

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Далибор Пиварски

РАЗВОЈ АЛГЕБРЕ У ИНДИЈИ ДО XVI ВЕКА

МАСТЕР РАД

Београд, 2024.

Ментор:

проф. др Зоран Петровић, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Александар Липковски, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

проф. др Марко Радовановић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Породици, жени и ћерки Елени

Наслов мастер рада: Алгебра у Индији до 16. века

Резиме: Рад ће истражити значајан развој алгебре у Индији до 16. века, разматрајући доприносе индијских математичара и њихове утицаје на глобалну математичку традицију. У уводном поглављу представиће се основни контекст истраживања, објашњавајући значај проучавања индијске алгебре и основне разлоге за интересовање за овај период. Следи преглед индијских математичара који су активно допринели развоју алгебре до 16. века. Истражиће се радови Брахмагуптеа, Бхаскаре I и Бхаскаре II, и њихова улога у развоју алгебарских метода и теорија. Након тога, пажња ће бити усмерена на најважнија индијска дела аритметике из тог периода. Детаљно ће се размотрити кључни текстови као што су Брахмагуптеова *Brāhmasphuṭasiddhānta* и Бхаскаре II-јева *Siddhānta Śiromani*, објашњавајући њихов садржај и допринос развоју математике. Развој пропорција и линеарних једначина у индијској математици биће анализиран кроз представљање метода и техника које су индијски математичари користили за решавање ових врста једначина. Ово укључује конкретне примере и примењене методе. Квадратне једначине ће бити разматране у контексту различитих проблема и решења. Разгледаће се методе за трансформацију правоугаоника у квадрат, прорачуни збирова чланова аритметичких низова и решавање квадратних једначина. Примери ће илустровати примењене методе и технике. Концепт нуле ће бити детаљно истражен, укључујући њену примену у математичким прорачунима и утицај на развој алгебре. Овде ће се објаснити како је концепт нуле коришћен у различитим математичким контекстима. Недетерминисане једначине биће разматране у смислу метода њиховог решавања и примена у индијској математици. Поглавље о децималном систему и броју π ће укључити анализу приближних метода за израчунавање π , развој децималног система и концепт бесконачности. Такође, размотрени ће бити несавршени квадратни бројеви и методе њиховог приближног израчунавања. Истраживање линеарних конгруенција и метода дробилице у индијској математици биће представљено кроз анализу техника решавања ових проблема. Пелова једначина и њене примене у индијској математици ће бити објашњене, укључујући методе и значај у развоју теорије бројева. На крају, биће размотрени концепти и методе за израчунавање сума редова у индијској математици. Ова структура ће пружити свеобухватан преглед развоја алгебре у Индији до 16. века, истичући доприносе индијских математичара и утицај њихових метода на каснији развој математичке науке.

Кључне речи: анализа, геометрија, алгебра, логика, астрономија, једначине

Садржај

1.	Увод.....	1
2.	Индијски математичари који су се бавили алгебром до 16. века.....	4
3.	Најважнија индијска дела аритметике до 16. века.....	10
4.	Пропорције и линеарне једначине.....	14
5.	Квадратне једначине	20
5.1.	Проблем трансформације правоугаоника у квадрат	20
5.2.	Збир чланова аритметичког низа	22
5.3.	Решења квадратне једначине	26
6.	Концепт нуле.....	34
7.	Недетерминисане једначине	40
8.	Децимални систем и број π	42
8.1.	Приближно израчунавање π	42
8.2.	Децимални систем.....	43
8.3.	Концепт бесконачности	45
8.4.	Несавршени квадратни бројеви	47
9.	Линеарне конгруенције и метода дробилице.....	51
10.	Пелова једначина	55
11.	Суме редова.....	60
12.	Закључак.....	64
13.	Литература	65
14.	Биографија аутора.....	66

1. Увод

За разлику од Кине, Индија никада није била потпуно уједињена током древног или средњовековног периода. Често су владари у једном или другом од малих краљевстава на индијском потконтиненту освајали веће области и успостављали царства, али ретко која су опстајала дуже од једног века. На пример, убрзо након смрти Александра Великог 323. године пре нове ере, *Čandragupta Maurya*¹ (око 340 – 298. п.н.е.) је ујединио северну Индију, док је његов унук *Ashoka* (304 – 232. п.н.е.) проширио Мауријску власт на већи део потконтинента, остављајући натписе који садрже најраније писане доказе индијских бројева урезане на стубовима широм царства. Међутим, након Ашокине смрти, његови синови су се борили око наслеђа, и царство се брзо распало. Раних година четвртог века нове ере, северна Индија је поново била уједињена под династијом Гупата, која је подстицала уметност и медицину, као и ширење хиндуистичке културе у суседним областима југоисточне Азије. Само две генерације након врхунца под Чандром Гуптом II (владао око 375 – 415. нове ере), и ово царство се срушило под ударима са северозапада. Без обзира на промене династија и величине краљевстава, многи индијски владари су подстицали проучавање астрономије како би осигурали тачне одговоре на календарне и астролошке упите.

¹Chandragupta Maurya (Чандрагупта Маурија) је оснивач Мауријске династије и први владар који је успео да уједини готово целу Индију под јединствену централизовану власт. Пореклом из сиромашне морјанске породице продат је у ропство, а купио га је један брамански политичар који му је пружио образовање из војних вештина, али и уметности.



Слика 1. Статуа Чандрагупта Маурија

Најраније математичке идеје које сигурно можемо приписати индијским изворима налазе се у ***Sulba-sutras***-има, делима која потичу негде у првом миленијуму пре нове ере. Већина идеја садржаних у овим текстовима су геометријске, али многи проблеми се могу сматрати геометријском алгебром. Међутим, индијска математика у првом миленијуму нове ере није се ослањала на геометријску алгебру из *Sulba –sutrassa*. Заправо, оно што ми сматрамо алгебром у индијском контексту је чисто алгоритамско.

Први трагови таквих идеја у делу идентификованог индијског математичара могу се наћи у „***Aryabhatiya***“ (око 500. године нове ере), који, попут већине дела која садрже математику (*gan.ita*) током наредних хиљаду година, било је претежно астрономско и припадало је жанру ***siddhanta***² (или астрономских трактата), Његов аутор, ***Aryabhata***³ (рођен 476. године нове ере), живео је близу Гупске престонице Pataliputra (данас Patna) на реци Ганг у Бихар-у на северу Индије, и иако није тврдио оригиналност у свом раду, чини се да је учествовао у добро успостављеној математичкој традицији. Иако су индијски корени алгебарских идеја које је Арјабхата представио непознати (сам

²*Siddhanta* – санскритски термин који означава устаљено и прихваћено гледиште било које одређене школе унутар индијске филозофије; дословно, „устаљено мишљење или доктрина, догма, аксиом, прихваћена или призната истина; било који фиксни или утврђени или канонски уџбеник о било којој теми“.

³*Aryabhata* – индијски математичар и астроном, први из класичног периода индијске математике и астрономије. Остварио је врхунац свог остварења током гупта ере и произвео дела као што су Арјабатија и Арја-сидханта.

Арјабхата је тврдио да су му оне божански откривене), знамо да су он и његови наследници били креативни математичари, који су отишли даље од практичног решавања проблема *siddhante* како би развили нове области математике – посебно алгебру – која их је заинтересовала.

Још једна кључна карактеристика овог математичког рада је његов облик. Као и већина средњовековних индијских текстова, састављен је у санскритском стиху. Санскрит, који је првобитно био говорни језик, постао је, до средине првог миленијума, заједнички језик индијске науке, иако је већина Индијаца говорила неким од многобројних других језика. У том смислу, санскрит и средњовековни латински су служили сличним сврхама. Будући да се санскрит поштовао као света реч, текстови су били осмишљени да се рецитују и памте. Захтеви поетског облика често су надмашивали оне техничке јасноће и резултирали су производњом, на крају крајева, додатних прозних коментара самог аутора или каснијих учењака.

Централно математичко поглавље *Арјабатије* састоји се од тридесет и три стиха, при чему сваки садржи кратко правило за одређену врсту рачунања. Захтеви поезије чине нека правила загонетним, али уз помоћ коментара *Bhaskara I* (раног седмог века нове ере) и два математичка поглавља *Brahmasphutasiddhante od Brahmagupte* (раног седмог века нове ере), написана око 628. године нове ере, углавном је могуће разумети значење *Aryabhat*-ове поруке.

Ово поглавље ће истражити средњовековну индијску алгебарску мисао у делима Арјабхате и Брахмагупте пре него што пређе на разматрање доприноса каснијих индијских математичара таквим темама као што су решавање одређених и неодређених једначина, укључујући такозвану Пелову једначину $Dx^2 + 1 = y^2$, где су D , x и y позитивни цели бројеви. Завршиће са освртом на неке од напреднијих алгебарских тема у раду Керал школе, која је почела у XIV веку на југу Индије и трајала је преко две стотине година.

2. Индијски математичари који су се бавили алгебром до 16. века

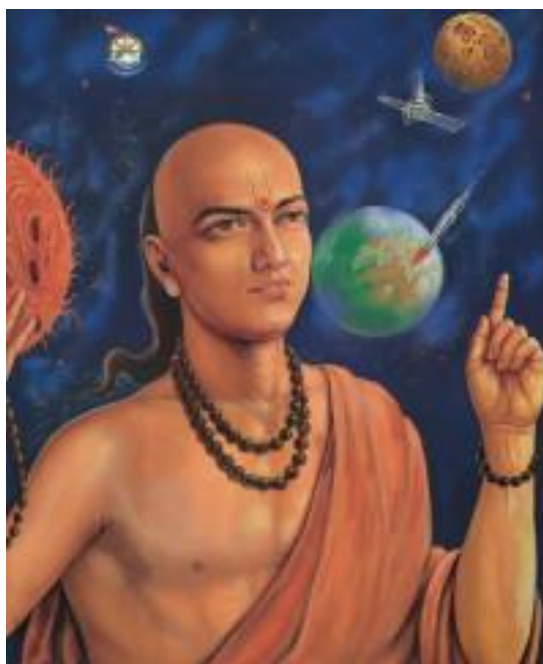
Индија је пре 16. века била центар математичких истраживања и дом многих кључних математичара који су значајно допринели развоју алгебре. Ови математичари су кроз своја дела и иновације поставили темеље за даљи напредак не само индијске, већ и светске математике.

Арја Бхата, који је живео од 476. до 550. године, био је један од најранијих великих индијских математичара и астронома. Његово дело *Aryabhatiya* представља прекретницу у историји математике. У њему је развио методе за решавање квадратних једначина и систематизовао аритметичке и геометријске прогресије. Његово израчунавање приближне вредности за π било је изузетно прецизно за то време и показује високу разину математичког разумевања. Арја Бхатин рад је био пионирски у многим областима, укључујући и тригонометрију, која је уско повезана са алгебром.



Слика 2. Арја Бхата, индијски математичар и астроном, (476-550)

Варахамихра, који је живео између 505. и 587. године, био је још један истакнути математичар и астроном. Његово дело *Pancha-Siddhantika* обухватало је широк спектар астрономских и математичких знања. Иако је био више познат по својим радовима у астрономији и астрологији, Варахамихра је дао значајан допринос развоју тригонометрије, што је касније имало импликације и на алгебру. Његов рад је био мост између архаичних метода и новијих математичких концепата који су се развијали у Индији.



Слика 3. Варахамихра, индијски математичар и астроном (505-587)

Брахмагупта, који је живео од 598. до 668. године, један је од најважнијих математичара средњовековне Индије. Његово дело *Brāhmasphuṭasiddhānta* обухвата многе аспекте математике, укључујући аритметику, алгебру и астрономију. Брахмагупта је први увео концепт нуле као броја и развио правила за аритметичке операције са нулом, што је било револуционарно за тадашње математичко схватање. Његова правила за решавање квадратних једначина и рад са негативним бројевима поставила су стандарде за касније математичке радове не само у Индији, већ и у исламском свету и Европи.



Слика 4. Брахмагупта, индијски математичар и астроном (598-668)

Бхаскара I, који је живео око 600. до 680. године, познат је по својим коментарима и објашњењима Арја Бхатиних радова. У својим коментарима на *Aryabhatiya*, Бхаскара I је додатно развио алгебарске методе и унапредио израчунавања користећи децимални систем, који је тада био у повоју. Његов рад је био од суштинског значаја за даљи развој математичких метода у Индији.



Слика 5. Бхаскара I, индијски математичар и астроном (600-680)

У 9. веку, **Махавира** је написао дело *Ganitasarasangraha*, које је постало класично дело у индијској математици. У овом раду, Махавира је обрадио различите алгебарске теме, укључујући линеарне и квадратне једначине, проблеме са процентима и аритметичке низове. Његов рад је био свеобухватан и детаљан, пружајући чврсту основу за касније математичаре и учењаке.

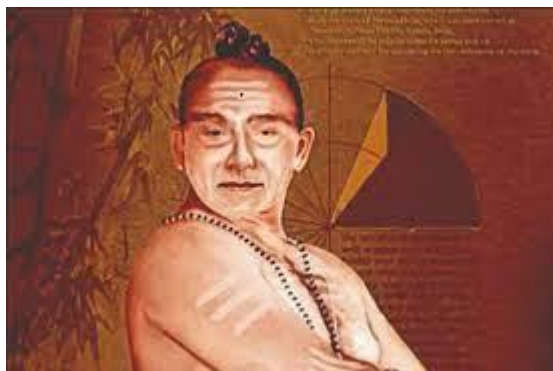
Бхаскара II, познат и као Бхаскарачаруа, живео је од 1114. до 1185. године и сматра се једним од највећих математичара средњовековне Индије. Његова дела *Lilavati* и *Bijaganita* су међу најважнијим радовима у индијској математици. *Lilavati* се бави аритметиком, док *Bijaganita* обухвата алгебру, где Бхаскара II развија методе за решавање квадратних једначина, истражује **несавршене квадратне бројеве**⁴ и проучава концепт бесконачности. Његови радови су били толико утицајни да су дуго остали основни текстови у математичком образовању у Индији.

⁴ Односи се на бројеве који нису квадрати целих бројева, тј. не могу се написати у облику n^2 , где је $n \in \mathbb{Z}$.



Слика 6. Бхаскара II, познат и као Бхаскарачаруа, (1114-1185)

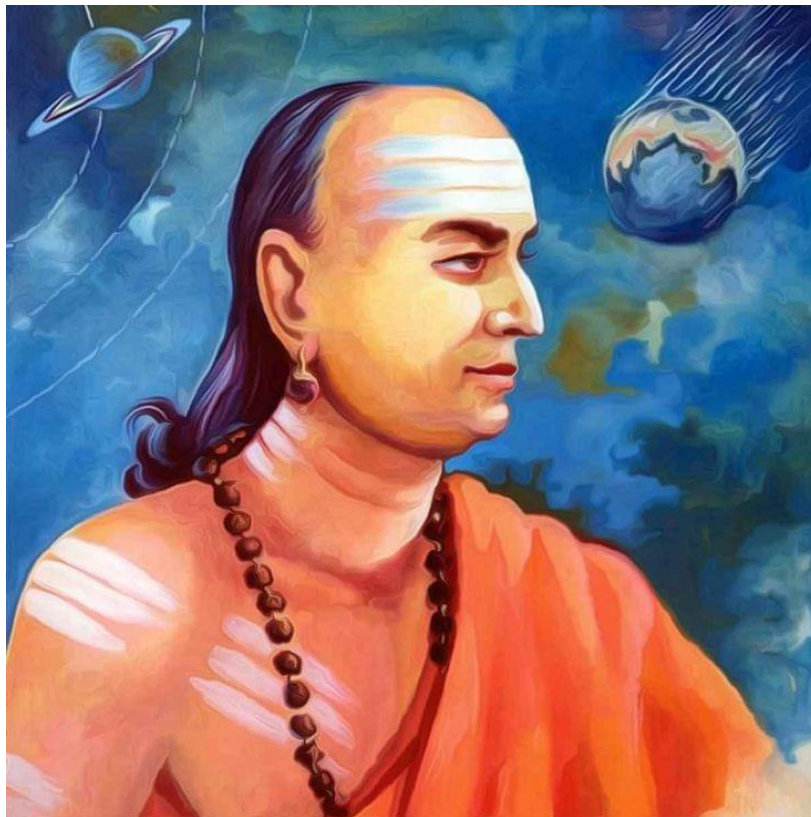
У 14. и 15. веку, **Мадхава** из Сангамаграма, оснивач Кералске школе астрономије и математике, био је пионир у развоју бесконачних редова, што је имало далекосежне последице за математику, укључујући тригонометрију и алгебру. Његов рад је био претеча развоја интегралног и диференцијалног рачуна, много пре него што су ови концепти постали познати у Европи.



Слика 7. Мадхава из Сангамаграма, оснивач Кералске школе астрономије и математике, 14. и 15. век

Нилакантха Сомајаји, који је живео између 1444. и 1544. године, био је још један истакнути математичар Кералске школе. Његово дело *Tantrasamgraha* даље је развијало

тригонометријске редове и методе за решавање сложених математичких проблема, укључујући оне који се тичу бесконачних редова. Његов рад је био значајан за алгебру, јер је омогућио боље разумевање и решавање алгебарских проблема у контексту астрономије.



Слика 8. Нилакантха Сомаяји (1444-1544)

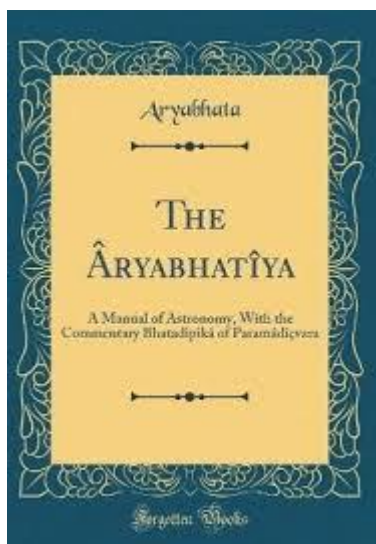
Ови математичари су поставили чврсте темеље за даљи развој алгебре, а њихова дела су била пресудна за каснији развој математике у исламском свету и Европи. Њихови доприноси не само да су обогатили глобално математичко знање, већ су и обликовали начин на који се математика развијала у наредним вековима.

3. Најважнија индијска дела аритметике до 16. века

Индија је пре 16. века била значајан центар математичких истраживања, са многим делима која су оставила дубок траг у историји математике, посебно у области алгебре.

Једно од најранијих познатих математичких дела из Индије је Бакшали рукопис, који датира између 224. и 383. године нове ере. Овај рукопис садржи значајне математичке проблеме и решења, укључујући линеарне и квадратне једначине, израчунавање квадратних и кубних корена, као и аритметичке прогресије. Посебно је важан због употребе симбола за нулу, што представља један од најранијих познатих примера овог концепта.

Једно од најзначајнијих дела из тог периода је *Aryabhatiya*, које је написао Арја Бхата око 499. године. Овај текст садржи методе за решавање квадратних једначина, као и разматрања о аритметичким и геометријским прогресијама, и процену вредности броја π . *Aryabhatiya* је значајно унапредила математичке теорије и постала темељ за будуће генерације математичара.



Слика 9. *Aryabhatiya*, које је написао Арја Бхата око 499. године

Једно од најважнијих дела тог времена је *Brāhmasphuṭasiddhānta*, које је написао Брахмагупта 628. године. Ово дело прво уводи концепт нуле као броја и развија правила за аритметичке операције са њом. Овај револуционарни корак у математичком схватању постао је основа за даљи развој алгебре, како у Индији, тако и у исламском свету и Европи. Поред тога, *Brāhmasphuṭasiddhānta* садржи и методе за решавање квадратних једначина и рад са негативним бројевима.



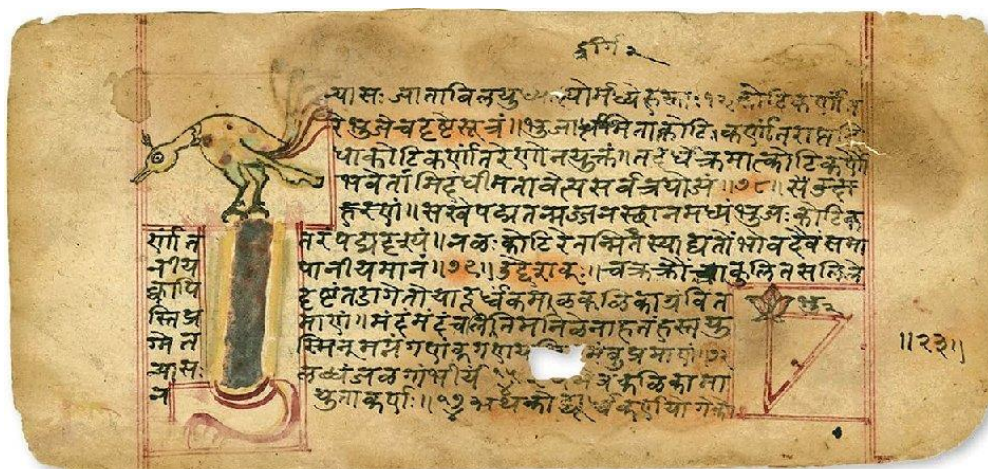
Слика 10. Текст из *Brāhmasphuṭasiddhānta*, које је написао Брахмагупта 628. године

У 9. веку, Махавира је написао дело *Ganitasarasangraha*, које обрађује различите алгебарске теме, укључујући линеарне и квадратне једначине, аритметичке низове и проценте. Ово дело представља систематичан преглед и проширење постојећих математичких знања и имало је значајан утицај на касније математичаре.

THE
GAṆITA-SĀRA-SANGRAHA
OF
MAHAVIRĀCĀRYA
WITH
ENGLISH TRANSLATION AND NOTES
BY
M. RAṆGĀCĀRYA, M.A., Rao Bahadur,
PROFESSOR OF SANSKRIT AND COMPARATIVE PHILOLOGY, PRESIDENCY COLLEGE,
AND CURATOR, GOVERNMENT ORIENTAL MANUSCRIPTS LIBRARY, MADRAS.
Published under the Orders of the Government of Madras.
MADRAS:
PRINTED BY THE SUPERINTENDENT, GOVERNMENT PRESS.
1912.

Слика 11. Махавира Ganitasarasangraha, 9. век

Још једно значајно дело је *Lilavati* и *Bijaganita*, које је написао Бхаскара II 1150. године. *Lilavati* се бави аритметиком и садржи низ математичких проблема и задатака са решењима, док *Bijaganita* представља детаљну студију алгебре. У *Bijaganita*, Бхаскара II разматра квадратне једначине, несавршене квадратне бројеве и концепт бесконачности, што је имало дуготрајан утицај на развој математике у Индији и шире.



Слика 12. Страница из *Lilavati* и *Bijaganita*, које је написао Бхаскара II

У 15. веку, Нилаканта Сомајди, као део Кералске школе астрономије и математике, написао је *Tantrasamgraha*, дело које се фокусира на напредне тригонометријске редове и методе за решавање сложених математичких проблема, укључујући оне који се односе на бесконачне редове. *Tantrasamgraha* је била од пресудног значаја за развој алгебре и тригонометрије у каснијим вековима.

Ова значајна дела из индијске математичке традиције поставила су чврсте темеље за даљи развој математике и имала су велики утицај на глобално математичко знање, обликујући начин на који се математика развијала у наредним вековима.

Утицај индијске алгебре на европску математичку традицију, иако посредан и често запостављен у општим приказима, представља кључну карику у историји математике: онај мост који повезује античку интуицију и модерну формалну алгебру. Иако индијски математичари нису имали директан контакт с Европом, њихов утицај је до европских мислилаца стизао посредно – преко Арапа. Арапски научници су у 8. и 9. веку преводили и проучавали индијске радове (попут оних од Брахмагупте), а потом су ти радови, у 12. и 13. веку, преко арапско-латинских превода у Шпанији, ушли у средњовековну Европу. Посебно у време абасидског халифата (8–10. век), Багдад постаје центар преводилачке и научне активности. У такозваној „Кући мудрости“, научници попут ал - Фазара, ал – Хорезмија и других, преводили су важније индијске текстове на арапски језик. У наредним вековима, нарочито у Толеду (Шпанија) током 12. века, арапски математички текстови, који су већ садржали значајне индијске елементе, били су превођени на латински. Најпознатији преводиоци били су Герард из Кремоне, Рајмунд Лул, као и Адлалард из Бата. Преко ових превода, индијски бројевни систем (са нулом и позиционом вредношћу), као и методе решавања једначине и рад са полиномима, постају доступни европским математичарима. Већ у 13. веку, Фибоначи у свом делу *Liber Abaci* (1202) популаризује „индијско-арапске бројеве“ у Европи, директно утичући на превазилажење римског бројевног система и стварање услова за развој модерне алгебре. Тако су појмови попут децималног система, нуле и методе за решавање једначина постали саставни део касније европске алгебре.

4. Пропорције и линеарне једначине

Линеарне једначине су имале значајно место у индијској алгебри до 16. века, а неки од најважнијих индијских математичара су дали кључне доприносе у развоју метода за њихово решавање.

Један од најранијих извора који помиње линеарне једначине је *Бакиали рукопис* (224-383. година нове ере). Овај рукопис, који представља један од најстаријих познатих математичких текстова из Индије, садржи примере и решења линеарних једначина, укључујући и једначине са једном непознатом.

Линеарне једначине су се појављивале у различитим контекстима у рукопису, често повезане са практичним задацима, као што су проблеми размене, пореза или мерења. У једначинама облика $ax + b = c$, где су a , b , и c константе, а x непозната, рукопис илуструје технике које су коришћене за њихово решавање. Ове технике су обично подразумевале поступке који укључују основне аритметичке операције — сабирање, одузимање, множење и дељење — које су омогућавале математичарима тог времена да прецизно реше проблеме са једном непознатом.

Један пример може бити следећи: замислимо да имамо једначину $3x + 4 = 13$. Да би се решила ова једначина, први корак би био да се број 4 одузме са обе стране једначине, што би дало $3x = 9$. Након тога, обе стране једначине би се поделиле са 3, што би резултирало решењем $x = 3$. Овај пример показује колико су решења једноставних линеарних једначина могла бити интуитивна и практична.

Међутим, *Бакиали рукопис* иде и даље од решавања једноставних линеарних једначина. Он такође укључује примере са више једначина и више непознатих, где се користе технике као што су елиминација и замењивање за решавање система једначина. Ово су већ напреднији концепти, који су омогућавали да се сложенији математички проблеми решавају на систематичан начин. На пример, ако би рукопис представио систем од две једначине са две непознате, могли бисмо користити једну једначину да

изразимо једну непознату преко друге, а затим ту вредност заменимо у другу једначину како бисмо добили коначна решења за обе непознате.

Замислимо да имамо следећи систем једначина:

$$x + y = 10$$

$$2x - y = 5.$$

Овај систем се решава помоћу технике елиминације или замењивања на следећи начин:

Из прве једначине можемо изразити y преко x : $y = 10 - x$.

Сада заменимо y у другој једначини: $2x - (10 - x) = 5$.

Решавамо ову једначину: $2x - 10 + x = 5$

$$3x = 15$$

$$x = 5.$$

Користимо прву једначину да пронађемо вредност за y :

$$y = 10 - 5$$

$$y = 5.$$

Дакле, решење овог система је $x = 5$ и $y = 5$.

Ово је пример метода који је коришћен у Бакшали рукопису за решавање сложенијих система једначина, где се прво једна променљива изражава преко друге, а затим се та вредност замењује у другу једначину како би се дошло до коначног решења.

Још једна занимљива карактеристика *Бакшали рукописа* је његова примена линеарних једначина у решавању проблема који укључују пропорције и аритметичке низове. Ове пропорције су често коришћене за решавање питања која се односе на поделе или пропорционалне расподеле. На пример, ако би се требало поделити одређена

количина робе у одређеним пропорцијама међу више учесника, линеарне једначине биле коришћене за одређивање колико сваки учесник треба да добије.

Замислимо да треба поделити 100 јединица робе између три учесника, А, Б и Ц, у пропорцијама 2:3:5. То значи да А треба да добије два дела, Б три дела, а Ц пет делова, од укупне количине робе.

Назовимо делове које сваки учесник треба да добије са x . Према пропорцији, А ће добити $2x$, Б ће добити $3x$, а Ц ће добити $5x$. Укупна количина робе је 100 јединица, па можемо написати следећу једначину:

$$2x + 3x + 5x = 100$$

$$10x = 100$$

$$x = \frac{100}{10}$$

$$x = 10$$

- А ће добити $2x = 2 \cdot 10 = 20$ јединица робе,
- Б ће добити $3x = 3 \cdot 10 = 30$ јединица робе,
- Ц ће добити $5x = 5 \cdot 10 = 50$ јединица робе.

Дакле, у овом примеру, А добија 20 јединица, Б добија 30 јединица, а Ц добија 50 јединица робе, у складу са датом пропорцијом.

Једна важна метода за одређивање непознатих величина била је правило тројке, правило које је такође централно у индијској математици, као што је приказано у *Арјабатији*.

На пример, стих 26. поглавља овог дела гласи: *“Сада када је једначина воћне количине правила тројке помножена са жељеном количином, оно што је добијено тиме, подељено са мером, требало би да буде ово воће жеље”*. Како је објаснио Bhaskara I, имамо „меру“ t која производи „воћну“ количину p и „жељену“ количину q за коју желимо да знамо „воће жеље“ x . У модерној терминологији, ово се своди на пропорцију $t: p = q : x$, а решење је управо оно што је *Арјабхата* тврдио, тј. $x = pq/t$. Занимљиво је напоменути да је *Арјабхата* изнео „правило тројке“ као да је то био

уобичајени поступак. Стога је разумно претпоставити да је решавање пропорција на овај начин било добро познато његовим читаоцима.

Појаснићемо правило тројке детаљније. *Bhaskara I* је укључио неколико примера у свој коментар, међу којима је и следећи: „Добијено је **пала** и по мускуса са осам целих и једном трећином **рупака**. Нека моћна особа израчуна шта бих требао добити са једним целим и једном петином **рупака**. Овде, $8\frac{1}{3}$ је мера, $1\frac{1}{2}$ је плод, а $1\frac{1}{5}$ је „жељена количина“. Дакле, „плод жеље“ је: $(1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{5}) : 8\frac{1}{3} = \frac{27}{125}$.

Bhaskara I је такође генерализовао правило тројке на правило петице, седмице и тако даље. На пример, претпоставимо да „каматна стопа од сто у месец дана треба да буде пет. Реците колика је камата од двадесет уложених на шест месеци“. Овде, почетни плод $p_1 = 5$ се добија од две мере $m_1 = 100$ и $m_2 = 1$. Желимо да сазнамо нови „плод“ када су жеље $q_1 = 20$ и $q_2 = 6$. Према *Bhaskari I*, ово можемо посматрати као два повезана проблема правила тројке, односно, рачунамо p_2 (плод жеље q_1 , задржавајући фиксиран период времена) решавањем пропорције $m_1 : p_1 = q_1 : p_2$, па је $p_2 = \frac{p_1 q_1}{m_1}$. Затим мењамо период времена и рачунамо плод x решавањем $m_2 : p_2 = q_2 : x$, па је $x = \frac{p_2 q_2}{m_2} = \frac{p_1 q_1 q_2}{m_1 m_2} = 6$. У сваком случају, у правилу пет, баш као и у оригиналном правилу тројке, имамо једноставан алгоритам који укључује множење и дељење како бисмо одредили одговор. Ни *Bhaskara I* ни *Брахмагупта*, који су дали исто правило тројке као и инверзно правило тројке, нису пружили даље објашњење методе. Стога можемо сигурно претпоставити да је разумевање пропорције било тако основно да стварно објашњење није било потребно, чак ни у уџбенику.

Следећи стих из Арјабатије даје правило за решавање општијих линеарних једначина, иако делује врло специфично за одређену врсту проблема: „Треба поделити разлику новчића која припада двојници људи разликом бисера. Резултат је цена бисера, ако је новац који је сваки човек зарадио једнак“. Идеја овде, поново објашњена од стране *Bhaskara I*, била је да „бисер“ означава објекат непознате цене, а проблем је имао за циљ да се та цена пронађе. На пример, „први трговац има седам коња са вечитом снагом и

повољним обележјима, а сто *dravyas*⁵-а видим у његовој руци. Девет коња и сума од осамдесет *dravyas*-а припадају другом трговцу. Цена једног коња и једнакост богатства оба трговца треба да буде утврђена претпостављајући исту цену за све коње“. Овде, пошто је богатство двојице људи исто, једначина коју треба решити била је: $7x + 100 = 9x + 80$, где је x цена једног коња. Да бисте то урадили, поделите „разлику новчића“ $(100 - 80)$ са „разликом бисера“ $(9 - 7)$ и добијате $20:2 = 10$ дравја као вредност сваког коња. Уопштено, *Арјабхатина* метода је пронашла решење линеарних једначина типа: $ax + c = bx + d$ као $x = \frac{d-c}{a-b}$.

Брахмагупта имао је правило врло слично ономе Арјабати, иако га је посебно навео као правило за решавање једначина са једном непознатом: „Разлика између руна, када се инвертује и подели разликом непознатих, представља ту непознату у једначини“. Брахмагупта није пуно радио са овим правилом, али Махавира (око 850. године) је разматрао многе линеарне једначине различитих врста у својој *Ganita-sara-sangraha*, првом независном математичком тексту на санскриту који је преживео. Махавирине питања су генерално била веома сложена и писана у цветном стилу који је постао уобичајен у индијској математици током следећих неколико векова. На пример, „од колекције манго воћа, краљ је узео $\frac{1}{6}$, краљица $\frac{1}{5}$ од остатка, а три главна принца су узела $\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}$ (од онога што је остало у сваком кораку); а најмлађе дете је узело преостала три манга. О ти који си вешт у решавању различитих проблема са разломцима, одреди меру те колекције манга“. У савременој нотацији, овај проблем се може превести у једначину:

$$x = \frac{x}{6} + \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6}x + \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{6}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{6}x + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6}x + 3$$

$$x = \frac{x}{6} + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + \frac{1}{6}x + 3$$

$$x = \frac{5}{6}x + 3$$

⁵*dravya* – значи супстанцу или ентитет. Према цинистичкој филозофији, универзум се састоји од шест вечних супстанци: осећајна бића или душе, неосетљива супстанца или материја, принцип кретања, принцип одмора, простора и времена.

$$x - \frac{5}{6}x = 3$$

$$\frac{1}{6}x = 3$$

$$x = 3 : \frac{1}{6}$$

$$x = 18.$$

Очигледно је да је свака особа на крају завршила са тачно истим бројем мангоа, а то је 3. Махавира је дао правила за решавање оваквих и неколико других врста линеарних једначина, али, за разлику од Брахмагупте, није дао опште правило за решавање свих линеарних једначина са једном непознатом. Међутим, општа правила за решавање квадратних једначина су дата од стране неколико индијских математичара.

5. Квадратне једначине

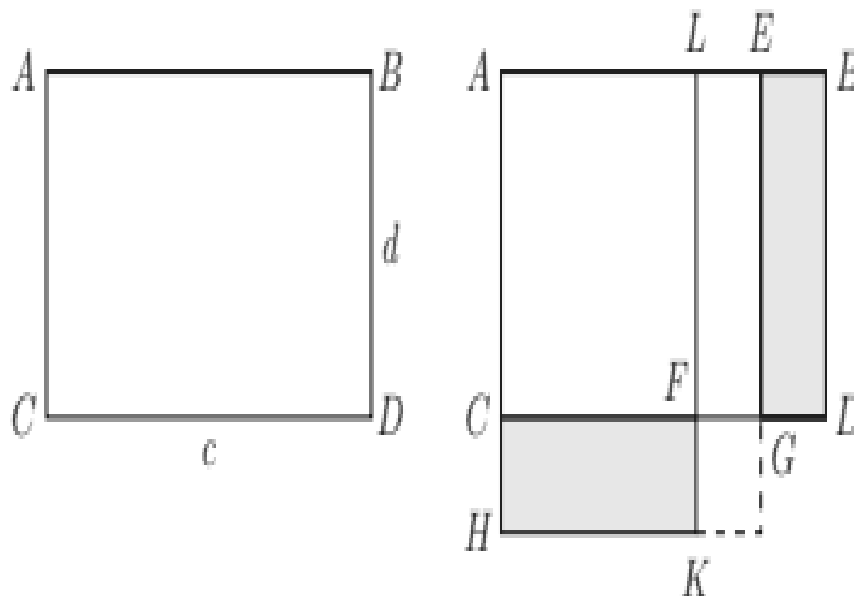
5.1. Проблем трансформације правоугаоника у квадрат

„*Baudhayana-Sulba-sutra*“ (око 600. п.н.е.) користи геометријску алгебру у третирању онога што препознајемо као квадратне једначине. Посебно, ту налазимо проблем трансформације правоугаоника у квадрат, односно, у модерној нотацији, проблем решавања $x^2 = cd$, где су c и d дужина и ширина датог правоугаоника. Исти проблем може се пронаћи и у Еуклидовим елементима, мада су Еуклид и аутор *Sulba-sutra* решавали проблем на различите начине. Проблем и решење су дати у следећем стиху: „Ако се жели трансформисати правоугаоник у квадрат, његова ширина се узима као страница квадрата (и овај квадрат се одсече од ширине правоугаоника). Преостали део (правоугаоника) се дели на два једнака дела и стављају се на две стране (по један део на сваку). Празан простор (у углу) се попуњава са (квадратним) комадом. Уклањање тога (квадратног комада из квадрата тако формираног да би се добио тражени квадрат) је наведено на **Слици 3**. Другим речима, одсечемо квадрат странице $CF = BD = d$ од оригиналног правоугаоника дужине $c = CD$, поделимо преостали правоугаоник на пола и ставимо по један део на сваку страну квадрата. На тај начин трансформишемо правоугаоник у *gnomon*⁶ исте површине. Затим завршимо квадрат новим квадратом странице $GF = \frac{c-d}{2}$. Тиме смо суштински доказали исти резултат као у Еуклидовим елементима односно да:

$$cd + \left(\frac{c-d}{2}\right)^2 = \left(\frac{c+d}{2}\right)^2$$

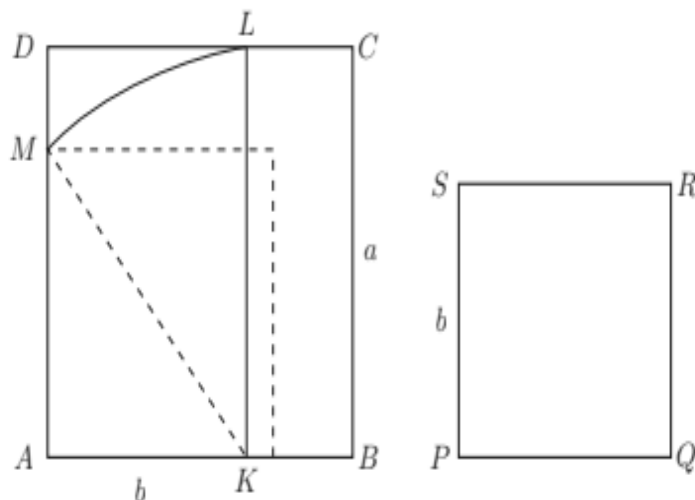
или да је правоугаоник изражен као разлика два квадрата“.

⁶*gnomon* – геометријски термин који означава фигуру која се добија додавањем једног правоугаоника или троугла на други тако да се добије већа фигура.



Слика 13. Трансформација правоугаоника у квадрат

Међутим, „*Sulba-sutre*“ су већ навеле „уклањање тога“, односно како изразити разлику два квадрата као један квадрат, у следећем стиху: „Ако се жели уклонити један квадрат из другог, (правоугаони) део се одсече од већег (квадрата) са страницом мањег који се уклања; (дужа) страна одсеченог (правоугаоног) дела се поставља попречно тако да додирује супротну страну; овим додиривањем (страна) се одсече. Са одсеченим (делом), добијена је разлика (два квадрата) као (један) квадрат“. (Слика 14.) Дакле, ако је $BC = a$ и $PS = b$, постављамо $DL = AK = b$, цртамо LK и налазимо M тако да је $KM = LK = a$. Коришћењем Питагорине теореме, добро познате у Индији у то време, имамо: $AM^2 = MK^2 - KA^2 = a^2 - b^2$. Дакле, AM представља страницу квадрата који је разлика између два оригинална квадрата, и пронашли смо квадрат једнак по површини оригиналном правоугаонику.



Слика 14. Разлика два квадрата као један квадрат

5.2.3бир чланова аритметичког низа

Бакиали рукопис, један од најстаријих математичких текстова из древне Индије, садржи значајне примере и формулације везане за аритметичке прогресије. Аритметичке прогресије, које су у овом рукопису анализиране и примењене, представљају један од кључних концепата у математици и користе се у различитим областима, од алгебре до статистике.

Аритметичка прогресија је низ бројева у којем је разлика између сваког узастопног пара елемената константна. Ова разлика се назива заједничка разлика или разлика прогресије.

Формула аритметичке прогресије би гласила:

$$a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$$

где је:

a_n n -ти члан прогресије,

Алгебра у Индији до 16. века

a_1 први члан прогресије,

d заједничка разлика,

n број чланова у низу.

Бакшали рукопис садржи примере и методе за решавање проблема који укључују аритметичке прогресије. Ови проблеми су се односили на израчунавање броја чланова, збира чланова у прогресији и других сличних задатака. Текстови из овог рукописа су показали висок ниво разумевања овог математичког концепта.

Уместо генерализоване формуле, они би итеративно додавали разлику d на први члан a_1 онолико пута колико је то потребно. На пример, ако је први члан a_1 , а разлика d , да би се дошло до n -ог члана, прорачун би изгледао као понављано додавање d до жељеног члана.

Пример 1: Израчунавање n -тог члана прогресије

Размотримо пример где је први члан прогресије $a_1 = 10$, а заједничка разлика $d = 3$. Ако би желели да нађу трећи члан овог низа:

$$a_3 = 10 + 3 + 3 = 16.$$

Овде, трећи члан прогресије је 16.

Пример 2: Збир првих n чланова прогресије

Још један пример из *Бакшали рукописа* може бити израчунавање збира првих n чланова аритметичке прогресије. Формула коју данас користимо за збир S_n првих n чланова је:

$$S_n = \frac{n}{2} \cdot (2a_1 + (n - 1) \cdot d).$$

У *Бакшали рукопису*, рачунање збира првих n чланова аритметичке прогресије обично је приказано као додатак првог и последњег члана низа, помножено половином

броја чланова. Иако у рукопису није присутна формална алгебарска нотација као данас, њихов поступак је сличан модерној формули за збир аритметичког низа, само је објашњен кроз конкретне примере и речима. Овај метод био је посебно значајан за решавање проблема у трговини, расподела добара или рачунању камата, што је било уобичајено у Бакшали рукопису.

Ако узмемо први члан $a_1 = 12$, заједничку разлику $d = 3$, и број чланова $n = 5$, збир првих 5 чланова би био:

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot (12 + 24)$$

$$S_5 = \frac{5}{2} \cdot 36 = 90.$$

Овде, збир првих пет чланова ове аритметичке прогресије износи 90.

Аритметичке прогресије показују напредно математичко знање древних индијских научника. Ови примери и методе су били основа за многе касније математичке студије и истраживања, и имали су велики утицај на развој математике у свету. Рукопис не само да илуструје практичну примену ових прогресија већ и показује дубоко разумевање основних математичких принципа који су важни и данас.

Овај метод комплетирања квадрата геометријски, изгледа да није имао утицаја на решавање квадратних једначина хиљаду година касније. На пример, размотримо следеће стихове из Арјабхатијевог списка „Арјабатија“, који се очигледно баве збиром аритметичког низа. У једном таквом, Арјабхата је навео да *„жељени број чланова смањен за један, подељен на пола,...,при чему је заједничка разлика множилац, (и) увећан за први члан, је средња вредност. (Резултат), помножен са жељеним, представља вредност жељеног (броја чланова). Или другачије, збир првог и последњег, помножен половином броја чланова, представља вредност.“* Тако је представио два алгоритма за збир S_n аритметичког низа са почетним чланом a и заједничком разликом d , тј.

$$S_n = n \left[\left(\frac{n-1}{2} \right) d + a \right] = \frac{n}{2} [a + (a + (n-1)d)]. \quad [1.1]$$

У следећем стиху, прецизирао је да „квадратни корен вредности чланова помножен са осам и заједничком разликом, увећан за квадрат разлике два пута првог члана и заједничке разлике, умањен за два пута први члан, подељен са својом заједничком разликом, увећан за један и подељен на пола (представља број чланова).“

Другим речима, знајући збир S_n , број n чланова био је дат алгоритмом:

$$n = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{8S_n d + (2a-d)^2} - 2a}{d} + 1 \right]. \quad [1.2]$$

5.3.Решења квадратне једначине

Бакшали рукопис је значајан не само због обраде линеарних једначина, већ и због раног приступа квадратним једначинама, што је било револуционарно за своје време. Квадратне једначине су једначине облика $ax^2 + bx + c = 0$, где су a , b , и c константе, а x је непозната коју треба одредити. У рукопису се налазе примери решавања оваквих једначина, који показују да су древни индијски математичари већ у том периоду развили методе за њихово решавање.

Један од главних начина решавања квадратних једначина у *Бакшали рукопису* био је метод који је касније у Европи постао познат као метода комплетирања квадрата. Овај поступак подразумева реорганизацију једначине тако да се на једној страни добије савршен квадрат, чиме се поједностављује процес извлачења корена и проналажења вредности непознате x .

Размотримо један пример решавања квадратне једначине из *Бакшали рукописа*, који је у контексту трговачких прорачуна. Професор Т. С. Бхагат наводи пример где једначина описује цену робе и коришћење ове технике за израчунавање коначне вредности:

$$x^2 + 10x = 39.$$

Први корак у решавању је премештање константног члана на десну страну једначине:

$$x^2 + 10x - 39 = 0.$$

Затим, да бисмо комплетирали квадрат, додајемо квадрат половине коефицијента уз x на обе стране једначине. У овом случају, половина од 10 је 5, а $5^2 = 25$. Додавањем 25 на обе стране добијамо:

$$x^2 + 10x + 25 = 64.$$

Лева страна једначине сада представља савршен квадрат:

$$(x + 5)^2 = 64.$$

Извлачењем квадратног корена на обе стране добијамо:

$$x + 5 = \pm 8.$$

Ово води до два решења:

$$x = 3 \text{ или } x = -13.$$

Негативни бројеви нису били прихваћени као валидна решења у раном периоду индијске математике, укључујући и време када је написан Бакшали рукопис. Они су сматрани „непостојећим“ или бесмисленим у већини практичних контекста, посебно када је реч о проблемима који су се односили на мерење или трговину. Дакле, у овом примеру решење $x = -13$ није било прихваћено као валидно. Само позитивно решење $x=3$ је било прихватљиво.

Бакшали рукопис такође показује способност решавања квадратних једначина са негативним и ирационалним коренима, што је било изузетно напредно за то време. Математичари су, на пример, могли да раде са једначинама које дају негативне вредности, што је указивало на разумевање комплексности математичких решења.

Пример: Квадратна једначина пронађена у Бакшали рукопису

Ако је дата једначина: $dn^2 + (2a - d)n - 2s = 0.$

Тада се решење налази користећи једначину:

$$n = -\frac{(2a - d) \pm \sqrt{(2a - d)^2 + 8ds}}{2d}$$

што је квадратна једначина са: $a = d, b = 2a - d$ и $c = -2s.$

Осим решавања једноставних квадратних једначина, у рукопису се могу наћи и примери решавања вишеструких квадратних једначина и њихове примене у практичним проблемима, као што су израчунавање површина, запремина и разних других геометријских и аритметичких проблема. Ово је додатно илустровало како су индијски математичари користили своје знање алгебре у свакодневним животним ситуацијама и научним истраживањима.

Преформулишући [1.1] као квадратну једначину по n , тачније, $dn^2 + (2a - d)n - 2S_n = 0$, вредност за n у [1.2] проистиче из квадратне формуле. Дакле, разумно је претпоставити да је Арјабхата знао како да решава квадратне једначине користећи ту формулу.

Ово такође можемо видети у следећем стиху: *“Квадратни корен производа две величине са квадратом два као множиоцем, повећан за квадрат разлике ове две, се повећава или смањује за ту разлику, и када се подели са два, произвешће се ова два множиоца тог производа“*. У модерној нотацији, Арјабхата тврди да ако знамо производ $xu = c$ две величине и њихову разлику $x - y = b$, онда су те две величине:

$$x = \frac{\sqrt{4c+b^2}+b}{2} \quad \text{и} \quad y = \frac{\sqrt{4c+b^2}-b}{2}.$$

Другим речима, он је пружио алгоритам за решавање квадратног система $xu = c$, $x - y = b$, опет еквивалентног верзији квадратне формуле.

Иако је *Bhaskara I* дао примере како би илустровао ове стихове из Арјабхатиног текста, он није расправљао о томе како је његов претходник могао доћи до ових решења, нити је генерализовао поступак за проналажење решења произвољних квадратних једначина. Међутим, у *Brahma-sphuta-siddhanta*, Брахмагупта јесте представио општи алгоритам за решавање квадратних једначина, посебно једначина које бисмо записали као $ax^2 + bx = c$. Како је рекао, *„смањите средњи [број] квадратног корена гирас помноженог са четири пута квадрат и повећаног за квадрат средњег [броја]; поделите [остатак] са два пута квадрата. [Резултат је] средњи [број].“*

Овде је тај „средњи број“ коефицијент b (и такође непознати број); $rupas$ је константни члан c , а „квадрат“ је коефицијент a . Брахмагуптине речи лако се преводе у формулу:

$$x = \frac{\sqrt{4ac + b^2} - b}{2a}.$$

Иако је такође дао исто правило као Арјабхата за одређивање два броја ако су познати њихов производ и разлика, он је дао само правила, а не нумеричке примере.

Нумерички пример је, међутим, дао коментатор IX века, *Prthudakasvamin*, који је пратио правило квадратне формуле у решавању једначине $x^2 - 10x = -9$. Ипак, ни Брахмагупта ни његов коментатор нису приметили да може бити два позитивна решења за дату квадратну једначину. Такође нису дали никакве трагове о томе како је формула откривена. На пример, нема назнака, као у древној Месопотамији, о геометријској основи решења, нити постоји било какво чисто алгебарско извођење.

Махавира је такође разматрао квадратну једначину у свом делу ***Ganita-sara-sangraha***: „Трећина крда слонова и три пута квадратни корен преосталог дела крда виђени су на падини планине; а на језеру су виђени мужјак слон заједно са три женска слона (чинећи коначан остатак). Колико је слонова било овде?“ У свом одговору, Махавира није дао опште правило за одређивање решења проблема овог типа. Уместо тога, поставио је врло специфично правило – иако је еквивалентно квадратној формули – за решавање проблема који се баве квадратним коренима непознате колективне количине и остатака након што су одређени елементи уклоњени. Као и његови претходници, није дао никакве назнаке о томе како је одредио методу решења, можда због поетског формата који није остављао простор за било какво извођење.

Неколико стотина година касније, *Bhaskara II* (1114 – 1185) такође се бавио квадратним једначинама у свом делу ***Bija-ganita***, написаном око 1160. Међутим, он је дао експлицитну методу решавања која укључује довршавање квадрата, а не само алгоритам сличан квадратној формули. Такође је обрађивао вишеструке корене, барем када су оба позитивна. Дакле, како би решио квадратну једначину облика $ax^2 \pm bx = c$, предложио је множење сваке стране одговарајућим бројем и додавање истог броја или одузимање

истог броја са обе стране, тако да лева страна постане потпун квадрат, а једначина постане $(rx - s)^2 = d$. Затим је решио једначину $rx - s = \sqrt{d}$ за x , али је приметио да: „ако је корен стране која има манифестни број мањи од негативне *гипас* у корену стране са непознатим, правећи ту негативну и позитивну, мерење непознатог у две вредности се понекад добија“. Другим речима, ако је $\sqrt{d} < s$, онда постоје две вредности за x односно: $\frac{s+\sqrt{d}}{r}$ и $\frac{s-\sqrt{d}}{r}$. Да бисмо боље разумели његову употребу „понекад“, размотримо два његова примера.

У првом, поставио је следећу сцену: „Осми део трупе мајмуна, квадриран, игра радостно на пропланку у шуми; дванаест их се види на брду како уживају правећи буку. Колико их има?“. При решавању овог и других проблема у свом делу, *Bhaskara II* није користио симболе, већ стандардни термин *yāvatt āvat* (што значи „колико толико“) за непознату количину, који је често скраћивао као *yā*. Слично, за наше x^2 , користио је *yāva*, скраћено од *yāvatt āvat varga* или „квадрат непознатог“. Уместо *Bhaskara II*-ове скраћенице, ми ћемо овај проблем изразити модерним симболима као $\left(\frac{1}{8}x\right)^2 + 12 = x$. *Bhaskara II* је помножио сваки члан са 64 и одузео, како би добио $x^2 - 64x = -768$. Да би комплетирао квадрат, затим је додао 322 на обе стране, што је дало $x^2 - 64x + 1024 = 256$. Извлачењем корена добијамо $x - 32 = 16$. Затим је приметио да „број корена на апсолутној страни овде је мањи од познатог броја, са негативним знаком, у корену на страни непознатог.“ Дакле, 16 може бити позитиван или негативан. Дакле, закључио је, „двострука вредност непознатог се добија, 48 и 16.“

Следећи проблем који је разматрао имао је само једно смислено решење: „Сенка гномона са дванаест цифара, смањена за трећину његове хипотенузе, постаје четрнаест цифара. Реци ми ту сенку брзо, ох, калкулатору.“ Да бисмо решили проблем, који се у основи своди на правоугли троугао формиран штапом (гномон), његовом сенком и линијом која повезује врх сенке са врхом штапа, примећујемо да ако је сенка једнака x , а хипотенуза h , онда $x - \frac{1}{3}h = 14$, па је $h = 3x - 42$. Дакле, проблем се своди на једначину $(3x - 42)^2 = x^2 + 144$. Развијањем и поједностављењем добијамо $8x^2 - 252x = -1620$, а *Bhaskara II* је приметио да ако помножи са 2 и дода 632, лева страна ће бити потпун квадрат, односно добио би једначину: $16x^2 - 504x + 632 = 729$, или

$(4x - 63)^2 = 27^2$. Дакле, $4x - 63 = \pm 27$, и постоје два решења $\frac{45}{2}$ и 9. Али, приметио је, „друга вредност сенке мања је од 14. Стога, због своје несагласности, не би требало узимати“. Другим речима, друго (позитивно) решење једначине намеће негативну вредност у рачунању проблема и стога нема смисла у његовом практичном контексту.

Bhaskara II је барем разматрао два решења квадратне једначине. Међутим, у случају квадратне једначине са позитивним и негативним кореном, он је пронашао само позитиван. Његови примери квадратних једначина никада нису имали два негативна корена, нити два нереална или ирационална корена. Сви његови проблеми, заправо, имали су рационална решења. Имајући у виду да је знао како да реши квадратне једначине алгоритамски – и да је јасно разумео како изгледа **савршени квадратни бином**⁷ – прилично је изненађујуће што никада није дао примере са ирационалним одговорима. Сигурно би се сусрео са таквим проблемима у својим радовима али можда је желео да објави само проблеме са рационалним одговорима. На крају крајева, не може постојати ирационалан број мајмуна у трупџи!

Осим решавања квадратних једначина, *Bhaskara II* је дао неколико кубних и кватеричних једначина које су могле бити решене комплетирањем трећег или четвртог степена. На пример, „*која количина, квадрат квадрата те количине, умањен за количину помножену са 200, повећана за квадрат те количине, и помножена са два, износи десет хиљада умањено за један? Реци ту количину ако познајеш операције алгебре*“. У модерној нотацији, ова једначина може бити записана као $x^4 - 2(x^2 + 200x) = 9999$, или $x^4 - 2x^2 - 400x = 9999$. *Bhaskara II* је приметио да, ако додамо $400x + 1$ на обе стране, лева страна постаје квадрат, али десна страна не. „*Стога, у овом случају је потребна сналажљивост*.“ Сналажљивост се састојала у додавању $4x^2 + 400x + 1$ на обе стране, чиме је лева страна постала $(x^2 + 1)^2$, а десна страна $[2(x + 50)]^2$. Извлачењем корена добијамо:

⁷ *Савршени квадратни бином* – алгебарски израз који представља квадрат разлике или збира два члана. Он има облик $(a \pm b)^2$, који се развија у $a^2 \pm 2ab + b^2$.

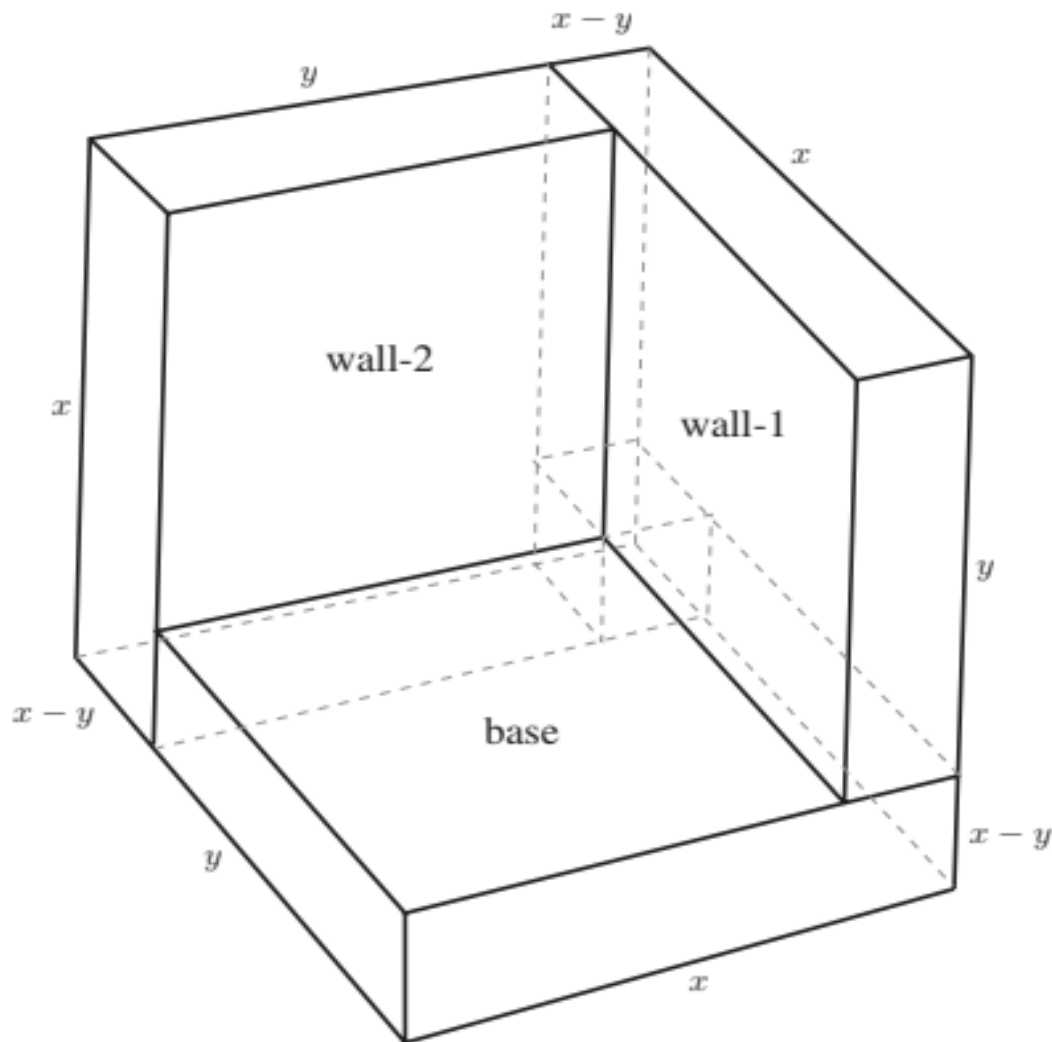
$x^2 + 1 = 2x + 100$, или $x^2 - 2x + 1 = 100$, или $(x - 1)^2 = 100$, или, коначно, $x = 11$ (*Bhaskara II* није коментарисао зашто је узео само позитивне корене, али јасно је да би узимање негативних корена резултирало негативним одговором).

Иако је *Bhaskara II* свакако разумео основу коју је описао за решавање квадратних једначина, доказ није постао централни део индијске математике све док школа Кералија није започела свој рад у XIV веку. На пример, *Citrabhanu* (раног XVI века) члан те школе, написао је кратки спис у којем је дао доказе, како алгебарске тако и геометријске, за двадесет једно правило генерализовања Арјабхатине методе за проналажење две количине ако су познати њихов производ и разлика. Другим речима, дајући седам једначина: $x + y = a$, $x - y = b$, $xy = c$, $x^2 + y^2 = d$, $x^2 - y^2 = e$, $x^3 + y^3 = f$ и $x^3 - y^3 = g$, *Citrabhanu* је представио правила и оправдања за решавање сваке од двадесет једне комбинације ових једначина узете по две, када су познате вредности константи. На пример, иако је један стих Арјабхатине методе дао правило за решавање других и трећих једначина истовремено, *Citrabhanu* га је доказао показујући да је $(x + y)^2 = 4xy + (x - y)^2$. Стога, $x + y = \sqrt{4c + b^2}$, и, према *Citrabhanu* правилу за решавање прве и друге једначине, пошто су сума и разлика две количине познате

$$x = \frac{\sqrt{4c+b^2}+b}{2} \text{ и } y = \frac{\sqrt{4c+b^2}-b}{2}$$

управо као што је тврдила и Арјабхатина метода.

Занимљиво је да је Цитрабхану оправдао све своје квадратне проблеме углавном алгебарски, изводећи суштински формуле, али код многих његових кубних проблема, давао је геометријско, а не алгебарско извођење. Размотримо случај када су b и g познати, односно када желимо да решимо систем $x - y = b$, $x^3 - y^3 = g$. Цитрабхануово правило је навело: “Када се разлика између кубова две количине умањи за куб разлике и подели са три пута разликом, то [количник] ће бити производ ове две [количине].” У модерној нотацији, ово се преводи као $c = \frac{g-b^3}{3b}$. Претходно правило тада омогућава одређивање x и y . Али како је Цитрабхану дошао до овога?



Слика 15. Цитрабхануов кубни проблем

Описао је фигуру формирану од два зида, основе, и мале коцке, чије су спољашње три димензије све једнаке x , а унутрашње три димензије све једнаке y . Тако је простор између спољне површине и унутрашњег празног простора тачно $x^3 - y^3$. (*Видети Сliku 15*). Овај простор, међутим, формиран је од три правоугаона паралелопипеда, сваки висине, ширинеу и дубине $x - y$, као и мале коцке са страницом $x - y$. Такође, $x^3 - y^3 = 3xy(x - y) + (x - y)^3$, или $g = 3cb + b^3$, из чега произилази Цитрабхануово правило.

6. Концепт нуле

Концепт нуле је једно од највећих достигнућа древне индијске математике и представља револуционарну идеју која је дубоко утицала на развој математике и науке уопште. Иако се концепт нуле можда чини очигледним данас, његов развој је био резултат дуготрајног процеса размишљања и математичке иновације.

Нула је први пут уведена као симбол и број у индијској математици око 5. века нове ере. Један од најранијих докумената који садржи симбол за нулу је *Бакишали рукопис*, који је датиран у период између 224. и 383. године нове ере. У овом рукопису, нула се користи као број, али и као позициони маркер, што је омогућило развој декадног система бројева који се користи до данас.

У индијској математици, нула није само означавала празно место, већ је имала своју вредност и била је укључена у аритметичке операције. Ово је био значајан корак напред у односу на друге древне цивилизације, где су се системи бројева често ослањали на различите симболе за сваки степен јединице без јасног концепта нуле.

Брахмагупта, један од највећих индијских математичара, који је живео у 7. веку, био је први који је систематски разрадио правила за рачунање са нулом у свом делу *Brāhmasphuṭasiddhānta* (628. година нове ере). Он је дефинисао нулу као резултат одузимања броја од самог себе и формулисао основна правила аритметике која укључују нулу, као што су сабирање, одузимање и множење са нулом. На пример, он је навео да је збир било ког броја и нуле тај исти број, док је производ било ког броја и нуле једнак нули. Ипак, нула при дељењу је остајала мистерија, иако је Брахмагупта предложио да је резултат дељења броја са нулом бесконачност, ово је остало питање за касније математичаре.

Употреба нуле као позиционог маркера била је од пресудне важности за развој декадног бројевног система, који је омогућио једноставније и ефикасније рачунање. Овај систем је касније пренет на Блиски исток, а потом и у Европу, где је постепено заменио римске бројеве и друге неефикасне системе.

Поред аритметичких операција, нула је у индијској математици играла важну улогу и у алгебарским решењима. На пример, у решавању једначина, нула је била од суштинског значаја за израчунавање корена једначина и развијање метода као што је комплетирање квадрата. Овде је нула омогућила математичарима да лакше разумеју и манипулишу једначинама, што је водило ка даљем развоју алгебре.

Концепт нуле, како је развијен у Индији, био је не само математички, већ и филозофски значајан. У индијској филозофији, идеја празнине или ништавила (шунјата) имала је дубоке духовне и филозофске корене, што је можда допринело прихватању и развоју концепта нуле у математици.

Концепт нуле који је развијен у древној Индији представља једно од најважнијих достигнућа у историји математике. Он је омогућио развој савременог бројевног система, поједноставио рачунање, и поставио темеље за даљи развој математике у различитим областима, од алгебре до анализе. Нула је, без сумње, један од најутичајнијих концепата у историји науке и технологије.

Бакшали рукопис је један од најстаријих и најзначајнијих математичких докумената из древне Индије, у коме се налази један од првих познатих примера употребе нуле као симбола и концепта у математици. Овај рукопис, датиран између 224. и 383. године нове ере, садржи бројне математичке проблеме и њихова решења, укључујући и употребу нуле у различитим контекстима.

У *Бакшали рукопису*, нула је коришћена као позициони маркер у броју, што значи да је омогућавала правилно читање бројева у декадном систему. На пример, ако је број био 105, нула у средини означавала је одсуство десетица. Ова употреба нуле била је кључна за развој позиционог бројања, које је данас основа нашег бројевног система.

Узмимо, на пример, број 270. У овом броју, нула на крају означава одсуство јединица, што разликује овај број од, рецимо, 27. Овакав начин представљања бројева омогућио је да се комплекснији бројеви запишу на једноставан начин, што је било револуционарно за то време.

Алгебра у Индији до 16. века

Бакишали рукопис садржи и примере где је нула коришћена у аритметичким операцијама, што је један од првих докумената који приказује ову праксу.

У рукопису се може наћи пример сабирања бројева где је нула један од сабирака. На пример:

$$125 + 0 = 125.$$

Овај пример показује да је нула у индијској математици већ имала својство неутралног елемента у сабирању.

Такође, у рукопису су приказани примери одузимања где нула не мења вредност броја, као што је случај са једначином:

$$530 - 0 = 530.$$

Овај пример илуструје да је нула препозната као вредност која не утиче на резултат одузимања.

Једна од најзначајнијих примена нуле у *Бакишали рукопису* је њена употреба у решавању једначина. Нула је коришћена за изражавање решења једначина и за поједностављивање процеса решавања.

Узмимо, на пример, једначину:

$$x^2 - 9 = 0.$$

У рукопису би ово било решавано додавањем 9 на обе стране:

$$x^2 = 9.$$

Након тога би се извео квадратни корен из обе стране једначине:

$$x = \pm 3.$$

Овај пример показује како је нула омогућила математичарима да изолују непознате и лакше дођу до решења.

Концепт нуле у *Бакиали рукопису* представљао је један од најреволуционарнијих корака у развоју математике. Употреба нуле као позиционог маркера, као и у аритметичким операцијама и решавању једначина, показује напредно математичко размишљање које је било испред свог времена. Овај рукопис је значајан доказ да су древни индијски математичари разумели и користили нулу на начин који је омогућио даљи развој математике у свету.

Брахмагупта, велики индијски математичар из 7. века, био је један од првих који је систематски развио и формулисао концепт нуле као броја и њену примену у аритметичким операцијама. У свом делу *Brāhmasphuṭasiddhānta*, Брахмагупта је дао јасна правила за рачунање са нулом, што је био револуционарни допринос математици и основа за каснији развој у овој науци.

До времена Брахмагупте, нула је била схваћена углавном као симбол за празно место у позиционом систему бројева. Међутим, Брахмагупта је отишао корак даље и третирао нулу као прави број, са својим сопственим својствима и аритметичким операцијама. Ово је био кључни развој у математичком размишљању, јер је омогућило развој сложенијих математичких операција и концепата.

Брахмагупта је формулисао неколико основних правила за рачунање са нулом, која су постала темељ за даљи развој математике. Ова правила обухватају сабирање, одузимање, множење, дељење и друге операције.

Брахмагупта је утврдио да када се нула дода било ком броју, резултат је тај исти број. Ово је основно својство нуле као неутралног елемента у сабирању.

Пример:

$$a + 0 = a.$$

Ако је, на пример, $a = 7$:

$$7 + 0 = 7.$$

При одузимању нуле од било ког броја, резултат остаје исти број. Ово својство је такође у складу са концептом нуле као неутралног елемента.

Алгебра у Индији до 16. века

Пример:

$$a - 0 = a.$$

Ако је $a = 15$:

$$15 - 0 = 15.$$

Брахмагупта је утврдио да када се било који број помножи са нулом, резултат је увек нула. Ово својство чини нулу посебним елементом у множењу, јер је у стању да „анулира“ било који број у овој операцији.

Пример:

$$a \cdot 0 = 0$$

$$a = 23:$$

$$23 \cdot 0 = 0.$$

Дељење броја са нулом је операција коју је Брахмагупта дефинисао као неодређену или бесконачну. Ово значи да не постоји број који би, помножен са нулом, дао резултат различит од нуле. Иако је Брахмагупта предложио да је резултат бесконачност, овај концепт је касније разрађен и објашњен у математици као неозначен или неодређен.

Пример:

$$\frac{a}{0} = \text{неодређено.}$$

Ако је $a = 5$

$$\frac{5}{0} = \text{неодређено.}$$

Брахмагупта је такође формулисао правило да када се нула дели било којим бројем, резултат је увек нула.

Алгебра у Индији до 16. века

Пример:

$$\frac{0}{a} = 0.$$

Ако је $a = 9$

$$\frac{0}{9} = 0.$$

Брахмагупта је био пионир у развоју концепта нуле као броја и у њеној примени у аритметичким операцијама. Његова правила су поставила темеље за даљи развој математике и омогућила су да нула постане суштински део математичког система који се користи широм света. Брахмагуптина формулација нуле и њених својстава илуструје дубоко математичко размишљање и разумевање које је било далеко испред његовог времена.

7. Недетерминисане једначине

Осим што су се бавили линеарним и квадратним једначинама са једном непознатом, индијски математичари су такође решавали *недетерминисане једначине*⁸с више непознатих. На пример, Махавира је представио верзију проблема са сто птица у својој расправи: *“Голубови се продају по цени од 5 за 3 новчића, ждралови по цени од 7 за 5, лабудови по цени од 9 за 7, а паунови по цени од 3 за 9. Одређеном човеку речено је да по овим стопама донесе 100 птица за 100 новчића за забаву краљевог сина и послат је да то уради. Колики износ он даје за сваку?”*

Док је Махавира дао прилично компликовано правило за решење, *Bhaskara II* је представио исти проблем са поступком који јасно показује зашто постоји више решења. Он је своје непознанице – које означавамо са d, c, s и p , али које је он разликовао по различитим именима боја - поставио једнаке броју „скупова“ голубова, ждралова, лабудова и паунова, редом. Из цена и бројева птица, извео је две једначине

$$3d + 5c + 7s + 9p = 100,$$

$$5d + 7c + 9s + 3p = 100,$$

и наставио да их решава.

d представља број „група“ голубова, где једна таква група садржи 5 голубова;

c представља број „група“ ждралова, где једна таква група садржи 7 ждралова;

s представља број „група“ лабудова, где једна таква група садржи 9 лабудова;

p представља број „група“ паунова, где једна таква група садржи 3 пауна.

Дакле, ако човек купи d група голубова, он купује $5d$ голубова. Слично купује $7c$ ждралова, $9s$ лабудова и $3p$ паунова. Укупно треба да добије 100 птица, што даје прву једначину:

⁸ *Недетерминисане једначине* – алгебарске једначине у којима број непознатих премашује број доступних једначина, те не постоји једно јединствено решење. Обично се решавају под додатним условима, као што су целобројна решења или ограничења у конкретном контексту.

$$5d + 7c + 9s + 3p = 100.$$

Цена сваке групе птица је различита:

- 5 голубова коштају 3 новчића, па једна група кошта 3 новчића
- 7 ждралова коштају 5 новчића, па једна група кошта 5 новчића
- 9 лабудова коштају 7 новчића, па једна група кошта 7 новчића
- 3 пауна коштају 9 новчића, па једна група кошта 9 новчића.

Укупно треба потрошити тачно 100 новчића, што даје другу једначину:

$$3d + 5c + 7s + 9p = 100.$$

Дакле, једначина, $5d + 7c + 9s + 3p = 100$ предствља укупан број птица које је особа купила, а једначина $3d + 5c + 7s + 9p = 100$ представља укупну цену коју је особа платила за тих 100 птица.

Прво је решио сваку једначину за d , изједначио два израза и добио једначину $c = 50 - 2s - 9p$. Узео је произвољну вредност 4 за p , смањио једначину на облик $c + 2s = 14$, за који је решење било $s = t, c = 14 - 2t$, где је t била произвољна вредност. Из тога је произашло да је $d = \frac{1}{3}(100 - 5c - 7s - 9p) = \frac{1}{3}(100 - 5(14 - 2t) - 7t - 36) = \frac{1}{3}(3t - 6) = t - 2$. Затим је поставио $t = 3$, израчунао да је $d = 1, c = 8, s = 3$ и $p = 4$, што је довело до тога да је број голубова 5, ждралова 56, лабудова 27 и паунова 12, са ценама, редом, 3, 40, 21 и 36. Такође је приметио да друге вредности за t дају различите вредности решења. Дакле, „путем претпоставки, могу се добити различити одговори“.

8. Децимални систем и број π

8.1. Приближно израчунавање π

Арјабхата, један од највећих индијских математичара и астронома из 5. века, дао је значајан допринос математици и астрономији, укључујући и свој рад на израчунавању приближне вредности броја π (пи). У свом делу *Āryabhaṭīya*, Арјабхата је изнео један од најранијих познатих метода за проналажење вредности ове важне математичке константе.

Арјабхата је у свом делу из 499. године нове ере навео приближну вредност броја π као 3.1416. Он је користио ову вредност у својим астрономским прорачунима и за израчунавање обима и површине круга. У својој формулацији, он је користио геометријски приступ који је био заснован на древним индијским математичким традицијама.

Арјабхата није оставио тачно објашњење како је дошао до ове приближне вредности, али је његова формулација у складу са оним што су тадашњи математичари знали о круговима и њиховим особинама. Он је наводио да се обим круга може израчунати коришћењем ове вредности π и да је π однос обима круга и његовог пречника.

Формула за обим круга гласи:

$$C = 2\pi r$$

где је C обим круга, π је константа, а r је полупречник круга.

У *Āryabhaṭīya*, Арјабхата наводи:

„Додај 4 пречника на 100, помножи резултат са 8 и додај 62. Овако добијени број је приближан обим круга који има пречник 20.000.“

Из овог поступка, може се видети да је Арјабхата користио вредност π која је веома близу вредности 3.1416.

Арјабхатино приближно одређивање броја π било је револуционарно за своје време и показало је изузетно математичко знање. Његов рад је имао велики утицај на касније индијске математичаре, као и на математичке традиције у другим деловима света. Иако није био први који је дефинисао π , Арјабхата је један од првих који је користио високо прецизну вредност у практичним прорачунима.

Ова вредност π , која је веома близу модерној вредности (3.14159265358979...), представља сведочанство о дубоком математичком разумевању које је постојало у Индији у време Арјабхате. Његов рад је поставио темеље за будућа истраживања и развој математике и астрономије у Индији и шире.

8.2. Децимални систем

Бхаскара I, свој највећи допринос дао је популаризацији и употреби децималног бројевног система, који је постао основа за савремену математику.

Децимални систем је позициони бројевни систем у коме се вредност цифре мења у зависности од њене позиције у броју. Овај систем користи базу 10, што значи да постоји десет цифара (0-9) и свака позиција у броју представља степен десетке. У децималном систему, свака позиција у броју има десет пута већу вредност од позиције десно од ње.

Представимо број 345 у децималном систему. У овом примеру:

- 3 се налази у стотинама, што значи $3 \cdot 10^2 = 300$,
- 4 се налази у десетицама, што значи $4 \cdot 10^1 = 40$,
- 5 се налази у јединицама, што значи $5 \cdot 10^0 = 5$.

Када саберемо ове вредности, добијамо:

$$345 = 300 + 40 + 5.$$

Ово показује како свака цифра у децималном систему има вредност која зависи од њене позиције у броју.

Бхаскара I је у својим делима као што су *Mahābhāskarīya* и *Laghubhāskarīya* користио и промовисао децимални систем са **позиционим нулом**⁹, што је била једна од кључних иновација индијске математике. Он је препознао важност и моћ овог система, посебно у астрономским прорачунима и компликованим математичким операцијама.

У другом примеру, представимо децимални број у децималном систему. Рецимо да имамо број 123,45. У овом примеру:

- 1 је у позицији стотина, што значи $1 \cdot 10^2 = 100$,
- 2 је у позицији десетина, што значи $2 \cdot 10^1 = 20$,
- 3 је у позицији јединица, што значи $3 \cdot 10^0 = 3$,
- 4 је у позицији десетих, што значи $4 \cdot 10^{-1} = 0,4$,
- 5 је у позицији стотих, што значи $5 \cdot 10^{-2} = 0,05$.

Када саберемо ове вредности, добијамо:

$$123,45 = 100 + 20 + 3 + 0,4 + 0,05.$$

Овај пример показује како су Бхаскара I и други индијски математичари користили децимални систем да би изразили и рачунали са бројевима на прецизан и ефикасан начин.

Бхаскара I је значајно допринео популаризацији децималног система у Индији и широм света. Његови радови су утицали на касније математичаре и астрономе, укључујући Бхаскару II, који је живео неколико векова касније. Децимални систем који је Бхаскара I промовисао и користио постао је основа за већину математичких операција које се данас користе у модерној математици, науци и инжењерингу.

⁹ *Позициона нула* – цифра „0“ која се користи у позиционим бројевним системима да би означила одсуство вредности на одређеној позицији. Њена употреба се први пут јавља у делима индијских математичара из периода од 5. до 7. века.

Бхаскара I је био пионир у примени децималног бројевног система, који је данас универзално прихваћен. Његова употреба и популаризација овог система показују дубоко разумевање математичких концепата и њихове примене у практичним прорачунима. Децимални систем који је он користио омогућио је развој математике и науке на начин који је утицао на цео свет, и његово наслеђе се осећа и данас у свакој математичкој операцији која користи овај систем.

8.3. Концепт бесконачности

Бхаскара II је у својим радовима приступио концепту бесконачности са филозофског и математичког аспекта. Он је схватио бесконачност као апстрактни концепт који није само теоријски већ и примењив у решавању математичких проблема.

У математици, бесконачност се често јавља у контексту дељења, где је дељење неког броја са нулом резултирало бесконачним вредностима. Бхаскара II је био један од првих који је разматрао овај проблем и изнео своја размишљања о томе.

Бхаскара II је у свом раду пружио неколико примера и разматрања који су укључивали концепт бесконачности:

Бхаскара II је разматрао шта се дешава када неки број делимо са нулом. У то време, уобичајено је било да се резултат оваквог дељења сматра бесконачним. На пример, ако делимо број 5 са 0:

$$\frac{5}{0} = \infty.$$

Он је објаснио да је овај резултат бесконачан јер нема коначне вредности која може задовољити једначину $0 \cdot x = 5$, па самим тим резултат мора бити бесконачно велики.

Бхаскара II је такође разматрао шта се дешава када бесконачност делимо са неким коначним бројем. На пример, ако делимо бесконачност са бројем 2:

$$\frac{\infty}{2} = \infty.$$

Он је указао да дељење бесконачности са било којим коначним бројем резултира у бесконачности, што је принцип који је и данас прихваћен у модерној математици.

Бхаскара II је истраживао и шта се дешава када сабирамо или одузимамо бесконачне вредности. На пример, ако сабирамо бесконачност и неки коначни број a :

$$\infty + a = \infty.$$

Он је указао да бесконачност остаје непромењена, без обзира на то који коначни број додамо или одузмемо. Ово је кључно схватање које је утицало на развој математичке анализе и разумевање бесконачности у каснијим вековима.

Бхаскара II је био један од првих математичара који је дубоко разматрао концепт бесконачности и његову примену у математичким операцијама. Његова разматрања и закључци о бесконачности поставили су темеље за будућа истраживања у овој области, посебно у развоју калкулуса и анализе, која су се појавила у Европи неколико векова касније.

Бхаскара II је такође допринео бољем разумевању других математичких концепата као што су синусне и косинусне функције, алгебра, и решавање диофантских једначина, али његов рад на бесконачности је остао један од најважнијих и најреволуционарнијих аспеката његовог научног наслеђа.

Концепт бесконачности који је разматрао и развијао Бхаскара II представљао је значајан корак у развоју математичке мисли. Његова истраживања су омогућила дубље разумевање математике и поставила темеље за многе будуће теорије и открића. Иако је бесконачност данас уобичајен концепт у математици, рад Бхаскаре II био је кључан у њеном раном дефинисању и примени, што га чини једним од најважнијих математичара свог времена.

8.4. Несавршени квадратни бројеви

Истраживање несавршених квадратних бројева у Индији до 16. века представља један од кључних аспеката развоја математике у овом региону и периоду. Несавршени квадратни бројеви, који су бројеви чији квадратни корен није цели број, играли су важну улогу у развоју теорије бројева и алгебре. Индијски математичари попут Брахмагупте, Бхаскаре I и Бхаскаре II посветили су значајну пажњу овој теми, чиме су допринели развоју математичких метода које су касније прихваћене и у другим културама.

У Индији, математичари су од најранијих времена настојали да разумеју и формулишу законе који управљају квадратним једначинама и ирационалним бројевима. Ови бројеви, који нису могли бити представљени као квадрат неког целог броја, представљали су изазов и истовремено инспирацију за развој нових математичких метода. Овакви изазови су водили ка дубљем истраживању концепата који су се касније показали од суштинске важности за алгебру и теорију бројева.

Брахмагупта је био један од првих индијских математичара који је формулисао методе за решавање једначина које укључују несавршене квадрате. У свом делу *Brāhmasphuṭasiddhānta*, он је предложио метод за приближно израчунавање квадратних корена, што је било револуционарно у 7. веку. Овај метод је омогућио да се квадратни корени несавршених бројева рачунају са већом прецизношћу, што је допринело бољем разумевању ирационалних бројева и њихове примене у алгебри.

Брахмагупта је развио метод за израчунавање квадратног корена броја 2, који није савршен квадрат. Његов приступ је био иновативан за то време јер је омогућио математичарима да прецизније рачунају ирационалне корене. Он је користио приближне вредности како би добио резултат:

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562.$$

Брахмагуптин метод за налажење квадратног корена из 2 темељи се на процесу који се назива **итерација** или **метода просечне вредности**. Ова метода је прилично једноставна и ефикасна:

1) *Постављање проблема*: тражимо квадратни корен броја 2, тј. тражимо x тако да $x^2 = 2$.

2) *Прва апроксимација*: као почетну вредност можемо узети 1, јер је $1^2 = 1$ близу 2.

3) *Итеративна формула*: Брахмагупта користи формулу за израчунавање нове апроксимације:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{N}{x_n}}{2},$$

где је N број чији квадратни корен тражимо (у овом случају $N = 2$).

4) *Примењивање формуле*:

- Почињемо са $x_0 = 1$:

$$x_1 = \frac{1 + \frac{2}{1}}{2} = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$$

- Следећа итерација узима $x_1 = 1.5$:

$$x_2 = \frac{1.5 + \frac{2}{1.5}}{2} \approx \frac{1.5 + 1.3333}{2} \approx \frac{2.8333}{2} \approx 1.4167$$

- Поновимо овај поступак узимајући $x_2 = 1.4167$:

$$x_3 = \frac{1.4167 + \frac{2}{1.4167}}{2} \approx \frac{1.4167 + 1.4118}{2} \approx \frac{2.8285}{2} \approx 1.4142.$$

5) *Коначна апроксимација*: овај поступак се понавља све док се не добије жељена тачност. Након неколико итерација, Брахмагуптин метод даје врло прецизну вредност квадратног корена из 2, која је отприлике 1.4142.

Овај резултат је илустровао да се број 2 не може изразити као квадрат неког целог броја и да његов квадратни корен има бесконачан децимални запис.

Бхаскара II је у свом раду истраживао квадратни корен броја 3, који је такође несавршен квадрат. Он је користио сличне методе као и његови претходници, али их је додатно усавршио, што је резултирало још прецизнијим приближним вредностима:

$$\sqrt{3} \approx 1.732050807.$$

Бхаскара II је препознао важност ових бројева у решавању диофантских једначина и других математичких проблема, што је било од великог значаја за касније генерације математичара.

Број 10 је био још један пример несавршеног квадрата који су индијски математичари проучавали. Његов квадратни корен је ирационалан и може се приближно изразити као:

$$\sqrt{10} \approx 3.162277660.$$

У Бакшали рукопису може се пронаћи и побољшани метод за израчунавање квадратног корена (и самим тим и апроксимације ирационалних бројева). Побољшани метод омогућио је изузетно прецизне апроксимације:

$$A = a^2 + r = a + \frac{r}{2a} - \frac{\left(\frac{r}{2a}\right)^2}{2\left(a + \frac{r}{2a}\right)}.$$

Пример: Примена формуле за квадратни корен броја 10

Можемо израчунати $\sqrt{10}$, где је $a = 3$ и $r = 1$.

$$\text{Дакле: } \sqrt{10} = 3^2 + 1 = 3 + \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{36}}{2\left(3 + \frac{1}{6}\right)} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{\frac{1}{36}}{\frac{19}{6}} = 3 + \frac{1}{6} - \frac{1}{228} = 3.16228 \dots$$

Овај пример је значајан јер је показивао како су индијски математичари користили напредне методе за приближно израчунавање квадратних корена, што је било важно за примену у практичним проблемима, као и у теоријским разматрањима.

Брахмагупта је, такође, био пионир у решавању диофантских једначина, које су често укључивале *несавршене квадратне бројеве*¹⁰. Ове једначине су тражиле да се пронађу цели бројеви који задовољавају одређене услове, што је било посебно тешко када су укључени ирационални бројеви. Методе које је Брахмагупта развио омогућиле су решавање ових сложених једначина и поставиле темеље за даљи развој алгебре.

Бхаскара II је наставио истраживања свог претходника, проширујући методе за решавање диофантских једначина и примену несавршених квадратних бројева у алгебарским прорачунима. Његов рад је био од великог значаја за развој математике не само у Индији већ и у свету, јер су ове методе касније постале основа за европске математичке теорије.

Рад индијских математичара на несавршеним квадратним бројевима имао је далекосежан утицај на развој математике у другим деловима света. Њихови резултати и методе су касније усвојени и развијени од стране арапских и европских математичара, што је допринело развоју алгебре и анализе. Индијски приступ ирационалним бројевима и несавршеним квадратима поставио је основе за многе касније теорије, укључујући развој декартовог координатног система и модерне теорије бројева.

Истраживање несавршених квадратних бројева у Индији до 16. века било је кључно за развој математичке мисли и примену алгебарских метода. Индијски математичари, попут Брахмагупте и Бхаскаре II, развили су сложене методе за израчунавање ирационалних корена и решавање диофантских једначина, што је било од огромног значаја за каснији развој математике у свету. Њихов рад представља трајан допринос науци, који и данас инспирише и пружа основе за даље истраживање и развој математичке теорије.

¹⁰ *Несавршени квадратни бројеви* – односи се на оне природне бројеве који нису квадрати ниједног целог броја. За разлику од савршених квадрата, несавршени квадрати немају цео број као квадратни корен. Користи се и савремена формулација: “бројеви који нису потпуни квадрати”.

9. Линеарне конгруенције и метода дробилице

Као и једначине о којима је малопре била реч, парови онога што називамо линеарним конгруенцијама такође имају вишеструка решења. За разлику од ситуације код недетерминисаних једначина, индијски математичари су осмислили јединствену методу, названу „*pulverizer*“, за решавање ових система, методу која се не појављује у другим традицијама. У модерној нотацији, проблем се може поставити на различите еквивалентне начине:

(1) Пронађи N тако да важи $N \equiv a \pmod{r}$ и $N \equiv b \pmod{s}$;

(2) Пронађи x и y тако да је $N = a + rx = b + sy$;

(3) Пронађи x и y , тако да важи $a + rx = b + sy$; или

(4) Пронађи x и y тако да важи $rx + c = sy$, где је $c = a - b$.

Аријабхата је изнео методу дробилице за решавање првог облика овог проблема; *Bhaskara I* је мало проширио Аријабхатин кратки опис и дао примере; Брахмагупта је суштински поновио правила са додатним примерима. Централна идеја поступка била је применити оно што се сада назива Еуклидов алгоритам на два броја, r и s . Сваки корак производио је нову недетерминисану једначину са мањим коефицијентима од претходне, све док коначна једначина није могла бити решена провером. Повратак кроз кораке омогућио је одређивање сваке непознате редом док се није дошло до оригиналне једначине. Очигледно је да је ова метода названа „*pulverizer*“ јер су понављањем процеса дељења оригинални бројеви „самлевени“ све док нису постали довољно мали да пруже једноставно решење.

Као пример, размотримо један проблем дат од стране коментатора *Prthudakasvamin* у делу Брахмагупте: $N \equiv 10 \pmod{137}$ и $N \equiv 0 \pmod{60}$. Пошто се овај проблем може преформулисати (видети ставку (4) од малопре) као једна једначина $60y = 137x + 10$, почнимо дељењем 137 са 60 и правимо замене корак по корак у складу са узастопним количницима који се појављују у Еуклидовом алгоритму:

$$y = \frac{137x + 10}{60} = 2x + \frac{17x + 10}{60} = 2x + z,$$

$$x = \frac{60z - 10}{17} = 3z + \frac{9z - 10}{17} = 3z + u,$$

$$z = \frac{17u + 10}{9} = 1u + \frac{8u + 10}{9} = 1u + v,$$

$$u = \frac{9v - 10}{8} = 1v + \frac{1v - 10}{8} = 1v + w,$$

$$v = 8w + 10.$$

У овом тренутку, последња једначина може се решити провером као $w = 1, v = 18$. Да бисмо пронашли преостале непознате, користимо супституцију како бисмо се вратили уназад кроз листу од дна ка врху:

$$u = 1v + w = 1 \cdot 18 + 1 = 19, \quad z = 1u + v = 1 \cdot 19 + 18 = 37,$$

$$x = 3z + u = 3 \cdot 37 + 19 = 130, \quad y = 2x + z = 2 \cdot 130 + 37 = 297.$$

Дакле, $x = 130, y = 297$ је решење оригиналне једначине са две непознате.

Међутим, заправо је био постављен задатак да се одреди N , и, заправо, најмања вредност N која решава оригинални проблем. Да бисмо то пронашли, приметимо да је $N = 10 + 137x = 17820$, али пошто су било која два решења за N еквивалентне модуо производа $137 \cdot 60 = 8220$, можемо два пута одузети 8220 од 17820 и добити 1380 као најмање решење за N . Ово такође даје мања решења за x и y , јер пошто је $1380 = 10 + 137x = 60y$, имамо да је $x = 10, y = 23$ као најмање решење линеарне једначине са две непознате.

Понекад, међутим, математичаре није занимало N , већ решавање једне линеарне једначине са две непознате. На пример, *Bhaskara II* је укључио неколико таквих проблема у свом делу „*Vija-ganita*“, укључујући следећи: „*Ох рачуналице! Реци ми брзо, који множител, кад се помножи са паром стотина повезаних са двадесет и једним, сабран са шездесет и пет, и подељен са паром стотина умањених за пет, доводи до стања сведености без остатка.*“ У модерним терминима, проблем је решити једначину $221x + 65 = 195y$.

Већ смо видели да су разни кинески аутори, почевши од трећег века, били заинтересовани за решавање система линеарних конгруенција. Међутим, детаљно поређење њихове методе са методама индијских математичара показује да су ове две методе биле прилично различите. Индијски аутори обично су се бавили системом од две конгруенције, док су Кинези решавали веће системе. Када би индијски аутор обрадио проблем сличан „кинеском проблему остатка“, решавао би конгруенције по две једначине истовремено, за разлику од Кинеза који су решавали све одједном. Једина сличност између индијских и кинеских метода чини се да је била заснована на Еуклидовом алгоритму. Занимљива питања – на која тренутно нема одговора – постају, да ли је било које од два културна круга научило алгоритам од Грка?, да ли су све три културе научиле од неке раније културе?, или су ова два азијска културна круга једноставно независно открила алгоритам?

Постоје добре индиције да су Брахмагупта и Арјабхата првобитно били заинтересовани за проблеме конгруенција из истог основног разлога као и Кинези, а то је била потреба за астрономијом, јер многи проблеми у њиховим текстовима имају астрономски контекст. Индијски астрономски систем петог и шестог века, попут древног кинеског система, заснивао се на појму великог астрономског периода у који су све планете (укључујући и Сунце и Месец) имали нулу за дужину. Идеја је била да ће се сви световни догађаји понављати са истим периодом. За Арјабхата, основни период био је *Mahayuga* од 4.320.000 година, док је за Брахмагупту то био *Kalpa* од 1000 *Mahayugas*. У сваком случају, рачунања са небеским телима захтевала су познавање њихових просечних кретања. Пошто није било могуће одредити та кретања емпиријски са било каквом прецизношћу, постало је неопходно израчунати их на основу тренутних

посматрања и чињенице да су све планете биле отприлике на истом месту на почетку тог периода. Ова рачунања су укључивала решавање линеарних конгруенција.

10. Пелова једначина

Способност решавања једначина са две непознате се показала важном при решавању другог типа *неодређене једначине*¹¹: квадратне једначине облика $Dx^2 + 1 = y^2$. Данас се ово обично назива Пелова једначина, по енглеском математичару *Џону Пелу*¹² (1611 – 1685), иако он заправо није имао много везе са овом једначином која носи његово име. Детаљно проучавање ових једначина заправо се први пут одвијало у Индији и на крају је означило врхунац средњовековне индијске алгебре.



Слика 16. Џон Пел

Да бисте стекли увид у индијски приступ једначинама овог типа, размотримо следећи пример из дела Брахмагупте: “*Онај ко израчуна унутар године квадрат [броја]... помножен са деведесет два... и повећан за један [што је] квадрат, [он] је рачунар.*” Овај

¹¹ *Неодређена једначина* – једначина у којој постоји више од једног решења, или бесконачно много решења, обично зато што има више непознатих него независних једначина. У савременој терминологији, неодређене једначине се често називају и „диофантским једначинама“, у част грчког математичара Диофанта, али је индијска школа развила опште методе за њихово решавање, вековима пре Европе.

¹² *Џон Пел* – енглески математичар и политички агент у иностранству. Рођен је у Саутвику у Сасексу, отац му се такође звао Џон Пел, а мајка Мери Холанд. Рано је остао без родитеља. Школовао се у Стеининг гимназији и са 13 година је пошао на Тринити колеџ у Кембриџу. Током своје универзитетске каријере постао је врхунски лингвиста. 1632. се оженио и добио 4 сина и 4 кћери. У математици се бавио проширивањем обима алгебре у теорији једначина и на математичке табеле. Његова посвећеност математици омела је његов живот у Цркви и његов приватан живот.

проблем је дакле решити $92x^2 + 1 = y^2$, и Брахмагупта је започео на следећи начин: *“Запиши два пута корен задатог квадрата помножен са множиоцем и повећан или умањен за произвољан [број].”* Другим речима, почните тако што ћете записати било који број, рецимо 1, и одредити визуелно вредност b_0 тако да је $92 \cdot 1^2 + b_0$ квадрат. Избором $b_0 = 8$ добијамо $92 \cdot 1^2 + 8 = 100 = 10^2$ или три броја x_0, b_0, y_0 који задовољавају једначину: $Dx_0^2 + b_0 = y_0^2$. Ради практичности, ово представљамо тако што пишемо да је (x_0, y_0) решење за сабирак b_0 . Дакле, $(1, 10)$ је решење за сабирак 8.

Брахмагупта је затим овај резултат записао у два реда као:

$$x_0 \quad y_0 \quad b_0$$

$$x_0 \quad y_0 \quad b_0$$

или

$$1 \quad 10 \quad 8$$

$$1 \quad 10 \quad 8.$$

Како је објаснио, *„производ првог [пара], помножен са множиоцем, са производом последњег [пара], јесте последње израчунато.”* Сума производа [унакрсно множење] је први. Збир је једнак производу збирова. Два корена, подељена [оригиналним] збиром или разликом, јесу додатне вредности *„гирас.”* Другим речима, он је пронашао нову вредност за *„последњи корен”* у постављајући $y_1 = Dx_0^2 + y_0^2$, конкретно, $y_1 = 92(1)^2 + 10^2 = 192$; нову вредност за *„први корен”* x , наиме, $x_1 = x_0y_0 + x_0y_0$ или $x_1 = 2x_0y_0$, па је $x_1 = 20$; и нову додатну вредност $b_1 = b_0^2 = 64$. Дакле, $(x_1, y_1) = (20, 192)$ је решење за додатну вредност $b_1 = 64$; или $92(20)^2 + 64 = 192^2$. Коначно, да би добио резултате за додатну вредност 1, Брахмагупта је поделио x_1 и y_1 са 8 и добио $\left(\frac{5}{2}, 24\right)$. Међутим, будући да x_1 није цео број, одговор није био задовољавајући, па је користио исту технику низова као пре да би добио целобројно решење $(120, 1151)$ за додатну вредност 1, односно $92 \cdot 120^2 + 1 = 1151^2$.

Иако Брахмагупта није пружио никакав доказ за своје методе нити наговештај о њиховом извођењу, његов резултат је довољно једноставан за проверу. Чак је и генерализовао методу низова тврдећи да ако је (u_0, v_0) решење за сабирак c_0 и (u_1, v_1) решење за сабирак c_1 , тада је $(u_0v_1 + u_1v_0, Du_0u_1 + v_0v_1)$ решење за сабирак c_0c_1 . Називајући ново решење композицијом два оригинална решења, лако је показати да је композиција решење у светлу идентитета

$$D(u_0v_1 + u_1v_0)^2 + c_0c_1 = (Du_0u_1 + v_0v_1)^2,$$

с обзиром да је $Du_0^2 + c_0 = v_0^2$ и $Du_1^2 + c_1 = v_1^2$.

Овај пример не само што илуструје Брахмагуптин метод, већ истиче и његова ограничења. Решење за додатак 1 у општем случају је пар $\left(\frac{x_1}{b_0}, \frac{y_1}{b_0}\right)$, али нема гаранције ни да ће ови бројеви бити цели, ни да ће се комбинацијом овог решења са самим собом нужно добити цели бројеви. Брахмагупта је само дао правила која су помогла у проналажењу решења. На пример, приметио је да му композиција омогућава да добије друга решења за било који додатак, под условом да зна једно решење за дат додатак као и решење за додатак 1. Друго, ако је имао решење (u, v) за додатке ± 4 , показао је како пронаћи решење за додатак 1. Дакле, ако је (u, v) решење једначине $Dx^2 - 4 = y^2$, онда:

$$(u_1, v_1) = \left(\frac{1}{2}uv(v^2 + 1)(v^2 + 3), (v^2 + 2) \left[\frac{1}{2}(v^2 + 1)(v^2 + 3) - 1\right]\right)$$

је решење једначине $Dx^2 + 1 = y^2$, са сличним правилом за додатак 4. И, иако Брахмагупта то није експлицитно поменуо, индијски математичари су такође знали како доћи до додатка 1 ако су имали решење за додатке ± 2 или -1 .

Разлог због којег је ово питање заинтересовало индијске математичаре остаје мистерија. Неке од Брахмагуптиних примена користиле су астрономске променљиве за x и y , али нема назнака да су проблеми заиста потицали из стварних животних ситуација. У сваком случају, Пелова једначина постала је део традиције индијске математике. Истраживана током следећих неколико векова, у потпуности ју је решио иначе непознати

Acarya Jayadeva (око 1000. године). Међутим, овде ћемо размотрити решење које је *Bhaskara II* представио у свом тексту из дванаестог века, „*Lilavati*“.

Bhaskara II је започео рекапитулацијом Брахмагуптине процедуре. Посебно је нагласио да, једном кад се пронађе један пар решења, могу се пронаћи бесконачно много других применом композиције. Међутим, још важније, он је дискутовао тзв. цикличну методу (*sakravalā*), која му је омогућавала да, када једном пронађе решење за одређени додатак, на крају дође до решења за додатак 1. За општи случај, *Bhaskara II* је објаснио да „*прављење мањег и већег корена и адитива као дељеника, адитива и делиоца, мултипликатора се мора замислити. Када се квадрат мултипликатора одузме од „природе“ или умањи за „природу“ тако да је остатак мали, тај остатак подељен адитивом је нови адитив. То се мења ако се квадрат мултипликатора одузме од „природе“. Количник мултипликатора је мањи корен; из тога се добија већи корен.*“

Да видимо како ово функционише, размотримо један од специфичних примера *Bhaskara II*: $67x^2 + 1 = y^2$. Почнимо, као и раније, бирањем пара решења (u, v) за било коју адитивну вредност b . На пример, узмимо $(1, 8)$ као решење за адитивну вредност -3 . Затим решимо неодређену једначину $um + v = bn$ за m помоћу методе дробилице – овде је једначина $1m + 8 = -3n$ – тако да је квадрат од m што је могуће ближе D . Затим узмите $b_1 = \pm \frac{D-m^2}{b}$ (што може бити негативно) за нови додатак. Нови први корен је $u_1 = \frac{um+v}{b}$, док је нова последња вредност корена $v_1 = \sqrt{Du_1^2 + b_1}$. У овом случају, да бисмо имали m^2 што је могуће ближе 67 , бирамо $m = 7$ тако да:

$$\frac{D - m^2}{b} = \frac{67 - 49}{-3} = -6.$$

Због тога што је одузимање квадрата од коефицијента, нови додатак је 6 . Дакле, нова прва коренска вредност је $u_1 = \frac{1 \cdot 7 + 8}{-3} = -5$, али с обзиром на то да се ови корени увек квадрирају, узима се $u_1 = 5$ тако да је $v_1 = \sqrt{67 \cdot 25 + 6} = \sqrt{1681} = 41$, и $(5, 41)$ је решење за додатак 6 . „Онда“ према *Bhaskara II*, „[то је учињено] понављајући, остављајући по страни претходне квадратне корене и додатке. То називају *sakravalā* (циклус). Дакле, постоје два цела броја квадратних корена повећаних за четири, два или

један. Претпоставка ради додатка један потиче од корена са четири и два као додатка. “Другим речима, напоменуо је да ако се горе наведена операција понавља, на крају ће се доћи до решења за додатак или одузимања четири, два или један. Како смо видели, у тим случајевима можемо пронаћи решење за додатак 1. Али зашто овај метод увек даје целобројне вредности у сваком кораку? И зашто понављање метода на крају доводи до решења пара за додатке ± 4 , ± 2 или ± 1 ?

Да бисмо одговорили на прво питање, примећујемо да се Bhaskara II – јева метода може извести компоновањем првог решења (u, v) за адитивну вредност b са очигледним решењем $(1, m)$ за адитив $m^2 - D$. Из тога следи да је $(u', v') = (mu + v, Du + mv)$ решење за адитив $b(m^2 - D)$. Дељењем резултујуће једначине са b^2 добијамо решење $(u_1, v_1) = \left(\frac{mu+v}{b}, \frac{Du+mv}{b}\right)$ за адитив $\frac{m^2-D}{b}$. Тада постаје јасно зашто m мора бити пронађен тако да је $mu + v$ виšekратник броја b . И, иако Bhaskara није изнео доказ, може се показати да ако је $\frac{mu+v}{b}$ целобројно, тада су и $\frac{m^2-D}{b}$ и $\frac{Du+mv}{b} = \pm\sqrt{Du_1^2 + b_1}$ целобројни. Разлог зашто је изабрано $m^2 - D$ да буде „малено“ јесте како би се могло одговорити на друго питање, али ни Bhaskara ни вероватно Jayadeva нису представили доказ да циклична метода на крају доводи до решења оригиналног проблема. Врло је могуће да је Bhaskara једноставно урадио довољно примера да би се уверио у истинитост овог поступка. Прави доказ није дат све до XIX века.

Да бисмо довршили наш нумерички пример, сетимо се да смо добили резултат $67 \cdot 5^2 + 6 = 41^2$. Следећи корак захтева решавање $5m + 41 = 6n$, са $|m^2 - 67|$ малим. Одговарајући избор је $m = 5$, па је $(u_2, v_2) = (11, 90)$ решење за адитив -7 , или $67 \cdot 11^2 - 7 = 90^2$. Затим решавамо $11m + 90 = -7n$. Вредност $m = 9$ функционише, па је $(u_3, v_3) = (27, 221)$ решење за додатак -2 , односно $67 \cdot 27^2 - 2 = 221^2$. У овом тренутку, пошто је достигнут додатак -2 , компонујемо $(27, 221)$ са самим собом. То даје $(u_4, v_4) = (11934, 97684)$ као решење за додатак 4. Дељењем са 2 добијамо решење $x = 5967$, $y = 48842$ за оригиналну једначину $67x^2 + 1 = y^2$.

11. Суме редова

Индијски математичари су такође разматрали алгебарске проблеме различитих врста од решавања једначина. Један посебан алгебарски резултат који је био предмет дискусије од времена Арјабхате био је формула за одређивање збира *интегралних степена*¹³. Подсетимо се од раније, да је један од Арјабхатиних стихова дао, као посебан случај, формулу за збир бројева од 1 до n . Следећи стих представља формуле за збир квадрата и кубова: *“Шестина производа три квантитета који су, редом, број елемената, то повећано за један, и то повећано за број елемената; то ће бити фигура направљена од гомиле квадрата, а квадрат гомиле је фигура направљена од гомиле кубова.”*

Ове две изјаве лако се преводе у модерну нотацију као:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = (1+2+\dots+n)^2.$$

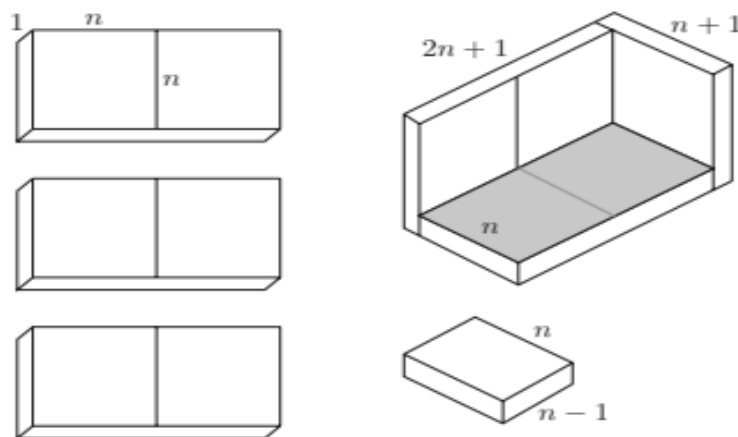
Први резултат је у суштини био познат Архимеду, док је други скоро очигледан, барем као хипотеза, након обраде неколико нумеричких примера. Као и обично, Арјабхата није дао никакве назнаке како је открио или доказао ове резултате, а *Bhaskara I* није пружио много увида у свој коментар. Међутим, овај проблем је постао важнији девет векова касније у раду Кералине школе на југу Индије.

Ова школа, која је започела са математичарем из XIV века, Мадхавом, најпознатија је по одређивању редова за синус, косинус и аркустангенс функције. Као део извођења ових редова, било је потребно познавати формуле не само за збир првих степена, квадрата и кубова, већ и за збир виших интегралних степена. Пошто су чланови ове школе, као што је напоменуто, више били забринуте за доказивање него већина ранијих индијских математичара, проналазимо *Nilakantha* (око 1445 - 1545), члана Мадхавине

¹³ Термин „интегрални“ у математици означава целобројну природу неке вредности (од енглеске речи *integer* – цео број). Интегрални степени су, стога, степени у којима је експонент цео број, најчешће позитиван.

школе, који пружа геометријске доказе Арјабхатиних формула за квадрате и кубове у свом сопственом коментару на Арјабхатину књигу.

Размотримо, на пример, Нилакантхин доказ формуле за збир квадрата, доказ који подсећа на аргумент Цитрабхануа који смо раније расправљали: „С обзиром да се ово [резултат о збиру квадрата] показује ако постоји једнакост укупног низа квадрата помноженог са шест и производа три квантитета, њихова једнакост треба бити показана. Фигура висине једнаке броју чланова, ширине једнаке броју чланова плус један, [и] дужине једнаке броју чланова плус један плус броју чланова је [једнака] производу три квантитета. Али ту фигуру можемо користити да конструишемо укупан низ квадрата помножен са шест.“ Нилакантха је конструисао ову фигуру на следећи начин. На сваком кораку k , користио је три „домине“ дебљине 1, ширине k и дужине $2k$. Дакле, укупна запремина ових домина била је $6k^2$. Од највећег скупа ($k = n$), конструисао је четири зида фигуре (Слика 17). Једна од домина формирала је један зид, док је друга формирала под. Трећа домина је разбијена на два дела, један дужине $n + 1$ и други дужине $n - 1$. Они су формирали два краја. Дакле, укупна дужина кутије била је $2n + 1$, њена ширина $n + 1$, а висина n . Унутрашњи простор кутије има дужину $2n - 1 = 2(n - 1) + 1$, ширину $n = (n - 1) + 1$ и висину $n - 1$. Зидови овог новог простора могу се изградити са три домине дебљине 1, ширине $n - 1$ и дужине $2(n - 1)$. Понављајући овај процес док се цела кутија не напуни, резултат следи.



Слика 17. Нилакантхин доказ формуле за збир квадрата преко домина

Да бисмо добили формуле за више степене, била је потребна друга техника, коју је пружио *Jyeshthadeva*, још један члан Мадхавине школе, у његовом делу „*Ganita-yukti-bhasha*“ (око 1530). Испоставило се да развој редова за синус и косинус заправо није захтевао тачну формулу за више степене. Све што је било потребно била је основна апроксимација за велико n , наиме,

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^k \approx \frac{n^{k+1}}{k+1}.$$

Да би је пронашао, *Jyesthadeva* је наставио индуктивно. Знао је из тачне формуле за $k = 1$ да, за велико n , $\sum i \approx \frac{n^2}{2}$. Сада приметимо да:

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 &= n[n + (n-1) + \dots + 1] - [n^2 + (n-1)^2 + \dots + 1^2] \\ &= 1(n-1) + 2(n-2) + 3(n-3) + \dots + (n-1)1. \end{aligned}$$

Ово се може преформулисати у облику:

$$n \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i + \sum_{i=1}^{n-2} i + \dots + \sum_{i=1}^1 i = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^p i \right).$$

За велике вредности n , сваки од чланова у двострукој суми може се апроксимирати као половина квадрата највећег члана. То јесте:

$$n \sum_{i=1}^n i - \sum_{i=1}^n i^2 \approx \frac{(n-1)^2}{2} + \frac{(n-2)^2}{2} + \dots + \frac{1^2}{2} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} i^2.$$

Због тога, за велико n , имамо:

Алгебра у Индији до 16. века

$$n \sum_{i=1}^n i \approx \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{1}{2} n^2 \quad \text{или} \quad \frac{3}{2} \sum_{i=1}^n i^2 \approx n \sum_{i=1}^n i + \frac{1}{2} n^2$$

или, коначно,

$$\sum_{i=1}^n i^2 \approx \frac{2}{3} n \cdot \frac{n^2}{2} + \frac{1}{3} n^2 \approx \frac{n^3}{3}.$$

Jyesthadeva је наставио на исти начин за $k = 3$, показујући да:

$$n \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i^3 = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^p i^2 \right).$$

Затим, претпостављајући апроксимацију за суме квадрата и зато што, за велике вредности n , није битно да ли се збраја до n или $n - 1$, он је закључио да:

$$n \sum_{i=1}^n i^2 - \sum_{i=1}^n i^3 \approx \frac{1}{3} \sum_{i=1}^n i^3$$

и стога да:

$$\sum_{i=1}^n i^3 \approx \frac{n^4}{4}.$$

Слично, уопштено,

$$n \sum_{i=1}^n i^{k-1} - \sum_{i=1}^n i^k = \sum_{p=1}^{n-1} \left(\sum_{i=1}^p i^{k-1} \right),$$

и овај резултат, узимајући у обзир апроксимацију за збир $(k - 1)$ -вих степена, имплицира да:

$$\sum_{i=1}^n i^k \approx \frac{n^{k+1}}{k + 1}.$$

12. Закључак

Многа питања окружују развој индијских алгебарских идеја. На пример, видели смо да су већ у петом веку нове ере индијски математичари познавали и користили алгоритам који ми називамо квадратна формула за решавање квадратних једначина, али да ли су је развили независно или су је научили од других култура, није уопште јасно. Без обзира на то, с обзиром на развој ове формуле и у древној Месопотамији и у средњовековном исламу, посебно је изненађујуће што нема доказа о геометријској основи за њу – или за било који поступак решавања проблема квадратне врсте – у индијском контексту. Индијски математичари су свакако разматрали геометријске моделе када су се бавили кубним проблемима, па чак и проблемима сумирања, али изгледа да су своја решења квадратних проблема одређивали потпуно алгоритамски. Стога, иако је замисливо да је ислам могао да научи индијску алгебру током деветог и десетог века, доступни докази сугеришу да индијска алгебра није пружила модел за софистициранију, геометријску алгебру која се појавила током тог периода у исламском свету.

Дубока мистерија окружује развој процедуре за решавање Пелове једначине. Колико ми знамо, ово је потпуно аутохтони развој; до данас није пронађен траг о Пеловој једначини у средњовековној исламској математици. Штавише, будући да је коначно решење једначине у Европи прилично независно од индијског контекста, изгледа да знање о индијском решењу никада није напустило индијски потконтинент.

Као и Кина, Индија је на крају отворена за западне математичке идеје, али, за разлику од својих кинеских колега, индијски математичари наставили су да развијају своје сопствене идеје, посебно у Керали. Тек у деветнаестом веку, након британске окупације земље, прилив западне математике успео је да замени снажну аутохтону индијску математичку традицију. Од тог тренутка, индијски математичари, уопштено, а посебно индијски алебристи, почели су да деле математички жаргон са Западом.

13. Литература

- Katz, Victor Joseph; Parshall, Karen Hunger, *Taming the unknown: A History of Algebra from Antiquity to the Early Twentieth Century*, Princeton University Press, Сијетл, 2020.
- Bibhutibhusan Datta, Avadesh Narayan Singh, *History of Hindu Mathematics part 1 and 2*, Asia Publishing House, Bombay Calcutta New Delhi, Madras·London New York, 1962.
- Kim Plofker, *Mathematics in India*, Published by Princeton University Press, 41 William Street, Princeton, New Jersey 08540, 2009.
- Ian G Pearce, *Indian mathematics – Redressing the balance (The Bakhshali manuscript)*, <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Projects/Pearce/chapter-7/>, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland.

14. Биографија аутора

Далибор Пиварски, рођен 14.7.1996. године у Врбасу. Основну школу „Светозар Милетић“ у Врбасу завршио је 2011. године, да би потом уписао Гимназију „Жарко Зрењанин“ у Врбасу, смер природно-математички, коју завршава 2015. године. Након тога (2016) уписује основне студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, на Департману за математику и информатику, где у јулу 2023. године дипломира и стиче звање Дипломирани професор математике. Исте године, уписује мастер студије на Математичком факултету у Београду, смер Теоријска математика и примене. Са радом у просвети почео је још 2019. године, за време студија, са првим радним местом у основној школи: „Братство Јединство“ у селу Куцура. 2020. године прелази да ради у основној школи „Вук Караџић“ у Ловћенцу на годину дана, а затим 2021. и 2022. године у пар наврата на замени у основној школи „20. Октобар“ у Сивцу. Последње две године ради у основној школи у Куцури као наставник математике, а од септембра 2024. године као професор математике у гимназији у Врбасу. У слободно време се бави трчањем и атлетиком, пре свега трчањем уличних трка широм Србије.