Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Katarina Milićev

Ekstremalna teorija grafova i Turánova teorema

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

dr Goran Đanković

vanredni profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Članovi komisije:

dr Marko Radovanović

vanredni profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

dr Slavko Moconja

vanredni profesor, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

Beograd, 2024.

SADRŽAJ

„Dok jedna grana nauke nudi obilje problema, dotle je ona živa.“

Ovo je rekao David Hilbert[1] u svom obraćanju na međunarodnom kongresu matematičara u Parizu 1900.godine.

Po ovom kriterijumu teorija grafova gotovo sigurno ne može biti življa.

[1] David Hilbert(1862-1943)-nemački matematičar

PREDGOVOR

U ovom master radu opredelili smo se za izučavanje grafova koji se ističu po nekom posebnom kriterijumu ili karakteristici, odnosno poseduju neobične osobine. Oni su interesantni jer ćemo se baviti pronalaženjem maksimalnog broja ivica u grafu sa određenom osobinom ili ograničenjem i zbog toga su ti grafovi ekstremni, u smislu maksimalne iskorišćenosti prostora za ivice unutar zadatih ograničenja.

Prva glava ovog rada je uvodnog karaktera u kojoj ćemo ukratko definisati pojam ekstremalne kombinatorike i ekstremalne teorije grafova i veze između ovih disciplina.

U drugoj glavi je dat pregled oznaka i osnovnih pojmova koje ćemo koristiti dalje u radu. S obzirom na to da ćemo se baviti teoremama ekstremalne teorije grafova, radi podsećanja, navedene su odgovarajuće definicije i teoreme teorije grafova.

Treća glava je posvećena isključivo bipartitnim grafovima. U ovoj glavi, najpre je predstavljen pojam bojenja čvorova, a završava se Mantelevom teoremom koja je veoma bitna u proučavanju ekstremalnih svojstava grafova.

U četvrtoj glavi se bavimo generalizacijom ove ideje na proizvoljno velike kompletne grafove,tj. grafovima koji ne sadrže kompletan podgraf sa fiksnim brojem čvorova. Najpre ćemo definisati pojam k-hromatskog grafa, a zatim ćemo dokazati Turánovu teoremu i navesti njenu primenu u kombinatornoj geometriji.

U petoj glavi ćemo posmatrati šta se dešava sa grafovima koji ne sadrže neke određene podgrafove i kako hromatski broj utiče na maksimalan broj ivica u grafu koji ne sadrži određen podgraf.

Šesta glava ovog rada posvećena je odabranim zadacima.

U sedmoj glavi, u zaključku rada, sumiraćemo ključne nalaze i rezultate, ističući značaj Turánove teoreme i njenih primena, kao i moguće pravce za buduća istraživanja u ovoj oblasti.

1 UVOD

1.1 Veza između ekstremalne kombinatorike i ekstremalne teorije grafova

Kombinatorika je grana matematike koja proučava diskretne strukture i kombinatorne objekte kao što su skupovi, permutacije, kombinacije i grafovi. Bavi se enumeracijom, rasporedom i analizom kombinatornih objekata, kao i proučavanjem njihovih osobina i relacija.

Teorija grafova je danas, možda, najrazvijeniji i najvažniji deo kombinatorike. Ona je neverovatno koristan alat za razumevanje savremenog sveta. Ovo područje proučavanja obično je obuhvaćeno širom oblasti kombinatorike, ali poseduje mnogo specifičnih karakteristika koje je čine izuzetno korisnom. Sa sve većom povezanošću sveta i dostupnošću podataka, teorija grafova postala je ključan okvir za razumevanje kompleksnosti modernog društva.

Graf je matematička struktura koja opisuje veze između objekata i sastoji se od čvorova i ivica (grana). Grafovi se mogu koristiti za modeliranje različitih vrsta veza i procesa u fizičkim, biološkim, socijalnim i informacionim sistemima. Tako, na primer, grafom možemo predstaviti prijateljstva u skupu ljudi (čvorovi su ljudi, a ivice prijateljstva), saobraćajne veze između gradova (čvorovi su gradovi, a ivice su putevi), hemijska jedinjenja (čvorovi su atomi, a ivice su veze između njih), itd.

Ekstremalna kombinatorika se bavi ekstremalnim problemima, tj. problemima koji se odnose na maksimalne ili minimalne strukture pod određenim ograničenjima.

Ekstremalna teorija grafova predstavlja spoj teorije grafova i ekstremalne kombinatorike, fokusirajući se na ekstremalne probleme u vezi sa grafovima poput maksimalnog broja ivica u grafu koji ne sadrži određene lokalne strukture, ili minimalnog broja ivica potrebnog da bi graf sadržao određene podgrafove.

1.2 Prve ideje o ekstremalnoj teoriji grafova

Globalne karakteristike grafa poput gustine ivica ili hromatskog broja, mogu imati značajan uticaj na prisustvo određenih lokalnih struktura u grafu.

Jedan od prvih značajnih trenutaka u razvoju ekstremalne teorije grafova dogodio se 1907. godine, kada je Wilhelm Mantel[2] dokazao teoremu koja daje preciznu gornju granicu za broj ivica koje graf može imati, a da ne sadrži trougao kao podgraf.

Zatim je 1941. godine mađarski matematičar Paul Turán formulisao i dokazao svoju čuvenu teoremu koja daje gornju granicu za broj ivica koje graf može imati, a da ne sadrži K_{r+1} kao podgraf. Ova teorema je postala osnova ekstremalne teorije grafova i otvorila je put za mnoga istraživanja u ovoj oblasti.

[2] Willem Mantel(1835-1860)-holandski matematičar

Nakon Turánovog rada, ekstremalna teorija grafova je nastavila da se razvija. Paul Erdös[3] i drugi matematičari su kasnije generalizovali i proširili ovaj rezultat na druge vrste grafova i postavili dodatna pitanja o strukturi grafova bez određenih podgrafova.

1.3 Paul Turán

Jedan od značajnih matematičara čiji je rad imao dubok uticaj na razvoj mnogih grana matematike, uključujući teoriju grafova, bio je Paul Turán. Rođen je 18. avgusta 1910. godine u Budimpešti, Mađarska, a preminuo je 26. septembra 1976. godine. Potiče iz jevrejske porodice koja je morala da preživi izuzetno teška vremena, trpeći diskriminaciju i zatim nasilni antisemitizam. Još u srednjoj školi, Paul je bio izuzetan učenik pokazujući već tada izvanredne matematičke sposobnosti.

Njegove ideje i rezultati su duboko uticali na razvoj teorije grafova. Iako je njegova glavna oblast rada bila teorija brojeva, njegove metode i pristupi su pronašli primenu i u teoriji grafova.

Paul Turán je bio i ostaje jedan od najvažnijih matematičara svog vremena, a njegovo nasleđe nastavlja da živi kroz radove matematičara koji su inspirisani njegovim doprinosom.

Paul Turán

[3] Paul Erdös (1913-1996)-mađarski matematičar

2 Elementi teorije grafova

2.1 Definicije osnovnih pojmova

Ovo poglavlje nas upoznaje sa oznakama, osnovnim pojmovima i ključnim rezultatima teorije grafova koje ćemo koristiti dalje u radu.

Definicija 2.1.1. *Graf* G je uređeni par $(V(G), E(G))$, gde je $V(G)$ konačan neprazan skup elemenata koji nazivamo *čvorovima*, dok je $E(G)$ konačan skup neuređenih parova elemenata iz $V(G)$ koje nazivamo *ivice (grane).*

Broj čvorova ćemo označavati sa n, a broj ivica sa m.
Ukoliko je ivica određena čvorovima u i v tada umesto (u, v) možemo pisati uv ili samo e, gde je $e = (u, v)$.
Za granu e kažemo još i da je e *incidentno* sa u i v.

Definicija 2.1.2. Ivice koje spajaju isti par čvorova se nazivaju *paralelne* ivice. Ivica koja spaja čvor sa samim sobom se naziva *petlja*.

Definicija 2.1.3. Ukoliko u grafu G nema paralelnih ivica, niti petlji, njega zovemo *prost* graf. *Multigraf* je graf u kome mogu postojati paralelne ivice ili petlje.

U ovom radu ćemo se uglavnom baviti prostim grafovima.

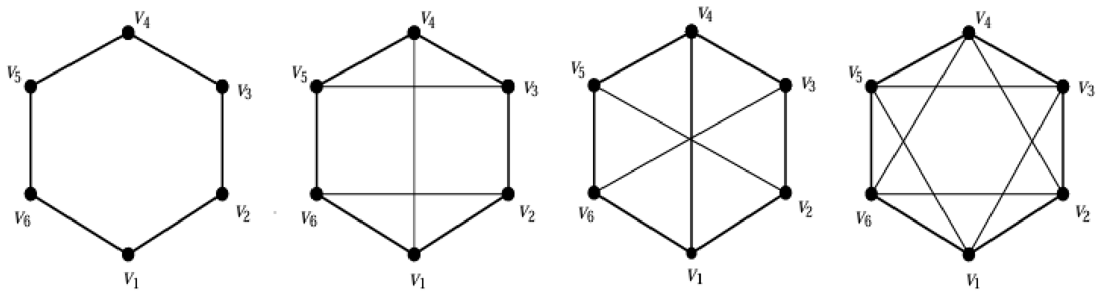
Definicija 2.1.4. Dva čvora koja su povezana ivicom nazivamo *susednim* čvorovima. Ukoliko nisu povezani ivicom, oni se smatraju *nesusednim* čvorovima. Skup svih suseda čvora $v \in V(G)$ označavamo sa $N_G(v)$ i pišemo $N_G(v) = \{u \in V(G): uv \in E(G)\}$.

Definicija 2.1.5. *Stepen čvora* $v \in V(G)$ je broj suseda tog čvora u grafu G, što označavamo sa $d_G(v) = \left|N_G(v)\right|$. *Minimalan stepen čvorova* označavamo sa $\delta(G)$, a *maksimalan stepen čvorova* sa $\Delta(G)$ i zapisujemo na sledeći način:

$$\delta(G) = min_{v \in V(G)} d_G(v) \ i \ \Delta(G) = max_{v \in V(G)} d_G(v).$$

Definicija 2.1.6. Ukoliko svi čvorovi grafa imaju isti stepen, tada graf nazivamo *regularnim grafom.*
Specijalno, ako je stepen svakog čvora jednak k, tada je graf *k-regularan.*
U regularnim grafovima važi:

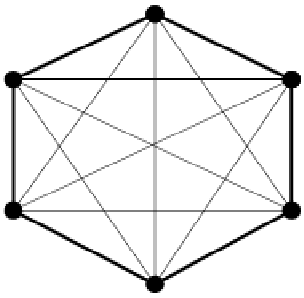
$$\delta(G) = \Delta(G).$$



2-regularan graf 3-regularan graf 3-regularan graf 4-regularan graf

Slika 2.1: Regularni grafovi

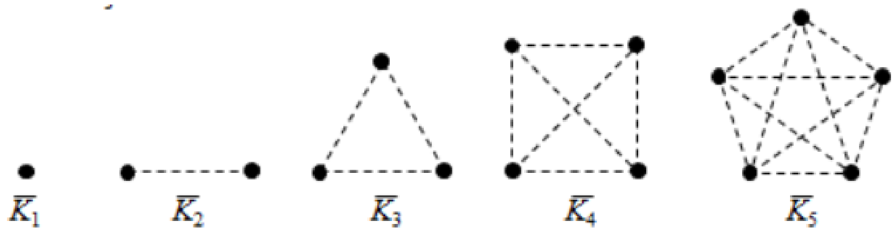
Definicija 2.1.7. Graf G nazivamo *kompletan graf* ako svaka dva čvora imaju ivicu između njih. Takav graf sa n čvorova ima $\binom{n}{2}$ ivica. Označava sa se K_n.



Slika 2.2: Kompletan graf K_6

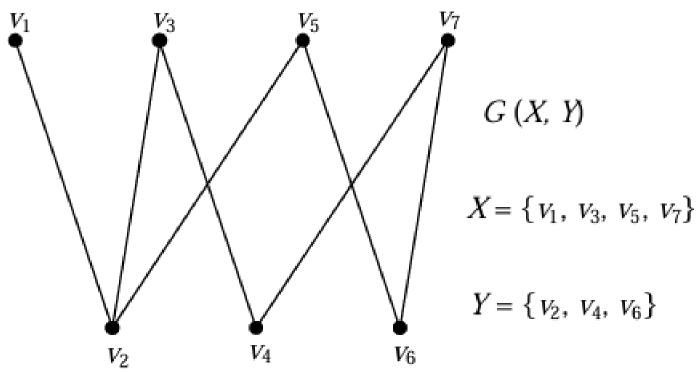
Definicija 2.1.8. *Komplement grafa* G je graf $\overline{G}$ koji ima isti skup čvorova kao i graf G, a ivice su definisane na sledeći način: za svaka dva čvora u grafu G, čvorovi u komplementu grafa su susedni ako i samo ako nisu susedni u grafu G.

Definicija 2.1.9. Graf u kojem nikoja dva čvora nisu povezana naziva se *prazan graf*.



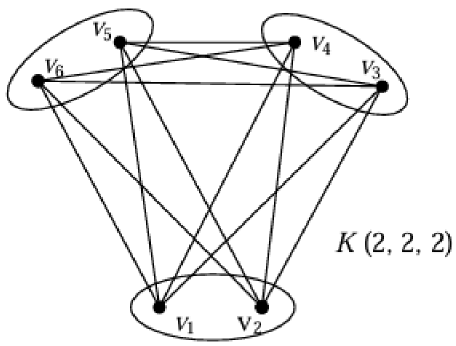
Slika 2.3: Prazni grafovi

Definicija 2.1.10. *k-partitan graf* $G(X_1, X_2, ..., X_k)$ je graf u kom čvorove delimo u k disjunktnih klasa $X_1, X_2, ..., X_k$ gde ivice povezuju isključivo čvorove iz različitih klasa. *Bipartitan graf* je vrsta k-partitnog grafa kod kojeg je skup čvorova podeljen u dve disjunktne klase.
Dakle, ako se čvorovi grafa G mogu podeliti na dva neprazna skupa tako da nijedna ivica ne spaja dva čvora u istom skupu, onda je G *bipartitan graf.*



Slika 2.4: Bipartitan graf

Definicija 2.1.11. *Kompletan k-partitan graf* $K(n_1, n_2, ..., n_k)$ je k-partitan graf $G\left(X_1, X_2, ..., X_k\right)$, $\left|X_i\right| = n_i$, u kojem između svaka dva čvora iz različitih klasa postoji ivica.

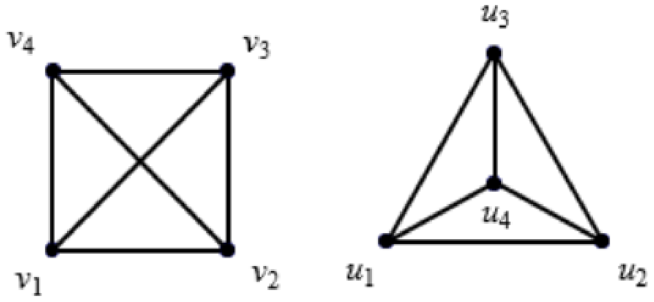


Slika 2.5: Kompletan 3-partitan graf

Definicija 2.1.12: Grafovi G_1 i G_2 su *izomorfni*, što se označava sa $G_1 \cong G_2$, ako postoji bijekcija $f: V(G_1) \rightarrow V(G_2)$ koja očuvava relaciju incidencije, tj. ako važi:

$$uv \in E\left(G_1\right) \ ako\ i\ samo\ ako\ f(u)f(v) \in E(G_2)$$

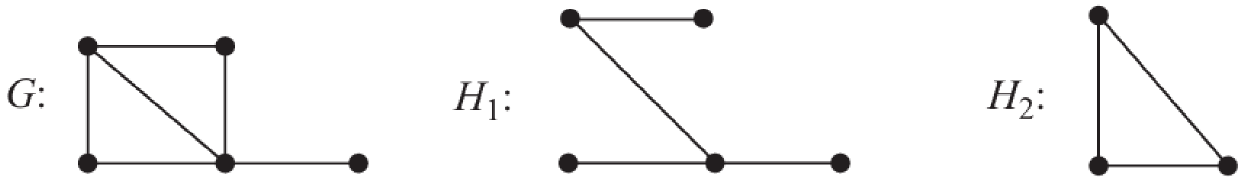
Preslikavanje f zove se *izomorfizam*. Tako su grafovi G_1 i G_2 (slika 2.6) izomorfni jer je f: (v_1, v_2, v_3, v_4)→(u_1, u_2, u_3, u_4) izomorfizam.



Slika 2.6: Izomorfni grafovi

Definicija 2.1.13. Ako su G i H grafovi za koje važi $V(H)⊆V(G)$ i $E(H)⊆E(G)$, tada je H *podgraf* grafa G.
Ako, štaviše, $V(H) = V(G)$, tada je H *prekrivajući podgraf.*
Na slici 2.7. je prikazan prekrivajući podgraf H_1 grafa G.

Definicija 2.1.14. Neka je V' neprazan podskup od $V(G)$. Podgraf grafa G čiji je skup čvorova V' i čiji skup ivica čine sve ivice iz G čija su oba kraja u V', nazivamo *podgraf indukovan skupom čvorova* V' i označavamo sa $G[V']$.
Analogno, ako je E' podskup od $E(G)$, podgraf grafa G čiji skup čvorova čine krajevi svih ivica iz E' i čiji je skup ivica E', nazivamo *podgraf indukovan skupom ivica* E' i označavamo sa $G[E']$.
Na slici 2.7. je prikazan indukovani podgraf H_2 grafa G.



Slika 2.7: Prekrivajući i indukovani podgraf grafa G

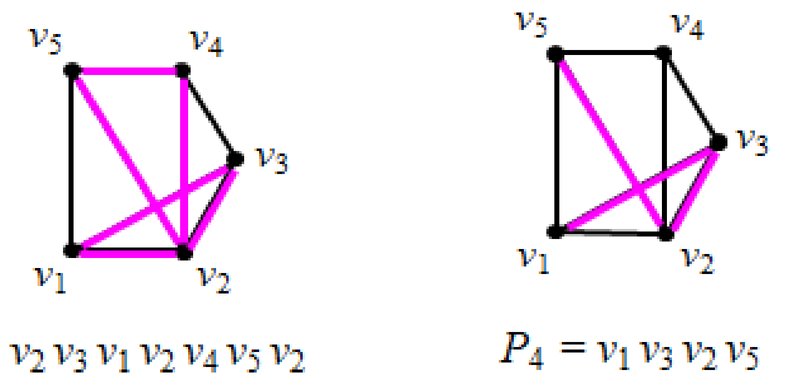
Napomena: U širem smislu, pojam podgrafa se koristi kada graf G sadrži podgraf koji je *izomorfan* grafu H. Tada takođe kažemo da je H podgraf od G.

Definicija 2.1.15: *Šetnja* u grafu G je konačan neprazan niz $W = v_0e_1v_1e_2v_2 \dots e_kv_k$ u kojem se alternativno smenjuju čvorovi i ivice iz G, pri čemu su čvorovi v_{i-1} i v_i krajevi grane e_i za svako $1 \le i \le k$. U šetnji se i čvorovi i grane mogu ponavljati. Čvor v_0 je početni, a čvor v_k krajnji čvor šetnje W. Šetnja sa početnim čvorom v_0 i krajnjim čvorom v_k zove se $(v_0 - v_k)$ -šetnja i kaže se da spaja čvorove v_0 i v_k. Broj k je dužina šetnje W i predstavlja broj grana u W.
Kod prostih grafova šetnja je jednoznačno određena nizom čvorova.

Tako je $W = v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1} v_k$ šetnja, gde je $v_{i-1} v_i$ grana u G za svako $1 \leq i \leq k$.

Definicija 2.1.16: *Staza* je šetnja u kojoj su sve grane različite, a čvorovi se mogu ponavljati. Pojmovi $\left(v_0 - v_k\right)$-staza i dužina staze se definišu slično kao za šetnju.

Definicija 2.1.17: *Put* je staza u kojoj su svi čvorovi, a prema tome i grane, svi različiti. Pojmovi $\left(v_0 - v_k\right)$-put i dužina puta se definišu slično kao za šetnju. Put dužine $k - 1$ označava se sa P_k.

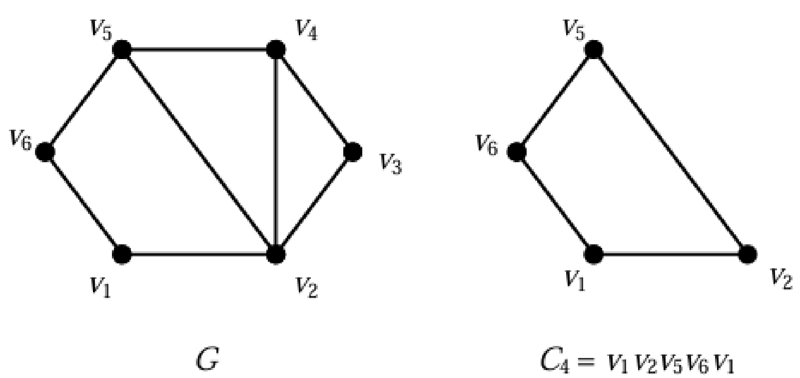


Slika 2.8: Staza i put

Definicija 2.1.18: Dva čvora u i v grafa G su *povezana* ako postoji $(u - v)$-put u G. Povezanost čvorova je relacija ekvivalencije na skupu $V(G)$. Klase ekvivalencije indukuju *komponente povezanosti* ili kratko *komponente* grafa G.
Graf je *povezan* ako ima tačno jednu komponentu.

Definicija 2.1.19: Ako se početni i završni čvor šetnje, staze ili puta poklapaju imamo zatvorenu šetnju, zatvorenu stazu, odnosno *konturu*. Graf koji nema kontura je acikličan. Kontura je parna, odnosno neparna ukoliko je parne, odnosno neparne dužine. Kontura dužine k zove se k-kontura i označava sa C_k.

Na slici 2.9. je prikazana kontura C_4 u grafu G.



Slika 2.9.

Definicija 2.1.20: Uklanjanje čvora $v \in V(G)$ iz grafa G vrši se tako što se čvor v odstrani iz G i sve ivice koje su sa njim incidentne. Označavamo ga sa $G - v$.
Ako umesto jednog čvora uklanjamo skup čvorova $V' \subseteq V(G)$, onda iz grafa odstranimo sve čvorove iz skupa V' kao i sve ivice koje su incidentne sa bar jednim čvorom iz V', i takav graf označavamo sa $G - V'$ i on je prema definiciji 2.1.14 indukovan podgraf G[$V(G - V')$].

Definicija 2.1.21: Uklanjanje ivice $e \in E(G)$ iz grafa G vrši se tako što se iz G ukloni ivica e, a njeni krajevi ostaju u skupu čvorova grafa G. Označavamo ga sa $G - e$.

Lema 2.1.1. (Lema o rukovanju): Zbir stepena čvorova grafa jednak je dvostrukom broju ivica.

Dokaz: Neka je uv proizvoljna ivica grafa G. Ona doprinosi sumi stepena čvorova dva puta, jednom za u i jednom za v. Pošto to važi za svaku ivicu imamo:

$$\sum_{u \in V(G)} d(u) = 2|E(G)|.$$

Posledica: Broj čvorova neparnog stepena je u svakom grafu paran.

2.2 Pojam bojenja čvorova

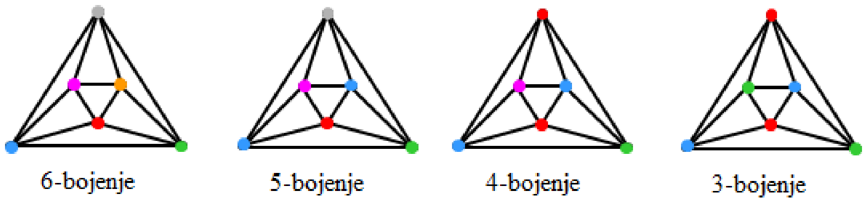
Uvodimo pojam bojenja čvorova koji će biti korišćen za analizu strukture grafova i njihovih svojstava.

Definicija 2.2.1. Bojenje čvorova grafa G je dodeljivanje po jedne boje svakom čvoru grafa G, odnosno to je preslikavanje $f: V(G) \longrightarrow Z$, gde je $Z = \{z_1, z_2, ..., z_k\}$ skup boja.

Definicija 2.2.2. *Pravilno bojenje čvorova* grafa G je pridruživanje boja čvorovima grafa G, tako da su susednim čvorovima pridružene različite boje, tj.

$$\text{ako } uv \in E(G) \text{ tada je } f(u) \neq f(v).$$

Bojenje u kojem je upotrebljeno k boja nazivamo k-bojenje.



Definicija 2.2.3. *Hromatski broj grafa* G je najmanji broj k za koji je graf G pravilno k-obojiv i obeležava se sa $\chi(G)$. Ako je $\chi(G) = k$, za G kažemo da je k-hromatski graf.
Na slici 2.9. su dati primeri 3-hromatskog grafa.

Teorema 2.1.2. $\chi\left(K_n\right) = n$

Dokaz:

Hromatski broj kompletnog n-partitnog grafa jednak je n zato što svaki čvor u n-partitnom grafu pripada tačno jednoj od n disjunktnih particija, i svaka od ovih particija mora biti obojena različitom bojom kako bi se izbeglo bojenje dva susedna čvora istom bojom.

Teorema 2.1.3. Ako je H podgraf grafa G, tada je $\chi(G) \geq \chi(H)$.

Dokaz:

Neka su $\chi(G)$ i $\chi(H)$ hromatski brojevi grafova G i H. To znači da se graf G ne može pravilno obojiti sa manje od $\chi(G)$ boja, i slično graf H se ne može pravilno obojiti sa manje od $\chi(H)$ boja.
Po definiciji podgrafa imamo da su svi čvorovi i ivice grafa H sadržani u grafu G. Pretpostavimo da je G pravilno obojen sa $\chi(G)$ boja. Ovo bojenje mora biti pravilno i za svaki podgraf H grafa G. Dakle, podgraf H može biti obojen sa najviše $\chi(G)$ boja. Pošto je $\chi(H)$ minimalan broj boja potreban za pravilno bojenje podgrafa H sledi da je $\chi(H) \leq \chi(G)$.

Teorema 2.1.4. Ako je $K_n \subset G$, tada je $\chi(G) \geq n$.

Teorema 2.1.5. $\chi(G) = 1$ ako i samo ako je G prazan graf.
Ako je graf G obojen sa k boja, svi čvorovi koji su obojeni istom bojom čine *hromatsku klasu*. Nikoja dva čvora iste hromatske klase nisu susedna. Za takve čvorove kažemo da su nezavisni.

Zbog toga je hromatski broj grafa G jednak minimalnom broju disjunktnih podskupova, hromatskih klasa, na koje se skup čvorova $V(G)$ može razbiti, tako da su čvorovi svake klase nezavisni.

3 Analiza bipartitnih grafova i Mantelova teorema

3.1 Hromatski broj i bipartitnost

U prethodnom poglavlju smo spomenuli grafove čiji su čvorovi obojeni na način da između čvorova iste boje ne postoje ivice. Ako koristimo samo jednu boju, takvo bojenje će biti moguće samo za prazne grafove.

Prvi interesantan slučaj se javlja kada imamo dve boje. Ovaj slučaj je sam po sebi veoma intrigantan, što objašnjava zašto ima svoj poseban naziv, a to je bipartitno bojenje, gde se čvorovi grafa dele u dva disjunktna skupa tako da nema ivica unutar istog skupa.

U ovom radu ćemo istražiti bipartitno bojenje grafova, zajedno sa Mantelovom teoremom koja pruža ključne uvide u strukturu i osobine bipartitnih grafova. Ova teorema je centralni rezultat u ekstremalnoj teoriji grafova i igra ključnu ulogu u razumevanju graničnih slučajeva za bojenje grafova.

Podsećanje: Graf G je *bipartitan* ako se može podeliti na dva disjunktna podskupa čvorova tako da nijedna ivica ne povezuje dva čvora unutar istog podskupa.

Teorema 3.1.1. $\chi(G) = 2$ ako i samo ako je G neprazan bipartitan graf.

Dokaz:

(⟹): Neka je $\chi(G) = 2$.
Treba da dokažemo da je graf G neprazan i bipartitan graf.
Ukoliko bi graf G bio prazan, ne bi imao nijednu ivicu pa bi mogao biti obojen jednom bojom što bi značilo da je $\chi(G) = 1$. Međutim to je u suprotnosti sa pretpostavkom pa sledi da je graf G neprazan.
Pošto je $\chi(G) = 2$ odatle sledi da možemo obojiti čvorove grafa G sa dve boje (dve hromatske klase).
Definišimo preslikavanje $f\colon V(G)\rightarrow Z$ gde je Z=$\{1, 2\}$ skup boja.

Neka skup X čine svi čvorovi koji su obojeni bojom 1, a skup Y čine svi čvorovi koji su obojeni bojom 2, odnosno:

$$X = \{v \in V(G) | f(v) = 1\} \; i \; Y = \{v \in V(G) | f(v) = 2\}.$$

Tada je $xy \in E(G) \Longrightarrow x \in X, y \in Y \; ili \; x \in Y, y \in X.$

Dakle, ne postoji ivica između bilo koja dva čvora u klasi X, niti između bilo koja dva čvora u klasi Y. Odatle sledi da je graf G bipartitan sa disjunktnim klasama X i Y.

($\Longleftarrow$): Neka je $G(X, Y)$ netrivijalan bipartitan graf.

Kako je G netrivijalan, postoji bar jedna ivica, odnosno $E(G) \neq \emptyset$, što znači da ne može biti $\chi(G) = 1$. Dakle mora da važi $\chi(G) > 1$.

Definišimo skupove $X\ i\ Y$ tako su oni disjunktni skupovi čvorova grafa G, pri čemu svaka ivica u grafu G povezuje čvor iz skupa X sa čvorom iz skupa Y.

Tada pravimo bojenje $f(v) = \{1, v \in X\ 2,\ v \in Y \Longrightarrow \chi(G) = 2$.

Ova teorema uspostavlja direktnu vezu između hromatskog broja i bipartitnosti, potvrđujući da svaki graf koji se može obojiti sa dve boje bez konflikata među susednim čvorovima mora biti bipartitan i obrnuto.

3.2. Karakterizacija bipartitnih grafova i njihova ograničenja

Teorema 3.2.1.: Graf G je bipartitan ako i samo ako ne sadrži konturu neparnog reda.

Dokaz:

(⇒): Pretpostavimo da je graf G bipartitan, što znači da možemo podeliti skup čvorova u dva disjunktna skupa X i Y, tako da nema ivica unutar istog skupa, već samo između čvorova iz različitih skupova,tj.

$$X \cup Y = V(G) \ i \ X \cap Y = \emptyset.$$

Dalje pretpostavimo da postoji kontura C u grafu G čija je dužina neparna, tj. $C = v_1 v_2 \dots v_{2n+1}$ i imamo da je $v_1 v_{2n+1} \in E(G)$.

Neka je bez umanjenja opštosti $v_1 \in X$.
Pošto ne postoje čvorovi u skupu X koji su susedni, sledi da $v_2 \in Y$. Indukcijom se pokazuje da je $v_{2k+1} \in X$ $za\ svako\ k \in \{0, \dots, n\}\ i\ v_{2k} \in Y\ za\ svako\ k \in \{1, \dots, n\}$.
Sada imamo $v_1 \in X$ i takođe $v_{2n+1} \in X$. Pošto $v_1 v_{2n+1} \in E(G)$ i oba čvora su u skupu X što je kontradikcija jer smo pretpostavili da je graf G bipartitan.
Dakle, pokazali smo da, ako je graf bipartitan, ne sadrži konturu neparne dužine.

(⇐): Pretpostavimo da graf G nema konture neparnog reda.
Počnimo od bilo kog čvora v_0 i obojimo ga crvenom bojom.

Za svaki čvor $v \in V(G) \setminus \{v_0\}$ obojimo ga u crveno (odnosno plavo) ako je rastojanje od čvora v_0 do čvora v parno (odnosno neparno).

Napomena: *Rastojanje* između dva čvora u grafu G je dužina minimalnog puta koji ih povezuje.

Neka je A skup svih crvenih čvorova u grafu G, a B skup svih plavih čvorova u grafu G.
Treba da dokažemo da je G bipartitan graf sa klasama A i B.

Pretpostavimo da postoje dva čvora $v, w \in A$ tako da je $vw \in E(G)$.
Iz pretpostavke da čvorovi $v, w \in A$ sledi da su oni na parnom rastojanju do čvora v_0.
Neka je $P_v := v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1} v$ najkraći put od čvora v_0 do čvora v i neka je $P_w := v_0 w_1 w_2 \dots w_{l-1} w$ najkraći put od čvora v_0 do čvora w.
Tada je $P := v_0 v_1 v_2 \dots v_{k-1} v w w_{l-1} \dots w_2 w_1 w_0 v_0$ zatvorena šetnja u G neparne dužine jer su $k\ i\ l$ iste parnosti (parni su) i P sadrži ivicu vw.
Primetimo sada, da ako iz P uklonimo sve ivice koje istovremeno pripadaju putevima P_v i P_w, dobijamo konačan broj različitih kontura čiji je zbir dužina neparan, što znači da mora postojati bar jedna kontura neparne dužine što je kontradikcija.
Ukoliko pretpostavimo da imamo dva susedna čvora u skupu B, do kontradikcije se dolazi na sličan način.

Dakle ako nema konture neparnog reda, moguće je obojiti graf G sa dve boje tako da nijedna dva susedna čvora nemaju istu boju, što znači da je graf bipartitan.

Teorema 3.2.2.: Neka je $n > 2$ i neka je G prost bipartitni graf sa n čvorova. Tada G ima najviše $a(n - a)$ ivica, gde je $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Drugim rečima, bipartitni graf sa n čvorova ne može imati više od $\frac{n^2}{4}$ ivica.

Dokaz:

Neka je $n > 2$ i neka je G prost bipartitni graf sa n čvorova. Pretpostavimo da graf G ima a čvorova crvene boje i $n - a$ čvorova plave boje. Tada se maksimalan broj ivica postiže ako su svi čvorovi crvene boje povezani sa svim čvorovima plave boje, što omogućava grafu G da ima $a(n - a)$ ivica.
Posmatrajmo funkciju $f(a) = a(n - a)$ i hoćemo da vidimo kada ona dostiže svoj maksimum.

$$f(a) = -a^2 + an$$

$$a = \frac{-B}{2A},$$

gde je $A = -1,\ B = n.$

$$a = \frac{n}{2(-1)} = \frac{n}{2}$$

Funkcija $f(a)$ dostiže svoj maksimum kada je $a = \frac{n}{2}$ i raste za $0 < a < \frac{n}{2}$, a opada za $a > \frac{n}{2}$.
Pošto a mora biti ceo broj onda ako je n paran broj onda stavimo $a = \frac{n}{2}$, ako je n neparan broj stavimo $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

3.3. Pregled osnovnih principa ekstremalne teorije grafova i Mantelova teorema

Prilikom analize bipartitnih grafova, posebno je značajno razmotriti kako se broj ivica u takvom grafu može maksimizovati. Prethodni dokaz pokazuje da se maksimalan broj ivica postiže kada su dva skupa čvorova bipartitnog grafa skoro jednake veličine. Ovaj zaključak proističe iz činjenice da funckija $f(a) = a(n - a)$ dostiže svoj maksimum kada je $a = \frac{n}{2}$ ako

je n paran broj, odnosno $a = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ako je n neparan broj.

Međutim, interesantan aspekt koji se može istražiti je uticaj zabrane određenih podgrafova na strukturu bipartitnog grafa.

Na primer, postavljanjem ograničenja na određeni tip podgrafa, možemo ograničiti dostupne ivice u grafu, što može dovesti do promene u maksimalnom broju grana koji se može pojaviti u grafu.

Postavlja se pitanje: Kako će se struktura grafova promeniti ukoliko zabranimo pojavljivanje određenog podgrafa, kao što je trougao?
Odgovor na ovo pitanje pruža Mantelova teorema.

Dve naredne definicije ćemo koristiti u dokazu Mantelove teoreme.

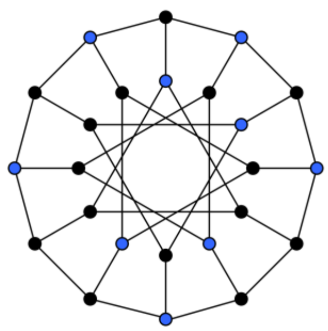
Teorema 3.3.1(*Cauchy-Schwarz*): Za realne brojeve $x_1, x_2, ..., x_n$ i $y_1, y_2, ..., y_n$ važi:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right)^2 \leq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \sum_{k=1}^{n} y_k^2.$$

Ako je $x_i \neq 0$ za barem jedan i, onda imamo jednakost ako i samo ako postoji realan broj λ takav da je:

$$y_k = \lambda x_k,\ k = 1, ..., n.$$

Definicija 3.3.1: Skup čvorova u grafu, od kojih nikoja dva nisu susedna, naziva se *nezavisan* (ili *stabilan*).



Slika 3.1: Nezavisan skup u grafu, označen plavom bojom.

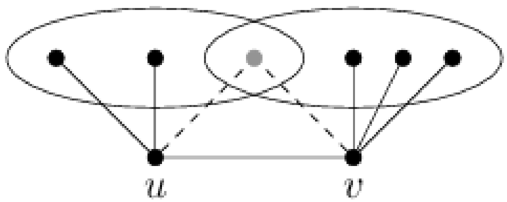
Definicija 3.3.2: *Najveći nezavisan skup* je nezavisan skup najveće moguće veličine za dati graf G.

Mantelova teorema: Neka je G proizvoljan graf sa n čvorova, $n \geq 3$, i m ivica koji ne sadrži trougao. Onda je maksimalan broj ivica u tom grafu $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Dokaz:

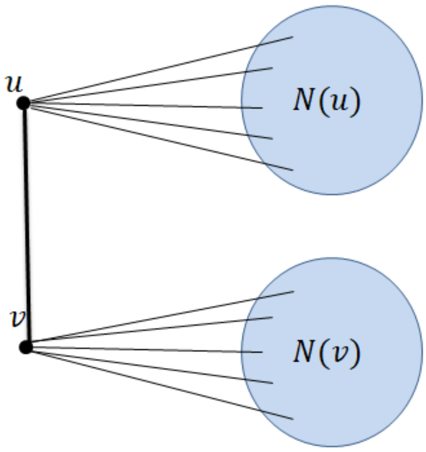
Posmatrajmo graf $G = (V, E)$ sa n čvorova, $n \geq 3$, gde je m broj ivica, $e(G) = m$ i pretpostavimo da G nema trouglova.

Primetimo da ukoliko postoji ivica u grafu G između čvorova u i v, onda oni ne mogu imati nijednog zajedničkog suseda, jer bi u suprotnom postojao trougao. (slika 3.2.).



Slika 3.2.

Na slici 3.3. je prikazano kako će izgledati skupovi svih suseda za dva čvora koja su susedna:



Slika 3.3

Susedni čvorovi imaju disjunktne skupove suseda u grafu bez trouglova.
Za svaku ivicu $uv \in E(G)$ važi $d(u) + d(v) \leq n$.
Ukoliko bi važilo $d(u) + d(v) > n$ imali bismo bar jedan čvor koji je brojan dva puta. To bi značilo da taj čvor pripada i skupu suseda čvora u i skupu suseda čvora v, odakle bi sledilo da imamo trougao.

Sada posmatrajmo šta je suma kvadrata stepena čvorova $\sum_{u \in V} d(u)^2$.

Svaki $d(u)$ se pojavljuje onoliko puta koliko čvor u ima suseda,tj.jednom za svaku granu u kojoj učestvuje, dakle pojavljuje se tačno $d(u)$ puta.

Možemo preformulisati sumu kvadrata stepena svih čvorova kao sumu doprinosa svih grana:

$$\sum_{u\in V} d(u)^2 = \sum_{uv\in E} (d(u) + d(v))$$

Dalje imamo da je:

$$\sum_{u\in V} d(u)^2 = \sum_{uv\in E} (d(u) + d(v)) \leq \sum_{uv\in E} n \leq e(G)n = mn.$$

Dakle, zato što je zbir stepena susednih čvorova u grafu bez trouglova ograničen sa n, ukupna suma doprinosa svih ivica je ograničena sa mn.

Šta još znamo?

Znamo da je ukupan zbir stepena svih čvorova u grafu jednak dvostrukom broju ivica, jer svaka ivica „dodiruje" tačno dva čvora (Lema 2.1.1- lema o rukovanju):

$$\sum_{u\in V} d(u) = 2m.$$

Dalje koristimo Koši Švarcovu nejednakost koja nam omogućava da procenimo gornju granicu za kvadratne sume i dobijamo sledeće:

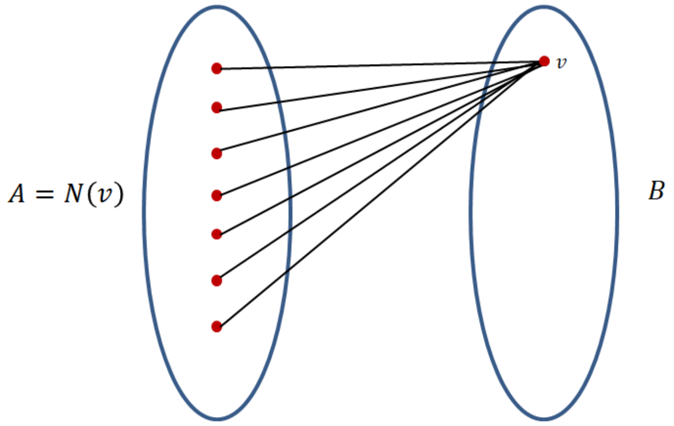
$$4m^2 = (\sum_{u\in V} d(u))^2 \leq \sum_{u\in V} 1^2 \sum_{u\in V} d(u)^2 = n\left(\sum_{u\in V} d(u)^2\right) \leq mn^2 \rightarrow m \leq \frac{n^2}{4}.$$

I naravno, pošto je m ceo broj, onda imamo $m \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$.

Sada ćemo dati još jedan dokaz Mantelove teoreme.

Dokaz 2:

Neka je $G = (V, E)$ graf koji ne sadrži trougao kao podgraf i neka je v čvor sa maksimalnim stepenom u grafu G.
Pošto G ne sadrži trougao, skup suseda $N(v)$ čvora v mora biti nezavisan skup. Označićemo ga sa A.



Slika 3.4.

Neka je B komplement skupa A, odnosno $B = V\backslash A$ i $V = A \cup B$.
Pošto je v čvor sa maksimalnim stepenom imamo:

$$d(x) \leq d(v) = |A|, \ za \ svako \ x \in V.$$

Pošto je A nezavisan skup (odnosno ne postoji ivica koja ima oba čvora u A) svaka ivica grafa G ima bar jedan kraj u B.
Sada imamo sledeće nejednakosti:

$$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |B| d(x) \leq |A||B| \,.$$

Objašnjenje:

Neka B ima čvorove $b_1, b_2, \dots, b_k$. Tada je

$$\sum_{x \in B} d(x) = d\left(b_1\right) + d\left(b_2\right) + \dots + d(b_k) \leq d(x) + d(x) + \dots + d(x) = |B| d(x).$$

Maksimalni stepen bilo kog čvora u B ne može biti veći od stepena čvora v jer je to čvor sa maksimalnim stepenom u grafu G. Zbog toga je $|B| d(x) \leq |A||B|$.
Sada ćemo primeniti nejednakost između aritmetičke i geometrijske sredine $\frac{|A|+|B|}{2} \geq \sqrt{|A||B|}$.

Kvadriranjem obe strane dobijamo $\left(\frac{|A|+|B|}{2}\right)^2 \geq |A||B|$.

Pošto je $|A| + |B| = n$, imamo:

$$|E| \leq \sum_{x \in B} d(x) \leq |A||B| \leq \left(\frac{|A|+|B|}{2}\right)^2 = \frac{n^2}{4}.$$

Postavlja se pitanje, šta nam ovaj dokaz govori o slučaju kada se dostiže jednakost?

Da bismo imali jednakost u Mantelovoj teoremi, u prethodnoj nejednakosti moramo da imamo sledeće:

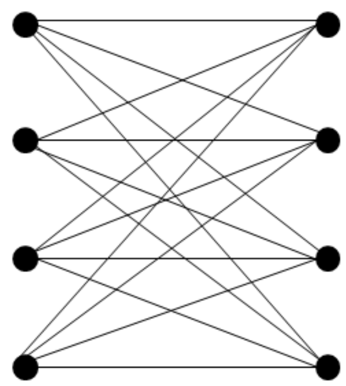
- $|E| = \sum_{x \in B} d(x), \forall x \in B$, što implicira da nijedna ivica nije striktno unutar B, tj. da je B nezavisan skup.

- $\sum_{x \in B} d(x) = |A||B|$, što implicira da je svaki čvor u B povezan sa svakim čvorom u A.

- I na kraju, A i B treba da budu iste veličine (ili skoro iste veličine, kada je n neparan) da bi važila jednakost u nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine.

  Dakle u slučaju jednakosti imamo da graf koji ne sadrži trougao, a ima tačno $\frac{n^2}{4}$ ivica mora biti izomorfan kompletnom bipartitnom grafu sa dva jednaka ili skoro jednaka dela. Označićemo ga sa $T_{n,2}$.

Na slici 3.5. je prikazan primer jednog takvog grafa.



Slika 3.5: Graf sa 8 čvorova, bez trouglova, sa maksimalnim brojem grana

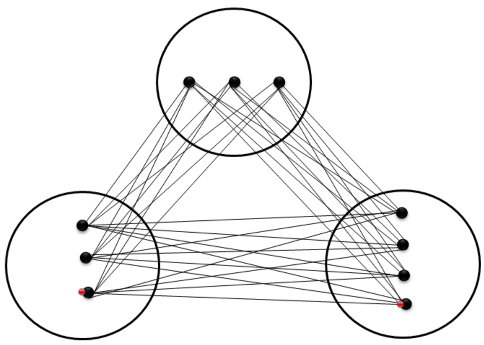
4 Turánova teorema

4.1 Motivacija – šta se dešava sa grafovima koji ne sadrže kompletan podgraf?

Sada kada smo razmotrili rešenje za grafove koji ne sadrže trougao, prirodno je postaviti pitanje šta se dešava ukoliko zabranimo kompletan graf K_{r+1}? Koji je maksimalan broj ivica u grafu sa n čvorova koji ne sadrži K_{r+1} kao podgraf?

Posmatrajmo kompletan graf sa četiri čvora K_4.
Primer koji smo razmotrili u prethodnoj teoremi ne sadrži K_4 jer ne sadrži trougao.
Ali možemo postići još bolje rezultate.

Umesto da razmotrimo dve particije, možemo razmotriti više particija.
Za K_4, ukoliko uzmemo tri particije, svaki sa $\frac{n}{3}$ brojem čvorova (ako n nije deljiv sa 3, zaokružimo ga na veći ili manji broj) i dodamo sve ivice između različitih particija, možemo videti (na slici 4.1) da ovakav graf ne sadrži K_4.



Slika 4.1: Turánov graf $T(10, 3)$

Pitanje je da li je ovo najveći mogući broj ivica koji može imati graf, a da ne sadrži K_4?

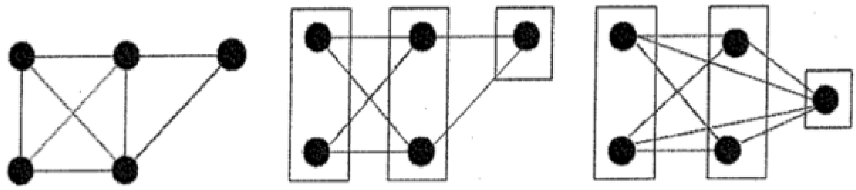
Ispostaviće se da je odgovor potvrdan, a to će nam pokazati sledeća teorema.

Turánova teorema generalizuje prethodni rezultat Mantela, koji tvrdi da maksimalan broj ivica u n-čvorovnom grafu bez trouglova iznosi $\frac{n^2}{4}$. Kada dokažemo Turánovu teoremu videćemo da je Manteleva teorema poseban slučaj Turánove teoreme za $r = 2$.

4.2 K-hromatski graf

Prvo ćemo definisati pojmove koji su nam potrebni.

Definicija 4.2.1: *Kompletan multipartitni graf* je prost graf G čiji se čvorovi mogu podeliti u skupove tako da su dva čvora susedna ako i samo ako nisu u istim multipartitnim skupovima. Za $k \geq 2$, kompletan k- partitni graf sa multipartitnim skupovima veličina $n_1, n_2, ..., n_k$ označava se sa $K_{n_1, n_2, ..., n_k}$.



Graf 3-partitni graf kompletan 3-partitni graf

Definicija 4.2.2: *k-hromatski graf* je graf koji zahteva tačno k različitih boja za bojenje njegovih čvorova tako da nijedna dva susedna čvora nemaju istu boju. Drugim rečima, najmanji broj boja potreban za pravilno bojenje grafa je k. Broj k se naziva hromatski broj grafa.
Bilo bi interesantno i korisno istražiti koji su najmanji i najveći k-hromatski grafovi sa n čvorova.

Koji je minimalni broj ivica k-hromatskog grafa sa n čvorova?

Tvrđenje 4.2.1. Svaki k-hromatski graf sa n čvorova ima barem $\binom{k}{2}$ ivica.

Dokaz:

k-hromatski graf ima k-bojenje čvorova, gde svaki čvor dobija jednu od k boja, tako da nijedna dva susedna čvora ne dele istu boju.
k-bojenje možemo posmatrati kao particiju skupa čvorova u k delova, gde je svaka particija nezavisan skup (tj. nijedna dva čvora u istoj particiji nisu susedna). Ova particija je zapravo k-particija skupa čvorova.

Pretpostavimo da imamo pravilno k-bojenje k-hromatskog grafa, što znači da svaka boja oboji jedan nezavisan skup čvorova.

Za bilo koje dve različite boje, recimo i i j, tvrdimo da u grafu postoji bar jedna ivica koja povezuje čvorove obojene bojama i i j. Ako ne bi postojala takva ivica, to bi značilo da čvorovi obojeni bojama i i j nisu susedni, što znači da bi ove dve boje mogle biti kombinovane u jednu boju.

Pošto bi ovo novo bojenje koristilo manje boja, to bi bilo u suprotnosti sa našom

pretpostavkom da je graf k-hromatski (ne može se obojati sa manje od k boja).
S obzirom da postoji $\binom{k}{2}$ različitih parova boja onda mora postojati bar $\binom{k}{2}$ ivica jer svaki par boja mora biti povezan bar jednom ivicom.

Koji je maksimalni broj ivica k-hromatskog grafa sa n čvorova?

Pretpostavimo da imamo pravilno k-bojenje grafa. Ovo znači da smo čvorove grafa podelili u k nezavisnih skupova (particija), gde čvorovi unutar istog skupa nisu međusobno povezani.

Cilj nam je da pronađemo maksimalan broj ivica koje možemo dodati grafu bez povećanja hromatskog broja iznad k.

Sve dok možemo pronaći parove nesusednih čvorova sa različitim bojama, možemo nastaviti da dodajemo ivice između tih čvorova. Dodavanjem ivica između čvorova iz različitih particija ne povećavamo hromatski broj, jer bojenje ostaje pravilno – čvorovi unutar istih particija i dalje nisu međusobno povezani.

Optimalan način da se ovo postigne je konstruisanje kompletnog k-partitnog grafa, poznatog kao *Turánov graf* $T(n,k)$.

$T(n,k)$ predstavlja graf sa n čvorova i k boja (particija) koji ima najveći mogući broj ivica, a da je hromatski broj jednak k. Turánov graf je optimalan jer maksimizuje broj ivica održavajući k-hromatsko svojstvo.

Dakle, ako želimo k-hromatski graf sa najvećim brojem ivica, Turánov graf je najbolji izbor.

4.3 Turánov graf i Turánova teorema

Definicija: Prost, kompletan, k-partitan graf sa n čvorova, čiji su delovi iste ili skoro iste veličine ($\lfloor \frac{n}{k} \rfloor$ ili $\lceil \frac{n}{k} \rceil$) se naziva *Turanov graf* i obeležavamo ga sa $T(n, k)$.

Primer: Turánov graf $T(7, 4)$

$n = 7,\ k = 4$

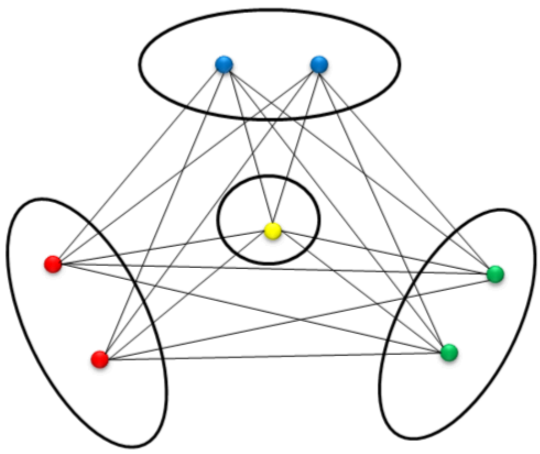
Imamo četiri nezavisna skupa sa približno jednakim brojem čvorova, tj. recimo tri sa 2 čvora, a jedan sa jednim čvora.
Svi čvorovi iz različitih particija su međusobno povezani, dok čvorovi unutar iste particije nisu povezani.

Hromatski broj grafa:

Da bismo obojili ovaj graf, potrebne su nam 4 boje, jer čvorovi unutar iste particije nisu međusobno povezani.

Dakle hromatski broj grafa je 4.

Na slici 4.2.prikazan je Turánov graf $K_{2,2,2,1}$ za slučaj $n = 7,\ k = 4$.



Slika 4.2: Turánov graf $T(7, 4)$

Lema 4.3.1: Među prostim r-partitnim grafovima (tj. grafovima koji su r-bojivi) sa n čvorova, Turánov graf $T_{n,r}$ je jedinstven graf sa najviše ivica.

Dokaz:

Prethodno smo naveli da u grafu možemo dodavati ivice bez povećanja hromatskog broja sve dok graf ne postane kompletan multipartitni. Posmatrajmo kompletan r-partitni graf sa partitivnim skupovima čije se veličine razlikuju za više od 1.

Neka je A najveći takav skup veličine i, a B je najmanji veličine j, pri čemu je $i - j > 1$.

Uzmimo čvor $v \in A$ i premestimo ga u B.

Sada imamo da se broj ivica između A i B koje nisu povezane sa v ne menja kao direktan rezultat premeštanja čvora v, ali ukupan broj ivica u grafu se menja jer u skupu A v dobija $i - 1$ suseda, a u skupu B gubi j suseda što znači da se dodaju nove ivice između v i čvorova skupa B i oduzimaju ivice između v i čvorova skupa A.

Pošto je $i - 1 > j$, broj ivica se povećava.

Dakle, dobićemo maksimalan broj ivica samo kada su svi partitivni skupovi jednaki ili se razlikuju najviše za jedan čvor, kao u $T_{n,r}$.

Postavlja se pitanje šta se dešava ako želimo da dodamo više ivica nego što je u $T_{n,r}$?

Analiziraćemo šta se dešava sa hromatskim brojem grafa.

Iz Manteleve teoreme znamo da grafovi sa hromatskim brojem 2 ne sadrže trouglove i imaju najviše $\frac{n^2}{4}$ ivica.

Ukoliko imamo više od $\frac{n^2}{4}$ ivica u grafu sa n čvorova, hromatski broj mora biti najmanje 3 i graf mora imati trougao kao podgraf.

U prethodnoj teoremi smo pokazali da $T_{n,r}$ ima najviše ivica među r- partitnim grafovima sa n čvorova, a u sledećoj teoremi (4.3.2.) ćemo videti da dodavanje ivica zahteva povećanje hromatkog broja i pojavu većih kompletnih podgrafova.

Sada ćemo navesti dve teoreme koje su povezane i zajedno čine osnovu Turánove teorije o ekstremalnoj teoriji grafova.

Obe teoreme se bave problemom maksimizacije broja ivica u grafu sa određenim ograničenjima.
Konkretno, one se fokusiraju na ekstremalna svojstva grafova koji ne sadrže određene kompletne podgrafove K_{r+1}.
Prva teorema (teorema 4.3.2.) postavlja gornju granicu za broj ivica u takvim grafovima, dok

druga teorema (teorema 4.3.3.) identifikuje specifičnu strukturu grafa koji tu granicu dostiže.
Teorema 4.3.2: Neka je G proizvoljni graf sa n čvorova, koji ne sadrži K_{r+1}. Onda graf G ima najviše $(1 - \frac{1}{r})\frac{n^2}{2}$ ivica.

Dokaz: Koristimo indukciju po n. Fiksirajmo broj r.

Baza indukcije:

Ako je $n \leq r$, ovaj graf sigurno ne može sadržati K_{r+1} kao podgraf, jer ima manje čvorova od njega. Graf G ima najviše $\binom{n}{2}$ ivica, pa imamo:

$$\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = \frac{(n-1)n^2}{2n} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{n}\right)n^2 \leq \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{r}\right)n^2$$

što se i tražilo.

Indukcijska hipoteza:

Pretpostavimo da je $n > r$ i da teorema važi za sve grafove sa manje od n čvorova, tj. svaki graf sa $m \leq n$ čvorova koji ne sadrži K_{r+1} kao podgraf ima najviše $\left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{m^2}{2}$ ivica.

Indukcijski korak:

Pokazaćemo da teorema važi za graf sa n čvorova.

Neka je G graf sa n čvorova bez K_{r+1}, i neka G ima maksimalan broj ivica.
Ovo implicira da G sadrži K_r kao podgraf. (podgraf koji je izomorfan kompletnom grafu K_r).

Ako G ne bi sadržao K_r, tada bi postojala bar jedna ivica koju možemo dodati između dva čvora koja nisu međusobno povezana, bez stvaranja K_{r+1}.

Dodavanjem te ivice bismo povećali broj ivica u G, što bi bilo u kontradikciji sa pretpostavkom da G već ima maksimalan broj ivica među svim grafovima sa n čvorova koji ne sadrže K_{r+1}.
Dakle, G mora sadržati K_r.

Neka je A skup čvorova koji formiraju K_r, a $B = V \setminus A$ je ostatak čvorova.
Svaki čvor $v \in B$ ima najviše $r - 1$ suseda u A.

Zašto ovo važi?

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji čvor v u B koji ima r suseda u A.

Iz toga što je A skup čvorova koji formiraju K_r sledi da su svi čvorovi u A međusobno povezani.
Ako čvor $v \in B$ ima r suseda u $A \Longrightarrow v$ je povezan sa svih r čvorova u A.
Dodavanjem v u K_r formira se kompletan graf K_{r+1}, jer će svih $r + 1$ čvorova biti međusobno povezani, a to je u kontradikciji sa početnom pretpostavkom da G ne sadrži K_{r+1}.

Dakle, svaki čvor $v \in B$ može imati najviše $r - 1$ suseda u A.

Tada za ukupan broj ivica u grafu G imamo:

$$e(G) \leq \binom{r}{2} + (r - 1)|B| + e(B)$$

gde je $\binom{r}{2}$ broj ivica unutar A, $(r - 1)|B|$ je maksimalan broj ivica između čvorova u A i B, i
$e(B)$ je broj ivica unutar skupa B.

Po induktivnoj hipotezi imamo da za skup B važi naša teorema, koja nam kaže da graf B sa $n - r$ čvorova (n −ukupan broj čvorova u grafu G, r −broj čvorova u podgrafu K_r) ima najviše $(1 - \frac{1}{r})\frac{(n-r)^2}{2}$ ivica.

$$e(G) \leq \frac{r(r-1)}{2} + (r - 1)(n - r) + (1 - \frac{1}{r})\frac{(n-r)^2}{2}$$

$$= \frac{r^2-r}{2} + rn - r^2 - n + r + \frac{r-1}{r}\frac{(n-r)^2}{2}$$

$$= \frac{r^2-r}{2} + rn - r^2 - n + r + \frac{(r-1)n^2 - 2nr(r-1) + r^2(r-1)}{2r}$$

$$= \frac{r^2-r}{2} + rn - r^2 - n + r + \frac{(r-1)n^2}{2r} - (r - 1)n + \frac{r^2-r}{2}$$

Grupisanjem izraza uz n^2, n, i slobodan član dobijamo:

$$e(G) \leq \left(1 - \frac{1}{r}\right)\frac{n^2}{2}.$$

Teorema 4.3.3(Turánova teorema): Među prostim grafovima sa n čvorova koji ne sadrže K_{r+1} kao podgraf, Turanov graf $T_{n,r}$ ima maksimalan broj ivica. Ovde, K_{r+1} predstavlja kompletan graf sa $r + 1$ čvorova, dok $T_{n,r}$ označava Turanov graf sa n čvorova i r particija.

Napomena: Kada kažemo da graf ne sadrži K_{r+1} kao podgraf, mislimo da ne postoji nijedan skup od $r + 1$ čvorova unutar grafa koji su međusobno povezani.

Dokaz Turánove teoreme:

Svaki r-partitni (ili r-bojivi) graf, uključujući Turanov graf $T(n, r)$, nema $r + 1$- kompletan podgraf, jer svaki partitivni skup može doprineti najviše jednim čvorom svakom kompletnom podgrafu.

Ukoliko dokažemo da maksimalan broj grana postiže r-partitni graf, lema 4.3.1. implicira da je traženi graf $T(n, r)$.

Dakle, dovoljno je dokazati da za svaki graf G koji nema $r + 1$-kompletan podgraf, postoji r -partitivni graf H sa istim skupom čvorova kao G, tj.

$$V(H) = V(G),$$

i sa najmanje isto toliko ivica tj.

$$e(H) \geq e(G).$$

Dokazaćemo indukcijom po r:

Baza indukcije: $r = 1$

Ako graf nema K_2, to znači da nema parova čvorova koji su povezani, što ga čini praznim grafom (grafom bez ivica). Ovakav graf je trivijalno 1-partitni.
Dakle, u ovom slučaju je $H = G$.

Indukcijska hipoteza:

Pretpostavimo da tvrdnja važi za sve cele brojeve $< r$.

Indukcijski korak:

Neka je $r \geq 2$ i dokazujemo da tvrđenje važi za r.
Pretpostavimo da je G graf sa n čvorova koji ne sadrži K_{r+1}.

Neka $x \in V(G)$ bude čvor maksimalnog stepena $k = \Delta G$ (čvor u grafu G koji ima najveći broj suseda) i neka podgraf G' bude podgraf grafa G indukovan skupom $N(x)$, gde je $N(x)$ skup suseda čvora x.

Napomena: Podgraf G' indukovan skupom $N(x)$ sadrži sve čvorove koji su susedi čvora x i sve ivice između tih čvorova koje postoje u grafu G, ali ne uključuje čvor x, ni ivice koje povezuju x sa njegovim susedima.

Dakle, imamo:

1)Skup čvorova od grafa G': $V\left(G'\right) = N(x)$

2)Skup ivica od grafa G': $E(G')$ sadrži sve ivice $(u, v) \in E(G)$ za $u, v \in N(x)$.

Tvrdimo da ako G nema K_{r+1}, tada G' nema K_r.

Pretpostavimo da G nema K_{r+1}.

Pošto je x sused svakog čvora u G', ako bi G' imao K_r, tada bi G imao K_{r+1}, što je kontradikcija sa pretpostavkom da G nema K_{r+1}.
Dakle, G' nema K_r.

Sada možemo primeniti indukcijsku hipotezu na G':
Pošto G' nema K_r onda postoji $(r - 1)$- partitni graf H' sa istim skupom čvorova kao G' tj. $V\left(H'\right) = V\left(G'\right)$ i najmanje toliko ivica tj. $e(H') \geq e(G')$.

Znamo da je $V\left(H'\right) = V\left(G'\right) = N(x)$.

Pošto u $N(x)$ ima k čvorova $\Rightarrow V\left(H'\right) = N(x) = k$.

Konstruišemo graf H tako što uzmemo graf H' i ostatak čvorova, pa je skup čvorova grafa H:

$$V(H) = V\left(H'\right) \cup \left(V(G) \setminus V\left(H'\right)\right) = N(x) \cup (V(G) \setminus N(x))$$

$V(G) \setminus N(x)$ ćemo obeležiti sa S.

Dakle, skup S se sastoji od čvorova koji nisu susedi čvora x u grafu G'.
U H nema ivica između čvorova iz $N(x)$ i čvorova koji nisu u $N(x)$, a koji se nalaze u skupu S.

S je nezavisan skup od $(n - k)$ čvorova (nezavisni skup je skup čvorova u kojem nema ivica među čvorovima u tom skupu).

Pošto su čvorovi iz $N(x)$ povezani samo sa čvorovima iz S, a ne međusobno, i pošto je H' $r - 1$-partitni graf, ivice dodate između $N(x)$ i S neće stvoriti dodatne kompletne podgrafove unutar ovih skupova.

Time će H biti r-partitan.

Još treba da pokažemo da je $e(H) \geq e(G)$.

Iz konstrukcije grafa H imamo da je broj ivica jednak broju ivica u grafu $H^{'}$ i plus broj novih ivica dodatih između $N(x)$ i S tj.:

$$e(H) = e\left(H^{'}\right) + k(n - k).$$

Takođe, imamo $e(G) \leq e\left(G^{'}\right) + \sum_{v \in S} d_G(v)$, jer se razlika u broju ivica između G i G' sastoji samo od onih ivica koje imaju bar jedan kraj u skupu $S = V(G) \setminus V(G')$.

Napomena: Ivice sa oba kraja u skupu S se broje dva puta.

Pošto je $\Delta(G) = k$, imamo $d_G(v) \leq k$ za svaki $v \in S$ (čvorova koji nisu u G').

Kako je $S = n - k$, imamo $\sum_{v \in S} d_G(v) \leq k(n - k)$.

Dakle,

$$e(G) \leq e\left(G^{'}\right) + k(n - k) \leq e\left(H^{'}\right) + k(n - k) = e(H).$$

Time je $e(H) \geq e(G)$ što završava dokaz.

Dakle, pokazali smo da H ima sve osobine Turánovog grafa, što znači da je H zapravo $T_{n,r}$.

Turánova teorema daje jasnu sliku o tome kako izgleda graf sa maksimalnim brojem ivica koji ne sadrži K_{r+1} kao podgraf.

4.4.Primena Turánove teoreme u kombinatornoj geometriji

Kombinatorna geometrija se bavi kombinacijama i rasporedima geometrijskih objekata. Rezultat Turánove teoreme je relevantan i za probleme u kombinatornoj geometriji, gde možemo posmatrati tačke u ravni kao čvorove grafa, a njihovo međusobno rastojanje kao kriterijum za povezivanje ivicama.

Definicija: *Prečnik skupa tačaka u ravni* je najveće rastojanje između dve tačke tog skupa.

Teorema 4.3.4: Neka je S skup n tačaka u ravni, čiji je prečnik 1. Onda je broj parova tačaka iz S čije je rastojanje veće od $\frac{1}{\sqrt{2}}$ najviše $\frac{n^2}{3}$.

Dokaz:

Uvedimo graf $G(S, E)$ takav da je $S = \{X_1, X_2, ..., X_n\}$ skup n tačaka u ravni (gde svaka tačka skupa S predstavlja čvor u grafu G) i $X_iX_j \in E$ ako i samo ako je $\left|X_iX_j\right| > \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Da bismo mogli da primenimo Turánovu teoremu za $r = 3$, potrebno je da dokažemo da graf G ne sadrži K_4. Prema Turánovoj teoremi, ako graf ne sadržiK_4 onda broj ivica u tom grafu može biti najviše $\left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{3}$. Ova teorema nam omogućava da ograničimo broj parova tačaka u skupu S čije je rastojanje veće od $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Ako bi G sadržao K_4, postojale bi četiri tačke $X_1, X_2, X_3, X_4 \in S$ tako da su svake dve tačke na rastojanju većem od $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
Razmatraćemo sledeća tri slučaja:

<u>Prvi slučaj</u>: Tačke X_1, X_2, X_3, X_4 obrazuju konveksan četvorougao.

Bar jedan od uglova u četvorouglu je tup ili prav (ne mogu sva četiri ugla biti manja od 90º, jer je zbir uglova u četvorouglu jednak 360º).
Neka je bez umanjenja opštosti $\sphericalangle X_jX_iX_l \geq 90°$.
Sada možemo primeniti kosinusnu teoremu na trougao $X_jX_iX_l$:

$$\left|X_jX_l\right|^2 = \left|X_iX_j\right|^2 + \left|X_iX_l\right|^2 - 2\left|X_iX_j\right|\left|X_iX_l\right| \cos cos \sphericalangle X_jX_iX_l$$
$$\geq \left|X_iX_j\right|^2 + \left|X_iX_l\right|^2 > \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Dakle, dobili smo da je $\left|X_j X_l\right| > 1$ što je kontradikcija sa time da najveće rastojanje među tačkama skupa S nije veće od 1.

<u>Drugi slučaj:</u> Neke tri tačke iz skupa S obrazuju trougao, a četvrta tačka se nalazi unutar ovog trougla.
Neka je bez umanjenja opštosti $X_i X_j X_l$ trougao a tačka X_k se nalazi unutar ovog trougla. Tada je bar jedan od uglova $\sphericalangle X_i X_k X_j$, $\sphericalangle X_j X_k X_l$, $\sphericalangle X_l X_k X_i$ veći ili jednak 120º (jer je zbir ova tri ugla jednak 360º).
Neka je bez umanjenja opštosti $\sphericalangle X_i X_k X_j \geq 120°$.
Koristeći kosinusnu teoremu imamo:

$$\begin{aligned}\left|X_i X_j\right|^2 &= \left|X_i X_k\right|^2 + \left|X_j X_k\right|^2 - 2\left|X_i X_k\right| \left|X_j X_k\right| cos\sphericalangle X_i X_k X_j \\ &\geq \left|X_i X_k\right|^2 + \left|X_j X_k\right|^2 - 2(-\tfrac{1}{2})\left|X_i X_k\right| \left|X_j X_k\right| \\ &= \left|X_i X_k\right|^2 + \left|X_j X_k\right|^2 + \left|X_i X_k\right| \left|X_j X_k\right| \\ &> (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + (\tfrac{1}{\sqrt{2}})^2 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\tfrac{1}{\sqrt{2}} \\ &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} = \tfrac{3}{2}.\end{aligned}$$

što je kontradikcija.

<u>Treći slučaj</u>: Tačke X_i, X_j, X_k, X_l su kolinearne.
Neka je bez umanjenja opštosti raspored tačaka: $X_i - X_j - X_k - X_l$. Tada važi:

$$\left|X_i X_l\right| = \left|X_i X_j\right| + \left|X_j X_k\right| + \left|X_k X_l\right| > \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

što je kontradikcija.

Dokazali smo da je G graf sa n čvorova koji ne sadrži K_4 pa možemo da primenimo Turánovu teoremu:

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{3}\right)\frac{n^2}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{3}.$$

Dakle, problem u kombinatornoj geometriji koristi principe iz Turánove teoreme za određivanje maksimalnog broja parova tačaka na rastojanju većem od $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

5 Grafovi bez određenih podgrafova

5.1. Grafovi koji ne sadrže opšti podgraf

Prirodno je postaviti pitanje šta se događa ako pokušamo da zabranimo druge podgrafove osim kompletnih grafova.

Time ćemo se baviti u ovom poglavlju.

Definicija 5.1.1: Za dat pozitivan ceo broj n i graf H, definisaćemo *ekstremalni broj* za H kao maksimalan broj ivica u grafu sa n čvorova koji ne sadrži graf H kao podgraf.
Označićemo ga sa $ex(n, H)$.

Definicija 5.1.2 (Turánova gustina): *Turánova gustina* grafa H je definisana kao

$$\pi(H) := \frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} .$$

Za svaki fiksiran graf H, niz $\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}}$ je monoton i ograničen između 0 i 1, pa konvergira kako broj čvorova n teži ka beskonačnosti. Taj limes je definisan kao Turánova gustina $\pi(H)$.

Uglavnom ćemo se baviti samo asimptotskim ponašanjem $ex(n, H)$ kako n raste, tj. to znači da istražujemo kako se maksimalni broj ivica u H-slobodnom grafu menja kada se broj čvorova u grafu povećava.

Turánova teorema je prva koja daje odgovor na pitanje za slučaj kada se zabranjuje kompletan podgraf K_{r+1}, gde važi:

$$ex\left(n, K_{r+1}\right) = e\left(T_{n,r}\right) = \left(1 - \frac{1}{r} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}.$$

gde $o(1) \to 0$ kada $n \to \infty$.

Da bismo odgovorili na pitanje koji je maksimalan broj ivica u grafu G sa n čvorova koji ne sadrži graf H posmatraćemo hromatski broj grafa H.

Razmatraćemo situaciju kada je hromatski broj $\chi(H) = r + 1$ za neki graf H.Tada je $T_{n,r}$ graf koji ne sadrži H kao podgraf. Ovo važi jer znamo da je $\chi\left(T_{n,r}\right) = r$ pa imamo r-bojenje grafa $T_{n,r}$, a ako je H podgraf grafa $T_{n,r}$, to bi indukovalo r −bojenje grafa H takođe.
Dakle važi:

$$ex(n, H) \geq e\left(T_{n,r}\right) = \left(1 - \frac{1}{r} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}.$$

Možda bismo pomislili da možemo postići bolje rezultate, ali zapravo ovo je najbolji asimptotski rezultat.

Sledeća teorema, zajedno sa Turánovom teoremom, daje potpunu sliku o tome koliko ivica može imati graf koji ne sadrži određene vrste podgrafova, bilo da su to kompletni podgrafovi ili grafovi sa većim hromatskim brojem.

Teorema 5.1.1. (Erdȍs-Stone-Simonovits, 1946.): Za svaki graf H, kada $n \to \infty$ važi:

$$ex(n, H) = \left(1 - \frac{1}{\chi(H)-1} + o(1)\right)\frac{n^2}{2}.$$

Ili možemo zapisati kao

$$\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}.$$

Odavde imamo da je Turánova gustina za graf H: $\pi(H) = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$.

Napomena: U knjizi „Graph Theory and Additive Combinatorics", Yufei Zhao, je dokazano kako se ova teorema izvodi iz Turánove teoreme.

Poznavanje hromatskog broja na neki način određuje koliki treba da bude ekstremalni broj. Sve što smo do sada dokazali, Mantelova teorema, Turánova teorema se slaže sa Erdȍs-Stone-Simonovits formulom.

- Neka je H trougao, tada je $\chi(H) = 3$ pa dobijamo da je

$$\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

  Slaže se sa Mantelovom teoremom.

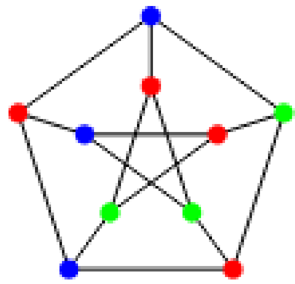
- Neka je $H = K_4$, tada je $\chi(H) = 4$ pa dobijamo da je

$$\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

  Slaže se sa Turánovom teoremom.

Šta se dešava ukoliko imamo neki podgraf H koji je prilično komplikovan?



Slika 5.1: Petersenov graf

- Neka je H Petersenov graf, tada je $\chi(H) = 3$ pa dobijamo da je

$$\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Iako Petersonov graf izgleda komplikovano, možemo primeniti Erdos-Stone-Simonovits teoremu jer hromatski broj grafa potpuno upravlja ponašanjem ekstremalnih brojeva.

Napomena: Erdös-Stone-Simonovits teorema određuje asimptotske vrednosti Turánovih brojeva $ex(n, H)$ za sve grafove za koje je $\chi(H) \geq 3$.

- Ako je $\chi(H) = 2$ tj. ako je bipartitan, tada imamo da je

$$\frac{ex(n,H)}{\binom{n}{2}} = 1 - \frac{1}{\chi(H)-1}$$

$$= 1 - 1 = 0$$

Ovo nam ne daje informaciju koliko brzo ekstremalni broj opada u odnosu na n.
Ispostavlja se da je za većinu bipartitnih grafova H ovo veoma težak problem za koji se i dalje ne zna odgovor.
Možemo samo da dokažemo gornje granice za ekstremalni broj u ovom slučaju.

5.2. Grafovi koji ne sadrže kompletan bipartitni graf

Ovde ćemo se baviti određivanjem $ex(n, K_{s,t})$, maksimalnog broja grana u grafu sa n čvorova bez kompletnog bipartitnog grafa (s i t predstavljaju veličine delova bipartitnog grafa).

Teorema Erdös-Stone-Simonovits rešava pitanje određivanja $ex(n, H)$ za mnoge grafove H, ali ne kaže ništa o bipartitnim grafovima H.

Precizna asimptotska procena $ex(n, K_{s,t})$ je tema *Zarankiewicz problema* koji predstavlja otvoren problem u ekstremalnoj teoriji grafova.
Iako je tako, postignut je značajan napredak sa sledećom teoremom (Kovari-Sos-Turan).

Ova teorema pruža gornju granicu za broj ivica u grafu sa n čvorova koji ne sadrži određeni bipartitni podgraf $K_{s,t}$.

Prvo ćemo dokazati sledeću lemu.

Lema 5.1: Ako je $H_1 \subseteq H_2$ onda važi $ex\left(n, H_1\right) \leq ex\left(n, H_2\right)$.

Dokaz:

Neka je $H_1 \subseteq H_2$ i pretpostavimo suprotno, tj. da ne važi $ex(n, H_1) \leq ex(n, H_2)$. Tada imamo da je $ex(n, H_1) > ex(n, H_2)$.

Neka je G graf sa n čvorova koji ne sadrži H_1 i ima maksimalan broj ivica. Tada je $e(G) = ex(n, H_1) > ex(n, H_2)$. To znači da graf G ima više od $ex(n, H_2)$ ivica. Sada prema definiciji ekstremalnog broja za graf H_2, graf G mora imati podgraf koji je izomorfan grafu H_2. Ali $H_1 \subseteq H_2$ pa bi graf G imao podgraf koji je izomorfan grafu H_1 što je kontradikcija sa pretpostavkom da graf G ne sadrži H_1.

Svaki bipartitan graf H je podskup nekog kompletnog bipartitnog grafa $K_{s,t}$. Ako je $H \subseteq K_{s,t}$ onda zbog prethodne leme važi da je $ex(n, H) \leq ex(n, K_{s,t})$. Zbog toga, razumevanjem granice za ekstremalni broj kompletnih bipartitnih grafova, dobijamo gornju granicu za ekstremalni broj opštih bipartitnih grafova.

Napomena: U dokazu teoreme ćemo koristiti sledeću činjenicu. Ako je funkcija konveksna onda važi $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \geq n f\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\right)$.

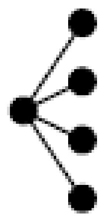
Teorema (Kovari-Sos-Turan): Za pozitivne cele brojeve $s \leq t$, postoji konstanta $C = C(s, t)$, tako da za svako n važi:

$$ex\left(n, K_{s,t}\right) \leq Cn^{2-\frac{1}{s}}.$$

Dokaz:

Neka je G graf sa n čvorova i m ivica koji ne sadrži $K_{s,t}$ kao podgraf.

Želimo da vidimo koliko ima $K_{s,1}$ u grafu G.
Na primer, ako je $s = 4$ graf $K_{4,1}$ izgleda ovako:



Obeležićemo broj grafova $K_{s,1}$ u grafu G sa $\#K_{s,1}$ i koristićemo dvostruko prebrojavanje.
Naći ćemo gornju i donju granicu za broj grafova $K_{s,1}$. Pošto je $K_{s,1}$ kompletan bipartitan graf, skup od s čvorova ćemo nazvati desna strana, a skup u kojoj je samo jedan čvor leva strana.
Za dobijanje gornje granice za $\#K_{s,1}$ u grafu G posmatraćemo desnu stranu.
Svaki podskup grafa G, koji se sastoji od s čvorova, ima najviše $t - 1$ zajedničkih suseda. Ukoliko bi postojalo t zajedničkih suseda imali bismo $K_{s,t}$, a pretpostavili smo da je G graf koji ne sadrži $K_{s,t}$.

Dakle imamo:

$$\#K_{s,1} \leq (t - 1)\binom{n}{s}.$$

Za dobijanje donje granice za $\#K_{s,1}$ u grafu G posmatraćemo levu stranu.
Za svaki čvor $v \in V(G)$ imamo da je

$$\#K_{s,1} = \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s}.$$

Ovo važi jer je $d(v)$ broj čvorova koji su povezani sa čvorom v i za svaki $N(v)$ možemo izabrati s čvorova i time dobijamo ukupan broj podgrafova $K_{s,1}$ u grafu G.

Dalje imamo

$$\#K_{s,1} = \sum_{v \in V(G)} \binom{d(v)}{s} \geq n \binom{\frac{1}{n} \sum_{v \in V(G)} d(v)}{s} = n \binom{2\frac{m}{n}}{s}.$$

gde smo ovu nejednakost dobili koristeći konveksnost $x \longmapsto \binom{x}{s}$. Ovde posmatramo $\binom{x}{s}$ kao polinom stepena s. Funkcija $\binom{x}{s}$ je konveksna za $x \geq s - 1$.
Kombinujući gornju i donju granicu dobijamo:

$$n \binom{2\frac{m}{n}}{s} \leq (t - 1) \binom{n}{s}$$

Pošto $\binom{n}{s} \sim \frac{n^s}{s!}(1 + o(1))$ za fiksirano s:

$$n \frac{(2\frac{m}{n})^s}{s!}(1 + o(1)) \leq (t - 1) \frac{n^s}{s!}(1 + o(1))$$

$$n \left(\frac{2m}{n}\right)^s \leq (1 + o(1)) n^s (t - 1)$$

$$m \leq \left(\frac{1}{2} + o(1)\right)(t - 1)^{\frac{1}{s}} n^{2 - \frac{1}{s}}$$

$$m \leq C n^{2 - \frac{1}{s}}.$$

5.3.Grafovi koji ne sadrže konture

Ovde ćemo se baviti određivanjem $ex\left(n, C_l\right)$, maksimalnog broja grana u grafu sa n čvorova bez l-kontura.

Slučaj 1: Neparne konture, $l = 2k + 1$

Tada $\chi(C_{2k+1}) = 3$ i prema Erdös-Stone-Simonovits teoremi imamo:

$$ex\left(n, C_{2k+1}\right) = (1 + o(1))\frac{n^2}{4}.$$

U ovom slučaju, $H = C_{2k+1}$.
Ako je n dovoljno veliko (kao funkcija od k), tada je ekstremni graf kompletan bipartitni graf $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$ baš kao i u slučaju trouglova.

Teorema: Neka je k pozitivan ceo broj. Tada za dovoljno veliki ceo broj n važi:

$$ex\left(n, C_{2k+1}\right) = \frac{n^2}{4}.$$

Slučaj 2: Parne konture, $l = 2k$.

Pošto je C_{2k} bipartitan graf, znamo iz Kovari-Sos-Turán teoreme da je $ex\left(n, C_{2k}\right) = o\left(n^2\right)$. Sledeću gornju granicu odredili su Bondy[4] i Simonovits[5] (1974).

Teorema: Za sve pozitivne cele brojeve $k \geq 2$, postoji konstanta C tako da važi:

$$ex(n, C_{2k}) \leq Cn^{1+\frac{1}{k}}$$

Kroz teoreme Turána i Erdòs-Stone-Simonovits možemo videti kako izbegavanje određenih podgrafova utiče na maksimalan broj ivica koje graf može imati, kao i na njegov hromatski broj.

---

[4] John Adrian Bondy(rođen 1944. godine, još uvek živ) - engleski matematičar
[5] Miklós Simonovits(rođen 1943. godine, još uvek živ) - mađarski matematičar

6 Zadaci

Zadatak 1: Pokazati da je hromatski broj veći ili jednak od 3 ako i samo ako G ima neparnu konturu.

Rešenje:

($\Leftarrow$): Ako G ima neparnu konturu, onda to nije bipartitan graf, pa na osnovu Teoreme 2.1.5 i teoreme 3.1.1 dobijamo da je $\chi(G)\neq 1, 2 \Rightarrow \chi(G)\geq 3$.

($\Rightarrow$): Neka je $\chi(G)\geq 3$. Ako je $\chi(G)\geq 3$ znači da su potrebne najmanje tri boje da bi se čvorovi obojili tako da nijedna dva susedna čvora nemaju istu boju.
To znači da graf nije bipartitan, jer bipartitni grafovi mogu biti obojeni sa najviše dve boje.
Iz Teoreme 3.2.1 sledi da graf sadrži neparnu konturu.

Zadatak 2: Neka je G graf sa maksimalnim stepenom k. Dokazati da je hromatski broj ne veći od k+1.

Rešenje:

Indukcijom po n.

Baza indukcije: Za graf sa jednim čvorom je dovoljna jedna boja $\chi(G) = 1 < k + 1$.

Indukcijska hipoteza: Pretpostavimo da za svaki graf sa manje od n čvorova važi da se može obojati sa najviše $k + 1$ bojom gde je k maksimalni stepen čvora u tom grafu.

Indukcijski korak: Hoćemo da dokažemo da tvrđenje važi za graf G sa n čvorova i maksimalnim stepenom k.
Uklonimo neki čvor $v\in G$ i sve njegove incidentne grane i dobijamo graf G_1 sa $n - 1$ čvorom.
Po induktivnoj hipotezi graf G_1 može biti obojen sa najviše $k + 1$ bojom.
Nakon što obojimo graf G_1 vraćamo uklonjen čvor v u graf G.
Čvor v ima najviše k suseda jer je stepen čvora v maksimalno k. Ovi susedi su već obojeni sa najviše k boja (po indukcijskoj pretpostavci). Dakle, postoji barem jedna boja među $k + 1$ bojama koja nije korišćena za susede čvora v. Obojimo čvor v tom preostalom bojom.

Zadatak 3: Dokazati da je kontura bipartitan graf ako i samo ako je dužina konture parna.

Rešenje:

Neka je $C = v_1 v_2 \dots v_n v_1$ kontura.
($\Rightarrow$)**:** Pretpostavićemo da je C bipartitan graf sa delovima X i Y. Neka je bez umanjenja opštosti, $v_1\in X$. Onda je $v_2\in Y$, $v_3\in X$ itd.
Kako je $v_1\in X$, imamo da je $v_n\in Y$ zato što su v_1 i v_n susedni čvorovi.

$v_n \in Y \Rightarrow n$ je paran, zato što čvorovi koji pripadaju X su indeksirani neparnim brojevima, a čvorovi koji su u Y su indeksirani parnim brojevima.

(⟸): Sada, pretpostavimo da je C parne dužine, tj. n je paran ceo broj. Tvrdimo da je C bipartitan.
$X = \left\{v_i : i\, je\, neparan\right\}$
$Y = \left\{v_i : i\, je\, paran\right\}$

Svaka grana ima jedan kraj u X, a drugi u Y. Time smo dobili bipartitan graf $G(X, Y)$.

Zadatak 4. Neka je G graf sa n čvorova koji nije bipartitan i ne sadrži trouglove. Tada on ima najviše $\frac{(n-1)^2}{4} + 1$ ivica.

Rešenje:

Neka je G graf sa n čvorova koji nije bipartitan i nema trouglove.
Pošto nije bipartitan sledi da mora postojati kontura neparne dužine na osnovu teoreme 3.2.1.

Ako uklonimo jedan čvor iz neparne konture, dobijamo graf sa $n - 1$ čvorom koji je bipartitan. Razlog zbog kojeg graf nije bio bipartitan je bila kontura neparne dužine. Uklanjanjem jednog čvora iz te neparne konture znači da ostatak grafa više neće imati neparne konture odakle sledi (iz teoreme 3.2.1.) da graf postaje bipartitan.

Prema Mantelovoj teoremi, takav graf može imati najviše $\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\rfloor$ ivica.
Ako dodamo uklonjeni čvor nazad u graf i povežemo ga tako da ne stvorimo trougao, dobijamo najviše $\lfloor\frac{(n-1)^2}{4}\rfloor + 1$ ivica što je trebalo pokazati.

Zadatak 5: Neka je G graf sa $2n$ čvorova i ima više od n^2 ivica. Dokazati indukcijom da G sadrži trougao.

Rešenje:

Indukcijom po n.

Baza indukcije: Kada je $n = 2$ to znači da imamo 4 čvora i više od 4 ivice.
Kada imamo četiri čvora, prema Mantelovoj teoremi imamo da je najveći broj ivica $\frac{n^2}{4} = \frac{16}{4} = 4$ a da ne sadrži trougao, odakle sledi da kada dodamo još jednu ivicu moramo imati trougao.
Indukcijska hipoteza: neka tvrđenje važi za sve grafove sa manje od $2n$ čvorova.

Indukcijski korak: sada posmatramo graf G sa $2n$ čvorova i više od n^2 ivica.
Uzmimo jednu ivicu grafa G, sa krajevima A i B. Ako je suma stepena čvorova od A i B najmanje $2n + 1$, onda A i B imaju najmanje jednog zajedničkog suseda (jer bi zbir stepena čvorova A i B bio veći od ukupnog broja čvorova u grafu) i time bismo dobili trougao.

U suprotnom, uklonimo A i B i sve ivice koje su susedne njima.. Preostali graf ima $2n - 2 = 2(n - 1)$ čvorova i najmanje

$n^2 + 1 - (2n - 1) = n^2 + 1 - 2n + 1 = (n - 1)^2$ ivica, pa po indukcijskoj hipotezi sadrži trougao.

Ovaj dokaz je sličan dokazu Mantelove teoreme, ali predstavlja specijalan slučaj za grafove sa parnim brojem čvorova.

7 Zaključak

U ovom radu smo istražili različite aspekte ekstremalne teorije grafova, sa posebnim fokusom na Turánovu teoremu i njene generalizacije.

Suština Turánove teoreme je da daje gornju granicu za broj ivica u grafu koji ne sadrži određeni podgraf. Generalno, teorema pruža važne uvide u strukturu grafova, omogućavajući nam da odredimo koliko ivica maksimalno može imati graf koji ne sadrži kompletan podgraf K_{r+1}. Ovo je ključni rezultat u ekstremalnoj teoriji grafova koji pomaže u razumevanju kako zabrana određenih podgrafova utiče na ukupnu strukturu i osobine grafova.

Počevši od osnovnih pojmova i istorijskog pregleda, analizirali smo kako se ova teorema može primeniti na različite vrste grafova, kao što su opšti grafovi, kompletni bipartitni grafovi i konture.

Dok su neki ključni rezultati, poput Erdös-Stone-Simonovits teoreme postignuti, i dalje ostaje mnogo otvorenih pitanja, posebno za bipartitne grafove, gde još uvek nije utvrđen tačan red asimptotskih brojeva. Ovo istraživanje, ne samo da doprinosi teorijskoj matematici već i podstiče razvoj novih metoda i pristupa koji mogu proširiti naše razumevanje ekstremalnih osobina grafova.

Pored teorijskog značaja, ekstremalna teorija grafova ima široku primenu u mnogim oblastima kao što su računarske nauke, bioinformatika, teorija kodiranja, optimizacija i društvene mreže. Turánova teorema takođe omogućava praktične primene koje poboljšavaju efikasnost i pouzdanost u različitim sistemima i procesima.

Na primer, u optimizaciji mreža, može se koristiti za izbegavanje zagušenja i obezbeđivanje otpornosti na kvarove, u bioinformatici za modeliranje proteinskih i genetskih mreža, u društvenim mrežama za analizu strukture i širenja informacija itd.

Daljim istraživanjem i primenom ovih teorema možemo očekivati nove napretke koji će dodatno proširiti naše razumevanje i sposobnost da rešavamo kompleksne probleme u različitim naučnim i tehnološkim domenima.

Literatura

1. V.Petrović, *Teorija grafova*, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad 1998.

2. D.Cvetković, *Teorija grafova i njene primene*, Naučna knjiga, Beograd 1990.

3. Miklós Bóna, *Introduction to Enumerative Combinatorics*, New York, 2007.

4. Chalk & Talk Session (Turáns Theorem), Instructor Arpita Patra, November 18, 2014.

5. Yufei Zhao, MITOCW, *Graph Theory and Additive Combinatorics*, fall, 2019.

6. Tristan Shin, *Extremal Graph Theory*, 4.jan.2020.

7. M.Simonovits, *On Paul Turán's influence on Graph Theory*, Budapest 1977.

8. Lowell W.Beineke, Robin J. Wilson, *Topics in algebraic graph theory*, Cambridge 2005.

9. I.Bošnjak, D.Mašulović, V.Petrović, R.Tošić, *Zbirka zadataka iz teorije grafova*, Novi Sad 2005.

10. J.A.Boundy and U.S.R. Murty, *Graph theory with applications*, Ontario, Canada 1976

11. Felix Gotti, *MIT: Combinatorial analysis*

BIOGRAFIJA

Katarina Milićev rođena je 16.11.1993. godine u Zrenjaninu. U Zrenjaninu je završila osnovnu školu „Dostitej Obradović" 2008. godine. kao nosilac Vukove diplome. Zatim je upisala Zrenjaninsku gimnaziju, koju je završila 2012. godine kao nosilac Vukove diplome. Iste godine upisala je osnovne akademske studije matematike na Prirodno-matematičkom fakultetu u Novom Sadu. Diplomirala je u julu 2020. godine i stekla zvanje Diplomirani profesor matematike. Obrazovanje je nastavila na Matematičkom fakultetu u Beogradu, gde u oktobru 2020. godine upisuje master akademske studije, modul Teorijska matematika i primene. Položivši poslednji ispit 2021.godine stekla je pravo na odbranu ovog master rada.

Beograd, 2024. *Katarina Milićev*