УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Душица Пушкаров 1121/2020

ПИТАГОРИНА ТЕОРЕМА И УВОЂЕЊЕ ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

мастер рад

Београд, 2024.

Ментор

проф. др Александар Липковски, редовни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Председник комисије

проф. др Горан Ђанковић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Члан комисије

проф. др Мирослава Антић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

САДРЖАЈ

УВОД

Питагорина теорема обрађена је са историјске стране гледишта, као спона између рационалних и ирационалних бројева. У овим уџбеницима математике прво се уводе рационални, па ирационални бројеви, затим Питагорина теорема, а након тога применом Питагорине теореме конструкција дужи чији су мерни бројеви квадратни корени природних бројева који нису потпуни квадрати. Док је историјски след другачији, дуго је требало ирационалним бројевима да заузму своје место.

У *првом делу* су разматране хипотезе о настанку Питагорине теореме, дата формулација те теореме са два начина доказивања. На крају првог дела је опис о спознаји ирационалних бројева, то јест шта је било познато о бројевима пре а шта после формулације Питагорине теореме.

У *другом делу* налази се конструкција рационалних, ирационалних и реалних бројева са вишег аспекта.

Трећи део је посвећен увођењу ирационалних бројева у градиву основне школе. Посматра се приступ увођења ирационалних бројева кроз пет различитих уџбеника за 7. разред основне школе. У овом раду, за сваки уџбеник посебно, представљене су лекције или њени делови где се уводе ирационални бројеви. Тачније приказан и сагледан је начин на који се ученицима излаже идеја да постоје бројеви који нису рационални, то јест да ирационални бројеви постоје, како се проширује скуп рационалних у скуп реалних бројева, како се одређује децимални записа ирационалног броја, на који начин се ирационалном броју придружује одговарајућа тачка бројевне праве и какав је децимални запис ирационалног броја. Појединачно за сваки уџбеник дата је визуализација приказа лекције из тих уџбеника, које су тема, што је од остатка текста одвојено једноставним правоугаоним оквиром. Визуални приказ је заузео место у раду због свог битног утицаја на разумевање лекције код ученика и целокупног смисла, и рађен је тако да буде што веродостојнији оригиналном. Неки прикази су опширнији, тамо где је градиво које је тема рада интегрисано у шири текст на начин да би било бесмислено издвајати циљане делове. На пример, објашњења о томе да сваком реалном броју можемо придружити тачно једну тачку бројевне праве тако да је тај реалан број координата те тачке и обрнуто, навођена су само укратко и то уколико заузимају такав положај у лекцији да због преклапања није могуће изопштити само објашњење на који начин се ирационалном броју придружује одређена тачка бројевне праве.

Четврти део чине скромна опажања аутора везана за обраду циљаних лекција.

Начин увођења ирационалних бројева у основној школи биће пропраћен кроз следеће уџбенике:

[1] Назив: Математика 7, Уџбеник за седми разред основне школе, прво издање

Аутори: др Небојша Икодиновић, др Слађана Димитријевић
Издавачка кућа: „Klett“
Место издавања: Београд
Година када је одобрено издавање и употреба: 2019.
Година штампе: 2020.

[2] Назив: Математика за седми разред основне школе, осамнаесто прерађено издање

Аутори: Светозар Милић, Бранко Јевремовић, Марко Игњатовић,
Издавачка кућа: Завод за уџбенике
Место издавања: Београд
Година када је одобрено издавање и употреба: 1987.
Година штампе: 2004.

[3] Назив: Математика за седми разред основне школе, прво издање

Аутори: Војислав Андрић, Ђорђе Дугошија, Вера Јоцковић, Владимир Мићић
Издавачка кућа: Завод за уџбенике
Место издавања: Београд
Година када је одобрено издавање и употреба: 2009.
Година штампе: 2009.

[4] Назив: Математика 7, Уџбеник за седми разред основне школе, прво издање

Аутори: Мирјана Стојсављевић-Радовановић, Љиљана Вуковић, Зорица Јончић
Издавачка кућа: Креативни центар
Место издавања: Београд
Година када је одобрено издавање и употреба: 2020.

Година штампе: 2020.

[5] Назив: Математика 7, Уџбеник са збирком задатака, први и други део, прво издање

Аутори: Иван Анић, Радоје Кошанин, Јелена Савковић

Издавачка кућа: БИГЗ школство

Место издавања: Београд

Година када је одобрено издавање и употреба: 2020.

Година штампе: 2020.

Ради поједностављеног записа, уместо пуног назива уџбеника у употреби су одговрајуће нумерације [1], [2], [3], [4] и [5] које стоје испред наведених уџбеника.

Мотив при одабиру уџбеника:

Уџбеницк [1] је одабран због широке примене у школама. Можда је до ове заступљености дошло више због одговарајуће збирке, него због самог уџбеника.

Уџбеници [2] и [3] су од истог издавача, али разлика у ауторима и години издања, даје посебан увид у то да ли се и како у 20 година мењао приступ у увођењу ирационалних бројева.

Уџбеник [4] је одабран због своје специфичности да не садржи пуно теорије, већ кључне појмове и примере.

Уџбеник [5] има модеран приступ који у откривање укључује и рачунарску технологију доступну деци, а све то је приказано и кроз сликовнице.

1. ИСТОРИЈСКИ ОСВРТ НА ПИТАГОРИНУ ТЕОРЕМУ И ФОРМУЛАЦИЈА

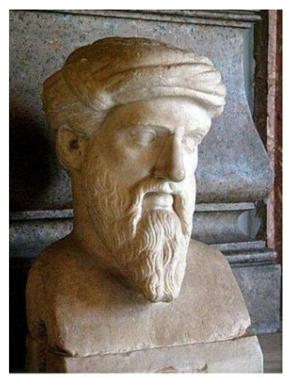
1.1 Хипотезе о настанку Питагорине теореме

Историјат Питагорине теореме је веома богат. За њу су знали и користили је пре Питагоре Египћани, Вавилонци, Хндуси и Кинези.

Око 2000 година п.н.е. Вавилонцима је била позната веза између страница правоуглог троугла 3, 4 и 5, као и старим Египћанима који су знали за четири Питагорне тројке, о чему сведочи папирус у ком је између осталог могуће наћи и релацију $1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(1\frac{1}{4}\right)^2$. [1]

Ипак према неким ауторима мало је вероватно да су Египћани користили уже од 12 чворова за одрећивање правоуглог троугла при парцелисању, као и да нема доказа да су знали да је троугао са страницама (3,4,5) правоугли. [2]

Питагорине тројке се могу наћи и у светим песмама Хиндуса, из периода петог или чертвртог века п.н.е. Песме говоре о начину добијања правих углова помоћу конопца од 3-4-5, односно 12-16-20, 15-20-25, 5-12-13, 15-36-39, 8-15-17 и 12-35-37 чворова везаних на једнаким растојањима. [1]



Питагорина биста која се налази у Риму

Традиционално, откриће се приписује Питагори, старогрчком филозофу и научнику који је према неким изворима рођен на острву Самос око 560. године п.н.е. Верује се да је био Талесов ученик. Део живота провео је путујући Египтом и Персијом, касније је у Кротону основао чувену школу Питагорејци.

Постоји неколико хипотеза о открићу Питагорине теореме. Нема поузданих информација да је Питагора посетио Египат и Вавилон, али постоји хипотеза да је путујући био посредник између знања, то јест да је преузео теорему од Вавилонаца. Друга хипотеза говори да како нема доказа да су Вавилонци и Египћани доказали теорему осим што су је користили у задацима и при решавању проблема, те да је на путовањима Питагора чуо за теорему али је он доказао, ако не општи случај онда бар случај једнакокрако-правоуглог троугла. Слабије су заступљени приступи да је Питагора формулисао и по први пут доказао теорему или да су први доказ нашли Питагорни ученици а заслуге су приписали њему као великом учитељу. [3]

[1] David Eugene Smith, History of Mathematics, поглавље II, страна 288.

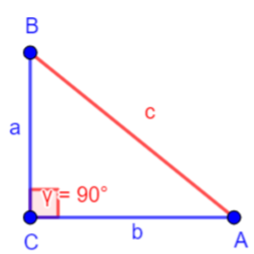
[2] Eli Moar, The Pythagorean Theorem- A 4000 Year History, страна 15.

[3] https://sh.wikipedia.org/wiki/Pitagorina_teorema, приступљено 23.8.2024.

1.2 Формулација Питагорине теореме

Питагорина теорема: У било ком правоуглом троуглу, површина квадрата конструисаног над хипотенузом (страницом која се налази наспрам правог угла) је једнака збиру површина квадрата конструисаних над катетама (страницама које су наспрам оштрих углова).

Теорема се често формулише и у краћем облику: Квадрат над хипотенузом једнак је збиру квадрата над катетама, док су уз цитат Бранисалва Нушића многе генерације Питагорину теорему запамтиле, а делује да нису заборавиле „Квадрат над хипотенузом, то зна свако дете, једнак је збиру квадрата над обе катете."



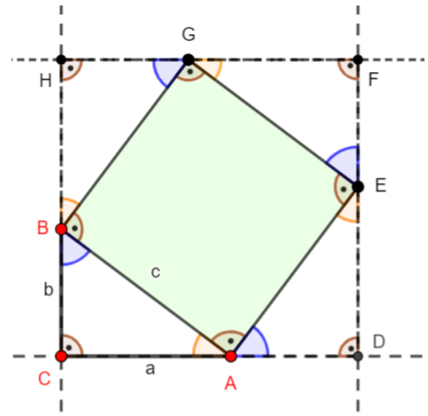
$\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$ Где су a и b катете, а c хипотенуза.

Елиша Скот Лумис је 1940. године у књизи Питагорина теорема скупио чак 367 различитих доказа Питагорине теореме. У овом раду биће исписана два доказа. Први доказ који се у поменутој књизи Питагорина теорема налази под бројем 35, је чест избор и издавачима књига за основну школу. Овај доказ је дао средњошколац Maurice Laisnei.

<u>Доказ1:</u>

Посматрамо произвољан правоугли троугао ABC, са правим углом у темену C. Конструсан је над хипотенузом, са спољашње стране, квадрат странице c.

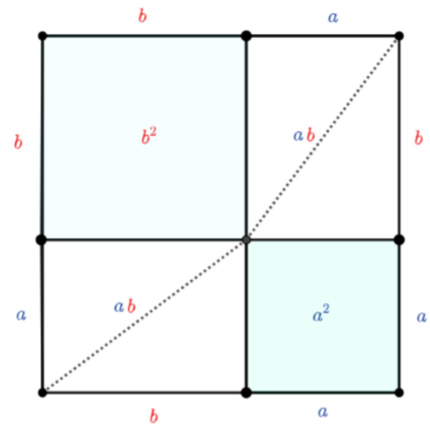
Праве на којима се налазе катете троугла ABC и њима паралелне праве које садрже темена квадрата над хипотенузом, образују нови квадрат CDFH.



Применом става подударности УСУ закључујемо да се квадрат CDFH састоји од четири подударна троугла ΔABC, ΔEAD, ΔGEF, ΔBGH и квадрата AEGB.

Па је површина квадрата CDFH $P = c^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} ab = c^2 + 2ab$, али такође важи и да је та површина $P = (a + b)^2$ јер је страница тог квадрата $a + b$.

Ако квадрат странице $a + b$ поделимо као на слици десно, на два квадрата и два правоугаоника, закључујемо да је $P = (a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$.



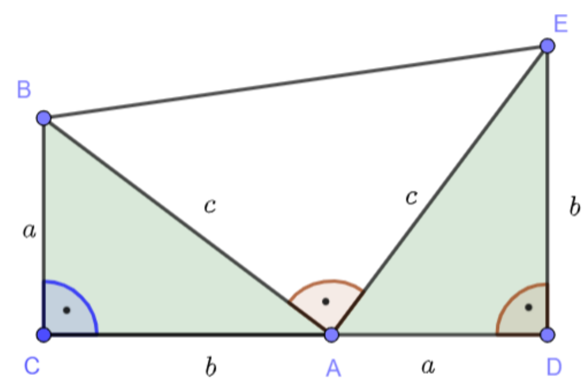
Из претходног запажања следи да је $c^2 + 2ab = a^2 + b^2 + 2ab$, односно да је $c^2 = a^2 + b^2$.

Овим је теорема доказана. ■

Други доказ се у књизи Питагорина теорема Елише Скот Лумис налази под бројем 231, познат је и као Гарфилдов доказ.

<u>Доказ2:</u>

Нека је правоугли троугао ΔABC дат произвољно. Обележавање страница: CB= a, AC= b, BA= c. Идеја доказа је доцртати њему подударан троугао на следећи начин. На $p(C, A)$ наћи тачку D тако да важи C-A-D и да је



AD = CB. Затим нацртати праву кроз тачку D која је паралелна $p(C, B)$. а нормална на $p(C, A)$. На тој правој наћи тачку E која је са исте стране праве $p(C, A)$ као и B, и таква да DE= AC.

ΔABC и ΔEAD су подударни па су њихове површине једнаке, $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta EAD} = \frac{a \cdot b}{2}$.

∢BAE је прав угао, јер је ∢BAE= 180°- ∢CAB - ∢DAE= 180°- ∢CAB - ∢ABC= 90°.

Па се спајањем тачака Е и В добија се једнакокрако-правоугли троугао ΔEBA,

$P_{\Delta AEB}= \frac{c\cdot c}{2} = \frac{c^2}{2}$.

Спајањем тачака Е и В, добија се и правоугли трапез CDEB, који има основице дужине a и b и висину дужине $a+b$. Па је површина трапеза $P_{CDEB}= \frac{(a+b)(a+b)}{2} = \frac{(a+b)^2}{2}$.

Са једне стране површина овог трапеза може се добити као производ полузбира основица и висине, а са друге као збир површина три троугла на који је подељен, па је.

$\frac{(a+b)^2}{2} = \frac{a\cdot b}{2} + \frac{a\cdot b}{2} + \frac{c^2}{2} <=> a^2 + b^2 = c^2$. Овим је теорема доказана. ■

1.3 Спознаја ирационалних бројева

Питагорејци су сматрали да се све може приказати као однос два цела броја у смислу у којем су заснивали своје учење о савршенству броја. Да није све тако, то јест да се не може све приказати као однос два цела броја, је откриће које се везује управо за припадника Питагорејаца, Хипаса из Метапонтума. Верује се да сам Хипас није имао намеру да обори став Питагорејаца већ да га докаже, при чему је дошао до открића спонтано и невољно. Хипас је највероватније извео геометријски доказ о ирационалности (несамерљивости) квадратног корена из броја 2. Из покушаја да докаже да се дијагонала квадрата странице 1 може представити као однос два природна броја, то јест да да је хипотенуза једнакокрако правоуглог троугла самерљива са катетом, дошао је до открића ирационалног броја $\sqrt{2}$. Према причи, Хипас је неком ван братства испричао о свом открићу због чега је кажњен од стране братства, тако што су га током крстарења бацили на пучину.

На латинском ratio значи ум, одакле и назив за ирационалне бројеве, ван ума односно ван памети.

Дуго након Хипасовог открића није било званичног прихватања ирационалних бројева. У шеснаестом веку долази до помака, прихватања појмова негативни бројеви, целобројни и разломљени део броја. Децимални бројни систем у данашњем облику прихваћен је у седамнаестом веку. У осамнаестом веку Абрахам де Моавр и Леонард Ојлер откривају изузетно употребљиве особине имагинарног броја, док је теорија комплексних бројева комплетирана у деветнаестом веку, када су ирационални бројеви раздвојени на алгебарске и трансцедентне. Тада је направљен нови приступ у области ирационалних бројева, која је од доба Еуклида остала нетакнута. У деветнаестом веку су деловали многи запажени математичари као што су Карл Вајерштрас, Хајне, Дедекинд, Кронекер, Кантор и они су дали допринос развоју теорије ирационалних бројева.

Да π није рационалан број доказао је Јохан Хајнрик Ламберт 1761. године, он је такође доказао да ако је n рационалан број, онда e^n није рационалан број, осим за $n = 0$.

1794. године Лежандр је довршио Ламбертов доказ и показао π да не може бити квадратни корен рационалног броја. Жозеф Лиувил је 1840. године показао да ни e ни e^2 не могу бити решења квадратне једначине са целобројним коефицијентима.

1844. године је Лиувил доказао постојање трансцедентних бројева, али је тек 1873. показан један такав, када је Чарлс Хермит доказао да је e трансцедентан, док је 1882. то исто доказао Линдемен за π. Трансцедентне бројеве од алгебарских први је раздвојио Кронекер. [4]

[4] https://sh.wikipedia.org/wiki/Iracionalni_broj , приступљено 23.8.2024.

2. ДЕФИНИЦИЈА РАЦИОНАЛНИХ, ИРАЦИОНАЛНИХ И РЕАЛНИХ БРОЈЕВА

Пре увођења ирационалних бројева и да би се дефинисали реални бројеви потребно је познавати рационалне бројеве. Друго поглавље започиње дефиницијом рационалних бројева, са вишег аспекта, без заласка у доказе неких тврђења.

2.1 Дефиниција рационалних бројева

2.1.1 Конструкција рационалних бројева у облику разломка

Као што до прстена целих бројева долазимо проширењем структуре $(\mathrm{N},+,\cdot)$, да би се за свако a, b могла решити једначина $a+x=b$, тако долази и до проширења прстена целих бројева да би се за свако a, b могла решити једначина $a \cdot x=b$, осим за $a=0$ и $b \neq 0$, јер је тада једначина контрадикторна.

Ово разматрање упућује на општи случај конструкције рационалних бројева.

Једначине $1\cdot x=2$, $2\cdot x=4$, $4\cdot a=8 . . .$, $a \cdot x=2a$, . . . све имају исто решење, број 2. Њему се у свакој од једначина може придружити одговарајући уређен пар коефицијената: (1,2), (2,4), (4,8), . . . , $(a, 2a)$, итд. Производ спољашњих и унутрашњих чланова исти је за свака два пара из ове класе.

Дакле, нека је скуп $\mathbb{Z}_1=\{x \in \mathbb{Z} \mid x \neq 0\}$ и релација ~ дефинисана је са : $(a\ b) \sim(c, d)$ ако и само ако $ad=bc$. Тада је ~ релација еквиваленције на скупу $\mathbb{Z}_1\times \mathbb{Z}$.

<u>Тврђење 1:</u> Релација ~ је релација еквиваленције на скупу $\mathbb{Z}_1\times \mathbb{Z}$.

<u>Доказ:</u> Нека су (a, b) , (c, d) и (e, f) елементи скупа $\mathbb{Z}_1\times \mathbb{Z}$.

Рефлексивност: $(a, b) \sim(a, b) \overset{\text{деф}}{\Longleftrightarrow} \quad ab=ba$.

Симетричност: Ако је $(a,b) \sim (c,d) \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} ad = bc \xLeftrightarrow[\text{из } \mathbb{Z}]{\text{комутативност}} da = cb \Leftrightarrow cb = da \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (c,d) = (a,b)$.

Транзитивност: $(a,b) \sim (c,d)$ и $(c,d) \sim (e,f) \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} ad = bc$ и $cf = de$.

$ad = bc \Rightarrow d = \frac{bc}{a}$, па је $cf = \frac{bc}{a}e \Leftrightarrow f = \frac{be}{a} \Leftrightarrow fa = be \xLeftrightarrow[\text{из } \mathbb{Z}]{\text{комутативност}} af = be \overset{\text{деф}}{\Leftrightarrow} (a,b) \sim (e,f)$. ■

Ако је (a,b) један уређен пар из скупа $\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}$, Онда класу еквиваленције $[(a,b)]_\sim$ означавамо са $\frac{b}{a}$ и зовемо разломком или рационалним бројем. Бројилац је цео број b у разломку $\frac{b}{a}$, а $a \neq 0$ је именилац.

Класу еквиваленције може да репрезентује било који представник, па ако $\frac{q}{p} = \frac{s}{r}$, то значи да (p,q) и (r,s) припадају истој класи, односно $ps = qr$.

Скуп $(\mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z})/\sim$ је тако **скуп рационалних бројева** и означавамо га са $\mathbb{Q}$.

Скуп $\mathbb{Q}$ је пребројив. Бинарне операције сабирања (+) и множења (·) на скупу класа $\mathbb{Q} = \mathbb{Z}_1 \times \mathbb{Z}$ дефинишу се као $\frac{b}{a} + \frac{d}{c} := \frac{bc+ad}{ac}$ и $\frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c} := \frac{bd}{ac}$. Мотивација је следећа: нека су једначине са целобројним коефицијентима $a \cdot x = b$ и $c \cdot x = d$, онда је збир решења $2x = \frac{b}{a} + \frac{d}{c}$, а производ решења $x \cdot x = \frac{b}{a} \cdot \frac{d}{c}$ док се са друге стране добија

(1) $a \cdot x = b$ /c $\Rightarrow a \cdot c \cdot x = c \cdot b$

(2)$c \cdot x = d$ /$a \Rightarrow a \cdot c \cdot x = a \cdot d$

Сабирањем (1) и (2) добија се $2 \cdot a \cdot c \cdot x = c \cdot b + ad$, то јест $2x = \frac{cb+ad}{ac}$.

Множењем (1) и (2) добија се $aaccxx = abcd \Rightarrow x \cdot x = \frac{abcd}{aacc} = \frac{bd}{ac}$.

Ове операције су добро дефинисане, што овде нећемо доказивати јер је ово осврт на увођење рационалних бројева.

Такође важе и следећа тврђења.

Тврђење 2: Структура $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ је поље.

Тврђење 3: Нека је $\mathbb{Z}^* = \left\{\frac{a}{1} \,\middle|\, a \in \mathbb{Z}\right\}$. Структура $(\mathbb{Z}^*, +,\cdot)$ је прстен који је у односу на функцију $x \mapsto \frac{x}{1}$ изоморфан са прстеном целих бројева.

Целе бројеве тако идентификујемо са разломцима облика $\frac{a}{1}$.

Тврђење 4: $\mathbb{Q}$ је најмање поље које садржи прстен $\mathbb{Z}^*$, односно $\mathbb{Z}$.

Тврђење 5: $(\mathbb{Q},+,\cdot)$ је уређено поље.

2.1.2 Конструкција рационалних бројева у децималном облику

Децимални записи су записи рационалног броја који су еквивалентни запису преко разломка.

- Поступак како од разломка конструисати децимални запис.

Разломку $\frac{a}{b}$, где су a и b позитивни цели бројеви, придружујемо низ целих бројева $q, q_1 q_2 q_3 \ . \ . \ .$, тако да је q позитиван број или нула, а $q_i \in \{0, 1, 2, . \ . \ . \ , 9\}$. Дељењем a са b добија се количник q и остатак r.

$a = qb + r$ где је $0 \leq r < b$.

- Ако је $r = 0$, поступак је завршен.
- Ако је $r > 0$, дели се $10r$ са b.

Тада, $10r = q_1 b + r_1$, где је $0 \leq r_1 < b$, а $0 \leq q_1 < 10$ (У супротном, да је $q_1 > 10$ било би $10r = q_1 b + r_1 \geq 10b$, то јест $r \geq b$, што је супротно са претпоставком да је $r < b$)

Па ако је $r_1 = 0$ поступак је завршен, а ако је $r_1 > 0$ поступак се понавља на описан начин.

Ако је $r_n = 0$, формира се низ $q, q_1 q_2 q_3 \ . \ . \ . q_n \ 00 \ . \ . \ .$, а ако је остатак $r_n \neq 0$, за свако n, тај низ је периодичан. У датом поступки сви остаци r_i су мањи од b па међу њима мора бити једнаких, а после првог понављања неког остатка понављају се и одговарајући количници. Па у низу $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \ldots$ се понавља група бројева којих може бити највише b, та група зове се период.

Овако добије низ $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \ldots$ је децималан запис разломка $\frac{a}{b}$, који може бити или коначан(ако се завршава нулама) или периодичан.

Следи опис обрнутог поступка.

- <u>Како полазећи од децималног записа рационалног броја доћи до њему одговарајућег разломка.</u>

Низу $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n 000 \ldots$ где $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $q_i \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$, $q_n \neq 0$ придружује се разломак $\frac{10^n q + 10^{n-1} q_1 + \ldots + 10^0 q_n}{10^n}$.

Низу $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \overline{s}$, где је период s узет као једноелементни због једноставности, придружује се разломак $\frac{10^n q + 10^{n-1} q_1 + \ldots + 10^0 q_n}{10^n} + \frac{s}{9 \cdot 10^n}$, где је $\frac{s}{9 \cdot 10^n}$ збир одговарајуће геометријске прогресије $\frac{s}{10^{n+1}} + \frac{s}{10^{n+2}} + \ldots = \frac{s}{10^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^2} + \ldots\right) = \frac{s}{10^{n+1}}\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}}\right) = \frac{s}{9 \cdot 10^n}$.

Исти разломак се додељује децималном запису са нулама на крају, $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_p 000 \ldots$ као и периодичном запису $q, q_1 q_2 q_3 \ldots q_n \overline{s}$ где је последња цифра који није нула мања за један ($q_n = q_p - 1$), а након тога се понавља број 9.

2.2 Реални бројеви

По Питагориној теореми дијагонала јединичног квадрата је $d^2 = 2$, а као што је познато разломак чији је квадрат једнак броју 2 не постоји. Та дужина се може само приближно одредити употребом рационалних бројева. Непостојање тачне мере у пољу $\mathbb{Q}$ говори о непотпуности овог поља у смислу да не постоји најмање горње ограничење то јест супремум, у односу на релацију $\leq$, за низ 1,4; 1,41; 1,414;...што је низ приближно одређних вредности за решење $d^2 = 2$.

С обзиром на овај недостатак скуп $\mathbb{Q}$ се проширује у скуп реалних бројева $\mathbb{R}$, што се може урадити на више еквивалентних начина, од којих су неки наведени у наставку.

2.2.1 Децимални записи

Скуп реалних бројева може се представити као унија рационалних и њему дисјунктног скупа ирационалних бројева. Где су **ирационални бројеви** сви децимални записи који нису периодични (нити коначни).

2.2.2 Фундаментални низови

Увођење реалних бројева помоћу посебних низова рационалних бројева, због тога прво су наведене дефиниције потребног и теорема.

<u>Дефиниција:</u> Низ a_nиз $\mathbb{Q}$ је фундаменталан (Кошијев) ако за сваки позитиван рационалан број ε постоји $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ такво да важи: $|a_n - a_m| < \varepsilon$ за све $n, m \,\epsilon\, \mathbb{N}$ такве да $m, n \geq n_\epsilon$, где је са леве стране дефинисана апсолутна вредност на уобичајан начин.

<u>Дефиниција:</u> Низ a_nиз $\mathbb{Q}$ конвергира ка рационалном броју a ако за свако $\varepsilon > 0$ из $\mathbb{Q}$, постоји $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ тако да важи: $|a_n - a| < \varepsilon$ за све $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$ такве да $n \geq n_\epsilon$.

Елемент a је лимес или граница, а низ који има лимес је конвергентан на пољу $\mathbb{Q}$.

Тврђење 6: Сваки конвергентан низ рационалних бројева је фундаменталан. Обрнуто не важи.

Доказ: Претпоставимо да је низ a_n рационалних бројева конвергентан и доказујемо да је фундаменталан, Бирамо произвољан позитиван рационалан број ε. Како је низ конвергентан, нека конвергира ка броју a, за број $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ постоји природан број n_δ такав да је за свако $|a_n - a| < \delta$ за све $n \geq n_\delta$.

Сада, према особини $|x + y| \leq |x| + |y|$ где су x и y рационални бројеви, важи:

$|a_n - a_m| = |a_n - a + a - a_m| \leq |a_n - a| + |a - a_m| \leq \delta + \delta = \varepsilon$. Овај низ је фундаменталан.

Да обрнуто не важи приказано је контрапримером на већ споменутом низу a_n: $1; 1{,}4; 1{,}41; 1{,}414, 1{,}4142; \ . \ . \ .$ који је дефинисан тако да је квадрат сваког члана мањи од 2, а ако се последња децимала повећа за 1 добије се број чији је квадрат већи од два.

a_n је фундаментални низ , јер је за дато $\varepsilon > 0$ разлика између чланова низа са „довољно много" децимала очигледно мања од ε.

Низ квадрата $(a_n)^2$: 1^2; $(1{,}4)^2$; $(1{,}41)^2$; $(1{,}414)^2$; $(1{,}4142)^2$; . . . конвергира ка 2. Из тог се закључује да низ a_n не конвергира у скупу $\mathbb{Q}$, јер квадрат ниједног рационалног броја није једнак 2. ■

У скупу F фундаменталних низова на $\mathbb{Q}$ дефинише се релација еквиваленције $\sim$: $a_n \sim b_n \ \lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = 0$.

F/∼ је скуп **реалних бројева**. Свака класа у којој се налазе фундаментални низови који нису конвергентни у $\mathbb{Q}$ је један **ирационалан број**.

2.2.3 Дедекиндови резови

Још један начин конструисања Реалних бројева дао је Дедекинд.

Полази се од уређеног поља $\mathbb{Q}$ рационалних бројева и посматрају се уређени парови (A,B) подскупова из $\mathbb{Q}$, који испуњавају следеће услове:

(1) $\{A, B\}$ је партиција скупа $\mathbb{Q}$

(2) Сваки број из A мањи је од сваког броја из B

Рез (или пресек) у пољу $\mathbb{Q}$ је сваки уређен пар који испуњава наведене услове.

Означава се са A| B.

Скуп A је доња а скуп B горња класа реза A| B.

Да би били испуњени наведени услови, сви резови се могу категорисати у два типа

(а) Први тип реза има својство да класа A има највећи број, а класа B нема најмањи број, или да класа A нема највећи број а класа B има најмањи број. Оба случаја одређују јединствен **рационалан број** у првом случају то је највећи број класе A а у другом случају најмањи број класе B. Резови овог типа зову се рационални бројеви. Пример: У скупу A су сви бројеви мањи од $\frac{1}{2}$, а сви остали су у B- овај рез одговара броју $\frac{1}{2}$.

Не постоји могућност да класа A има највећи а класа B најмањи елемент, зато што су A и B дисјунктни па би ти бројеви морали бити различити, те би између класа постојао број који није ни у A ни у B. Сваки рез је једнозначно одређен једном од две његове класе.

(б) Нити у A постоји највећи нити у B најмањи број. Резови овог типа зову се **ирационални бројеви**. Пример таквог реза: $B = \{x \in \mathbb{Q}^+ |\ x^2 > 2\}$, $A = \mathbb{Q} \backslash B$ – овај рез одговара броју $\sqrt{2}$.

Скуп реалних бројева дефинише се као скуп сви резова A| B у пољу $\mathbb{Q}$, уведених са (а) и (б).

3. УВОЂЕЊЕ ИРАЦИОНАЛНИХ БРОЈЕВА КРОЗ РАЗЛИЧИТЕ УЏБЕНИКЕ У ОСНОВНОЈ ШКОЛИ

3.1 Приказ у уџбенику издавачке куће „Klett“ [1]

3.1.1 Увод у ирационалне бројеве

У уџбенику [1] дата је лекција „***Једначине облика*** $\boldsymbol{x^2 = r,\ r > 0}$ ***које немају решења у скупу*** $\mathbb{Q}$“.

Главни део лекције је решавање Примера 4 у ком се показује да не постоји рационалан број x такав да је $x^2 = 2$, то јест ученик има увид у то да ова једначина нема решења у до сада познатом скупу $\mathbb{Q}$. У овој лекцији се не спомиње могућност проширивања скупа $\mathbb{Q}$, то јест написано је да поменута једначина нема решења у скупу $\mathbb{Q}$, али нису дате назнаке да решења уопште и има.

Пример 4 је решен на два начина, индиректним доказима. Давањем више од једног начина за доказивање, негује се аналитички начин размишљања код ученика.

Дате су тезе које објашњавају тврђење 3.1.1.1, што је за дати узраст ученика, добар пример да за сваку математичку тврдњу треба да постоји и доказ.

Нека је n природан број и p прост број.

• Ако $p|n^2$, онда се p појављује паран број пута у растављању броја n^2 на просте чиниоце.

• Ако $p \nmid n^2$, онда се p не појављује у растављању броја n^2 на просте чиниоце, тј. у растављању се појављује нула пута. Пошто је и нула паран број, и у овом случају можемо рећи да се p појављује паран број пута у растављању броја n^2 на просте чиниоце.

Тврђење 3.1.1.1

У растављању потпуног квадрата на просте чиниоце сваки прост број се појављује паран број пута.

Пример 4.

Да ли постоји рационалан број x *такав да је* $x^2 = 2$.

Одговор је „Не“, Довољно је показати да не постоји позитиван рационалан број x чији је квадрат једнак 2.

Први начин. Ако би постојао позитиван рационалан број x чији је квадрат једнак 2, онда би постојали природни бројеви a и b (као и за сваки други позитиван рационалан број) такви да је $x = \frac{a}{b}$. Тада би важило $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2} = 2$, тј. $a^2 = 2b^2$. Међутим, пошто је 2 прост број, према претходном тврђењу , 2 се појављује паран број пута у растављању на просте чиниоце и броја a^2и броја b^2.

Одатле следи да се након растављања бројева a^2 и b^2 на просте чиниоце:

- са леве стране једнакости $a^2 = 2b^2$ број два појављује паран број пута, а
- са десне стране једнакости $a^2 = 2b^2$ број два појављује непаран број пута.

Наведене тврдње свакако не могу бити тачне. Дакле, не постоје природни бројеви a и b такви да је $a^2 = 2b^2$, а самим тим не постоји ни рационалан број чији је квадрат једнак 2.

Други начин. Ако претпоставимо да постоји позитиван рационалан број x такав да је $x^2 = 2$, онда постоје и узајамно прости природни бројеви p и q такви да је $x = \frac{p}{q}$. Онда је $x^2 = \frac{p^2}{q^2}$, односно $2 = \frac{p^2}{q^2}$.

Последњу једнакост можемо записати као

$$p^2 = 2q^2,$$

одакле је јасно да је p^2 паран број. Онда и број p мора бити паран, и нека је $p = 2k$, где је k неки природан број. Дакле, важи $p^2 = (2k)^2 = 4k^2$ и $4k^2 = 2q^2$.

Последњу једнакост можемо записати и као

$$2k^2 = q^2,$$

одакле следи да је и q^2 паран број, односно да је и q паран број.

Резимирајмо до сада изведене закључке:

- постоје узајамно прости природни бројеви p и q такви да је $2 = \frac{p^2}{q^2}$.
- бројеви p и q су парни.

Два парна броја нису узајамно проста, па закључујемо да је нетачна наша почетна претпоставка да постоји рационалан број x такав да је $x^2 = 2$

Затим је исписано уопштење за било који прост број p.

Тврђење 3.1.1.2

Нека је p прост број, Тада не постоји рационалан број x такав да је $x^2 = p$.

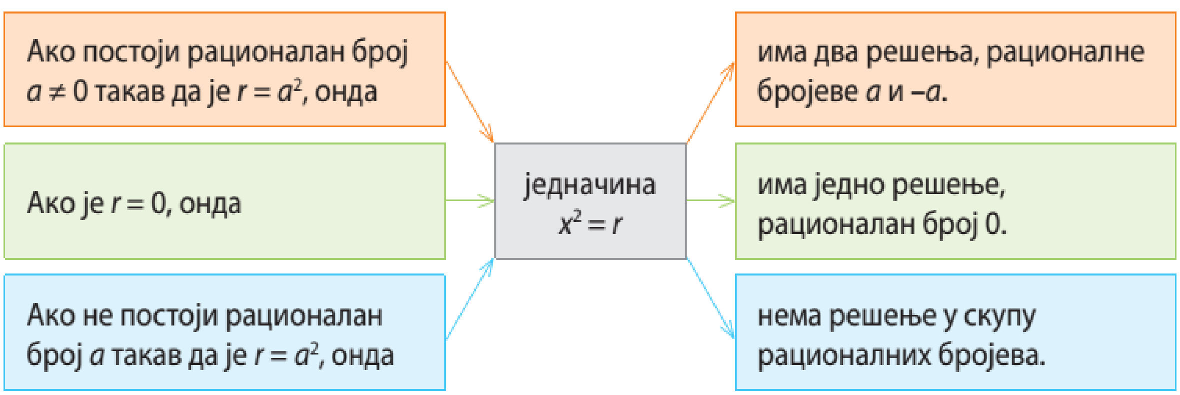
Претходно тврђење директно следи из чињенице да не постоје природни бројеви a и b такви да је $a^2 = p \cdot b^2$. До овог закључка долазимо размишљајући као у претходном примеру.

p се појављује паран број пута у растављању броја a^2 на просте чиниоце.

p роја се појављује непаран број пута у растављању броја $p \cdot b^2$ на просте чиниоце.

$a^2 = p \cdot b^2$

На крају ове лекције, шемом је приказано када једначине овог типа имају или немају решење у скупу $\mathbb{Q}$.



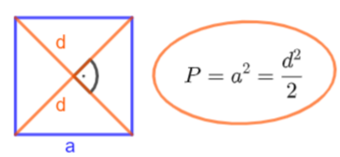
3.1.2 Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$

Тражено проширење скупа обрађено је у лекцији под називом „***Скуп реалних бројева и бројевна права***“.

Након објашњења како се за одабрану јединицу мере тражи десети део јединице мере, па стоти део јединице мере, показано је како за дату дуж одређујемо њену дужину (у случају дужи чији је мерни број рационалан број са коначним бројем децимала). Затим је дат Пример 2, приказан у наставку, где ученик треба да одреди првих пар децимала мерног броја дужине дијагонале јединичног квадрата (d) и и на основу тврђења 3.1.1.2 из претходне лекције закључи да број (d) има бесконачни децимални запис који није периодичан. Тврђењем 3.1.1.2 ученик је сазнао да постоји једначина која нема рационално решење, а наредним Примером 2 показано је да постоји мерни број дужине дужи који није рационалан.

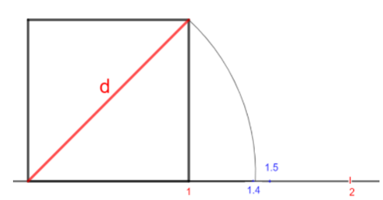
Пример 2.

Одредимо дужину d дијагонале јединичног квадрата тј. квадрата чија је страница једнака изабраној јединици мере.



Када на јединични квадрат применимо познате обрасце за израчунавање површине квадрата, закључујемо да важи $d^2 = 2$.

Очигледно је $1 < d < 2$. Да бисмо прецизније одредили d, формирајмо следећу табелу.



d	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6	…
d^2	1	1,21	1,44	1,69	1,96	2,25	2,56	…

Закључујемо да је $1{,}4 < d < 1.5$ јер је $1{,}4^2 < 2 = d^2 < 1{,}5^2$.

Наредну цифру (стотих делова) одређујемо помоћу следеће табеле.

d	1,4	1,41	1,42	...
d^2	1,96	1,9881	2,0164	...

Дакле, је $1{,}41 < d < 1.42$. Слично одређујемо цифру хиљадитих.

d	1,411	1,412	1,413	1,414	1,415	…
d^2	1,990921	1,993744	1,996569	1,999396	2,002225	…

Дакле, $1{,}414 < d < 1{,}415$.

Већ смо доказали да d није рационалан број (видети Пример 4 на страни 17), па знамо да се описани поступак никада не може завршити. Ако би број d имао коначни децимални запис или бесконачни периодични, онда би он био рационалан број. Дакле, децимални запис броја d је бесконачан и није периодичан. Иако децимални запис броја d не можемо у целости приказати, описаним поступком можемо одредити произвољно много децимала броја d:

$$d = 1{,}41421356237309504880168872420 9 \ldots$$

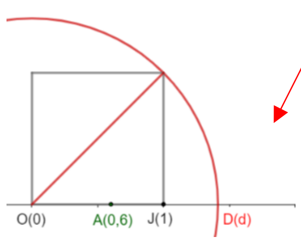
Дакле у уџбенику [1] ирационални бројеви су уведени из потребе да се запише мерни број дужине дужи који није рационалан, јер је после Примера 2 очигледно да дужину сваке дужи не можемо изразити рационалним бројем. Да је ирационалном броју могуће придружити јединствену тачку на бројевној правој, дато је сликом (без додатног објашњења како је слика настала, али је повезано са претходним примером и може се закључити), за број $d = 1{,}41421356237309504880168 \ldots$.

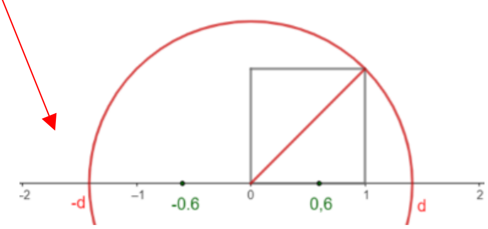
Мерне бројеве дужина дужи називамо **позитивним реалним бројевима**. Поред ових бројева природно уводимо и **негативне реалне бројеве** посматрајући читаву бројевну праву.

Мерни број d дужине дужи OD није рационалан број.

Број -d није рационалан и њему одговара бесконачан и непериодичан децимални запис:

$d = 1{,}41421356237309504880168 \ldots$



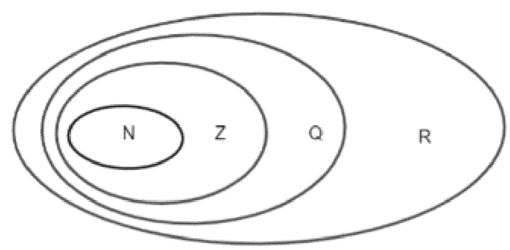


Позитивни и негативни реални бројеви заједно са нулом образују **скуп реалних бројева**. Скуп реалних бројева обележавамо са $\mathbb{R}$.

Скуп реалних бројева, уводи се као унија позитивних реалних бројева, нуле и негативних реалних бројева, где су позитивни реални бројеви описани као мерни бројеви дужина дужи који су или рационални или нису рационални.

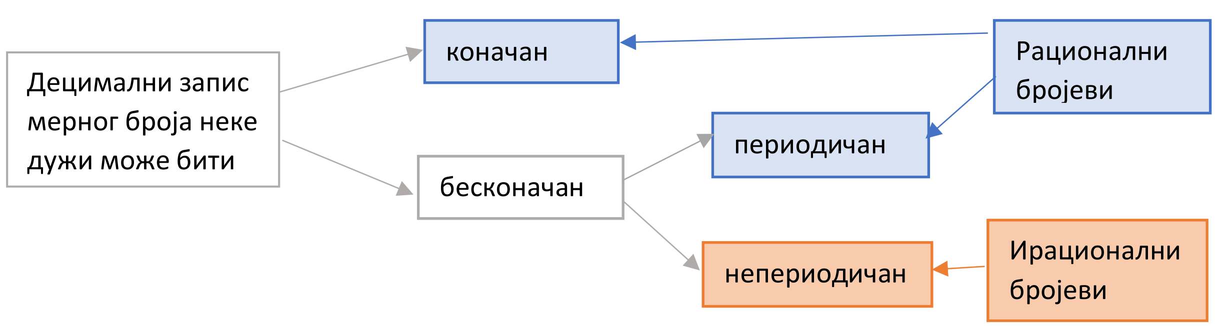
После тврђења да сваком реалном броју одговара тачно једна тачка бројевне праве, и обрнуто, уводи се назив скуп Ирационалних бројева.

Очигледно да су сви рационални бројеви истовремено и реални, тј. $\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$. Обрнуто није тачно, јер за изабрану јединицу мере постоје дужи чији мерни бројеви нису рационални бројеви. Реални бројеви који нису рационални називају се **ирационални бројеви.** Скуп ирационалних бројева обележавамо са $\mathbb{I}$. Дакле, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$, $\mathbb{Q}\cap\mathbb{I}=\emptyset$.



Следи објашњење како елеминисањем рационалних бројева из скупа реалних, закључујемо какав децималан запис могу имати ирационални бројеви. Што је приказано и шематски.

Имајући на уму поступак мерења, јасно је да се сваки реалан број може изразити децималним записом који има коначан или бесконачан низ децимала. Познато је да рационалним бројевима одговарају коначни или бесконачни периодични децимални записи. Стога ирационалним бројевима одговарају бесконачни непериодични децимални записи.



3.2. Приказ у уџбенику који је издао Завод за уџбенике [2]

3.2.1 Увод у ирационалне бројеве

У овом уџбенику дата је лекција : „ ***Решење једначине*** $\boldsymbol{x^2 = a, (a \geq 0)}$***. Квадратни корен, Ирационалан број.***“

Почетак лекције односи се на једначине облика $x^2 = a, (a \geq 0)$, где је x из скупа рационалних бројева. Затим се дефинише квадратни корен броја $a, (a \geq 0)$. Након увођења појма квадратног корена опет се посматра једначина $x^2 = 64$ која је обрђена у првом примеру, али се решења записују помоћу квадратног корена.

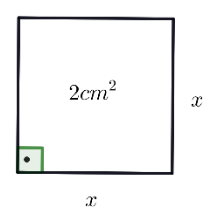
Кроз примере се објашњава и да једначина $x^2 = a$ за $a > 0$ као што је $x^2 = 9$ има два решења, за $a = 0$ је $x^2 = 0$ и има једно решење, док за $a < 0$, као што је $x^2 = -4$ за сада не решавамо.

Кроз наредни, Пример 4, по први пут се долази до квадратног корена који као решење нема рационалан број.

Пример 4

Површина квадрата је 2 cm^2 *(сл. 3). Како израчунати дужину његове странице?* Видели смо да се дужина странице квадрата добија решавањем једначине

$$x^2 = 2.$$



Слика 3

Дакле, очекујемо да x буде број означен са $\sqrt{2}$.

Али, да ли такав број постоји у скупу рационалних бројева?

Приметинмо да он сигурно не може бити цео. Стварно,

$$1^2 = 1, \text{тј. } 1 < 2 \text{ и } 2^2 = 4, \text{тј. } 4 > 2,$$

па $\sqrt{2}$, ако постоји, мора да задовољава

$$1 < \sqrt{2} < 2.$$

Такође, ниједан рационалан број није решење једначине $x^2 = 2$.

<u>Теорема 3.2.1.1</u>

Ниједан рационалан број није решење једначине $x^2 = 2.$

Доказ:

Претпоставимо да постоји неки рационалан број $\frac{p}{q}$ (p и q су узајамно прости природни бројеви) за које важи

$2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2,\ 2 = \frac{p^2}{q^2},$ тј. $2 \cdot q^2 = p^2.$

Из ове једнакости следи да је p^2 паран број, па, према томе и p је паран број, тј. $p = 2 \cdot k,$ $k \in \mathbb{N}$. Зато је $4 \cdot k^2 = 2 \cdot q^2$, или, $2 \cdot k^2 = q^2$. Из последње једнакости следи, слично као пре, да је q паран број, тј. $q = 2 \cdot m, m \in \mathbb{N}$. Тако добијамо да су у једнакости

$2 = \frac{p^2}{q^2}$

p и q парни бројеви, што је противречно полазној чињеници да су p и q узајамно прости бројеви. Према томе, наведена једнакост није тачна ни за један рационалан број $\frac{p}{q}$, па закључујемо да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 2.

После Примера 4 и Теореме 3.2.1.1, дате су назнаке да се скуп рационалних елемената може проширити, и да би у том проширењу били бројеви који нису рационални а који су решења једначине $x^2 = a, a \geq 0$ где број x није потпуни квадрат неког броја. Тачније у новом проширеном скупу биће могуће решити све једначине облика $x^2 = a, a \geq 0$, где су решења записана преко квадратних корена.

Настали проблем решава се тако што се, до сада коришћени скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ проширује новим елементима.

Те нове елементе зовемо **ирационални бројеви** и о њима ће нешто више речи бити у наредном одељку.

Рационални и ирационални бројеви заједно чиниће нови скуп- скуп реалних бројева. У том новом скупу биће могуће решавати све једначине облика

$$x^2 = a, a \geq 0.$$

Ненегативно решење такве једначине зваћемо, као и до сада, *корен из* a и означаваћемо са $\sqrt{a}$. При том, број a ће некад бити рационалан број (нпр. $\sqrt{9} = 3, \sqrt{6{,}25} = 2{,}5$), али често неће. На пример, претходна разматрања показују да

$$\sqrt{2} \text{ није рационалан број } \left(\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}\right).$$

Значи, дужина странице квадрата је ирационалан број (сл.3), тј. $\sqrt{2}$. Такође, може се показати да су ирационални бројеви и $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ \sqrt{1{,}2}, \sqrt{\frac{1}{2}}$ итд.

После тога дати су решени следећ примери: $x^2 = 16, x^2 = 5, x^2 = 7$, где су решења записана преко квадратног корена. Дато је уопштење решења једначине облика $x^2 = a, (a \geq 0)$.

Уопште, једначина облика

$$x^2 = a, (a \geq 0),$$

Има рационална и ирационална решења. Скуп решења те једначине је $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$.

3.2.2 Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$

Лекција где се уводи скуп ирационалних бројева је *„**Реални бројеви. Бројевна права. Једнакост** $\sqrt{a^2} = |a|$. “*.

На почетку дат је подсетник како се дефинише скуп $\mathbb{N} = \{1, 2\ 3, \dots\}$, $\mathbb{Z} = \{\dots, -4, -3, -2\ , -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $\mathbb{Q} = \left\{x | \ x = \frac{p}{q}, \ p, q \in \mathbb{Z}, \ q \neq 0\right\}$ И да за наведене скупове важи $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. Након тога следи увођење неких ирационалних бројева, увођење ознака $\mathbb{I}$ и $\mathbb{R}$, и како из скупа $\mathbb{R}$ према децималном запису разврстати рационалне и ирационалне бројеве.

Најзад, у претходном одељку видели смо потребу за увођењем неких ирационалних бројева, на пример $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{17}$ итд.

Може се доказати да ирационалних бројева има веома много (неограничено много) јер ако је $\sqrt{2}$ ирационалан број, онда су ирационални и бројеви облика $r+\sqrt{2},(r \in \mathbb{Q})$. Дакле, помоћу само једног ирационалног броја можемо добити бесконачно много ирационалних бројева.

Доказ следеће теореме на једноставан начин пружа сагледавање због чега има бесконачно много ирационалних бројева, не само као квадратних корена бројева који су непотпуни квадрати већ и као збира или разлике рационалног броја и било ког ирационалног броја. До сада су ирационалним приказани они бројеви који су решења једначине $x^2=a, a \geq 0$ где број x није потпуни квадрат неког броја, док се у овом доказу именује број $r+\sqrt{2},(r \in \mathbb{Q})$ као ирационалан.

Теорема 3.2.2.1

Сви бројеви облика $r+\sqrt{2},(r \in \mathbb{Q})$ *су ирационални.*

Доказ:

Претпоставимо супротно: да је број $r+\sqrt{2}$ облика $\frac{p}{q}$, $(p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N})$, тј. рационалан. Тада из $r+\sqrt{2}=\frac{p}{q}$, следи $\sqrt{2}=\frac{p}{q}-r$ (разлика рационалних бројева је рационалан број), што значи да је $\sqrt{2}$ рационалан број, а то није могуће. Значи, претпоставка да је број облика $r+\sqrt{2}$ рационална је нетчна, па је онда сваки број таквог облика ирационалан. На сличан начин састави још неки скуп ирационалних бројева

Ако се са са $\mathbb{I}$ означи **скуп свих ирационалних бројева**, онда је унија скупова $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ нови, шири скуп бројева, који се назива скуп **реалних бројева** и означава се са $\mathbb{R}$.

Дакле, $\mathbb{R}=\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$. Скупови $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{I}$ немају заједничких елемената $\mathbb{Q} \cap \mathbb{I}=\emptyset$, тј. сваки реалан број је или рационалан или ирационалан.

Један од начина да упознамо реалне бројеве су децимални развици (записи). Познато нам је да сваком *рационалном броју* одговара коначан или бесконачан, али периодичан, децималан запис. На пример,

$\frac{1}{2}=0{,}5;\ \frac{3}{4}=0{,}75, \frac{1}{5}=0{,}2;\ \frac{1}{3}=0{,}333\ldots=0,\dot{3}.$

Изузев периодичних децималних развитака, можемо разматрати и оне бесконачне децималне развитке који нису периодични, на пример: 0,10100100010... (број нула се увећава за један).

Такви бројеви су познати као *ирационални бројеви*. Стога, било који коначан, периодичан или непериодичан децимални развитак зовемо *ралан број*.

Након тога је дат пример где се одређује децимални развитак броја $\sqrt{5}$. Приказ тога је прескочен, с обзиром на то да су до њега ирационални бројеви већ уведени то јест он нема функцију да се помоћу њега закључи нешто о постојању ирационалних бројева. Техника решавања овог примера је као у уџбенику [1].

Да је могуће ирацоналном броју доделити јединствену тачку на бројевној правој објашњено је аксиоматски. Тачније, како ученици не познају аксиоме, ово је више објашњење да доказ постоји.

На примеру броја $\sqrt{5}$ изложен је поступак како се израчунавају децимале тог броја. А исто тако смо броју $\sqrt{5}$ придружили рационалне одсечке бројевне праве, тј. дужи са рационалним крајевима: $[2;3], [2{,}2;2{,}3], [2{,}23;2{,}24] \dots$, где је $[2;3] \subset [2{,}2;2{,}3] \subset [2{,}23;2{,}24] \dots$, а њихове дужине су 1, $\frac{1}{10}, \frac{1}{10^2}, \dots$

У аксиоматском заснивању *еуклидске геометрије постоји аксиома* према којој овакав низ уметнутих одсечака, чије се дужине стално смањују и теже нули, садржи једну једину тачку P. Ту тачку P придружујемо броју $\sqrt{5}$, и $\sqrt{5}$ је његова координата. Овим поступком можемо придружити само једну тачку бројевне праве. Можемо закључити да уопштено важи: *Сваки реалан број је координата неке тачке бројевне праве*. Такође, свакој тачки праве придружен је на *једнозначан* начин реалан број.

3.3 Приказ у уџбенику који је издао Завод за уџбенике [3]

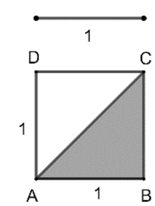
3.3.1. Увод у ирационалне бројеве

Лекција : *„* ***Постојање ирационаланих бројева***. *“* почињен уводним текстом који следећим питањима подстиче на размишљање да осим рационалних могу постојати још неки бројеви: „Да ли се, при изабраној јединици мере за дужину, *свакој* дужи може придружити њен мерни број? Да ли нам позитивни рационални бројеви то обезбеђују?“

Пример 1

При задатој јединици мере за дужину, нацртај троугао чији је мерни број површине, при одговарајућој јединици мере за површину, једнак $\frac{1}{2}$.

Једнакокраки правоугли троугао ABC има површину једнаку $\frac{1}{2}$.

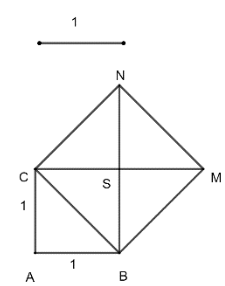


Слика 3

Да бисмо мало поједноставили излагање, нећемо у решењима истицати да се ради о мерним бројевима при изабраним или одговарајућим једнинцама мере за дужину односно мере за површину.

Пример 2

Нека је задата јединица мере за дужину, Нацртај квадрат чији је мерни број површине, при одговарајућој јединици мере за површину, једнак 2.



Слика 4

Квадрат BMNC се очигледно разлаже дијагоналама CM и BN на четири подударна једнакокрака правоугла троугла. Сви су они подударни с једнакокраким правоуглим троуглом ABC (површине $\frac{1}{2}$), па је површина квадрата BMNC једнака $4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 2$.

Страница BC квадрата BMNC има дужину. Ако је мерни број те дужине једнак x, онда је мерни број његове површине P једнак x^2, па је $x^2 = 2$.

Дакле, постоји ***број*** чији је квадрат једнак 2.

Примером 1 је олакшано решавање Примера 2 у смислу образлагања површине траженог квадрата. Пример 2 у комбинацији са наредним Примером 3 доводи до закључка да једначина $x^2 = 2$ мора имати решења, али да то сигурно није рационалан број.

Пример 3

Докажи да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 2.

Претпоставимо да постоји рационалан број, такав да је његов квадрат једнак 2. Ако је то број $\frac{m}{n}$, онда је и квадрат броја $-\frac{m}{n}$ једнак 2. Један од та два броја је позитиван, Нека је $\frac{p}{q}$ разломак који је једнак том позитивном броју и такав је да су бројеви p и q узајамно прости природни бројеви. Онда важи

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2,$$

Односно

$$p^2 = 2 \cdot q^2.$$

Дакле, квадрат природног броја p је паран број. Знамо да је квадрат непарног броја непаран број, па мора p бити паран број. Нека је $p = 2k$, где је k природан број. Онда из $p^2 = 2q^2$ налазимо да је

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2q^2,$$

односно

$$q^2 = 2k^2.$$

Дакле, q^2 је паран број, па мора и q бити паран број. Нека је $q = 2l$, где је l природан број. Из $p = 2k$, q$= 2l$, где су k и l природни бројеви, следи да је највећи заједнички делилац бројева p и q бар 2, дакле $\mathrm{NZD}(p, q) \geq 2$. Но, то противречи претпоставци да су p и q узајамно прости природни бројеви. **Тиме смо доказали да не постоји рационалан број чији је квадрат једнак 2.**

У примеру 2 смо видели да постоји ***број*** чији је квадрат једнак 2. Према примеру 3 тај број није рационалан, што значи да постоји број који није рационалан. Ова сазнања можемо исказати и на други начин.

Постоји позитиван број који је решење једначине $x^2 = 2$, који није рационалан. Обележимо га са $\sqrt{2}$.

Дакле, у уџбенику [3] у оквиру ове лекције спомиње се да постоје бројеви који нису рационални.

3.3.2 Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$

Мада је већ споменуто да постоје бројеви који нису рационални, скуп ирационалних и реалних бројева уводе се у лекцији *„**Реални бројеви и бројевна права**“*. Запис је текстуалан, без симбола и графичких приказа.

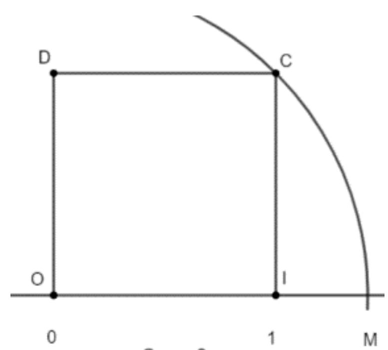
Научили смо да поред рационалних бројева постоје и бројеви који нису рационални, назваћемо их ***ирационални бројеви.*** На тај начин наилазимо да је број чији је квадрат једнак 2 ирационалан, број чији је квадрат једнак 5 ирационалан, ... Наслућујемо да ирационалних бројева има бесконачно много. Ускоро ћемо се у то уверити, а знатно касније, у средњој школи, доказаћемо да их има више него рационалних бројева.
Обједињавањем рационалних и ирационалних бројева у нови, проширени скуп бројева, добијамо ***скуп реалних бројева***. Његови су елементи реални бројеви. Означавамо га са $\mathbb{R}$.
Реалан број је или рационалан или ирационалан.

У наставку реч је о приказивању рационалних бројева на бројевној правој, о подели дужи на 3 или 5 једнаких делова, како би се на бројевној правој одредила $\frac{1}{5}$. После тога поставља се питање, да ли реалне бројеве можемо приказати на бројевној правој? Како је познато да рационалне можемо, у Примеру 4 се показује како ирационалне бројеве приказујемо на бројевној правој, и то се показује повезивањем са Примером 1 из претходне лекције.

Пример 4

Наћи на задатој бројевној правој тачку M која има позитивну координату и да је квадрат мерног броја дужине дужи OM једнак 2.

Видели смо да дужина дијагонале квадрата, чија је дужина странице једнака 1 има тражено својство. Нека је OICD квадрат и нека је M тачка на позитивном делу бројевне праве која припада кружној линији $k(O, OC)$.



Слика 9

Како су дужине дужи OC и OM једнаке, њихови су мерни бројеви, при изабраној јединичној дужи OI, једнаки. Стога је квадрат мерног броја дужине дужи OM једнак 2, па је тако одређена тачка M тражена тачка.

Координата тачке M је ирационалан број. На тај начин смо једном ирационалном броју придружили одређену тачку бројевне праве. Поставља се питање да ли произвољном реалном броју, било да је он рационалан или ирационалан, можемо придружити одређену тачку бројевне праве. Одговор је: **постоји**.

Децимални записа ирационалног броја као и децимални развитак, обрађен је две лекције након горе приказане лекције „Реални бројеви и бројевна права“, а у оквиру лекцији „Децимални запис реалног броја. Приближна вредност реалног броја.“ Важност те лекције није упитна, али неће бити визуално приказна, због секундарног значаја за рад, у погледу тога да не утиче на увођење ирационалних бројева у овом уџбенику. Први део лекције даје објашњење како се уопштено за задату тачку бројевне праве чија је координата ирационалан број, проналази цео део и првих пар децимала тог броја, аналогно као у уџбенику [1]. А затим је поступак и практично приказан на примеру: *Одреди цео део и прве две децимале броја* $\sqrt{2}$. Дата је и дефиниција децималног записа ирационалног броја.

3.4 Приказ у уџбенику који је издао Креативни центар [4]

3.4.1 Увод у ирационалне бројеве

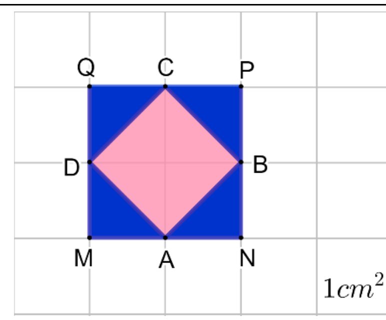
У овом уџбенику дата је лекција „ ***Појам ирационалног броја*** $\sqrt{2}$“, у којој је све показано кроз један пример. Нема доказа теорема нити доказа примера, ало су лако уочљиви кључни појмови.

① а) Колика је страница квадрата MNPQ?

б) Колика је површина квадрата MNPQ?

в) Колика је површина ABCD квадрата?

г) Измери страницу квадрата ABCD у милиметрима.

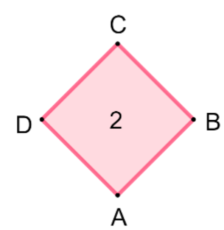


Број $\sqrt{2}$

Површина квадрата ABCD у задатку 1 је 2 cm^2.

Питање које нам се намеће јесте како израчунати страницу квадрата чија је површина $2cm^2$.

Научили смо да на основу површине квадрата израчунавамо његову страницу примењујући операцију кореновања, то јест решавајући једначину:



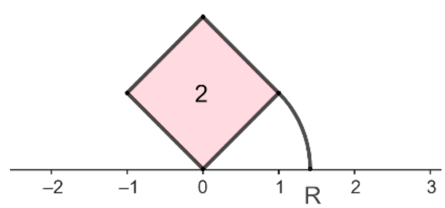
$$a^2 = 2$$

$$a = \sqrt{2}$$

Наш задатак јесте да пронађемо број чији је квадрат јднак броју 2.

Први корак

Дужину странице квадрата помоћу шестара пренесемо на бројевну праву. Тако одређујемо тачку R чија је координата $\sqrt{2}$. На основу цртежа закључујемо да је $1 < \sqrt{2} < 2$, то јест $\sqrt{2}$ није цео број. Треба пронаћи прву децималу.



Други корак

Делимо део бројевне праве између бројева 1 и 2 на 10 једнаких делова. Рачунамо квадрат сваког од бројева 1,1; 1,2; 1,3; 1,4; 1,5 ... 1,9; 2 и тражимо онај број чији је квадрат 2.

$1{,}1^2 = 1{,}21$

$1{,}2^2 = 1{,}44$

$1{,}3^2 = 1{,}69$

$1{,}4^2 = 1{,}96$

$1{,}5^2 = 2{,}25$

$1{,}6^2 = 2{,}56$

. . .

$2^2 = 4$

Закључујемо да је $1{,}4^2 < 2 < 1{,}5^2$

$$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$$

У децималном запису броја $\sqrt{2}$ прва децимала је 4. то јест $\sqrt{2} = 1{,}4$ ...

Треба пронаћи другу децималу.

Трећи корак

Поступак настављамо. Интервал 1,4 до 1,5 делимо на десет једнаких делова. Рачунамо квадрат сваког од бројева: 1,41; 1,42; 1,43... 1,49; 1,5 и тражимо онај број чији је квадрат 2.

$1{,}41^2 = 1{,}9881$

$1{,}42^2 = 2{,}0164$

$1{,}43^2 = 2{,}0449$

. . .

$2^2 = 4$

Закључујемо да је $1{,}41^2 < 2 < 1{,}42^2$

$$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42,$$

У децималном запису броја $\sqrt{2}$ друга децимала је 1, то јест $\sqrt{2} = 1{,}41$ ...

Треба пронаћи трећу децималу.

Ако поступак наставимо и интервал 1,41 до 1,42 поделимо на десет једнаких делова, закључићемо да је:

$1{,}414^2 = 1{,}999396$

$1{,}415^2 = 2{,}002225$

то јест:

$1{,}414^2 < 2 < 1{,}415^2$

$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$

$\sqrt{2} = 1{,}414\ldots$

Ако бисмо наставили са овим поступком, увидели бисмо да се $\sqrt{2}$ може представити децималним записом који има неограничен број децимала, а није периодичан.

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237\ldots$ па се такав број не може написати у облику разломка.

Исто важи и за бројеве $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{7}\ldots$ као и за бројеве који су им супротни: $-\sqrt{3}, -\sqrt{5}, -\sqrt{7}$.

Такве бројеве називамо ирационалним бројевима.

Број који има неограничен број децимала, а није периодичан, назива се ирационалан број. Ирационалан број не може се записати у облику разломка. Скуп ирационалних бројева означавамо са $\mathbb{I}$**.**

3.4.2 Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$

Проширење скупа $\mathbb{Q}$ до скупа $\mathbb{R}$ дато је у лекцији „***Скуп реалних бројева***“.

Како је $\sqrt{2}$ ирационалан број, он се може записати као бесконачан децималан непериодичан број.

Корен сваког рационалног броја који није квадрат рационалног броја је ирационалан број.

На пример:

$\sqrt{1{,}5}\ \ \sqrt{2}\ \ \sqrt{3}\ \ \sqrt{5}\ \ \sqrt{5{,}8}\ \ \sqrt{6}\ \ \sqrt{7}\ \ \sqrt{8}\ \ \sqrt{10}\ \ \sqrt{11}\ \ \sqrt{12}\ \ \sqrt{13}\ldots$

Њима супротни бројеви су такође ирационални бројеви.

$$-\sqrt{2}\quad -\sqrt{3}\quad -\sqrt{5}\quad -\sqrt{6}\quad -\sqrt{7}\quad -\sqrt{8}\ldots$$

Корени квадрата природних бројева јесу природни бројеви.

На пример : $\sqrt{1} = 1\ \ \sqrt{2^2} = 2$

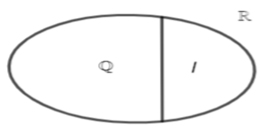
$\sqrt{3^2} = 3\ \ \sqrt{4^2} = 4\ldots$

Позитивни и негативни непериодични бесконачни децимални бројеви јесу ирационални бројеви.

На пример: 0,1020030004... -0,53445344453... итд.

Сви ови бројеви рационални и ирационални, чине скуп који називамо скуп реалних бројева.

Унија скупа рационалних и ирационалних бројева јесте скуп реалних бројева. Означавамо га са $\mathbb{R}$.



Сваком реалном броју може се придружити тачно једна тачка на бројевној правој.

Свакој тачки на бројевној правој можемо придружити тачно један реалан број.

3.5 Приказ у уџбенику са збирком задатака, БИГЗ школство [5]

3.5.1. Увод у ирационалне бројеве

Прва назнака о постојању ирационалних бројева дата је у другом делу лекције *„**Квадратни корен**“* , што је овде прво приказано, а затим лекција *„**Скуп ирационалних бројева**“*. Лекције у уџбенику су илустративно обрађене кроз конверзацију четири детета. Уместо оригиналних слика ликова дијалог ће бити назначен са „Дијалог“, а особе које разговарају обележене са А, Б, В и Г. Примери су добрим делом базирани на принципу како доћи до решења помоћу технологије, калкулатора, Геогебре, Ексела. У другом делу лекције „Квадратни корен“, Пример 4 са којим започињемо приказ, има улогу да доводе до закључка да квадратни корени неких бројева имају бесконачан број децимала које се нижу без икаквог правила.

Пример 4

Одреди дужине страница квадрата ако је мерни број његове површине једноцифрени природни број.

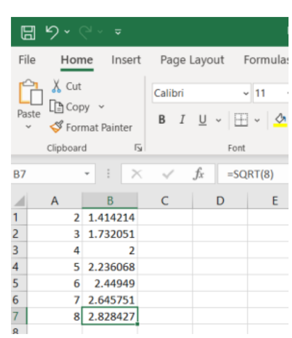
Површина квадрата	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Странице квадрата	1	?	?	2	?	?	?	?	3

Дијалог

А: „Направила сам табелу на којој су унете дужине страница и одговарајуће површине квадрата.“

Б: „Имамо проблем.“

В: „ Колике су дужине страница квадрата чије су површине редом $2\ cm^2$, $3\ cm^2$, $5\ cm^2$, $6\ cm^2$, $7\ cm^2$ и $8\ cm^2$?“



Г: „ Помоћу рачунара можемо да израчунамо квадратни корен.“

В: „Користио сам ознаку SQRT() у Екселу. Иста ознака користи се и на калкулатору.“

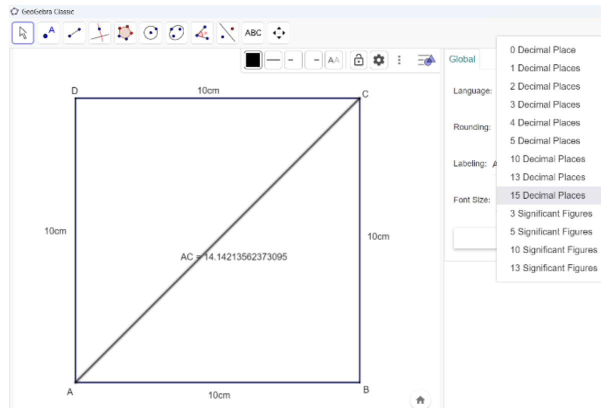
А: „Квадратни корени бројева 2, 3, 4, 5, 6, 7 и 8 имају бесконачан број децимала које се нижу без икаквог правила.“

Приказ лекције „Скуп ирационалних бројева“.

Пример 1

Конструиши квадрат странице 10cm, а затим измери дужину дијагонале тог квадрата.

Дијалог



В: „Конструисао сам квадрат ABCD користећи Геогебру и измерио дужину дијагонале AC. Мерни број дијагонале је необичан! “

Г: „Како број може да буде необичан? “

Б: „Децимале се нижу без икаквог правила.“

В: „Употребио сам опцију заокругљивања дужине дијагонале на петнаест децимала. Рачунар је измерио да је дужина дијагонале 14,142135623730953. “

Г: „Мерни број дужине дијагонала има бесконачно децимала. “

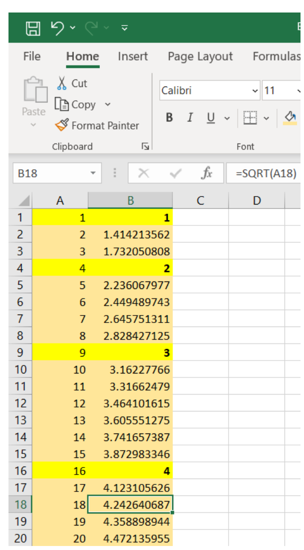
А: „Дијагонала овог квадрата не може тачно да се измери. Она је несамерљива.“

Б: „Исто се дешавало и када смо на калкулатору израчунавали колико је $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$.“

Задатак 1

Користећи Геогебру конструиши квадрат и премери дужину странице и дијагонале.

Дијалог



Б: „Пронашао сам да поред природних, целих и рационалних бројева постоје и ирационални, реални и комплексни бројеви. “

В: „Ако је мерни број дужине странице квадрата рационалан, онда мерни број дијагонале има бесконачно децимала. “

Г: „Не постоји јединица мере којом можемо тачно да премеримо дужину странице и дужину дијагонале квадрата. “

А: „Квадратни корен позитивног рационалног броја није увек рационалан број. Можда је ирационалан? “

В: „Квадратни корени свих природних бројева који нису потпуни квадрати су **ирационални бројеви**.“

А: „Скуп ирационалних бројева обележава се великом латиничним словом I . “

ЈЕЗИЧКЕ НАПОМЕНЕ

Реч ирационалан у преводу са старогрчког значи нелогичан или неразуман. Стари Грци су веровали да сваки број може да се запише у облику разломка. Бројеви који не могу да се запишу у облику разломка за њих су били „неразумни“ .

Пример 2

Докажи да је $\sqrt{2}$ ирационалан број.

Дијалог

В: „Треба доказати да $\sqrt{2}$ не може да се запише као разломак. Предлажем да покушамо супротно, а затим видимо шта ће се десити.“

А: „Ако је $\sqrt{2}$ рационалан број, онда можемо да га запишемо као количник два узајамно проста броја.“

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \ /^2 \text{ и НЗД}(a, b) = 1$$

Г: „Кад квадрирамо обе стране једнакости, добијамо да је a^2 паран број. “

Б: „Ако је a^2 паран број, онда је и број a паран број. “

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \ /^2 \text{ и НЗД}(a, b) = 1$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2}$$

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$

В: „ Паран број a можемо да запишемо као производ броја 2 и неког природног број x. “

А: „Онда је b^2паран број, па је и број b паран број. Почетна претпоставка да су бројеви a и b узајамно прости није могућа, јер су као парни бројеви оба дељива са 2. “

$$a^2 = 2 \cdot b^2$$
$$(2 \cdot x)^2 = 2 \cdot b^2 \quad a = 2x$$
$$4 \cdot x^2 = 2 \cdot b^2$$
$$2 \cdot x^2 = b^2$$

Пример 3

Одреди дужину дијагонале квадрата површине 4 cm^2.

Дијалог

Г: „Дужина странице датог квадрата је 2 cm. “

В: „Пажљиво прочитај задатак. Потребно је одредити дужину дијагонале, а не странице квадрата. “

Б: „Површину квадрата можемо да одредимо уколико је позната дужина дијагонале. “

А: „Искористимо формулу за површину квадрат а и одредимо дужину дијагонале. “

А: „Корен броја осам је ирационалан број. “

$$\frac{d^2}{2} = 4 \,/\cdot 2$$
$$d^2 = 2 \cdot 4$$
$$d = \sqrt{8}$$
$$d = 2{,}828427\ldots$$

3.5.2 Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$

Лекција под називом ***„Скуп реалних бројева“*** уводи скуп реалних бројева хроналошким подсећањем од $\mathbb{N}$ до $\mathbb{Q}$, а затим за све поменуте ирационалне бројеве наводи да припадају скупу $\mathbb{I}$. Затим је дат Пример 1 који је приказан.

Пример 1:

Одреди којим скуповима припадају дати бројеви -3, 12, $\frac{3}{7}, \sqrt{2}$

Г: „Дванаест је природан број“

Б: „Минус три и дванаест су цели бројеви. Сви природни бројеви су цели.“

$\mathbb{N}$- природни бројеви	$\mathbb{Z}$- цели бројеви
$12 \in \mathbb{N}$	$-3 \in \mathbb{Z}$
	$12 \in \mathbb{Z}$
	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

В: „Рационални бројеви су минус три, дванаест и три седмине. Сви цели бројеви су рационални.“

А: „Корен броја два је ирационалан број. Не постоји број који је и рационалан и ирационалан. “

Б: „Скуп реалних бројева чине сви рационални и ирационални бројеви“

$\mathbb{Q}$- рационални бројеви	$\mathbb{I}$- ирационални бројеви
$\frac{3}{7} \in \mathbb{Q}$	$\sqrt{2} = 1{,}4142135 \ldots \in \mathbb{I}$
$-3 \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \not\subset \mathbb{I}$
$12 \in \mathbb{Q}$	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$	

Б: „Сви дати бројеви припадају скупу реалних бројева.“

А: „Скуп реалних бројева ($\mathbb{R}$) чине скупови рационалних ($\mathbb{Q}$) и ирационалних ($\mathbb{I}$) бројева.“

$\mathbb{R}$-реални бројеви	
$\frac{3}{7} \in \mathbb{R}$	$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$
$-3 \in \mathbb{R}$	$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$
$12 \in \mathbb{R}$	
$\sqrt{2} \in \mathbb{R}$	

Пример 2:

На бројевној правој представи бројеве 2, $-2\frac{1}{2}$ *и* $\sqrt{2}$.

Б: „Рационалне бројеве знамо да представимо на бројевној правој, али како да представимо корен броја два?“

А: „Корен броја 2 има бесконачно децимала. Имамо проблем.“

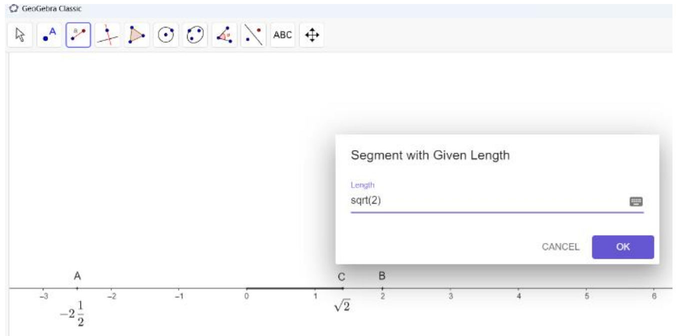
В: „Кад имаш проблем технологија може да помогне.“

Г: „Баш ме интересује шта си смислио.“

В: „Конструисао сам дуж чија је дужина корен броја два, написао сам sqrt (2).“

Б: „Сваком реалном броју одговара једна тачка бројевне праве.“

А: „Свакој тачки бројевне праве одговара тачно један реалан број.“



4. ОПАЖАЊА

4.1 Уџбеник [1], издавачке куће Клет

Мотив за одабир уџбеника [1], издавачке куће Клет, нашао се у широкој примени у школама, по личним сазнањима. До заступљености је можда дошло због збирке у комплету са уџбеником која садржи мноштво задатака за вежбу.

У овом уџбенику наслови: *„Једначине облика $x^2 = r,\ r > 0$ које немају решења у скупу $\mathbb{Q}$“* и *„Скуп реалних бројева и бројевна права“.* не откривају да се уводе, до тада непознати, ирационални бројеви. Лекције су урађене тако да се до појма ирационалан број долази тек на крају, после низа навођења тврђења и примера, већином датих са доказом. Уз Тврђење 3.1.1.1 дато је два начина доказивања, што код осталих издавача није случај. Ученик се наводи да полако закључује како скуп рационалних бројева није довољан за решење једначине $x^2 = r,\ r > 0$, те можда да наслути да постоје бројеви и ван тог скупа, а да то у том делу лекције није експлицитно наглашено. Све ово поспешује аналитичко размишљање код ученика, али је за разумевање ових лекција ипак потребно добро математичко сналажење у погледу доказивања примера или теорема.

До ове лекције није уведен појам квадратног корена, ипак то је лепо сиситематизовано шемом (на страни 18. у овом раду) какво решење може да има једначина $x^2 = r,\ r > 0$.

Прво је показано да у скупу рационалних бројева не постоји решење једначине $x^2 = 2$, а тек после тога је је показано да такав број ипак мора постојати јер је то дужина дијагонале јединичног квадрата.

Одређивањем дужине дијагонале јединичног квадрата, уједно је дат поступак одређивања децималног записа ирационалног броја као и порука да постоји број који није рационалан, што је показано у Примеру 4, па његов децималан запис не може бити коначан или бесконачан а периодичан. Те се ирационални бројеви уводе из потребе да се запише мерни број дужине дужи који није рационалан, а као број који је у децималном запису бесконачан и није периодичан.

Ирационални бројеви су дефинисани као реални који нису рационални. Дата је и шема поделе рационалних и ирационалних према децималном запису.

Теореме и примери су темељно објашњени или доказани што је стимулативно за децу са добрим предзнањем и разумевањем. Док је сажет приказ градива, дат шематски на крају лекције, прилагођен за сваки ниво предзнања.

4.2 Уџбеник [2], издавачке куће Завод за уџбенике из 1987.

У уџбенику [2] , издавачке куће Завод за уџбенике из 1987. године, приступ је другачији него у уџбенику [1], почевши од наслова „*Решење једначине* $x^2 = a, (a \geq 0)$. *Квадратни корен, Ирационалан број.*“ која открива нови појам ирационалног броја, па до мотивације за увођење ирационалних бројева.

Квадратни корен је обрађен раније, те се решење једначине у Примеру 4, $x^2 = 2$, обележава са $\sqrt{2}$, где је 2 површина квадрата, а затим се проверава да ли је тај број рационалан. За разлику од уџбеника [1], прво је показано да решење те једначине постоји јер је то дужина странице квадрата, а затим да тај број није рационалан. Теорема 3.2.1.1 је доказана на један начин, који одговара *Другом начину* из уџбеника [1]. Скуп рационалних бројева се проширује новим елементима како би се решио проблем решавања једначине $x^2 = a, (a \geq 0)$, а као уопштено решење ове једначине наводи се $\{\sqrt{a}, -\sqrt{a}\}$. Након тога се доказује Теорема 3.2.2.1, где се осим бројева као што су $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{17}$, ирационалним именују и сви бројеви облика $r + \sqrt{2}, (r \in \mathbb{Q})$. Ова теорема није наведена у осталим овде поменутим уџбеницима. После објашњења како изгледа децимални запис ирационалног броја, одређује се децимални развитак броја $\sqrt{5}$, на чијем примеру се формира низ уметнутих интервала чије се дужине стално смањују и теже нули, то јест садрже једну једину тачку коју придружујемо броју $\sqrt{5}$. Да ово важи, и то за сваки ирационалан број, аутори се позивају на аксиому еуклидске геометрије, што је можда превише апстрактно за већину ученика, али и прилика за радознале да самосталним претраживањем стекну појам о аксиомама. Лекције су текстуално обрађене на разумљив начин, док шема, табела и слика (изузев једне), скоро и да нема.

4.3 Уџбеник [3], издавачке куће Завод за уџбенике из 2009.

Уџбеник [3] , издавачке куће Завод за уџбенике из 2009. године је одабран највише због тога да би се упоредио начин обраде лекције у односу на уџбеник [2], где је више од 20 година разлика између година издавања, од стране исте издавачке куће, а различитих аутора.

Лекција започиње следећим питањима „Да ли се, при изабраној јединици мере за дужину, *свакој* дужи може придружити њен мерни број? Да ли нам позитивни рационални бројеви то обезбеђују?“. Ова питања на почетку лекције на јасан начин упућују децу у ком правцу да размишљају током читања, шта је главни фокус. Као и у уџбенику [2], прво је објашњено да решење једначине $x^2 = 2$ постоји, а затим да то није рационалан број. Пример 1 и Пример 2 заједно чине целину која са геометријског аспекта показује да постоји број чији је квадрат 2. Мада је као и у уџбенику [2] квадратни корен претходно обрађен, није биран исти геометријски пример, већ други где се квадратни корен не користи. Пример 2 је решен без детаљног описа како је квадрат тражене површине настао, без навођења ставова подударност за посматране троуглове, дакле, без залажења у детаље доказа, вероватно због обимности самог доказа. Пример 3 даје доказ да рационалан број чији је квадрат једнак 2 не постоји, доказан је на један начин, као у уџбенику [2], уз разлику што је наглашено да број чији је квадрат једнак 2 може бити $\frac{m}{n}$ и $-\frac{m}{n}$, где један од та два мора бити позитиван и тај се касније у доказу и посматра, док је у уџбенику [2] одмах употребљен рационалан број $\frac{p}{q}$, где су p и q узајамно прости природни бројеви. Ирационални бројеви су уведени као они бројеви који нису рационални, а такви очигледно постоје према Примеру 2 и Примеру 3, док је скуп реалних бројева проширен скуп, чине га обједињени рационални и ирационални бројеви. Објашњења су текстуална без шема или графичких приказа скупова.

Начин обраде додељивања тачке бројевне праве ирационалном броју није урађен аксиоматски као у уџбенику [2] , већ је геометријски као у уџбеницима [1] и[4]. Како се ирационални бројеви представљају на бројевној правој дато је у Примеру 4, где се помоћу кружнице полупречника дужине дијагонале јединичног квадрата за изабрану јединичну дуж приказује како на позитивном делу бројевне полуправе наћи дужину дужи чији је мерни број једнак $\sqrt{2}$.

Што се тиче децималног записа ирационалног броја и поступка одређивања његових цифара, обрађено је у некој од наредних лекција, и као што је у 3.3.2 поменуто, то није приказано у овом раду јер је увођење ирационалних бројева и проширење скупа рационалних бројева већ завршено.

Приступи у уџбенику [2] и [3] се разликују по одабиру примера и доказа, по томе што се у [2] користи квадратни корен за увођење ирационалних бројева, док се у [3] не користи, осим у обради децималног записа реалног броја.

4.4 Уџбеник [4], издавачке куће Креативни центар

Уџбеник [4] издавачке куће Креативни центар, уводи ирационалне бројеве лекцијом „Појам ирационалног броја $\sqrt{2}$" , где је кроз само један пример показано зашто број $\sqrt{2}$ постоји, како се одређу првих пар цифара у децималном запису тог броја, како тај број пронаћи на бројевној правој и дефинишу се ирационални бројеви преко особина децималног записа. Лекција започиње примером који садржи четири питања, а дат је одговор само на треће питање, и тај одговор је без образложења. Питања нису захтевна, но одговор на друго питање није ни тривијалан, али је посматрањем слике лако уочљив.

Дужина странице квадрата чија је површина 2cm^2, одређује се кореновањем, тако се долази до броја $\sqrt{2}$. Тражење броја чији је квадрат једнак броју 2 своди се на исти поступак као у уџбеницима [1], [2], [3]. Да је $\sqrt{2}$ ирационалан број не доказује се као у [1], [2], [3], већ се закључује на основу децималног записа, то јест да се такав број не може записати као разломак, па није рационалан и именује се ирационалним.

Проширење скупа $\mathbb{Q}$ у скуп $\mathbb{R}$ дато је у лекцији „Скуп реалних бројева", навођењем примера ирационалних бројева и графичким приказом скупа реалних као уније скупова рационалних и ирационалних бројева.

Обе лекције су обрађене без навођења теорема и доказа што у уџбеницима [1], [2] и [3] није случај. Градиво је пропраћено одговарајућим цртежима који олакшавају разумевање, лекције концизно и јасно предочавају чињенице. Такав сажет приступ олакшава памћење кључних термина, мада не оставља пуно простора да ученике наводи на одговоре.

4.5 Уџбеник [5], издавачке куће БИГЗ

Уџбеник [5], издавачке куће БИГЗ, се по начину обраде лекција највише разликује у односу на до сада поменуте уџбенике. Приступ је окренут ка технологији. Уџбеник личи на сликовницу, ликови у илустрацији су деца која кроз конверзацију долазе до математичких закључака уз помоћ технологије.

У првом обрађеном примеру, Примеру 4, за задату површину квадрата одређује се дужина странице квадрата, том приликом ликови из илустрације користе Ексел и на тај начин долазе до закључка да квадратни корени неких бројева имају бесконачно много децимала. Ово је случај и у скоро свим осталим примерима и задацима, технологија даје одговор, често израчунавањем, и то се усваја као да је доказано. Ликови на основу податка које добијају на калкулатору, или рачунару, дискутују и проналазе одговре на питања. Што може да заинтересује ученике и олакша учење. Уз то су кроз дијалог дате инструкције како одређену операцију користити у неком од програма. Све што је урађено у Геогебри или Екселу, дато је и у виду фотографије на којој је приказан завршни резултат.

У Примеру 1 и Задатку 1, лекције „Скуп ирационалних бројева“, помоћу Геогебре конструисан је квадрат и одређена је дужина дијагонале. Уочивши да програм показује да дијагонала има бесконачно много децимала које се нижу без икаквог правила, ликови из илустрације на интернету проналазе да бројеви могу бити и ирационални и комплексни. Што даје пример како користити интернет у учењу. У Примеру 2 доказује се да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, као у уџбеницима [1], [2] и [3].

Представљање ирационалних бројева на бројевној правој, као конструкција дужи чија је дужина ирационалан број, урађено је помоћу Геогебре. Док је у осталим уџбеницима дато да броју $\sqrt{2}$ можемо пронаћи јединствену координату на бројевној правој као пресек бројевне праве и кружнице полупречника дијагонале јединичног квадрата, овде је то прескочено. Ово није недостатак јер је у делу где се обрађује примена Питагорине теореме, у овом уџбенику као и у осталим поменутим, обрађена конструкција тачака на бројевној правој које одговарају ирационалним бројевима.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Икодиновић , С. Димитријевић: Математика 7, Уџбеник за седми разред основне школе, „Klett“, Београд, 2020.

[2] С. Милић, Б. Јевремовић, М. Игњатовић: Математика за седми разред основне школе, Завод за уџбенике, Београд, 2004.

[3] В. Андрић, Ђ. Дугошија, В. Јоцковић, В. Мићић: Математика за седми разред основне школе, Завод за уџбенике, Београд, 2009.

[4] М. Стојсављевић-Радовановић, Љ. Вуковић, З. Јончић: Математика 7, Уџбеник за седми разред основне школе, Креативни центар, Београд, 2020.

[5] И. Анић, Р. Кошанин, Ј. Савковић: Математика 7, Уџбеник са збирком задатака, први и други део, БИГЗ школство, 2020.

[6] https://sh.wikipedia.org/wiki/Pitagorina_teorema, приступљено 23.8.2024.

[7] https://sh.wikipedia.org/wiki/Iracionalni_broj , приступљено 23.8.2024.

[8] https://www.math10.com/sr/algebra/brojevi.html , приступљено 23.8.2024.

[9] Миомир Антић: О ирационалним бројевима, Бања Лука, 2016.

[10] Бранимир Шешеља и Андреја Тепавчевић: Алгебра 2, теорија и задаци, „Symbol“ Нови Сад, 2011.

[11] *Elisha Scott Loomis: The Pythagorean Proposition, 1940.*

[12] *David Eugene Smith: History of Mathematics, 1925.*

[13] *Eli Moar: The Pythagorean Theorem- A 4000 Year History, 2007.*