Povezan graf G nije kompletan multipartitan graf ako i samo ako sadrži kao indukovani podgraf jedan od grafova sa sl. 4.4. □



Sl. 4.4

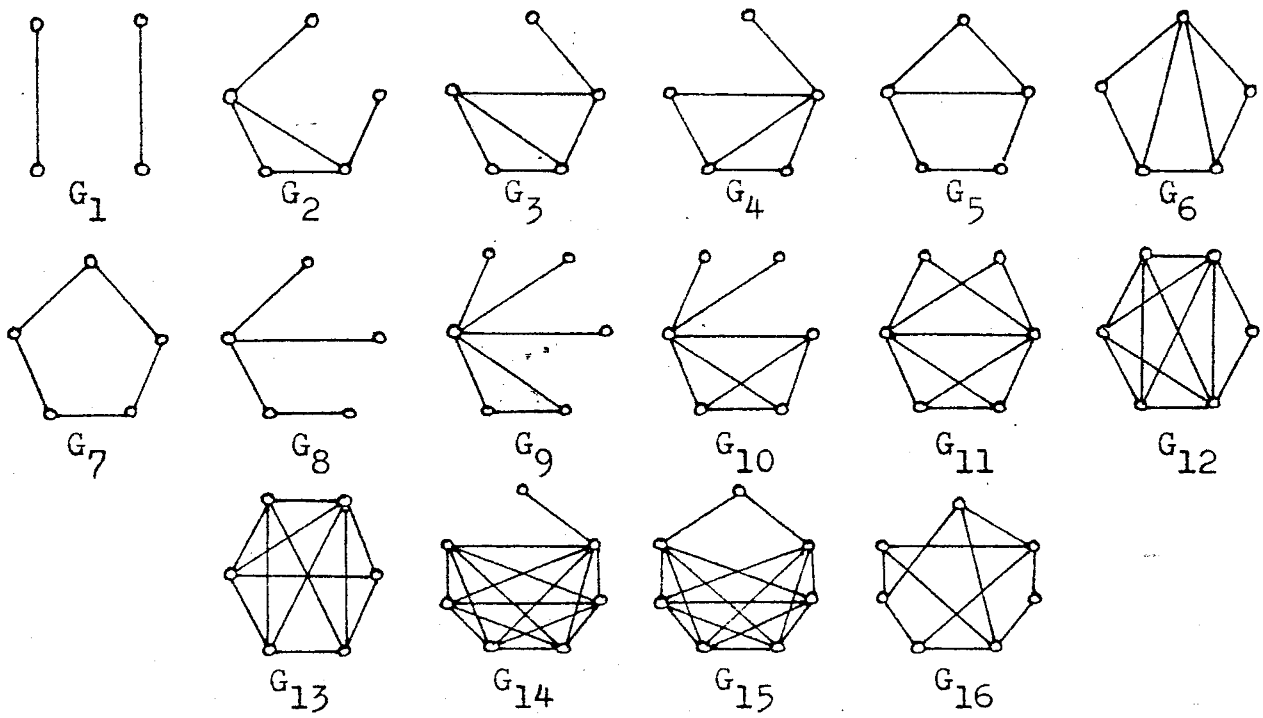
Sada ćemo odrediti sve minimalne grafove sa osobinom $s_2(G) > 3/2$.

Teorema 4.6 Postoji tačno 22 minimalna grafa sa drugim spektralnim rasponom većim od 3/2. To su kompletni multipartitni grafovi $K_{2,2,2}, K_{6,4,1}, K_{5,5,1}, K_{3,3,1,1}, K_{3,2,1,1,1}$, $K_{2,2,1,1,1,1}$ i grafovi predstavljeni na sl. 4.5.

Dokaz. Koristeći se rezultatima leme 4.3, pokazuje se da su grafovi $K_{2,2,2}, K_{5,5,1}, K_{6,4,1}, K_{3,3,1,1}, K_{3,2,1,1,1}$ i $K_{2,2,1,1,1,1}$ jedini minimalni grafovi u klasi kompletnih multipartitnih grafova u odnosu na osobinu $s_2(G) > 3/2$.

Takodje, lako može da se proveri da su grafovi G_1-G_{16} sa sl. 4.5 minimalni u odnosu na osobinu $s_2(G) > 3/2$.

Neka je sada G proizvoljan minimalni graf sa osobinom $s_2(G) > 3/2$, koji nije kompletan multipartitan graf. Dokažimo da je G jedan od grafova sa sl. 4.5.



Sl. 4.5

Očigledno graf G ne sadrži izolovane čvorove. Ako je G nepovezan graf, tada je $G_1 \subseteq G$ i otuda je $G=G_1$.

Neka je dalje G povezan graf. Na osnovu leme 4.7 zaključujemo da graf G sadrži jedan od grafova sa sl. 4.4 kao indukovani podgraf. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja.

<u>Slučaj 1</u>. Graf G sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Neka je $T_{i_1 \ldots i_k}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4;\ 1 \leq k \leq 4)$ skup čvorova iz $V(G) \setminus V(H_1)$ koji su susedni tačno čvorovima $i_1, \ldots, i_k$ grafa H_1. Dalje, neka je T_0 skup čvorova iz $V(G) \setminus V(H_1)$ koji nisu susedni nijednom čvoru grafa H_1.

Isključujući simetrične slučajeve, razlikovaćemo sledeće podslučajeve:

1^o $T_1 \neq \emptyset$. Tada je $G_2 \subseteq G$ i otuda je $G=G_2$.

2^o $T_4 \neq \emptyset$. Tada je G_1 pravi indukovani podgraf grafa G tj. $G_1 \subset G$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

3^o $T_{12} \neq \emptyset$. Tada je $G_3 \subseteq G$ i otuda je $G=G_3$.

4° $T_{13} \neq \emptyset$. Tada je $G_4 \subseteq G$ i otuda je $G=G_4$.

5° $T_{14} \neq \emptyset$. Tada je $G_5 \subseteq G$ i otuda je $G=G_5$.

6° $T_{34} \neq \emptyset$. Tada je $G_1 \subset G$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

7° $T_{134} \neq \emptyset$. Tada je $G_6 \subseteq G$ i otuda je $G=G_6$.

8° $T_o \neq \emptyset$. Tada graf G sadrži pravi indukovani podgraf H sa osobinom $s_2(H) > 3/2$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

Neka je dalje $T_1=T_2=T_4=T_{12}=T_{13}=T_{14}=T_{23}=T_{24}=T_{34}=T_{134}=$ $=T_{234}=T_o=\emptyset$.

9° $|T_3| > 1$. Tada je $G=G_9$.

10° $|T_3| =1$, $T_{123} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{10}$.

11° $|T_3| = 1$, $T_{124} \neq \emptyset$. Tada ili je $G=A_{2,m,2}$ (i prema lemi 4.4 je $s_2(G) \leq 3/2$), ili graf G sadrži pravi indukovani podgraf H sa osobinom $s_2(H) > 3/2$, što je nemoguće.

12° $|T_3| = 1$, $T_{1234} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{11}$.

Neka je dalje i $T_3=\emptyset$.

13° $|T_{123}| > 2$. Tada je $G=G_{14}$.

14° $|T_{123}| = 2$, $T_{124} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{15}$.

15° $|T_{123}| = 2$, $T_{1234} \neq \emptyset$. Tada postoji graf $H \subset G$ sa osobinom $s_2(H) > 3/2$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

16° $|T_{123}| = 1$, $T_{124} \neq \emptyset$. Tada ili je $G=A_{3,m,1}$ (i prema lemi 4.4 je $s_2(G) \leq 3/2$) ili postoji graf $H \subset G$ sa osobinom $s_2(H) > 3/2$, što je nemoguće.

17° $|T_{123}| = 1$, $T_{1234} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{12}$.

Neka je dalje i $T_{123}=\emptyset$.

18° $|T_{124}| > 1$. Tada ili je $G=A_{2,m,1}$ (i prema lemi 4.4 je $s_2(G) \leq 3/2$) ili je $G=H_3^*$ (takodje je $s_2(H_3) \leq 3/2$), ili graf G

---

*Graf H_3 je predstavljen na sl. 4.6.

sadrži pravi indukovani podgraf H sa osobinom $s_2(H) > 3/2$, što je nemoguće.

19^o $|T_{124}| = 1$, $T_{1234}=\emptyset$. Tada je $G=G_{13}$.

Konačno neka je i $T_{124}=\emptyset$. Tada je očigledno $G=G_{13}$.

Slučaj 2. Graf G sadrži H_2 a ne sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Neka $T_{i_1 \ldots i_k}$ i T_o imaju isto značenje kao u prvom slučaju, samo sada u odnosu na podgraf H_2. Tada je $T_{12}=T_{23}=T_{34}=$ $=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=T_{1234}=\emptyset$. Pored toga skupovi T_1, T_2, T_3, T_4, T_{13}, T_{14} i T_{24} mogu da sadrže samo izolovane čvorove.

Ponovo isključujući simetrične slučajeve, možemo razlikovati sledeće podslučajeve:

1^o $T_1 \neq \emptyset$. Tada je $G_1 \subset G$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

2^o $T_2 \neq \emptyset$. Tada je $G_8 \subseteq G$ i otuda je $G=G_8$.

3^o $T_{14} \neq \emptyset$. Tada je $G_7 \subseteq G$ i otuda je $G=G_7$.

4^o $T_o \neq \emptyset$. Tada je $G_1 \subset G$, što je suprotno uslovu minimalnosti.

Neka je dalje $T_1=T_2=T_3=T_4=T_{14}=T_o=\emptyset$.

5^o $T_{13} \neq \emptyset$, $T_{24}=\emptyset$. Tada je $G=B_{1,n}$ i prema lemi 4.5 je $s_2(G) \leq 3/2$, što je nemoguće.

6^o $T_{13} \neq \emptyset$, $T_{24} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{16}$.

Ovim je dokaz teoreme kompletiran. □

U nastavku ćemo odrediti sve grafove čiji drugi raspon nije veći od 3/2.

Teorema 4.7 Neka je G graf bez izolovanih čvorova. Drugi spektralni raspon grafa G nije veći od 3/2 ako i samo ako je G jedan od sledećih grafova:

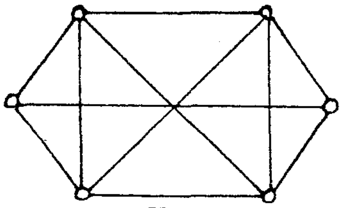
(i) $G=K_{n_1,\ldots,n_k}$ $(k=2, n_1 \geq n_2 \geq 1;\ k \geq 3, n_1 \geq 1, n_2=\ldots=n_k=1;$
$k=3, n_1 \geq n_2, 2 \leq n_2 \leq 3, n_3=1;\ k=3, 4 \leq n_1 \leq 5, n_2=4, n_3=1;$
$k=4, n_1 \geq 2, n_2=2, n_3=n_4=1$ ili $k=5, n_1=n_2=2, n_3=n_4=n_5=1)$;

(ii) $G=A_{\ell,m,n}$ $(\ell=2, m \geq 1, n \leq 2;\ \ell=3, m \geq 1, n=1$ ili $\ell=4, m=n=1)$;

(iii) $G=B_{m,n}$ $(m=1, n \geq 1$ ili $m=n=2)$;

(iv) $G=D_n$ $(n \geq 5)$;

(v) $G=H_3$ (sl. 4.6).



H_3

Sl. 4.6

Dokaz. Pomoću leme 4.3 odredjeni su kompletni multipartitni grafovi čiji drugi raspon nije veći od $3/2$.

Neka je G proizvoljan graf koji nije kompletan multipartitan i koji ima osobinu $s_2(G) \leq 3/2$. Da bi opisali graf G, ponovo ćemo koristiti metod zabranjenih grafova. Pomoću teoreme 4.1 zaključujemo da graf G ne sadrži kao indukovani podgraf nijedan od grafova G_1-G_{16} sa sl. 4.5, pošto oni imaju drugi raspon veći od $3/2$.

Graf G je povezan, pošto je u suprotnom slučaju $G_1 \subseteq G$, što je nemoguće. Iz leme 4.7 sledi da G sadrži jedan od numerisanih grafova sa sl. 4.4 kao indukovani podgraf. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

Slučaj 1. Graf G sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Neka $T_{i_1 \ldots i_k}$ i T_o imaju isto značenje kao u slučajevima teoreme 4.6.

Tada je $T_1=\emptyset$, inače je $G_2 \subseteq G$. Slično imamo da je $T_2=T_4=T_{12}=T_{13}=T_{14}=T_{23}=T_{24}=T_{34}=T_{134}=T_{234}=\emptyset$, jer u suprotnom graf G sadrži kao indukovani podgraf jedan od grafova $G_2, G_1, G_3, G_4, G_5, G_4, G_5, G_1, G_6, G_6$, respektivno. Pored toga je i $T_o=\emptyset$ (inače je bar jedan od grafova G_1, G_2, G_3 i G_4 sadržan u grafu G kao indukovani podgraf. Dakle, svi ovi skupovi, sem eventualno T_3, T_{123}, T_{124} i T_{1234}, su prazni. Dalje ćemo razlikovati sledećih pet podslučajeva:

1^o $T_3=T_{123}=T_{124}=T_{1234}=\emptyset$. Tada je $G=H_1=A_{2,1,1}$.

2^o $T_3 \neq \emptyset$, $T_{123}=T_{124}=T_{1234}=\emptyset$. U ovom slučaju imamo da je $|T_3|=1$, inače je $G_1 \subseteq G$ ili $G_9 \subseteq G$. Dakle, $G=A_{2,1,2}$.

3^o $T_{123} \neq \emptyset$, $T_3=T_{124}=T_{1234}=\emptyset$. Tada skup T_{123} ne sadrži nesusedne čvorove, jer je u suprotnom slučaju $G_4 \subseteq G$. Pošto T_{123} ne sadrži ni trouglove (inače je $G_{14} \subseteq G$), to imamo da je $|T_{123}| \leq 2$ i $G=A_{\ell,1,1}$ $(3 \leq \ell \leq 4)$.

4^o $T_{124} \neq \emptyset$, $T_3=T_{123}=T_{1234}=\emptyset$. Tada je podgraf H grafa G indukovan skupom čvorova T_{124} ili graf K_2 ili graf bez grana. Zaista, u suprotnom slučaju graf G sadrži bar jedan od grafova G_4, G_{12} i G_{13} kao indukovani podgraf, što je nemoguće. Dakle, $G=H_3$ ili $G=A_{2,m,1}$ $(m \geq 2)$.

5^o $T_{1234} \neq \emptyset$, $T_3=T_{123}=T_{124}=\emptyset$. Podgraf grafa G indukovan skupom čvorova T_{1234} je kompletan graf, inače je $G_{13} \subseteq G$. Otuda je $G=D_n$ $(n \geq 5)$.

Sada ćemo odrediti relacije (povezanost granama) izmedju skupova T_3, T_{123}, T_{124} i T_{1234} u grafu G i predstaviti ih pomoću tabele 4.1. Ako su odgovarajući skupovi kompletno susedni kompletno nesusedni ili nekoegzistentni upotrebićemo simbole 1,0 ili $\emptyset$, respektivno. Na primer, skupovi T_3 i T_{123} su nekoegzistantni, pošto je u suprotnom slučaju $G_4 \subseteq G$ ili $G_{11} \subseteq G$.

	T_{123}	T_{124}	T_{1234}
T_3	$\emptyset$	1	$\emptyset$
T_{123}		1	$\emptyset$
T_{124}			0

Tabela 4.1

Uzimajući u obzir sve moguće kombinacije sa skupovima T_3, T_{123}, T_{124} i T_{1234} možemo razlikovati sledeća tri podslučaja:

6^o $T_3 \neq \emptyset$, $T_{124} \neq \emptyset$, $T_{123}=T_{1234}=\emptyset$. Tada, uzimajući u obzir 2^o i 4^o, možemo da zaključimo da je $G=A_{2,m,2}$ $(m \geqslant 2)$. Zaista, u suprotnom slučaju je $G_{11} \subseteq G$, što je nemoguće.

7^o $T_{123} \neq \emptyset$, $T_{124} \neq \emptyset$, $T_3=T_{1234}=\emptyset$. Ako je podgraf indukovan skupom čvorova T_{124} graf K_2, tada je $G_{13} \subseteq G$, što je nemoguće. Neka se T_{124} sastoji od $n \geqslant 1$ izolovanih čvorova. Tada, ako je $|T_{123}|=2$ imaćemo da je $G_{15} \subseteq G$, što je nemoguće. Ako je $|T_{123}|=1$, dobijamo da je $G=A_{3,m,1}$ $(m \geqslant 2)$.

8^o $T_{124} \neq \emptyset$, $T_{1234} \neq \emptyset$, $T_3=T_{123}=\emptyset$. Ako je podgraf indukovan skupom čvorova T_{124} graf K_2, imamo da je $G_1 \subseteq G$, što je nemoguće. Ako se skup T_{124} sastoji od $n \geqslant 1$ izolovanih čvorova, tada je $G_5 \subseteq G$ ili $G_{12} \subseteq G$, pod pretpostavkom da je $|T_{124}| > 1$ ili $|T_{1234}| > 1$, što je nemoguće. U preostalom slučaju očigledno imamo da je $G=H_3$.

<u>Slučaj 2</u>. Graf G sadrži H_2 a ne sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Tada je očigledno $T_{12}=T_{23}=T_{34}=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=$ $=T_{1234}=\emptyset$. Pored toga je $T_1=T_4=\emptyset$, pošto je u suprotnom slučaju $G_1 \subseteq G$. Takodje je $T_2=T_3=\emptyset$ (inače je $G_8 \subseteq G$) i $T_{14}=\emptyset$ (inače je $G_7 \subseteq G$). Dakle, svi skupovi sem eventualno T_{13} i T_{24} moraju biti prazni.

Skupovi T_{13} i T_{24} mogu da sadrže samo izolovane čvorove, s obzirom da $H_1 \not\subseteq G$. Dalje, svaki čvor iz T_{13} mora biti susedan sa svakim čvorom iz skupa T_{24} (inače je $G_1 \subseteq G$).

Na ovaj način odredili smo strukturu posmatranog grafa. Uzimajući u obzir sve moguće kombinacije i vodećiračuna o simetričnosti, razlikovaćemo sledeće podslučajeve:

1° $T_{13}=T_{24}=\emptyset$. Tada je $G=H_2=B_{1,1}$.

2° $T_{13}\neq\emptyset$, $T_{24}=\emptyset$. Tada je $G=B_{1,n}$ $(n\geqslant 2)$.

3° $T_{13}\neq\emptyset$, $T_{24}\neq\emptyset$. Ako je $|T_{13}|=|T_{24}|=1$, imamo da je $G=B_{2,2}$. Ako je $|T_{13}|>1$ ili $|T_{24}|>1$, dobijamo da je $G_{16}\subseteq G$, što je nemoguće.

Ovo zajedno sa lemama 4.4–4.6 kompletira dokaz teoreme. $\square$

5. GRAFOVI SA OGRANIČENIM REDUKOVANIM ENERGIJAMA

Energija $E(G)$ grafa G jednaka je zbiru apsolutnih vrednosti svih sopstvenih vrednosti grafa G. Neki rezultati koji se odnose na energiju grafa izneti su u radovima [15] i [49].

U ovom poglavlju definišu se dve spektralne karakteristike posredstvom veličine $E(G)$.

5.1 O grafovima čija redukovana pozitivna energija nije veća od 1/2

Definicija 5.1 Redukovana pozitivna energija $RE^+(G)$ grafa G po definiciji je jednaka

$$RE^+(G) = \frac{1}{2} E(G) - \lambda_1^+(G) = \lambda_2^+(G) + \lambda_3^+(G) + \ldots ,$$

gde su $\lambda_1^+(G) \geq \lambda_2^+(G) \geq \lambda_3^+(G) \geq \ldots$ pozitivne sopstvene vrednosti grafa G. $\Box$

Neka je H indukovani podgraf grafa G tj. $H \subseteq G$. U skladu sa teoremom 4.1, sledi da je $\lambda_1^+(H) \leq \lambda_1^+(G)$, $\lambda_2^+(H) \leq \lambda_2^+(G), \ldots$ tj. $RE^+(H) \leq RE^+(G)$. Otuda se za proizvoljan realan broj $L > 0$ može postaviti problem opisivanja onih grafova za koje je $RE^+(G) \leq L$. U ovom odeljku naći ćemo sve takve grafove za $L = 1/2$.

Najpre navodimo tri jednostavne leme koje ćemo koristiti u dokazu glavne teoreme.

Neka je $V_{m,n_1,\ldots,n_k}$ graf dobijen spajanjem izolovanog čvora x sa tačno jednim karakterističnim podskupom (reda m) kompletnog $(k+1)$-partitnog grafa $K_{m,n_1,\ldots,n_k}$.

Lema 5.1 Graf $G=V_{m,n_1,\ldots,n_k}$ ima osobinu $RE^+(G)\leq\frac{1}{2}$ ako i samo ako važi sledeća nejednakost

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{2n_i}{2n_i+1}\leq\frac{4m-1}{2m-1} \quad . \tag{1}$$

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.2 dobijamo da graf $G=V_{m,n_1,\ldots,n_k}$ ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti i da je $RE^+(G)\leq 1/2$ ako i samo ako je $\lambda_2^+(G)\leq 1/2$. Pored toga, imamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda}{n_i}+1\right)\left\{\left(\frac{\lambda^2}{m}-1\right)+\left(1-\lambda\left(\frac{\lambda}{m}+1\right)\right)\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\lambda+n_i}\right\} = 0 \ .$$

Pošto je $\lambda_1^+(G)\geq 1$ a $f(0)=k-1>0$ sledi da je $\lambda_2^+(G)\leq 1/2$ ako i samo ako je $f(1/2)\leq 0$. Odavde dokaz teoreme sledi neposredno. □

Vodeći računa o simetričnosti zaključujemo da nejednakost (1) važi ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1° $k=1,\ m\geq 1,\ n_1\geq 1$

2° $k=2,\ m\geq 1,\ n_1\geq 1,\ n_2\geq 1$

3° $k=3,\ m=1,\ n_1\geq 1,\ n_2\geq 1,\ n_3\geq 1$

4° $k=3,\ m=2,\ n_1=1,\ n_2=1,\ n_3\geq 1$

5° $k=3,\ m=2,\ n_1=1,\ n_2=2,\ 2\leq n_3\leq 3$

6° $k=3,\ m=3,\ n_1=1,\ n_2=1,\ 1\leq n_3\leq 3$

7° $k=3,\ m=4,\ n_1=1,\ n_2=1,\ 1\leq n_3\leq 2$

8° $k=3,\ m\geq 5,\ n_1=1,\ n_2=1,\ n_3=1$

9° $k=4,\ m=1,\ n_1=1,\ n_2=1,\ n_3=1,\ n_4\geq 1$

10° $k=4,\ m=1,\ n_1=1,\ n_2=1,\ n_3=2,\ 2\leq n_4\leq 3$.

Neka je dalje $W_{m_1,m_2,n_1,\ldots,n_k}$ graf dobijen spajanjem izolovanog čvora x sa tačno k $(k\geq 2)$ karakterističnih podskupova (reda $n_1,\ldots,n_k$) kompletnog $(k+2)$-partitnog grafa $K_{m_1,m_2,n_1,\ldots,n_k}$.

Lema 5.2 Graf $G=W_{m_1,m_2,n_1,\dots,n_k}$ $(k\geq 2)$ ima osobinu $RE^{\pm}(G)\leq 1/2$ ako i samo ako važi sledeća nejednakost

$$(2)\qquad \sum_{i=1}^{k}\frac{2n_i}{2n_i+1}\leq\frac{4m_1m_2-1}{4m_1m_2-2(m_1+m_2)-3}\ .$$

Dokaz. Ponovo na osnovu teoreme 4.2 dobijamo da graf $G=W_{m_1,m_2,n_1,\dots,n_k}$ ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti i da je $RE^{+}(G)\leq 1/2$ ako i samo ako je $\lambda_2^{+}(G)\leq 1/2$. Takodje imamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

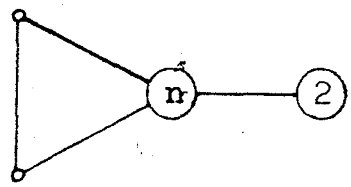
$$f(\lambda)=\frac{(-1)^{k-1}}{m_1m_2}\prod_{i=1}^{k}\left(\frac{\lambda}{n_i}+1\right)g(\lambda)=0\ ,$$

gde je

$$g(\lambda)=(\lambda^3-m_1m_2\lambda)-(\lambda^3+(m_1+m_2+1)\lambda^2+m_1m_2\lambda-m_1m_2)\sum_{i=1}^{k}\frac{n_i}{\lambda+n_i}\ .$$

Pošto je $\lambda_1^{+}(G)\geq 1$ a $g(0)=m_1m_2k>0$, to sledi da je $\lambda_2^{+}(G)\leq 1/2$ ako i samo ako je $g(1/2)\leq 0$. Odavde neposredno dobijamo da je poslednji uslov zadovoljen ako i samo ako važi nejednakost (2). □

Dalje, označimo sa Z_n sledeći graf



Lema 5.3 Graf $G=Z_n$ ima osobinu $RE^{+}(G)\leq 1/2$ za svako n. □

Dokaz ove leme je sličan dokazima prethodnih lema pa ga zbog toga izostavljamo.

Sada ćemo navesti glavnu teoremu ovog odeljka.

Teorema 5.1 Graf G bez izolovanih čvorova ima osobinu $RE^{+}(G)\leq 1/2$ ako i samo ako važi jedan od sledećih uslova:

(i) G je kompletan multipartitan graf;

(ii) $G = Z_n$;

(iii) $G = V_{m,n_1,\ldots,n_k}$ ($k \geqslant 2$ i važi nejednakost (1));

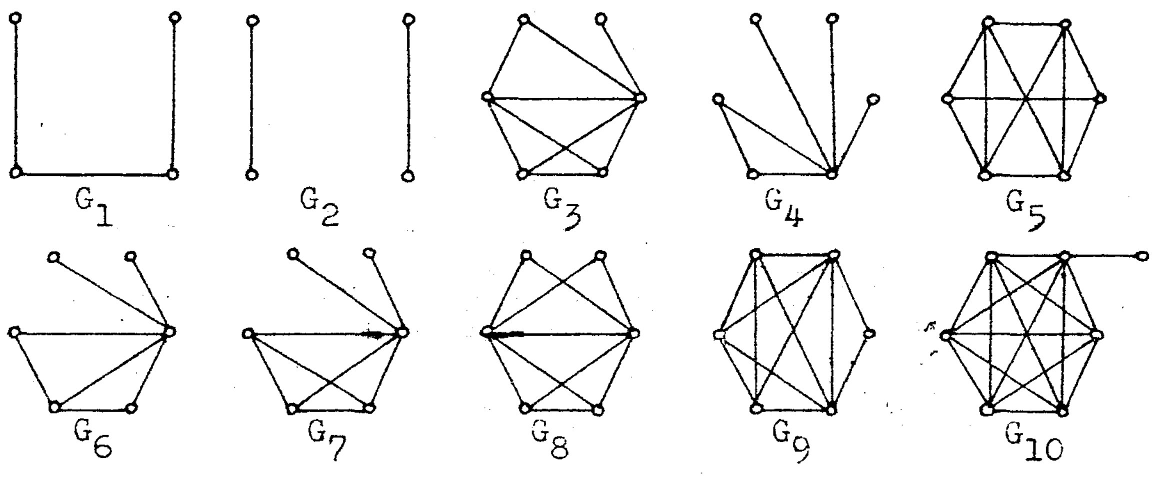
(iv) $G = W_{m_1,m_2,n_1,\ldots,n_k}$ ($m_1 \leqslant m_2$, $k \geqslant 2$) i jedan od sledeća dva uslova važi

a) $m_1 = 1$, $m_2 \leqslant 2$;

b) $m_1 > 1$ ili $m_2 > 2$, i važi nejednakost (2).

Dokaz. Ako je G nepovezan graf bez izolovanih čvorova, tada je $RE^+(G) \geqslant \lambda_2^+(G) \geqslant 1$. Dakle, svaki graf sa osobinom $RE^+(G) \leqslant 1/2$ mora biti povezan.

Neka je G povezan graf čija redukovana pozitivna energija nije veća od 1/2. Da opišemo graf G koristićemo metod zabranjenih grafova. Pomoću teoreme 4.1 zaključujemo da G ne sadrži nijedan od grafova G_1-G_{10} sa sl. 5.1 (kao indukovani podgraf) pošto oni imaju redukovanu pozitivnu energiju veću od 1/2.



Sl. 5.1

Ako graf G ima tačno jednu pozitivnu sopstvenu vrednost tada je on kompletan multipartitan graf i $RE^+(G)=0$.

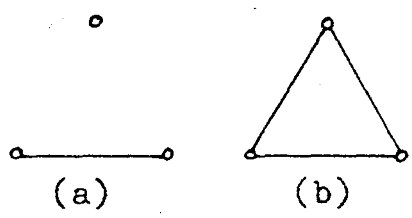
Ako G ima bar dve pozitivne sopstvene vrednosti, na osnovu leme 4.7 zaključujemo da G sadrži indukovani podgraf H_1

sa sl. 4.4[*]. Neka je $T_{i_1 \ldots i_k}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 4;\ 1 \leq k \leq 4)$ skup čvorova iz $V(G)\setminus V(H_1)$ koji su susedni tačno čvorovima $i_1, \ldots, i_k$ grafa H_1. Dalje, neka je T_0 skup čvorova iz $V(G)\setminus V(H_1)$ koji nisu susedni nijednom čvoru grafa H_1.

Tada je $T_1=T_2=T_4=T_{12}=T_{14}=T_{24}=T_{134}=T_{234}=\emptyset$, $T_{34}=\emptyset$ i $T_0=\emptyset$, pošto u suprotnom slučaju graf G sadrži G_1, G_2 i G_1 ili G_3 kao indukovani podgraf, respektivno.

Dalje je $|T_3| \leq 1$, inače graf G sadrži G_2 ili G_4 kao indukovani podgraf. Skupovi T_{13}, T_{23} i T_{124} sadrže samo izolovane čvorove, pošto je u suprotnom slučaju $G_3 \subseteq G$ ili $G_5 \subseteq G$.

Skup T_{1234} ne sadrži indukovani podgraf dat na sl. 5.2 (a) (inače je $G_5 \subseteq G$) i relacija nesusednosti čvorova skupa T_{1234} mora biti tranzitivna. Otuda je graf indukovan skupom čvorova T_{1234} ili graf bez grana ili kompletan multipartitan graf.



Sl. 5.2

Pored toga, skup T_{123} ne sadrži grafove (a) i (b) sa sl. 5.2 kao indukovane podgrafove (inače je $G_3 \subseteq G$ ili $G_{10} \subseteq G$). Zbog toga je graf indukovan skupom čvorova T_{123} ili graf bez grana ili kompletan bipartitan graf.

Sada ćemo odrediti relacije izmedju skupova $T_3, T_{13}, T_{23}, T_{123}, T_{124}$ i T_{1234} u grafu G i predstaviti ih pomoću tabele 5.1. Ako su odgovarajući skupovi kompletno susedni, kompletno nesusedni ili nekoegzistentni upotrebićemo simbole 1,0 ili $\emptyset$, respektivno. Na primer, skupovi T_3 i T_{13} su nekoegzistentni, pošto je u suprotnom slučaju $G_1 \subseteq G$ ili $G_6 \subseteq G$.

[*]Graf G ne može da sadrži graf H_2 sa sl. 4.4 (kao indukovani podgraf), pošto je $RE^+(H_2) > 1/2$.

	T_{13}	T_{23}	T_{123}	T_{124}	T_{1234}
T_3	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	1	$\emptyset$
T_{13}		1	1	1	1
T_{23}			1	1	1
T_{123}				1	$\emptyset$
T_{124}					1

Tabela 5.1

Pomoću ove tabele zaključujemo da je $1 \sim T_{23}$, $2 \sim T_{13}$, $3 \sim T_{124}$ i $4 \sim T_3$, pod pretpostavkom da su skupovi T_{23}, T_{13}, T_{124} i T_3 neprazni. Pored toga imamo da je $V(G) \setminus V(H_1)$ podskup jednog od sledećih skupova: $T_3 \cup T_{124}, T_{13} \cup T_{23} \cup T_{123} \cup T_{124}$ i $T_{13} \cup T_{23} \cup$ $\cup T_{124} \cup T_{1234}$. Otuda sledi da je G jedan od grafova Z_n, $V_{m,n_1,\dots,n_k}$ $(k \geqslant 2)$ i $W_{m_1,m_2,n_1,\dots,n_k}$ $(m_1 \leqslant m_2,\ k \geqslant 2)$.

Ovo zajedno sa lemama 5.1 - 5.3 kompletira dokaz teoreme. □

5.2 O grafovima čija redukovana negativna energija nije veća od 1

Definicija 5.2 Redukovana negativna energija $RE^-(G)$ grafa G po definiciji je jednaka

$$RE^-(G) = \frac{1}{2}E(G) + \lambda_1^-(G) = |\lambda_2^-(G)| + |\lambda_3^-(G)| + \dots ,$$

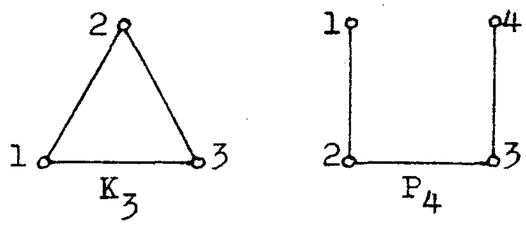
gde su $\lambda_1^-(G) \leqslant \lambda_2^-(G) \leqslant \dots$ negativne sopstvene vrednosti grafa G. □

U ovom odeljku odredićemo sve minimalne grafove sa osobinom da imaju redukovanu negativnu energiju veću od 1. Pored toga, odredićemo sve grafove čija je redukovana negativna energija manja ili jednaka 1. Ova poslednja osobina grafova je heriditarna, što se pomoću teoreme 4.1 lako pokazuje.

Na početku navodimo bez dokaza dve jednostavne leme.

Lema 5.4 ([50]) Graf koji sadrži bar jednu granu je kompletan bipartitan ako i samo ako ima tačno jednu negativnu sopstvenu vrednost. □

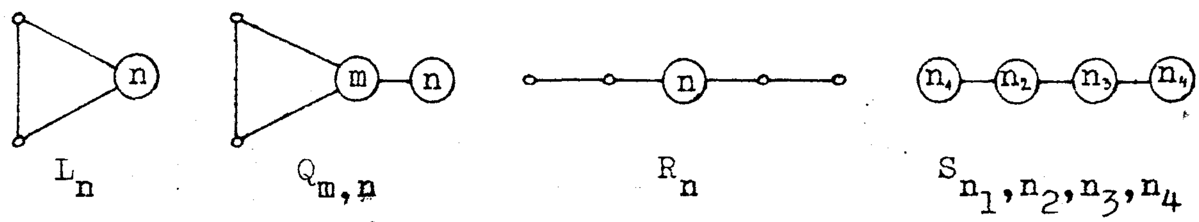
Lema 5.5 ([50]) Povezan graf G ima bar dve negativne sopstvene vrednosti ako i samo ako sadrži jedan od grafova K_3 i P_4 kao indukovani podgraf (sl. 5.3). □



Sl. 5.3

U nastavku ćemo dokazati još nekoliko jednostavnih lema.

Označimo sa $L_n, Q_{m,n}, R_n$ i S_{n_1,n_2,n_3,n_4} sledeće grafove:



Lema 5.6 Graf $G=L_n$ ima osobinu $RE^-(G) \leq 1$ za svako $n \geq 1$.

Dokaz. Na osnovu teoreme 4.2 dobijamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \frac{\lambda+1}{n}(\lambda^2 - \lambda - 2n) = 0 .$$

Odavde zaključujemo da graf G ima tačno dve negativne sopstvene vrednosti i da je $\lambda_1^-(G) \leq -1$, $\lambda_2^-(G) = -1$ za svako $n \geq 1$. Dakle, $RE^-(G) = 1$. □

Lema 5.7 Graf $G=Q_{m,n}$ ima osobinu $RE^-(G) \leq 1$ za svako $m \geq 1$ i $n \geq 1$. □

Lema 5.8 Graf $G=R_n$ ima osobinu $RE^-(G)\leq 1$ za svako $n\geq 1$. □

Dokazi poslednje dve leme su slični dokazu leme 5.6 pa su zbog toga izostavljeni.

Lema 5.9 Graf $G=S_{n_1,n_2,n_3,n_4}$ ima osobinu $RE^-(G)\leq 1$ ako i samo ako važi nejednakost

$$n_1n_2n_3n_4 - n_1n_2 - n_2n_3 - n_3n_4 + 1 \leq 0 . \tag{1}$$

Dokaz. Pomoću teoreme 4.2 dobijamo da su ne-nula sopstvene vrednosti grafa G odredjene jednačinom

$$f(\lambda) = \frac{1}{n_1n_2n_3n_4}(\lambda^4 - (n_1n_2+n_2n_3+n_3n_4)\lambda^2 - n_1n_2n_3n_4) = 0 .$$

Odavde zaključujemo da graf G ima tačno dve negativne sopstvene vrednosti i da je $RE^-(G)\leq 1$ ako i samo ako nejednakost (1) važi.

Vodeći računa o simetričnosti može se pokazati da nejednakost (1) važi ako i samo ako je ispunjen jedan od uslova:

1^o $n_1=1$, $n_4=1$, $n_2\geq 1$, $n_3\geq 1$

2^o $n_1=1$, $n_4\geq 2$, $n_2=1$, $n_3\geq 1$

3^o $n_1=1$, $n_4=2$, $n_2=2$, $n_3\geq 1$

4^o $n_1=1$, $n_4=2$, $n_2=3$, $n_3\leq 2$

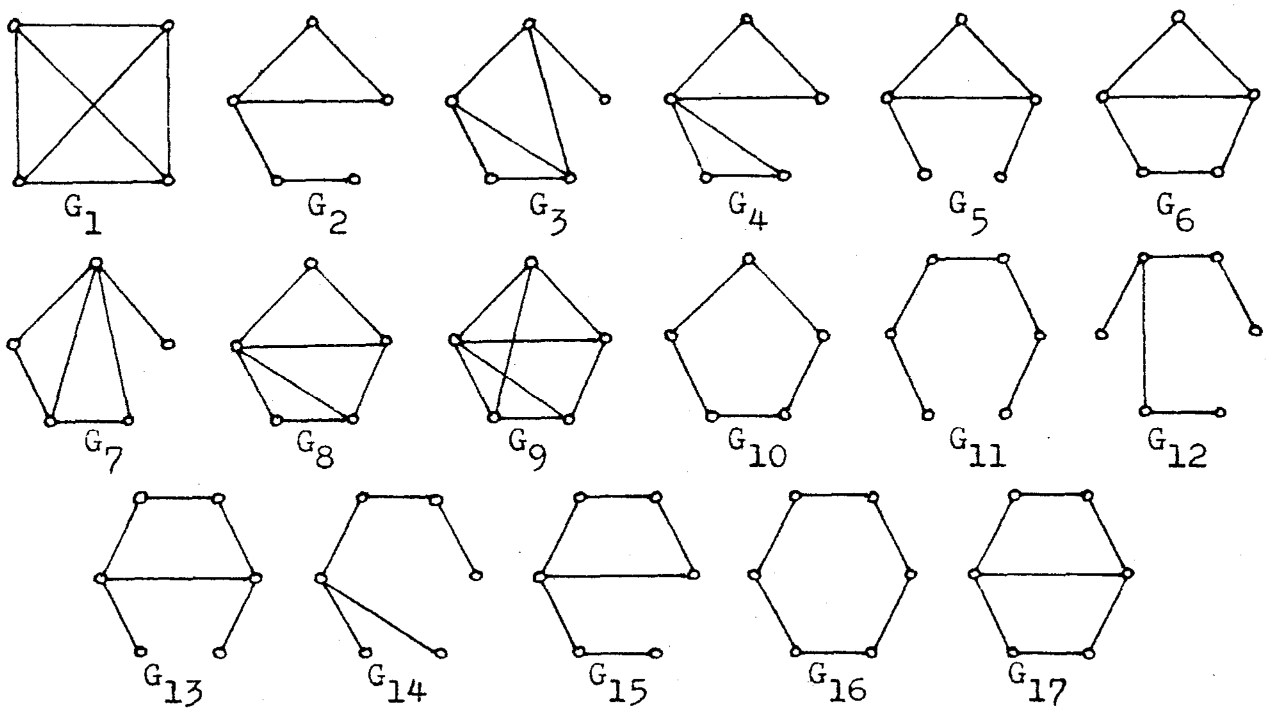
5^o $n_1=1$, $n_4=2$, $n_2\geq 4$, $n_3=1$

6^o $n_1=1$, $n_4=3$, $n_2=2$, $n_3=1$

7^o $n_1=2$, $n_4=2$, $n_2=1$, $n_3=1$. □

Sada ćemo odrediti sve povezane minimalne grafove sa osobinom $RE^-(G)>1$.

Teorema 5.2 Postoji tačno 24 povezanih minimalnih grafova sa redukovanom negativnom energijom većom od 1. To su grafovi sa sl. 5.4 i grafovi iz skupa $S'=\{G=S_{n_1,n_2,n_3,n_4} \mid (n_1,n_2,n_3,n_4)\in\{(1,2,1,4),(1,2,2,3),(1,3,1,3),(1,3,3,2),(1,4,2,2),(2,1,1,3),(2,2,1,2)\}\}$.



Sl. 5.4

Dokaz. Lako može da se pokaže da su grafovi G_1-G_{17} sa sl. 5.4 i grafovi iz skupa S' minimalni u odnosu na osobinu $RE^-(G) > 1$.

Obrnuto, neka je G povezan minimalan graf sa $RE^-(G) > 1$. Dokazaćemo da je G jedan od grafova sa sl. 5.4 ili jedan od grafova iz skupa S'.

Graf G ima bar dve negativne sopstvene vrednosti i na osnovu leme 5.5 sadrži jedan od grafova sa sl. 5.3 kao indukovani podgraf. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

Slučaj 1. Graf G sadrži K_3 kao indukovani podgraf.

Neka je $T_{i_1 \ldots i_k}$ $(1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq 3,\ 1 \leq k \leq 3)$ skup čvorova iz $V(G) \setminus V(K_3)$ koji su susedni tačno čvorovima $i_1, \ldots, i_k$ grafa K_3. Dalje, neka je T_o skup čvorova iz $V(G) \setminus V(K_3)$ koji nisu susedni nijednom čvoru grafa K_3.

Isključujući simetrične slučajeve, razlikovaćemo sledeće podslučajeve:

1° $T_{123} \neq \emptyset$. Tada je $G_1 \subseteq G$ i otuda je $G=G_1$.

2° $T_0 \neq \emptyset$. Tada je $G_2 \subseteq G$ ili $G_3 \subseteq G$ i G je jedan od grafova G_2, G_3.

Dalje, neka je $T_{123}=T_0=\emptyset$. Ako neki od skupova T_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$ sadrži dva susedna čvora, tada je G_1 pravi indukovani podgraf grafa G, što je suprotno uslovu minimalnosti.

3° Neki od skupova T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ sadrži dva susedna čvora. Tada je $G_4 \subseteq G$ i otuda je $G=G_4$.

Neka skupovi T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ i T_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$ sadrže samo nesusedne čvorove. Ako je tačno jedan od ovih skupova neprazan, tada je $G=L_n$ ili $G=Q_{m,n}$. Prema lemama 5.6 i 5.7 tada je $RE^-(G) \leqslant 1$, što je nemoguće.

Neka su bar dva od ovih skupova neprazni.

4° $T_1 \neq \emptyset$, $T_2 \neq \emptyset$. Tada je $G_5 \subseteq G$ ili $G_6 \subseteq G$ i G je jedan od grafova G_5, G_6.

5° $T_1 \neq \emptyset$, $T_{12} \neq \emptyset$. Tada je $G_7 \subseteq G$ ili $G_8 \subseteq G$ i G je jedan od grafova G_7, G_8.

6° $T_1 \neq \emptyset$, $T_{23} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_3$.

7° $T_{12} \neq \emptyset$, $T_{23} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_8$ ili $G=G_9$.

<u>Slučaj 2</u>. Graf G sadrži P_4 a ne sadrži K_3 kao indukovani podgraf.

Neka $T_{i_1 \ldots i_k}$ i T_0 imaju isto značenje kao u prvom slučaju, samo sada u odnosu na podgraf P_4. Tada je $T_{12}=T_{23}=T_{34}=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=T_{1234}=\emptyset$. Pored toga, skupovi $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{13}, T_{14}$ i T_{24} mogu da sadrže samo izolovane čvorove.

Ponovo isključujući simetrične slučajeve, možemo razlikovati sledeće podslučajeve:

1° $T_{14} \neq \emptyset$. Tada je $G=G_{10}$.

2° $T_0 \neq \emptyset$. Tada je G jedan od grafova G_{11}, G_{12} ili G_{13}.

Dalje, neka je $T_{14}=T_0=\emptyset$.

3^0 $|T_1|\geqslant 2$. Tada je $G=G_{14}$.

4^0 $|T_1|=1$, $T_2\neq\emptyset$. Tada je $G=G_{12}$ ili $G=G_{15}$.

5^0 $|T_1|=1$, $T_3\neq\emptyset$. Tada je $G=G_{14}$.

6^0 $|T_1|=1$, $T_4\neq\emptyset$. Tada je $G=G_{11}$ ili $G=G_{16}$.

7^0 $|T_1|=1$, $T_{24}\neq\emptyset$. Tada je $G=G_{15}$ ili $G=G_{17}$.

Ako je $|T_1|=1$, $T_{13}\neq\emptyset$, tada je ili $G=R_n$ (i prema lemi 5.8 je $RE^-(G)\leqslant 1$) ili G nije minimalan graf, što je nemoguće.

Neka je $T_1=T_4=\emptyset$. Ako je tačno jedan od skupova T_2, T_3, T_{13} i T_{24} neprazan, tada je $G=S_{n_1,1,1,1}$ ili $G=S_{1,n_2,1,1}$ (i prema lemi 5.9 je $RE^-(G)\leqslant 1$), što je nemoguće.

Dakle, neka su bar dva od skupova T_2,T_3,T_{13} i T_{24} neprazna.

8^0 $T_2\neq\emptyset$, $T_3\neq\emptyset$ i ova dva skupa nisu kompletno nesusedna. Tada je $G=G_{13}$.

9^0 $T_2\neq\emptyset$, $T_{13}\neq\emptyset$ i ova dva skupa nisu kompletno susedna. Tada je $G=G_{13}$.

10^0 $T_{13}\neq\emptyset$, $T_{24}\neq\emptyset$ i ova dva skupa nisu kompletno susedna. Tada je $G=G_{17}$.

Ako nijedan od slučajeva $8^0,9^0$ i 10^0 ne važi, tada su jedine moguće relacije izmedju skupova T_2,T_3,T_{13} i T_{24} predstavljene tabelom 5.2.

	T_3	T_{13}	T_{24}
T_2	0	1	0
T_3		0	1
T_{13}			1

Tabela 5.2

Pomoću ove tabele zaključujemo da je $1\sim T_2$, $2\sim T_{13}$,

$3\sim T_{24}$ i $4\sim T_3$, te sledi da je $G=S_{n_1,n_2,n_3,n_4}$.

Odredjivanje minimalnih grafova iz klase grafova S_{n_1,n_2,n_3,n_4} ekvivalentno je odredjivanju grafova koji zadovoljavaju nejednakost

$$n_1n_2n_3n_4 - n_1n_2 - n_2n_3 - n_3n_4 + 1 > 0$$

i čiji svaki pravi indukovani podgraf zadovoljava nejednakost (1). Korišćenjem leme 5.9 možemo da zaključimo da je u ovom slučaju G jedan od grafova iz klase S'.

Ovim je dokaz teoreme završen. □

Sada ćemo odrediti sve nepovezane minimalne grafove sa redukovanom negativnom energijom većom od 1.

Teorema 5.3 Postoje tačno četiri nepovezana minimalna grafa sa osobinom $RE^-(G) > 1$. To su sledeći grafovi:

$$P_3\dot{+}P_3,\ K_2\dot{+}K_3,\ K_2\dot{+}P_4,\ K_2\dot{+}K_2\dot{+}K_2\ .$$

Dokaz. Lako se pokazuje da su grafovi $P_3\dot{+}P_3, K_2\dot{+}K_3, K_2\dot{+}P_4, K_2\dot{+}K_2\dot{+}K_2$ minimalni u odnosu na osobinu $RE^-(G) > 1$.

Neka je G proizvoljan nepovezan minimalan graf sa osobinom $RE^-(G) > 1$. Tada G ne sadrži izolovane čvorove.

Ako graf G ima više od dve komponente povezanosti, tada je $K_2\dot{+}K_2\dot{+}K_2 \subseteq G$ i otuda je $G=K_2\dot{+}K_2\dot{+}K_2$.

Neka graf G ima tačno dve komponente povezanosti tj. $G=G_1\dot{+}G_2$. Ako oba grafa G_1 i G_2 nisu kompletni bipartitni grafovi, tada G nije minimalan graf, što je nemoguće. Na osnovu toga možemo razlikovati sledeća dva slučaja:

1° G_1 i G_2 su kompletni bipartitni grafovi. Tada je $G_i \neq K_2$ $(i=1,2)$. Pored toga, za svaki čvor $v \in V(G_i)$, $G_i - v$ je ili graf K_2 ili graf bez grana. Dakle, $G_1=G_2=P_3$.

2° G_1 je kompletan bipartitan graf a G_2 nije. Na osnovu lema 5.4 i 5.5 graf G_2 sadrži jedan od grafova K_3 i P_4 kao indukovani podgraf. Pored toga, za svaki čvor $v \in V(G_2)$, G_2-v je kompletan bipartitan graf a za svaki čvor $v \in V(G_1)$, G_1-v je graf bez grana. Dakle, $G_1=K_2$ a G_2 je ili graf K_3 ili graf P_4.

Ovo kompletira dokaz. □

Na kraju ćemo odrediti sve grafove čija redukovana negativna energija nije veća od 1.

Teorema 5.4 Graf G bez izolovanih čvorova ima osobinu $RE^-(G) \leq 1$ ako i samo ako jedan od sledećih uslova važi:

(i) G je kompletan bipartitan graf tj. $G=K_{m,n}$;

(ii) $G=L_n$;

(iii) $G=Q_{m,n}$;

(iv) $G=R_n$;

(v) $G=S_{n_1,n_2,n_3,n_4}$ (pri čemu nejednakost (1) važi);

(vi) $G=K_2\dot{+}K_{m,n}$.

Dokaz. Lako može da se pokaže da grafovi (i)-(vi) imaju pomenutu osobinu.

Neka je G proizvoljan povezan graf sa osobinom $RE^-(G) \leq 1$. Ako G ima tačno jednu negativnu sopstvenu vrednost, tada je on kompletan bipartitan graf i $RE^-(G)=0$.

Neka G ima bar dve negativne sopstvene vrednosti. Tada graf G sadrži jedan od grafova K_3 i P_4 (sl. 5.3) kao indukovani podgraf. Da bismo opisali graf G iskoristićemo metodu zabranjenih grafova. Na osnovu teoreme 4.1 zaključujemo da graf G ne sadrži nijedan od grafova G_1-G_{17} sa sl. 5.4 (kao indukovani podgraf), pošto oni imaju osobinu $RE^-(G)>1$. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

Slučaj 1. Graf G sadrži K_3 kao indukovani podgraf.

Neka $T_{i_1 \ldots i_k}$ i T_o imaju isto značenje kao u slučajevima teoreme 5.2.

Tada je $T_{123}=\emptyset$, pošto u suprotnom slučaju graf G sadrži G_1 kao indukovani podgraf, što je nemoguće. Pored toga je $T_o=\emptyset$, inače je $G_2 \subseteq G$ ili $G_3 \subseteq G$. Skupovi T_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ i T_{ij} $(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$ ne sadrže susedne čvorove (inače je $G_1 \subseteq G$ ili $G_4 \subseteq G$).

Sada ćemo odrediti relacije izmedju skupova $T_1, T_2, T_3, T_{12}, T_{13}$ i T_{23} u grafu G i predstaviti ih pomoću tabele 5.3.

	T_2	T_3	T_{12}	T_{13}	T_{23}
T_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	1
T_2		$\emptyset$	$\emptyset$	1	$\emptyset$
T_3			1	$\emptyset$	$\emptyset$
T_{12}				$\emptyset$	$\emptyset$
T_{13}					$\emptyset$

Tabela 5.3

Tako, na primer, skupovi T_1 i T_2 nisu koegzistentni, pošto je u suprotnom slučaju $G_5 \subseteq G$ ili $G_6 \subseteq G$.

Na osnovu ove tabele imamo da je $1 \sim T_{23}$, $2 \sim T_{13}$ i $3 \sim T_{12}$. Dakle, zaključujemo da je $G=L_n$ ili $G=Q_{m,n}$.

<u>Slučaj 2</u>. Graf G sadrži P_4 a ne sadrži K_3 kao indukovani podgraf.

Tada je $T_{12}=T_{23}=T_{34}=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=T_{1234}=\emptyset$ a skupovi $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{13}, T_{14}$ i T_{24} mogu sadržati samo izolovane čvorove.

Dalje je $T_{14}=\emptyset$, inače je $G_{10} \subseteq G$. Pored toga je i $T_o=\emptyset$, pošto je u suprotnom $G_{11} \subseteq G$, $G_{12} \subseteq G$ ili $G_{13} \subseteq G$. Takodje je $|T_1| \leqslant 1$ i $|T_4| \leqslant 1$, inače je $G_{14} \subseteq G$.

Slično kao u prvom slučaju utvrdjivanjem odnosa izmedju skupova $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{13}$ i T_{24} dobijamo tabelu 5.4.

	T_2	T_3	T_4	T_{13}	T_{24}
T_1	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	0	$\emptyset$
T_2		0	$\emptyset$	1	0
T_3			$\emptyset$	0	1
T_4				$\emptyset$	0
T_{13}					1

Tabela 5.4

Pomoću ove tabele zaključujemo da je $1 \sim T_2$, $2 \sim T_{13}$, $3 \sim T_{24}$ i $4 \sim T_3$ te sledi da je $G=R_n$ ili $G=S_{n_1,n_2,n_3,n_4}$.

Ovo zajedno sa lemama 5.6-5.9 kompletira dokaz teoreme za povezane grafove.

Neka je dalje G nepovezan graf sa osobinom $RE^-(G) \leq 1$. Tada graf G mora imati tačno dve komponente povezanosti od kojih je svaka kompletan bipartitan graf. Pored toga, bar jedna komponenta mora biti graf K_2.

Ovim je dokaz teoreme 5.4 završen. □

6. NEKE KLASE GRAFOVA SA MALIM BROJEM POZITIVNIH SOPSTVENIH VREDNOSTI

Kao što je poznato J. H. Smith [37] je dao kompletnu karakterizaciju grafova koji imaju tačno jednu pozitivnu sopstvenu vrednost. Slična karakterizacija grafova koji imaju tačno p pozitivnih sopstvenih vrednosti ($p \geqslant 2$) je još uvek nerešen problem. U ovom poglavlju odredićemo sve povezane grafove sa tačno p pozitivnih sopstvenih vrednosti ($p=2,3,4$) u nekim klasama grafova (stabla i grafovi sa tačno jednom, dve ili tri konture). Osvrnućemo se i na problem opisivanja strukture grafova sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti.

Najpre ćemo dokazati jednu jednostavnu lemu koja je od značaja za razmatranje postavljenih problema. Neka su $n^+(G)$ i $n^-(G)$ brojevi pozitivnih i negativnih sopstvenih vrednosti grafa G, respektivno.

Lema 6.1 Neka je G konačan graf i g njegov kanonički graf. Tada je

$$n^+(G) = n^+(g), \quad n^-(G) = n^-(g) \quad .$$

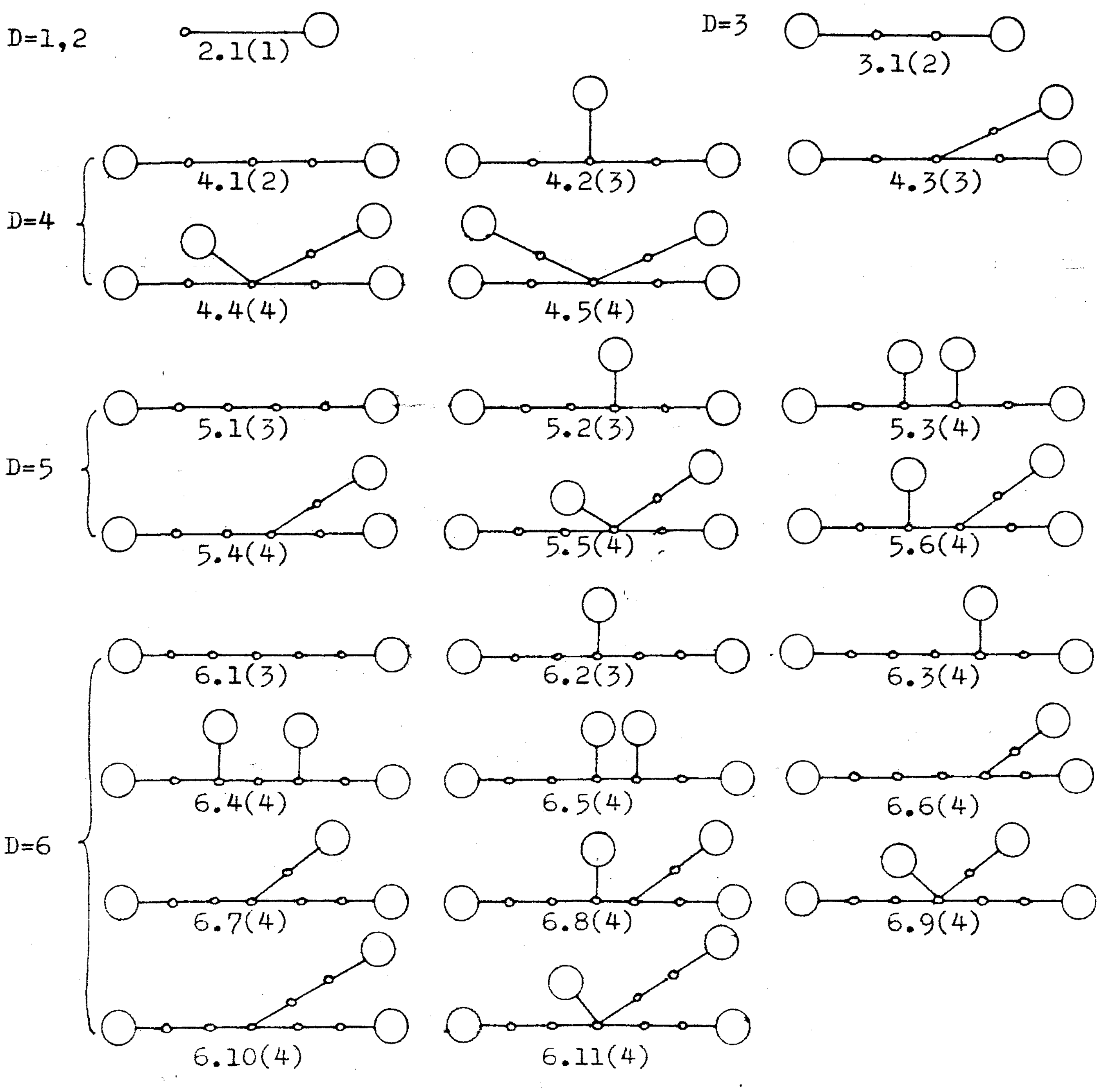
Dokaz. Dokaz je laka posledica teoreme 4.1 i činjenice da se dodavanjem ekvivalentnog čvora nekom od karakterističnih podskupova grafa G multiplicitet nule povećava za jedinicu. □

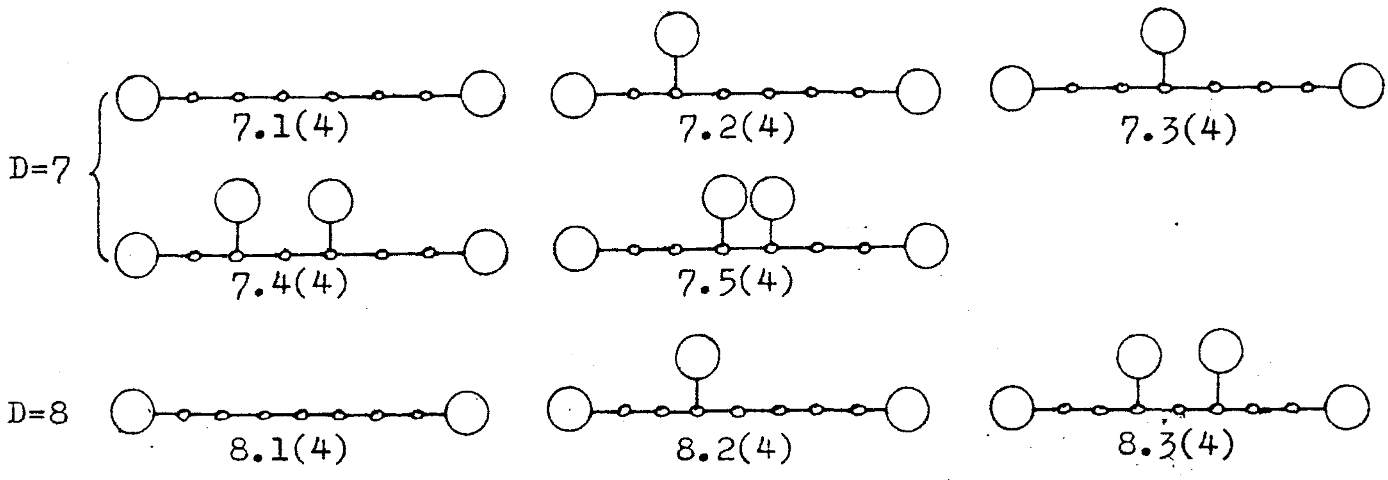
6.1 Stabla

U ovom odeljku odredićemo sva stabla sa tačno p pozitivnih sopstvenih vrednosti (p=2,3,4).

Neka ◯ označava graf bez grana. Linija izmedju tačke (odgovara čvoru) i kruga označava grane izmedju ovog čvora i svih čvorova odgovarajućeg grafa predstavljenog krugom.

Lema 6.2 Stablo G ima manje od 5 pozitivnih sopstvenih vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od klasa grafova predstavljenih na sl. 6.1.





Sl. 6.1

Dokaz. Pomoću leme 6.1 i tabele spektra stabala iz [9], lako može da se pokaže da svaka klasa grafova sa sl. 6.1 ima manje od 5 pozitivnih sopstvenih vrednosti. Odgovarajući broj pozitivnih sopstvenih vrednosti je prikazan za svaku pojedinačnu klasu grafova sa sl. 6.1 u zagradi.

Neka je sada G proizvoljno stablo sa manje od 5 pozitivnih sopstvenih vrednosti. Dokažimo da graf G pripada jednoj od klasa sa sl. 6.1. Pošto je $n^+(G_i)=5$ za svaki graf G_i sa sl. 6.2, na osnovu teoreme 4.1 zaključujemo da graf G ne sadrži nijedan takav graf kao indukovani podgraf.

Označimo sa D(G) dijametar grafa G i razlikujmo sledeće slučajeve:

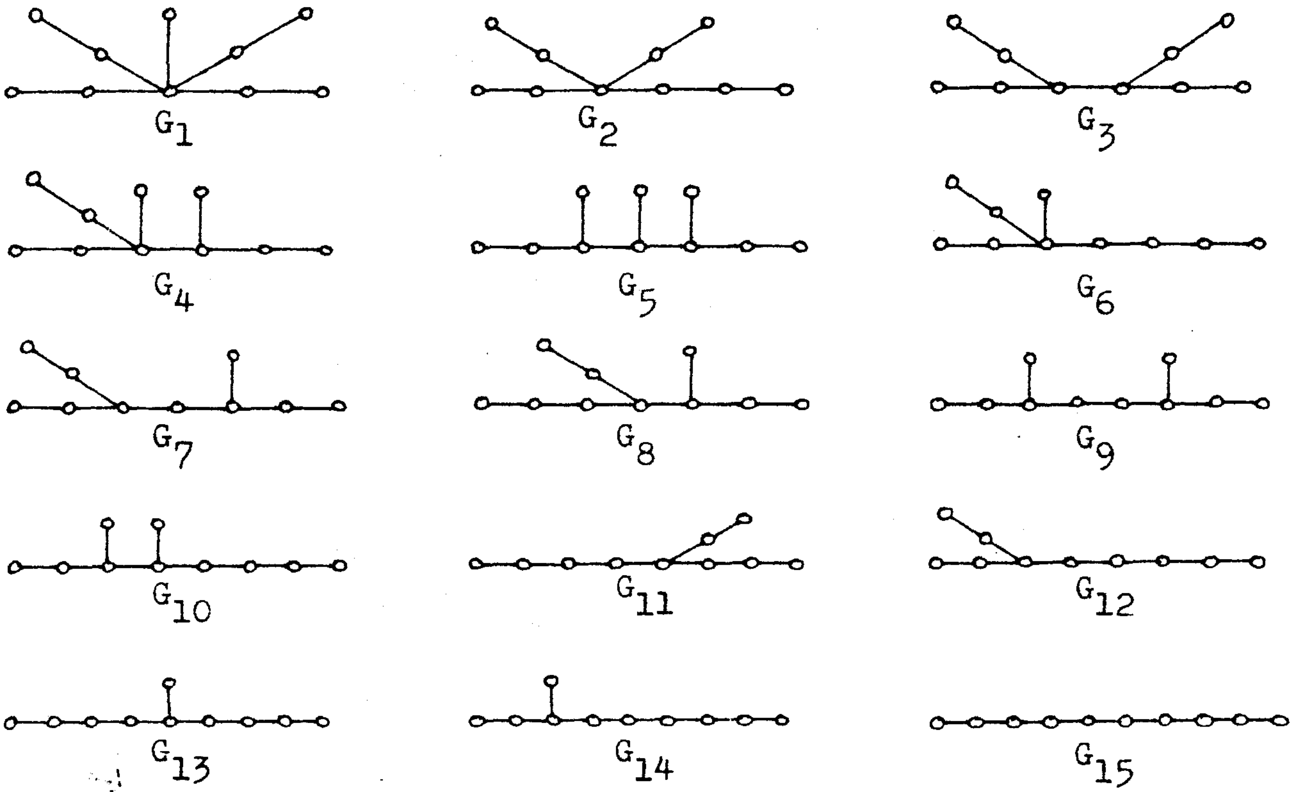
1^o $D(G) \leq 2$. Tada graf G pripada klasi 2.1.

2^o $D(G) = 3$. Tada graf G pripada klasi 3.1.

3^o $D(G) = 4$. Ako graf G ne pripada nijednoj od klasa 4.1-4.5, tada je $G_1 \subseteq G$, što je nemoguće.

4^o $D(G) = 5$. Ako graf G ne pripada nijednoj od klasa 5.1-5.6, tada je bar jedan od grafova G_2, G_3 i G_4 sa sl. 6.2 indukovani podgraf grafa G, što je nemoguće.

5^o $D(G) = 6$. Ako graf G ne pripada nijednoj od klasa 6.1-6.11, tada on sadrži bar jedan od grafova G_2, G_5, G_6, G_7 i



Sl. 6.2

G_8 sa sl. 6.2 kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

6^o $D(G) = 7$. Ako graf G ne pripada nijednoj od klasa 7.1-7.5, tada je najmanje jedan od grafova G_9, G_{10}, G_{11} i G_{12} sa sl. 6.2 indukovani podgraf grafa G, što je nemoguće.

7^o $D(G) = 8$. Ako graf G ne pripada nijednoj od klasa 8.1-8.3, tada on sadrži bar jedan od grafova G_{11}, G_{12}, G_{13} i G_{14} kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

8^o $D(G) \geqslant 9$. Tada je $G_{15} \subseteq G$, što je nemoguće.

Ovim je dokaz leme završen. □

Sledeće tri teoreme neposredno slede iz leme 6.2.

Teorema 6.1 Stablo G ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od klasa 3.1 ili 4.1. □

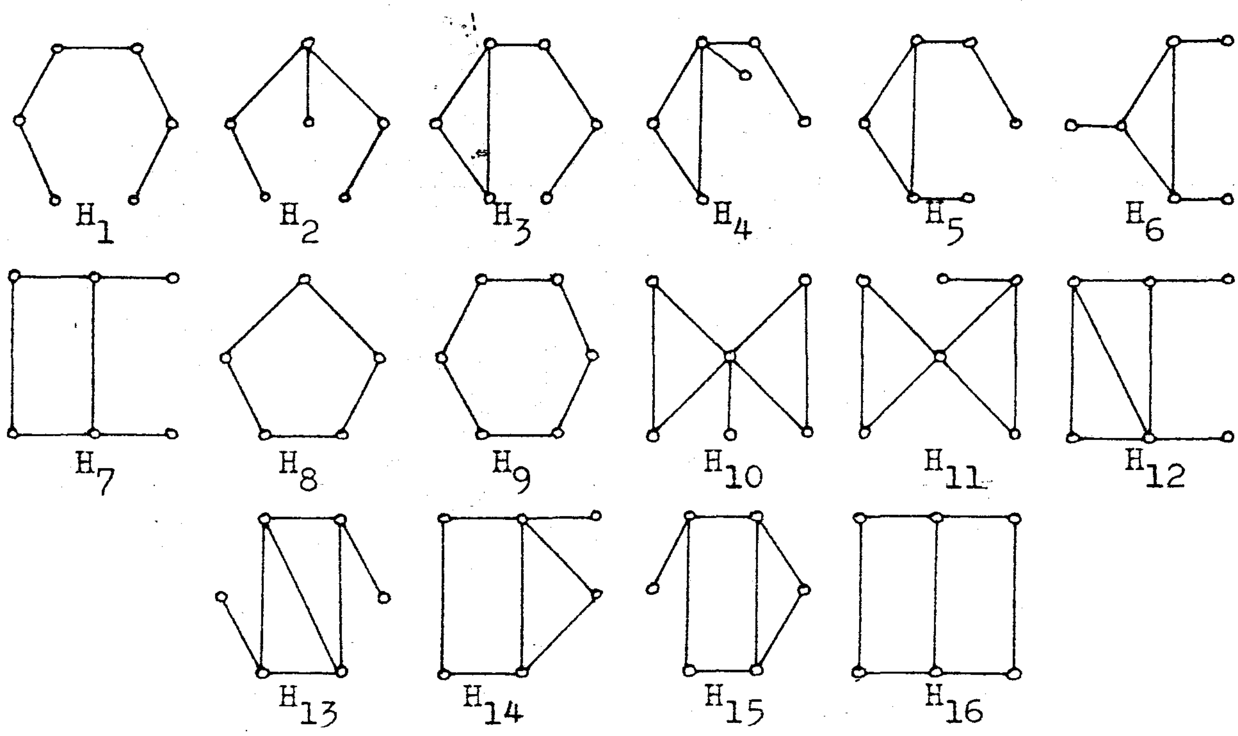
Teorema 6.2 Stablo G ima tačno tri pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od sledećih 6 klasa: 4.2, 4.3, 5.1, 5.2, 6.1 i 6.2. □

Teorema 6.3 Stablo G ima tačno četiri pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od sledećih 23 klasa: 4.4,4.5,5.3-5.6,6.3-6.11,7.1-7.5 i 8.1-8.3. □

6.2 Grafovi sa malim brojem kontura

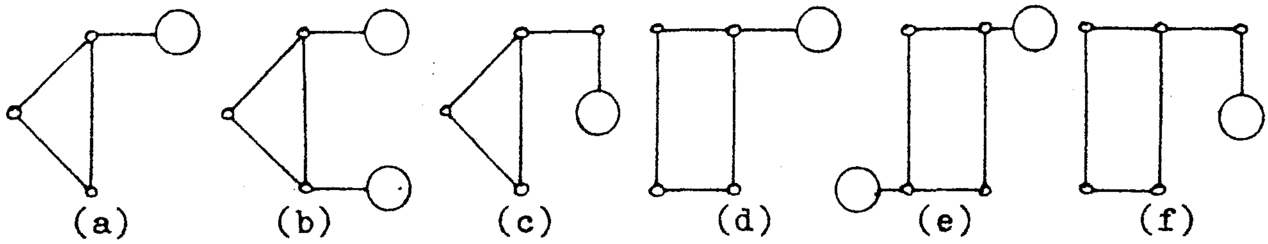
U ovom odeljku odredićemo sve povezane grafove G sa malim brojem (jedna, dve ili tri) kontura i osobinom $n^+(G)=2$.

Neka je G graf sa osobinom $n^+(G)=2$. Pošto svi grafovi sa sl. 6.3 imaju tačno 3 pozitivne sopstvene vrednosti, iz teoreme 4.1 sledi da G ne sadrži nijedan takav graf kao indukovani podgraf. Posebno, graf G ne sadrži konture dužine veće od 4.



Sl. 6.3

Teorema 6.4 Povezan graf G sa tačno jednom konturom ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od klasa sa sl. 6.4.



Sl. 6.4

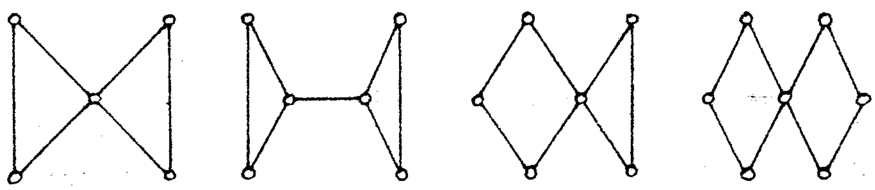
Dokaz. Pomoću leme 6.1 i tabele spektra grafova iz [9] lako proveravamo da je $n^+(G)=2$ za svaki graf G sa sl. 6.4. Dokažimo da su ovi grafovi jedini grafovi sa tačno jednom konturom i osobinom $n^+(G)=2$.

Neka je G proizvoljan takav graf i neka on sadrži trougao kao konturu. Ako G ne pripada nijednoj od klasa (a), (b) i (c) sa sl. 6.4, tada on sadrži bar jedan od grafova H_3, H_4, H_5 i H_6 sa sl. 6.3 kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

Dalje, neka G sadrži kvadrat kao konturu. Ako G ne pripada nijednoj od klasa (d), (e) i (f) sa sl. 6.4, tada je bar jedan od grafova H_1, H_2 i H_7 sa sl. 6.3 indukovani podgraf grafa G, što je nemoguće.

Ovim je dokaz završen. □

Teorema 6.5 Grafovi sa sl. 6.5 su jedini grafovi iz klase grafova sa tačno dve konture koji imaju tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti.



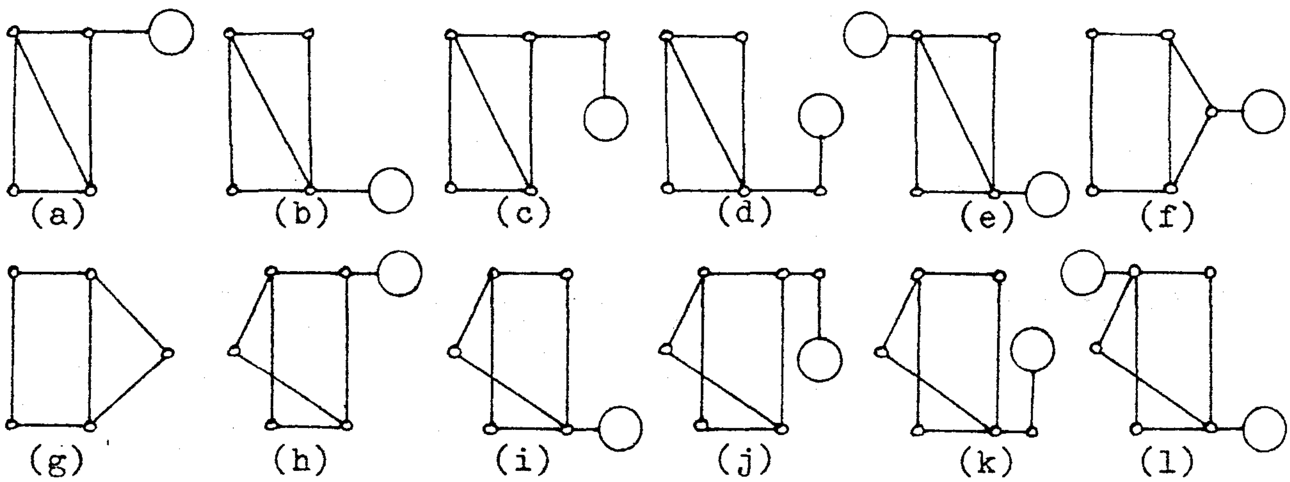
Sl. 6.5

Dokaz. Svi grafovi sa sl. 6.5 imaju tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti.

Neka je G proizvoljan graf sa dve konture C_1 i C_2 i sa osobinom $n^+(G)=2$. Tada konture C_1 i C_2 mogu biti samo trouglovi ili četvorouglovi i mogu imati najviše jedan zajednički čvor.

Ako G nije nijedan od grafova sa sl. 6.5, tada on sadrži bar jedan od grafova $H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_{10}$ i H_{11} sa sl. 6.3 kao indukovani podgraf, što je nemoguće. □

Teorema 6.6 Povezan graf G sa tačno tri konture ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od klasa sa sl. 6.6.



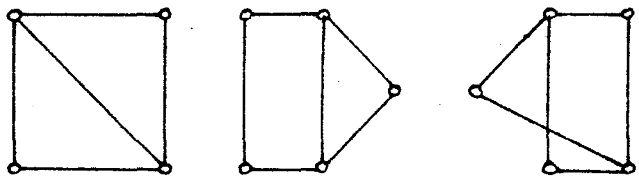
Sl. 6.6

Dokaz. Pomoću leme 6.1 i tabele spektra grafova sa pet i šest čvorova, lako se vidi da svaka klasa grafova sa sl. 6.6 ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. Dokažimo da su to jedine klase grafova sa tačno tri konture i tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti.

Neka je G proizvoljan graf sa tačno tri konture C_1, C_2 i C_3 i osobinom $n^+(G)=2$. Razlikovaćemo sledeća dva slučaja:

1^o Svake dve konture imaju najviše jedan zajednički čvor. Tada graf G sadrži bar jedan od grafova $H_1,H_2,H_3,H_4,H_5,H_{10}$ i H_{11} sa sl. 6.3 kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

2° Konture C_1, C_2 i C_3 imaju neke zajedničke grane. Tada G sadrži jedan od grafova sa sl. 6.7 kao indukovani podgraf. Primetimo da graf H_{16} sa sl. 6.3 ne može biti indukovani podgraf grafa G. Dalje ćemo razlikovati sledeća tri podslučaja:



(a) (b) (c)

Sl. 6.7

2.1° G sadrži graf (a) sa sl. 6.7 kao indukovani podgraf. Ako G ne pripada nijednoj od klasa (a),(b),(c),(d) i (e) sa sl. 6.6, tada on sadrži bar jedan od grafova $H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_{12}$ i H_{13} sa sl. 6.3 kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

2.2° G sadrži graf (b) sa sl. 6.7 kao indukovani podgraf. Ako G ne pripada nijednoj od klasa (f) i (g) sa sl. 6.6, tada je najmanje jedan od grafova H_1, H_2, H_5, H_{14} i H_{15} sa sl. 6.3 sadržan u G kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

2.3° G sadrži graf (c) sa sl. 6.7 kao indukovani podgraf. Ako G ne pripada nijednoj od klasa (h),(i),(j),(k) i (ℓ) sa sl. 6.6, tada on sadrži najmanje jedan od grafova H_1, H_2 i H_7 sa sl. 6.3 kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

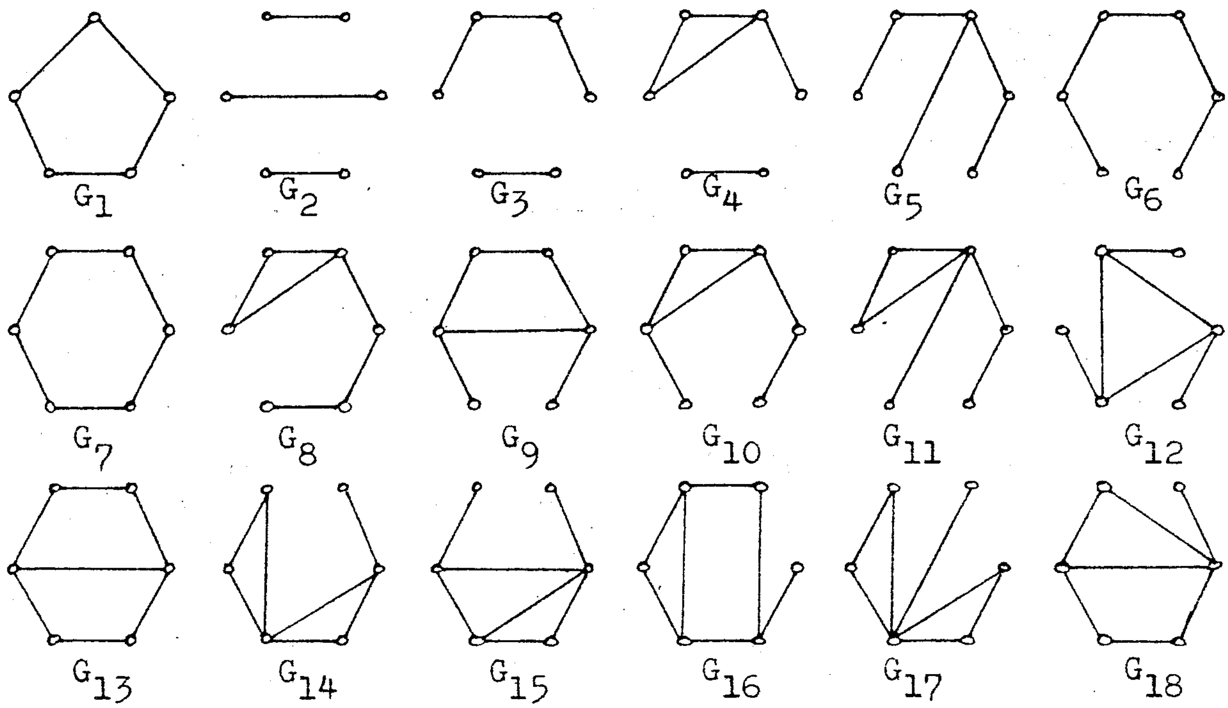
Ovim je dokaz teoreme završen. □

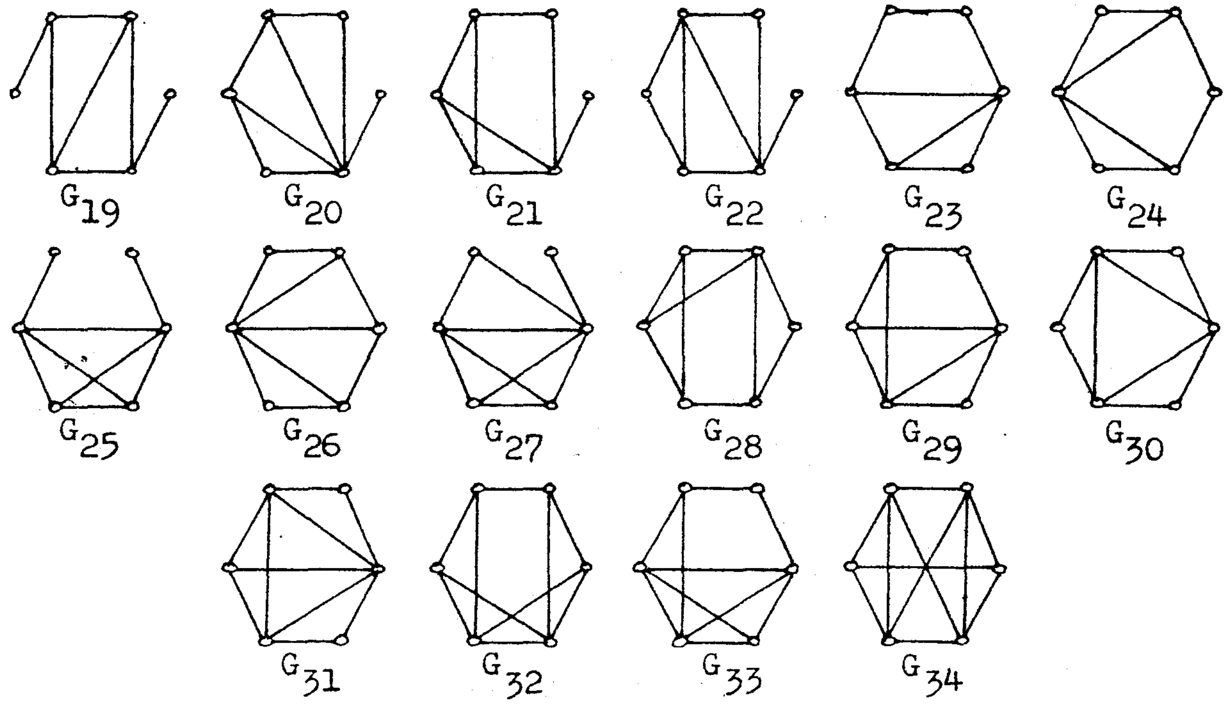
6.3 O strukturi grafova sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti

U ovom odeljku osvrnućemo se na problem opisivanja strukture grafova sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. Napominjemo da taj problem u ovoj tezi nije do kraja rešen.

Na osnovu leme 6.1 zaključujemo da postojanje ekvivalentnih čvorova u grafu ne utiče na broj pozitivnih odnosno broj negativnih sopstvenih vrednosti grafa.

Neka je G proizvoljan povezan graf bez ekvivalentnih čvorova koji ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. Iz tabele spektara grafova sa šest i manje čvorova dobijamo da postoji tačno 34 takvih grafova koji imaju više od dve pozitivne sopstvene vrednosti. To su grafovi G_1-G_{34} predstavljeni na sl. 6.7. Na osnovu teoreme 4.1 zaključujemo da graf G ne sadrži nijedan od ovih grafova kao indukovani podgraf.





Sl. 6.7

S druge strane, kako su kompletni multipartitni grafovi jedini grafovi sa tačno jednom pozitivnom sopstvenom vrednošću [37], iz leme 4.7 sledi da graf G sadrži bar jedan od grafova H_1 i H_2 (sl. 4.4) kao indukovani podgraf. Dakle, možemo razlikovati sledeća dva slučaja.

Slučaj 1. Graf G sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Neka je $T_{i_1 \dots i_k}$ $(1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq 4;\ 1 \leq k \leq 4)$ skup čvorova iz $V(G) \setminus V(H_1)$ koji su susedni tačno čvorovima $i_1, \dots, i_k$ grafa H_1. Neka je dalje T_0 skup čvorova iz $V(G) \setminus V(H_1)$ koji nisu susedni nijednom čvoru grafa H_1.

Lema 6.3 Skupovi $T_1, T_2, T_3, T_4, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{23}, T_{24}, T_{34}, T_{123}, T_{124}, T_{134}, T_{234}, T_{1234}$ i T_0 imaju sledeće osobine:

a) $T_0 = T_3 = T_{13} = T_{23} = T_{124} = \emptyset$;

b) $|T_1| \leq 1$, $|T_2| \leq 1$, $|T_{14}| \leq 1$, $|T_{24}| \leq 1$;

c) $|T_4| = n_1 \geq 0$, $|T_{12}| = n_2 \geq 0$, $|T_{34}| = n_3 \geq 0$, $|T_{123}| = n_4 \geq 0$, $|T_{134}| = n_5 \geq 0$, $|T_{234}| = n_6 \geq 0$, $|T_{1234}| = n_7 \geq 0$;

Podgrafovi indukovani skupom čvorova $T_4, T_{12}, T_{34}, T_{123}, T_{134}, T_{234}$ i T_{1234}, respektivno, su kompletni grafovi.

Dokaz. Skup T_o je prazan. Zaista, u suprotnom slučaju graf G sadrži najmanje jedan od grafova $G_8, G_{10}, G_{11}, G_{14}, G_{15}, G_{16}, G_{19}, G_{21}, G_{22}, G_{25}$ i G_{27} kao indukovani podgraf, što je nemoguće.

Neposrednim proveravanjem zaključujemo kakav može biti medjusobni odnos (povezanost granama) skupova $T_1, T_2, \ldots, T_{1234}$ u grafu G. Odgovarajuće relacije predstavljene su tabelom 6.1. Ako su odgovarajući skupovi kompletno susedni, kompletno nesusedni ili nekoegzistentni upotrebljeni su simboli 1,0 ili $\emptyset$, respektivno. Ako čvorovi dva skupa mogu medjusobno biti i susedni i nesusedni upotrebljen je simbol $*$. Na primer skupovi T_1 i T_2 su

	T_2	T_3	T_4	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{23}	T_{24}	T_{34}	T_{123}	T_{124}	T_{134}	T_{234}	T_{1234}
T_1	1	0	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$	1	0	$\emptyset$	0	0
T_2		0	$\emptyset$	1	1	0	0	$\emptyset$	$\emptyset$	1	0	0	$\emptyset$	0
T_3			1	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1
T_4				0	0	1	0	1	1	$*$	0	$*$	$*$	$*$
T_{12}					1	$\emptyset$	1	$\emptyset$	0	$*$	0	$*$	$*$	$*$
T_{13}						0	1	1	0	1	1	0	1	1
T_{14}							1	1	$\emptyset$	0	0	1	$\emptyset$	1
T_{23}								0	0	1	1	1	0	1
T_{24}									$\emptyset$	0	0	$\emptyset$	1	1
T_{34}										$*$	$\emptyset$	1	1	$*$
T_{123}											1	$*$	$*$	$*$
T_{124}												1	1	1
T_{134}													1	$*$
T_{234}														$*$

Tabela 6.1

kompletno susedni, inače je $G_{12} \subseteq G$, što je nemoguće.

Pomoću ove tabele zaključujemo da je $1 \sim T_{23}$, $2 \sim T_{13}$, $3 \sim T_{124}$ i $4 \sim T_3$, kad god su skupovi T_{23}, T_{13}, T_{124} i T_3 neprazni. Kako graf G nema ekvivalentnih čvorova, to sledi da je $T_3 = T_{13} = T_{23} = T_{124} = \emptyset$.

Dalje, nijedan od preostalih skupova $T_1, T_2, T_4, T_{12}, T_{14}, T_{24}, T_{34}, T_{123}, T_{124}, T_{134}, T_{234}$ i T_{1234} ne sadrži dva nesusedna čvora. Za skupove T_1, T_2, T_{14} i T_{24} to sledi neposredno iz tabele 6.1. Ako su na primer x i y nesusedni čvorovi skupa T_1 tada je $x \sim y$, što je nemoguće.

Neka su x i y dva nesusedna čvora skupa T_4. Ako postoji čvor z susedan sa tačno jednim od ova dva čvora, tada graf G sadrži bar jedan od grafova G_8, G_{10} i G_{14} kao indukovani podgraf, što je nemoguće. Dakle, čvorovi x i y imaju iste susede pa je $x \sim y$. Kako je ovo u kontradikciji sa pretpostavkom da graf G ne sadrži ekvivalentne čvorove, sledi da skup T_4 ne sadrži nesusedne čvorove. Na isti način može se dokazati da skupovi $T_{12}, T_{34}, T_{123}, T_{134}, T_{234}$ i T_{1234} takodje ne sadrže nesusedne čvorove.

Skupovi T_1, T_2, T_{14} i T_{24} ne sadrže takodje susedne čvorove. Zaista, u suprotnom slučaju je $G_{14} \subseteq G$ ili $G_{28} \subseteq G$, što je nemoguće. Na osnovu ovoga i napred rečenog sledi iskaz leme pod b).

Stavljajući da je $|T_4| = n_1 \geq 1$ a da su svi ostali skupovi prazni, možemo naći karakteristični polinom grafa G, čijim ispitivanjem utvrdjujemo da graf G ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. Postupajući na isti način i sa skupovima $T_{12}, T_{34}, T_{123}, T_{134}, T_{234}$ i T_{1234}, respektivno, dolazimo do istog zaključka.

Ovim je dokazana lema pod c). $\square$

Da bi struktura grafa G bila kompletno utvrdjena, potrebno je ustanoviti medjusobne relacije izmedju onih skupova čiji čvorovi mogu biti kako susedni tako i nesusedni. Takvih neodredjenih slučajeva (isključujući simetrične) ima ukupno 11. Kod nekih od njih lako se utvrdjuje medjusobna povezanost čvorova. To su sledeći slučajevi: T_4-T_{123}, T_4-T_{134}, T_{12}-T_{123}, T_{12}-T_{134} i T_{134}-T_{1234}.

Svaki čvor skupa T_4 može biti susedan sa najviše jednim čvorom skupa T_{123} i obrnuto. Zaista, u suprotnom slučaju je $G_{28} \subseteq G$ ili $G_{33} \subseteq G$, što je nemoguće. Slično može da se pokaže da svaki čvor skupa T_4 može biti nesusedan sa najviše jednim čvorom skupa T_{134} i obrnuto, svaki čvor skupa T_{12} može biti nesusedan sa najviše jednim čvorom skupa T_{123} i obrnuto, svaki čvor skupa T_{12} može biti susedan sa najviše jednim čvorom skupa T_{134} i obrnuto, i svaki čvor skupa T_{134} može biti nesusedan sa najviše jednim čvorom skupa T_{1234} i obrnuto.

U preostalih šest neodredjenih slučajeva T_4-T_{1234}, T_{12}-T_{1234}, T_{34}-T_{123}, T_{34}-T_{1234}, T_{123}-T_{134} i T_{123}-T_{1234} autor nije uspeo da utvrdi relacije medjusobne povezanosti čvorova. Stavljajući da je $|T_4| = n_1 \geqslant 1$, $|T_{1234}| = n_7 \geqslant 1$ a da su svi ostali skupovi prazni, testirani su svi grafovi za koje je $(n_1, n_7) \in \{(1,2), (2,1), (1,3), (2,2), (3,1), (1,4), (2,3), (3,2), (4,1)\}$ i koji ne sadrže nijedan od grafova sa sl. 6.7 kao indukovani podgraf. I u ostalih pet slučajeva pravljeni su isti testovi i nisu pronadjeni zabranjeni grafovi sa 7,8 i 9 čvorova. Neodredjen slučaj T_4-T_{1234} testiran je i sa $(n_1, n_7) \in \{(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1), (1,6), (2,5), (3,4), (5,2), (6,1)\}$ i pronadjena su dva nova zabranjena grafa sa 11 čvorova. Kod svih ovih nerešenih slučajeva važno je primetiti da je graf G komplement bipartitnog grafa i stoga je svrsishodno postaviti sledeći problem.

Problem. U klasi komplemenata bipartitnih grafova okarakterisati one grafove koji imaju tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti. □

Rešavanjem ovog problema bila bi utvrdjena struktura proizvoljnog grafa G sa tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti, čime bi problem u opštem slučaju bio rešiv.

Slučaj 2. Graf G sadrži H_2 a ne sadrži H_1 kao indukovani podgraf.

Neka $T_{i_1 \ldots i_k}$ i T_o imaju isto značenje kao u prvom slučaju, samo u odnosu na graf H_2. Tada je očigledno $T_{12}=T_{23}=T_{34}=T_{123}=T_{124}=T_{134}=T_{234}=T_{1234}=\emptyset$. Pored toga skupovi T_1,T_2,T_3,T_4, T_{13} i T_{24} mogu da sadrže samo izolovane čvorove.

Takodje je $T_o=\emptyset$, jer u suprotnom slučaju graf G sadrži bar jedan od grafova G_5,G_6 i G_9 kao indukovani podgraf, što je nemoguće. I skup T_{14} je prazan, inače je $G_1 \subseteq G$, što je nemoguće.

Relacije izmedju skupova T_1,T_2,T_3,T_4,T_{13} i T_{24} u grafu G predstavljene su tabelom 6.2. Na primer skupovi T_1 i T_2 su kompletno susedni u grafu G, inače je $G_5 \subseteq G$, što je nemoguće.

	T_2	T_3	T_4	T_{13}	T_{24}
T_1	1	0	$\emptyset$	0	0
T_2		0	0	1	0
T_3			1	0	1
T_4				0	0
T_{13}					1

Tabela 6.2

Pomoću ove tabele zaključujemo da je $1 \sim T_2$, $2 \sim T_{13}$, $3 \sim T_{24}$ i $4 \sim T_3$, kad god su skupovi T_2, T_3, T_{13} i T_{24} neprazni. Kako graf G nema ekvivalentnih čvorova to je $T_2 = T_3 = T_{13} = T_{24} = \emptyset$. Iz istih razloga skupovi T_1 i T_4 ne mogu da sadrže nesusedne čvorove, pa sledi da je $|T_1| \leq 1$ i $|T_4| \leq 1$. Kako skupovi T_1 i T_4 nisu koegzistentni, možemo razlikovati samo sledeća dva podslučaja:

1° $T_1 = T_4 = \emptyset$. Tada je $G = P_4$.

2° $T_1 \neq \emptyset$, $T_4 = \emptyset$. Tada je $G = P_5$.

Rezultati dobijeni u ovom drugom slučaju mogu se izneti u sledećoj teoremi.

<u>Teorema 6.7</u> Neka je G graf koji sadrži H_2 a ne sadrži H_1 (sl. 4.4) kao indukovani podgraf. Tada graf G ima tačno dve pozitivne sopstvene vrednosti ako i samo ako pripada jednoj od sledeće dve klase grafova

. □

L I T E R A T U R A

1. Н. И. АХИЕЗЕР, И. М. ГЛАЗМАН, Теория линейных операторов в Гильбертовом пространстве, Харьков, 1978.
2. G. BACHMAN, I. NARICI, Functional Analisis, Academic Press, New York, 1966.
3. L. BEINEKE, R. WILSON, Selected topics in graph theory, Academic Press, London, 1978.
4. L. COLLATZ, U. SINOGOWITZ, Spektren endlicher Grafen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg-21(1957), 63-77.
5. D. CVETKOVIĆ, Graphs and their spectra (Thesis), Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz. 354-356(1971), 1-50.
6. D. CVETKOVIĆ, Chromatic number and the spectrum of a graph, Publ. Inst. Math. (Beograd)-14(28) (1972), 25-38.
7. D. CVETKOVIĆ, Some possible directions in further investigations of graph spectra, Colloquia mathematica societatis János Bolyai, Szeged (Hungary), 1978, 47-67.
8. D. CVETKOVIĆ, M. DOOB, I. GUTMAN, On graphs whose eigenvalues do not exceed $(2+\sqrt{5})^{1/2}$, Ars Combinatoria 14(1982), 225-239.
9. D. CVETKOVIĆ, M. DOOB, H. SACHS, Spectra of Graphs-Theory and Application, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980; Academic Press, New York, 1980.
10. D. CVETKOVIĆ, M. MILIĆ, Teorija grafova i njene primene, Naučna knjiga, Beograd, 1977.
11. M. DOOB, Graphs with a small number of distinct eigenvalues, Ann. New York Acad. Sci. 175(1970), No.1, 104-110.
12. Ф. Р. ГАНТМАХЕР, Теория матриц, Изд. "Наука", Москва, 1966.

13. C. GODSIL, D. A. HOLTON, B. McKAY, The spectrum of a graph, School of mathematical sciences, University of Melbourne, 1976.

14. И. Ц. ГОХБЕРГ, М. Г. КРЕЙН, Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в Гильбертовом пространстве, Изд. "Наука", Москва, 1965.

15. I. GUTMAN, The energy of a graph, Bercihte der mathematisch-statistischen Sektion in Forschungszentrum Graz 103(1978), 1-22.

16. I. GUTMAN, Prilog spektralnoj teoriji stabala (doktorska disertacija), Elektrotehnički fakultet, Beograd, 1980.

17. F. HARARY, Graph theory, Massachussets, 1969.

18. H. von KOCH, Sur quelques points de la theorie des determinants, Acta matematica-24(1900), 89-122.

19. M. G. KREIN, M. A. RUTMAN, Linear operators in a Banach space leaving a coonnus invariant, Usp. Mat. Nauk-3/1(23) (1948), 3-95.

20. E. KREYSZIG, Introductory functional analysis with applications, John Wiley, New York, 1978.

21. Š. KUREPA, Konačno dimenzionalni vektorski prostori i primjene, Tehnička knjiga, Zagreb, 1967.

22. L. LOVÁSZ, J. PELIKÁN, On the eigenvalues of trees, Periodica Math. Hung. 3(1973), 175-182.

23. M. MARCUS, H. MINC, A survey of Matrix Theory and Matrix Inequalities, Allyn and Bacon, Inc, Boston, 1964.

24. B. MOHAR, The spectrum of an Infinite Graph, Linear Algebra and Appl. 48(1982), 245-256.

25. M. PETROVIĆ, Spektar beskonačnog numerisanog grafa (magistarski rad), PMF, Beograd, 1981.

26. M. PETROVIĆ, On the spectra of infinite complete multipartite graphs, Publ. Inst. Math. (Beograd)-31(45) (1982), 169-176.

27. M. PETROVIĆ, Spectra of some operations on infinite graphs, Glasnik Mat. 18(38) (1983), 27-33.

28. M. PETROVIĆ, Finite type graphs and some graph operations, I, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 1983, u štampi.

29. M. PETROVIĆ, On the spectrum and characteristic function of an infinite graph, Zbornik radova PMF u Kragujevcu 4(1983), u štampi.

30. M. PETROVIĆ, On graphs whose spectral spread does not exceed 4, Publ. Inst. Math. (Beograd), 1983, u štampi.

31. M. PETROVIĆ, On graphs whose second spread does not exceed 3/2, Proc., IV Yugoslav Sem. Th. Graphs, Novi Sad, 1983, u štampi.

32. M. PETROVIĆ, Some classes of graphs with two, three or four positive eigenvalues, Zbornik radova PMF u Kragujevcu, primljen za štampu.

33. M. PETROVIĆ, Finite type graphs and some graph operations, II, Discrete Math., predato za štampu.

34. Ф. РИС, Б. СЁКЕФАЛЬВИ-НАДЬ, Лекции по функциональному анализу, Изд. "Наука", Москва, 1979.

35. H. SACHS, Beziehungen zwischen den in einem Graphen enthaltenen Kreisen und seinem charakteristischen Polynom, Publ. Math. Debrecen 11(1964), 119-134.

36. A. J. SCHWENK, Computing the characheristic polynomial of a graph. In: Graphs and Combinatorics (Lecture Notes in Mathematics 406, ed. B. Bari and F. Harary), Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1974, 153-172.

37. J. H. SMITH, Some properties of the spectrum of a graph. In: Combinatorial Structures and Their Applications (ed. R. Guy, H. Hanani, N. Sauer, J. Schönheim), Gordon and Breach, Science Publ., Inc., New York-London-Paris, 1970, 403-406.

38. V. Ja. STECENKO, On a spectral property of an irreducible operator, UMN-22/3(135) (1967), 242-244.

39. A. TORGAŠEV, On spectra of infinite graphs, Publ. Inst. Math. (Beograd)-29(43) (1981), 269-282.

40. A. TORGAŠEV, On infinite graphs with three and four non--zero eigenvalues, Bull. Serb. Acad. Sci. (Math.)-11 (1981), 39-48.

41. A. TORGAŠEV, On infinite graphs with five non-zero eigenvalues, Bull. Serb. Acad. Sci. (Math.)-12 (1981), 31-38.

42. A. TORGAŠEV, Finiteness of spectra of some operations on infinite graphs, Publ. Inst. Math. (Beograd) (N. S.)-33(47) (1983), 227-234.

43. A. TORGAŠEV, On the automorphism group of an infinite graph, Publ. Inst. Math. (Beograd), 1983, u štampi.

44. A. TORGAŠEV, The spectrum of line graphs of some infinite graphs, Publ. Inst. Math. (Beograd)-31(45) (1982), 209-222.

45. A. TORGAŠEV, On infinite graphs whose spectrum is greater than -2, Bull. Serb. Acad. Sci. (Math.), 1983, u štampi.

46. A. TORGAŠEV, On infinite graphs whose spectrum is uniformly bounded by $\sqrt{2+\sqrt{5}}$, Proc. IV Yugoslav Sem. Th. Graphs, Novi Sad, 1983, u štampi.

47. A. TORGAŠEV, Note on infinite generalized line graphs, Proc. IV Yugoslav Sem. Th. Graphs, Novi Sad, 1983, u štampi.

48. A. TORGAŠEV, Graphs whose second least negative eigenvalues is greater than -1, Univ. Beograd Publ. Elektrotehn. Fak. Ser. Mat. Fiz., 1983, u štampi.

49. A. TORGAŠEV, Graphs whose energy does not exceed 3, Czech. Math., 1983, predato za štampu.

50. A. TORGAŠEV, Graphs with exactly two negative eigenvalues, Math. Nach., 1983, predato za štampu.