UNIVERZITET U BEOGRADU

PRIRODNO MATEMATIČKI FAKULTET

Milan V. Jovanović

UOPŠTENJA KONVEKSNOSTI SA PRIMJENOM U MATEMATIČKOM PROGRAMIRANJU

(Doktorska disertacija)

BEOGRAD

Mart, 1989.

SADRŽAJ

OZNAKE I NAPOMENE

$\mathbb{R}^n$	n- dimenzionalni euklidski prostor
$\mathbb{R}^n_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0\}$	
$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $x^T = (x_1, \dots, x_n)$, $e_i^T = (0, \dots, 1, \dots, 0)$	
$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	skalarni proizvod vektora $x,y \in \mathbb{R}^n$
$\|x\| = \sqrt{\langle x,x \rangle}$	euklidska norma vektora x
S	konveksan skup
int S	unutrašnjost skupa S
co A	konveksni omotač skupa A
$A \pm B = \{a \pm b \mid a \in A \wedge b \in B\}$, $x + B = \{x\} + B$	
A^C	komplement skupa A
$A \setminus B = A \cap B^C$	
$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda) y \mid \lambda \in [0,1]\}$	

$K(x_0, d) = \{x \mid \|x - x_0\| \le d\}$ zatvorena kugla poluprečnika d, sa centrom u x_0.

$H(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\}$ hiperravan u $\mathbb{R}^n$

$H_+(a,\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle \ge \alpha\}$ zatvoren poluprostor

N_α, $N(x)$	nivoski skupovi
$0^+ S$	recesivni konus skupa S

$\mathrm{Epi}\, f = \{(x,t) \mid x \in S,\ t \in \mathbb{R},\ f(x) \le t\}$ nadgraf funkcije $f: S \to \mathbb{R}$

I	jedinična matrica
$\nabla f(x)$	gradijent funkcije f u tački x
$H(x)$	hesijan(matrica drugih parcijalnih izvoda) funkcije f u x
$C^1(S)$	klasa neprekidno diferencijabilnih funkcija na S
$C^{1,1}(S)$	klasa funkcija iz $C^1(S)$ čiji gradijent zadovoljava uslov Lipschitz-a sa konstantom $L \ge 0$

Kad kažemo da je f diferencijabilna na S podrazumijevamo da je S otvoren skup, ili je f diferencijabilna na otvorenom skupu S_1 i $S \subseteq S_1$.

f^{-1}, $f \circ g$	inverzna funkcija, kompozicija funkcija

1. UVOD

Poznato je da u matematičkom programiranju veliki značaj ima konveksnost, skupova i funkcija. Uopštavanja su vršena tako da se odrede klase funkcija koje sadrže konveksne funkcije, a na snazi ostanu fundamentalne teoreme optimizacije. Ovdje se misli na uslove optimalnosti Kuhn-Tucker, teoreme dualnosti (slaba, jaka) i veze optimalnog rješenja sa sedlastim tačkama.

Tako se došlo do mnogih klasa funkcija, od kojih ćemo neke navesti, slijedeći rad [19].

Funkcija f definisana na konveksnom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je *kvazikonveksna* ako za svaki x, $y \in S$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \max\{f(x),f(y)\}.$$

Ako je prethodna nejednakost stroga uz $x \neq y$ i $\lambda \in (0,1)$, onda je f *strogo kvazi konveksna.*

Diferencijabilna funkcija f je *pseudokonveksna* ako za svaki $x,y \in S$

$$\langle \nabla f(x), y-x \rangle \geq 0 \Rightarrow f(y) \geq f(x).$$

Funkcija f je *strogo pseudokonveksna* ako je na desnoj strani implikacije znak $>$, uz $x \neq y$.

Diferencijabilna funkcija f je *inveksna* ako za svaki $x,y \in S$ i neku funkciju $h: S \times S \to \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f(y)-f(x) \geq \langle h(x,y), \nabla f(x) \rangle.$$

Ako u implikaciji kojom se definiše pseudokonveksnost, umjesto $y-x$ stoji $h(x,y)$ onda funkcija f je *pseudoinveksna.*

Širu klasu od inveksnih funkcija čine funkcije koje, za svaki x,y zadovoljavaju

$$f(y)-f(x) \geq F_{y,x}(\nabla f(x)),$$

gdje je F neki sublinearan funkcional (za svaki x,y i $\alpha \geq 0$ je $F(x+y) \leq F(x)+F(y)$ i $F(\alpha x)=\alpha F(x)$.

Nije teško pokazati da je svaka konveksna funkcija kvazikonveksna, svaka pseudokonveksna kvazikonveksna, a diferencijabilna konveksna je pseudokonveksna. Takođe, svaka diferencijabilna konveksna funkcija je inveksna, uz $h(x,y)=y-x$.

Pseudokonveksne i kvazikonveksne funkcije su dobro izučene. Posvećen im je veliki broj radova, među kojima nekoliko disertacija (Crouzeix, Ferland, Schaible, Zang...), i monografija (npr. [1],[4]). Date su karakterizacije i inveksnih funkcija.

Međutim, pri rješavanju problema matematičkog programiranja, u algoritmima, teoremama o konvergenciji i procjenama brzine konvergencije često se nameću uslovi koji su ispunjeni za mnogo uže klase funkcija. Takvi su, na primjer, uslov da je nivoski skup

$$N(y)=\left\{x\in S \,\middle|\, f(x)\le f(y)\right\}$$

omeđen za početnu tačku algoritma $y=x_0$, ili uslov da je za svaki $x,y\in\mathbb{R}^n$

$$m\,\|y\|^2 \le \langle H(x)y,y\rangle \le M\,\|y\|^2\,,$$

gdje je $H(x)$ hesijan funkcije f, $M\ge m>0$ Funkcije definisane posljednjom formulom su *ograničeno konveksne*. Njima su najbliže jako konveksne funkcije, definisane u [20].

Funkcija f definisana na konveksnom skupu $S\subseteq\mathbb{R}^n$ je *jako konveksna* ako postoji realan broj $r>0$ takav da za svaki $x,y\in S$ i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2.$$

Ove funkcije istraživane su u više radova ([12], [20], [21], [27], [28],[31]). Prirodnom uopštenju ove klase funkcija, jako kvazikonveksnim funkcijama, posvećeno je manje pažnje, premda čuvaju neke bitne osobine.

Definicija 1. ([13]) Funkcija f je *jako kvazikonveksna* na konveksnom skupu $S\subseteq\mathbb{R}^n$, ako postoji realan broj $s>0$ takav da za svaki $x,y\in S$ i $\lambda\in[0,1]$ važi

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \max\{f(x),f(y)\}-\lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2. \qquad (1)$$

Takođe, na osnovu same definicije nije lako utvrditi da li je neka funkcija jako kvazikonveksna, ili to nije. Stoga je ovdje učinjen pokušaj da se izvrši karakterizacija ovih funkcija, da poređenje sa srodnim klasama i ispitaju neke osobine, od značaja za kvazikonveksno programiranje.

Prvih pet glava ovog rada posvećeno je jako kvazikonveksnim funkcijama. Osim kriterijuma za jaku kvazikonveksnost dato je poređenje sa sličnim funkcijama. Za ovo su potrebni još neki pojmovi i teoreme, koje ćemo sada navesti.

Funkcija f je *lokalno uniformno kvazikonveksna* [16] na konveksnom skupu S ako za $x \in S$ i $\varepsilon > 0$ postoji $\delta(x,\varepsilon) > 0$ tako da za svaki $y \in S$ vrijedi

$$\|x-y\| \geq \varepsilon \Rightarrow f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \delta(x,\varepsilon). \tag{2}$$

Ako δ zavisi samo od ε kažemo da je f *uniformno kvazikonveksna.*

Diferencijabilna funkcija f je *jako pseudokonveksna* [1] na otvorenom konveksnom skupu S ako je strogo pseudokonveksna i za $x \in S$, $\|v\| = 1$ i $\langle v, \nabla f(x) \rangle = 0$ postoje pozitivni brojevi ε i α takvi da je $x \pm \varepsilon v \in S$ i za $|t| \leq \varepsilon$ vrijedi $f(x+tv) \geq f(x) + \frac{1}{2}\alpha t^2$. (3)

Funkcija f definisana na konveksnom skupu S je *ravnomjerno kvazikonveksna* na skupu S [30], ako postoji nenegativna funkcija $\delta(t)$, $\delta(0)=0$, $\delta(t_0) > 0$ pri nekom $t_0 > 0$, takva da za svaki $x, y \in S$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\} - \delta(\|x-y\|). \tag{4}$$

Broj s je modul jake kvazikonveksnosti, funkcija $\delta(t)$ je modul ravnomjerne kvazikonveksnosti, a tačni moduli su

$$s_0 = \inf_{0<\lambda<1} \inf_{x,y \in S} \frac{\max\{f(x),f(y)\} - f(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2}, \quad \mu(t) = \inf_{0<\lambda<1} \inf_{\substack{x,y\in S \\ \|x-y\|=t}} \left(\frac{\max\{f(x),f(y)\}}{\lambda(1-\lambda)} - \frac{f(\lambda x+(1-\lambda)y)}{\lambda(1-\lambda)}\right).$$

Kažemo da realna funkcija f definisana na otvorenom intervalu $I \subset \mathbb{R}$ ima *jaki lokalni minimum* u t_0, ako postoje pozitivni brojevi ε i α takvi da je $t_0 \in I$, i za svaki $|t| \leq \varepsilon$ vrijedi

$$f(t_0) \leq f(t) - \frac{1}{2}\alpha(t-t_0)^2.$$

Teorema 1. [5] Neka je f dva puta diferencijabilna na otvorenom konveksnom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ takva da je

$$x \in S,\ \nabla f(x) = 0 \Longrightarrow \langle H(x)v, v \rangle > 0 \text{ za svaki } v \neq 0,$$

$$x \in S, v \in \mathbb{R}^n,\ \langle \nabla f(x), v \rangle = 0 \Longrightarrow \langle H(x)v, v \rangle \geq 0,$$

tada je f kvazikonveksna.

Teorema 2. [10] Neka je S konveksno tijelo u $\mathbb{R}^n$ i f dva puta diferencijabilna na S, tada je f pseudokonveksna u svakoj tački $x' \in S$ u kojoj je $\nabla f(x') \neq 0$.

Teorema 3. [18] Dovoljan uslov da je f pseudokonveksna na konveksnom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je da postoji realan broj $\alpha \geq 0$, takav da za svaki $x \in S$ je matrica $H(x) + \alpha \nabla f(x) \nabla f(x)^T$ pozitivno semidefinitna.

Teorema 4. [16] Ako je f strogo kvazikonveksna i neprekidna na konveksnom kompaktnom skupu, onda je uniformno kvazikonveksna.

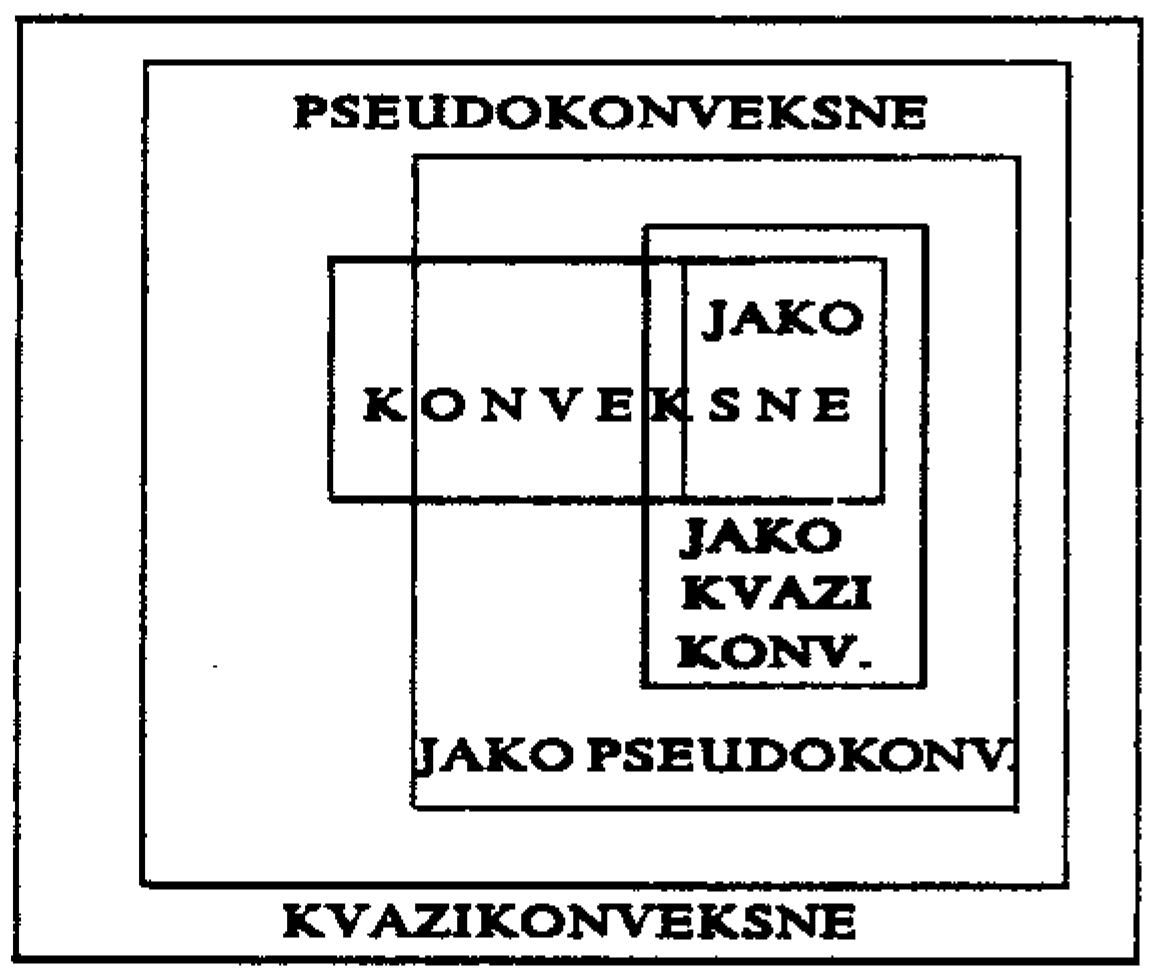
Teorema 5. [1.,str. 44] Neka je f realna diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu $S \subset \mathbb{R}^n$. Tada je f (strogo) pseudokonveksna ako i samo ako za $x \in S$ i $v \in \mathbb{R}^n$ takve da je $\|v\| = 1$, $\langle \nabla f(x), v \rangle = 0$ funkcija $\Phi(t) = f(x+tv)$ ima (strogi) lokalni minimum u $t=0$.

Teorema 6. [1.,str. 46] Diferencijabilna funkcija f definisana na otvorenom konveksnom skupu S je jako pseudokonveksna ako i samo iz $x \in S$, $\|v\| = 1$ i $\langle \nabla f(x), v \rangle = 0$ slijedi da $\Phi(t)$ ima u $t=0$ jaki lokalni minimum.

Teorema 7. [7.,str 14] Neka je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ otvoren. konveksan skup i $f \in C^2(S)$, tada je f jako pseudokonveksna funkcija ako i samo ako vrijedi

$$x \in S,\ \|v\| = 1,\ \langle \nabla f(x), v \rangle = 0 \implies \langle H(x)v, v \rangle > 0. \tag{S}$$

U drugoj glavi dati su odnosi među navedenim funkcijama, što je predstavljeno grafički (uz pretpostavku diferencijabilnosti).



U ovoj glavi su dati kriterijumi za jaku kvazikonveksnost.
Osnovni rezultat glave 3. je Teorema 44. Pokazano je da za ograničenost nivoskih skupova nisu potrebne dodatne pretpostavke (neprekidnost, ili uslov Lipschitz-a) ako je f jako kvazikonveksna, dakle i jako konveksna. Prema tome odozdo poluneprekidna jako konveksna funkcija dostiže minimum na zatvorenom konveksnom skupu.

U glavi 4. pokazano je da J(ensen)- jako kvazikonveksna neprekidna funkcija ne mora biti jako kvazikonveksna. Diskutovane su nejednakosti značajne za ocjenu brzine konvergencije relaksacionih metoda minimizacije. Neke od tih nejednakosti su poboljšane. Dokazana je teorema o korektnosti zadatka minimizacije u slučaju da je funkcija cilja jako kvazikonveksna i data približno.
U glavi 5. je teorema J-P. Vial-a o vezi jake konveksnosti funkcije f i jake konveksnosti njenog nadgrafa prenesena na jako kvazikonveksne funkcije, s tim što je prethodno definisan jako kvazikonveksan skup.
Glava 6. U razmatranju problema optimizacije

$$f(x) \to \inf \ , \ x \in F(y_0)$$

gdje je $F: X \to n(Y)$ višeznačna funkcija, a X, Y normirani linearni prostori. došlo se do pojma parakonveksnosti i γ- parakonveksnosti. Kako navodi S. Rolewicz [24] ovdje je restriktivno to što je kod navedenih funkcija vrijednost F(y) konveksan skup. Stoga je definisao graf γ- parakonveksnost. U ovom radu je restriktivnost izbjegnuta tim što se definiše šira klasa višeznačnih funkcija, od konveksnih.

Funkcija $F: X \to n(Y)$ je *konveksna* ako za svaki $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ je

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda) F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2). \qquad (6)$$

Definicija 2. Višeznačna funkcija $F: X \to n(Y)$ je *kvazikonveksna* ako za svaki $x_1, x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$F(x_1) \cap F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2). \qquad (7)$$

Data su uopštenja, u istom smislu, i ostalih funkcija, njihove osobine i odnosi. Pokazano je da graf 2-parakonveksne i parakvazikonveksne funkcije nisu uporedive. Na kraju je, u izvjesnom smislu, uopštena teorema o primarnoj funkciji [25], i data njena varijanta za parakvazikonveksne funkcije.

2. JAKO KVAZIKONVEKSNE FUNKCIJE

2.1 Klasifikacija

Osnovno je slijedeće. Svaka jako konveksna funkcija je jako kvazikonveksna. To je zbog toga što je $\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \le \max\{f(x),f(y)\}$, pa u (1) možemo uzeti da je $s=r$. Obratno ne vrijedi, $f(x)=-x^2-x$ je jako kvazikonveksna na $[0,1]$ sa $s=1$, ali čak nije ni konveksna. Ako je f jako kvazikonveksna i diferencijabilna, ona je strogo pseudokonveksna (Teorema 8.). Funkcija $f(x)=x^3$ je strogo pseudokonveksna na $[0,1]$, ali nije jako kvazikonveksna. Zaista, uzimajući u (1) da je $x=0$, $y=1$ i $\lambda=\frac{1}{2}$ vidi se da je $\frac{s}{9}\in(0,1)$. Sada, izbor $x=0$, $y=\frac{s}{9}$ i $\lambda=\frac{1}{2}$ vodi u protivrječnost. Dalje, svaka jako kvazikonveksna funkcija je uniformno kvazikonveksna. Dovoljno je uzeti $\delta(x,\varepsilon)=\frac{s}{4}\varepsilon^2$, pa iz (1), uz $\lambda=\frac{1}{2}$ i $\|x-y\|\ge\varepsilon$ slijedi (2). Koristeći činjenicu da je svaka jako kvazikonveksna funkcija strogo kvazikonveksna i Teoremu 4. vidimo da uniformno kvazikonveksna funkcija ne mora biti jako kvazikonveksna (opet je kontraprimjer $f(x)=x^3$). Sada ćemo ustanoviti vezu između jako kvazikonveksnih i jako pseudokonveksnih funkcija.

Teorema 8. Neka je f diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu $S\subseteq\mathbb{R}^n$. Ako je f jako kvazikonveksna, onda je f jako pseudokonveksna.

Dokaz. Prvo ćemo pokazati da je f strogo pseudokonveksna. Neka je $x\ne y$, $f(x)\le f(y)$ i $\lambda\in(0,1)$. Tada je prema (1)

$$\frac{f(x+\lambda(y-x))-f(x)}{\lambda} \le -(1-\lambda)s\|x-y\|^2.$$

Odavde je, kada $\lambda\to+0$, $\langle\nabla f(x),y-x\rangle \le -s\|x-y\|^2<0$, za $x\ne y$.

Dakle, $\langle\nabla f(x),y-x\rangle\ge 0 \Rightarrow f(x)>f(y)$, ako je $x\ne y$.

Neka su, sada, $x\in S$ i $v\in\mathbb{R}^n$ takvi da je $\|v\|=1$, $\langle\nabla f(x),v\rangle=0$. Prema Teoremi 5. postoji $\varepsilon>0$ takav da je $x\pm\varepsilon v\in S$ i za svaki t takav da je $|t|\le\varepsilon$ $\Phi(t)=f(x+tv)>f(x)=\Phi(0)$. Sada je za $|t|\le\varepsilon$

$$f(x)<f(x+\tfrac{t}{2}v)=f(\tfrac{x+x+tv}{2})\le\max\{f(x),f(x+tv)\}-\tfrac{s}{2}\|tv\|^2,$$

odnosno, $\Phi(0)=f(x)<f(x+tv)-\frac{s}{4}t^2=\Phi(t)-\frac{1}{2}\frac{s}{2}(t-0)^2.$

Uzimajući da je $\alpha=\frac{1}{2}$, iz Teoreme 6. slijedi da je f jako pseudokonveksna.

Obratno ne vrijedi. Funkcija $f(x)=\operatorname{arctg} x$ je jako pseudokonveksna na $\mathbb{R}$ jer je $f'(x)\neq 0$, ali nije jako kvazikonveksna na $\mathbb{R}$ (Teorema 13.). Međutim, ova funkcija je jako kvazikonveksna na svakom ograničenom intervalu. Ipak, ograničenost domena nije dovoljna da jako pseudokonveksna funkcija bude jako kvazikonveksna. To pokazuje primjer 2.

2.2 Jako kvazikonveksne funkcije u $\mathbb{R}$

Potrebno je posebno posmatrati funkcije jedne promjenljive jer neke teoreme, koje ćemo dokazati, ne vrijede već za $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
Pošto postoje uslovi kvazikonveksnosti koje, bar za funkcije jedne promjenljive, nije teško provjeriti, utvrdićemo neke dodatne uslove za jaku kvazionveksnost. Prema teoremi E. Deák-a [17.,str.50] funkcija f je kvazikonveksna na $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ako i samo ako se svaki interval $[x,y] \subset S$ može razbiti na dva podintervala (bar jedan je zatvoren, a jedan može biti prazan ili jednočlan) tako da f opada na prvom i raste na drugom.
Dakle, grubo rečeno, ove funkcije su po dijelovima monotone, tako da je i slijedeća teorema vezana za monotonost.

Teorema 9. Neka je $f\in C^1([a,b])$ i za svaki $x\in[a,b]$ je $f'(x)\neq 0$. Tada je f jako kvazikonveksna.

Dokaz. Pretpostavimo da f nije jako kvazikonveksna. Tada, za svaki $n\in\mathbb{N}$ postoje x_n, y_n iz $[a,b]$ i $\lambda_n \in (0,1)$ takvi da je $x_n< y_n$ i

$$0 \geq f(z_n) - \max\{f(x_n),f(y_n)\} > -\lambda_n(1-\lambda_n)\frac{1}{n}(x_n-y_n)^2.$$

Ovdje je $z_n=\lambda_n x_n+(1-\lambda_n)y_n$, a lijeva nejednakost je zbog monotonosti f.

Uzmimo da je $f(x_n)\leq f(y_n)$, pa vrijedi

$$0\geq f(z_n)-f(y_n)> \lambda_n(\lambda_n-1)\frac{1}{n}(x_n-y_n)^2, \text{ odakle je za neki } c_n\in(z_n,y_n)$$

$$0\geq f'(c_n)(z_n-y_n)>\lambda_n(\lambda_n-1)\frac{1}{n}(x_n-y_n)^2. \text{ Sada je}$$

$$0\geq f'(c_n)(x_n-y_n)> (\lambda_n-1)\frac{1}{n}(x_n-y_n)^2, \text{ odakle je } \quad 0\leq f'(c_n)<\frac{b-a}{n}.$$

U slučaju da je $f(x_n)\geq f(y_n)$, izlazi $0\geq f'(c_n)>\frac{b-a}{n}$. Dakle, postoji broj $c\in[a,b]$ takav da je $f'(c)=0$.

Primjadba. Na osnovu Teoreme 2., iz kvazikonveksnosti i uslova $\forall x\in S$ $\nabla f(x)\neq 0$ slijedi pseudokonveksnost funkcije f na S. Odgovarajući uslovi za funkciju jedne promjenljive daju i više, jaku kvazikonveksnost. Međutim, ovo ne vrijedi već u slučaju $S\subset\mathbb{R}^2$, kao što pokazuje slijedeći primjer.

Primjer 1. Neka $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$ i $S = [0,1] \times [0,1]$.

Vrijedi slijedeće: f je kvazikonveksna jer je

$f(x) \le f(y) \Rightarrow x_1 + x_2 \le y_1 + y_2 \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda y) = \lambda(x_1+x_2) + (1-\lambda)(y_1+y_2) \le$

$\le y_1 + y_2 = f(y)$, dalje ona je pseudokonveksna, jer je kvazikonveksna i $\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \ne 0$, ali nije jako kvazikonveksna. Uzimajući da je $x = (0,1)$, $y = (1, 0)$ imali bismo $f(\lambda(0,1) + (1-\lambda)(1,0)) = 1 - \lambda + \lambda \le 1 - \lambda(1-\lambda) s 2$, odakle je $s \le 0$. Primjetimo da ova funkcija nije ni strogo pseudokonveksna, jer za gore izabrane tačke je $x \ne y$, $\langle \nabla f(x), y - x \rangle \ge 0$, i $f(x) = f(y)$.

Navedimo nužan uslov za jaku kvazikonveksnost dva puta diferencijabilne funkcije.

Teorema 10. Neka je f dva puta diferencijabilna, jako kvazionveksna na $[a,b]$, tada za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi

$$f'(x) = 0 \Rightarrow f''(x) > 0. \tag{8}$$

Dokaz. Neka je $f'(x) = 0$, tada je, zbog pseudokonveksnosti f, za svaki $x \in [a,b]$ $f(x) \le f(y)$. Dalje, zbog jake kvazikonveksnosti, kao u dokazu Teoreme 8. je $f'(y)(y-x) \ge s(x-y)^2$. (9)

Ako je $x \ne b$, tada za $y \in (x,b]$ (9) postaje

$$\frac{f'(y) - f'(x)}{y - x} \ge s.$$

Dakle, kako je $s > 0$ slijedi da je $f''(x) > 0$. Neka je $x = b$. Za svaki $y \in [a,b)$ je $f'(y) \le s(y-b)$, odnosno, za svaki $y \ne b$ vrijedi

$$\frac{f'(b) - f'(y)}{b - y} \ge s.$$

Zaključak je kao i u prethodnom slučaju.

Primjedba. Na ovaj način tvrđenje se može dokazati za bilo kakav interval, a za otvoreni je specijalan slučaj Teoreme 7. Navedeni uslov je i dovoljan za jaku pseudokonveksnost, ali ne i za jaku kvazikonveksnost.

Primjer 2. Funkcija $f(x) = -\frac{1}{4}|x|x^3 + \frac{1}{2}x^2$ jeste jako pseudokonveksna, ali ne i jako kvazikonveksna na $(-1,1)$. Zaista, uslov (5) je ispunjen jer je $f'(0) = 0$ i $f''(0) = 1$. Pokažimo da f nije jako kvazikonveksna. Uzmimo da je

$$x = -\sqrt{\sqrt{2} - 1}\,,\ y_n = 1 - \frac{1}{2n},\ \lambda = \frac{1}{2n - x - 1} \quad \text{gdje je } n \in \mathbb{N}.$$

Vrijedi da je $f(x) = \frac{1}{4} > f(y_n)$. Ako je f jako kvazikonveksna postoji $s > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y_n)\le f(x)-\lambda(1-\lambda)s\,|1-\tfrac{1}{2n}-x|^2, \text{ ili}$$

$$f(1-\tfrac{1}{n})\le\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{2n}(1-\tfrac{1}{n}-x)s, \text{ odnosno}$$

$$\tfrac{1}{2}(1-\tfrac{1}{n}-x)s\le\tfrac{1}{n}-\tfrac{1}{n^2}-\tfrac{1}{4n^3}, \text{ odakle je } (1-x)s\le 0.$$

Za dva puta diferencijabilne monotone funkcije imamo nužan i dovoljan uslov jake kvazikonveksnosti.

Teorema 11. Neka je f dva puta diferencijabilna, rastuća funkcija na $[a,b]$. Tada je f jako kvazikonveksna ako i samo ako vrijedi

$$\forall x\in(a,b]\ f'(x)>0 \quad \text{i} \quad \left(f'(a)=0 \Rightarrow f''(a)>0\right).$$

Dokaz. Neka je f jako kvazikonveksna. Za svaki $x\in(a,b]$ je $f(a)\le f(x)$, pa je, prema formuli (9), $f'(x)(x-a)\ge s(x-a)^2$, te mora biti $f'(x)>0$. Drugi dio uslova daje Teorema 10.

Obratno, ako je $f'(a)\ne 0$, tada je f jako kvazikonveksna, preme Teoremi 9.

Neka je $f'(a)=0$, i f nije jako kvazikonveksna. Kao u dokazu Teoreme 9. postoje x_n, y_n, z_n, c_n, λ_n takvi da je $c_n\in[z_n,y_n]$ i

$$0\le f'(c_n)<(1-\lambda_n)\tfrac{1}{n}(y_n-x_n)\le\frac{b-a}{n}.$$

Vrijedi $c_n\to c\in[a,b]$ i $f'(c)=0$. Prema uslovu teoreme mora biti $c=a$. Sada je

$$0\le\frac{f'(c_n)-f'(a)}{c_n-a}<\frac{(1-\lambda_n)(y_n-x_n)}{n(c_n-a)}=\frac{z_n-x_n}{n(c_n-a)}<\frac{1}{n},$$

odakle je $f''(a)=0$, suprotno pretpostavci. Dakle, f je jako kvazikonveksna.

U slučaju da f opada na $[a,b]$, ulogu tačke a preuzima tačka b.

Primjer 3. Funkcija $f(x)=x^n$, $n\in\mathbb{N}$, je jako konveksna na intervalu $[0,1]$ samo za $n=2$, dok je jako kvazikonveksna za $n\in\{1,2\}$.

Navedimo jedan dovoljan uslov za jaku kvazikonveksnost.

Teorema 12. Neka $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, i postoji tačka $c\in(a,b)$ takva da vrijedi $f'(x)<0$ na $[a,c)$, $f'(x)>0$ na $(c,b]$, $f'(c)=0$, $f''(c)>0$ i za svaki $x\in[c-a,b-c]$ je $f(c-x)=f(c+x)$, tada ja f jako kvazikonveksna.

Dokaz. Neka je y proizvoljan broj iz $(c,b]$. Analogno se posmatra $[a,c)$. Neka je $x\in[a,b]$ takav da je $f(x)\le f(y)$. Zbog simetričnosti grafa f u odnosu na pravu $x=c$, postoji $y^*\in[a,c)$ takav da je $f(y)=f(y^*)$. Zbog prethodne teoreme dosta je uzeti $x\in[y^*,c)$. Funkcija

$\varphi(x)=\frac{f'(y)}{y-x}$ dostiže na $[y^*,c]$ minimum, $m_y>0$ u y^D. Neka je $\inf\{m_y \mid y\in(c,b]\}=$ $=0$. Postoji niz (y_n) takav da $f'(y_n)\to 0=f'(c)$. Iz uslova teoreme slijedi da je $y_n\to c$, $y_n^*\to c$ i

$$0<\frac{f'(y_n)-f'(c)}{y_n-c}\,\frac{y_n-c}{y_n-y_n^*}\to 0.$$ S druge strane jer je $y_n-c=2(y_n-y_n^*)$

slijedi da je $f''(c)=0$. Dakle posmatrani infimum, npr m_2 je veći od 0. Analogno se dobije za $y\in[a,c)$ sa m_1. Posmatrana funkcija je jako kvazikonveksna na $[c,b]$, sa modulom npr. s_2, i na $[a,b]$ sa s_1. Sada je f jako kvazikonveksna na $[a,b]$, sa modulom $s=\min\{m_1,m_2,2s_1,2s_2\}$.

Primjer 4. Funkcija $f(x)=\sin x$ nije jako konveksna na $[-\pi,0]$, [27,str.190] ali je jako kvazikonveksna.

Na intervalu $[a,+\infty)$ opadajuća funkcija nije jako kvazikonveksna. Isto važi za rastuću, odozgo ograničenu funkciju. Dokazi su dati kasnije jer ovo vrijedi i za $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Za rastuće funkcije vrijedi i više.

Teorema 13. Neka je f rastuća funkcija na $[a,+\infty)$ i $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$, tada f nije jako kvazikonveksna.

Dokaz. Neka postoji $s>0$, takav da (1) važi za svaki $x,y\geq a$ i $\lambda\in[0,1]$. Uzmimo da je $x=a$, $y=n>a+1$ i $\lambda=\frac{n-a-1}{n-a}$, gdje je $n\in\mathbb{N}$. Vidimo da je $\lambda\in(0,1)$, $\lambda a+(1-\lambda)n=a+1$ i $\lambda(1-\lambda)(x-y)^2=n-a-1$, tako da nejednakost (1) postaje $f(a+1)\leq f(n)-(n-a-1)s$, odakle je, za svaki $n>a+1$

$0<s\leq\frac{f(n)}{n}\,\frac{n}{n-a-1}-\frac{f(a+1)}{n-a-1}$, što je nemoguće, jer $\frac{f(n)}{n}\to 0$ i $s=0$.

Primjedba. U slučaju diferencijabilnosti funkcije f, ako je $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$, onda f nije jako kvazikonveksna. Tako npr. $f(x)=\ln x$ nije jako kvazikonveksna na $[a,+\infty)$, ali je jako kvazikonveksna na svakom intervalu $[a,b]$, $a>0$. Može se pomislti da osim jako konveksnih nema drugih funkcija koje su jako kvazkonveksne na neograničenom intervalu. Da nije tako pokazuje slijedeći primjer.

Primjer 5. Funkcija $f(x)=x^2-\frac{1}{x}$ je jako kvazikonveksna na $[1,+\infty)$, sa modulom $s=1$ (Teorema 16.), ali nije jako konveksna. Funkcija koja ima drugi izvod je jako konveksna na intervalu ako i samo ako postoji broj $r>0$, takav da je za svaki x $f''(x)\geq r$,[27,str.190]. U ovom slučaju $f''(1)=0$.

Navedimo, na kraju, još jedan kriterijum, koji je poboljšanje Teoreme 9., a dokazuje se na isti način.

Teorema 14. Neka je f monotona na $[a,b]$, diferencijabilna na (a,b). Ako za svaki niz (x_n) iz (a,b) $f'(x_n) \not\to 0$, onda je f jako kvazikonveksna na $[a,b]$.

Primjer 6. Funkcija $f(x)=\sqrt{x}$ je jako kvazikonveksna na $[0,1]$. Takođe, gornji uslov je samo dovoljan, npr. $f(x)=x^2$ je jako kvazikonveksna na $[0,1]$, ali $f(\frac{1}{n}) \to 0$.

2.3. Jako kvazikonveksne funkcije na $\mathbb{R}^n$

U dokazu Teoreme 8. vidjeli smo da je nužan uslov za jaku kvazikonveksnost diferencijabilne funkcije $f: S \to \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup

$$(\exists s>0)(\forall x,y \in S)\ f(x) \le f(y) \Longrightarrow \langle \nabla f(y), y-x \rangle \ge s\|x-y\|^2. \tag{10}$$

J-P. Vial je u [28] dokazao i više.

Teurema 15. Neka $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lokalno Lipschitz neprekidna i jako kvazikonveksna. Tada, za svaki x,y vrijedi

$$f(x) \le f(y) \Longrightarrow \langle g, y-x \rangle \ge s\|x-y\|^2, \ \forall g \in \partial f(y).$$

Primjedba, Funkcija je lokalno Lipschitz neprekidna ako na svakom ograničenom skupu ispunjava uslov Lipschitz-a. Ovdje je $\partial f(x)=\{g \in \mathbb{R}^n | \langle g,v \rangle \le D_C(x;v), \forall v \in \mathbb{R}^n\}$ uopšteni skup gradijenata, pri čemu je

$$D_C(x;v)=\lim_{t \downarrow 0} \sup_{y \to x} \frac{f(y+tv)-f(y)}{t}$$ uopšteni izvod u pravcu, u smislu

Clarke-a. Vrijedi $\partial f(x)=\mathrm{co}\{z \mid z=\lim_{n \to +\infty} \nabla f(x_n),\ x_n \to x\}$.

Uslov (10) je i dovoljan za jaku kvazikonveksnost.

Teorema 16. Neprekodno diferencijabilna funkcija $f: S \to \mathbb{R}$, gdje je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan skup, je jako kvazikonveksna ako i samo ako je ispunjen uslov (10).

Prvo ćemo dokazati slijedeću lemu.

Lema 1. Neka je $g:[o,a]\to\mathbb{R}$ diferencijabilna, g' integrabilna i vrijedi:

a) $g(o)=o\geq g(a)$,

b) $(\exists s>o)(\forall x,y\in[o,a])\; g(x)\leq g(y) \Longrightarrow g'(y)(y-x)\geq s(x-y)^2$,

Tada za svaki $\lambda\in(o,1)$ vrijedi $g(\lambda a)\leq -\lambda(1-\lambda)\frac{1}{2}sa^2$.

Dokaz. Iz (b) slijedi da je g strogo pseudokonveksna, pa se prema teoremi Deak-a, interval $[o,a]$ može razbiti na $[o,c]$, i $[c,a]$ tako da g strogo opada na prvom i strogo raste na drugom, s tim što postoje i mogućnosti $c=o$, ili $c=a$. Zbog uslova (a) otpada slučaj $c=o$.

Neka je $c=a$. Tada je $g(a)\leq g(x)$ za svaki $x\in[o,a]$, pa je

$g'(x)(x-a)\geq s(x-a)^2$, odnosno $g'(x)\leq s(x-a)$. Odavde je za $o<x\leq a$

$$\int_o^x g'(t)\,dt\leq s\left(\frac{t^2}{2}-at\right)\Big|_o^x \quad \text{, odnosno}$$

$$g(x)-g(o)\leq s\left(\frac{x^2}{2}-ax\right)=\frac{s}{2}(x^2-2ax)\leq\frac{s}{2}(x^2-ax).$$

Neka je $c\in(o,a)$. Iz stroge pseudokonveksnosti izlazi da g ima u tački c jedinstven minimum. Uzmimo, prvo, da je $o<c\leq\frac{a}{2}$. Za $x\in[c,a]$ je $g(c)\leq g(x)$, odakle $g'(x)(x-c)\geq s(x-c)^2$, ili $g'(x)\geq s(x-c)$. Sada je

$$\int_x^a g'(t)\,dt\geq s\int_x^a (t-c)\,dt,$$

odnosno, $g(a)-g(x)\geq s(\frac{a^2}{2}-ac)-s(\frac{x^2}{2}-ax)$. Kako je $c\leq\frac{a}{2}$, vrijedi $a(a-2c)\geq$

$\geq x(a-2c)$ ili $cx+\frac{a^2}{2}-ac\geq\frac{a}{2}$, tako da je $g(a)-g(x)\geq -s\frac{x^2}{2}+s\frac{a}{2}x$. Dakle.

$g(x)\leq g(a)+\frac{s}{2}(x^2-ax)\leq\frac{s}{2}(x^2-ax)$. Zbog neprekidnosti funkcije g, postoji $a^*\in(o,c)$ tako da je $g(a^*)=g(\frac{a}{2})$. Za svaki $o<x\leq a^*$ je $g'(x)\leq s(x-\frac{a}{2})$, odakle je $g(x)\leq\frac{s}{2}(x^2-ax)$. Na kraju, ako bi postojala tačka $x^*\in(a^*,c)$ takva da ne vrijedi prethodna nejednakost, g bi imala na (a^*,c) lokalni maksimum, što je nemoguće.

Slučaj $\frac{a}{2}\leq c$ se analogno razmatra. Nejednakost direktno izlazi za $x\in[o,c]$. Stvar je jasna ako je $g(\frac{a}{2})>g(a)$. U protivnom postoji $a^*\in(c,a)$ da je $g(\frac{a}{2})=$ $=g(a^*)$, te je za $x\in(a^*,a]$, $g(\frac{a}{2})\leq g(x)$ i $\int_x^a g'(t)\,dt\geq s\int_x^a(t-\frac{a}{2})\,dt$, odnosno $g(x)\leq\frac{s}{2}(x^2-ax)$. Dakle, posljednja nejednakost vrijedi za svaki $x\in[o,a]$. Za proizvoljan broj $\lambda\in[o,1]$ je $g(\lambda a)\leq-\lambda(1-\lambda)\frac{s}{2}a^2$.

Primjedba. Za interval (a^*,c) možemo i ovako zaključiti: g je kvazikonveksna, pa za svaki x iz tog intervala vrijedi

$g(x)\leq\max\{g(a^*),g(c)\}=g(\frac{a}{2})\leq-\frac{sa^2}{4}\leq\frac{s}{2}(x^2-ax)$.

Dokaz Teoreme 16. Dokažimo da je uslov (10) dovoljan. Neka je $x,y\in S$, $f(x)\le f(y)$ i $\|x-y\|=a$. Definišimo na $[0,a]$ funkciju

$$g(t)=f\left(y+t\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)-f(y).$$

Ispunjeni su uslovi Leme 1.: $g(0)=0$, $g(a)=f(x)-f(y)\le 0$, prema (10) je

$$g(t_1)\le g(t_2) \Longleftrightarrow f\left(y+t_1\frac{x-y}{a}\right)\le f\left(y+t_2\frac{x-y}{a}\right) \Longrightarrow \left\langle \nabla f\left(y+t_2\frac{x-y}{a}\right),(t_2-t_1)\frac{x-y}{a}\right\rangle\ge$$

$$\ge s\left\|(t_2-t_1)\frac{x-y}{a}\right\|^2 \Longleftrightarrow g'(t_2)(t_2-t_1)\ge s(t_2-t_1)^2.$$

Imamo, sada

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)-\max\{f(x),f(y)\}=f\left(y+\lambda\|x-y\|\frac{x-y}{\|x-y\|}\right)-f(y)=$$

$$=g(\lambda\|x-y\|)\le-\lambda(1-\lambda)\frac{s}{2}\|x-y\|^2.$$

Dobijeni uslov je specijalan slučaj odgovarajućeg uslova za ravnomjernu kvazikonveksnost, koji je dat u [30]. Isto važi i za Lemu 1. i odgovarajuću lemu iz [30,str. 22-25]. Dokaz je , ovdje dat, jer je jednostavniji i ne oslanja se na posmatranje inverznih grana funkcije g.
Navedimo sada uslov za uniformnu kvazikonveksnost.

Teorema 17. [30] Neka je f neprekidno diferencijabilna na konveksnom skupu S, i neka za svaki $x,y\in S$, $f(x)\le f(y)$ vrijedi nejednakost

$$\langle\nabla f(y),y-x\rangle\ge\gamma(\|x-y\|),$$

gdje je $\gamma(t)$ pozitivna, sumabilna funkcija. Tada f je ravnomjerno kvazikonveksna na S, sa modulom kvazikonveksnosti

$$\delta(t)=\int_0^t\frac{\gamma(x)}{x}\,dx.$$

U nekim slučajevima se dovoljnost uslova (10) dokazuje sasvim jednostavno, čak uz blaže uslove.

Teorema 18. Neka je f diferencijabilna, konkavna na konveksnom skupu S, tada je f jako kvazikonveksna, ako i samo ako vrijedi (10).

Dokaz. Neka je ispunjen uslov (10), $x,y\in S$ tako da je $f(x)\le f(y)$ i za proizvoljan $\lambda\in[0,1]$ neka je $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$. Sada je $f(x_0)-f(y)=\lambda\langle\nabla f(z),x-y\rangle$, gdje je $z=y+t(x-y)=y+\lambda t(x-y)$, uz $0<\lambda,t<1$. Dalje je

$$f(x_0)-f(y)=\lambda\langle\nabla f(z)-\nabla f(y)+\nabla f(y),x-y\rangle=-\lambda\langle\nabla f(y),y-x\rangle+$$

$$+\lambda\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),x-y\rangle=-\lambda\langle\nabla f(y),y-x\rangle+\frac{1}{t}\langle\nabla f(z)-\nabla f(y),z-y\rangle\le$$

$$\le-\lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2.$$

Zna se da je količnik nenegativne konveksne i pozitivne konkavne je kvazikonveksna funkcija [17,str.62]. Slično vrijedi:

Teorema 19. Neka je f nenegativna jako konveksna, g konkavna, odozgo omeđena na konveksnom skupu S, tada je funkcija $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ jako kvazikonveksna na skupu $Q=\{x\in S\,|\,g(x)>0\}$.

Dokaz. Prvo, Q je konveksan skup, jer je g konkavna funkcija. Neka su $x,y\in S$, $\lambda\in[0,1]$ i $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$. Sada je

$$h(x_0)\le\frac{\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)}=\frac{\lambda g(x)\frac{f(x)}{g(x)}+(1-\lambda)g(y)\frac{f(y)}{g(y)}-\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{f(x)}{g(x)},\frac{f(y)}{g(y)}\right\}-\frac{\lambda(1-\lambda)r\|x-y\|^2}{\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)}\le\max\{h(x),h(y)\}-\lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2,$$

gdje je $s=\frac{r}{M}$, $M=\sup\{g(x)\,|\,x\in S\}$, a r modul jake konveksnosti funkcije f.

U slučaju linearnosti funkcije g nije potrebno pretpostaviti nenegativnost funkcije f.

Posljedica 1. Neka je f jako konveksna i $g(x)=\langle c,x\rangle+\gamma$, $c\in\mathbb{R}^n$, $\gamma\in\mathbb{R}$, tada je h jako kvazikonveksna na svakom skupu

$$Q_M=\{x\in S\,|\,0<g(x)\le M\}\ .\ M>0.$$

Primjedba. U prethodnoj teoremi umjesto konkavne funkcije g ne može se uzeti kvazikonkavna funkcija koja nije konkavna. Na primjer, $f(x)=g(x)=e^x$ je jako konveksna, kvazikonkavna (čak pseudokonkavna) na $S=[0,1]$ i vrijedi $0<g(x)\le e$, ali $h(x)=1$ nije jako kvazikonveksna na S.

Od šesnaest mogućnosti kada su f i g, iz skupa konveksnih ili konkavnih funkcija koje su pozitivne ili negativne, bitne su četiri, jer se ostale promjenom znaka svode na njih. Na primjer iz

$$h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\Longleftrightarrow -h(x)=\frac{f(x)}{-g(x)}$$

slijedi da je količnik konveksne nenegativne i konveksne negativne funkcije kvazikonkavna.

Četiri osnovna slučaja data su tabelom:

	A	B	C	D
f	konveksna ≥ 0	konveksna ≤ 0	konkavna ≥ 0	konkavna ≤ 0
g	konkavna >0	konveksna >0	konveksna >0	konveksna <0
h	KVAZIKONVEKSNA			

U [17] B. Martos je analizirao prva dva slučaja i njihove varijante (str.63, tabela 3.4.). U ostalim slučajevima funkcija h nije ni kvazikonveksna ni kvazikonkavna.

Primjer 6. Funkcije $f(x)=x^2$, $g(x)=e^x$ ispunjavaju uslove (C), međutim

vrijedi $h(0)<\min\{h(-1),h(1)\}$, i $h(2)>\max\{h(0),h(3)\}$.
Za slučaj (D), uzmimo prvo $f(x)=x^2-1$, $g(x)=-1$ i $S=(-1,1)$. Funkcija $h(x)=1-x^2$ nije kvazikonveksna na S. Zamjenjujući f i g dobijamo h koja nije kvazikonkavna.

Prema Teoremi 19. ako u (A) f je jako konveksna, g odozgo ograničena, uz ostale uslove, onda je h jako kvazikonveksna. Odgovarajuće za slučaj (B) ne vrijedi.

Primjer 7. Funkcija $f(x)=x^2-1$ je nepozitivna na $[-1,1]$, $g(x)=x^2+1$ je konveksna i ograničena na $[-1,1]$, ali h nije jako kvazikonveksna. Da se ovo pokaže dovoljno je, slično primjeru 2, izabrati :
$x=-1+\frac{1}{n^2}$, $y=1$ i $\lambda=\frac{2n^2-n}{2n^2-1}$, pa se dobije da je $s\le\frac{1}{2n-2}$ za svaki $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Dakle, preostaje Teorema 19. i tri njene varijante:

f	jako konveksna ≥ 0	j. konkavna ≤ 0	j. konkavna ≤ 0	j. konveksna ≥ 0
g	konkavna $M\ge\ >0$	konveksna $-M\le\ <0$	konkavna $M\ge\ >0$	konveksna $-M\le\ <0$
h	JAKO KVAZIKONVEKSNA		J. KVAZIKONVEKSNA	

Primjer 8. Funkcija $f(x)=\sum_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ je jako konveksna na svakom skupu $Q=[m,+\infty)^n\subset\mathbb{R}_+^n$, ako je za svaki $i\in\{1,\dots,n\}$ $\alpha_i\in\mathbb{R}\setminus[0,1]$. Ako je $\alpha=2$, onda je f jako konveksna na $\mathbb{R}^n$.
Funkcija $g(x)=\prod_{i=1}^{n}x_i^{\beta_i}$ je konkavna na skupu $\mathbb{R}_+^n$, uz uslov $\beta_i>0$ i $\sum_{i=1}^{k}\beta_i<1$, za svaki $1\le i,k\le n$. Prema Teoremi 19. njihov količnik je jako kvazikonveksna funkcija na skupu $[m,M]^n\subset\mathbb{R}_+^n$.
Specijalno, neka je za neki $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ i svaki prirodan $i\le n$, $\alpha_i=n$ i $\beta_i=\frac{1}{n}$. Količnik sredina $A(x_1^n,\dots,x_n^n)$ i $G(x_1,\dots,x_n)$ $h:[m,M]^n\to\mathbb{R}$,

$$h(x)=\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^n}{n}}{\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\frac{1}{n}}}$$ je jako kvazikonveksna.

Za utvrđivanje kvazikonveksnosti (kvazikonkavnosti) proizvoda dovoljno je razmotriti slučajeve: f i g su nepozitivne konveksne, odnosno nenegativne konveksne. U drugom slučaju $h(x)=f(x)\cdot g(x)$ ne mora biti ni kvazikonveksna ni kvazikonkavna (npr. $h(x)=x^2e^{-x}$). U prvom slučaju h je kvazikonkavna. Ovom je ekvivalentno slijedeće:
Ako su f i g nenegativne i konkavne, h je kvazikonkavna, a ako je f konveksna nepozitivna i g konkavna nenegativna, h je kvazikonveksna.
Međutim, kod proizvoda, ne možemo donositi zaključke o jakoj kvazikonveksnosti (konkavnosti), na ovaj način. Dovoljno je vidjeti slijedeće: ako je f jako konkavna, nenegativna i g konkavna, pozitivna i ako bi h bila jako konveksna (konkavna), takva bi bila i funkcija $f/(1/g)$, što ne mora biti jer je $1/g$ pozitivna i konveksna funkcija.

Neka $f:S\to\mathbb{R}$ i $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $S\subseteq\mathbb{R}^n$ je konveksan skup i $h:S\to\mathbb{R}$ kompozicija $g\circ f$. Poznato je da ako je f konveksna a g konveksna neopadajuća, onda je h konveksna. Ako je f kvazikonveksna, g neopadajuća, onda je h kvazikonveksna. Takođe, ako je f pseudokonveksna, g diferencijabilna i $g'(x)>0$, tada je h pseudokonveksna. Vrijedi

Teorema 20. Neka je f diferencijabilna, jako kvazikonveksna na konveksnom skupu S, a g diferencijabilna na $f(S)\subseteq\mathbb{R}$ i za svaki $x\in f(S)$ je $g'(x)\geq m>0$, tada je funkcija h jako kvazikonveksna na S.

Dokaz. Za svaki $x,y\in S$ vrijedi,

$$h(x)\leq h(y)\Longrightarrow g^{-1}(h(x))\leq g^{-1}(h(x))\Longrightarrow f(x)\leq f(y)\Longrightarrow\langle\nabla f(y),y-x\rangle\geq s\|x-y\|^2$$

$$\Longrightarrow\langle g'(f(y))\nabla f(y),y-x\rangle\geq g'(f(y))s\|x-y\|^2\Longrightarrow\langle\nabla h(y),y-x\rangle\geq ms\|x-y\|^2.$$

Primjedba. Ako se riječ kvazikonveksna zamijeni sa konveksna, tvrđenje ne ostaje na snazi. Na primjer, $f(x)=x^2$ je jako konveksna na $S=[1,2]$, $g(x)=\sqrt{x}$ ispunjava uslove prethodne teoreme, ali $h(x)=x$ nije jako konveksna. Dovoljno je još pretpostaviti da je g konveksna [29].

Navedimo nekoliko nužnih uslova za jaku kvazikonveksnost, u slučaju da je domen funkcije negraničen.

Teorema 21. Neka je $S\subseteq\mathbb{R}^n$ konveksan, neograničen zatvoren skup i $f:S\to\mathbb{R}$ odozgo ograničena funkcija, tada f nije jako kvazikonveksna na S.

Dokaz. Postoji bar jedna poluprava $P=\{z\in\mathbb{R}^n\,|\,z=\lambda z_0,\lambda\geq 0\}$, $z_0\neq 0$ je fiksiran vektor, tako da vrijedi $x\in P\Longrightarrow x+P\subseteq S$.

Neka je $x\in S$ i $x_n=x+nz_0$, $n\in\mathbb{N}$. Ako je f jako kvazikonveksna postoji $s>0$ tako da je $f(x_1)\leq\max\{f(x),f(x_n)\}-\lambda_n(1-\lambda_n)s\|x_n-x\|^2$, uz $\lambda=\frac{1}{n}$ $(x_1=x+z_0=(1-\frac{1}{n})x+\frac{1}{n}(x+nz_0))$. Dalje je

$$s(n-1)\|z_0\|^2\leq\max\{f(x),f(x+nz_0)\}-f(x+z_0)\leq M-f(x+z_0)$$

za svaki $n>1$, što je u suprotnosti sa $s>0$.

Primjedba. Dovoljno je pretpostaviti da je f odozgo ograničena na $x+P\subseteq S$.

Posljedica 2. Funkcija $f:S\to\mathbb{R}$ koja opada duž neke poluprave $P\subseteq S$ nije jako kvazikonveksna na S.

Analogno Teoremi 13., vrijedi slijedeće:

Teorema 22. Neka postoje tačke $x\in S$, $z_0\in\mathbb{R}^n$ takve da je za svaki $\lambda\geq 0$ $x+\lambda z_0\in S$ i $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{f(x+\lambda z_0)}{\lambda}$, tada f nije jako kvazikonveksna na S.

Dokaz. Neka $f(x+\lambda z_0)$ nije ograničena za $\lambda>0$, uzmimo, bez umanjenja opštosti, da $f(x+nz_0)\to+\infty$. Kao u dokazu prethodne teoreme, izlazi da je

$$0<s\leq\frac{f(x+kz_0)}{\|x+kz_0\|}\frac{\|x+kz_0\|}{(k-1)\|z_0\|^2}-\frac{f(x+z_0)}{(k-1)\|z_0\|^2}\text{, za } k\in K\subset\mathbb{N}.$$

Ovo je zato što $\{f(x+nz_0)\}$ ima rastući podniz (npr. za $n\in K$). Kako vrijedi $\left\|\frac{x}{k-1}+\frac{k}{k-1}z_0\right\|\to\|z_0\|$ i $\frac{f(x+kz_0)}{\|x+kz_0\|}=\frac{f(x+kz_0)}{k}\frac{1}{\|\frac{x}{k}+z_0\|}\to 0$, slijedi da je $s=0$.

Sada ćemo razmotriti problem kada se utvrđivanje kvazikonveksnosti funkcije više promjenljivih svodi na ispitivanje funkcije jedne promjenljive. Poznata je slijedeća činjenica:

Teorema 23 [17.,str.47] Funkcija f je kvazikonveksna (konveksna) na konveksnom skupu $S\subseteq\mathbb{R}^n$, ako i samo ako za svaki $x,y\in S$ funkcija

$$\varphi(\lambda)=f(y+\lambda(x-y))$$

je kvazikonveksna (konveksna) na $[0,1]$.

U [6,str.192] postavljen je zadatak:

Dokazati da je funkcija f jako konveksna na konveksnom skupu S, ako i samo ako je $\varphi(\lambda)$ jako konveksna na $[0,1]$, sa istim modulom jake konveksnosti za svaki $x,y\in S$.

Međutim, naredni primjer pokazuje da ovo tvrđenje nije tačno.

Primjer 9. Funkcija $f(x)=x^2$, jeste jako konveksna na $S=\mathbb{R}$, sa tačnim modulom $r_0=1$. Uzmimo da je $x=0$ i $y=\frac{1}{n}$, tada $\varphi(\lambda)=\frac{1}{n^2}\lambda^2$, $\lambda\in[0,1]$ jeste jako konveksna sa $r_0(n)=\frac{1}{n^2}$. Neka je r isti modul jake konveksnosti. za svaki $n\in\mathbb{N}$. Mora biti za svaki $n\in\mathbb{N}$ $0<r\leq\frac{1}{n^2}$, jer su $r_0(n)$ tačni (najveći) moduli, pa je $r=0$.

Uz neke dodatne pretpostavke vrijedi dio navedenog tvrđenja.

Teorema 24. Neka je S ograničen, konveksan skup i za svaki $x,y\in S$ je $\varphi(\lambda)$ jako konveksna na $[0,1]$, sa istim modulom, tada je i f jako konveksna na S.

Dokaz. Neka su $x,y \in S$ i $\lambda \in (0,1)$. Iz uslova slijedi da je

$$f(y+\lambda(x-y)) = \varphi(\lambda) = \varphi((1-\lambda)0+\lambda 1) \le (1-\lambda)\varphi(0)+\lambda\varphi(1) - \lambda(1-\lambda)r|0-1|^2.$$

Pošto je S ograničen skup, postoji $d>0$ takav da za svaki $x,y \in S$ je $\|x-y\| \le d$. Odavde je $-1 \le -\frac{1}{d^2}\|x-y\|^2$, tako da desna strana polazne nejednakosti se majorira sa $(1-\lambda)f(x)+\lambda f(y)-\frac{r}{d^2}\|x-y\|^2$.

Isto tvrđenje ostaje na snazi ako je f jako kvazikonveksna. Međutim ovaj kriterijum je bez praktične vrijednosti. Vidjeli smo da na osnovu njega ne možemo utvrditi čak ni jaku konveksnost za $f(x)=x^2$.

Funkciji $f:S \to \mathbb{R}$ pridružićemo funkciju $F_s : S \to \mathbb{R}$,

$$F_s(x) = f(x) - s\|x\|^2, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Postoji veza između kvazikonveksnosti funkcije f (F_s) i jake kvazikonveksnosti funkcije F_s (f). U uspostavljanju te veze važno mjesto imaju slijedeći pojam i lema.

Definicija 3. Funkcija $f:S \to \mathbb{R}$ je saglasna sa normom na skupu S ako za svaki $x,y \in S$ vrijedi $\|x\| \le \|y\| \Longrightarrow f(x) \le f(y)$.

Za ovakve funkcije kažemo da $\| \|$- rastu. Analogno imamo pojmove $\| \|$- -opada, strogo $\| \|$-raste (ako je u implikaciji $<$ umjesto $\le$) i strogo $\| \|$-opada.

Lema 2. Za svaki $x,y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\|^2 = \lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Dokaz. Vrijedi $\|y\|^2=\|x+y-x\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y-x\rangle+\|y-x\|^2$, odnosno $2\langle x,y\rangle = \|x\|^2-\|y\|^2+\|y-x\|^2$. Dalje je $\|y+\lambda(x-y)\|^2=(1-2\lambda)\|y\|^2+2\lambda\langle x,y\rangle+\lambda^2\|x-y\|^2$. Iz ove dvije jednakosti slijedi tvrđenje.

Primjedba. Ovim je dokazano da je $f(x)=\|x\|^2$ jako konveksna na $\mathbb{R}^n$, sa $r=1$. Takođe na ovoj lemi je zasnovano važno tvrđenje, koje je dao R. Rockafellar.

Teorema 25 [21] Funkcija f je jako konveksna ako i samo ako postoji $r>0$ takav da je funkcija $f(x)-r\|x\|^2$ konveksna.

Iz ove teoreme, neposredno, izlaze nužni i dovoljni uslovi za jaku konveksnost, kao što je:

Dva puta diferencijabilna funkcija je jako konveksna na otvorenom skupu S, ako i samo ako je, za svaki $x \in S$ pozitivno semidefinitna matrica

$$H(x)-rI$$

Koristeći ideju iz prethodne teoreme dobijamo:

Teorema 26: Neka je $f:S\to\mathbb{R}$ strogo $\| \ \|$-opadajuća i jako kvazikonveksna na S, sa modulom s. Tada je funkcija F_s kvazikonveksna na S.

Dokaz. Neka su $x,y\in S$, $\lambda\in[0,1]$ i $x_0=\lambda x+(1-\lambda)y$, tada je $f(x_0)+\lambda(1-\lambda s\|x-y\|^2\le\max\{f(x),f(y)\}$. Prema Lemi 2. je $f(x_0)-s\|x_0\|^2+\lambda s\|x\|^2+$ $+(1-\lambda)s\|y\|^2\le\max\{f(x),f(y)\}$, ili $f(x_0)-s\|x_0\|^2\le\max\{f(x),f(y)\}-\lambda s\|x\|^2-$ $-(1-\lambda)s\|y\|^2$. Neka je $f(x)\le f(y)$, tada, jer f strogo $\| \ \|$- opada, je $\|y\|\le\|x\|$. Slijedi, $f(x_0)-s\|x_0\|\le f(y)-s\|y\|^2$. Dakle, $F_s(x_0)\le\max\{F_s(x),F_s(y)\}$.

Teorema 27. Neka postoji $s>0$, takav da je funkcija F_s strogo $\| \ \|$-rastuća i kvazikonveksna na konveksnom skupu S, tada je f jako kvazikonveksna na S.

Dokaz. Neka $x,y\in S$ i $\lambda\in[0,1]$. Koristeći kvazikonveksnost funkcije F_s i Lemu 2. dobijamo $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\max\{F_s(x),F_s(y)\}+s(\lambda\|x\|^2+(1-\lambda)\|y\|^2-\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2)$. Neka je $F_s(x)\le F_s(y)$, odnosno $s(\|y\|^2-\|x\|^2)\le f(y)-f(x)$. Kako F_s strogo $\| \ \|$-- raste, izlazi da je $\|x\|\le\|y\|$. Sada je $f(x)\le f(y)$, pa dobijamo $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le f(y)-\lambda(1-\lambda)s\|x-y\|^2$, uz $f(x)\le f(y)$.

Primjer 10. Funkcija $f(x)=\|x\|$ nije jako konveksna ni na jednom konveksnom skupu $S\subset\mathbb{R}^n$ sa nepraznim interiorom. Definiciona nejednakost za jako konveksne funkcije nije tačna za $r>0$, $x\in\operatorname{int}S$, $y=tx\in S$, $t>0$ i $\lambda=\frac{1}{2}$, jer tada je

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|=\frac{\|x\|+\|y\|}{2}.$$

Takođe, f nije jako kvazikonveksna na $\mathbb{R}^n$. Stavljajući u (1), $x=0$, $y=\frac{4}{s}v$, $\|v\|=1$, $\lambda=\frac{1}{2}$ dobija se da je $s\le0$.

Međutim, pokazaćemo da nije tako, ako je skup S ograničen.

Posljedica 3. Neka je $S\subset\mathbb{R}^n$ konveksan i ograničen, tada je funkcija $f:S\to\mathbb{R}$, $f(x)=\|x\|$ jako kvazikonveksna na S.

Dokaz. Postoje $d>0$, $r>0$ tako da je $S\subseteq K(0,d)$ i $r<\frac{1}{2d}$. Za $x,y\in S$ vrijedi $r(\|x\|+\|y\|)<1$. Neka je $\|x\|<\|y\|$, slijedi $r(\|x\|+\|y\|)(\|y\|-\|x\|)<\|y\|-\|x\|$, odakle je $F_r(x)<F_r(y)$. Dakle, F_r strogo $\| \ \|$-raste. Pokažimo da je ova funkcija kvazikonveksna. Neka su $x,y\in S$, $\lambda\in[0,1]$ i $F_r(x)\le F_r(y)$, tada je $\|x\|\le\|y\|$. Jer je norma kvazikonveksna, vrijedi $\|\lambda x+(1-\lambda)y\|\le\|y\|$. Za već odabrano r, zbog konveksnosti S je $r(\|y\|+\|\lambda x+(1-\lambda)y\|)<1$. Iz posljednje dvije nejednakosti slijedi $F_r(\lambda x+(1-\lambda)y)\le F_r(y)$. Koristeći Teoremu 27. dobijamo da je f jako kvazikonveksna sa modulom r.

Primjedba. Na isti način se utvrđuje jaka kvazikonveksnost funkcije $f(x)=\|x\|^{\alpha}$, $\alpha>1$, na ograničenom konveksnom skupu S. Ako $0 \notin S$, tada možemo koristiti prethodni rezultat i Teoremu 20, uzimajući da je $g(x)=x^{\alpha}$.

Navedimo neke uslove za $\|\ \|$-monotonost, u slučaju da je f diferencijabilna. Neka je $H_+(x,0)=\{v\in\mathbb{R}^n \mid \langle x,v\rangle \geq 0\}$, a $\operatorname{int} H_-(x,0)=\mathbb{R}^n \setminus H_+(x,0)$. Vrijedi

Teorema 28. Neka je f diferencijabilna na otvorenom, konveksnom skupu S. Ako f $\|\ \|$-raste, onda za svaki $x\in S$ vrijedi

$$\begin{aligned} \langle \nabla f(x),v\rangle > 0 &\Longrightarrow v\in H_+(x,0), \\ v\in H_+(x,0) &\Longrightarrow \langle \nabla f(x),v\rangle \geq 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Dokaz. Neka je $v\in H_+(x,0)$, tada je $\|x\|\leq\|x+\lambda v\|$ za svaki $\lambda>0$. Odakle je $\frac{f(x+\lambda v)-f(x)}{\lambda}\geq 0$, pa kad $\lambda\to +0$ slijedi $\langle\nabla f(x),v\rangle\geq 0$.

Neka sada $v\notin H_+(x,0)$. Tada je $v\in\operatorname{int} H_-(x,0)$, pa postoji $\lambda_0>0$, takav da za svaki $\lambda\in(0,\lambda_0)$ je $x+\lambda v\in K(0,\|x\|)$, odakle je $\|x+\lambda v\|\leq\|x\|$ i $f(x+\lambda v)-f(x)\leq 0$. Sada slijedi da je $\langle\nabla f(x),v\rangle\leq 0$.

Naravno, uzeli smo λ_0 tako da $x+\lambda_0 v\in S$, što je moguće jer je $x\in\operatorname{int}S$. Jer je S konveksan, za $\lambda\in(0,\lambda_0)$ je $x+\lambda v\in S$.

Posljedica 4. Neka je f diferencijabilna na konveksnom skupu S, $\operatorname{int}S\neq\emptyset$. Ako f $\|\ \|$-raste, onda za $x\in\operatorname{int}S$ je $\langle\nabla f(x),x\rangle\geq 0$.

Posljedica 5. Neka je f diferencijabilna na konveksnom skupu S, $\operatorname{int}S\neq\emptyset$. Ako postoji $s>0$, takav da F_s $\|\ \|$-raste, tada za svaki $x\in\operatorname{int}S$ vrijedi

$$\langle\nabla f(x),v\rangle > 2s\langle x,v\rangle \Longrightarrow v\in H_+(x,v) \Longrightarrow \langle\nabla f(x),v\rangle\geq 2s\langle x,v\rangle. \tag{12}$$

Teorema 29. Neka je f dva puta diferencijabilna funkcija na otvorenom konveksnom skupu S, i neka vrijedi (11). Ako vrijedi

$$\langle H(z)v,v\rangle > 0 \Longleftrightarrow v\in H_+(x,0), \tag{13}$$

za svaki $x\in S$ i $z\in\{x+tv\in S \mid 0\leq t<1\}$, tada f strogo $\|\ \|$-raste na S.

Dokaz. Neka su $x,y\in S$ i $v=y-x$. Pokažimo da $\|x\|<\|y\|\Longrightarrow f(x)<f(y)$.

Prvo, uzmimo da je $v\in H_+(x,0)$. Na osnovu Tejlorovog razvoja $f(y)-f(x)=$ $=\langle\nabla f(x),v\rangle+\frac{1}{2}\langle H(x+tv)v,v\rangle$ gdje $t\in(0,1)$, i formula (11),(13) slijedi da je $f(x)<f(y)$. Neka, sada, je $v\in\operatorname{int}H_-(x,0)$, kako je $\langle\nabla f(x),v\rangle\leq 0$ i za $t\in(0,1)$ $\langle H(x+tv)v,v\rangle\leq 0$ to je $f(y)\leq f(x)$. Ako bi bilo $\|x\|<\|y\|$ imali bismo $0<2\langle x,v\rangle+$ $+\|v\|^2$, što sa $\langle x,v\rangle<0$ daje $0<-\langle x,v\rangle<\langle x,v\rangle+\|v\|^2=\langle x+v,v\rangle$. Odavde je $v\in H_+(x+v,0)$, pa je $f(x+v)=f(y)>f(x)$. Kontradikcija. Dakle, $f(y)\leq f(x)$ povlači $\|y\|\leq\|x\|$. Znači, u oba slučaja $\|x\|<\|y\|\Longrightarrow f(x)<f(y)$.

Posljedica 6. Neka je f dva puta diferencijabilna na otvorenom, konveksnom skupu S i neka vrijedi (12). Ako vrijedi

$$\langle H(z)v,v\rangle > 2s\|v\|^2 \iff v \in H_+(x,o)$$

za svaki $x\in S$ i $z\in\{x+tv \mid o\le t<1\}$ i neki $s>o$, onda F_s strogo $\| \ \|$-raste.

Primijenimo poznate teoreme, koje daju uslove kvazikonveksnosti, na F_s.

Teorema 30. Neka je f dva puta diferencijabilna na konveksnom skupu S, ako je F_s kvazikonveksna, tada vrijedi

$$\langle \nabla f(x),v\rangle = 2s\langle x,v\rangle \implies \langle H(x)v,v\rangle \ge 2s\|v\|^2. \tag{14}$$

Teorema 31. Neka je $f\in C^2(S)$, S otvoren, konveksan i neka postoji $s>o$, takav da je $\nabla f(x)\ne 2sx$. Tada F_s je kvazikonveksna ako i samo ako za svaki $x\in S$, $v\in\mathbb{R}^n$, $\|v\|=1$ vrijedi (14)

Dokaz. Tvrđenje neposredno slijedi iz [7,str.9].

Teorema 32. Neka je $f\in C^2(S)$, S konveksan i postoji $s>o$ takav da je (14) i $\nabla f(x)=2sx$ povlači da je $H(x)-2sI$ pozitivno definitna, tada je F_s kvazikonveksna.

Dokaz slijedi iz [5].

Teorema 33. Neka je f dva puta diferencijabilna na konveksnom skupu S i i postoje konstante $s>o$, $q>o$, tako da za svaki $x\in S$ matrica

$$H(x)+q(\nabla f(x)-2sx)(\nabla f(x)-2sx)^T-2sI$$

je pozitivno semidefinitna, tada F_s je kvazikonveksna.

Dokaz. Ovo tvrđenje je poslijedica Teoreme 3.

Teorema 34. Neka je f dva puta diferencijabilna na konveksnom skupu S i postoji $s>o$ takav da za svaki $x,y\in S$, $t\in(o,1)$ vrijedi

$$f(x)\le f(y) \implies \langle H(y+t(x-y))(y-x),y-x\rangle \ge s\|x-y\|^2,$$

tada je f jako kvazikonveksna na S.

Dokaz ide na osnovu Tejlorove formule, uz uslov (10).

Na kraju ćemo utvrditi kada je linearna funkcija jako kvazikonveksna. Poznato je da nije nikad jako konveksna, a prema Teoremi 9. svaka linearna funkcija $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=cx$, $c\ne o$, je jako kvazikonveksna na svakom ograničenom intervalu. Međutim, imamo slijedeći primjer

Primjer 11. Funkcija $f:S\to\mathbb{R}$, $f(x)=\langle c,x\rangle$, S je konveksan podskup od $\mathbb{R}^n$, $\operatorname{int}S\ne\emptyset$, nije jako kvazikonveksna ako je $n\ge 2$.

Nužan i dovoljan uslov, (10), za jaku kvazikonveksnost, uovom slučaju je

$$0 \leq \langle c,v \rangle \Longrightarrow \langle c,v \rangle \geq s\|v\|^2,$$

za neki $s>0$ i svaki $v \in S-S$. Skup $S-S$ je konveksan, simetričan i $0 \in \mathrm{int}(S-S)$. Jer je $n \geq 2$, postoji $v \neq 0$ tako da je $v \in H(c,0) \cap (S-S)$. Sada, ako f j jako kvazikonveksna, vrijedi $\langle c,v \rangle = 0 \geq s\|v\|^2$, i $s \leq 0$.

3. OGRANIČENOST NIVOSKIH SKUPOVA

Neka $f:S\to\mathbb{R}$, $S\in\mathbb{R}^n$, $y\in S$ i $\alpha\in\mathbb{R}$. Nivoski skup je

$$N_\alpha=\{x\in S\,|\,f(x)\le\alpha\}.$$

Ako $\alpha=f(y)$, odgovarajući nivoski skup označavamo sa $N(y)$.
U algoritmima minimizacije koji generišu niz $\{x_k\}$, $k\in\mathbb{N}\cup\{o\}$, takav da $\{f(x_k)\}$ opada, važnu ulogu ima ograničenost skupa $N(x_0)$. Ona je, uz neprekidnost funkcije f, dovoljna da niz $\{x_k\}$ ima konvergentan podniz.
Za utvrđivanje ograničenosti zatvorenih, konveksnih skupova mogu koristiti recesivni konusi. Recesivni konus 0^+S, konveksnog skupa S je skup

$$\{v\in\mathbb{R}^n\,|\,x+tv\in S,\forall\ x\in S\wedge t\ge o\}.$$

Vrijedi,

Teorema 35. [22,str.81] Zatvoren konveksan skup je ograničen, ako i samo ako $0^+S=\{0\}$.

Takođe, vrijedi ako je S zatvoren konveksan, H_1 i H_2 paralelne hiperravnine i $S\cap H_1$ neprazan ograničen skup, onda je $S\cap H_2$ ograničen.

Iz činjenice da je $0^+N_\alpha=0^+(\mathrm{Epi}f\cap H(e_{n+1},\alpha))$, slijedi

Teorema 36. [9,str. 83] Neka je $f:S\to\mathbb{R}$, $S\subseteq\mathbb{R}^n$ konveksan, je odozdo zatvorena, $(\mathrm{Epi}f=\mathrm{cl}\,\mathrm{Epi}f)$, konveksna. Ako postoji $\alpha\in\mathbb{R}$ takav da je N_α neprazan i ograničen skup, tada je za svaki $\beta\in\mathbb{R}$ N_β ograničen.

Uslov da je f odozdo zatvorena može se zamijeniti uslovom da je f neprekidna na zatvorenom konveksnom skupu S.

Međutim, ovakav postupak ne može se primjeniti na kvazikonveksne funkcije, jer Epif ne mora biti konveksan skup.

U [11] je, bez dokaza navedena teorema Gould-Evans-a (1970).

Teorema 37. Neka je f kvazikonveksna i neka postoji $\alpha\in\mathbb{R}$ takav da je N_α neprazan i ograničen, tada postoji $\beta>\alpha$ takav da je N_β ograničen.

Dokaz. Pretpostavimo da je za svaki $\varepsilon>o$ skup $N_{\alpha+\varepsilon}$ neograničen. Pošto vrijedi $N_\alpha\subseteq N_{\alpha+\varepsilon}$ i $\varepsilon_1<\varepsilon_2\Rightarrow N_{\alpha+\varepsilon_1}\subseteq N_{\alpha+\varepsilon_2}$ postoje $x_0\in N_\alpha$ i $v\in\mathbb{R}^n$, takvi da za svaki $t\ge o$ i $\varepsilon>o$ je $x_0+tv\in N_{\alpha+\varepsilon}$. Sada je $f(x_0+tv)=f(\frac{x_0}{2}+\frac{x_0+2tv}{2})\le$ $\le\max\{f(x_0),f(x_0+2tv)\}\le\alpha+\varepsilon$ za svaki $\varepsilon>o$ i $t\ge o$, pa je N_α neograničen.

Za jako konveksne funkcije nije potrebno pretpostaviti ograničenost jednog nivoskog skupa.

Teorema 38. [12, str.41] Neka je f jako konveksna, klase C^1 na zatvorenom konveksnom skupu S, tada za svaku tačku $x \in S$ skup $N(x)$ je ograničen.

U [27, str.186] je pokazano da tvrđenje ostaje na snazi, ako je f odozdo poluneprekidna.

Slijedeće teoreme su date u [30].

Teorema 39. Neka je f ravnomjerno konveksna, poluneprekidna odozdo na konveksnom zatvorenom skupu S. Ako je

$$\inf_{x \in S} f(x) = f^* > -\infty, \tag{15}$$

tada, skup $N(x)$ je konveksan, zatvoren i ograničen za svaki $x \in S$.

Teorema 40. Neka je f diferencijabilna, ravnomjerno kvazikonveksna na konveksnom skupu S, Ako postoji tačka $x_0 \in S$ takva da je

$$\sup_{t>0} \frac{\delta(t)}{t} \geq \|\nabla f(x_0)\|,$$

tada je $N(x)$ ograničen za svaki $x \in S$.

Teorema 41. Neka je f diferencijabilna, ravnomjerno kvazikokonveksna na konveksnom skupu S i postoji tačka $x_0 \in S$ takva da za svaki $x \in S$ vrijedi

$$\langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0.$$

Tada je $N(x)$ ograničen za svaki $x \in S$.

Specijalno, dobijamo uslove za ograničenost nivoskih skupova, ako je f jako kvazikonveksna funkcija. Međutim, u tom slučaju navedeni uslovi mogu se oslabiti. J-P. Vial, [28], je dokazao da je svaki nivoski skup ograničen ako $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lokalno Lipschitz neprekidna, jako kvazikonveksna.

Mi ćemo pokazati da za ograničenost nivoskih skupova jako kvazikonveksne funkcije nisu potrebni dodatni uslovi.

Primjer 12. Uslov (15) nije ispunjen za funkciju $f(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ -\frac{1}{x}, & 0 < x \leq 1 \end{cases}$. Ova funkcija je jako kvazikonveksna, sa $s=1$ (odnosno $\delta(t)=t^2$), a naravno, svaki $N(x)$ je ograničen. Primjetimo da f nije poluneprekidna na $[0,1]$, niti je lokalno Lipschitz neprekidna.

Navedimo još dva stava koji će biti iskorišteni za dokaz glavnog rezultata.

Lema 3. [30] Neka je f ravnomjerno kvazikonveksna na konveksnom skupu S, $N(x_0)$ je ograničen za neki $x_0 \in S$, tada je $N(x)$ ograničen za svaki $x \in S$.

Teorema 42. [17, str.55] Ako je f kvazikonveksna na konveksnom skupu $S \subseteq \mathbb{R}^n$, tada je ona gotovo svuda neprekidna na S.

Primjedba. U beskonačno dimenzionalnom normiranom prostoru postoji linearan, dakle i kvazikonveksan funkcional koji je prekidan u svakoj tački. Inače, pojam "gotovo svuda" je u smislu Lebegove mjere.

Teorema 43. Neka je f jako kvazikonveksna na konveksnom skupu S, i neka postoji $x_0 \in S$ i $d>0$, tako da je f odozdo omeđena na skupu $K(x_0,d)\cap S$. Tada je $N(x)$ ograničen za svaki $x \in S$.

Dokaz. Na osnovu Leme 3. dovoljno je dokazati da je $N(x_0)$ ograničen. Neka $x \in N(x_0)\setminus K(x_0,d)$. Tačka $y=\lambda_0 x+(1-\lambda_0)x_0$ pripada skupu $K(x_0,d)\cap S$ ako je $\lambda_0=\frac{d}{\|x-x_0\|}$. Kako je f jako kvazikonveksna, postoji $s>0$ takav da vrijedi

$$f(y)\le \max\{f(x),f(x_0)\}-\lambda_0(1-\lambda_0)s\|x-x_0\|^2, \text{ odakle je}$$

$$f(y)-f(x_0)\le sd(d-\|x-x_0\|).$$

Postoji broj $m>0$ takav da je $f(y)-f(x_0)>-m$, za svaki $y \in K(x_0,d)\cap S$. Sada je za svaki $x \in N(x_0)$ $\|x-x_0\|\le d+\frac{m}{sd}$.

Primjedba. U slučaju da je f ravnomjerno kvazikonveksna, ali ne i jako kvazikonveksna uslov (15) se ne može izostaviti, kao u Teoremi 43. Funkcija $f(x)=x$ je ravnomjerno kvazikonveksna na $\mathbb{R}$ $(\delta(t)=|t|)$, omeđena je na $K(0,1)$, ali $N(0)=$ $=(-\infty,0]$.

Teorema 44. Neka je f kvazikonveksna na konveksnom skupu S i neprekidna u tački $z\in \operatorname{int} S\ne\emptyset$, tada je f omeđena odozdo na nekoj kugli $K(x_0,d)\subset S$.

Dokaz. Neka je $K(z,p)$ takva kugla da je $\operatorname{int}K(z,p)\subseteq S$. Odaberimo tačke u, $v\in S$ i kugle $K_n=K(u,\frac{p}{n+2})$, $L_n=L(v,\frac{p}{n+2})$, za svaki $n\in\mathbb{N}$, tako da je $2z=$ $=u+v$ i $\|z-u\|=\|z-v\|=\frac{p}{2}$. Ako f nije odozdo omeđena ni na jednoj od kugli K_n, L_n, postoje tačke $u_n\in K_n$, $v_n\in L_n$ tako da je $f(u_n)<-n$, $f(v_n)<-n$ za svaki $n\in\mathbb{N}$. Jer je f kvazikonveksna, slijedi

$$f\left(\frac{u_n+v_n}{2}\right)\le \max\{f(u_n),f(v_n)\}<-n.$$

Odavde, jer $u_n\to u$, $v_n\to v$, zbog neprekidnosti f u z, slijedi da je $f(z)\le-\infty$. Dakle, $x_0\in\{u,v\}$ i $d=\frac{p}{n}$ za neki $n\ge 3$.

Sada, koristeći teoreme 42, 44 i 43. neposredno slijedi

Teorema 45. Neka je f jako kvazikonveksna na konveksnom skupu S, takvom da je $\operatorname{int}S\ne\emptyset$, tada je $N(x)$ ograničen za svaki $x\in S$.

Primjedba. Ova teorema se može dokazati pomoću Teoreme 40. i rezultata J-P. Crouzeix-a [4], da je svaka kvazikonveksna funkcija skoro svuda diferencijabilna.

Razmotrimo opštiji slučaj nivoskih skupova, N_α gdje je $\alpha \in \mathbb{R}$.

Posljedica 8. Neka je f jako kvazikonveksna na konveksnom skupu S, $\mathrm{int}\, S \neq \emptyset$, tada je N_α ograničen za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Dokaz. Neka za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $x \in S$ takav da je $f(x) > \alpha$. U protivnom bi f bila odozgo omeđena na S, pa prema Teoremi 21. slijedi da je S, a tim i svaki N_α ograničen. Dakle, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$ postoji $x \in S$ takav da je $N_\alpha \subseteq N(x)$, a $N(x)$ je ograničen.

Primjedba. Daćemo i neposredan dokaz Teoreme 45.
Neka postoji $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je N_α neograničen, tada postoje $x_0 \in S$ i $v \in \mathbb{R}^n$, $\|v\| = 1$ takvi da za svaki $t \geq 0$ vrijedi $x_0 + tv \in N_\alpha$ i $f(x_0 + tv) \leq \max\{f(x_0), f(x_0 + 2tv)\} - \frac{s}{4}\|2tv\|^2$, odnosno $f(x_0 + tv) \leq \alpha - st^2$. Za svaki $m > 0$ i svaki pozitivan t takav da je $t^2 > \frac{m+\alpha}{s}$ je $f(x_0 + tv) \leq -m$. Slijedi da je f omeđena na neograničenom skupu pa ne može biti jako kvazikonveksna.

Navedimo neke primjene ove teoreme.

Posljedica 9. Neka je f jako kvazikonveksna, odozdo poluneprekidna na konveksnom, zatvorenom skupu S. Tada, problem

$$\min f(x),\ x \in S$$

ima jedinstveno rješenje.

Dokaz. Za neki $x_0 \in S$ vrijedi $\min\limits_{x \in S} f(x) = \min\limits_{x \in N(x_0)} f(x)$, a $N(x_0)$ je kompaktan skup. Jedinstvenost slijedi iz stroge pseudokonveksnosti f.

Posljedica 10. Svaka tačka $x \in \mathbb{R}^n$ ima jedinstvenu projekciju na konveksan zatvoren skup.

Dokaz. Funkcija $f(z) = \|z - x\|^2$ je jako kvazikonveksna i ima na S jedinstven minimum y. Vrijedi, za svaki $z \in S$ da je $\|y - x\| \leq \|z - x\|$, pa je $\|y - x\| = \inf\limits_{z \in S} \|z - x\|$, odnosno $y = \Pi_S(x)$.

4. NEJEDNAKOSTI I PRIMJENE

4.1. Jaka J-kvazikonveksnost i jaka kvazikonveksnost

Funkcija $f:S\to\mathbb{R}$ je J-*konveksna* ako za svaki $x, y\in S$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Teorema 46. [14,str.149] Neka $S\subseteq\mathbb{R}^n$ je konveksan i otvoren skup. Funkcija f je J-konveksna i neprekidna ako i samo ako je konveksna.

Primjer funkcije koja je J-konveksna a nije konveksna dat je u, npr. [2,str.119].

Teorema 47. [15] Neprekidna funkcija f na konveksnom skupu S je kvazikonveksna ako i samo je J-kvazikonveksna, tj.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right)\le\max\{f(x),f(y)\}.$$

Analogno tvrđenje vrijedi i za jako konveksne funkcije. Taj teorem je dat u [6,str.51], a dokaz se može naći u [31]. Mi ćemo prvo dokazati slijedeću lemu.

Lema 4. Neka postoji $r>0$ takav da za svaki $x_1, x_2\in S$, S konveksan, vrijedi

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\le\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}-\frac{r}{4}\|x_1-x_2\|^2, \tag{16}$$

tada, za svaki $n\in\mathbb{N}$ je

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)\le\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\right)-\frac{r}{2n}\,l(x_1,\dots,x_2;n) \tag{17}$$

gdje je $l(x_1,\dots,x_n;n)=\|x_1-x_2\|^2+\|x_3-x_4\|^2+\dots+\|x_{i(n)-1}-x_{i(n)}\|^2$, $i(n)=\begin{cases}n & ,n \text{ nepar.}\\ n-1 & ,n \text{ paran}\end{cases}$.

Dokaz. Prvo, neka je $n=2^k$. Za $k=1$ nejednakost (17) je tačna po pretpostavci. Indukcijski korak:

$$f\left(\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^{k+1}}x_i\right)=f\left(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}x_i+\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i\right)\le\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}x_i\right)+$$

$$+\frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}}x_i\right)\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{i=1}^{2^k}f(x_i)-\frac{r}{2\,2^k}l(x_1,\dots,x_{2^k};2^k)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^k}\sum_{2^k+1}^{2^{k+1}}f(x_i)-\frac{r}{2\,2^k}l(x_{2^k+1},\dots,x_{2^{k+1}};2^k)\right)=$$

$$=\frac{1}{2^{k+1}}\sum_{i=1}^{2^{k+1}} f(x_i)-\frac{r}{2\,2^{k+1}}\, l(x_1,\dots,x_{2^{k+1}};2^{k+1}).$$

Neka je $n\in\mathbb{N}$ proizvoljan, a k i m takvi prirodni brojevi da je $2^k=n+m$. Uz $a=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$ vrijedi $f(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i)=f(\frac{1}{2^k}(\sum_{i=1}^{n}x_i+ma)\le\frac{1}{2^k}(\sum_{i=1}^{n}f(x_i)+mf(a))-$
$-\frac{r}{2\,2^k}\,l(x_1,\dots,x_n,a,\dots,a;2^k)$. Kako je $l(x_1,\dots,x_n,a,\dots,a;2^k)\ge l(x_1,\dots,x_n;n)$, nakon jednostavnih transformacija, slijedi tvrđenje.

Teorema 48 . Ako je f neprekidna na $\mathbb{R}^n$ i za neki $r>0$ i svaki $x,\ y\in\mathbb{R}^n$ vrijedi

$$f(\frac{x+y}{2})\le\frac{f(x)+f(y)}{2}-r\|x-y\|^2,$$

tada f je jako konveksna, i obratno.

Dokaz. Pokažimo da, ako vrijedi (16) onda je f jako konveksna. Neka je $\lambda=\frac{p}{q}\in(0,1)$ racionalan broj. Ako je $p\le q-p$, stavljajući u (17) $x_1=x,\ x_2=y,\dots,$ $x_p=x,\ x_{p+1}=\dots=y$ slijedi da je $l(x_1,\dots,x_n;n)=p\|x-y\|^2$ i $f(\lambda x+(1-\lambda)y)=$

$$=f(\frac{px+(q-p)y}{q})\le\frac{1}{q}(pf(x)+(q-p)f(y))-\frac{r}{2q}p\|x-y\|^2=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-$$

$$-\frac{r}{2}\lambda\|x-y\|^2\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{r}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Ako je $p\ge q-p$, slično slijedi $l(x_1,\dots,x_n;n)=(q-p)\|x-y\|^2$ i $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le$

$$\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{r}{2}(1-\lambda)\|x-y\|^2\le\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)-\frac{r}{2}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2.$$

Kako je f neprekidna funkcija, slijedi da je jako konveksna, sa modulom $\frac{r}{2}$. Obratno se dobije jednostavno, uzimajući da je $\lambda=\frac{1}{2}$, a ako je S otvoren skup, onda je f neprekidna funkcija, jer je konveksna.

Iz prethodnog se može očekivati da analogno tvrđenje vrijedi i za jako kvazikonveksne funkcije. Da nije tako pokazuje slijedeći kontraprimjer.

Primjer 13. Funkcija $f(x)=-x^2$ je jako J-kvazikonveksna, tj. vrijedi

$$f(\frac{x+y}{2})\le\max\{f(x),f(y)\}-\frac{s}{4}\|x-y\|^2,$$

za svaki $x,\ y\in S=[0,+\infty)$ i $s=1$, ali nije jako kvazikonveksna na S.

Neka je $0\le x<y$, tada posljednja nejednakost postaje

$$-(\frac{x+y}{2})^2\le-x^2-\frac{s}{4}(x-y)^2.$$

Uzmimo da je $s=1$. Sada je $(x+y)^2 \geq 4x^2+(x-y)^2$, odnosno $4xy \geq 4x^2$. Primjetimo da je f neprekidna kvazikonveksna, ali nije jako kvazikonveksna (Posljedica 2.)

4.2. Nejednakosti. Brzina konvergencije.

U radovima [12], [13], date su nejednakosti za jako konveksne, odnosno za jako kvazikonveksne funkcije, koje su iskorištene u procjenjivanju brzine konvergencije većine metoda minimizacije. Navedimo te nejednakosti.

Lema 5. [12,str.42] Neka je $f \in C^1(S)$ jako konveksna na zatvorenom konveksnom skupu S, tada za svaki $x \in N(y)$, $y \in S$ vrijedi

$$\|x-y\| \leq \frac{2}{r} \|\nabla f(y)\|^2. \tag{18}$$

Lema 6. [12,str.42] Neka je f jako konveksna na konveksnom,zatvorenom skupu S, $f(x^*)=\min_{x \in S} f(x)$, tada

a) za svaki $x \in S$ vrijedi nejednakost

$$\|x-x^*\|^2 \leq \frac{2}{r}(f(x)-f(x^*)) \tag{19}$$

Ako je pri tom $f \in C^1(S)$, to je

b) $$\|x-x^*\| \leq \frac{1}{r} \|\nabla f(x)\| \tag{20}$$

$$0 \leq f(x)-f(x^*) \leq \frac{1}{r} \|\nabla f(x)\|^2. \tag{21}$$

Lema 7. [12,str.43] Ako jako konveksna funkcija f je klase $C^{1,1}(S)$ na zatvorenom konveksnom skupu S, sa konstantom Lipschitz-a L, tada za svaki $y \in S$ i $x \in L(y)$ vrijedi

$$\|\nabla f(x)\| \leq \sqrt{2+12\frac{L^2}{r^2}} \|\nabla f(y)\|. \tag{22}$$

Kako će biti data poboljšanja ove nejednakosti, navešćemo njen dokazu cjelini,slijedeći [12].

Dokaz. Ako je $\nabla f(y)=0$, onda je i $\nabla f(y)=0$. Neka je $\nabla f(y) \neq 0$ i za neke x, $y \in S$ $\|\nabla f(x)\|^2 > C\|\nabla f(y)\|^2$, $C=\sqrt{2+12\frac{L^2}{r^2}}$. Na osnovu nejednakosti $\|\nabla f(x)\|^2-\|\nabla f(y)\|^2 \leq$ $\leq \|\nabla f(y)\|^2+2\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|^2$, izlazi $(C^2-1)\|\nabla f(y)\|^2 \leq \|\nabla f(x)\|^2-\|\nabla f(y)\|^2 \leq$ $\leq \|\nabla f(y)\|^2+2L^2\|x-y\|^2$. Dalje, koristeći nejednakosti (19)-(22) imamo $\frac{1}{2}\|x-y\|^2 \leq \|x-x^*\|^2+\|y-x^*\|^2 \leq \frac{2}{r}(f(x)-f(x^*))+\frac{1}{r^2}\|\nabla f(y)\|^2 \leq \frac{2}{r}(f(y)-f(x^*))+\frac{1}{r^2}\|\nabla f(y)\|^2 \leq$

$\le \frac{2}{r^2}\|\nabla f(y)\|^2 + \frac{1}{r^2}\|\nabla f(y)\|^2 = \frac{3}{r^2}\|\nabla f(y)\|^2$. Dakle, $(C-1)\|\nabla f(y)\|^2 < (2+12\frac{L^2}{r^2})\|\nabla f(y)\|^2$. Jer je $\|\nabla f(y)\| \neq 0$ dolazimo do nejednakosti $C^2 < 2+12\frac{L^2}{r^2}$. Kontradikcija.

Primjedba. Umjesto nejednakosti $\|x-y\|^2 \le \frac{6}{r}\|\nabla f(y)\|^2$ mogla se direktno koristiti nejednakost (18). Na taj način se dobija implikacija

$$f(x) \le f(y) \implies \|\nabla f(x)\| \le \sqrt{2+8\frac{L^2}{r^2}}\,\|\nabla f(y)\|. \tag{23}$$

Lema 8. [13] Neka je f jako kvazikonveksna funkcija na konveksnom skupu S, tada za svaki $x \in S$ vrijedi

$$\|x-x^*\|^2 \le \frac{4}{s}(f(x)-f(x^*)). \tag{24}$$

Ako je još $f \in C^{1,1}(S)$, S otvoren konveksan skup, onda za svaki $x \in S$ vrijedi

$$0 \le f(x)-f(x^*) \le \frac{L}{2s^2}\|\nabla f(x)\|^2. \tag{25}$$

Za jako kvazikonveksne funkcije vrijedi preciznija nejednakost nego što je (18) za jako konveksne funkcije.

Teorema 49. Neka je S konveksan skup i $f \in C^1(S)$ jako kvazikonveksna, tada za svaki $y \in S$ i $x \in L(y)$ vrijedi

$$\|x-y\| \le \frac{1}{s}\|\nabla f(y)\|. \tag{26}$$

Dokaz. Vrijedi $f(x) \le f(y) \implies \langle \nabla f(y), y-x \rangle \ge s\|x-y\|^2$. Sada je $s\|x-y\|^2 \le$ $\le \langle \nabla f(y), y-x \rangle \le \|\nabla f(y)\|\,\|x-y\|$. Možemo uzeti da je $x \neq y$, jer u protivnom (26) je trivijalna.

Primjedba. Na skupu jako kvazikonveksnih funkcija ova nejednakost se ne može poboljšati, što se vidi iz primjera $f(x)=x$, $S=[0,1]$ i $s=1$.
Specijalno, i za jako kvazikonveksne funkcije vrijedi nejednakost (20).

Naredna teorema daje novo poboljšanje nejednakosti (22).

Teorema 50. Neka je f jako kvazikonveksna funkcija klase $C^{1,1}$, na konveksnom skupu S. Tada za svaki $y \in S$ i $x \in L(y)$ vrijedi

$$\|\nabla f(x)\| \le \sqrt{2+2\frac{L^2}{s^2}}\,\|\nabla f(y)\|. \tag{27}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti $2\|u\|\|v\| \le \|u\|^2+\|v\|^2$ i nejednakosti trougla imamo slijedeće:

$$\|\nabla f(x)\|^2 \le \|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|^2 + 2\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|\|\nabla f(y)\| + \|\nabla f(y)\|^2 \le$$

$$\le 2(\|\nabla f(x)-\nabla f(y)\|^2 + \|\nabla f(y)\|^2) \le$$

$\leq 2(L^2\|x-y\|^2+\|\nabla f(y)\|^2)\leq$, prema (26),

$$\leq 2(L^2\frac{1}{s^2}\|\nabla f(y)\|^2+\|\nabla f(y)\|^2)=2(1+\frac{L^2}{s^2})\|\nabla f(y)\|^2.$$

U slučaju da skup S nije otvoren nejednakost (25) ne vrijedi, kao što pokazuje primjer funkcije $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=x$, sa $L=s=1$. Preciznije, ta nejednakost ne mora biti tačna ako $x^*\notin \operatorname{int} S$. Od nje je grublja slijedeća procjena, ali je korisnija u uslovnoj optimizaciji jer vrijedi i za zatvorene skupove.

Teorema 51. Neka $f\in C^{1,1}(S)$ je jako kvazikonveksna na konveksnom skupu S, tada za svaki $x\in S$ vrijedi

$$0\leq f(x)-f(x^*)\leq \frac{L+\sqrt{2s^2+2L^2}}{2s^2}\|\nabla f(x)\|^2. \tag{28}$$

Dokaz. Na osnovu nejednakosti [27,str.100] slijedi

$$0\leq f(x)-f(x^*)\leq \langle\nabla f(x^*),x-x^*\rangle+\frac{L}{2}\|x-x^*\|^2\leq$$

$$\leq \|\nabla f(x^*)\|\|x-x^*\|+\frac{L}{2s^2}\|\nabla f(x^*)\|^2\leq$$

$$\leq\sqrt{2+2\frac{L^2}{s^2}}\|\nabla f(x)\|\frac{1}{s}\|\nabla f(x)\|+\frac{L}{2s^2}\|\nabla f(x)\|^2=$$

$$=\frac{1}{2s^2}(L+\sqrt{2s^2+2L^2})\|\nabla f(x)\|^2.$$

Primjedba. Ako je f pseudokonveksna na konveksnom skupu S, tada

$$f(x^*)=\min_{x\in S} f(x) \iff \langle\nabla f(x^*),x-x^*\rangle\geq 0 \text{ za svaki } x\in S.$$

Ako je $x^*\in \operatorname{int} S$, tada $\nabla f(x^*)=0$, tako da je $f(x)-f(x^*)\leq\frac{L}{2}\|x-x^*\|^2\leq\frac{L}{2s^2}\|\nabla f(x)\|^2$, što je (25). Takođe, f dostiže minimum na zatvorenom skupu S.

Pređimo na analizu nekih metoda minimizacije funkcije f na skupu S. Metod je *relaksacioni* ako generiše niz $\{x_k\}$ takav da je za svaki $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$

$$x_k\in S \quad \text{i} \quad f(x_{k+1})\leq f(x_k).$$

Takav niz je relaksacioni. Niz je minimizirajući za funkciju f na skupu S ako $f(x_k)\to\inf\{f(x)|x\in S\}$. Ako je f odozdo poluneprekidna, jako kvazikonveksna, a S kompaktan, tada je svaki minimizirajući niz konvergentan.

U [12,str.136] date su procjene za $f(x_k)-f(x^*)$ i $\|x_k-x^*\|^2$ ako je $S=\mathbb{R}^n$, f jako konveksna diferencijabilna, i $\{x_k\}$ relaksacioni niz. Isto je učinjeno u [13] ako je f jako kvazikonveksna, klase $C^{1,1}$ na otvorenom konveksnom skupu. Mi ćemo dokazati sličnu teoremu, bez ograničenja za konveksan skup S.

Dokaz je zasnovan na slijedećoj lemi.

Lema 9. [12,str.133] Neka su $\{a_k\}$, $\{b_k\}$ takvi nizovi realnih brojeva da vrijedi za $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ $a_i > 0$, $b_{i+1} \geq 0$ i $a_i - a_{i+1} \geq a_i b_i$, tada je za svaki $k \in \mathbb{N}$

$$a_k \leq a_0 \, e^{-\sum_{i=0}^{k-1} b_i}.$$

Teorema 52. [12,136] Neka je $S = \mathbb{R}^n$, f diferencijabilna jako konveksna i niz $\{x_k\}$ relaksacioni, tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_k) - f(x^*) \leq (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-r \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}},$$

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \frac{2}{r} (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-r \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}}.$$

Teorema 53. [13] Neka je $f \in C^{1,1}(S)$ jako kvazikonveksna, S otvoren konveksan skup. Ako je $\{k_k\}$ relaksacioni niz, tada za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_k) - f(x^*) \leq (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-\frac{2s^2}{L} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}},$$

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \frac{4}{s} (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-\frac{2s^2}{L} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}}.$$

Teorema 54. Neka je f jako kvazikonveksna, klase $C^{1,1}$ na konveksnom skupu S. Ako je $\{x_k\}$ relaksacioni niz, onda za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$f(x_k) - f(x^*) \leq (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-\frac{2s^2}{L + \sqrt{2s^2 + 2L^2}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}},$$

$$\|x_k - x^*\|^2 \leq \frac{4}{s} (f(x_0) - f(x^*)) \, e^{-\frac{2s^2}{L + \sqrt{2s^2 + 2L^2}} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}}.$$

Dokaz. Uzmimo da je $a_i = f(x_i) - f(x^*)$, i $b_i = \frac{2s^2}{L + \sqrt{2s^2 + 2L^2}} \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2}$.
Ako je za neki $i \in \mathbb{N}$ $a_i = 0$ ili $\nabla f(x_i) = 0$ onda je relaksacioni niz konačan i posljednji član je rješenje problema. U protivnom je $a_i > 0$ i $b_i \geq 0$, a zbog nejednakosti (28) vrijedi

$$a_i - a_{i+1} = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{\|\nabla f(x_i)\|^2} \|\nabla f(x_i)\|^2 \geq a_i b_i,$$ tako da su ispunjeni

uslovi Leme 9., tako da prva nejednakost slijedi iz nje. Druga nejednakost se dobije pomoću prve i nejednakosti (24).

Prethodnu teoremu iskoristićemo za ocjenu brzine konvergencije metode konjugovanih pravaca za bezuslovnu minimizaciju.

Algoritam glasi:

$$x_0 \in \mathbb{R}^n, \quad s_0 = \nabla f(x_0)$$

$$f(x_k - \alpha_k s_k) = \min_{\alpha>0} f(x_k - \alpha s_k), \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$x_{k+1} = x_k - \alpha_k s_k, \qquad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

$$s_k = \nabla f(x_k) - \beta_k s_k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

Varijante ove metode se odlikuju različitim izborom parametra β_k. Mi ćemo posmatrati varijantu, koju je predložio Б.Т. Поляк (1970), a za koju je

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{\|\nabla f(x_{k-1})\|^2}.$$

Vrijede slijedeće osobine metode [12,str.146-150].

Lema 10. Za svaki $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ je $\langle \nabla f(x_{k+1}), s_k \rangle = 0$ i $\langle \nabla f(x_k), s_k \rangle = \|\nabla f(x_k)\|^2$.

Lema 11. Neka za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $\gamma_k = 1 + \beta_k + \beta_k \beta_{k-1} + \dots + \beta_k \beta_{k-1} \dots \beta_1$, tada je

$$\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|} \sqrt{\gamma_k - 1}.$$

Za razliku od navedenog rada narednu lemu daćemo za jako kvazikonveksne funkcije.

Lema 12. Neka je $f \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ je jako kvazikonveksna sa modulom s, i $C = \sqrt{2 + 2\frac{L^2}{s^2}}$, tada vrijedi nejednakost

$$0 \le \beta_k \le C\sqrt{k} \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|}.$$

Dokaz. Prema nejednakosti (27), iz $f(x_m) \le f(x_n)$, $m \ge n$ slijedi da je $\|\nabla f(x_m)\| \le C \|\nabla f(x_n)\|$. Dalje je, $\gamma_k = 1 + \|\nabla f(x_k)\|^2 \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{\|\nabla f(x_i)\|^2} \le 1 + C^2 k$.

Dakle, $\beta_k = \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|} \sqrt{\gamma_k - 1} \le \frac{\|\nabla f(x_k)\|}{\|s_{k-1}\|} C\sqrt{k}$.

Teorema 55. Za uzastopne aproksimacije konstruisane metodom konjugovanih pravaca, ako je $f \in C^{1,1}(\mathbb{R}^n)$ jako kvazikonveksna funkcija vrijede ocjene

$$f(x_k) - f(x^*) \le \frac{f(x_0) - f(x^*)}{k^\gamma},$$
$$\|x_k - x^*\| \le \frac{2(f(x_0) - f(x^*))}{s k^\gamma},$$

za svaki $0 < \gamma \le \dfrac{s^4}{2L^2(s^2+L^2)}$ i $k \in \mathbb{N}$.

Dokaz. Za svaki $\alpha \ge 0$ i $k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$f(x_k) - f(x_{k+1}) \ge f(x_k) - f(x_k - \alpha s_k) \ge \alpha\langle\nabla f(x_k), s_k\rangle - \frac{L}{2}\alpha^2\|s_k\|^2$. Za $\alpha = \dfrac{\langle\nabla f(x_k), s_k\rangle}{L\|s_k\|^2} =$

$$= \frac{\|\nabla f(x_k)\|^2}{L\|s_k\|^2} \text{ je } f(x_k) - f(x_{k+1}) \ge \frac{1}{2L}\frac{\|\nabla f(x_k)\|^4}{\|s_k\|^2} = \frac{1}{2L}\frac{\|\nabla f(x_k)\|^4}{\|\nabla f(x_k)\|^2 + \beta_k^2\|s_k\|^2} \ge$$

$$\ge \frac{1}{2L}\frac{\|\nabla f(x_k)\|^4}{\|\nabla f(x_k)\|^2 + \|\nabla f(x_k)\|^2 C^2 k} = \frac{1}{2L(1+C^2 k)}\|\nabla f(x_k)\|^2 > \frac{1}{2L(1+k)C^2}\|\nabla f(x_k)\|^2.$$

Odavde je $\displaystyle\sum_{i=1}^{k-1}\frac{f(x_k) - f(x_{k+1})}{\|\nabla f(x_k)\|^2} > \frac{1}{2LC^2}\sum_{i=1}^{k-1}\frac{1}{i} > \frac{1}{2LC^2}\ln k.$

Iz Teoreme 55. slijedi da je $f(x_k) - f(x^*) \le (f(x_0) - f(x^*))e^{-\frac{2s^2}{L}\frac{\ln k}{2LC^2}} <$

$< \dfrac{f(x_0) - f(x^*)}{k^\gamma}$, za svaki $0 < \gamma \le \dfrac{s^4}{2L^2(s^2+L^2)}$.

Primjedba. U [12,str.151], pomoću (22) i Teoreme 52, za jaku konveksnost je

$0 < \gamma \le \dfrac{r^3}{4L(r^2+6L^2)}$. Ako iskoristimo nejednákost (23) imamo $0 < \gamma \le \dfrac{r^3}{4L(r^2+4L^2)}$.

Međutim, kako nejednakost (27) važi i za jako konveksne funkcije, uz $s = r$, dobijamo da je $0 < \gamma \le \dfrac{r^3}{4L(r^2+L^2)}$.

4.3. Jedna teorema korektnosti zadatka matematičkog programiranja

Neka funkcije f, g_i preslikavaju $\mathbb{R}^n$ u $\mathbb{R}$, za svaki $i \in \{1,\ldots,m\}$.

Posmatraćemo problem:

$$\text{(P)} \qquad \min_{x \in S} f(x), \quad S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0\},$$

gdje je $g^T(x) = (g_1(x),\ldots,g_m(x))$.

Neka je $f_\varepsilon:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ takva funkcija da za svaki $x\in\mathbb{R}^n$ vrijedi $|f(x)-f_\varepsilon(x)|\le\varepsilon$.

Približan problem sa tačnim ograničenjima, problema (P) je

$$(P_\varepsilon) \qquad \min f_\varepsilon(x),\ x\in S.$$

Dalje, neka su $S^*=\{x^*|\ f(x^*)=\min f(x), x\in S\}$ i $S_\varepsilon^*=\{x_\varepsilon^*|\ f_\varepsilon(x_\varepsilon^*)=\min f_\varepsilon(x), x\in S\}$ neprazni skupovi. Zadatak (P) je *korektan* ako je za $U=S^*\cup S_\varepsilon^*$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\ \sup_{u,v\in U}\|u-v\|.$$

Pretpostavimo da je za svaki $\varepsilon>0$ određena tačka $x_\varepsilon\in S$ takva da je

$$f_\varepsilon(x_\varepsilon)\le f_\varepsilon(x_\varepsilon^*)+h(\varepsilon),\quad h(\varepsilon)>0.$$

U [12,str.108] dokazana je teorema korektnosti problema (P), ako je f jako konveksna funkcija. To tvrđenje ostaje na snazi i za jako kvazikonveksne funkcije,

Teorema 56. Neka je

a) funkcija f jako kvazikonveksna na konveksnom zatvorenom skupu S,

b) f_ε je neprekidna na S i $|f_\varepsilon(x)-f(x)|\le\varepsilon$, za svaki $x\in S$,

c) $\lim_{\varepsilon\to 0} h(\varepsilon)=0$, tada je $\lim_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon=x^*$, a problem (P) je korektan.

Dokaz. Ova teorema se dokazuje kao u [12] (izdanje iz 1986), samo što se umjesto nejednakosti (21) za jako konveksne koristi (24) za jako kvazikonveksne funkcije.

5. KVAZIKONVEKSNI SKUPOVI I FUNKCIJE

Ovdje ćemo navesti pojam kvazikonveksnog skupa, uopštenje konveksnog skupa, i to iskoristiti za karakterizaciju kvazikonveksnih i jako kvazikonveksnih funkcija.

Definicija 3. Tačke $x, y \in \mathbb{R}^n$ su *istog nivoa* ako i samo ako je $x_n = y_n$.

Jasno je da vrijedi slijedeće. Tačke $x, y \in \mathbb{R}^n$ su istog nivoa ako i samo ako je

$$x - y \in \mathbb{R}^{n-1} \oplus \{0\}.$$

Definicija 4. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je *kvazikonveksan* ako i samo ako za svake dvije tačke istog nivoa $x, y \in S$ i svaki $\lambda \in [0,1]$ je $\lambda x + (1-\lambda) y \in S$.

Neposredno slijedi da je svaki konveksan skup kvazikonveksan, te da je presjek kvazikonveksnih skupova kvazikonveksan skup.

Teorema 57. [3] Funkcija f je kvazikonveksna, na konveksnom skupu S ako i samo ako je $\mathrm{Epi}\, f$ kvazikonveksan skup.

Takođe, iz prethodnog slijedi da, ako je $\{f_i \mid i \in I\}$ familija kvazikonveksnih funkcija, to je i $f(x) = \sup\{f_i(x) \mid i \in I\}$ kvazikonveksna funkcija, jer je $\mathrm{Epi}\, f = \bigcap_{i \in I} \mathrm{Epi}\, f_i$.

Ako je $\{S_i \mid i \in I\}$ rastuće filtrirana familija kvazikonveksnih skupova, tada je $S = \bigcup_{i \in I} S_i$ kvazikonveksan skup. Zaista, Neka su $x, y \in S$ istog nivoa. Postoje skupovi S_i, S_j, S_k takvi da je $x \in S_i$, $y \in S_j$ i $S_i \cup S_j \subseteq S_k$. Kako je S_k kvazikonveksan, to za svaki $\lambda \in [0,1]$ je $\lambda x + (1-\lambda) y \in S_k \subset S$.

Teorema 58. Ako je $\{f_i \mid i \in I\}$ konačna familija padajuće filtriranih kvazikonveksnih funkcija, na konveksnom skupu S. Tada je funkcija $f(x) = \inf\{f_i(x) \mid i \in I\}$ kvazikonveksna na S.

Dokaz. Iz uslova slijedi da za svake dvije funkcije f_i i f_j postoji funkcija f_k takva, da za svaki $x \in S$ je $f_k(x) \le \max\{f_i(x), f_j(x)\}$, pa je $\mathrm{Epi}\, f_i \cup \mathrm{Epi}\, f_j \subset \mathrm{Epi}\, f_k$. Sada je $\{\mathrm{Epi}\, f_i \mid i \in I\}$ rastuće filtrirana familija kvazikonveksnih skupova, i $\bigcup_{i \in I} \mathrm{Epi}\, f_i = \mathrm{Epi}\, f$ je kvazikonveksan skup.

Primjedba. Tvrđenje je tačno i u slučaju da I nije konačan, što je dokazano u [3].

Jako konveksne skupove definisali su E.C. Левитин i Б.Т. Поляк (1963).

Definicija 4. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je *jako konveksan* ako postoji $d>0$ takav da za svaki $x,y \in S$ presjek svih kugli poluprečnika d, koje sadrže x i y je podskup od S.

Slijedeće teoreme dao je J-P. Vial.

Teorema 59. [28] Neka je $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jako konveksna, tada svi njeni nivoski skupovi su jako konveksni.

Teorema 60. [28] Neka je $f\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jako kvazikonveksna, lokalno Lipschitz neprekidna i $\alpha_0 = \inf f(x)$. Ako za svaki $\alpha > \alpha_0$ postoji M_α takav da iz $x \in N_\alpha$ i $g \in \partial f(x)$ slijedi $\|g\| \leq M_\alpha$, tada su svi nivoski skupovi jako konveksni sa $d = \frac{M_\alpha}{2s}$. Još više, L_α su ograničeni, i f dostiže minimum u jedinstvenoj tački.

Primjedba. Posljednjoj rečenici posvećena je Teorema 44.

U istom radu razvijena je lokalna koncepcija jake konveksnosti. Funkcija f je *lokalno jako konveksna* u $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ako postoje $\varepsilon > 0$ i $r_\varepsilon > 0$ tako da definiciona nejednakost za jako konveksne funkcije važi za svaki $x,y \in K(x_0,\varepsilon)$, pri $r = r_\varepsilon$. Funkcija f je *lokalno jako konveksna* na S ako je takva u svakoj tački $x_0 \in S$. Skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ je *lokalno jako konveksan* u $x_0 \in S$ ako za neki $\varepsilon > 0$ postoji $d_\varepsilon > 0$ takav da je $K(x_0,\varepsilon) \cap S$ jako konveksan skup sa $d = d_\varepsilon$.

Teorema 61. [28] Funkcija $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je lokalno jako konveksna ako i samo ako je Epi f lokalno jako konveksan skup.

Navedene pojmove prenijećemo na kvazikonveksnost.

Neka je $K_d = \{K(x,d) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$ i za svake dvije tačke x,y takve da je $\|x-y\| \leq 2d$ definišimo skup $D_d(x,y) = \bigcap_{\substack{K \in K_d \\ x,y \in K}} K.$

Definicija 5. Skup $S \subset \mathbb{R}^n$ je jako kvazikonveksan ako postoji $d>0$ takav da za svake dvije tačke istog nivoa $x,y \in S$ je $D_d(x,y) \subseteq S$.

Svaki jako konveksan skup je jako kvazikonveksan, a ovi su kvazikonveksni. Takođe, svaki jako konveksan skup je ograničen, jer vrijedi $\operatorname{diam} S \leq 2$. Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jako kvazikonveksan tada je skup $S \cap H(e_n,\alpha)$ ograničen za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

Lema 13. Ako je $S \subseteq \mathbb{R}^n$ jako kvazikonveksan skup sa konstantom d, tada za svake dvije tačke istog nivoa $x,y\in S$ i svaki $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$K(\lambda x+(1-\lambda)y, \frac{1}{2d}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2)\subseteq S.$$

Dokaz. Neka su $x,y\in S$ istog nivoa, kugla $K\in K_d$ takva da $x,y\in \operatorname{bd}K$. Neka je $z=\lambda x+(1-\lambda)y$ i $\lambda\in[0,\frac{1}{2}]$ (zbog određenosti). Dalje, uzmimo da je $w=\prod_{\mathbb{R}^n-\operatorname{int}K}(z)$ $\|z-w\|=\rho$ i $\|x-y\|=l$. Vrijedi $K(z,\rho)\subset K$, $\|z-x\|=(1-\lambda)l$, $(d-\rho)^2=d^2+$ $+[(1-\lambda)l-\frac{1}{2}]^2-(\frac{1}{2})^2$, odnosno $2d\rho=\rho^2+\lambda(1-\lambda)l^2$, odakle je $\rho>\frac{\lambda(1-\lambda)}{2d}l^2=\delta$.

Dakle, $K(z,\delta)\subset K$, pa je $K(z,\delta)\subset D_d(x,y)$. Zaključno,

$$x,y\in S \Longrightarrow K(z,\delta)\subseteq S.$$

Primjedba. Vrijedi i obratno tvrđenje. Na način Vial-a [28,str.196], može se pokazati da je za svaki $\varepsilon>0$

$$D_{d+\varepsilon}\subseteq \bigcup_{0\le\lambda\le1} K(\lambda x+(1-\lambda)y,\frac{1}{2d}\lambda(1-\lambda)\|x-y\|^2).$$

Definicija 6. Funkcija f je *lokalno jako kvazikonveksna* u $x_0\in\mathbb{R}^n$ ako postoje $\varepsilon>0$ i $s_\varepsilon>0$ tako da nejednakost (1) važi za svaki $x,y\in K(x_0,\varepsilon)$, uz $s=s_\varepsilon$.

Teorema 62. Neka je $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ lokalno Lipschitz neprekidna. Ako je Epi f lokalno jako kvazikonveksan skup, onda je f lokalno jako kvazikonveksna funkcija, i obratno.

Dokaz. Neka su $z_0=(x_0,f(x_0))$, $\varepsilon>0$ i $d_\varepsilon>0$ takvi da je $K(z_0,\varepsilon)\cap \operatorname{Epi}f$ jako kvazikonveksan skup. Iz uslova slijedi da je f neprekidna na $K(z_0,\varepsilon)$, pa postoji $\eta\in(0,\frac{\varepsilon}{2}]$ takav da vrijedi $x\in K(x_0,\eta)\Longrightarrow (x,f(x))\in K(z_0,\frac{\varepsilon}{2})$.

Neka su $x_1,x_2\in K(x_0,\eta)$ takvi da je $f(x_1)\le f(x_2)$. Vrijedi slijedeće

$$\{(x_1,f(x_2)),(x_2,f(x_2))\}\subset K(z_0,\varepsilon)\cap\operatorname{Epi}f.$$

Prema Lemi 13. je $K(\lambda(x_1,f(x_2))+(1-\lambda)(x_2,f(x_2)),\frac{1}{2d_\varepsilon}\lambda(1-\lambda)\|(x_1,f(x_2))-(x_2,f(x_2))\|^2)=$ $=K((\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,f(x_2)),\frac{1}{2d_\varepsilon}\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_2\|^2)\subseteq K(z_0,\varepsilon)\cap\operatorname{Epi}f$. Odavde je $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le f(x_2)-\frac{1}{2d_\varepsilon}\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_2\|^2$, pa je f lokalno jako kvazikonveksna sa $s_\varepsilon=\frac{1}{2d_\varepsilon}$.

Neka je sada, f lokalno jako kvazikonveksna i $(x_0,t)\in \mathrm{Epi}f$. Bez umanjenja opštosti, uzmimo da je $t=f(x_0)$. Postoje $\varepsilon>0$, $s_\varepsilon>0$ takvi da za svaki $x_1,x_2\in$ $\in K(x_0,\varepsilon)$, $t\ge\max\{f(x_1), f(x_2)\}$ i $\lambda\in[0,1]$ je $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le t-\lambda(1-\lambda)s_\varepsilon\|x_1-x_2\|^2$.

Neka $(x_1,t),(x_2,t)\in \mathrm{Epi}f\cap K((x_0,f(x_0)),\varepsilon)$. Vrijedi $K(\lambda(x_1,t)+(1-\lambda)(x_2,t),s_\varepsilon\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_2\|^2)\subset \mathrm{Epi}f$ i , jer je kugla jako konveksna $K(\lambda(x_1,t)+(1-\lambda)(x_2,t),\frac{1}{2\varepsilon}\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_2\|^2)\subset K((x_0,f(x_0)),\varepsilon)$. Sada je skup $K((x_0,f(x_0)),\varepsilon)\cap \mathrm{Epi}f$ jako kvazikonveksan sa $d_\varepsilon=\frac{1}{2\min\{\varepsilon,s_\varepsilon\}}$, pa je $\mathrm{Epi}f$ lokalno jako kvazikonveksan.

6. KVAZIKONVEKSNE VIŠEZNAČNE FUNKCIJE

Neka su X i Y normirani prostori, n(Y) familija svih nepraznih podskupova od Y i $F:X\to n(Y)$. Opšti problem optimizacije

$$f(y)\to \inf\ ,\ y\in F(x_0) \tag{29}$$

su Dolecki i Kurcyusz [8] doveli u vezu sa

$$L(y,\varphi,x_0)\to \inf \tag{30}$$

gdje je Lagranžijan $L(y,\varphi,x_0)=f(y)-\sup\limits_{x\in F^{-1}(y)}\varphi(x)+\varphi(x_0)$,

a φ pripada klasi funkcija Φ koja je invarijantna na sabiranje sa konstantom.

U [8] je dokazano da su problemi (29) i (30) ekvivalentni ako je primarni funkcional

$$\overline{fF}(x)=\inf\{f(y)\,|\,y\in F(x)\} \tag{31}$$

Φ-subdiferencijalan u x_0, tj. postoji $\varphi_0\in\Phi$ tako da je

$$\overline{fF}(x)-\overline{fF}(x_0)\geq\varphi_0(x)-\varphi(x_0).$$

Slučaj familije $\Phi=\{\varphi\,|\,\varphi(x)=k-c\|x-\overline{x}\|^2, k\in\mathbb{R}, c>0, \overline{x}\in X\}$ posmatrao je S. Rolewicz u [23] i došao do pojmova parakonveksnosti i γ-parakonveksnosti. Međutim, parakonveksnost (γ-parakonveksnost) višeznačne funkcije F povlači da ona ima konveksne vrijednosti, što je ograničavajuće. Stoga je definisana graf γ- parakonveksnost. Ovdje ćemo uopštiti ove pojmove i pokazati da su osnovne osobine sačuvane.

6.1. Konveksne višeznačne funkcije

Poznato je da je F konveksna, tj. vrijedi (6) ako i samo ako njen graf

$$\Gamma(F)=\{(x,y)\in X\times Y\,|\,y\in F(x)\}$$

je konveksan skup.

Dokazaćemo dvije inkluzije za konveksne višeznačne funkcije i dati neke posljedice

Lema 14. Neka je $F:X\to n(Y)$ konveksna, tada za svaki $x\in X$ i $n\in\mathbb{N}$ vrijedi

$$F(nx)\subset nF(x)-(n-1)F(0). \tag{32}$$

Dokaz. Dovoljno je u (6) staviti $x_1=nx$, $x_2=0$, $\lambda=\frac{1}{n}$ i iskoristiti činjenicu da za skupove vrijedi $A+B\subset C \Longrightarrow A\subset C-B$.

Teorema 63. Neka je $F:[0,+\infty)\to n(Y)$ konveksna, tada za svaki $x_1,\dots,x_n>0$ vrijedi

$$F(x_1+\dots+x_n)\subset F(x_1)+\dots+F(x_n)-(n-1)F(0). \tag{33}$$

Dokaz. Indukcija. Neka je $n=2$. Vrijedi za $x_1,x_2>0$, zbog konveksnosti F

$$\frac{x_1}{x_1+x_2}F(x_1+x_2)+\frac{x_2}{x_1+x_2}F(0)\subset F(x_1) \text{ i } \frac{x_2}{x_1+x_2}F(x_1+x_2)+\frac{x_1}{x_1+x_2}F(0)\subset F(x_2).$$

Kako je za svaki x skup $F(x)$ konveksan slijedi

$$F(x_1+x_2)+F(0)\subset F(x_1)+F(x_2).$$

Dokaz je kompletiran sa

$$F(x_1+\dots+x_n+x_{n+1})\subset F(x_1+\dots+x_n)+F(x_{n+1})-F(0)\subset F(x_1)+\dots+F(x_n)+$$
$$+F(x_{n+1})-nF(0).$$

Primjedba. Mogli smo dokazati

$$F(x_1+\dots+x_n)+nF(0)\subset F(x_1)+\dots+F(x_n), \tag{34}$$

pa $nF(0)$ prebaciti na desnu stranu inkluzije.

Posljedica 11. [14,str.197] Neka je $f:[0,a)\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija. Tada za svaki $n\in\mathbb{N}$ i svaki $x_1,\dots,x_n\in[0,a)$ tako da $x_1+\dots+x_n\in[0,a)$ vrijedi

$$f(x_1+\dots+x_n)\geq f(x_1)+\dots+f(x_n)-(n-1)f(0).$$

Ovo je nejednakost M. Petrovića (1932).

Dokaz. Neka $F:[0,a)\to n(\mathbb{R})$, $F(x)=\{t\,|\,t\geq f(x)\}$. Pošto je f konveksna, to je i F višeznačna konveksna funkcija. Na osnovu posljednje inkluzije vrijedi $(n-1)f(0)+f(x_1+\dots+x_n)\in F(x_1)+\dots F(x_n)=\{t\,|\,t\geq f(x_1)+\dots+f(x_n)\}$, odakle slijedi nejednakost.

Posljedica 12. [26,str.15] Ako je $F:[0,+\infty)\to n(Y)$ konveksna, i $0\in F(0)$ tada je F je subaditivna tj. za svaki $x_1,\ x_2\in[0,+\infty)$ vrijedi $F(x_1+x_2)\subset F(x_1)+F(x_2)$.

Dokaz. Koristeći (34) za $n=2$ imamo

$$F(x_1+x_2)=\{0\}+F(x_1+x_2)\subset F(0)+F(x_1+x_2)\subset F(x_1)+F(x_2).$$

Napomenimo da je skup $S\subset X$ ograničen ako za svaku okolinu U nule u X postoji broj $t>0$ takav da je $tS\subset U$. Višeznačna funkcija F je ograničena na skupu $S\subset X$ ako je skup $F(S)=\bigcup\{F(x)\,|\,x\in S\}$ ograničen u Y. Funkcija F je ograničena ako za svaki ograničen skup $S\subset X$, skup $F(S)$ je ograničen u Y.

F je poluneprekidna odozgo u smislu Berge-a, u $0 \in X$ ako za svaki otvoren skup $G \subset Y$ takav da $F(0) \subset G$ postoji okolina U nule u X takva da vrijedi

$$x \in U \Longrightarrow F(x) \subset G.$$

Od značaja je ograničenost višeznačnih funkcija.

Teorema 64. [26,str.39] Neka je $F: X \to n(Y)$ odozgo poluneprekidna u smislu Berge-a, u nuli, $F(0)$ ograničen, X i Y linearni topološki prostori i za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $F(nx) \subset nF(x)$, tada je F ograničena.

Primjedba. Funkcija $F: \mathbb{R} \to n(\mathbb{R})$, $F(x)=\{1\}$ je ograničena, a ne ispunjava uslove teoreme.

Za konveksne višeznačne funkcije $F: X \to n(Y)$, gdje je X linearan topološki, a Y lokalno konveksan prostor vrijedi:

Teorema 65. Neka je F konveksna, odozgo poluneprekidna u nuli, $F(0)$ ograničen u Y, tada je F ograničena.

Dokaz. Neka je V proizvoljna okolina nule u Y, $W \subset V$ konveksna, uravnotežena ($\alpha W \subset W$ za svaki $|\alpha| \leq 1$) okolina nule. Postoji $t>0$ takav da je $tF(0) \subset W$. Jer je F poluneprekidna postoji uravnotežena okolina U nule u X za koju je $F(U) \subset \frac{1}{t}W$. Neka je S ograničen podskup od X. Izaberimo takav $n \in \mathbb{N}$ da je $S \subset nU$. Jer je F konveksna, koristeći (32) dobijamo, za svaki $x \in S$

$$F(x)=F(n\frac{x}{n}) \subset nF(\frac{x}{n})-(n-1)F(0) \subset nF(U)-(n-1)F(0) \subset \frac{n}{t}W-\frac{n-1}{t}W \subset \frac{2n-1}{t}W.$$

Primjedba. U knjizi **Б.Н. Пшеничный, Выпуклый анализ и экстремальные задачи, Наука, Москва,** 1980. na str. 97. ova teorema je dokazana u slučaju da su X i Y konačno dimenzionalni euklidski prostori, a F konveksna, zatvorena ($\Gamma(F)$ je zatvoren skup) višeznačna funkcija.

6.2. Kvazikonveksne višeznačne funkcije

Definiciju ovih funkcija, datu u uvodu (str. 7), možemo kraće zapisati kao: F je kvazikonveksna ako za svaki $x_1, x_2 \in X$ vrijedi

$$F(x_1) \cap F(x_2) \subset \cap \{F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \mid \lambda \in [0,1]\}.$$

Definicija 7. Višeznačna funkcija $G:X\to n(Y)$ je *kvazikonkavna* ako je

$$G^c(x)=Y\setminus G(x)$$

kvazikonveksna.

Lako se vidi da je G kvazikonkavna ako i samo ako za svaki $x_1,x_2\in X$, $\lambda\in[0,1]$ je

$$G(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subset G(x_1)\cup G(x_2).$$

Definicija 8. Skup $S\subseteq X\times Y$ je *kvazikonveksan* ako za svaki par tačaka istog nivoa $(x_1,y)\in S$, $(x_2,y)\in S$ i svaki $\lambda\in[0,1]$ je $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,y)\in S$.

Naravno, svaki konveksan skup je kvazikonveksan.

Teorema 66. Funkcija $F:X\to n(Y)$ je kvazikonveksna ako i samo ako je graf $\Gamma(F)\subset X\times Y$ kvazikonveksan skup.

Dokaz. Neka je F kvazikonveksna i $(x_1,y)\in\Gamma(F)$ i $(x_2,y)\in\Gamma(F)$. Tada je $y\in F(x_1)$ i $y\in F(x_2)$, pa je $y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$, za svaki $\lambda\in[0,1]$, odnosno, vrijedi $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,y)\in\Gamma(F)$. Dakle, $\Gamma(F)$ je kvazikonveksan skup.
Obratno, neka $y\in F(x_1)\cap F(x_2)$. Sada (x_1,y) i (x_2,y) pripadaju $\Gamma(F)$ pa i $(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2,y)\in\Gamma(F)$, odakle je $y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$, za svaki $\lambda\in[0,1]$, te je F kvazikonveksna.

Teorema 67. Svaka konveksna višeznačna funkcija je kvazikonveksna.

Dokaz. Iz inkluzije (6), uzimajući da je $x_1=x_2$ dobija se za svaki $\lambda\in[0,1]$

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(x_1),$$

pa je za svaki $x_1\in X$, skup $F(x_1)$ konveksan. Sada je za svaki $\lambda\in[0,1]$

$$F(x_1)\cap F(x_2)=\lambda(F(x_1)\cap F(x_2))+(1-\lambda)(F(x_1)\cap F(x_2))\subset\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

Primjedba. Mogli smo iskoristiti Teoremu 66. Dakle, ako je F konveksna tada je $\Gamma(F)$ konveksan skup, a tim i kvazikonveksan, pa je F kvazikonveksna.

Navedimo nekoliko važnih primjera funkcija koje su kvazikonveksne, ali nisu konveksne.

Primjer 14. Konstantna funkcija $F:X\to n(Y)$, $F(x)=S\subset Y$ je konveksna ako i samo ako je S konveksan skup.

Ovo je zato što vrijedi $\Gamma(F)=X\times S$. Međutim, ona je uvijek kvazikonveksna jer je $F(x_1)\cap F(x_2)=F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)=S$.

Primjer 15. Neka $f:X\to\mathbb{R}$, $S=\{\alpha\in\mathbb{R}|N_\alpha\neq\emptyset\}$. Funkcija $N:S\to n(X)$, $N(\alpha)=N_\alpha$ je kvazikonveksna, jer iz $x\in N(\alpha_1)\cap N(\alpha_2)$ slijedi $f(x)\leq\min\{\alpha_1,\alpha_2\}\leq\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2$, pa je $x\in N(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)$.

Bez dodatnih uslova za f, N ne mora biti konveksna. Na primjer, neka je $X=\mathbb{R}$ i $f(x)=1-x^2$, tada je $N(0)=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$ nekonveksan skup, pa N nije konveksna.

Međutim, ako je f konveksna funkcija, tada je N konveksna višeznačna funkcija. Zaista, neka je $x=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\lambda N(\alpha_1)+(1-\lambda)N(\alpha_2)$. Vrijedi, za svaki $\lambda\in[0,1]$ $f(x)\leq\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)\leq\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2$, pa je $x\in N(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)$.

Primjer 16. Neka je $S\subseteq\mathbb{R}^n$ je konveksan skup, i $f:S\to\mathbb{R}$ konveksna funkcija. Funkcija $\Delta:S\to n(\mathbb{R}^n)$ koja svakoj tački $x\in S$ pridružuje subdiferencijal $\Delta(x)=\{x^*\,|\,f(y)-f(x)\geq\langle x^*,y-x\rangle,\ \forall y\in S\}$ je kvazikonveksna, ali ne mora biti konveksna, kao u slučaju $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=|x|$.

Teorema 68. Neka su $F,G:X\to n(Y)$ kvazikonveksne, a $H:X\to n(Y)$ konkavna višeznačna funkcija. Tada su $F\cap G$, $F\backslash H$ kvazikonveksne funkcije, ako je $(F\cap G)(x)=F(x)\cap G(x)$ i $(F\backslash H)(x)=F(x)\backslash H(x)$. Ako još vrijedi implikacija $x_1\neq x_2 \Rightarrow F(x_1)\cap G(x_2)=\emptyset$, onda je $F\cup G$ kvazikonveksna funkcija.

Dokaz. Jer je $\Gamma(F\cap G)=\Gamma(F)\cap\Gamma(G)$, a presjek kvazikonveksnih skupova je kvazikonveksan skup slijedi da je $F\cap G$ kvazikonveksna. $F\backslash H$ je kvazikonvek- jer je H^c kvazikonveksna i $F\backslash H=F\cap H^c$.
Na kraju, za $x_1\neq x_2$ je $(F(x_1)\cup G(x_1))\cap(F(x_2)\cup G(x_2))=(F(x_1)\cap F(x_2))\cup(G(x_1)\cap G(x_2))$ $\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\cup G(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$. Za $x_1=x_2$ implikacija je trivijalna.

Za višeznačnu funkciju koja je kvazikonveksna i kvazikonkavna kažemo da je kvazimonotona. U tom slučaju za svaki x_1, $x_2\in X$ i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$F(x_1)\cap F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\subset F(x_1)\cup F(x_2).$$

Pored konstantne, takva je i funkcija $\alpha\to N(\alpha)$ (Primjer 15.). Pokažimo da je kvazikonkavna. Neka je $x\in N(\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2)$, tada je $f(x)\leq\lambda\alpha_1+(1-\lambda)\alpha_2$, pa nije $f(x)>\alpha_1$ i $f(x)>\alpha_2$, odakle je $x\in N(\alpha_1)\cup N(\alpha_2)$.

Neka $F:X\to n(Y)$ i $G:Y\to n(Z)$, gdje je i Z vektorski prostor. Kompozicija ovih funkcija $H:X\to n(Z)$ data je sa

$$H(x)=(G\circ F)(x)=\bigcup\{G(y)\mid y\in F(x)\}.$$

Teorema 69. Neka je F konveksna, G kvazikonveksna, tada je $G\circ F$ kvazikonveksna višeznačna funkcija.

Dokaz. Neka je $z\in H(x_1)\cap H(x_2)$, tada za neke $y_1\in F(x_1)$ i $y_2\in F(x_2)$ je ispunjeno $z\in G(y_1)$ i $z\in G(y_2)$. Vrijedi za svaki $\lambda\in[0,1]$,

$$\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \text{ i}$$

$$z\in G(y_1)\cap G(y_2)\subset G(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2).$$

Dakle, $z\in G(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)$ i $\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$, pa je

$$z\in\bigcup\{G(y)\mid y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\}=H(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2).$$

Primjedba. **Ako je F kvazikonveksna, nekonveksna, onda H ne mora biti kvazikonveksna funkcija, kao što pokazuje slijedeći primjer.**

Primjer 17. Neka je $X=Y=Z=\mathbb{R}$, $G=N$ iz primjera 15., a $F(x)=\begin{cases}\{0,x\}, & x\in\mathbb{R}\setminus\{\frac{1}{2}\}\\ \{0\}, & x=\frac{1}{2}\end{cases}$.

F je nekonveksna i kvazikonveksna:

$\frac{1}{2}F(0)+\frac{1}{2}F(1)=\{0,\frac{1}{2}\}\not\subset\{0\}=F(\frac{0+1}{2})$, i za svaki $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$F(x_1)\cap F(x_2)=\{0\}\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$. Kompozicija $H=G\circ F$ nije kvazikonveksna,

jer za $\lambda=\frac{2}{3}$ vrijedi $H(\frac{1}{4})\cap H(1)=((-\infty,-\frac{\sqrt{3}}{2})\cup(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty))\cap\mathbb{R}\not\subset(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)=H(\frac{1}{2})$.

Neka $f:X\to\mathbb{R}$. Definišimo funkciju E_f na slijedeći način:

$E_f:X\to n(\mathbb{R})$, $E_f(x)=\{t\in\mathbb{R}\mid f(x)\le t\}$. Vrijedi

Teorema 70. Višeznačna funkcija E_f je kvazikonveksna ako i samo ako je f kvazikonveksna funkcija.

Dokaz. Neka je $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\max\{f(x_1),f(x_2)\}$ i $t\in E_f(x_1)\cap E_f(x_2)$, slijedi $t\ge f(x_1)$ i $t\ge f(x_2)$, odakle za svaki $\lambda\in[0,1]$ je $t\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$, odnosno $t\in E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$.

Obratno, neka je E_f kvazikonveksna višeznačna, a f nije kvazikonveksna funkcija. Postoje tačke x_0, x_1, x_2, $x_0 \in [x_1, x_2]$ takve da je $f(x_0) > \max\{f(x_1), f(x_2)\}$. Neka je $f(x_1) \le f(x_2)$, tada je $f(x_2) \in E_f(x_1) \cap E_f(x_2) \subset E_f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ za svaki $\lambda \in [0,1]$. Specijalno, odavde je $f(x_2) \in E_f(x_0)$ ili $f(x_0) \le f(x_2)$. Kontradikcija.

Analogno se dokazuje da je E_f kvazikonkavna ako i samo ako je f kvazikonkavna funkcija tj. za svaki x_1, $x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\min\{f(x_1), f(x_2)\} \le f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2).$$

Iz ovog slijedi da je E_f kvazimonotona ako i samo ako je f kvazimonotona funkcija (kvazikonveksna i kvazikonkavna).

Na primjer, $f(x) = \frac{\langle a, x\rangle + \alpha}{\langle b, x\rangle + \beta}$ je kvazimonotona na konveksnom skupu S, $S \subset \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle b, x\rangle \ne -\beta\}$.

Na kraju primjetimo da je problem matematičkog programiranja (P)

$$\inf f(x),\ x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \le 0\}$$

poseban slučaj problema (29), kada $F = N: \alpha \to N_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}^m$. Rješenje problema je $\overline{fN}(0)$, gdje saglasno sa (31) $\overline{fN}(\alpha) = \inf\{f(x) \mid x \in N_\alpha\}$.

Vidjeli smo da je F kvazikonveksna bez obzira na prirodu funkcije f (Primjer 15. , Teorema 68. i Teorema 69.).

6.3. Parakonveksne i parakvazikonveksne funkcije

Neka su X i Y normirani prostori.

Definicija 9. [23] $F: X \to n(Y)$ je *parakonveksna* ako postoji $r > 0$ takav da za svaki x_1, $x_2 \in X$ i $\lambda \in [0,1]$ vrijedi

$$\lambda F(x_1) + (1-\lambda)F(x_2) \subset F(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) + r\|x_1 - x_2\|^2 K_Y \tag{35}$$

gdje je K_Y jedinična kugla u Y.

Očigledno je da je svaka konveksna višeznačna funkcija parakonveksna, sa proizvoljnim $r > 0$. Takođe, svaka vrijednost F(x) je konveksan skup.

Teorema 71. [23] Neka je X hilbertov prostor i $f:X\to\mathbb{R}$. Višeznačna funkcija E_f je parakonveksna ako i samo ako postoji konveksna funkcija g takva da je

$$f(x)=g(x)-r\|x\|^2\ ,\ r>0. \tag{36}$$

Drugim riječima f je slabo konveksna funkcija. Kažemo da je f *slabo konveksna* ako postoji $r>0$ takav da za svaki $x_1,\ x_2\in X$ i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+r\lambda(1-\lambda)\|x_1-x_2\|^2. \tag{37}$$

Primjedba. Za $r=0$ f je konveksna, a za $r<0$ jako konveksna. Zajednički naziv za ove funkcije je *r-konveksne.*
Dokaz ekvivalentnosti uslova (36) i (37) može se naći u [23] ili [29].

Na desnoj strani nejednakosti (37) može se izostaviti $\lambda(1-\lambda)$ jer vrijedi:

Teorema 72. Funkcija f je slabo konveksna ako postoji $r_1>0$ takav da za svaki $x_1,\ x_2\in X$ i $\lambda\in[0,1]$ je

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+r_1\|x_1-x_2\|^2. \tag{38}$$

Dokaz. Iz nejednakosti (37) slijedi (38) sa $r_1=\frac{r}{4}$ jer je $4\lambda(1-\lambda)\le1$.
Neka vrijedi (38) i neka je $t\in\lambda E_f(x_1)+(1-\lambda)E_f(x_2)$. Sada je $t=\lambda t_1+(1-\lambda)t_2$, gdje je $f(x_1)\le t_1$ i $f(x_2)\le t_2$. Kako je $E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+r_1\|x_1-x_2\|^2K_Y=\{t\,|\,t\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-$ $-r_1\|x_1-x_2\|^2\}$ i $f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda t_1+(1-\lambda)t_2+r_1\|x_1-x_2\|^2=t+r_1\|x_1-x_2\|^2$ slijedi da je $t\in E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+r_1\|x_1-x_2\|^2K_Y$.

Zaključno, prema prethodnoj teoremi, E_f je parakonveksna, pa se f može predstaviti u obliku (36), te vrijedi (37).

Kažemo da $F:X\to n(Y)$ ispunjava uslov Lipschitz-a, [23], ako postoji broj $L>0$, takav da vrijedi

$$A\subset B+dK_X \Longrightarrow F(A)\subset F(B)+LdK_Y.$$

Teorema 73. [23] Neka je F parakonveksna, G konveksna višeznačna funkcija koja ispunjava uslov Lipschitz-a, tada je $G\circ F$ parakonveksna.

Sada ćemo uopštiti pojam parakonveksnosti i pokazati da se navedene osobine čuvaju.

Definicija 10. Funkcija $F:X\to n(Y)$ je *parakvazikonveksna* ako postoji $s>0$ takav da za svaki x_1, $x_2\in X$, i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$F(x_1)\cap F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+s\|x_1-x_2\|^2 K_Y. \tag{39}$$

Svaka kvazikonveksna višeznačna funkcija je para kvazikonveksna. Isto kao i Teorema 67. dokazuje se slijedeća teorema.

Teorema 74. Svaka parakonveksna funkcija je parakvazikonveksna.

Teorema 75. Višeznačna funkcija E_f je parakvazikonveksna ako i samo po stoji $s>0$ takav da za svaki x_1, $x_2\in X$ i $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\max\{f(x_1),f(x_2)\}+s\|x_1-x_2\|^2. \tag{40}$$

Dokaz. Neka je E_f parakvazikonveksna i $x_1,x_2\in X$, $\lambda\in[0,1]$ i $f(x_1)\le f(x_2)$. Tada je $f(x_2)\in E_f(x_1)\cap E_f(x_2)\subset E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+s\|x_1-x_2\|^2K_Y$.

Postoji $t\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ i $k\in[-1,1]$ tako da je $f(x_2)=t+s\|x_1-x_2\|^2k$. Sada je $f(x_2)\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-s\|x_1-x_2\|^2$, pa vrijedi (40).

Obratno, neka je (40) i $t\in E_f(x_1)\cap E_f(x_2)$. Imamo da je $t\ge f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)-$ $-s\|x_1-x_2\|^2$, odnosno $t+s\|x_1-x_2\|^2\in E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$. Pošto je $K_Y=[-1,1]$ to je $-s\|x_1+x_2\|^2\in s\|x_1-x_2\|^2K_Y$, pa sa prethodnim je

$$t\in E_f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+s\|x_1+x_2\|^2K_Y.$$

Teorema 76. Neka je F parakonveksna, G kvazikonveksna višeznačna funkcija koja ispunjava uslov Lipschitz-a, tada je $G\circ F$ parakvazikonveksna.

Dokaz. Jer je G kvazikonveksna, vrijedi za svaki $\lambda\in[0,1]$ i x_1, $x_2\in X$

$$G(F(x_1))\cap G(F(x_2))\subset G(\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)).$$

Dalje, jer je G lipšiceva i F zadovoljava (35) slijedi

$$G(\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2))\subset G(F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))+Lr\|x_1-x_2\|^2 K_Z,$$

te je $G\circ F$ parakvazikonveksna sa $s=Lr$.

6.4. γ- Parakonveksnost i γ- parakvazikonveksnost

Pojam parakonveksnosti S. Rolewicz je uopštio na slijedeći način.

Definicija 11. [24] $F:X\to n(Y)$ je γ-parakonveksna, $\gamma>0$ ako za svaki $x_1,x_2\in X$ i svaki $\lambda\in[0,1]$ vrijedi

$$\lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+r\|x_1-x_2\|^{\gamma}K_Y. \tag{41}$$

Vidimo da je 2-parakonveksna funkcija parakonveksna. U navedenom radu dokazana je teorema analogna Teoremi 73. ,kao i slijedeća.

Teorema 77. Neka je F γ-parakonveksna višeznačna funkcija. Ako je $\gamma>2$ tada je F konveksna.

Dokaz je zasnovan na narednoj lemi.

Lema 15. [24] Neka je $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ apsolutno neprekidna i za svaki $x_1,x_2\in\mathbb{R}$, $\lambda\in[0,1]$ vrijedi $\quad f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)+r|x_1-x_2|^{\gamma}$.

Ako je $\gamma>2$ onda je f konveksna funkcija.

Sada ćemo definisati γ- parakvazikonveksne funkcije i postaviti odgovarajuće pitanje.

Definicija 12. F je γ-*parakvazikonveksna* ako je (41) zamijenjen sa

$$F(x_1)\cap F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+s\|x_1-x_2\|^{\gamma}K_Y. \tag{42}$$

Odgovor na pitanje ako za svaki $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ i $\lambda\in[0,1]$ i neki $\gamma>2$, vrijedi

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le\max\{f(x_1),f(x_2)\}+s|x_1-x_2|^{\gamma},$$

da li je f kvazikonveksna, je negativan.

Primjer 18. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^4$ nije kvazikonveksna, a prethodna nejednakost vrijedi za $\gamma=4$ i $s=1$.

Zaista, Neka su x_1, $x_2\in\mathbb{R}$ i $\lambda\in[0,1]$. Ekvivalentno je slijedeće

$$-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)^4\le\max\{-x_1^4,-x_2^4\}+(x_1-x_2)^4,$$

$$\min\{x_1^4,x_2^4\}\le(x_2+\lambda(x_1-x_2))^4+(x_1-x_2)^4.$$

Dalje, neka je $x_1^4\le x_2^4$ i $x_1\ne x_2$ i $x_1\ne 0$. Slijedi da je $(x_2>0\wedge x_1\in[-x_2,x_2])\vee$ $\vee(x_2<0\wedge x_1\in[x_2,-x_2])$ i $x_1^4\le(x_2+\lambda(x_1-x_2))^4+(x_1-x_2)^4$.

Neka je $\varphi(\lambda)=(x_2+\lambda(x_1-x_2))^4$, $\lambda\in[0,1]$. Zbog $\varphi'(\lambda)=0 \Longleftrightarrow \lambda=\frac{x_2}{x_2-x_1}$, ako je $x_1x_2<0$, slijedi da je $0<\frac{x_2}{x_2-x_1}<1$, pa je $\min\varphi(\lambda)\in\{\varphi(0),\varphi(1),\varphi(\frac{x_2}{x_2-x_1})\}=\{x_1^4,x_2^4,0\}$.

Dakle, $\varphi(\lambda)+(x_1-x_2)^4\geq(x_1-x_2)^4\geq x_1^4$. Za $x_1x_2>0$ je $\min\varphi(\lambda)\in\{x_1^4,x_2^4\}$, odakle je $x_1^4\leq\min\varphi(\lambda)+(x_1-x_2)^4\leq\varphi(\lambda)+(x_1-x_2)^4$.

Zbog činjenice da i γ- parakonveksnost povlači da F ima konveksne slike definisane su graf γ-parakonveksne višeznačne funkcije.

Definicija 12. [25] F je *graf γ-parakonveksna* , $1<\gamma\leq 2$, ako postoji $c>0$ takav da za svaki par (x_1,y_1), (x_2,y_2), $y_1\in F(x_1)$, $y_2\in F(x_2)$ i svaki $\lambda\in[0,1]$ postoji y_λ takav da vrijedi

$$y_\lambda\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), \tag{43}$$

$$\|y_\lambda-(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2\|\leq c(\|x_1-x_2\|^\gamma+\|y_1-y_2\|^\gamma). \tag{44}$$

Tu je dokazana važna teorema o primarnoj funkciji.

Teorema 78. [25] Neka su X, Y Hilbertovi prostori, S konveksan podskup od Y, $f:S\to\mathbb{R}$, ispunjava uslov Lipschitz-a sa $L>0$, uniformno strogo konveksna je: postoji $k>0$ tako da

$$f(\frac{y_1+y_2}{2})\leq\frac{f(y_1)+f(y_2)}{2}-k\|y_1-y_2\|^2.$$

Ako je $S\cap F$ graf 2-parakonveksna sa konstantom c i

$$cL\leq k$$

tada primarna funkcija $\overline{fF}_S(x)=\inf\{f(y)|y\in F(x),\ y\in S\}$ je oblika $\overline{fF}_S(x)=w(x)-c\|x\|^2$, gdje je $w(x)$ konveksna funkcija.

Primjedba. Na osnovu Teoreme 48. vidimo da je f jako konveksna funkcija. U suštini imamo, uz dodatne uslove da, ako je f jako konveksna onda je $\overline{fF}_S$ slabo konveksna funkcija.

Primjer 19. Kvazikonveksna višeznačna funkcija ne mora ispunjavati uslove (43), (44), a vrijednosti ne moraju biti konveksni skupovi.

Neka je $F:\mathbb{R}\to n(\mathbb{R})$, $F(x)=\{0,x\}$. F je kvazikonveksna. Neka za $\frac{1}{n}\in F(\frac{1}{n})$, $0\in F(-\frac{1}{n})$ i $\lambda=\frac{1}{2}$ postoji $y_\lambda\in F(0)$ takav da vrijedi (44). Mora biti $y_\lambda=0$ i $|0-\frac{1}{2n}|\leq c((\frac{2}{n})^\gamma+(\frac{1}{n})^\gamma)$, odakle je $\frac{1}{2n}\leq c\frac{2^\gamma+1}{n^\gamma}$ ili

$\frac{1}{2(2^\gamma+1)}\leq c\frac{1}{n^{\gamma-1}}$, nemoguće jer je $\gamma-1>0$.

Definicija 13. Funkcija F je *graf γ-parakvazikonveksna*, $\gamma>0$ ako uslovi (43) i (44) vrijede za svaki par istog nivoa, tj. za koje je $y_1=y_2$.

Sada ćemo vidjeti da nismo dobili novu klasu višeznačnih funkcija.

Teorema 79. F je graf γ-parakvazikonveksna ako i samo ako je γ-parakvazikonveksna.

Dokaz. Neka je F graf γ-parakvazikonveksna i (x_1,y), (x_2,y) takvi da je $y\in F(x_1)$ i $y\in F(x_2)$. Za svaki $\lambda\in[0,1]$ postoji $y_\lambda\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ za koji je $\|y_\lambda-y\|\le c\|x_1-x_2\|^\gamma$. Odavde je $y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+c\|x_1-x_2\|^\gamma K_Y$, pa vrijedi (42) i F je γ-parakvazikonveksna sa $s=c$.

Obratno, neka $y\in F(x_1)$ i $y\in F(x_2)$. Iz (42) slijedi da postoje $y_\lambda\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ i $k_\lambda\in K_Y$ takvi da je $y=y_\lambda+s\|x_1-x_2\|^\gamma k_\lambda$, za svaki $\lambda\in[0,1]$.

Dakle, $\|y-y_\lambda\|\le s\|x_1-x_2\|^\gamma$, pa su ispunjeni (43) i (44), uz $y_1=y_2=y$.

Analogno Teoremi 78. imamo

Teorema 80. Neka su X,Y Hilbertovi prostori, $S\subseteq Y$ konveksan skup, J- jako kvazikonveksna funkcija $f:S\to\mathbb{R}$ zadovoljava uslov Lipschitz-a, $S\cap F$ je graf 2- parakonveksna i $4cL<s$, tada je funkcija $\overline{fF}_S$ J- slabo kvazikonveksna.

Dokaz. Neka su x_1, x_2 takvi da je $S\cap F(x_i)\neq\emptyset$, $i\in\{1,2\}$. Za svaki $\varepsilon>0$ uzmimo $y_1\in F(x_1)$ i $y_2\in F(x_2)$ takve da vrijedi za $i\in\{1,2\}$

$$f(y_i)\le\overline{fF}_S(x_i)+\varepsilon.$$

Za svaki $\lambda\in[0,1]$ postoji $y_\lambda\in S\cap F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)$ takav da je

$$\|y_\lambda-(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\|\le c(\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2).$$

Dalje je $|f(y_\lambda)-f(\lambda y_1+(1-\lambda)y_2)|\le cL(\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2)$, odakle je za $\lambda=\frac{1}{2}$

$$f(y_\lambda)\le\max\{f(y_1),f(y_2)\}-\frac{s}{4}\|y_1-y_2\|^2+cL(\|x_1-x_2\|^2+\|y_1-y_2\|^2).$$

Zbog uslova $4cL\le s$ vrijedi

$$f(y_{\frac{1}{2}})\le\max\{\overline{fF}_S(x_1),\overline{fF}_S(x_2)\}+cL\|x_1-x_2\|^2+\varepsilon.$$

Jer je $\varepsilon>0$ proizvoljan i $y_{\frac{1}{2}}\in F(\frac{x_1+x_2}{2})$ to je

$$\overline{fF}_S(\frac{x_1+x_2}{2})\le\max\{\overline{fF}_S(x_1),\overline{fF}_S(x_2)\}+cL\|x_1-x_2\|^2,$$

tako da je $\overline{fF}_S$ J- jako kvazikonveksna sa modulom $4cL$.

Na kraju navedimo još jednu teoremu ovog tipa, uz $S=Y$.

Teorema 81. Neka su X, Y normirani prostori, $f:Y\to\mathbb{R}$ kvazikonveksna i zadovoljava uslov Lipschitz-a. Ako je $F:X\to n(Y)$ parakvazikonveksna, sa osobinom

$$[y_1,y_2]\cap F(x_1)\cap F(x_2)\neq\emptyset, \tag{45}$$

za svaki par (x_1,y_1), (x_2,y_2) iz $\Gamma(F)$, tada je primarna funkcija

$$\overline{fF}(x)=\inf\{f(y)\mid y\in F(x)\}$$

slabo kvazikonveksna.

Dokaz. Neka su x_1, $x_2\in X$ i $\varepsilon>0$ prioizvoljni. Neka $y_i\in F(x_i)$ takvi da je $f(y_i)\le\overline{fF}(x_i)+\varepsilon$ za $i\in\{1,2\}$. Prema (45) postoji $y\in[y_1,y_2]$ takav da je $y\in F(x_1)\cap F(x_2)$.

Sada je $f(y)\le\max\{f(y_1),f(y_2)\}$ i $y\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))+s\|x_1-x_2\|^2$ za svaki $\lambda\in[0,1]$.

Postoje $y_0\in F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2))$ i $k\in K_Y$ takvi da je $y=y_0+s\|x_1-x_2\|^2k$. Dalje je $f(y_0)\le f(y)+sL\|x_1-x_2\|^2\le\max\{f(y_1),f(y_2)\}+sL\|x_1-x_2\|^2$ ili

$\overline{fF}(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\le f(y_0)\le\max\{\overline{fF}(x_1),\overline{fF}(x_2)\}+sL\|x_1-x_2\|^2+\varepsilon.$

Primjedba. Višeznačna funkcija $F:\mathbb{R}\to n(\mathbb{R}^2)$, $F(x)=T(x)\cup T(-x)$ gdje je $T(x)=\mathrm{co}\{(0,0),(x,0),(x,x)\}$ je parakvazikonveksna, ispunjava uslov (45), ali nije graf 2-parakonveksna. Uzmimo $y_1=(\frac{1}{n},\frac{1}{n})\in F(\frac{1}{n})$, $y_2=(0,0)\in F(-\frac{1}{n})$ i $\lambda=\frac{1}{2}$.

Samo je $y_\lambda=(0,0)\in F(0)$. Uslov (44) nije ispunjen za $\gamma=2$, jer je $\|y_\lambda-\frac{y_1+y_2}{2}\|=\frac{1}{\sqrt{2}n}\le c(\|y_1-y_2\|^2+|x_1-x_2|^2)=c\frac{6}{n^2}$. Nemoguće.

Primjedba. Uslov (45) može se oslabiti na slijedeći način: Postoji broj $k>0$ takav da za svaki $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ iz $\Gamma(F)$ postoje $y_0\in[y_1,y_2]$ i $y_3\in F(x_1)\cap F(x_2)$,

uz $\|y_0-y_3\|\le k\|x_1-x_2\|^2$. (46)

Naravno, uslov (45) povlači (46) sa $y_0=y_3$.

Takođe, zahtjev da je $F(x_1)\cap F(x_2)\neq\emptyset$ za svaki x_1,x_2, može se izbjeći tako da se posmatraju funkcije $F:X\to n(Y)$ takve da je

a) $F(x_1)\cap F(x_2)\neq\emptyset \Longrightarrow F(x_1)\cap F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+s\|x_1-x_2\|^2$,

b) $F(x_1)\cap F(x_2)=\emptyset \Longrightarrow \lambda F(x_1)+(1-\lambda)F(x_2)\subset F(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)+r\|x_1-x_2\|^2$.

LITERATURA

[1] Avriel,Dievert,Schaible,Ziemba: Introduction to Concave and Generalized Concave Functions (u Generalized Concavity in Optimization and Economics ed Ziemba) 1981,21-50

[2] Blanuša,D: Viša matematika,2 dio,2 svezak, Tehnička knjiga, Zagreb 1973.

[3] Bragard, L: Envelopes Quasi-convexes de fonctions. Bull.de la Soc Roy. des Sci de Liege,9-10 (1972)462-467.

[4] Crouzeix, J-P: A review of continuity and differentiability properties of quasi-convex functions on R .(u "Convex analysis and Optimization" eds: Vinter, Aubin) 1972, 18-34.

[5] Crouzeix, J-P: A second order condition for quasiconvexity. Math. Program. 18(1980)349-352.

[6] Демянов, Васильев: Недифференцируемая Оптимизация. Москва. Наука. 1981.

[7] Diewert, Avriel, Zang: Nine Kinds of Quasiconcavity and Concavity, University of British Columbia. 1977.

[8] Dolecki, Kurcyusz: On Φ—convexity in extremal problems. SIAM J. Control, Optim. 16(1978)277-300.

[9] Эльстер : Введение в Нелинейное программирование. Наука. Москва. 1985.

[10] Ferland, J: Mathematical Programming Problems With Quasi-Convex Objective Functionts. Math. Program. 3(1972)296-301.

[11] Greenberg, Pierskala: A review of quasi-convex functions. Operations Res. 1971.1553-1570.

[12] Karmanov, V: Programmation Mathématique Mir Moscou. 1977,

[13] Кораблев, А.И: О релаксационных методах минимизации псевдовыпуклых функций. Изв. вузов. Математ. Казань. 10(1978)99-101.

[14] Kuczma, M: An introduction to the theory of functonal equations and inequalities. PWN Katowice. 1985.

[15] Longinetti, M: An Inequlity for Quasi-Convex Functions. Appl. Anal. 13(1982)93-96.

[16] Looney, C.G: Convergence of Minimizing Sequens. J. of Math. Anal. and Appl. 61(1977)835-840.

[17] Martos, B:Nonlinear Programming, Theory and Methods. Akad. Kiado, Budapest. 1975.

[18] Mereau,P. Paqet,Y-G: Second order conditions for pseudo-convex functions, SIAM J. Appl.Math. Vol.27.N°1.(1974)131-137.

[19] Mond,B: Generalized Convexity in Mathematical Programming Bull. Austral.Math.Soc. 27(1983)185-202.

[2o] Поляк, Б.Т: Теоремы существования и сходимости минимизирующчих последователъностей для задач при наличии ограничений. Докл. АН СССР. 2(1966)287-290.

[21] Rockafellar,R.T: Saddle points of Hamiltonian system in convex Lagrange problems having a nonzero discont rate. J. Econ. Theory. 12(1976)71-113.

[22] Рокафеллар: Выпуклый анализ. Мир. Москва. 1973.

[23] Rolewicz,S: On paraconvex multifunctions. Oper. Res-Verfahren. 31(1978)539-546.

[24] Rolewicz,S: On γ-paraconvex multifunctions. Math. Japonica. 3(1979) 293-300.

[25] Rolewicz,S: On graph γ-paraconvex multifunctions.(u "Special Topics of applied mathematics",eds: Frehse, Pallaschke, Trottenberg. North Holland. 1980) 213-217.

[26] Smajdor,W: Subadditive and subquadratic set-valued functions. Univ. Slaski, Katowice, 1987.

[27] Васильев: Численные методы решения экстремальных задач. Наука. Москва. 1980.

[28] Vial, J-P: Strong Convexity of Sets and Functions. J. of Math. Econ. 9(1982)187-205.

[29] Vial J-P: Strong and weak convexity of sets and functions. Math. of Oper. res.2(1983)231-259.

[30] Владимиров, Нестеров, Чеканов: О равномерно квазивыпуклых функционалов. Вест. Моск. ун-та. Вычислит. мат. и киберн. 4(1978)18-27.

[31] Zhuang Jiannan: On R.T. Rockafellar's strongly conved functions with model α. J. Nanjing Univ. Math. Biquartely. 1(1986)54-59. (Podatak je iz РЖ Матемтика АН СССР 1987. 1. str. 15.)