УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Петровић

ВЕЈЛОВА ТЕОРЕМА О РАВНОМЕРНОЈ РАСПОРЕЂЕНОСТИ И НЕКЕ ПРИМЕНЕ

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор:

др Петар Мелентијевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Владимир Божин, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Стефан Милошевић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Мами, тати и Филипу

Наслов мастер рада: Вејлова теорема о равномерној распоређености и неке примене

Резиме: У овом мастер раду доказаћемо теорему Вејла о еквидистрибуцији (подједнакој распоређености). Најпре ћемо размотрити један уводни пример за који ћемо дати елементарније комбинаторно решење. Теорема Вејла даје природан метод за решавање проблема густине и расподеле неких низова природних бројева. Ово је један пример дубоке теореме мотивисане задацима разумљивим ученицима средњих, па и старијих разреда основних школа. Рад након уводних примера који мотивишу увођење појмова еквидистрибуције (једнаке распоређености) садржи формулацију и доказ теореме Вејла и уопштење ове теореме. Дати су бројни примери који илуструју примену и значај ове теореме. Тема је погодна за додатни рад са ученицима средњих школа који добро познају елементе интегралног рачуна. Иако се овде осврћемо пре свега на примене у задацима везаним за средњошколску аритметику и низове, теорема Вејла је природно повезана и са дубљим гранама математике које се и даље развијају.

Кључне речи: анализа, комбинаторика, низови, равномерна распоређеност, густина

Садржај

Увод

> No sector of a circle is so small that two such mobiles could not conjunct in it at some future time and could not have conjuncted in the past (Ниједан лук кружнице није толико мали да се две покретне тачке не би могле спојити у њему у неком будућем тренутку, а да се нису спојиле у прошлости).
>
> Nicole Oresme (c. 1360)

У математици, ретки су концепти који истовремено поседују фундаменталну природу и широк спектар примена. Један такав је равномерна распоређеност низова. Низ бројева $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ из интервала $[0,1)$ је равномерно распоређен ако за сваки подинтервал $(a,b) \subset [0,1)$ важи:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N, \xi_n \in (a,b)\}|}{N} = b-a.$$

Ова идеја, наизглед једноставна, прожима различите гране математике и налази примену у бројним областима.

У овом мастер раду дата је презентација Вејлове [1] теореме и других теорема које су блиско повезане са њом. Како би била илустрована њихова моћ и разноврсност употребе, наведен је велики број примера, како рачунских, тако и примера доказивања различитих резултата. Посебно је занимљива примена ових резултата на рационалне и ирационалне бројеве, где се види различитост техника у доказивању која даје увид у разумевање специфичности ирационалних бројева.

Овом темом се први бавио Орезмо [2]. Он је показао да ће, ако се почне од произвољне тачке на кружници и она се ротира за ирационалан угао бесконачно много пута, резултујуће тачке бити густо распоређене по целој кру-

[1] Hermann Klaus Hugo Weyl (1885 – 1955) - немачки математичар
[2] Nicole Oresme (1325 – 1382) - француски математичар

жници. Овај резултат је познат као посебан случај Кронекерове [3] теореме из 1884. године, која каже да је низ $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$ ако је a ирационалан број.

Наредни значајан резултат дао је Вејл. Он се бавио разним гранама математике и током истраживања теорије репрезентација, 1909. године је открио теорему о равномерној распоређености низова. Дефиниција равномерне распоређености је јачи услов од оног који даје Кронекерова теорема – каже да који год део интервала узмемо знамо да ће у њему имати елемената низа сразмерно дужини тог интервала. Вејлова теорема даје карактеризацију равномерне распоређености низа $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$ доводећи је у блиску везу са тим да ли је γ ирационалан број. Вејлов критеријум, даје аналитички начин да се провери да ли је низ равномерно распоређен или не – сводећи једну особину са којом је тешко директно радити на рачун.

Овај мастер рад садржи четири поглавља. У првом поглављу је презентована формулација и доказ Кронекерове теореме, која је праћена примерима са разним конкретним вредностима. Онда су приказани проблеми који показују последице и примене теореме, које такође прате примери. Друго поглавље почиње примером низа који је густ, али није равномерно распоређен. Даље је приказана теорема Вејла и њен доказ, за специфичан низ облика $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$, где је γ ирационалан број. Треће поглавље садржи Вејлов критеријум, уопштење Вејлове теореме за произвољан низ реалних бројева, као и пример примене овог критеријума. Након тога је наведена Ван дер Корпутова [4] лема за комплексне бројеве и задатак у ком се примењује. На крају је задатак који приказује примену Вејловог критеријума на полиноме. Финално поглавље је синтеза претходних резултата у ком се илуструје коришћење Вејловог критеријума. На крају је дата карактеризација Вејловог критеријума за вишедимензионе низове.

Приказујући ове теореме и њихове примене, рад има за циљ боље разумевање концепта равномерне распоређености који има далекосежне примене у разним гранама математике.

[3] Leopold Kronecker (1823 – 1891) - немачки математичар
[4] Johannes Gaultherus van der Corput (1890 – 1975) - холандски математичар

Глава 1

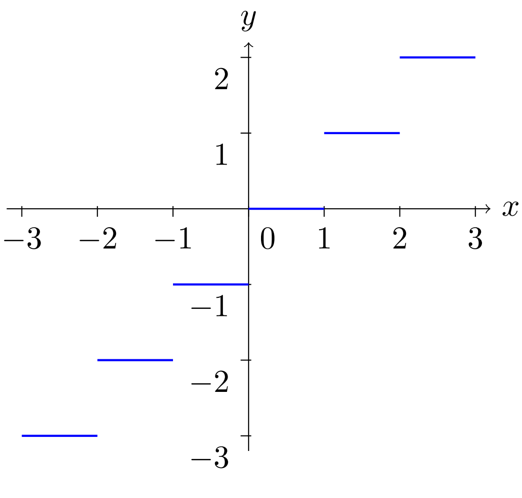
Кронекерова теорема

Дефиниција 1 *Цео део реалног броја* x *је највећи цео број мањи или једнак од* x *и означава се са* $\lfloor x \rfloor$.

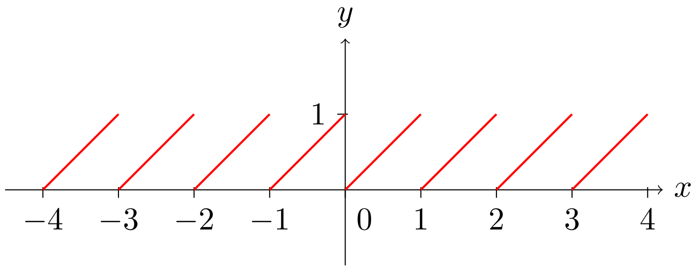
Дефиниција 2 *Разломљени део реалног броја* x *означава се са* $\{x\}$ *и дефинише се на следећи начин:* $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Пример 1 *Важи да је:* $\lfloor 0 \rfloor = \{0\} = 0$; $\lfloor 2,9 \rfloor = 2$; $\{2,9\} = 0,9$; $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$; $\{-1,5\} = 0,5$.

Илустрације функција



Слика 1.1: Функција цео део



Слика 1.2: Функција разломљени део

Теорема 1 *(Дирихлеов [1] принцип) Ако $n+1$ предмета треба сместити у n кутија, онда најмање једна кутија садржи два или више предмета.*

Доказ. Претпоставимо супротно да свака кутија садржи тачно један предмет. Тада ће у n кутија бити смештено n предмета. Како укупно има $n+1$ предмета, претпоставка није тачна. Дакле, постоји кутија у којој је два или више предмета.

$\square$

Теорема 2 *(Кронекер) Низ $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$ ако је a ирационалан број.*

Доказ. Нека је $a \in \mathbb{I}$ и $k \geq 1$ цео број. Поделимо интервал $[0,1]$ на k подинтервала једнаких дужина. Према Дирихлеовом принципу у првих $k+1$ чланова низа $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ постоје бар два која припадају истом подинтервалу. Нека су то $\{n_1 a\}$ и $\{n_2 a\}$. Претпоставимо да је $n_2 > n_1$, тада је $n_2 - n_1 > 0$. Важи да:

- $\{(n_2 - n_1)\, a\} \in \left[0, \frac{1}{k}\right]$, ако је $\{n_1 a\} \geq \{n_2 a\}$;
- $\{(n_2 - n_1)\, a\} \in \left[1 - \frac{1}{k}, 1\right]$, ако је $\{n_1 a\} < \{n_2 a\}$.

Како је a ирационалан број, важи да је $\{(n_2 - n_1)\, a\} \neq 0$. Узмимо вредности $\{n\,(n_2 - n_1)\, a\}$, за $n \in \mathbb{N}$. У сваком од k интервала мора бити нека од ових вредности. Дакле, низ $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$.

$\square$

[1] Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 – 1859) - немачки математичар

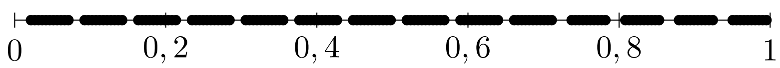
Пример 2 *Нека је $a = \sqrt{2}$ и $k = 5$. Важи да је:*

- $\left\{\sqrt{2}\right\} = 0,41 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$;
- $\left\{2\sqrt{2}\right\} = 0,82 \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$;
- $\left\{3\sqrt{2}\right\} = 0,24 \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$;
- $\left\{4\sqrt{2}\right\} = 0,65 \in \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$;
- $\left\{5\sqrt{2}\right\} = 0,07 \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$;
- $\left\{6\sqrt{2}\right\} = 0,48 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$.

Видимо да $\sqrt{2}$ и $6\sqrt{2}$ припадају истом интервалу. Нека је $n_1 = 1$ и $n_2 = 6$.

$$\left\{(n_2 - n_1)\sqrt{2}\right\} = \left\{5\sqrt{2}\right\} = 0,07 \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$$

На следећем цртежу приказане су вредности $\left\{5n\sqrt{2}\right\}$, за $n \in [1, 150]$.



Слика 1.3: Вредности $\left\{5n\sqrt{2}\right\}, n \in [1, 150]$

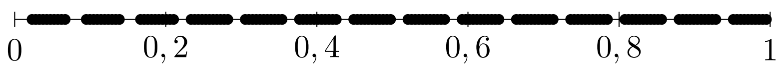
Пример 3 *Нека је $a = \sqrt{3}$ и $k = 5$. Важи да је:*

- $\left\{\sqrt{3}\right\} = 0,73 \in \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$;
- $\left\{2\sqrt{3}\right\} = 0,46 \in \left[\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right]$;
- $\left\{3\sqrt{3}\right\} = 0,19 \in \left[0, \frac{1}{5}\right]$;
- $\left\{4\sqrt{3}\right\} = 0,92 \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$;
- $\left\{5\sqrt{3}\right\} = 0,66 \in \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right]$;
- $\left\{6\sqrt{3}\right\} = 0,39 \in \left[\frac{1}{5}, \frac{2}{5}\right]$.

Видимо да $\sqrt{3}$ и $5\sqrt{3}$ припадају истом интервалу. Нека је $n_1 = 1$ и $n_2 = 5$.

$$\left\{(n_2 - n_1)\sqrt{3}\right\} = \left\{4\sqrt{3}\right\} = 0,92 \in \left[\frac{4}{5}, 1\right]$$

На следећем цртежу приказане су вредности $\left\{4n\sqrt{3}\right\}$, за $n \in [1, 150]$.



Слика 1.4: Вредности $\left\{4n\sqrt{3}\right\}, n \in [1, 150]$

У следећем примеру проверавамо како изгледа низ $(\{na\})_{n\geq 1}$ када је a рационалан број.

Пример 4 *Нека је* $a = \frac{1}{2}$.

- $n = 1 : \{na\} = \left\{1 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}\right\} = 0,5;$
- $n = 2 : \{na\} = \left\{2 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \{1\} = 0;$
- $n = 3 : \{na\} = \left\{3 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \left\{\frac{3}{2}\right\} = 0,5;$
- $n = 4 : \{na\} = \left\{4 \cdot \frac{1}{2}\right\} = \{2\} = 0.$

Овај низ није густ у $[0, 1]$, *јер има само две вредности.*

Лема 1 *За свако* $a \in \mathbb{N}$ *и свако* $b \in \mathbb{R}$ *такво да је* $\{b\} < \frac{1}{a}$ *важи* $\lfloor ab \rfloor = a \lfloor b \rfloor$.

Доказ. За сваки реалан број r важи $r = \lfloor r \rfloor + \{r\}$. Нека је $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$. Тада важи:

$$\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \left(\lfloor b \rfloor + \{b\} \right) \rfloor = \lfloor a \lfloor b \rfloor + a \{b\} \rfloor .$$

Како је $a \in \mathbb{N}$ i $\lfloor b \rfloor$ цео број, онда је $a \lfloor b \rfloor$ цео број. Такође, због тога што је $\{b\} < \frac{1}{a}$, важи да је $a \{b\} < 1$. Следи да је:

$$\lfloor ab \rfloor = \lfloor a \lfloor b \rfloor \rfloor = a \lfloor b \rfloor .$$

□

Пример 5 *Проверавамо претходну лему за различите вредности* a *и* b.
Нека је $a = 2$.

- $b = 1,2 : \lfloor 2 \cdot 1,2 \rfloor = \lfloor 2,4 \rfloor = 2$ *и* $2 \cdot \lfloor 1,2 \rfloor = 2 \cdot 1 = 2;$
- $b = 1,4 : \lfloor 2 \cdot 1,4 \rfloor = \lfloor 2,8 \rfloor = 2$ *и* $2 \cdot \lfloor 1,4 \rfloor = 2 \cdot 1 = 2;$
- $b = 1,5 : \lfloor 2 \cdot 1,5 \rfloor = \lfloor 3 \rfloor = 3$ *и* $2 \cdot \lfloor 1,5 \rfloor = 2 \cdot 1 = 2;$
- $b = 1,8 : \lfloor 2 \cdot 1,8 \rfloor = \lfloor 3,6 \rfloor = 3$ *и* $2 \cdot \lfloor 1,8 \rfloor = 2 \cdot 1 = 2.$

Видимо да је за $a = 2$ *једнакост* $\lfloor ab \rfloor = a \lfloor b \rfloor$ *тачна у примерима где је* $\{b\} < \frac{1}{2}$.
Нека је $a = 3$.

- $b = 1,1 : \lfloor 3 \cdot 1,1 \rfloor = \lfloor 3,3 \rfloor = 3$ *и* $3 \cdot \lfloor 1,1 \rfloor = 3 \cdot 1 = 3.$
- $b = 1,3 : \lfloor 3 \cdot 1,3 \rfloor = \lfloor 3,9 \rfloor = 3$ *и* $3 \cdot \lfloor 1,3 \rfloor = 3 \cdot 1 = 3.$
- $b = 1\frac{1}{3} : \left\lfloor 3 \cdot 1\frac{1}{3} \right\rfloor = \left\lfloor 3 \cdot \frac{4}{3} \right\rfloor = \lfloor 4 \rfloor = 4$ *и* $3 \cdot \left\lfloor 1\frac{1}{3} \right\rfloor = 3 \cdot 1 = 3;$

- $b = 1,4 : \lfloor 3 \cdot 1,4 \rfloor = \lfloor 4,2 \rfloor = 4$ *и* $3 \cdot \lfloor 1,4 \rfloor = 3 \cdot 1 = 3$.

Видимо да је за $a = 3$ *једнакост* $\lfloor ab \rfloor = a \lfloor b \rfloor$ *тачна у примерима где је* $\{b\} < \frac{1}{3}$.

У следећем задатку ћемо приказати једну последицу Кронекерове теореме.

Задатак 1 *Доказати да низ* $\left(\lfloor n\sqrt{2003} \rfloor\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *садржи произвољно дуге геометријске прогресије са произвољно великим количником.*

Решење. Према леми 1 важи $\lfloor ab \rfloor = a \lfloor b \rfloor$ за $a \in \mathbb{N}$ и $b \in \mathbb{R}$ такво да је $\{b\} < \frac{1}{a}$. Нека су $p, n, k \in \mathbb{N}$ фиксирани, такви да је $1 \leq k \leq n$. Како $p, k \in \mathbb{N}$, онда је $p^k \in \mathbb{N}$. Тада за $b \in \mathbb{R}$ и $\{b\} < \frac{1}{p^k}$ важи: $\lfloor p^k b \rfloor = p^k \lfloor b \rfloor$.
Тражимо $m_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $b = m_0\sqrt{2003}$ и да важи:

$$\left\lfloor p^k m_0\sqrt{2003} \right\rfloor = p^k \left\lfloor m_0\sqrt{2003} \right\rfloor, \text{за } 1 \leq k \leq n.$$

Ово ће важити ако је $\left\{m_0\sqrt{2003}\right\} < \frac{1}{p^n}$.
Према Кронекеровој теореми, низ $(\{na\})_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$ ако је a ирационалан број. Како је $\sqrt{2003} \in \mathbb{I}$, онда је скуп $\left(\left\{m\sqrt{2003}\right\}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$, односно:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\forall x \in [0,1])\ \exists t \in \left(\left\{m\sqrt{2003}\right\}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ tako da je } |x - t| < \epsilon.$$

Како је $1 \leq k \leq n$, онда је $\frac{1}{p^k} \geq \frac{1}{p^n}$. Нека је $x = 0$ и $\epsilon = \frac{1}{p^n}$. Из претходног, постоји t_0 такво да је $|t_0| < \frac{1}{p^n}$, односно $t_0 < \frac{1}{p^n}$, јер је $t_0 > 0$.
Дакле, постоји $m_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\left\{m_0\sqrt{2003}\right\} < \frac{1}{p^n}$. Следи да важи

$$\left\lfloor p^k m_0\sqrt{2003} \right\rfloor = p^k \left\lfloor m_0\sqrt{2003} \right\rfloor, 1 \leq k \leq n.$$

Низ $p^k \left\lfloor m_0\sqrt{2003} \right\rfloor, 1 \leq k \leq n$, је подниз почетног низа и једна геометријска прогресија дужине n, са количником p.

□

Лема 2 *Број цифара природног броја* m *је* $1 + \lfloor \log_{10} m \rfloor$.

Доказ. Нека је $m \in \mathbb{N}$ облика $m = \overline{a_1 a_2 \dots a_p}$ и p број цифара од m. Треба показати да је $p = 1 + \lfloor \log_{10} m \rfloor$, односно $\lfloor \log_{10} m \rfloor = p - 1$.

Нека је $r \in \mathbb{R}$ такво да је $r = \log_{10} m - p + 1$, онда је $\log_{10} m = p - 1 + r$ и $\lfloor \log_{10} m \rfloor = \lfloor p - 1 + r \rfloor$. Како је $p \in \mathbb{N}$, довољно је показати да је $r < 1$.

$$\log_{10} m = \log_{10}\left(10^{p-1} \cdot \frac{m}{10^{p-1}}\right) = \log_{10} 10^{p-1} + \log_{10} \frac{m}{10^{p-1}} = p - 1 + \log_{10} \frac{m}{10^{p-1}}$$

Добијамо да је $r = \log_{10} \frac{m}{10^{p-1}}$. Важи $r < 1$ ако је $\log_{10} \frac{m}{10^{p-1}} < 1$, тј. $\frac{m}{10^{p-1}} < 10$. Овај услов је испуњен за $m < 10^p$, што је тачно јер јер m облика:

$$m = a_1 \cdot 10^{p-1} + a_2 \cdot 10^{p-2} + \ldots + a_p \cdot 10^0.$$

Дакле, $r < 1$ и важи:

$$\lfloor \log_{10} m \rfloor = \lfloor p - 1 + r \rfloor = p - 1 \Rightarrow p = 1 + \lfloor \log_{10} m \rfloor.$$

$\square$

Лема 3 *Број формиран од првих k цифара природног броја m је* $\left\lfloor 10^{k-1+\{\log_{10} m\}} \right\rfloor$.

Доказ. Нека је $m \in \mathbb{N}$ и p број цифара од m.

$$m = \overline{a_1 a_2 \ldots a_p} = \overline{a_1 \ldots a_k a_{k+1} \ldots a_p} = \overline{a_1 \ldots a_k} \cdot 10^{p-k} + \overline{a_{k+1} \ldots a_p}$$

Дељењем обе стране једнакости са 10^{p-k} добија се:

$$\frac{m}{10^{p-k}} = \overline{a_1 \ldots a_k} + \frac{\overline{a_{k+1} \ldots a_p}}{10^{p-k}}$$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{10^{p-k}} \right\rfloor = \left\lfloor \overline{a_1 \ldots a_k} + \frac{\overline{a_{k+1} \ldots a_p}}{10^{p-k}} \right\rfloor.$$

Број формиран од првих k цифара броја m је природан број. Такође, број формиран од осталих цифара има $p - k$ цифара, па је $\frac{\overline{a_{k+1} \ldots a_p}}{10^{p-k}} < 1$. То значи да је:

$$\left\lfloor \frac{m}{10^{p-k}} \right\rfloor = \left\lfloor \overline{a_1 \ldots a_k} + \frac{\overline{a_{k+1} \ldots a_p}}{10^{p-k}} \right\rfloor = \lfloor \overline{a_1 \ldots a_k} \rfloor = \overline{a_1 \ldots a_k}.$$

Дакле, број формиран од првих k цифара броја m је:

$$\overline{a_1 \ldots a_k} = \left\lfloor \frac{m}{10^{p-k}} \right\rfloor.$$

Треба показати да је $\left\lfloor \frac{m}{10^{p-k}} \right\rfloor = \left\lfloor 10^{k-1+\{\log_{10} m\}} \right\rfloor$.
Према леми 2 је $p = 1 + \lfloor \log_{10} m \rfloor$, односно $\lfloor \log_{10} m \rfloor = p - 1$. Такође, за сваки реалан број b важи: $\{b\} = b - \lfloor b \rfloor$. Онда је:

$$\left\lfloor 10^{k-1+\{\log_{10} m\}} \right\rfloor = \left\lfloor 10^{k-1+\log_{10} m - \lfloor \log_{10} m \rfloor} \right\rfloor = \left\lfloor 10^{k-1+\log_{10} m - p + 1} \right\rfloor =$$

$$= \left\lfloor 10^{k-p+\log_{10} m} \right\rfloor = \left\lfloor 10^{k-p} \cdot 10^{\log_{10} m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{m}{10^{p-k}} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \overline{a_1 \ldots a_k} = \left\lfloor 10^{k-1+\{\log_{10} m\}} \right\rfloor .$$

□

Лема 4 *За сваки реалан број $x > 1$ важи:* $\lfloor \log_{10} \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log_{10} x \rfloor$.

Доказ. Нека је $x > 1$ реалан број и $\lfloor \log_{10} x \rfloor = k$. Тада је:

$$k \leq \log_{10} x < k + 1 \Rightarrow 10^k \leq x < 10^{k+1} \Rightarrow 10^k \leq \lfloor x \rfloor < 10^{k+1}$$

$$\Rightarrow k \leq \log_{10} \lfloor x \rfloor < k + 1 \Rightarrow \lfloor \log_{10} \lfloor x \rfloor \rfloor = k$$

$$\Rightarrow \lfloor \log_{10} \lfloor x \rfloor \rfloor = \lfloor \log_{10} x \rfloor .$$

□

Задатак 2 *Посматрајмо позитиван цео број k и реалан број $a > 1$ такав да је $\log_{10} a$ ирационалан. Нека је за свако $n \in \mathbb{N}$ број x_n формиран од првих k цифара броја $\lfloor a^n \rfloor$. Доказати да низ $(x_n)_{n \geq 1}$ није периодичан почев од неког члана.*

Решење. Претпоставимо супротно да је низ периодичан почев од неког елемента, тј. $\exists\, T \in \mathbb{N}$ такво да је $x_{n+T} = x_n$, за довољно велико n.
Такође, постоји $r \in \mathbb{N}$ такво да је $x_{rT} > 10^{k+1}$. Да бисмо ово показали, претпоставимо супротно да за свако $r \in \mathbb{N}$ важи $x_{rT} \leq 10^{k-1}$. Како је број цифара x_l, за свако $l \in \mathbb{N}$, једнак k, најмањи члан низа може бити 10^{k-1}. Зато је довољно претпоставити да за свако $r \in \mathbb{N}$ важи $x_{rT} = 10^{k-1}$.
Према леми 3 важи: $x_{rT} = \left\lfloor 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} \right\rfloor$. Следи да је:

$$\left\lfloor 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} \right\rfloor = 10^{k-1}. \tag{1.1}$$

За свако $b \in \mathbb{R}$ важи: $\lfloor b \rfloor = b - \{b\}$ и $\{b\} < 1$. Тада је (1.1) еквивалентно са:

$$10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} - \left\{ 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} \right\} = 10^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} = \left\{ 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} \right\} + 10^{k-1}$$

$$\Leftrightarrow 10^{k-1+\left\{\log_{10} \left\lfloor a^{rT} \right\rfloor\right\}} < 1 + 10^{k-1}. \tag{1.2}$$

Применом логаритма са основом 10 на ову неједнакост, добија се да је (1.2) еквивалентно са:

$$\log_{10} 10^{k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\}} < \log_{10}\left(1+10^{k-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} < \log_{10}\left(10^{k-1}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} < \log_{10} 10^{k-1} + \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} < k-1+\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} < \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right).$$

За сваки реалан број x важи да је $x-1 < \lfloor x \rfloor$, па је: $\log_{10}(x-1) < \log_{10}\lfloor x \rfloor$. Из овога и леме 4, следи:

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) > \left\{\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\} = \log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor - \left\lfloor\log_{10}\left\lfloor a^{rT}\right\rfloor\right\rfloor >$$

$$> \log_{10}\left(a^{rT}-1\right) - \left\lfloor\log_{10} a^{rT}\right\rfloor =$$

$$= \log_{10}\left(a^{rT}-1\right) - \left(\log_{10} a^{rT} - \left\{\log_{10} a^{rT}\right\}\right) =$$

$$= \log_{10}\left(a^{rT}-1\right) - \log_{10} a^{rT} + \left\{\log_{10} a^{rT}\right\} =$$

$$= \{rT\log_{10} a\} - \left(\log_{10} a^{rT} - \log_{10}\left(a^{rT}-1\right)\right) =$$

$$= \{rT\log_{10} a\} - \log_{10}\frac{a^{rT}}{a^{rT}-1}.$$

Нека је $m \in \mathbb{N}$. Како је $\log_{10} a \in \mathbb{I}$, према Кронекеровој теореми је низ $\left(\{mT\log_{10} a\}\right)_{m\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$, тј:

$$(\forall\epsilon > 0)\,(\forall x \in [0,1])\ \exists t \in \left(\{mT\log_{10} a\}\right)_{m\in\mathbb{N}} \text{ тако да је } |x-t| < \epsilon.$$

Нека је $x = 1$ и $\epsilon = \frac{1}{n}$. Тада постоји $t_0^{(n)}$ такво да је $\left|1-t_0^{(n)}\right| < \frac{1}{n}$, односно $1-t_0^{(n)} < \frac{1}{n}$, јер је $t_0^{(n)} \in [0,1)$. Следи да је $t_0^{(n)} > 1-\frac{1}{n}$. Дакле, постоји $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такав да је $\{r_nT\log_{10} a\} > 1-\frac{1}{n}$.

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) > \{r_nT\log_{10} a\} - \log_{10}\frac{a^{r_nT}}{a^{r_nT}-1} > 1-\frac{1}{n} - \log_{10}\frac{a^{r_nT}}{a^{r_nT}-1}$$

$$\Rightarrow \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) + \frac{1}{n} + \log_{10}\frac{a^{r_nT}}{a^{r_nT}-1} > 1, \forall n \in \mathbb{N}$$

Важи да је $\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) < \log_{10} 2$, а други и трећи сабирак теже 0 када n тежи бесконачности. Ова неједнакост није тачна, па претпоставка не важи. Дакле, постоји $r > 0$ такво да је $x_{rT} > 10^{k-1}$.
Нека је $x_{rT} = x_{nT}$, за $n > r$. Онда је: $x_{nT} > 10^{k-1}$.

$$x_{nT} = \left\lfloor 10^{k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\}} \right\rfloor > 10^{k-1}, \text{ па је } 10^{k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\}} \geq 10^{k-1}+1.$$

Применом логаритма са основом 10 на ову неједнакост, добија се:

$$k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq \log_{10}\left(10^{k-1}+1\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq \log_{10}\left(10^{k-1}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq \log_{10} 10^{k-1} + \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow k-1+\left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq k-1+\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} \geq \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right)$$

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) \leq \left\{\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\} = \log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor - \left\lfloor \log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\rfloor.$$

Из леме 4 следи да је

$$\left\lfloor \log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor\right\rfloor = \left\lfloor \log_{10} a^{nT}\right\rfloor.$$

Такође је,

$$\log_{10}\left\lfloor a^{nT}\right\rfloor \leq \log_{10} a^{nT}.$$

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) \leq \log_{10} a^{nT} - \left\lfloor \log_{10} a^{nT}\right\rfloor = nT\log_{10} a - \lfloor nT\log_{10} a\rfloor$$

$$\Rightarrow \log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right) \leq \{nT\log_{10} a\} \text{ , за све } n > r.$$

Како је $nT \in \mathbb{N}$ и $\log_{10} a \in \mathbb{I}$, према Кронекеровој теореми је низ

$$\left(\{nT\log_{10} a\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

густ у $[0,1]$. Дакле, постоји неки елемент тог низа који је мањи од

$$\log_{10}\left(1+\frac{1}{10^{k-1}}\right).$$

Претпоставка не важи, па низ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ није периодичан.

□

Лема 5 *Нека је* $a \in \mathbb{I}$ *и* $b \in \mathbb{R}$. *Ако је низ* $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ *густ у* $[0,1]$, *онда је и низ* $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ *густ у* $[0,1]$.

Доказ. Нека је $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{R}$. Низ $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$, тј.

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\forall x \in [0,1])\;\; \exists t \in (\{an\})_{n\in\mathbb{N}} \text{ тако да је } |x - t| < \epsilon.$$

Показујемо да је низ $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$. Нека су $\epsilon > 0$ и $x_0 \in [0,1]$ произвољни. Тражимо $n_0 \in \mathbb{N}$ такво да је

$$|x_0 - \{an_0 + b\}| < \epsilon, \text{ тј. да } \{an_0 + b\} \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)\,.$$

Без умањења општости претпоставимо да $b \in (0,1)$, јер $\{an+b+k\} = \{an+b\}$, за $k \in \mathbb{Z}$ и $n \in \mathbb{N}$. Такође, важе услови:

1. $\{an+b\} = \{an\} + b$, ако је $\{an\} + b < 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$;
2. $\{an+b\} = b - (1 - \{an\}) = \{an\} + b - 1$, ако је $\{an\} + b \geq 1$, за свако $n \in \mathbb{N}$.

Други услов важи јер $\{an\}\,, b \in (0,1)$, па су $\lfloor an \rfloor$ и $\lfloor an + b \rfloor$ узастопни бројеви ако је $\{an\} + b \geq 1$.
Како је низ $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$, онда је низ $(\{an\}+b)_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[b, 1+b]$, јер се добија транслацијом почетног низа за b.

- Нека је $x_0 \in [0, b)$. Тада постоји n_1 такво да је $\{an_1\} + b \geq 1$ и налази се у околини $1 + x_0$. Из услова 2 следи: $\{an_1 + b\} = \{an_1\} + b - 1$. Како је $\{an_1\}+b$ у околини $1+x_0$, онда је $\{an_1\}+b-1$ у околини x_0, па је $\{an_1 + b\}$ у околини x_0. Дакле, постоји n_1 такво да $\{an_1 + b\} \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.
- Нека је $x_0 \in [b, 1]$. Тада постоји n_2 такво да је $\{an_2\} + b < 1$ и налази се у околини x_0. Из услова 1 следи: $\{an_2 + b\} = \{an_2\} + b$. Како је $\{an_2\} + b$ у околини x_0, онда је $\{an_2 + b\}$ у околини x_0. Дакле, постоји n_2 такво да $\{an_2 + b\} \in (x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon)$.

$\square$

Лема 6 *Нека је* $a \in \mathbb{I}$ *и* $b \in \mathbb{R}$. *Ако је низ* $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ *густ у* $[0,1]$, *онда је и низ* $(1 - \{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ *густ у* $[0,1]$.

Доказ. Нека је $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{R}$. Низ $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$, то значи:

$$(\forall \epsilon > 0)\,(\forall x \in [0,1])\ \ \exists t \in (\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}} \text{ тако да је } |x-t| < \epsilon.$$

Нека је $x = \frac{1}{2}$ и $\epsilon > 0$ фиксирано. Постоји n_0 такво да је $\left|\frac{1}{2} - \{an_0+b\}\right| < \epsilon$, тј. $\{an_0+b\} \in \left(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon\right)$. Тада и $1 - \{an_0+b\} \in \left(\frac{1}{2}-\epsilon, \frac{1}{2}+\epsilon\right)$, односно постоји n_0 такво да је $\left|\frac{1}{2} - (1 - \{an_0+b\})\right| < \epsilon$.

□

Задатак 3 *Нека је (a,b) пар реалних бројева и $F(a,b)$ низ чији је општи члан $c_n = \lfloor an+b \rfloor$. Пронаћи све парове (a,b) такве да:*

$$F(x,y) = F(a,b) \Rightarrow (x,y) = (a,b)\,.$$

Решење. Нека су x, y, a и $b \in \mathbb{R}$ и $F(a,b) = (\lfloor an+b \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$. Доказујемо да:

$$F(x,y) = F(a,b) \Rightarrow (x,y) = (a,b)\,.$$

Нека је $F(x,y) = F(a,b)$. Тада је $\lfloor xn+y \rfloor = \lfloor an+b \rfloor$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Дељењем ове једнакости са n, добија се:

$$\frac{\lfloor xn+y \rfloor}{n} = \frac{\lfloor an+b \rfloor}{n}. \tag{1.3}$$

Како за сваки реалан број r важи $r - 1 < \lfloor r \rfloor \leq r$, онда је:

$$\frac{xn+y-1}{n} < \frac{\lfloor xn+y \rfloor}{n} \leq \frac{xn+y}{n}.$$

Важи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{xn+y-1}{n} = x \text{ и}$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{xn+y}{n} = x.$$

Према теореми о два полицајца је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor xn+y \rfloor}{n} = x.$$

На сличан начин се добија:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\lfloor an+b \rfloor}{n} = a.$$

Применом лимеса када n тежи бесконачности на једнакост (1.3), добија се да је $x = a$.
Нека је $a \in \mathbb{Q}$. Тада је $a = \frac{p}{q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$ и $q \neq 0$, и низ $(an)_{n\in\mathbb{N}}$ је облика:

$$\frac{p}{q}, \frac{2p}{q}, \ldots, \frac{qp}{q} = p,$$

$$\frac{(q+1)p}{q}, \frac{(q+2)p}{q}, \ldots, \frac{(q+q)p}{q} = 2p,$$

$$\frac{(2q+1)p}{q}, \frac{(2q+2)p}{q}, \ldots, \frac{(2q+q)p}{q} = 3p,$$

$$\ldots$$

Показујемо да је $\left\{\frac{(sq+k)p}{q}\right\} = \left\{\frac{kp}{q}\right\}$, за фиксирано $k \in \mathbb{N}$ и $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

$$\left\{\frac{(sq+k)p}{q}\right\} = \left\{\frac{sqp}{q} + \frac{kp}{q}\right\} = \left\{sp + \frac{kp}{q}\right\} = \left\{\frac{kp}{q}\right\}$$

Дакле, важи:

$$\left\{\frac{p}{q}\right\} = \left\{\frac{(q+1)p}{q}\right\} = \left\{\frac{(2q+1)p}{q}\right\} = \ldots,$$

$$\left\{\frac{2p}{q}\right\} = \left\{\frac{(q+2)p}{q}\right\} = \left\{\frac{(2q+2)p}{q}\right\} = \ldots,$$

$$\ldots$$

$$\left\{\frac{qp}{q}\right\} = \left\{\frac{(q+q)p}{q}\right\} = \left\{\frac{(2q+q)p}{q}\right\} = \ldots$$

Низ $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ узима q различитих вредности. Такође, и низ $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ узима q различитих вредности, јер важи:

- $n = 1 : \{an+b\} = \left\{\frac{p}{q} + b\right\}$,
- $n = 2 : \{an+b\} = \left\{\frac{2p}{q} + b\right\}$, ...,
- $n = q : \{an+b\} = \left\{\frac{qp}{q} + b\right\} = \{p+b\}$,
- $n = q+1 :$

  $$\{an+b\} = \left\{\frac{(q+1)p}{q} + b\right\} = \left\{\frac{qp}{q} + \frac{p}{q} + b\right\} = \left\{p + \frac{p}{q} + b\right\} = \left\{\frac{p}{q} + b\right\}, \ldots$$

Показујемо да постоји мало $r > 0$ такво да важи $F(a, b + r) = F(a, b)$. Како низ $(\{an + b\})_{n \in \mathbb{N}}$ узима коначан број вредности, постоји t_0 такво да је

$$t_0 = \max(\{an + b\})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Важи да је $t_0 < 1$. Нека је $r = \frac{1-t_0}{2}$. За свако $n \in \mathbb{N}$ је:

$$\begin{aligned} \{an + b\} &\le t_0 \\ \Leftrightarrow \{an + b\} + r &\le t_0 + \frac{1 - t_0}{2} \\ \Leftrightarrow \{an + b\} + r &\le \frac{2t_0 + 1 - t_0}{2} \\ \Leftrightarrow \{an + b\} + r &\le \frac{t_0 + 1}{2}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Како је $t_0 < 1$, онда је и $\frac{t_0+1}{2} < 1$, па је (1.4) еквивалентно са:

$$\begin{aligned} \{an + b\} + r &< 1 \\ \Leftrightarrow r &< 1 - \{an + b\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Додавањем $an + b$ на обе стране једнакости је (1.5) еквивалентно са:

$$\begin{aligned} an + b + r &< an + b + 1 - \{an + b\} \\ \Leftrightarrow an + b + r - 1 &< an + b - \{an + b\}. \end{aligned} \tag{1.6}$$

За сваки реалан број r важи: $\lfloor r \rfloor = r - \{r\}$, па је (1.6) еквивалентно са:

$$\begin{aligned} an + b + r - 1 &< \lfloor an + b \rfloor \\ \Leftrightarrow \lfloor an + b \rfloor &> \lfloor an + b + r \rfloor + \{an + b + r\} - 1 \\ \Leftrightarrow \lfloor an + b \rfloor &> \lfloor an + b + r \rfloor - (1 - \{an + b + r\}). \end{aligned}$$

Како $\{an + b + r\} \in [0, 1)$, онда и $1 - \{an + b + r\} \in (0, 1]$.
Важи да $\lfloor an + b \rfloor, \lfloor an + b + r \rfloor \in \mathbb{Z}$, па следи да је $\lfloor an + b \rfloor \ge \lfloor an + b + r \rfloor$.
Са друге стране, за $r > 0$ важи $an+b < an+b+r$, па је $\lfloor an + b \rfloor \le \lfloor an + b + r \rfloor$.
Из $\lfloor an + b \rfloor \ge \lfloor an + b + r \rfloor$ и $\lfloor an + b \rfloor \le \lfloor an + b + r \rfloor$ следи да је

$$\lfloor an + b \rfloor = \lfloor an + b + r \rfloor, \forall n \in \mathbb{N}.$$

То значи да је $F(a, b + r) = F(a, b)$. Међутим, како је $b + r \ne b$, није испуњен услов задатка за дати низ реалних бројева (a, b).

Нека је $a \in \mathbb{I}$. Тада је према Кронекеровој теореми низ $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$. Нека су x_1 и x_2 произвољни реални бројеви такви да је $x_1 < x_2$. Тада је

$$an + x_1 < an + x_2, \text{за свако } n \in \mathbb{N}.$$

Показујемо да за довољно велико n постоји $m \in \mathbb{N}$ такво да је

$$an + x_1 < m < an + x_2.$$

Када се на $an + x_1$ дода вредност $x_2 - x_1$, која је већа од 0, добија се $an + x_2$. Први цео број после $an + x_1$ је $1 + \lfloor an + x_1 \rfloor$. Потребно је да:

$$x_2 - x_1 > 1 + \lfloor an + x_1 \rfloor - (an + x_1)$$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 1 + an + x_1 - \{an + x_1\} - an - x_1$$

$$\Leftrightarrow x_2 - x_1 > 1 - \{an + x_1\}.$$

Како је низ $(\{an\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$, према леми 5 је низ $(\{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$, а према леми 6 је низ $(1 - \{an+b\})_{n\in\mathbb{N}}$ густ у $[0,1]$. Тада постоји n_0 такво да је $x_2 - x_1 > 1 - \{an_0 + x_1\}$. Следи да је

$$an_0 + x_1 < 1 + \lfloor an_0 + x_1 \rfloor < an_0 + x_2.$$

Дакле, $F(a, x_1) \neq F(a, x_2)$, па је решење сваки пар (a, b) такав да $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{R}$.

□

Дефиниција 3 *Бројеви $r_1, r_2, \ldots, r_m$ чине потпун систем остатака по модулу m ако дају различите остатке при дељењу са m.*

Задатак 4 *Нека је $r \in (0,1)$ и $S(r)$ скуп позитивних целих бројева n за које $(nr, nr + r)$ садржи тачно један цео број. Доказати да је $r \in \mathbb{I}$ ако и само ако за свако $M \in \mathbb{N}$ постоји потпун систем остатака по модулу M садржаних у $S(r)$.*

Решење. Интервал $(nr, nr + r)$ може садржати највише један цео број, јер $r \in (0,1)$.
Нека је r рационалан број. Узмимо да је M именилац од r, на пример $r = \frac{p}{M}$ за $p \in \mathbb{N}$. Нека је $n = kM$, за $k \in \{0, 1, 2, ...\}$. Тада је интервал $(nr, nr + r)$ облика $\left(kp, kp + \frac{p}{M}\right)$. Видимо да ни за једно $n \in \mathbb{N}$ вредност облика kp не

упада ни у један интервал. Важи да је $kp = kMr$. Како је $n = kM$, онда је $kp = nr$. Дакле, за n облика kM, ниједно nr не упада у интервал, што значи да ниједно n облика kM не припада $S(r)$. Како је $kM \equiv 0 \pmod{M}$, то ниједан број који даје остатак 0 при дељењу са M не припада $S(r)$. Дакле, потпун систем остатака по модулу M није садржан у $S(r)$.
Нека је $r \in \mathbb{I}$, тада је и $\frac{1}{r} \in \mathbb{I}$. Према Кронекеровој теореми низ $\left(\left\{n\frac{1}{r}\right\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ је густ у $[0,1]$. Узмимо цео број m такав да је $0 \leq m < M$. Тада постоји $k' \in \mathbb{N}$ такво да је:

$$\frac{m}{M} \leq \left\{\frac{k'}{r}\right\} < \frac{m+1}{M}.$$

Нека је $s = \left\lfloor \frac{k'}{r} \right\rfloor$. Тада је:

$$\frac{m}{M} \leq \frac{k'}{r} - s < \frac{m+1}{M} \Leftrightarrow m \leq \frac{k'M}{r} - sM < m+1 \Leftrightarrow m+sM \leq \frac{k'M}{r} < m+1+sM.$$

Нека је $k'M = k$ и $m + sM = n$. Тада је

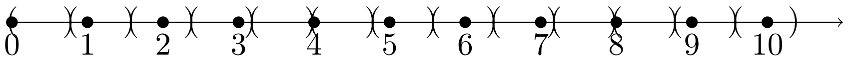
$$nr \leq k < (n+1)\,r.$$

То значи да $k \in (nr, nr + r)$. Дакле, постоји цео број у датом интервалу, тј. $n \in S(r)$. Како је $n = sM + m$ и $m \in [0, M)$ произвољно, то је потпун систем остатака садржан у $S(r)$.

$\square$

Пример 6 *Посматрајмо један рационалан број r. На пример, $r = \frac{4}{5}$. Тада је $p = 4$ и $M = 5$. Интервал $(nr, nr + r)$ је облика $\left(\frac{4}{5}n, \frac{4}{5}n + \frac{4}{5}\right)$.*

- $n = 0 : (nr, nr + r) = \left(0, \frac{4}{5}\right)$,
- $n = 1 : (nr, nr + r) = \left(\frac{4}{5}, \frac{8}{5}\right)$,
- $n = 2 : (nr, nr + r) = \left(\frac{8}{5}, \frac{12}{5}\right)$,
- $n = 3 : (nr, nr + r) = \left(\frac{12}{5}, \frac{16}{5}\right)$,
- $n = 4 : (nr, nr + r) = \left(\frac{16}{5}, \frac{20}{5}\right) = \left(\frac{16}{5}, 4\right)$,
- $n = 5 : (nr, nr + r) = \left(\frac{20}{5}, \frac{24}{5}\right) = \left(4, \frac{24}{5}\right)$, *итд*...



Слика 1.5: Интервали облика: $(nr, nr + r)$

Видимо да $0, 4, 8, \ldots$ *не упадају ни у један интервал. То су бројеви облика* kp, *за* $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. *Важи да је:*

- $0 = 0 \cdot \frac{4}{5}$,
- $4 = 5 \cdot \frac{4}{5}$,
- $8 = 10 \cdot \frac{4}{5}$,
- $12 = 15 \cdot \frac{4}{5}$, *итд...*

Дакле, за све $n \in \{0, 5, 10, 15, \ldots\}$ *важи да* n *не припрада скупу* $S(r)$. *То су сви бројеви* $n \equiv 0 \, (mod\ 5)$.

Задатак 5 *Нека су* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *реални бројеви и* $\epsilon > 0$. *Показати да постоји позитиван цео број* n *и цели бројеви* $p_1, p_2, \ldots, p_k$ *такви да* $|nx_i - p_i| < \epsilon$, *за свако* $1 \leq i \leq k$.

Решење. Треба показати да када имамо коначан скуп реалних бројева, ако их помножимо позитивним целим бројем, добијамо бројеве који су довољно близу датим целим бројевима. Нека је $\epsilon > 0$ и $x_1, x_2, \ldots, x_k$ реални бројеви. Нека је $N > \frac{1}{\epsilon}$ цео број. Поделимо интервал $[0, 1)$ на N једнаких делова.

$$[0, 1) = \bigcup_{s=1}^{N} J_s, J_s = \left[\frac{s-1}{N}, \frac{s}{N}\right)$$

Нека је $n = N^k + 1$. Сваком q из скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ додељујемо низ k позитивних целих бројева $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, таквих да је $\alpha_i = s$ ако и само ако $\{qx_i\} \in J_s$. Тиме се добија n низова. Како сваки од k бројева у низу припада неком од N инетрвала, највише може бити N^k различитих низова. Према Дирихлеовом принципу постоје бар две вредности u и v, такве да је $1 \leq u < v \leq n$, којима је додељен исти низ. То значи да за све $1 \leq i \leq k$ важи да $\{ux_i\}$ и $\{vx_i\}$ припадају истом интервалу, односно:

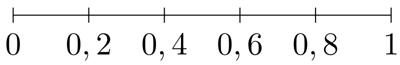
$$|\{ux_i\} - \{vx_i\}| < \frac{1}{N} \leq \epsilon.$$

Како су вредностима u и v додељени исти низови, онда ће се почев од неког низови понављати. Довољно је изабрати да је $n = v - u$ и $p_i = \lfloor vx_i \rfloor - \lfloor ux_i \rfloor$, $1 \leq i \leq k$.

$\square$

Пример 7 *Претпоставимо да је* $\epsilon = \frac{1}{4}$, $x_1 = 1,4$ *и* $x_2 = \pi$. *Нека је* $N = 5$. *Интервал* $[0,1)$ *поделимо на* 5 *једнаких делова.*

$$[0,1) = \bigcup_{s=1}^{5} J_s, J_s = \left[\frac{s-1}{5}, \frac{s}{5}\right)$$



Слика 1.6: Подела интервала $[0,1)$ на 5 једнаких делова

Важи да је

$$n = 5^2 + 1 = 25 + 1 = 26.$$

Свакој вредности q *из скупа* $\{1, 2, \ldots, 26\}$ *додељујемо низ позитивних целих бројева* (α_1, α_2).

q	qx_1	qx_2	$\{qx_1\}$	$\{qx_2\}$	α_1	α_2
1	$1,4$	$3,41$	$0,4$	$0,41$	3	1
2	$2,8$	$6,28$	$0,8$	$0,28$	5	2
3	$4,2$	$9,42$	$0,2$	$0,42$	2	3
4	$5,6$	$12,57$	$0,6$	$0,57$	4	3
5	7	$15,71$	0	$0,71$	1	4
6	$8,4$	$18,85$	$0,4$	$0,85$	3	5
7	$9,8$	$21,99$	$0,8$	$0,99$	5	5
8	$11,2$	$25,13$	$0,2$	$0,13$	2	1
9	$12,6$	$28,27$	$0,6$	$0,27$	4	2
10	14	$31,42$	0	$0,42$	1	3
11	$15,4$	$34,56$	$0,4$	$0,56$	3	3
12	$16,8$	$37,70$	$0,8$	$0,70$	5	4
13	$18,2$	$40,84$	$0,2$	$0,84$	2	5
14	$19,6$	$43,98$	$0,6$	$0,98$	4	5
15	21	$47,12$	0	$0,12$	1	1
16	$22,4$	$50,27$	$0,4$	$0,27$	3	2
17	$23,8$	$53,41$	$0,8$	$0,41$	5	3
18	$25,2$	$56,55$	$0,2$	$0,55$	2	3
19	$26,6$	$59,69$	$0,6$	$0,69$	4	4
20	28	$62,83$	0	$0,83$	1	5
21	$29,4$	$65,97$	$0,4$	$0,97$	3	5
22	$30,8$	$69,11$	$0,8$	$0,11$	5	1
23	$32,2$	$72,26$	$0,2$	$0,26$	2	2
24	$33,6$	$75,40$	$0,6$	$0,40$	4	3
25	35	$78,54$	0	$0,54$	1	3
26	$36,4$	$81,68$	$0,4$	$0,68$	3	4

Напомена. *У колонама qx_2 и $\{qx_2\}$ приказане су вредности заокружене на две децимале.*

Видимо да постоје неки u и v, $1 \leq u < v \leq n$, којима је додељен исти низ. Нека је, на пример, $u = 3$ и $v = 18$. Вредности $\{ux_1\}$ и $\{vx_1\}$ припадају интервалу J_2, док вредности $\{ux_2\}$ и $\{vx_2\}$ припадају интервалу J_3. Важи да је:

$$|\{ux_i\} - \{vx_i\}| < \frac{1}{N} \leq \epsilon, i \in \{1, 2\}.$$

Бирамо: $n = v - u$ *и* $p_i = \lfloor vx_i \rfloor - \lfloor ux_i \rfloor$, $i \in \{1, 2\}$.

$$n = 18 - 3 = 15$$

$$p_1 = \lfloor 25,2 \rfloor - \lfloor 4,2 \rfloor = 25 - 4 = 21$$

$$p_2 = \lfloor 56,55 \rfloor - \lfloor 9,42 \rfloor = 56 - 9 = 47$$

$$|15 \cdot 1,4 - 21| = |21 - 21| = 0 < \epsilon$$

$$|15 \cdot \pi| \approx |47,12 - 47| \approx 0,12 < \epsilon$$

Задатак 6 *Нека су* $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ *реални бројеви са следећим својством: за свако* $1 \leq i \leq 2n+1$ *могу се направити две групе по* n *бројева коришћењем свих* $x_j, j \neq i$*, такве да је збир бројева у свакој групи исти. Доказати да сви ти бројеви морају бити једнаки.*

Решење. Претпоставимо да су $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ цели бројеви. Показујемо најпре да сви ти бројеви морају бити исте парности, да би важило дато својство. Нека је

$$s = \sum_{i=1}^{2n+1} x_i.$$

Доказујемо да је s исте парности као x_i за свако $i, 1 \leq i \leq 2n+1$. Фиксирајмо x_{i_0}. Остале бројеве поделимо у две групе по n бројева, тако да је збир обе групе исти. Нека је

$$s_1 = \sum_{i \neq i_0} x_i.$$

Тада важи $2|s_1$, па је $s \equiv x_{i_0} \pmod 2$. Односно, s је исте парности као x_{i_0}. Како је x_{i_0} произвољно, то важи за све $x_i, 1 \leq i \leq 2n+1$.
Ако су сви парни, поделимо сваки број са 2 и добијамо низ бројева који има исто својство као почетни. Ако су сви непарни, нови низ добијамо тако што од сваког $x_i, 1 \leq i \leq 2n+1$ одузмемо 1, а затим поделимо са 2. Овај поступак понављамо све док не дођемо до 0. Применом инверзних операција на низ нула, у сваком кораку ће сви елементи низа бити једнаки.
Претпоставимо да су $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$ рационални бројеви. Множењем ових бројева заједничким имениоцем, добија се низ целих бројева на који се може применити претходни случај.
Претпоставимо сада да је бар један од датих бројева ирационалан. Према задатку 5 за $\epsilon > 0$, постоји позитиван цео број m и цели бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$

такви да је $|mx_i - p_i| < \epsilon$, за све i. Тврдимо да за довољно мало ϵ бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_{2n+1}$ имају исто својство као и $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$. Да бисмо то показали, фиксирајмо неко i_0 и услов задатка запишимо на следећи начин:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j} m x_j = 0 \text{ или } \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j}(mx_j - p_j) = -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j} p_j,$$

при чему $a_{i_0 j} \in \{-1, 1\}$. Тада је:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j} p_j \right| = \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j}(mx_j - p_j) \right| \leq 2n\epsilon.$$

Ако изаберемо $\epsilon < \frac{1}{2n}$, важи:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j} p_j \right| \leq 2n\epsilon < 1.$$

Како су p_j цели бројеви, важи да је

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{2n+1} a_{i_0 j} p_j = 0,$$

односно $p_1, p_2, \cdots, p_{2n+1}$ имају исто својство као $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+1}$, па из првог дела доказа следи да морају бити једнаки.

Дакле, показали смо да за било које $N > 2n$ постоје m_N и p_N такви да је $|m_N x_i - p_N| \leq \frac{1}{N}$, за $1 \leq i \leq 2n+1$. Важи да је:

$$|m_N x_i - p_N - (m_N x_j - p_N)| = |m_N x_i - p_N - m_N x_j + p_N| =$$

$$= |m_N x_i - m_N x_j| \leq |m_N||x_i - x_j|.$$

Са друге стране је

$$|m_N x_i - p_N - (m_N x_j - p_N)| \leq |m_N x_i - p_N| + |m_N x_j - p_N| \leq \frac{1}{N} + \frac{1}{N} = \frac{2}{N}.$$

Због тога је

$$|m_N| \max_{i,j} |x_i - x_j| < \frac{2}{N}.$$

Како је $|m_N| \geq 1$ и $\frac{2}{N} < 1$, следи да је

$$\max_{i,j} |x_i - x_j| = 0,$$

што значи да су сви $x_i, 1 \leq i \leq 2n+1$, једнаки. $\square$

Задатак 7 *Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ реални бројеви са својством: без обзира на који начин се изабере 13 бројева међу њима, постоји 8 бројева од 2007 таквих да имају исту аритметичку средину као 13 изабраних. Доказати да су сви ти бројеви једнаки.*

Решење. Претпоставимо да су бројеви $a_1, a_2, \ldots, a_{2007}$ цели. Бирамо 13 бројева $b_1, b_2, \ldots, b_{13}$. Постоји 8 бројева $c_1, c_2, \ldots, c_8$ таквих да важи:

$$\frac{b_1 + \ldots + b_{13}}{13} = \frac{c_1 + \ldots + c_8}{8}$$

$$\Leftrightarrow 8(b_1 + \cdots + b_{13}) = 13(c_1 + \cdots + c_8)$$

$$\Leftrightarrow 13 \mid 8(b_1 + \cdots + b_{13})$$

$$\Leftrightarrow 13 \mid (b_1 + \cdots + b_{13}).$$

Дакле, сума 13 бројева дељива је са 13.
Изаберимо два броја a_i и a_j и нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{12}$ неки a_k, такви да је $k \neq i$ и $k \neq j$. Тада важи да су $a_i + x_1 + \ldots + x_{12}$ и $a_j + x_1 + \ldots + x_{12}$ дељиви са 13. Како је $x_1 + \ldots x_{12} = x_1 + \ldots + x_{12}$ онда важи: $a_i \equiv a_j \pmod{13}$. Сви бројеви дају остатак r при дељењу са 13. Нову колекцију 2007 бројева добијамо тако што од сваког $a_i, 1 \leq i \leq 2007$ одузмемо r и поделимо са 13. Нова колекција бројева задовољава почетно својство. Понављањем исте процедуре долазимо до колекције нула. Применом инверзних операција видимо да ће у свакој колекцији бити једнаки бројеви.
Претпоставимо да су бројеви реални. Ако су сви рационални, помножимо све бројеве из колекције заједничким имениоцем. Тиме се добија колекција целих бројева на коју се може применити претходни део решења.
Претпоставимо да је бар један од бројева ирационалан. Нека је $\epsilon > 0$ произвољно. Како су бројеви реални, онда постоји неко n и цели бројеви $p_1, p_2, \ldots, p_{2007}$ такви да важи $|na_i - p_i| < \epsilon$, за све $1 \leq i \leq 2007$.
Колекција бројева na_i задовољава исто својство као и a_i, за све $1 \leq i \leq 2007$.
Нека је:

$$\frac{a_{i_1} + \ldots + a_{i_{13}}}{13} = \frac{a_{j_1} + \ldots + a_{i_8}}{8}.$$

Множењем ове једнакости са n добија се:

$$\frac{na_{i_1} + \ldots + na_{i_{13}}}{13} = \frac{na_{j_1} + \ldots + na_{i_8}}{8}. \tag{1.7}$$

Нека је $x_i = na_i - p_i, 1 \leq i \leq 2007$. Тада је $|x_i| < \epsilon$ и $na_i = x_i + p_i, 1 \leq i \leq 2007$, па је (1.7) еквивалентно са:

$$\frac{x_{i_1} + p_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}} + p_{i_{13}}}{13} = \frac{x_{j_1} + p_{j_1} + \ldots + x_{j_8} + p_{j_8}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}}}{13} + \frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} = \frac{x_{j_1} + \ldots + x_{j_8}}{8} + \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8}$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} - \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8} = \frac{x_{j_1} + \ldots + x_{j_8}}{8} - \frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}}}{13}$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} - \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8}\right| = \left|\frac{x_{j_1} + \ldots + x_{j_8}}{8} - \frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}}}{13}\right|.$$

$$\left|\frac{x_{j_1} + \ldots + x_{j_8}}{8} - \frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}}}{13}\right| \leq \left|\frac{x_{j_1} + \ldots + x_{j_8}}{8}\right| + \left|\frac{x_{i_1} + \ldots + x_{i_{13}}}{13}\right| <$$

$$< \left|\frac{8\epsilon}{8}\right| + \left|\frac{13\epsilon}{13}\right| = 2\epsilon$$

Следи,

$$\left|\frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} - \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8}\right| < 2\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)}{13 \cdot 8}\right| < 2\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)\right| < 2\epsilon \cdot 13 \cdot 8.$$

Како су p_i цели бројеви, $1 \leq i \leq 2007$, онда ако

$$\left|8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)\right|$$

није нула, мора да важи:

$$\left|8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)\right| \geq 1.$$

Бирамо $\epsilon < \frac{1}{16 \cdot 13}$. Тада је:

$$\left|8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)\right| < 1$$

$$\Leftrightarrow \left|8\left(p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}\right) - 13\left(p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}\right)\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} - \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} - \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{p_{i_1} + \ldots + p_{i_{13}}}{13} = \frac{p_{j_1} + \ldots + p_{j_8}}{8}.$$

Дакле, p_i имају исто својство као $a_i, 1 \leq i \leq 2007$. Како су то цели бројеви, важи да је $p_1 = p_2 = \ldots = p_{2007}$.
Посматрајмо na_i и na_j, за неке индексе i и j.

$$|na_i - na_j| = n\,|a_i - a_j|$$

Са друге стране је:

$$|na_i - na_j| = |x_i + p_i - x_j - p_j| = |x_i - x_j|\,,$$

јер је $p_i = p_j$, за било које i и j. Дакле,

$$n\,|a_i - a_j| = |x_i - x_j| \leq |x_i| + |x_j| < 2\epsilon, \text{ za } \ \epsilon < \frac{1}{16 \cdot 13}$$

$$\Rightarrow |a_i - a_j| < \frac{2\epsilon}{n}.$$

Како $\frac{2\epsilon}{n}$ може бити произвољно мало следи да је $a_i = a_j$, за све i и j.Дакле,

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_{2007}.$$

□

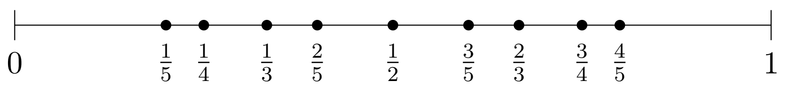
Глава 2

Вејлова теорема

Дефиниција 4 *Низ бројева* $\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots$ *из интервала* $[0,1)$ *је равномерно распоређен ако за сваки подинтервал* $(a,b) \subset [0,1)$ *важи:*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N, \xi_n \in (a,b)\}|}{N} = b - a.$$

Пример 8 *Низ* $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \cdots$ *јесте равномерно распоређен на интервалу* $[0,1)$.



Слика 2.1: Приказ елемената низа

Да би овај низ био равномерно распоређен на $[0,1)$ *потребно је да се у сваком подинтервалу налази неки његов подниз.*
Нека је $[a,b) \subset [0,1)$. *Интервал* $[a,b)$ *садржи неки рационалан број. Поделимо овај интервал на два једнака. Добијамо интервале* $\left[a, \frac{a+b}{2}\right)$ *и* $\left[\frac{a+b}{2}, b\right)$. *Сваки од ових интервала садржи неки рационалан број. Нека су то бројеви* x *и* y. *Приметимо, број који је аритметичка средина бројева* x *и* y *припада интервалу* $[a,b)$. *Означимо га са* z. *Такође,* z *има већи именилац од* x *и* y, *па се појављује касније у низу. Слично, било која конвексна комбинација* $(1-\alpha)x + \alpha y$, *где* $\alpha \in [0,1]$, *припада интервалу* $[a,b)$ *и налази се у почетном низу. Они са већим imeниоцем су чланови низа са већим индексом. Дакле, тај низ јесте равномерно распоређен на* $[0,1)$.

Пример 9 *Нека је* $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *било који низ рационалних бројева у* $[0,1)$. *Низ дефинисан са*

$$\xi_n = \begin{cases} r_{\frac{n}{2}} & \text{, ако је } n \text{ парно} \\ 0 & \text{, ако је } n \text{ непарно} \end{cases}$$

није равномерно распоређен, јер је половина чланова низа једнака 0. *Са друге стране, овај низ јесте густ у* $[0,1)$, *јер је низ рационалних бројева густ у* $[0,1)$.

Лема 7 *Ако је функција* f *непрекидна и периодична са периодом* 1 *и* γ *ирационалан број, онда је*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Доказ. Приказаћемо доказ леме кроз три корака.

<u>*Корак 1.*</u> Проверавамо тврђење ако је f нека од експоненцијалних функција: $1, e^{2\pi i x}, \ldots, e^{2\pi i k x}, \ldots$

• Нека је $f(x) = 1$, односно $f(n\gamma) = 1$.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} 1 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}N = 1$$

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 1dx = x|_0^1 = 1 - 0 = 1$$

Дакле, тврђење важи.

• Нека је $f(x) = e^{2\pi i k x}$, за $k \neq 0$.

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n\gamma} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} e^{2\pi i k\gamma}\frac{1 - e^{2\pi i k N\gamma}}{1 - e^{2\pi i k\gamma}} = 0$$

Друга једнакост важи јер је

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k n\gamma}$$

геометријски ред са првим чланом $e^{2\pi i k\gamma}$ и количником $e^{2\pi i k\gamma}$. Како је γ ирационалан, онда је $e^{2\pi i k\gamma} \neq 1$. Такође, $e^{2\pi i k\gamma}$ и $e^{2\pi i k N\gamma}$ су ограничени, па важи да је лимес једнак 0.

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 e^{2\pi i k x}dx = \int_0^1 (\cos(2\pi k x) + i\sin(2\pi k x))\,dx =$$

$$= \int_0^1 \cos(2\pi kx)\,dx = \left.\frac{\sin(2\pi kx)}{2\pi k}\right|_0^1 = 0$$

Следи да је

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)\,dx, \text{ за } f(x) = e^{2\pi ikx}, \text{ за } k \in \{0,1,2,\ldots\}.$$

Корак 2. Ако функције f и g задовољавају лему, онда и $Af + Bg$ задовољава лему за све $A, B \in \mathbb{C}$.

Како f и g задовољавају лему, важи:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)\,dx \text{ и}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(n\gamma) = \int_0^1 g(x)\,dx.$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (Af(n\gamma) + Bg(n\gamma)) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\left(\sum_{n=1}^{N} Af(n\gamma) + \sum_{n=1}^{N} Bg(n\gamma)\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Af(n\gamma) + \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} Bg(n\gamma) =$$

$$= A\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) + B\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} g(n\gamma) = A\int_0^1 f(x)\,dx + B\int_0^1 g(x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 Af(x)\,dx + \int_0^1 Bg(x)\,dx = \int_0^1 (Af(x) + Bg(x))\,dx$$

Према кораку 1, лема важи за све тригонометријске полиноме облика

$$P(x) = \sum_{n=1}^{N} c_n e^{2\pi inx}, \ c_n \in \mathbb{C}.$$

Корак 3. Нека је $\epsilon > 0$ и функција f непрекидна и периодична са периодом 1. Можемо изабрати [7] тригонометријски полином P такав да је

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - P(x)| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Према кораку 1 за све N важи:

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| < \frac{\epsilon}{3}.$$

Дакле,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 P(x)\,dx - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) + \int_0^1 P(x)\,dx\right| =$$

$$= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f(n\gamma) - P(n\gamma)) + \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx - \right.$$

$$\left. - \int_0^1 (f(x) + P(x))\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} (f(n\gamma) - P(n\gamma))\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| +$$

$$+ \left|\int_0^1 (f(x) + P(x))\,dx\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n\gamma) - P(n\gamma)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} P(n\gamma) - \int_0^1 P(x)\,dx\right| +$$

$$+ \int_0^1 |f(x) + P(x)|\,dx < \epsilon,$$

при чему неједнакости важе на основу неједнакости троугла и следеће неједнакости за интеграле:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx \leq (b-a) \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|, \text{ где је } a < b.$$

Следи да је

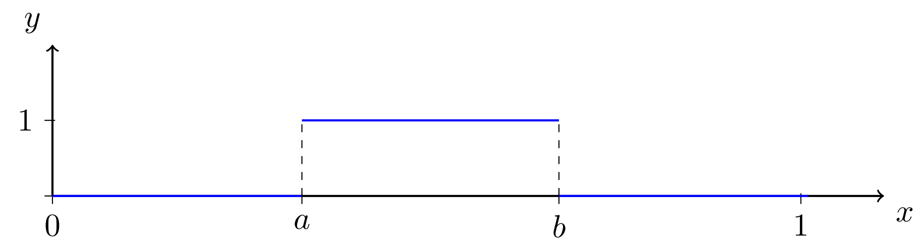
$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

$\square$

Теорема 3 *(Вејл) Ако је γ ирационалан, онда је низ разломљених делова $\{\gamma\}, \{2\gamma\}, \{3\gamma\}, \ldots$ равномерно распоређен у $[0, 1)$.*

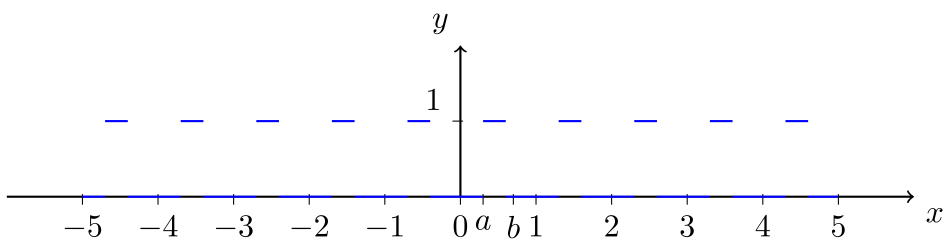
Доказ. Фиксирајмо интервал $(a,b) \subset [0,1)$ и нека је $\chi_{(a,b)}(x)$ карактеристична функција тог интервала.

$$\chi_{(a,b)}(x) = \begin{cases} 1, & x \in (a,b) \\ 0, & x \in [0,1) \setminus (a,b) \end{cases}$$



Слика 2.2: Карактеристична функција интервала (a,b)

Продужимо ову функцију на $\mathbb{R}$ периодично са периодом 1 и означимо са $\chi_{(a,b)}(x)$.

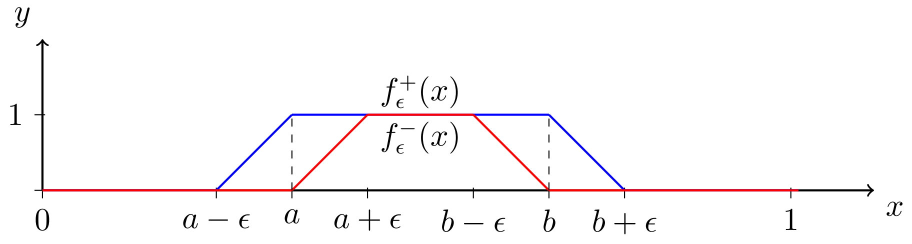


Слика 2.3: Периодична функција $\chi_{(a,b)}(x)$

Као последица дефиниције карактеристичне функције важи:

$$|\{1 \leq n \leq N : \{n\gamma\} \in (a,b)\}| = \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma).$$

Како функција $\chi_{(a,b)}(x)$ није непрекинда, за неко $\epsilon > 0$ бирамо две непрекидне функције $f_\epsilon^-(x)$ и $f_\epsilon^+(x)$ које се апроксимирају функцијом $\chi_{(a,b)}(x)$ одозго и одоздо на интервалу $[0,1)$. Нека су ове функције периодичне са периодом 1 и ограничене вредношћу 1. Такође, поклапају се са функцијом $\chi_{(a,b)}(x)$, осим на интервалима дужине 2ϵ.



Слика 2.4: Приказ функција $f_\epsilon^-(x)$ и $f_\epsilon^+(x)$

Важи да је $f_\epsilon^-(x) \le \chi_{(a,b)}(x) \le f_\epsilon^+(x)$. Следи:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^-(n\gamma) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma) \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^+(n\gamma).$$

Означимо:

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma).$$

Тада је:

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^-(n\gamma) \le S_N \le \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f_\epsilon^+(n\gamma).$$

Даље, рачунамо вредности интеграла

$$\int_0^1 f_\epsilon^-(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 f_\epsilon^+(x)\,dx.$$

$$\int_0^1 f_\epsilon^-(x)\,dx = \int_0^a f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx +$$
$$+ \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_{b-\epsilon}^{b} f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_b^1 f_\epsilon^-(x)\,dx =$$
$$= \int_0^a 0dx + \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_{a+\epsilon}^{b-\epsilon} 1dx + \int_{b-\epsilon}^{b} f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_b^1 0dx =$$
$$= 0 + \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx + b - \epsilon - a - \epsilon + \int_{b-\epsilon}^{b} f_\epsilon^-(x)\,dx + 0 =$$
$$= b - a - 2\epsilon + \int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx + \int_{b-\epsilon}^{b} f_\epsilon^-(x)\,dx$$

Функција $f_\epsilon^-(x)$ је позитивна, па важи:

$$\int_a^{a+\epsilon} f_\epsilon^-(x)\,dx \ge 0 \quad \text{и} \quad \int_{b-\epsilon}^{b} f_\epsilon^-(x)\,dx \ge 0.$$

Тада је:

$$\int_0^1 f_\epsilon^-(x)\,dx \geq b - a - 2\epsilon.$$

$$\int_0^1 f_\epsilon^+(x)\,dx = \int_0^{a-\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_{a-\epsilon}^a f_\epsilon^+(x)\,dx +$$

$$+ \int_a^b f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_b^{b+\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_{b+\epsilon}^1 f_\epsilon^+(x)\,dx =$$

$$= \int_0^{a-\epsilon} 0dx + \int_{a-\epsilon}^a f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_a^b 1dx + \int_b^{b+\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_{b+\epsilon}^1 0dx =$$

$$= 0 + \int_{a-\epsilon}^a f_\epsilon^+(x)\,dx + b - a + \int_b^{b+\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx + 0 =$$

$$= b - a + \int_{a-\epsilon}^a f_\epsilon^+(x)\,dx + \int_b^{b+\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx$$

Важи да је:

$$\int_{a-\epsilon}^a f_\epsilon^+(x)\,dx \leq \int_{a-\epsilon}^a 1dx = a - a + \epsilon = \epsilon \quad \text{и}$$

$$\int_b^{b+\epsilon} f_\epsilon^+(x)\,dx \leq \int_b^{b+\epsilon} 1dx = b + \epsilon - b = \epsilon.$$

Тада је:

$$\int_0^1 f_\epsilon^+(x)\,dx \leq b - a + 2\epsilon.$$

Низ S_N је ограничен, па постоје лимес инфериор и лимес супериор и важи:

$$b - a - 2\epsilon \leq \liminf_{N\to\infty} S_N \quad \text{и} \quad \limsup_{N\to\infty} S_N \leq b - a + 2\epsilon.$$

Како ово важи за свако $\epsilon > 0$, следи да је:

$$\liminf_{N\to\infty} S_N = \limsup_{N\to\infty} S_N = b - a, \quad \text{односно} \quad \lim_{N\to\infty} S_N = b - a.$$

То значи да је:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma) = b - a$$

Следи да је:

$$\lim_{N\to\infty} \frac{|\{1 \leq n \leq N : \{n\gamma\} \in (a,b)\}|}{N} = b - a.$$

Према дефиницији, важи да је низ $\{\gamma\}, \{2\gamma\}, \ldots, \{n\gamma\}, \ldots$ равномерно распоређен на интервалу (a,b). Како ово важи за сваки подинтервал $(a,b) \subset [0,1)$, теорема је доказана на целом интервалу $[0,1)$.

$\square$

Глава 3

Вејлов критеријум

У претходном поглављу приказан је случај равномерне распоређености специфичног низа $(\{n\gamma\})_{n\in\mathbb{N}}$, при чему $\gamma \in \mathbb{I}$. Овде ћемо приказати општи случај, односно доказаћемо равномерну распоређеност произвољног низа реалних бројева.

Дефиниција 5 *Низ $(a_n)_{n\geq 1}$ је равномерно распоређен по модулу 1 ако је низ разломљених делова $(\{a_n\})_{n\geq 1}$ равномерно распоређен.*

Лема 8 *Нека је $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева у $[0,1)$. Тада је низ $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређен ако и само ако је*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

за све функције f које су Риман интеграбилне на $[0,1]$.

Доказ. Идеја доказа је слична као у теореми 3.
$(\Leftarrow)$: Нека је $[a,b)$ интервал такав да је $1 \leq a < b \leq 1$ и нека је

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b) \\ 0, & x \in [0,1) \setminus [a,b) \end{cases}$$

карактеристична функција интервала $[a,b)$. Тада је:

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = \frac{|\{1 \leq k \leq n : \alpha_k \in [a,b)\}|}{n} \text{ и}$$

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^a f(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx + \int_b^1 f(x)\, dx =$$

$$= \int_0^1 0dx + \int_a^b dx + \int_b^1 0dx = 0 + x|_a^b + 0 = b - a.$$

Како је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = b - a$$

односно,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{1 \le k \le n : \alpha_k \in [a,b)\}|}{n} = b - a.$$

Према дефиницији 4, низ $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ је равномерно распоређен на $[0,1)$.
$(\Rightarrow)$: Претпоставимо да је низ $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређен у $[0,1)$. Тада за сваки интервал $[a,b) \subset [0,1)$ важи:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\{1 \le k \le n : \alpha_k \in [a,b)\}|}{n} = b - a.$$

То значи да једнакост

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = \int_0^1 f(x)\, dx$$

важи за карактеристичну функцију интервала $[a,b)$. Због линеарности важи и за било коју линерану комбинацију карактеристичних функција у $[0,1]$. Ако је f Риман интеграбилна у $[0,1]$, онда за свако $\epsilon > 0$ можемо наћи две линеарне комбинације карактеристичних функција f_1 и f_2 такве да је

$$f_1 \le f \le f_2 \quad \text{и} \quad \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))\, dx < \epsilon. \ [9]$$

Како лема важи за функцију f_1, то је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) = \int_0^1 f_1(x)\, dx \ge \int_0^1 f(x)\, dx - \epsilon.$$

За довољно велико n биће:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) > \int_0^1 f(x)\, dx - 2\epsilon.$$

Слично добијамо:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) < \int_0^1 f(x)\, dx + 2\epsilon.$$

Дакле, важи:

$$\int_0^1 f(x)\,dx - 2\epsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) < \int_0^1 f(x)\,dx + 2\epsilon$$

$$\Leftrightarrow -2\epsilon < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) - \int_0^1 f(x)\,dx < 2\epsilon$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_1(\alpha_i) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < 2\epsilon.$$

На сличан начин за довољно велико n добијамо:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2(\alpha_i) > \int_0^1 f(x)\,dx - 2\epsilon \text{ и } \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2(\alpha_i) < \int_0^1 f(x)\,dx + 2\epsilon.$$

Дакле,

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_2(\alpha_i) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < 2\epsilon.$$

Како је $f_1 \leq f \leq f_2$, важи:

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| < 2\epsilon.$$

То значи да је:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(\alpha_i) = \int_0^1 f(x)\,dx,$$

чиме је лема доказана за све Риман интеграбилне функције на интервалу $[0,1]$.

$\square$

Теорема 4 *(Вејлов критеријум) Нека је $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Тај низ је равномерно распоређен по модулу* 1 *ако и само ако је*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i m\beta_j} = 0,$$

за свако $m \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$.

Доказ.($\Rightarrow$) Нека је $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређено по модулу 1 и нека је α_j разломљени део од β_j, за $j \in \mathbb{N}$. Према дефиницији је низ $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређен у $[0,1)$. Нека је $f(x) = e^{2\pi imx}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Ова функција је непрекидна и Риман интеграбилна на $[0,1)$. Према леми 8, важи да је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi im\alpha_j} = \int_0^1 e^{2\pi imx} dx = \left. \frac{e^{2\pi imx}}{2\pi im} \right|_0^1 = \frac{1}{2\pi im} \left(e^{2\pi im} - 1 \right) = 0,$$

јер је $e^{2\pi im} = \cos(2\pi m) + i\sin(2\pi m) = 1$, за $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
Како је $\alpha_j = \beta_j - \lfloor \beta_j \rfloor$, следи да је $\beta_j = \alpha_j + \lfloor \beta_j \rfloor$, за $j \in \mathbb{N}$. Нека је $k_j = \lfloor \beta_j \rfloor$, за $j \in \mathbb{N}$. Тада је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi im\beta_j} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi im\alpha_j} e^{2\pi imk_j} = 0,$$

при чему последња једнакост важи јер је $e^{2\pi imk_j}$ ограничено.
$(\Leftarrow)$: Претпоставимо да је

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi im\beta_j} = 0,$$

за свако $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.j$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi im\alpha_j} = 0,$$

при чему је α_j дефинисано као у претходном делу доказа.
Треба да покажемо да важи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k) = \int_0^1 f(x)\, dx,$$

за све Риман интеграбилне функције у $[0,1]$.
Према претпоставци ова једнакост важи за функције

$$f(x) = 1 \text{ и } f(x) = e^{2\pi imx}, m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Због линеарности важи ће и за све тригонометријске полиноме облика:

$$a_0 + (a_1 \sin(2\pi x) + b_1 \cos(2\pi x)) + \ldots + (a_m \sin(2\pi x) + b_m \cos(2\pi x)),$$

$a_j, b_j \in \mathbb{C}$, за $1 \le j \le m$.
Свака периодична функција са периодом 1 може се апроксимирати тригонометријским полиномом. За $\epsilon > 0$ постоји тригонометријски полином $f_\epsilon(x)$ такав да је

$$\sup_{x\in[0,1]} |f(x) - f_\epsilon(x)| < \epsilon.$$

Нека је $f_1 = f_\epsilon - \epsilon$ и $f_2 = f_\epsilon + \epsilon$, тако да је

$$f_1 \leq f \leq f_2 \text{ и } \int_0^1 \left(f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right) dx < 2\epsilon.$$

Нека је f линеарна комбинација карактеристичних функција на $[0,1]$. У доказу Вејлове теореме видели смо да се карактеристична функција може апроксимирати са две периодичне функције, па исто важи и за линеарну комбинацију. Дакле, постоје функције f_1 и f_2 такве да је:

$$f_1 \leq f \leq f_2 \text{ и } \int_0^1 \left(f_2\left(x\right) - f_1\left(x\right)\right) dx < \epsilon.$$

Користећи исти поступак као у доказу леме 8 добијамо једнакост

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} f\left(\alpha_i\right) = \int_0^1 f\left(x\right) dx$$

важи за било коју линеарну комбинацију карактеристичних функција. Риман интеграбилна функција у $[0,1]$ може се апроксимирати линеарним комбинацијама карактеристичних функција. Дакле, једнакост важи и за произвољну Риман интеграбилну функцију у $[0,1]$.

$\square$

Теорема 5 *Нека је ξ ирационалан број. Тада је низ $(n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређен по модулу* 1.

Доказ. Нека је $\xi \in \mathbb{I}$ и $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Дефинишимо $\omega := m\xi$. Показујемо да је:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i j\omega} = 0.$$

Како је $\xi \in \mathbb{I}$, следи да $\omega \notin \mathbb{Z}$ и $e^{2\pi i\omega} \neq 1$. Важи:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i j\omega}\right| = \left|e^{2\pi i\omega} \frac{1 - e^{2\pi i\omega n}}{1 - e^{2\pi i\omega}}\right| = \left|\frac{e^{2\pi i\omega} - e^{2\pi i\omega(n+1)}}{1 - e^{2\pi i\omega}}\right| \leq \frac{2}{\left|1 - e^{2\pi i\omega}\right|},$$

јер је $e^{2\pi i\omega}$ и $e^{2\pi i\omega(n+1)}$ ограничено по апсолутној вредности.
Како је

$$\left|\sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i j\omega}\right|$$

ограничено, следи да је

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i j\omega} = 0,$$

односно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} e^{2\pi i j m\xi} = 0,$$

па је према Вејловом критеријуму низ $(n\xi)_{n\in\mathbb{N}}$ равномерно распоређен.

□

Дефиниција 6 *Нека је $S \subset \mathbb{N}$ и $A(N) = |\{n \in S : 1 \le n \le N\}|$ број свих n из S који су мањи или једнаки N. Природна густина скупа S дефинише се на следећи начин:*

$$d(S) = \lim_{N\to\infty} \frac{A(N)}{N}, \text{ ако тај лимес постоји.}$$

Задатак 8 *Одредити густину позитивних целих бројева n за које 2^n почиње са 2006.*

Решење. Нека је S скуп свих позитивних целих бројева n за које број 2^n почиње са 2006. Број 2^n, за неко $n \in \mathbb{N}$, почиње са 2006 ако и само ако постоји неко $p \ge 1$ и цифре $a_1, a_2, \dots, a_p$ такве да је $2^n = \overline{2006a_1a_2\dots a_p}$. Одатле следи да је:

$$2006 \cdot 10^p \le 2^n < 2007 \cdot 10^p. \tag{3.1}$$

Применом логаритма са основом 10 добија се да је (3.1) еквивалентно са:

$$\log_{10}(2006 \cdot 10^p) \le \log_{10} 2^n < \log_{10}(2007 \cdot 10^p)$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2006 + \log_{10} 10^p \le n \log_{10} 2 < \log_{10} 2007 + \log_{10} 10^p$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2006 + p \le n \log_{10} 2 < \log_{10} 2007 + p. \tag{3.2}$$

Према особинама логаритамске функције важи:

- $\log_{10} 2006 > \log_{10} 2000 = \log_{10}(2 \cdot 1000) = \log_{10} 2 + \log_{10} 1000 = \log_{10} 2 + 3;$
- $\log_{10} 2007 = 3 + m$, за неко $m \in (0, 1)$.

Следи да је (3.2) еквивалентно са:

$$\log_{10} 2 + 3 + p < \log_{10} 2006 + p \leq n \log_{10} 2 < \log_{10} 2007 + p < 3 + m + p$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2 + 3 + p \leq n \log_{10} 2 < 3 + m + p$$

$$\Leftrightarrow \lfloor \log_{10} 2 + 3 + p \rfloor \leq \lfloor n \log_{10} 2 \rfloor < \lfloor 3 + m + p \rfloor . \tag{3.3}$$

Како је $\log_{10} 2 < 1, m \in (0,1)$ и $p \in \mathbb{N}$, важи да је (3.3) еквивалентно са:

$$3 + p \leq \lfloor n \log_{10} 2 \rfloor < 3 + p.$$

$$\Leftrightarrow \lfloor n \log_{10} 2 \rfloor = 3 + p.$$

Заменом у почетну неједнакост добијамо:

$$\log_{10} 2006 + p \leq \lfloor n \log_{10} 2 \rfloor + \{n \log_{10} 2\} < \log_{10} 2007 + p$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2006 + p \leq p + 3 + \{n \log_{10} 2\} < \log_{10} 2007 + p$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2006 - 3 \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10} 2007 - 3$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 2006 - \log_{10} 1000 \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10} 2007 - \log_{10} 1000$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} \left(\frac{2006}{1000} \right) \leq \{n \log_{10} 2\} < \log_{10} \left(\frac{2007}{1000} \right).$$

Дакле, ако $n \in S$, онда $\{n \log_{10} 2\} \in \left[\log_{10} \frac{2006}{1000}, \log_{10} \frac{2007}{1000}\right)$. Како је $\log_{10} 2$ ирационалан број, онда је $(\{n \log_{10} 2\})_{n \geq 1}$, према Вејловој теореми, равномерно распоређен. Према дефиницији равномерне распоређености важи:

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\left| \left\{ 1 \leq n \leq N, \{n \log_{10} 2\} \in \left[\log_{10} \left(\frac{2006}{1000}\right), \log_{10} \left(\frac{2007}{1000}\right)\right) \right\} \right|}{N} =$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2007}{1000} \right) - \log_{10} \left(\frac{2006}{1000} \right) = \log_{10} 2007 - \log_{10} 1000 - \log_{10} 2006 + \log_{10} 1000 =$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2007}{2006} \right).$$

Према дефиницји густине скупа, добијамо да је густина скупа разломљених делова једнака $\log_{10} \left(\frac{2007}{2006}\right)$, па је због еквиваленције и густина скупа S иста.

$\square$

Лема 9 *(Бине [1] - Кошијев [2] идентитет) За комплексне бројеве a_i, b_i, c_i и d_i, при чему је $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$, важи:*

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j d_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_j\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i).$$

Доказ.

$$\sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i) =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j c_i d_j - a_i b_j c_j d_i - a_j b_i c_i d_j + a_j b_i c_j d_i) =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j c_i d_j + a_j b_i c_j d_i) - \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j c_j d_i + a_j b_i c_i d_j) =$$

$$= \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j c_i d_j + a_j b_i c_j d_i) + \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i -$$

$$- \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j c_j d_i + a_j b_i c_i d_j) - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i c_i d_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j c_i d_j - \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j c_j d_i =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j d_j\right) - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_j\right),$$

при чему последња једнакост важи јер су индекси у сумама независни. Следи,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j d_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_j\right) + \sum_{1\leq i<j\leq n} (a_i b_j - a_j b_i)(c_i d_j - c_j d_i).$$

□

Лема 10 *(Коши - Шварцова [3] неједнакост) За комплексне бројеве w_i и z_i, при чему је $1 \leq i \leq n, n \in \mathbb{N}$ важи:*

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right|^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2\right).$$

[1] Jacques Philippe Marie Binet (1786 – 1856) - француски математичар
[2] Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857) - француски математичар
[3] Karl Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921) - немачки математичар

Доказ. Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $a_i, b_i, c_i, d_i, 1 \le i \le n$ произвољни комплексни бројеви. Према леми 9 важи:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i c_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j d_j\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i d_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j c_j\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \left(a_i b_j - a_j b_i\right)\left(c_i d_j - c_j d_i\right).$$

Нека је $a_i = w_i, b_j = \overline{z_j}, c_i = \overline{w_i}$ и $d_j = z_j$. Тада је:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j}\ \overline{w_j}\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \left(w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}\right)\left(\overline{w_i} z_j - \overline{w_j} z_i\right).$$

Према особинама комплексних бројева важи:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{z_j w_j}\right) + \sum_{1\le i<j\le n} \left(w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}\right)\left(\overline{w_i}\ \overline{\overline{z_j}} - \overline{w_j}\ \overline{\overline{z_i}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} w_i \overline{w_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{n} z_j \overline{z_j}\right) =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j w_j\right)} + \sum_{1\le i<j\le n} \left(w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}\right)\left(\overline{w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}}\right)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right) = \left|\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right|^2 + \sum_{1\le i<j\le n} |w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}|^2.$$

Како је

$$\sum_{1\le i<j\le n} |w_i \overline{z_j} - w_j \overline{z_i}|^2 \ge 0,$$

важи да је:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} w_i z_i\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} |w_i|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n} |z_j|^2\right).$$

□

Лема 11 *(Ван дер Корпут) За све комплексне бројеве $z_1, z_2, \ldots, z_n$ и све $h \in \{1, \ldots, n\}$ следећа неједнакост је тачна (уз конвенцију да је $z_i = 0$, за све i који не припадају скупу $\{1, \ldots, n\}$):*

$$h^2 \left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \le (n+h-1)\left[2\sum_{r=1}^{h-1}(h-r)\,\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-r} z_i\overline{z_{i+r}}\right) + h\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right].$$

Доказ. За комплексне бројеве $z_i, 1 \le i \le n$, важи:

$$h\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}.$$

Наиме, за фиксирано j, сума по i садржаће све $z_i, 1 \le i \le n$. Нека је, на пример, $n = 5$ и $h = 3$. Тада је:

$$3\sum_{i=1}^{5} z_i = 3\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5\right) \text{ и}$$

$$\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=0}^{2} z_{i-j} = \sum_{i=1}^{7}\left(z_i + z_{i-1} + z_{i-2}\right) =$$

$$= \left(z_1 + z_0 + z_{-1}\right) + \left(z_2 + z_1 + z_0\right) + \left(z_3 + z_2 + z_1\right) + \left(z_4 + z_3 + z_2\right) +$$

$$+ \left(z_5 + z_4 + z_3\right) + \left(z_6 + z_5 + z_4\right) + \left(z_7 + z_6 + z_5\right) =$$

$$= z_{-1} + 2z_0 + 3z_1 + 3z_2 + 3z_3 + 3z_4 + 3z_5 + 2z_6 + z_7 = 3\left(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_5\right).$$

Видимо да једнакост важи.
Такође важи:

$$\left|h\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = h\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|$$

$$\Rightarrow h\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|$$

$$\Rightarrow h^2\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 = \left|\sum_{i=1}^{n+h-1}\left(1\cdot\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right)\right|^2.$$

Према Коши-Шварцовој неједнакости је:

$$\left|\sum_{i=1}^{n+h-1}\left(1\cdot\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right)\right|^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n+h-1}|1|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n+h-1}\left|\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2\right) =$$

$$= (n+h-1)\left(\sum_{i=1}^{n+h-1}\left|\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2\right).$$

Посматрајмо суму:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\left|\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2.$$

Важи:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\left|\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right|^2 = \sum_{i=1}^{n+h-1}\left(\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right)\overline{\left(\sum_{k=0}^{h-1} z_{i-k}\right)} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+h-1}\left(\sum_{j=0}^{h-1} z_{i-j}\right)\left(\sum_{k=0}^{h-1} \overline{z_{i-k}}\right) = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1}\sum_{k=0}^{h-1} z_{i-j}\overline{z_{i-k}},$$

при чему последња једнакост важи јер су индекси независни.

Нека је $p = i-j$ и $q = i-k$. Тада је $j = i-p$ и $k = i-q$. Заменом индекса, добија се:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1}\sum_{k=0}^{h-1} z_{i-j}\overline{z_{i-k}} = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{p=i-h+1}^{i}\sum_{q=i-h+1}^{i} z_p\overline{z_q}.$$

Ако је $p = q$, тј. $j = k$ за фиксирано i, важи:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{p=i-h+1}^{i}\sum_{q=i-h+1}^{i} z_p\overline{z_q} = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{p=i-h+1}^{i} z_p\overline{z_p} = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{p=i-h+1}^{i} |z_p|^2.$$

Како је $k = i-p$, za $p = i-h+1$ је $k = h-1$, а за $p = i$ је $k = 0$. Следи:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{p=i-h+1}^{i} |z_p|^2 = \sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{k=0}^{h-1} |z_{i-k}|^2 = h\sum_{i=1}^{n} |z_i|^2.$$

Нека је сада $p \neq q$, тј. $j \neq k$, за фиксирано i. У табелама испод су приказане вредности индекса p и q, у зависности од i, j и k за $n = 5$ и $h = 3$.

j \ i	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	x	x
1	x	1	2	3	4	5	x
2	x	x	1	2	3	4	5

k \ i	1	2	3	4	5	6	7
0	1	2	3	4	5	x	x
1	x	1	2	3	4	5	x
2	x	x	1	2	3	4	5

Са x су означене вредности индекса који не припадају скупу $\{1, 2, \dots, n\}$. Посматрамо суму:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1} \sum_{j=0}^{h-1} \sum_{k=0}^{h-1} z_{i-j}\overline{z_{i-k}}.$$

За фиксирано i посматрамо одређену колону у обе табеле.

- за $i = 1$ нема сабирака;
- за $i = 2$ добијамо: $z_2\overline{z_1}$, $z_1\overline{z_2}$;
- за $i = 3$ добијамо: $z_3\overline{z_2}, z_3\overline{z_1}, z_2\overline{z_3}, z_2\overline{z_1}, z_1\overline{z_3}, z_1\overline{z_2}$;
- за $i = 4$ добијамо: $z_4\overline{z_3}, z_4\overline{z_2}, z_3\overline{z_4}, z_3\overline{z_2}, z_2\overline{z_4}, z_2\overline{z_3}$;
- за $i = 5$ добијамо: $z_5\overline{z_4}, z_5\overline{z_3}, z_4\overline{z_5}, z_4\overline{z_3}, z_3\overline{z_5}, z_3\overline{z_4}$;
- за $i = 6$ добијамо: $z_5\overline{z_4}, z_4\overline{z_5}$;
- за $i = 7$ нема сабирака.

Видимо да за све индексе p и q важи да ако $z_p\overline{z_q}$ припада суми, онда и $z_q\overline{z_p}$ припада суми. Такође, важи:

$$z_p\overline{z_q} + z_q\overline{z_p} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_p\overline{z_q}\right).$$

Сада је потребно груписати сабирке на други начин. Приметимо да су вредности за p и q на дијагоналама једнаке. Нека је $r = q - p$, при чему је $q > p$. Тада је $r \geq 1$. Ако посматрамо вредности за p у одређеној дијагонали, за различите r посматрајмо вредности за q у дијагонали која је за r корака изнад. Нека је $r = 1$. Тада:

- за $i = 1$ нема сабирака;
- за $i = 2$ добијамо: $z_1\overline{z_2}$;
- за $i = 3$ добијамо: $z_2\overline{z_3}, z_1\overline{z_2}$;
- за $i = 4$ добијамо: $z_3\overline{z_4}, z_2\overline{z_3}$;
- за $i = 5$ добијамо: $z_4\overline{z_5}, z_3\overline{z_4}$;
- за $i = 6$ добијамо: $z_4\overline{z_5}$;

- за $i = 7$ нема сабирака.

Нека је $r = 2$. Тада:

- за $i = 1$ нема сабирака;
- за $i = 2$ нема сабирака;
- за $i = 3$ добијамо: $z_1\overline{z_3}$;
- за $i = 4$ добијамо: $z_2\overline{z_4}$;
- за $i = 5$ добијамо: $z_3\overline{z_5}$;
- за $i = 6$ нема сабирака;
- за $i = 7$ нема сабирака.

Нека је $r = 3$. Тада за било које i нема сабирака.
Аналогно се добијају вредности за $p > q$, које се слажу са постојећим, тако да је:

$$z_p\overline{z_q} + z_q\overline{z_p} = 2\,\mathrm{Re}\left(z_p\overline{z_q}\right).$$

Такође, видимо да се сваки сабирак појављује $h - r$ пута. Зато важи да је:

$$\sum_{i=1}^{n+h-1}\sum_{j=0}^{h-1}\sum_{k=0}^{h-1} z_{i-j}\overline{z_{i-k}} = \sum_{r=1}^{h-1}(h-r)\sum_{i=1}^{n-r} 2\,\mathrm{Re}\left(z_i\overline{z_{i+r}}\right) = 2\sum_{r=1}^{h-1}(h-r)\sum_{i=1}^{n-r}\mathrm{Re}\left(z_i\overline{z_{i+r}}\right).$$

Спајањем случаја када је $p = q$ и случаја када је $p \neq q$ добија се:

$$h^2\left|\sum_{i=1}^{n} z_i\right|^2 \leq (n+h-1)\left[2\sum_{r=1}^{h-1}(h-r)\,\mathrm{Re}\left(\sum_{i=1}^{n-r} z_i\overline{z_{i+r}}\right) + h\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right].$$

□

Задатак 9 *Нека је $(x_n)_{n\geq1}$ низ реалних бројева такав да је низ $(x_{n+p} - x_n)_{n\geq1}$ равномерно распоређен за све $p \geq 1$. Тада је низ $(x_n)_{n\geq1}$ такође равномерно распоређен.*

Решење. Према теореми 4 довољно је показати да је

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2i\pi p x_k} = 0, \quad \text{za sve} \;\; p \geq 1.$$

Фиксирајмо p, природан број h и $\epsilon \in (0,1)$. Нека је $z_j = e^{2i\pi p x_j}$. Тада је $|z_j| = 1$. Према леми 11 је:

$$h^2 \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j \right|^2 \leq \frac{1}{n^2} (n+h-1) \left[2 \sum_{i=1}^{h-1} (h-i) \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} z_j \overline{z_{j+i}} \right) + h \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2 \right]$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j \right|^2 \leq \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[2 \sum_{i=1}^{h-1} (h-i) \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} z_j \overline{z_{j+i}} \right) + hn \right].$$

Према особинама комплексних бројева важи:

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} z_j \overline{z_{i+j}} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p x_j} e^{-2i\pi p x_{j+i}} \right) = \operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p (x_j - x_{i+j})} \right) \text{ и}$$

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p (x_j - x_{i+j})} \right) \leq \left| \sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p (x_j - x_{j+i})} \right|.$$

Како је низ $(x_{n+i} - x_n)_{n \geq 1}$ равномерно распоређен за $i \in \{1, 2, \ldots, h-1\}$, важи:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p (x_j - x_{j+i})} \right| \leq \frac{\epsilon^2}{3} \quad \text{тј,} \quad \left| \sum_{j=1}^{n-i} e^{2i\pi p (x_j - x_{j+i})} \right| \leq \frac{n\epsilon^2}{3}.$$

Заменом у неједнакост, добија се:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j \right|^2 \leq \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[2 \sum_{i=1}^{h-1} (h-i) \frac{n\epsilon^2}{3} + hn \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[2 \left(\sum_{i=1}^{h-1} h - \sum_{i=1}^{h-1} i \right) \frac{n\epsilon^2}{3} + hn \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[2 \left(h(h-1) - \frac{(h-1)h}{2} \right) \frac{n\epsilon^2}{3} + hn \right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[2 \frac{h(h-1)}{2} \frac{n\epsilon^2}{3} + hn \right] = \frac{1}{n^2} \frac{n+h-1}{h^2} \left[h(h-1) \frac{n\epsilon^2}{3} + hn \right] =$$

$$= \frac{n+h-1}{h^2 n^2} hn \left[\frac{\epsilon^2}{3} (h-1) + 1 \right] = \frac{n+h-1}{nh} \left[1 + \frac{\epsilon^2}{3} (h-1) \right] <$$

$$< \frac{2}{h} \left[1 + \frac{h\epsilon^2}{3} - \frac{\epsilon^2}{3} \right] \leq \frac{2}{h} + \frac{2\epsilon^2}{3} \leq \epsilon^2,$$

за довољно велико n. Бирамо $h > \frac{6}{\epsilon^2}$. Тада је:

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} z_j \right| \leq \epsilon, \quad \text{односно, низ } (x_n)_{n \geq 1} \text{ је равномерно распоређен.}$$

□

Задатак 10 *Ако је f полином са реалним коефицијентима и ирационалним водећим коефицијентом, онда је низ $(f(n))_{n\geq 1}$ равномерно распоређен.*

Решење. Ово решење ћемо приказати методом индукције.
Нека је f полином степена 1. Тада је $f(n) = an + b$, где је $a \in \mathbb{I}$ и $b \in \mathbb{R}$. Посматрајмо низ $(an+b)_{n\geq 1}$. Према Вејловом критеријуму довољно је показати да је за неко $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(an+b)} = 0.$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i m(an+b)} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi iman + 2\pi imb} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi iman} e^{2\pi imb} =$$

$$= e^{2\pi imb} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi iman} = e^{2\pi imb} \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} e^{2\pi ima} \frac{1 - e^{2\pi imaN}}{1 - e^{2\pi iman}} = 0$$

Видимо да је

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi iman}$$

геометријски ред са првим чланом $e^{2\pi ima}$ и количником $e^{2\pi ima}$. Како је $a \in \mathbb{I}$, важи да је $e^{2\pi iman} \neq 1$. Такође, $e^{2\pi ima}$ и $e^{2\pi imaN}$ су ограничени по апсолутној вредности, па је лимес једнак 0.
Претпоставимо сада да тврђење важи за полином степена $k, k > 1$.
Показујемо да важи и за полином степена $k+1$. Тада је полином f облика:

$$f(n) = a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0,$$

где је $a_{k+1} \in \mathbb{I}$, а $a_k, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$.
Као што је показано у задатку 9 довољно је доказати да је низ

$$(f(n+p) - f(n))_{n\geq 1}$$

равномерно распоређен, за неко $p \geq 1$.

$$f(n+p) - f(n) = a_{k+1}(n+p)^{k+1} + a_k(n+p)^k + \ldots + a_1(n+p) + a_0 -$$

$$-\left(a_{k+1}n^{k+1} + a_k n^k + \ldots + a_1 n + a_0\right) =$$

$$= a_{k+1}(n+p)^{k+1} + a_k(n+p)^k + \ldots + a_1(n+p) + a_0 - a_{k+1}n^{k+1} - a_k n^k - \ldots - a_1 n - a_0 =$$

$$= a_{k+1}\left((n+p)^{k+1} - n^{k+1}\right) + a_k\left((n+p)^k - n^k\right) + \ldots + a_1\left(n+p-n\right)$$

Видимо да ће се у сваком сабирку чланови са највећим степеном n скратити. Дакле, добија се полином нижег степена, а чији је водећи коефицијент a_{k+1}. Према индукцијској хипотези, важи да је низ $\left(f\left(n+p\right) - f\left(n\right)\right)_{n\geq 1}$ равномерно распоређен, а према задатку 9 закључујемо да је низ $\left(f\left(n\right)\right)_{n\geq 1}$ равномерно распоређен.

$\square$

Глава 4

Задаци

Задатак 11 *Нека је x ирационалан број и $f(t) = min(\{t\}, \{1-t\})$. Показати да за дато $\epsilon > 0$ постоји позитиван цео број n такав да је $f(n^2x) < \epsilon$.*

Решење. Нека је $\epsilon > 0$. Важи да је

$$f\left(n^2x\right) < \epsilon \Leftrightarrow 0 < \left\{n^2x\right\} < \epsilon \vee 0 < \left\{1 - n^2x\right\} < \epsilon,$$

односно,

$$f\left(n^2x\right) < \epsilon \Leftrightarrow 0 < \left\{n^2x\right\} < \epsilon \vee 1 - \epsilon < \left\{n^2x\right\} < 1.$$

Како је $x \in \mathbb{I}$ и полином $P(x) = xn^2$ задовољава услов задатка 10 из главе 3, онда је низ $(\{n^2x\})_{n\geq1}$ равномерно распоређен у $[0,1)$, па за дато ϵ постоји $n \in \mathbb{N}$ за које $\{n^2x\} \in (0,\epsilon) \cup (1-\epsilon, 1)$.

□

Лема 12 *Нека су α и β ираионални бројеви такви да је $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Скупови $A = \{\lfloor n\alpha \rfloor | n \geq 1\}$ и $B = \{\lfloor n\beta \rfloor | n \geq 1\}$ дају партицију скупа позитивних целих бројева.*

Доказ. Претпоставимо да се неки број $k \in \mathbb{N}$ налази у оба скупа. Тада постоје неки $i, j \in \mathbb{N}$ такви да је $\lfloor i\alpha \rfloor = \lfloor j\beta \rfloor = k$. Како су α и β ирационални, важи:

$$k < i\alpha < k+1 \;\text{ и }\; k < j\beta < k+1.$$

Дељењем ових неједнакости са α, односно β, добија се:

$$\frac{k}{\alpha} < i < \frac{k+1}{\alpha} \;\text{ и }\; \frac{k}{\beta} < j < \frac{k+1}{\beta}.$$

Даље је
$$\frac{k}{\alpha}+\frac{k}{\beta}<i+j<\frac{k+1}{\alpha}+\frac{k+1}{\beta},$$
односно
$$k<i+j<k+1.$$
Ово није могуће, јер $i,j\in\mathbb{N}$. Дакле, сваки природан број може бити само у једном од ова два скупа.

Сада покажимо да се сваки природан број појављује једном. Претпоставимо да се природан број k не појављује ни у једном низу. Тада за свако $m,n\in\mathbb{N}$ важи:
$$\lfloor m\alpha\rfloor\leq k-1, \lfloor (m+1)\,\alpha\rfloor\geq 1;$$
$$\lfloor n\beta\rfloor\leq k-1, \lfloor (n+1)\,\beta\rfloor\geq 1.$$
Важи да је $m\alpha<k$ и $n\beta<k$. Следи да је $\frac{1}{\alpha}>\frac{m}{k}$ и $\frac{1}{\beta}>\frac{n}{k}$. Одавде је $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}>\frac{m+n}{k}$, тј. $\frac{m+n}{k}<1$.

Са друге стране је $(m+1)\,\alpha\geq k+1$ и $(n+1)\,\beta\geq k+1$. Следи да је $\frac{1}{\alpha}\leq\frac{m+1}{k+1}$ и $\frac{1}{\beta}\leq\frac{n+1}{k+1}$. Одавде следи да је $\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\leq\frac{m+n+2}{k+1}$, тј. $\frac{m+n+2}{k+1}\geq 1$.

Добијамо да је $m+n<k$ и $m+n\geq k-1$, што је немогуће. Дакле, сваки природан број се појављује у једном од скупова.

$\square$

Задатак 12 *Ако је α ирационалан број и P неконстантан полином са целобројним коефицијентима, онда постоји бесконачно много парова целих бројева (m,n) таквих да је $P\,(m)=\lfloor n\alpha\rfloor$.*

Решење. Без умањења општости, претпоставимо да је $\alpha>0$.

- Нека је $\alpha<1$. Посматрајмо интервал $\left(\frac{P(m)}{\alpha},\frac{P(m)+1}{\alpha}\right)$, за произвољан цео број m. Овај интервал је дужине веће од 1, па сигурно садржи неки цео број n_m за који важи да је $\lfloor n_m\alpha\rfloor=P\,(m)$. Дакле, за свако m постоји најмање једно n_m такво да је $P\,(m)=\lfloor n_m\alpha\rfloor$.
- Нека је $\alpha>1$ и $\beta=\frac{\alpha}{\alpha-1}$. Према леми 12, скупови $A=\{\lfloor n\alpha\rfloor\,|n\geq 1\}$ и $B=\{\lfloor n\beta\rfloor\,|n\geq 1\}$ дају партицију скупа позитивних целих бројева.

Довољно је показати тврђење за полиноме са позитивним водећим коефицијентом. Тада је, почевши од неког m_0, вредност $P\,(m)$ је позитиван цео број који припада скупу A или скупу B. Претпоставимо да једначина $P\,(m)=\lfloor n\alpha\rfloor$ има коначно много решења. То значи да за довољно велико m важи да је

$P(m) \in B$. Односно, за неко N постоји низ $(n_m)_{m>N}$ такав да $P(m) = \lfloor n_m \beta \rfloor$. Ово значи да је $\left\lfloor \frac{P(m)}{\beta} \right\rfloor = n_m - 1$. Тада је за довољно велико m:

$$\left\{ \frac{P(m)}{\beta} \right\} = \frac{P(m)}{\beta} - \left\lfloor \frac{P(m)}{\beta} \right\rfloor = \frac{P(m)}{\beta} - n_m + 1 = 1 - \left(n_m - \frac{P(m)}{\beta} \right).$$

Како важи да $n_m - \frac{P(m)}{\beta} \in \left(0, \frac{1}{\beta}\right)$, онда $\left\{ \frac{P(m)}{\beta} \right\} \in \left(1 - \frac{1}{\beta}, 1\right)$. Такође, $\frac{1}{\beta}P$ задовољава услове задатка 10 из главе 3, па је низ $\left(\left\{ \frac{P(m)}{\beta} \right\}\right)_{m>N}$ густ у $[0,1]$. То није могуће, јер се сви осим коначно много чланова налазе у интервалу $\left(1 - \frac{1}{\beta}, 1\right)$.

□

Лема 13 *(Ојлер* [1] *- Маклоренова формула* [2]*) Нека је x_0 реалан број и*

$$f : [x_0, \infty) \to \mathbb{C}$$

непрекидно диференцијабилна функција. Тада за све целе бројеве $n \geq m \geq x_0$ важи:

$$\sum_{k=m}^{n} f(x) = \frac{1}{2}(f(m) + f(n)) + \int_m^n f(x)\,dx + \int_m^n \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) f'(x)\,dx.$$

Задатак 13 *Показати да је за свако $a \neq 0$ и σ такво да је $0 < \sigma < 1$, низ $\{an^\sigma\}$ равномерно распоређен у $[0,1)$.*

Решење. Према Вејловом критеријуму, довољно је доказати да је, за свако $k \geq 1$ испуњено

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k a n^\sigma} \to 0, N \to \infty.$$

Означимо $ka = \alpha$. Из Ојлер-Маклоренове формуле је:

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i \alpha n^\sigma} = \int_1^N e^{2\pi i \alpha x^\sigma} dx + \frac{e^{2\pi i \alpha} + e^{2\pi i N^\sigma}}{2} + \int_1^N \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) e^{2\pi i \alpha x^\sigma} 2\pi i \alpha \sigma x^{\sigma-1} dx.$$

Важи да је

$$\left| \int_1^N \left(\{x\} - \frac{1}{2} \right) e^{2\pi i \alpha x^\sigma} 2\pi i \alpha \sigma x^{\sigma-1} dx \right| \leq \int_1^N \left| \{x\} - \frac{1}{2} \right| 2\pi \alpha \sigma x^{\sigma-1} dx \leq$$

[1] Leonhard Euler (1707 – 1783) - швајцарски математичар

[2] Colin Maclaurin (1698 – 1746) - шкотски математичар

$$\leq \frac{2\pi\alpha\sigma}{2}\int_1^N x^{\sigma-1}dx = \pi\alpha\sigma\left.\frac{x^\sigma}{\sigma}\right|_1^N = \pi\alpha\left(N^\sigma - 1\right) = \mathrm{O}\left(N^\sigma\right), \left(N \to \infty\right).$$

Решавамо интеграл

$$\int_1^N e^{2\pi i\alpha x^\sigma}dx.$$

Увођењем смене $t = x^\sigma$, односно $x = t^{\frac{1}{\sigma}}$, добија се:

$$\int_1^N e^{2\pi i\alpha x^\sigma}dx = \int_1^{N^\sigma} e^{2\pi i\alpha t}\frac{1}{\sigma}t^{\frac{1}{\sigma}-1}dt.$$

Применом парцијалне интеграције за $u = \frac{1}{\sigma}t^{\frac{1}{\sigma}-1}$ и $dv = e^{2\pi i\alpha t}dt$, добија се:

$$\int_1^{N^\sigma} e^{2\pi i\alpha t}\frac{1}{\sigma}t^{\frac{1}{\sigma}-1}dt = \left.\frac{e^{2\pi i\alpha t}}{2\pi i\alpha\sigma}t^{\frac{1}{\sigma}-1}\right|_1^{N^\sigma} - \int_1^{N^\sigma}\frac{e^{2\pi i\alpha t}}{2\pi i\alpha\sigma}\left(\frac{1}{\sigma}-1\right)t^{\frac{1}{\sigma}-2}dt =$$

$$= \frac{e^{2\pi i\alpha N^\sigma}N^{\sigma\frac{1-\sigma}{\sigma}} - e^{2\pi i\alpha}}{2\pi i\alpha\sigma} - \frac{1}{2\pi i\alpha\sigma}\int_1^{N^\sigma} e^{2\pi i\alpha t}\frac{1-\sigma}{\sigma}t^{\frac{1}{\sigma}-2}dt =$$

$$\frac{e^{2\pi i\alpha N^\sigma}N^{1-\sigma} - e^{2\pi i\alpha}}{2\pi i\alpha\sigma} - \frac{1}{2\pi i\alpha\sigma}\frac{1-\sigma}{\sigma}\int_1^{N^\sigma} e^{2\pi i\alpha t}t^{\frac{1}{\sigma}-2}dt.$$

Даље је

$$\left|\int_1^N e^{2\pi i\alpha x^\sigma}dx\right| \leq \frac{N^{1-\sigma}+1}{2\pi\alpha\sigma} + \frac{1}{2\pi\alpha\sigma}\frac{1-\sigma}{\sigma}\int_1^{N^\sigma} t^{\frac{1}{\sigma}-2}dt =$$

$$= \frac{N^{1-\sigma}+1}{2\pi\alpha\sigma} + \frac{1}{2\pi\alpha\sigma}\frac{1-\sigma}{\sigma}\left.\frac{t^{\frac{1}{\sigma}-1}}{\frac{1}{\sigma}-1}\right|_1^{N^\sigma} = \frac{N^{1-\sigma}+1}{2\pi\alpha\sigma} + \frac{1}{2\pi\alpha\sigma}\left(N^{\sigma\frac{1-\sigma}{\sigma}} - 1\right) =$$

$$= \frac{N^{1-\sigma}+1+N^{1-\sigma}-1}{2\pi\alpha\sigma} = \frac{N^{1-\sigma}}{\pi\alpha\sigma} = \mathrm{O}\left(N^{1-\sigma}\right), N \to \infty.$$

Одавде следи да је

$$\sum_{n=1}^N e^{2\pi ikan^\sigma} = \mathrm{O}\left(N^\sigma\right) + \mathrm{O}\left(N^{1-\sigma}\right), N \to \infty,$$

односно

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2\pi ikan^\sigma} = \mathrm{O}\left(N^{\sigma-1}\right) + \mathrm{O}\left(N^{-\sigma}\right) = \mathrm{o}\left(1\right), N \to \infty.$$

Дакле,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N e^{2\pi ikan^\sigma} \to 0, N \to \infty.$$

$\square$

Задатак 14 *Да ли низ* $\sin(n^2) + \sin(n^3)$ *конвергира?*

Решење. Приметимо да је за $k \geq 1$

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \frac{1}{2\pi} n^2} \to 0, N \to \infty,$$

према задатку 10 из главе 3, јер полином $\frac{1}{2\pi}n^2$ има ирационалан водећи коефицијент.
Слично је и

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \frac{1}{2\pi} n^3} \to 0, N \to \infty.$$

Имагинарни делови јесу равномерно распоређени на $(-2, 2)$, па низ не конвергира.

□

Задатак 15 *Нека су* a, b *и* c *позитивни реални бројеви. Доказати да скупови* $A = \{\lfloor na \rfloor | n \geq 1\}$, $B = \{\lfloor nb \rfloor | n \geq 1\}$ *и* $C = \{\lfloor nc \rfloor | n \geq 1\}$ *не могу формирати партицију скупа позитивних целих бројева.*

Решење. Показаћемо да ова три скупа не могу бити дисјунктна, одакле следи да не могу формирати партицију позитивних целих бројева.
Нека је $k > a, b, c$ цео број.
Посматрамо тачке облика $\left(\left\{\frac{i}{a}\right\}, \left\{\frac{i}{b}\right\}, \left\{\frac{i}{c}\right\}\right)$, за $i = 0, 1, 2, \ldots, k^3$. Бар две од ових k^3+1 тачака припадају коцки странице $\frac{1}{k}$. Нека су то тачке за вредности i и j, при чему је $i > j$. Означимо $i - j = h$. Тада важи да је $\left|\left\{\frac{i}{a}\right\} - \frac{j}{a}\right| \leq \frac{1}{k}$.
Са друге стране је

$$\left|\left\{\frac{i}{a}\right\} - \frac{j}{a}\right| = \left|\frac{i}{a} - \left\lfloor\frac{i}{a}\right\rfloor - \frac{j}{a} + \left\lfloor\frac{j}{a}\right\rfloor\right| = \left|\frac{h}{a} - \left(\left\lfloor\frac{i}{a}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j}{a}\right\rfloor\right)\right|.$$

Постоји неки цео број $p = \left\lfloor\frac{i}{a}\right\rfloor - \left\lfloor\frac{j}{a}\right\rfloor$, такав да је $\left|\frac{h}{a} - p\right| \leq \frac{1}{k}$. На сличан начин се добија да за неке целе бројеве q и r важи: $\left|\frac{h}{b} - q\right| \leq \frac{1}{k}$ и $\left|\frac{h}{c} - r\right| \leq \frac{1}{k}$.
Како је $k > a, b, c$, онда је $|h - ap|, |h - bq|, |h - cr| < 1$, што значи да је свака од вредности $\lfloor ap \rfloor, \lfloor bq \rfloor, \lfloor cr \rfloor$ једнака h или $h - 1$.
Дакле, бар две од ове три вредности су једнаке, па скупови нису дисјунктни.

□

У наредном примеру биће нам потребно разумевање равномерне распоређености у $\mathbb{R}^n$.

Дефиниција 7 *Низ* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *са вредностима из* $[0,1)^n$ *је равномерно распоређен ако за сваку коцку* Q *из* $[0,1)^n$ *важи:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{|\{k : 0 \leq k \leq N-1, a_k \in Q\}|}{N} = |Q|.$$

Теорема 6 *Следећа тврђења су еквивалентна:*

1. *Низ* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ *је равномерно распоређен.*

2. *За сваку глатку функцију* f *из* $[0,1)^n$ *важи да је:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(a_k) = \int_{[0,1)^n} f(x)\,dx.$$

3. *За свако* $m \in \mathbb{Z}^n \backslash \{0\}$ *важи:*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} e^{2\pi i m a_k} = 0.$$

Теорема 7 *(Кинеска теорема о остацима) Нека су* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ *по паровима узајамно прости природни бројеви и* $a_1, a_2, \ldots, a_k$ *било који цели бројеви. Тада постоји јединствен по модулу* $m_1 \ldots m_k$ *број* x *такав да је*

$$x \equiv a_i \,(\ mod\ m_i)\,,\ \text{за } 1 \leq i \leq k.$$

Задатак 16 *Нека су* a *и* b *позитивни реални бројеви такви да је*

$$\{na\} + \{nb\} < 1,$$

за свако $n \in \mathbb{N}$. *Доказати да бар један од ових бројева мора бити цео.*

Решење. 1. Претпоставимо да $a, b \in \mathbb{I}$. Нека је $k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \backslash (0,0)$ и $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((na, nb))_{n\in\mathbb{N}}$. Означимо:

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i \langle k, a_n \rangle}.$$

$$S_N = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i (k_1 na + k_2 na)} = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n (k_1 a + k_2 b)} = \frac{1 - e^{2\pi i N (k_1 a + k_2 b)}}{N\left(1 - e^{2\pi i (k_1 a + k_2 b)}\right)},$$

при чему последња једнакост важи јер је

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi i n(k_1 a + k_2 b)}$$

геометријски ред са првим чланом 1 и количником $e^{2\pi i(k_1 a + k_2 b)}$. Такође је $e^{2\pi i(k_1 a + k_2 b)} \neq 1$, јер је $k_1 a + k_2 b \in \mathbb{I}$. Како је $\left|e^{2\pi i N(k_1 a + k_2 b)}\right| = 1$, важи:

$$|S_N| = \left|\frac{1 - e^{2\pi i N(k_1 a + k_2 b)}}{N\left(1 - e^{2\pi i(k_1 a + k_2 b)}\right)}\right| \leq \frac{2}{N\left|1 - e^{2\pi i(k_1 a + k_2 b)}\right|} \to 0, N \to \infty.$$

Према теореми 6 низ $(\{a_n\})_{n\in\mathbb{N}}$ је равномерно распоређен у $[0,1)^2$. Дакле, постоји неко $n \in \mathbb{N}$ такво да $\{na\} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$ и $\{nb\} \in \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$. Тада је

$$\{na\} + \{nb\} > 1.$$

Како услов задатка није испуњен, следи да бар један од бројева a и b мора бити рационалан.
Ако је $k_1 a + k_2 b \in \mathbb{Z}$, за неке $k_1, k_2 \in \mathbb{N}$ тада проблем постаје једнодимензион, на пример по a и тврђење се доказује слично.
2. Претпоставимо, без умањења општости, да $a \in \mathbb{Q}$ и $b \in \mathbb{I}$. Нека је $a = \frac{k}{l}$, при чему су $k, l \in \mathbb{N}$ узајамно прости бројеви и $l > 1$. За неко n облика $n = \alpha l + \beta$, где су α и β природни бројеви, важи:

$$\{na\} = \left\{(\alpha l + \beta)\frac{k}{l}\right\} = \left\{\alpha + \frac{\beta k}{l}\right\} = \left\{\frac{\beta k}{l}\right\},$$

што је веће или једнако од $\frac{1}{l}$.
Са друге стране, низ $\{nb\}$ је свуда густ у $[0,1)$, па постоји $n = \alpha l + \beta$ за које је $\{nb\} > 1 - \frac{1}{l}$. Дакле,

$$\{na\} + \{nb\} > \frac{1}{l} + 1 - \frac{1}{l} = 1.$$

Видимо да услов задатка није испуњен.
3. Претпоставимо сада да $a, b \in \mathbb{Q}$. Нека је $a = \frac{k}{l}$ и $b = \frac{k'}{l'}$, $k, l, k', l' \in \mathbb{N}$, где су k, l, као и k', l' узајамно прости. Потребно је наћи n такво да је:

$$nk = l - 1 + ml \text{ и}$$

$$nk' = l' - 1 + m'l',$$

за $m, m' \in \mathbb{Z}$. Како су k и l, као и k' и l' узајамно прости, постоје $\gamma_0, \delta_0, \gamma_0'$ и δ_0' такви да је:

$$\gamma_0 k + \delta_0 l = -1 \text{ и}$$

$$\gamma_0' k' + \delta_0' l' = -1.$$

Ако заменимо да је $\gamma = \gamma_0 + \alpha l, \delta = \delta_0 - \alpha k, \gamma' = \gamma_0' + \alpha' l'$ и $\delta' = \delta_0' - \alpha' k'$, где $\alpha, \alpha' \in \mathbb{N}$, имаћемо:

$$\gamma k + \delta l = -1 \text{ и}$$

$$\gamma' k' + \delta' k' = -1.$$

Како бисмо постигли $\gamma = \gamma'$ довољно је изабрати број $n := \gamma = \gamma'$ који при дељењу са l даје остатак γ_0, а при дељењу са l' остатак γ_0'.
Ако су l и l' узајамно прости, такво n постоји, према Кинеској теореми о остацима, па је испуњен услов

$$nk = l - 1 + ml \text{ и}$$

$$nk' = l' - 1 + m'l'.$$

Тада је

$$\{na\} = \left\{1 - \frac{1}{l} + m\right\} = 1 - \frac{1}{l} \text{ и}$$

$$\{nb\} = \left\{1 - \frac{1}{l'} + m'\right\} = 1 - \frac{1}{l'},$$

па је

$$\{na\} + \{nb\} = 1 - \frac{1}{l} + 1 - \frac{1}{l'} \geq 1.$$

Видимо да услов задатка није испуњен, па не могу оба броја a и b бити рационални.
Ако l и l' нису узајамно прости, довољно је применити претходно на $\frac{l}{d}$ и $\frac{l'}{d}$, где је $d = \text{НЗД}\,(l, l')$. Наиме, тада је $l = dm$ и $l' = dm'$, $(m, m') = 1$ и важи:

$$\{na\} + \{nb\} = \left\{\frac{nk}{dm}\right\} + \left\{\frac{nk'}{dm'}\right\} = \left\{\frac{n}{d}\frac{k}{m}\right\} + \left\{\frac{n}{d}\frac{k'}{m'}\right\},$$

па узимајући $n = dn'$ за n' изабрано као у горњим редовима, добијамо жељени резултат.
Дакле, бар један од бројева a и b мора бити цео.

$\square$

Литература

[1] Floor function. *Wolfram MathWorld.* https://mathworld.wolfram.com/FloorFunction.html.

[2] Fractional part. *Wolfram MathWorld.* https://mathworld.wolfram.com/FractionalPart.html.

[3] Pigeonhole Principle. *Geeks for geeks.* https://www.geeksforgeeks.org/discrete-mathematics-the-pigeonhole-principle/.

[4] Павле Младеновић. *Комбинаторика.* Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

[5] Titu Andreescu, Gabriel Dospinescu. *Problems from the Book.* XYZ Press, LLC, 1721 Monaco Drive, Allen TX, 75002, USA, 2008.

[6] Борис Шобот. *https://people.dmi.uns.ac.rs/∼sobot/.* https://people.dmi.uns.ac.rs/∼sobot/takmicenja/brojevi/.

[7] Elias M. Stein, Rami Shakarchi. *Fourier analysis an introduction.* Princeton University Press, 2003.

[8] P. Golliard, F. Richner. (2021) *Weyl's theorems on uniform distribution and Kronecker's theorem.* ETH Zürich. https://metaphor.ethz.ch/x/2021/hs/401-3110-71L/ex/nineth.pdf

[9] Душан Аднађевић, Зоран Каделбург. *Математичка анализа 1.* Круг, Београд, 2012.

[10] Examples of integer sequence density calculations. *University of Washington.* https://sites.math.washington.edu/ conroy/WXML/integerSequenceNoise/density/densityExamples.pdf

[11] Сузана Вукомановић. (2019) *Неки познати алгебарски идентитети и њихове примене.*
http://elibrary.matf.bg.ac.rs/bitstream/handle/123456789/4824/masVukomanovicSuzana.pdf?sequence=1.

[12] Otto Forster. *Analytic Number Theory.*
https://www.mathematik.uni-muenchen.de/~forster/v/ann/annth_05.pdf.

[13] John Scholes. (1998) *phrase.cz.*
https://prase.cz/kalva/putnam/psoln/psol9512.html.

[14] Loukas Grafakos. *Classical Fourier analysis.* Springer, New York, 2014.

[15] Експоненцијалне конгруенције. *https://imomath.com/srb/.*
https://imomath.com/srb/dodatne/kongruencije_ap.pdf .