UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Marinko Kovačević

PARCIJALNO UREĐENI SKUPOVI I DILVORTOVA TEOREMA

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

dr Tanja Stojadinović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Nebojša Ikodinović, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Slavko Moconja, redovan profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Sadržaj

Uvod

Parcijalno uređeni skupovi (poseti) imaju dugu istoriju koja počinje sa prvim prepoznavanjem uređivanja među celobrojnim vrednostima. U ranom devetnaestom veku, svojstva uređivanja podskupova jednog skupa istraživao je De Morgan, dok je krajem devetnaestog veka parcijalno uređivanje prema deljivosti istraživao Dedekind. Iako Hausdorff nije inicijalno osmislio ideju parcijalno uređenog skupa, prvi opšti teorijski okvir poseta razvio je upravo on u svojoj knjizi ”Grundzüge der mengenlehre”iz 1914. godine. Tek tridesetih godina dvadesetog veka teorija rešetki počela je da se razvija kao nezavisna oblast, sa Birkhofovim čuvenim tekstom na ovu temu, prvi put objavljenim 1940. godine. Samo u poslednje tri decenije poseti i njihova primena u oblastima kao što su računarstvo, inženjering i društvene nauke intenzivno su istraživani. Jedan od najznačajnijih rezultata u teoriji poseta je Dilvortova teorema, koju je dokazao Robert Dilvort 1950. godine. Dilvortova teorema daje važan uvid u strukturu poseta, povezujući antilance i lance. Ova teorema ima široku primenu i predstavlja osnovu za mnoge druge rezultate u kombinatorici i teoriji rešetki.

Ovaj master rad koji obrađuje temu poseta i Dilvortove teoreme, podeljen je u tri poglavlja. U prvom poglavlju, daje se uvod u osnovne pojmove poseta. Poseti (parcijalno uređeni skupovi) predstavljaju temeljnu strukturu u teoriji skupova i kombinatorici, te će ovo poglavlje pružiti potrebne definicije, primere i osnovna svojstva poseta.

Drugo poglavlje, koje je srž ovog rada, bavi se dokazima Dilvortove teoreme. U ovom poglavlju biće prikazani različiti dokazi teoreme, uključujući direktne dokaze kao i izvedene dokaze koji koriste druge značajne teoreme i rezultate.

Treće poglavlje je posvećeno posledicama Dilvortove teoreme. Razmatraće se Halova teorema, koja je usko povezan sa Dilvortovom teoremom, kao i Erdős–Szekeres teorema, koja je značajan rezultat u kombinatorici i teoriji poseta.

1 Parcijalno uređeni skupovi

Definicija 1.1. Neka su A i B proizvoljni skupovi. Sa $A \times B$ označavamo Dekartov proizvod skupova A i B koji definišemo kao skup uredjenih parova kojima su prve koordinate iz A, a druga iz B tj.

$$A \times B = \{(a,b) | a \in A \wedge b \in B\}.$$

Proizvoljan podskup navedenog Dekartovog proizvoda nazivamo **binarna relacija** na $A \times B$. Ako vredi $A = B$, onda kažemo da se radi o homogenoj binarnoj relaciji, inače kažemo da je binarna relacija heterogena.

Da su a i b u relaciji R obično zapisujemo kao $(a,b) \in R$, $R(a,b)$ ili aRb. Napomenimo da se u matematici uobičajno za nazive relacija koriste slova grčkog alfabeta $\theta, \rho, \tau, \sigma$...

Primer 1.1. Neka je $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Tada je

$$\rho = \{(a_1, a_2), (a_1, a_4), (a_2, a_3), (a_3, a_3), (a_4, a_3)\}$$

relacija na skupu A.

Definicija 1.2. Neka je dat skup A. Za homogenu relaciju ρ nad skupom A tj. $\rho \subseteq A \times A$ kažemo da je:

(1) refleksivna, ako za sve $a \in A$: $(a,a) \in \rho$,

(2) antirefleksivna, ako za sve $a \in A$: $(a,a) \notin \rho$,

(3) simetrična, ako za sve $a, b \in A$: $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \in \rho$,

(4) antisimetrična, ako za sve $a, b \in A$: $((a,b) \in \rho \bigwedge (b,a) \in \rho) \Rightarrow (a = b)$,

(5) asimetrična, ako za sve $a, b \in A$: $(a,b) \in \rho \Rightarrow (b,a) \notin \rho$,

(6) tranzitivna, ako za sve $a, b, c \in A$: $(a,b) \in \rho \bigwedge (b,c) \in \rho \Rightarrow (a,c) \in \rho$.

Definicija 1.3. Dijagonalna relacija na skupu A je data sa:

$$\triangle_A := \{(a,a) : a \in A\}$$

Ova relacija se naziva jos i **identitet** ili **relacija jednakosti**.

Definicija 1.4. Neka je dat skup S. Za homogenu binarnu relaciju $\rho \subseteq S^2$ kažemo da je **relacija poretka(uredjenja)** ako zadovoljava sledeće osobine:

(I) $(x, x) \in \rho$ za svaki element x iz S

(II) Ako važi $(x, y) \in \rho$ i $(y, x) \in \rho$, tada je $x = y$ za svaka dva elementa x i y iz S.

(III) Ako važi $(x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in \rho$, tada je $(x, z) \in \rho$ za svaka tri elementa x, y i z iz S.

Uslovi (I), (II) i (III) sumiraju, respektivno, da je relacija ***poretka*** *refleksivna*, *antisimetrična* i *tranzitivna*.

Napomena 1.1.
Ako važi $(x, y) \in R$ ili $(y, x) \in R$, kažemo da su x i y **uporedivi** u odnosu na relaciju R. Inače, kažemo da su ti elementi **neuporedivi**.

Definicija 1.5. Neka je dat skup S. Za homogenu binarnu relaciju $\rho \subseteq S^2$ kažemo da je **relacija strogog poretka(uredjenja)**, ili **striktnog poretka(uredjenja)** ako zadovoljava sledeće osobine:

(IV) $(x, x) \notin \rho$ za svaki element x iz S.

(V) Ako važi $(x, y) \in \rho$ i $(y, z) \in \rho$, tada je $(x, z) \in \rho$ za svaka tri elementa x, y i z iz X.

Uslovi (IV), (V) sumiraju, respektivno, da je ***relacija strogog poretka*** *antirefleksivna* i *tranzitivna*.

Primer 1.2. Neka je $A = \{1, 2, 3\}$ i relacija

$$R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$$

Tvrdimo da je relacija R relacija poretka na skupu A. To ćemo pokazati proverom svojstava relacije poretka.

1. refleksivnost: važi jer $\{\forall x \in A | (x, x) \in R\}$ tj. $(1, 1), (2, 2), (3, 3) \in R$
2. antisimetričnost: Važi jer jedini parovi za koje važi $(x, y) \in R$ i $(y, x) \in R$ su upravo oni koji imaju jednake prve i druge koordinate, tj. elementi $\triangle_A$.

3. tranzitivnost: Direktnom proverom elemenata relacije dobija se da važi tranzitivnost.

Primer 1.3. Navodimo relacije poretka definisane nad skupom prirodnih brojeva $\mathbb{N}$:

1. Relacija 'manje ili jednako' $\leq$ na skupu $\mathbb{N}$ je relacija poretka definisiana na sledeći način:

$$m \leq n \text{ ako i samo ako } m = n \text{ ili } (\exists p)(m + p = n)$$

   (a) refleksivnost: $(\forall x \in \mathbb{N})\ x \leq x$
   To je očigledno jer $x = x$.

   (b) antisimetričnost: $(\forall x, y \in \mathbb{N}\ x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y$.
   Posmatramo dva slučaja: Ukoliko je $x = y$ dokaz trivijalno važi. Ukoliko pretpostavimo da ne važi da je $x = y$, mora da postoje q i p tako da je $x + q = y$ i $x = y + p$. Odatle dobijamo da je $x + p + q = x$, tj. $p + q = 0$. Kako ne postoje prirodni brojevi q i p tako da zadovoljavaju ovo, zaključujemo da pretpostavka ne važi, što znači da je $x = y$.

   (c) tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})\ x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z$
   Posmatramo dva slučaja, jedan je trivijalan oko kojeg se nećemo zadržavati. Drugi slučaj, ako imao da je $x \leq y$ tada postoji p tako da je $x + p = y$, i ako $y \leq z$ postoji neko q takvo da $y + q = z$. Iz ove dve jednačine imamo da $x + p + q = z$ iz čega sledi $x \leq z$, što smo i trebali da dokažemo.

2. Relacija 'deli' $|$ na skupu $\mathbb{N}$ je relacija poretka, definisana sa:

$$m|n \text{ ako i samo ako } (\exists p)(m \cdot p = n)$$

   (a) refleksivnost: $(\forall x \in \mathbb{N})\ x|x$
   Ovo je očigledno, jer za $p = 1$ dobijamo $x \cdot 1 = x$, što znači da $x|x$

   (b) antisimetričnost: $(\forall x, y \in \mathbb{N})\ x|y \wedge y|x \Rightarrow x = y$.
   Pretpostavimo da važi $x|y \wedge y|x$. Tada postoji p da $x \cdot p = y$ i postoji q da $y \cdot q = x$. Dobijamo da je $x \cdot p \cdot q = x$, odakle sledi da $p \cdot q = 1$. Jednakost važi u slučaju kada: $p = q = 1$, što znači da je $x = y$.

(c) tranzitivnost: $(\forall x, y, z \in \mathbb{N})\ x|y \wedge y|z \Rightarrow x|z$

Pretpostavimo da je $x|y \wedge y|z$.To znači da postoji p da važi $x \cdot p = y$ kao i q da važi $y \cdot q = z$. Iz ove dve jednačine dobijamo $x \cdot p \cdot q = z$, odakle sledi da $x|z$.

Definicija 1.6. Uredjeni par $(S, \leq)$ nazivamo **parcijalno uredjen skup (poset)** ako je $\leq$ relacija poretka nad skupom S.

Definicija 1.7. Uredjeni par $(S, <)$ nazivamo **strogo parcijalno uredjen skup** ako je $<$ relacija strogog(striktonog) poretka nad skupom S.

Lema 1.1. *Neka je $(X, <)$ jedan strogo parcijalno uredjen skup i neka važi da je $x < y$ za $(x, y) \in X$, tada neće važiti $y < x$.*

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, da važi i $x < y$ i $y < x$.
Na osnovu svojstva tranzitivnosti relacije $<$, dobijamo da je $x < x$, što je kontradikcija sa svojstvom anti-refleksivnosti relacije $<$.

$\square$

U sledećoj lemi ćemo pokazati da **relacije poretka** i **relacije strogog poretka** razikuje samo dijagonala skupa.

Lema 1.2. *Neka je $(X, \leq)$ parcijalno uredjen skup. Definišemo relacije strogog poretka na sledeci način $< = \leq \setminus \triangle_X$ tj. :*

$$x < y \text{ ako i samo ako } x \leq y, \text{ ali } x \neq y \text{ za svako } x, y \in X.$$

Tada je $(X, <)$ ***strogo parcijalno uredjen skup****.*

Dokaz.

1. **Antirefleksivnost**: Za svaki element $x \in X$, $x \not< x$ jer $x < x$ nije dozvoljeno prema definiciji.
2. **Tranzitivnost** se nasledjuje.

$\square$

Lema 1.3. *Neka je $(X,<)$ strogo parcijalno uredjen skup. Definisanjem relacije poretka na sledeci način $\leq = < \cup \triangle_X$ tj. :*

$$x \leq y \text{ ako i samo ako } x < y \text{ ili } x = y \text{ gde } x, y \in X.$$

*Tada je $(X, \leq)$ **parcijalno uredjen skup**.*

Dokaz.

1. **Refleksivnost**: Za proizvoljan element $x \in X$, $x \leq x$ iz razloga što je $x < x$ ili $x = x$.
2. **Antisimetricnost**: Ako je $x \leq y$ i $y \leq x$, to implicira da je $x < y$ i $y < x$ (sto nije moguće po Lemi 2.1), ili implicira da je $x = y$.
3. **Tranzitivnost** se nasledjuje.

□

Primer 1.4. Navodimo neke poznate parcijalno uredjene skupove.

1. Skup $\mathbb{N}$ prirodnih brojeva ureduje se kao $(\mathbb{N}, \leq)$

   $m \leq n$ ako i samo ako $m = n$ ili $(\exists p)(m + p = n)$

2. $(\mathbb{N}, |)$ pri čemu je $|$ relacija 'deli'

   $m|n$ ako i samo ako $(\exists p)(m \cdot p = n)$

3. Skup $\mathbb{Z}$ celih brojeva uredjuje se kao $(\mathbb{Z}, \leq)$, tako da je

   $x \leq y$ ako i samo ako $(\exists z)(z \in \mathbb{Z}$ i $x + z = y)$

4. Uredjeni skupovi su i $(\mathbb{Q}, \leq)$ i $(\mathbb{R}, \leq)$, gde su $\mathbb{Q}$ i $\mathbb{R}$ su redom skupovi racionalnih i realnih brojeva, a poredak je uobičajni poredak za brojeve.

5. Ako je A neprazan skup, a $\mathcal{P}(A)$ njegov partitivni skup (skup svih podskupova A), onda je $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ skup uredjen inkluzijom, tj:

   $X \subseteq Y$ ako i samo ako $(\forall a \in A)(a \in X \Rightarrow a \in Y)$

Definicija 1.8. Za relaciju poretka ρ na skupu S kažemo da je **relacija totalnog poretka**, ili **linearnog uređenja**, ako za svaka dva elementa $a, b \in S$ važi: ili $(a, b) \in \rho$ ili $(b, a) \in \rho$.

Definicija 1.9. Uredjeni par $(S, \leq)$ nazivamo **linearno(totalno) uređen skup**, ako je $\leq$ relacija linearnog uređenja na skupu S.

Napomena 1.2.
Valja napomenuti da je u parcijalno uređenom skupu moguće imati neuporedive elemente, dok u totalno uređenom skupu, svaka dva elementa moraju biti uporediva u odnosu na zadanu relaciju.

Primer 1.5.
Skup $\{1, 2, 4, 8\}$ sa relacijom deljivosti $|$ čini jedan konačan totalno uređen skup. Međutim, $(\{1, 2, 4, 8, 12\}), |)$ nije totalno uređen jer niti $8|12$ niti $12|8$. Jedan beskonačan totalno uređen skupu odnosu na relaciju $|$ je skup $\{2^k : k \in N\}$.

Posmatrajmo skup A i njegov partitivni skup $\mathcal{P}(A)$.
U opštem slučaju $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ nije totalno uređen, na primer različiti jednočlani podskupovi skupa A nisu uporedivi. Međutim, ako je $A = \emptyset$ ili je A jednočlan, $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ jeste totalno uređen.

1.1 Osnovni pojmovi poseta

U ovom poglavlju, upoznaćemo se sa osnovnim konceptima poseta. Kako bismo produbili naše razumijevanje ovih pojmova uvodimo pojam natkrivanja. Sa pojmom natkrivanja, otvaramo put ka uvođenju pojma Haseovog dijagrama[1], alata za vizualizaciju parcijalno uređenih skupova koji nam omogućavaju da jasno sagledamo strukturu i međusobne odnose između elemenata.

Definicija 1.10. Na uređenom skupu definiše se **relacija pokrivanja**, označena sa $\prec$, koja se izvodi iz poretka na sledeći način. Za uređeni skup $(P, \leq)$, gde je $\leq$ relacija poretka, i za $x, y \in P$:

$$x \prec y \text{ ako i samo ako je } x < y \text{ i iz } x \leq z \leq y \text{ sledi } z = x \text{ ili } z = y.$$

Odnosno, ekvivalentno:

$$x \prec y \text{ ako i samo ako } x < y \text{ i } \neg(\exists z)(x < z < y).$$

Kaže se da je x **pokriveno** sa y, ili da x **prethodi** y. Napomenimo da od tri osnovna svojstva relacije poretka, relacija pokrivanja ispunjava samo antisimetričnost.

[1] Helmut Hasse (1898-1979)

Primer 1.6. U ovom primeru ćemo kroz različite parcijalno uređene skupove predstaviti njihove odnose s relacijom pokrivanja.

1. Poset $(\mathbb{N}, \leq)$ ispunjava svojstva relacije pokrivanja:

   $m \prec n$ ako i samo ako je n sledbenik broja m $(n = m + 1)$.

2. Uredjeni skup $(\mathbb{Q}, \leq)$ racionalnih brojeva nema parove koji su u relaciji pokrivanja.

3. Poset $(\mathbb{N}, |)$ ispunjava svojstva relacije pokrivanja:

   $m \prec n$ ako i samo ako je $n = m \cdot p$, za neki prost broj p.

4. U uredjenom skupu $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ svih podskupova skupa A važi:

   $X \prec Y$ ako i samo ako je $Y = X \cup \{a\}$, za neko $a \in A$.

Lema 1.4. *Za dva različita elementa a i b konačnog poseta $(P, \leq)$ važi $a \leq b$ ako i samo ako je $a \prec b$, ili je $a \prec c_1 \prec ... \prec c_n \prec b$, za neke $c_1, ..., c_n \in P$*

Dokaz. Neka su a i b razliciti i $a \leq b$. Ukoliko ne postoji treći element c, takav da je $a \leq c \leq b$, onda je po definiciji relacije pokrivanja $a \prec b$. Ako postoji element izmedju njih, to znači da postoje $c_1, c_2, ..., c_n$, takvi da je $a < c_1 < ... < c_n < b$ i n je maksimalan broj elemenata sa tim svojstvom (P je konačan skup). Tada je $a \prec c_1 \prec ... \prec c_n \prec b$, jer u protivnom n ne bi bio maksimalan broj uporedivih elemenata izmedju a i b. Obratno, ako je $a \prec b$ ili postoji $c_1, c_2, ..., c_n$ takvi da je $a \prec c_1 \prec ... \prec c_n \prec b$, onda je $a \leq b$ po definiciji relacije pokrivanja i na osnovu tranzitivnosti relacije poretka. $\square$

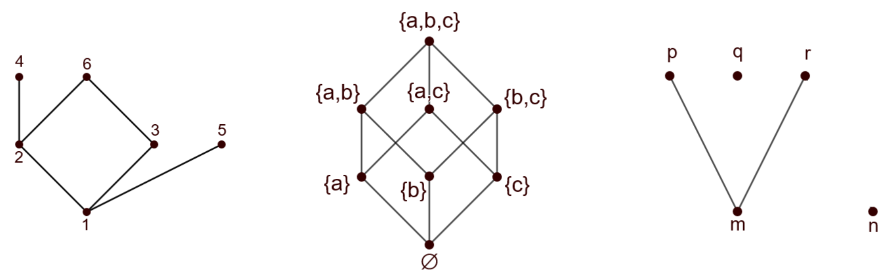
Konačni parcijalno uredjeni skupovi se mogu vizualno predstaviti pomoću tkv. **Haseovih dijagrama**. Takav dijagram je u stvari graf, čvorovi ovog grafa predstavljaju elemente poseta, dok su grane grafa u skladu sa relacijom pokrivanja koju odredjuje dati poredak: ako je $x \prec y$ postoji grana od x ka y. Usmerenje je takvo da je x ispod y na crtežu. Poredak se sa dijagrama 'čita' na prirodan način: $a \leq b$, ako postoji put od a ka b po granama 'od dole prema gore' na crtežu.

Primer 1.7. Na slici 1, predstavljeni su Haseovi dijagrami nekih uređenih skupova.
Dijagram a) odgovara skupu $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ u odnosu na relaciju | 'deli'. Sa dijagrama se vidi da je npr. $1|5$, jer je 1 povezan sa 5, od dole na gore. Isto tako primetimo da važi $1|6$, iz razloga jer $1|2$ i $2|6$, ili što važi $1|3$ i $3|6$. Elementi

2,3,5 kao i elementi 4 i 6 su neuporedivi, jer ne postoji takva povezanost, itd.

Dijagram b) odgovara partitivnom skupu tročlanog skupa $\{a, b, c\}$ u odnosu na skupovnu inkluziju $\subseteq$.

Za poredak pod c) dovoljno je analizirati dijagram: element m je u relaciji sa p i r dok su elemeti q i n neuporedivi ni sa jednim elementom (sem sa samim sobom).



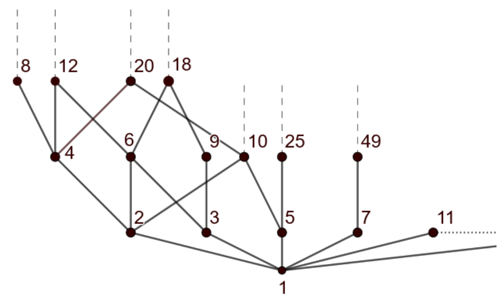
(a) (b) (c)

Slika 1

Pomoću Haseovih dijagrama se mogu predstavljati i neki beskonačni skupovi kao u sledećem primeru.

Primer 1.8. Na slici 2 su prikazani Haseovi dijagrami dva poretka $\leq$ i $|$ na skupu $\mathbb{N}$ definisana u primeru 1.3 . Haseovi dijagrami su samo delimično predstavili te skupove, po potrebi se mogu dopuniti.

(a) $(\mathbb{N}, \leq)$



(b) $(\mathbb{N}, |)$

Slika 2

Definicija 1.11. Za element x poseta $(X, \leq)$ kažemo da je ***maksimalan*** ukoliko ne postoji y iz X takav da je $x < y$ ($x \leq y$ i $x \neq y$). Analogno se definiše ***minimalan*** element u posetu.

Proizvoljan poset ne mora imati ni minimalan ni maksimalan element, ali kada govorimo o konačnim posetima važi sledeća lema.

Lema 1.5. *U svakom konačnom posetu postoji makar jedan minimalan i makar jedan maksimalan element.*

Dokaz.

◊ *Baza indukcije*:

Ako je $|X| = 1$, tada skup X ima smo jedan element pa tvrdjenje važi.

◊ *Indukciona hipoteza*:

Pretpostavljamo da tvrđenje važi za sve posete čiji je kardinalnost manji od n, gde je $n > 1$

◊ *Indukcioni korak*:

Izaberimo proizvoljan element a iz X. Ako je a maksimalan, dokaz

je završen. U suprotnom, postoji barem jedan element b takav da važi da je $a < b$.
Definišimo sada skup $Y = \{x \in X : a < x\}$.
Skup Y sa relacijom poretka indukovanom iz X takodje je poset, takav da $a \notin Y$, i važi da je $|Y| < |X|$.
Sada koristeći indukcionu hipotezu: Poset Y ima maksimalan element, neka je to c. Pokazaćemo da je c maksimalan element u posetu X.
Pretpostavimo suprotno, da postoji $d \in X$ takav da je $c < d$, tada sledi $a < c < d$. Odavde možemo zaključiti da $a < d$, što povlači $d \in Y$. Na ovaj način dobijamo kontradikciju, jer je c maksimalan element u skupu Y.

□

Definicija 1.12. Za element x poseta $(X, \leq)$ kažemo da je ***najveći element*** ako za svaki element $b \in X$ važi $b \leq x$, tj element koji je veći od svih elemenata poseta (u oznaci $\hat{1}_X$) elemenata poseta. Analogno se definiše i ***najmanji element*** poseta (u oznaci $\hat{0}_X$).

Teorema 1. *Ukoliko postoji, najveći (namanji) element poseta je jedinstaven.*

Dokaz.

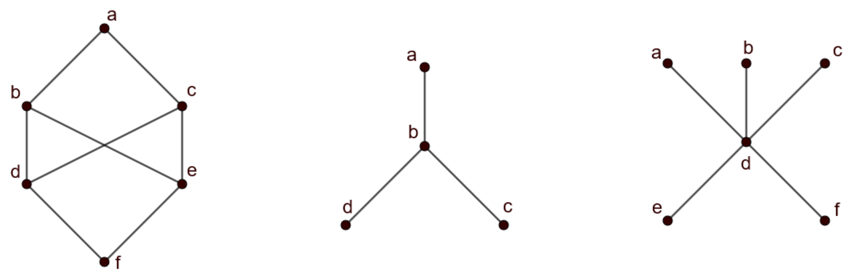
Pretpostavimo suprotno, da poset $(X, \leq)$ sadrži dva najveća elementa. Bez umanjenja opštosti, neka su to m i n, i neka je $m \neq n$. Po definiciji, ako je m najveći element onda važi:

$$(\forall y \in X)\ y \leq m.$$

Samim tim pošto je $n \in X$ važi da je $n \leq m$. Analogno, ako pretpostavimo da je n najveći element poseta, takodje važi i $m \leq n$. Sada na osnovu antisimetričnosti relacije $\leq$, zaključujemo da mora važiti $m = n$, čime je napravljenjena kontradikcija i teorema dokazana.

□

Primer 1.9. Radi boljeg razumevanja, kroz sledeće primere poseta, predstavljene Haseovim dijagramima, obradićemo minimalni, maksimalni, najveći i najmanji element.



(a) (b) (c)

Slika 3

Sa dijagrama (a) možemo zaključiti da elementi d i e nisu minimalni jer važe sledeće relacije $f \leq d$ i $f \leq e$. Slično, b i c nisu minimalni elementi, jer važi da $d \leq b$ i $e \leq c$, kao i $e \leq b$ i $d \leq c$. Takodje ni a ne može biti minimalan element je postoje relacije $d \leq a$ i $c \leq a$. Jedini **minimalni element** sa naseg dijagrama je f, jer ne postoji element koji prethodi njemu. Analogno dolazimo do zaključka da je element a jedini **maksimalni element**. Pored toga, pomenuti elementi a i f su takodje jedinstveni, pa respektivno predstavlju, **najveći** i **najmanji** element poseta.

Sa dijagrama (b) zaklučujemo da elementi d i c predstavljaju **minimalne elementi** zadatog poseta, i kao što možemo primetiri poset može imati više minimalnih (maksimalnijh) elemenata. Samim tim što nije ispunjen uslov jedinstvenosti zadati poset nema **najmanji element**. Dok sa druge strane element a predstavlja ujedno i **maksimalani** i **najveći element** poseta.

Dijagram (c) ostavljamo čitaocu za vežbu.

Definicija 1.13. Neka je $(P, \leq)$ neki poset. Za neprazan podskup $Q \subseteq P$ kažemo da je ***indukovan potposet*** od P, ukoliko važi $\leq_Q = \leq_{P|Q \times Q}$, tj. ukoliko, za x, y iz Q vredi $x \leq_Q y$ u Q ako i samo ako je $x \leq_P y$ u P.

Primer 1.10. Neka je $[n] = \{1, 2, 3, ..., n\}$ i neka je D_n skup svih delitelja broja n, tj. $D_n = \{a : a|n\}$. Definisaćemo sledeće indukovane posete:

1. Za dato $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljno $k \in [n]$, imamo da je $([k], \leq)$ indukovani potposet od $([n], \leq)$, gde $\leq$ predstavlja uobičajenu relaciju poretka.

2. Za dato $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljno $k \in [n]$, imamo da je $(\mathcal{P}(k), \subseteq)$ indukovani potposet od $(P(n), \subseteq)$.

3. Za dato $n \in \mathbb{N}$ i za $k \in [n]$ takvo da k deli n, imamo da je D_k indukovani potposet od D_n.

Teorema 2. *Ako je P konačan poset, tada imamo tačno $2^{|P|}$ indukovanih potposeta od P.*

Dokaz. Pretpostavimo da je P konačan poset. Pošto je P konačan, tada imamo tačno $2^{|P|}$ podskupova skupa P. Za dato $P^{'} \subseteq P$, postoji tačno jedna relacija $\leq^{'}$ takva da $(P^{'}, \leq^{'})$ predstavlja potposet od P,
definisana sa $\leq^{'} = \leq |_{P' \times P'}$. Iz toga sledi da imamo tačno 2^P potposeta od P. $\square$

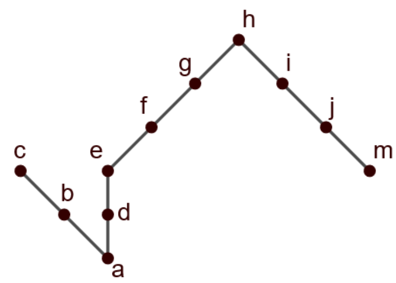
Definicija 1.14. Za x, y iz P za koje važi $x \leq y$ definišemo: ***zatvoren interval*** $[x, y]$ kao potposet od P indukovan skupom $\{z \in P : x \leq z \leq y\}$. Slično se definiše i ***otvoren interval*** $(x, y) = \{z \in P : x < z < y\}$

Definicija 1.15. U posetu P, ***lanac*** C je podskup od P u kojem su svaka dva elementa uporediva, tj. lanac predstavlja jedan totalno uređen skup.
Dužina lanca C se označava sa $l(C)$ i definiše se kao $l(C) = |C| - 1$.
Dužina intervala $[x, y]$ u P se označava sa $l(x, y)$.

Definicija 1.16. Za lanac C, $x_0 \leq x_1 \leq ... \leq x_{l(C)}$ u posetu P kažemo da je ***zasićen*** (povezan, eng: saturated) ako važi $x_{n-1} \prec x_n$ za svako $n \leq l(C)$. Lanac C u posetu P je ***maksimalan*** ako ne postoji $x \in P \backslash C$ takav da je $C \cup \{x\}$ takođe lanac u P.

Primer 1.11. Na primeru poseta sa slike 4, koji označavamo sa P, možemo zaključiti sledeće:
Dužina poseta je $l(P) = 5$. Takodje možemo izdvojiti sledeće maksimalne lance sa njihovim dužinama:

- $C_1 = \{a, d, e, f, g, h\}$, $l(C_1) = 5$
- $C_2 = \{a, b, c\}$, $l(C_2) = 2$
- $C_3 = \{m, j, i, h\}$, $l(C_3) = 3$

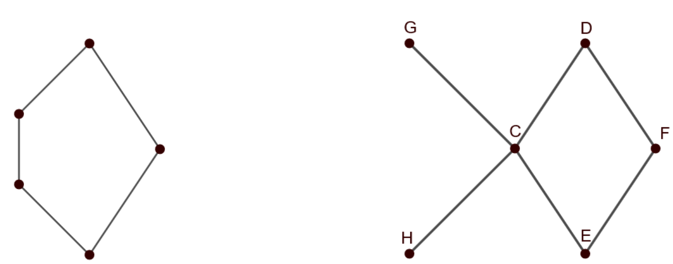


Slika 4

Lema 1.6. *Svaki maksimalan lanac je zasićen.*

Dokaz. Neka je lanac C u poseta P maksimalan i nije zasićen. Tada bi postojalo neko $z \in P \backslash C$ tako da $C \cup \{z\}$ bude lanac. Ali tada imamo da je $C \subsetneq C \cup \{z\}$, što je kontradikcija sa maksimalnošću C. Zaključujemo da C mora biti zasićen. $\square$

Definicija 1.17. Poset P je ***graduisan*** ako su svi maksimalni lanci u posetu P iste dužine. U graduisanom posetu za svaki $x \in P$, svi maksimalni lanci u intervalu $\left[\hat{0}, x\right]$ su iste dužine.



(a) Negraduisan poset (b) Graduisan poset

Slika 5

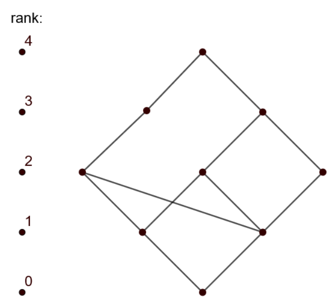
Definicija 1.18. Za poset P, definišemo ***rang funkciju*** $r : P \to N_0$ koja zadovoljava sledeće uslove:

1. $r(\hat{0}_P) = 0$

2. $r(y) = r(x) + 1$ ako $x, y \in P$ takvi da $x \prec y$

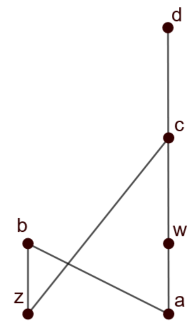
   Ukoliko $r(x) = i$ za $x \in P$, kažemo da je element x ranga i.

   Ako je $x \leq y$, tada $l(x, y) = r(y) - r(x)$



Slika 6: Graduisan poset

Definicija 1.19. Neka je $(P, \leq)$ jedan konačan poset.
Linearna ekstenzija L na posetu P je proširenje relacije $\leq$ tako da svaka dva elementa u P budu uporedivi. Drugim rečima, linearna ekstenzija poseta P je permutacija $x_1, x_2, ..., x_n$ njegovih elemenata u kojoj se svaki elementa iz P pojavi pre svih onih od kojih je manji (to jest, vredi $x_i < x_j \Rightarrow i < j$). Na primer, tabela na slici 7 prikazuje 11 linearnih ekstenzija datog poseta.



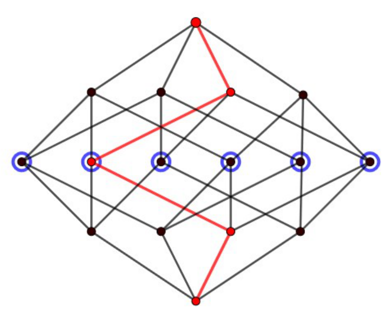
L_1	L_2	L_3	L_4	L_5	L_6	L_7	L_8	L_9	L_{10}	L_{11}
d	d	d	b	d	d	d	b	d	d	b
c	c	b	d	c	c	b	d	c	b	d
w	b	c	c	w	b	c	c	b	c	c
b	w	w	w	b	w	w	w	z	z	z
a	a	a	a	z	z	z	z	a	a	a
z	z	z	z	a	a	a	a	a	a	a

Slika 7: Poset sa svojim linearnim ekstenzijama

Definicija 1.20. **Antilanac** je podskup poseta P u kojem nikoja dva elementa nisu uporediva.

Definicija 1.21. Neka je P poset. **Širina** poseta $\omega(P)$ predstavlja dužinu najdužeg antilanca u P. **Visina** $v(P)$ pretstavlja dužinu najdužeg lanca u posetu P.

Koristeći se Haseovim dijagramom na slici 8 je crvenom bojom istaknut jedan maksimalan lanac, a plavom bojom maksimalan antilanac. Takodje možemo primetiti da poset ima visinu 4 i širinu 6.



Slika 8: Maksimalan lanac i antilanac u posetu $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, \subseteq)$

Lema 1.7. *Ako je C lanac, a A antilanac u posetu P, onda važi* $|C \cap A| \leq 1$.

Dokaz.

Pretpostavimo suprotno, da postoji lanac C i antilanac A u čijem preseku se nalaze elementi x i y, tj. da važi $C \cap A = \{x, y\}$.
Kako x i y pripadaju A, to znači da su oni neuporedivi.
Kako x i y pripadaju C, to znaci da su oni uporedivi. Ovo očigledno daje kontradikciji, pa sledi da $|C \cap A| \leq 1$.

□

Očigledna posledica prethodne leme su sledeća dva tvrdjenja:

Tvrdjenje 1.1.

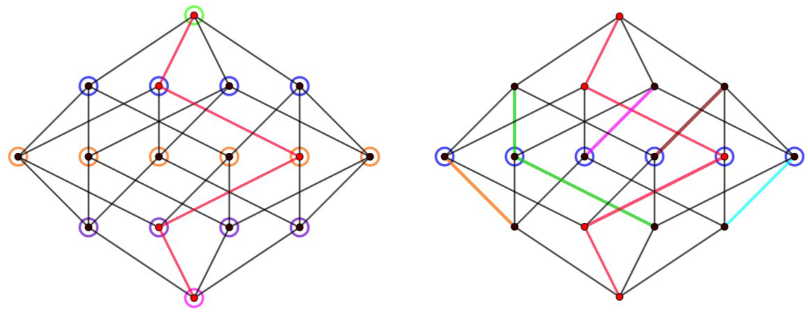
(a) Ako poset P ima lanac od r elemenata tada se P ne može predstaviti kao disjunktna unija manje od r antilanaca.

(b) Ako poset P ima antilanac sa m elemenata tada se P ne može predstaviti kao disjunktna unija manje od m lanaca.

Dokaz.

Ako je C lanac veličine r i $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ particija poseta P na antilance, onda je $|C \cap A_i| \leq 1$. Nepraznih preseka $C \cap A_i$ mora biti bar $r = |C|$ jer svaki pokriva samo jedan element iz C, pa je $r \leq n$. Analogno dokazujemo tvrdjenje (b).

□



Slika 9: Particija poseta $(\mathcal{P}(\{1,2,3,4\}, \subseteq)$ na najmanji mogući broj antilanaca i lanaca

Teorema 3. *(Mirsky[2]). Ako najduži lanac u posetu P ima r elemenata, tada se P može napisati kao unija r disjunktnih antilanaca.*

Dokaz. Svakom elementu x iz poseta P dodelimo visinu $v(x) :=$ dužina najdužeg lanca kojem je maksimalan element x.Vazi
Uočimo skupove $A_i := \{x \in P : v(x) = i\}$. Kako je najduži lanac u P dužine r, to je $A_i = \emptyset$ za $i \geq r$.
Očigledno je da su elementi u istom A_i neuporedivi, pa je

$$P = A_0 \cup A_1 \cup ... \cup A_{r-1}$$

traženo razlaganje P na antilance.

□

[2]Leonid Mirsky(1918-1983), rusko-britanski matematičar

2 Dilvortova teorema

Teorema 4 (Dilvortova teorema[3])**.** *Neka je* $(P, \leq)$ *konačan parcijalno uređen skup. Veličina maksimalnog antilanca jednaka je minimalnom broju lanaca potrebnih za pokrivanje svih elemenata poseta.*

$$min\{n : \exists C_1, C_2, ..., C_n \text{ da važi } S = \cup_{i=1}^{n} C_i\} = max\{|A| \colon A \text{ je antilanac}\}.$$

Lema 2.1. *Maksimalna veličina antilanca poseta* $(P, \leq)$ *je manja ili jednaka minimalnom broju lanaca koji pokrivaju sve elemente poseta, tj.*

$$max\{|A|\} \leq min\{n\}.$$

Dokaz. Neka je $C_1, C_2, .., C_n$ kolekcija lanaca takva da zadovoljava $P = \cup_{i=1}^{n} C_i$. Pretpostavimo da je A jedan antilanac. Tada važi $n \geq |A|$ jer ukoliko bi važilo $n < |A|$ tada bi po **Dirihleovom principu**[4] postojala dva elementa iz A u istom lancu, što je u kontradikciji sa lemom 1.7. □

2.1 Direktni Dokazi

2.1.1 Galvinov dokaz

Dokaz. Pratićemo Galvinov[5] dokaz iz [3], koristeći indukciju po broju elemenata skupa P.

◊ *Baza indukcije*: Ako je $|P| = 0$ ili $|P| = 1$, onda teorema važi.

◊ *Indukcijska hipoteza*: Pretpostavimo da za $2 \leq |P| < n$ tvrdjenje iz teoreme važi.

◊ *Indukcijski korak*: Dokazujemo za $|P| = n$. Neka je x maksimalan element u posetu P. Tada je $(P \backslash \{x\}, \leq)$ parcijalno uredjen skup sa $|P|$-1 elemenata, pa po indukcionoj hipotezi znamo da u skupu $P \backslash \{x\}$ u kome maksimalan antilanac ima k elemenata, postoji particija skupa $P \backslash \{x\}$ na lance $\{C_1, C_2, ..., C_k\}$. Tada imamo konačan broj antilanaca $A_1, A_2, ..., A_r$ od po k elemenata. Prema lemi 1.7 svaki presek $C_i \cap A_j$

[3]Robert Palmer Dilworth, američki matematičar (1914-1993)

[4]Peter Gustav Lejeune Dirichlet(1805-1859) Ako n+1 ili više objekata rasporedimo u n kutija, onda će barem jedna kutija sadržati najmanje dva objekta.

[5]Frederick William Galvin, američki matematičar (1936 -)

sadrži najviše jedan element, gde je $i \in \{1, 2, ..., k\}$ i $j \in \{1, 2, ..., r\}$. S obzirom da važi:

$$(C_1, C_2, ..., C_k) \cap A_j = k$$

zaključujemo da preseci oblika $C_i \cap A_j$ sadrže tačno jedan element. Označimo te elemente sa $C_i \cap A_j = a_{ij}$.
Uvedimo sledeće oznake: $a_i = max_j a_{ij}$, gde je $j \in \{1, 2, ..., r\}$
i $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$.
Dokažimo da je A jedan antilanac. Neka su a_i i $a_{i'}$ iz skupa A. Tada su oni oblika:

$$(a_i =) a_{ij} = max_l \ a_{il} \text{ i } (a_{i'} =) a_{i'j'} = max_l \ a_{i'l}$$

kako je $a_{ij} = max_l \ a_{il}$, znamo da $a_{ij'} \leq a_{ij}$. Pošto su $a_{ij'}$ i $a_{i'j'}$ u skupu $A_{j'}$, oni su neuporedivi. Imamo tri mogućnosti:

1. $a_{ij} \leq a_{i'j'}$.
   Zajedno sa uslovom $a_{ij'} \leq a_{ij}$, zbog tranzitivnosti relacije dobijamo: $a_{ij'} \leq a_{ij} \leq a_{i'j'}$, tj. $a_{ij'} \leq a_{i'j'}$, a to nas dovodi do kontradikcije jer su oni neuporedivi.
2. $a_{i'j'} \leq a_{ij}$.
   Zajedno sa uslovom $a_{ij'} \leq a_{ij}$, dobijamo da mora biti
   ili $a_{ij'} \leq a_{i'j'}$ ili $a_{i'j'} \leq a_{ij'}$ a to je kontradikcija sa uslovom da su oni neuporedivi.
3. $a_{i'j'} \leq a_{ij}$ su neuporedivi.

Kako ostaje samo mogućnost da su $a_{i'j'} \leq a_{ij}$ neuporedivi, sledi da je A antilanac.
Dalje, kako je u $P \backslash \{x\}$ konstruisan antilanac A sa k elemenata, u odnosu na uporedivost elemenata iz A sa x postoje dve mogućnosti:

1. x nije uporediv ni sa jednim elementom iz A.
   Tada je $A' = A \cup \{x\}$ antilanac u P. Ovo je maksimalan antilanac u P, jer ako bi smo pretpostavili suprotno, postojao bi antilanac sa $k+2$ ili sa više elemenata. Tada bismo izvlačenjem x iz P, dobili u $P \backslash \{x\}$ antilanac sa $k+1$ elementom, što je nemoguće. Odatle zaključujemo da je A' maksimalan antilanac u P, a odgovarajuće particiranje skupa P na tačno $k+1$ lanac je:

$$P = C_1 \cup C_2 \cup ...C_k \cup \{x\}.$$

2. x je uporediv sa nekim elementom iz A.
   Ovo znači da postoji $a_i \in A$, takav da su a_i i x uporedivi. Kako je x maksimalan element u P ne može biti $x \leq a_i$, pa mora biti $a_i \leq x$. Na osnovu definicije elementa a_i, znamo da je a_i najveći element u lancu C_i, koji je sadržan u nekom od antilanaca sa k elemenata u skupu $P \backslash \{x\}$. Neka je:

   $$C = \{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\} \cup \{x\}.$$

   S obzirom da je

   $$\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\} \subseteq C_i,$$

   to je $\{a_{i1}, a_{i2}, ..., a_{ir}\}$ lanac, i kako za svako j važi da $a_{ij} \leq a_i \leq x$, dobijamo da je i C lanac. Posmatrajmo parcijalno uređen skup $(P \backslash C, \leq)$. U ovom skupu nemamo antilanaca sa k elemenata (jer svaki antilanac A_j iz $P \backslash \{x\}$ sadrži tačno jedan element a_{ij} iz C). Međutim, u $P \backslash C$ je sadržano nekoliko antilanaca sa $k-1$ elemenata, s obzirom da svaki $A_j \backslash \{a_{ij}\}$ leži u $P \backslash C$. Kako skup $P \backslash C$ ima maksimalan antilanac sa $k-1$ element, na osnovu indukcijske hipoteze skup $P \backslash C$ možemo rastaviti na tačno $k-1$ lanac:

   $$P \backslash C = C_1' \cup C_2' \cup ...C_{k-1}'.$$

   Onda, skup P možemo rastaviti na particiju u k lanaca:

   $$P = C_1' \cup C_2' \cup ...C_{k-1}' \cup C.$$

   Po lemi 1.7, sledi da u skupu P ne postoji antilanac sa više od k elemenata, tj. A je maksimalan antilanac.

□

2.1.2 Perlesov dokaz

Dokaz. Pratićemo Perlesov dokaz iz [8], radeći indukciju po broju elemenata skupa P.

- $\Diamond$ *Baza indukcije*: Ukoliko je $P = 0$ ili $P = 1$ tada teorema trivijalno važi.

- $\Diamond$ *Indukciona hipoteza*
  Pretpostavljamo da teorema važi sa svako $|P| < n$.

- $\Diamond$ *Indukcioni korak*
  Neka P_{min}, P_{max} predstavljaju skupove svih minimalnih i maksimalnih elemenata poseta P respektivno. Sada možemo imati jedan od sledeća dva slučaja:

  1. Postoji maksimalan antilanac P_0 poseta $(P, \leq)$ veličine $|P_0| = k$ koji je različit od P_{min} i P_{max}.
     Neka $P_0 = \{y_1, y_2, ..., y_k\}$ bude takav skup.
     Definišimo sada sledeća dva skupa:

     $$P^+ = \{x \in P : y \leq x \text{ za svako } y \in P_0\}$$
     $$P^- = \{x \in P : x \leq y \text{ za svako } y \in P_0\}$$

     Dokažimo da je $P^+ \cap P^- = P_0$
     Ovde P^+ predstavlja pojam biti iznad P_0, a P^- predstavlja pojam biti ispod P_0. Takođe primetimo da su svi elementi antilanca P_0 ujedno sadržani i u P^+ kao i u P^-, tj. $P_0 \subseteq P^+ \cap P^-$. Samim tim za svako $x \in P_0$ imamo da $x \in P^+ \cap P^-$. Ukoliko je $x \in P^+ \cap P^-$, tada postoje neki $a, b \in P_0$ takvi da je $a \leq x \leq b$. Odatle sledi da su a i b uporedivi na osnovu tranzitivnosti, a pošto je P_0 antilanac mora da važi $a = b = x$, odakle sledi da $x \in P_0$.
     Dokažimo da je $P^+ \cup P^- = P$:
     Ukoliko bi postojalo neko $z \in P$ da važi $z \notin P^+ \cap P^-$, to bi značilo da je z neuporedivo sa svim elementima iz P_0, tj. $\nexists y \in P_0$ da važi $z \leq y$ ili $y \leq z$.
     Pošto je z neuporedivo sa svim elementima iz P_0 tada bi se njegovim dodavanjem u P_0, tj $\{z\} \cup P_0$ dobio antilac koji je veći od P_0, što pravi kontradikciju.

Odavde dobijamo da svaki element u P mora da bude uključen ili u P^+ ili u P^- (ili u oba) i da ne postoji element u P van $P^+ \cup P^-$ a da se ne naruši maksimalnost antilanca P_0.

Primetimo sledeće:
Pošto postoji makar jedan element iz P_{min} koji nije u P_0 imao da $P^+ \neq P$. Slično se dobija i $P^- \neq P$. Sada na osnovu navedenog važi $|P^-|< |P|$ i $|P^+|< |P|$. Iskoristimo indukcionu hipotezu na P^+ i P^-:

$$P^+ = \cup_{i=1}^{k} D_i \qquad P^- = \cup_{i=1}^{k} L_i$$

Antilanac P_0 predstavlja skup minimalnih elemenata od P^+ i skup maksimalnih elemenata P^-, ujedno su minimalni elementi lanaca D_i i maksimalni elementi lanaca L_i. Pretpostavimo da je y_i minimalni element od D_i i maksimalni element L_i $(1 \leq i \leq k)$. Definišimo $C_i = D_i \cup L_i$, pri čemu je C_i lanac i dobijamo:

$$P = P^+ \cup P^- = \cup_{i=1}^{k} C_i$$

2. Ne možemo imati lanac veličine k koji je različit od P_{max} i P_{min}.
   Odaberimo $u \in P_{max}$ i $v \in P_{min}$ da važi $v \leq u$. Definišimo lanac $C_k = \{u, v\}$ i $P^{'} = P \setminus C_k$. Tada $P^{'}$ sadrži maksimalan antilanac dužine $k-1$. Primetimo da $P^{'}$ ne može sadržati antlanac dužine k. Ukoliko bi postojao antlanac dužine k u $P^{'}$, tada bi on takođe bio antilanac u P koji se razlikuje od P_{min} i P_{min}, i onda bismo se vratili na slučaj 1.
   Kako $|P^{'}|< |P|$ na osnovu indukcione hipoteze imamo:

$$P^{'} = \cup_{i=1}^{k-1} C_i, \text{ gde su } C_i \text{ lanci.}$$

   Tada dobijamo:

$$P = P^{'} \cup C_k = \cup_{i=1}^{k} C_i$$

$\square$

2.1.3 Tverbergov dokaz

Dokaz. Pratićemo Tverbergov[6] dokaz iz [11], radeći indukciju po broju elemenata skupa P.

- ◊ *Baza indukcije*: Ukoliko je $|P|= 0$ ili $|P|= 1$ teorema trivijalno važi.

- ◊ *Indukciona hipoteza*: Za svako $|P|< n$ pretpostavimo da teorema važi.

- ◊ *Indukcioni korak*: Neka je C maksimalan lanac u posetu P. Definišimo poset $P^{'} = P\backslash C$.

  1. Ukoliko u posetu $P^{'}$ nemamo antilanac sa k elemenata, tj. ukoliko postoje antilanci sa najviše $k-1$ element, tada po indukcionoj hipotezi, $P^{'}$ se može napisati kao unija $k-1$ lanaca, iz čega sledi da se P može predstaviti kao unija k lanaca.
  2. Pretpostavimo da $P^{'}$ sadrži antilanac od k elemenata, neka je to antilanac $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Sada definišimo sledeće skupove:

     $$P^{-} = \{x \in P : x \leq a_i \text{ za neko i } \}$$
     $$P^{+} = \{x \in P : a_i \leq x \text{ za neko i } \}$$

     Neka je c^+ maksimalan element lanca C. Pošto je C maksimalan lanac, element c^+ ne može biti u P^-, jer bi važilo da je $c^+ \leq a_i$ za neko i, što pravi kontradikciju sa tim da je C maksimalan lanac. Analogno bi važilo i za $c^- \in P^+$, gde c^- predstavlja minimalni element lanca C.
     Jasno se dobija da važi $|P^+|< |P|$ i $|P^-|< |P|$, pa na osnovu indukcione hipoteze skup P^- se može predstaviti kao unija disjunktnih lanaca:

     $$P^- = P_1^- \cup P_2^- \cup ... \cup P_k^-.$$

     Štaviše, pošto je $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ antilanac u P^-, svaki a_i mora biti u različitom lancu, i možemo jednostavno indeksirati lance tako da je $a_i \in P_i^-$, za $i = 1, .., k$.
     Pretpostavimo da je $z \in P^-$ i da važi $a_i \leq z$. Pošto postoji j tako da važi $z \leq a_j$, tada imamo $a_i \leq a_j$, što pravi kontradikciju, jer su to elementi antilanca.

[6] Helge Arnulf Tverberg, norveški matematičar (1935 - 2020)

Ovim smo pokazali da a_i predstavlja maksimalan element lanca P_i^-, $i = 1, 2, ..., k$. Isto važi i za P^+. Sada se ovi lanci mogu nadovezati i tako formirati lance koji pokivaju P, tj.

$$P = P^+ \cup P^- = (P_1^+ \cup P_1^-) \cup ... \cup (P_k^+ \cup P_k^-).$$

□

2.2 Indirektni Dokazi

Osim direktno izvedenih dokaza, postoje matematičke teoreme koje možemo iskoristiti da bismo dokazali Dilvortovu teoremu. U ovom odeljku, prvo ćemo se upoznati sa Konig-ovom, Konig-Egervary-jevom i Ford-Fulkerson-ovom teoremama, a zatim ćemo ih iskoristiti za dokazivanje Dilvortove teoreme.

2.2.1 Teorema Kőnig-Egerváry

Definicija 2.1. Neka je $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrica za koju važi da $(\forall a_{ij} \in A)$ $a_{i,j} \in \{0, 1\}$, tj. A je $(0 - 1)$ matrica. Tada:

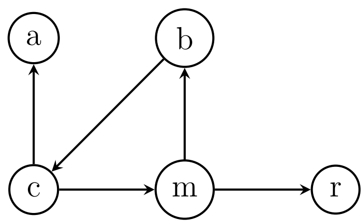
- zajednički naziv za vrste i kolone matrice je **linije matrice**.
- linija pokriva jedinicu (ili nulu) ako jedinica (nula) pripada toj liniji.
- za dve jedinice (nule) kažemo da su nezavisne ako ne pripadaju istoj liniji.
- za skup jedinica (nula) kažemo da čine nezavisan skup ako su svake dve nezavisne.

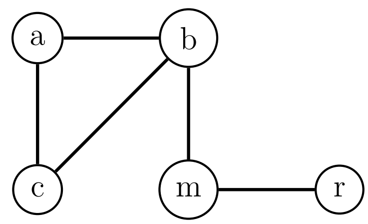
Teorema 5. *(Kőnig-Egerváry, 1931). Minimalan broj linija koje pokrivaju sve jedinice neke (0-1) matrice A jednak je maksimalnom broju nezavisnih jedinica te matrice.*

2.2.2 Teorema Kőnig

Definicija 2.2. Graf G je uređen par (V, E). Elementi skupa V se zovu čvorovi, a elementi skupa E grane grafa G. Za dati graf G skup svih čvorova označavamo sa $V(G)$, a skup grana $E(G)$.

Grane grafa mogu biti usmerene i neusmerene, tada govorimo o **orijentisanim** (asimetričnim ili usmerenim) i **neorijentisanim** (simetričnim ili neusmerenim) grafovima. Ako je graf neorijentisan tada su grane neuređeni parovi i grana (u, v) je isto što i grana (v, u). U tom slučaju grane grafa crtamo bez strelica. U slučaju orijentisanih grafova grane su uređeni parovi čvorova i vizualno ih predstavljamo kao linije sa strelicom usmerenom od prvog ka drugom čvoru i zato je redosled čvorova bitan. Na slici 10 prikazan je jedan orjentisan i jedan neorijentisan graf.





Slika 10: Primer (a) orijentisanog, (b) neorijentisanog grafa

Definicija 2.3. Dva čvora neorijentisanog grafa bez petlji, u i v, su susedi ako su spojeni granom $e = \{u, v\}$, što kraće nekad zapisujemo sa $e = uv$. Dve grane su zavisne ukoliko dele zajednički čvor, u suprotnom kažemo da su nezavisne. Skup svih suseda čvora v u grafu G označavamo sa $N_G(v)$,

$$N_G(v) = \{u \in V(G) | uv \in E(G)\}$$

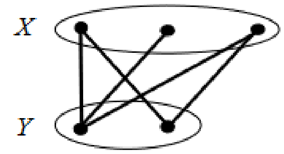
Definicija 2.4. Stepen čvora v predstavlja broj susednih čvorova, i označava se sa $d(v)$, odnosno

$$d(v) = |N_G(v)|$$

Čvor koji nema suseda naziva se *izolovani* čvor. Minimalan stepen svih čvorova označava se sa $\delta(G)$, a maksimalan sa $\Delta(G)$. Odnosno $\delta(G) = min_{v \in V(G)} d(v)$ i $\Delta(G) = max_{v \in V(G)} d(v)$.

Definicija 2.5. *k-partitivni* graf $G(X_1, X_2, ..., X_k)$ je graf čiji je skup čvorova podeljen u k disjunktnih klasa $X_1, X_2, ..., X_k$ tako da čvorovi iz iste klase nisu spojeni granom.

Napomena 2.1. *2-partitivni* graf G se zove bipartitivni graf. Bipartitivni graf sa klasama X i Y označavamo i sa $G(X, Y)$.



Slika 11: Primer bipartitivnog grafa

Definicija 2.6. Neka je $G = (A, B)$ bipartitivni graf i $X \subseteq A$. Skup svih suseda skupa čvorova X u grafu G označavamo sa $N(X)$,

$$N(X) = \{v \in V(G) \setminus X \mid \exists u \in X,\, uv \in E(G)\}$$

Definicija 2.7. Neka je $G(V, E)$ graf. Skup $M \subseteq E(G)$ nazivamo mečingom u grafu G ako nikoje dve grane iz M ne izlaze iz istog čvora.

Definicija 2.8. Mečing M je maksimalan ako ne postoji mečing M' u G takav da je $|M'| > |M|$

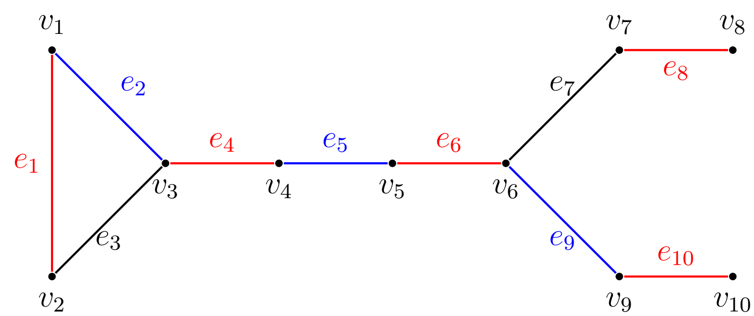
Primer 2.1. Koristeći se slikom 12, prikazaćemo primer savrsenog mečinga na zadatom grafu.

a) Na Haseovom dijagramu sa slike 12. možemo primetiti da su grane: $\{e_2, e_5\}$ nezavisne, a $\{e_4, e_5\}$ zavisne.

b) Posmatrajmo mečing $M = \{e_2, e_5, e_9\}$ obeležen plavom bojom. Možemo primetiti da su $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9$ pokriveni, a v_2, v_7, v_8, v_{10} nepokriveni čvorovi u M.

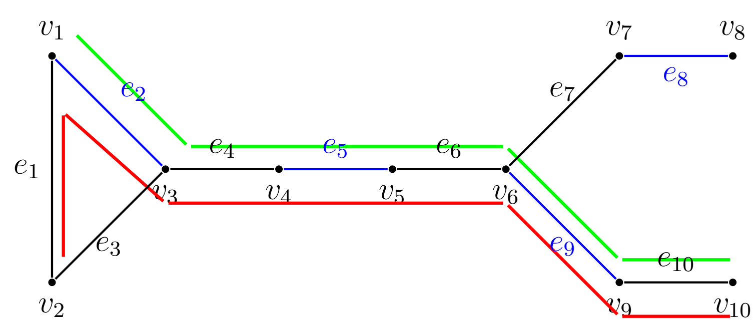
c) Takođe smo izolovali savršen mečing $M' = \{e_1, e_4, e_6, e_8, e_{10}\}$, obeležen crvenom bojom. Kao što možemo primetiti nema nepokrivenih čvorova zadatog grafa.

Definicija 2.9. Neka je $G = (V, E)$ graf i M mečing u grafu G. M-alternirajući put u grafu G je put čije su grane naizmenično u M i u $E \backslash M$. Za M-alternirajući put kažemo da je M-proširen ako mu krajnji čvorovi nisu pokriveni u M.



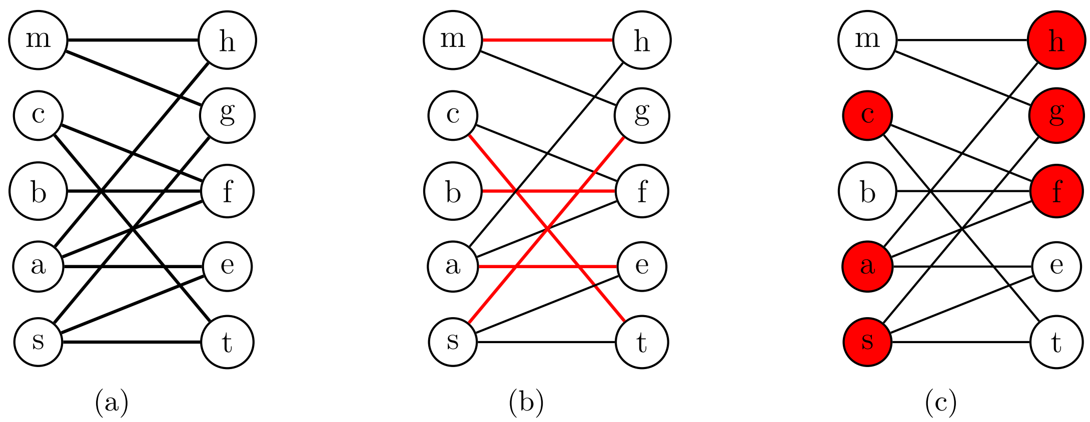
Slika 12: Primer mečinga (plava), maksimalnog mečinga (crvena) grafa G

Primer 2.2. Na primeru sa slike 13, prikazan je jedan mečing $M = \{e_2, e_5, e_8, e_9\}$ označen plavom bojom. Jedan primer M-alternirajućeg puta u G je $v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}$ označen zelenom brojom,
dok je jedan primer M-proširujućeg puta $v_2, v_1, v_3, v_4, v_5, v_6, v_9, v_{10}$ označen crvenom bojom.



Slika 13: Primer mečinga, M-alternirajućeg i M-proširujućeg puta grafa G

Teorema 6. *Neka je $G = (V, E)$ graf. Za skup $L \subseteq V$ kažemo da je čvorni pokrivac grafa G, ako svaka grana iz E ima bar jedan čvor u L. Pokrivač L je minimalan, ako za svaki drugi pokrivač L^* grafa G važi da je $|L| \leq |L^*|$*



Slika 14: Graf, mečing, čvorni pokrivač

Teorema 7. *(Kőnig, 1931) Neka je $G = (A, B)$(konačan) bipartitivni graf. Neka je M maksimalni mečing, a L minimalni pokrivač grafa G. Tada važi $|M| = |L|$.*

2.2.3 Teorema Ford-Fulkerson

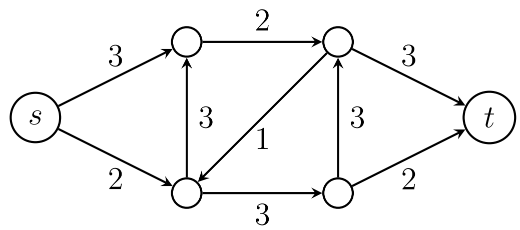
Definicija 2.10. Mreža (eng: flow network) je orjentisani graf $G = (V, E)$ u kojem važe sledeći uslovi:

a) Svakoj grani $(u, v) \in E$ se pridružuje nenegativan realan broj $c(u, v)$ koji se naziva kapacitetom te grane.

b) Ako je $(u, v) \in E$, onda $(v, u) \notin E$. Ukoliko važi da je $(u, v) \notin E$, tada važi $c(u, v) = 0$.

c) Postoji jedinstveni čvor $s \in V$ koji se naziva izvor i jedinstveni čvor $t \in E$ koji se naziva ponor.

Uređenu četvorku $(G; c; s; t)$ nazivamo mrežom.
Kapacitet grane (u, v) predstavlja meru toka koji može biti propušten krz granu. Za svaki čvor $u \in V \backslash \{s, t\}$ postojaće neki put u obliku $s \to u \to t$.



Slika 15: Primer mreže sa označenim kapacitetima grana.

Definicija 2.11. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža. Protok (eng: flow) u mreži je funkcija $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ koja zadovoljava sledeće osobine:

a) ograničenje kapacitetom: Tok koji prolazi kroz granu (u, v) ne može biti veći od kapaciteta te grane, tj: $f(u, v) \leq c(u, v)$.

b) zakon očuvanja protoka: Ukupan tok koji ulazi jednak je toku koji izlazi iz čvora, tj.

$$\forall u \in V \backslash \{s, t\}, \quad \sum_{v \in V} \underbrace{f(v, u)}_{\text{tok u } u} = \sum_{v \in V} \underbrace{f(u, v)}_{\text{tok iz } u}$$

Ekvivalentno $\sum_{v \in V} f(v, u) - \sum_{v \in V} f(u, v) = 0$

U izvor s ne ulazi ni jedna grana, tako da imamo samo protok iz s, dok iz ponora t ne izlazi ni jedna grana, pa imamo samo protok u t. Za svaka dva čvora u i v važi da je: $f(u, v) = -f(v, u)$
Ako $(u, v), (v, u) \notin E$, onda u mreži ne postoji tok iz u u v, pa je $f(u, v) = 0$

Definicija 2.12. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i funkcija $f(u, v)$ protok u mreži. Vrednost protoka u mreži definišemo sa:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

tj. kao ukupan protok iz izvora s.

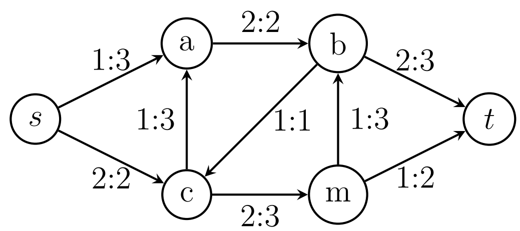
Primer 2.3. Posmatrajmo primer sa slike 16, prikazan je graf $G = (V, E)$ sa mrežom $(G; c; s; t)$ i neka je funkcija $f(u, v)$ protok u mreži. Svaka grana je označena sa $f(u, v) : c(u, v)$. Možemo primetiti da je vrednost protoka u mreži

$$|f| = 1 + 2 = 3.$$

Takođe možemo sa slike potvrditi da važi zakon očuvanja protoka, npr. posmatrajući čvor c važi sledeće:

a) Protok iz čvora c je $cm + ca = 2 + 1 = 3$.

b) Protok u čvor c je $sc + bc = 2 + 1 = 3$.



Slika 16: Primer mreže sa označenim kapacitetom i protokom.

Definicija 2.13. Neka je $G = (V, E)$ graf i $(G; c; s; t)$ mreža.
Rez je particija V na skupove S i T, na način da $s \in S$ i $t \in T$.
Ako je f protok kroz G, tada je ukupan tok $f(S, T)$ preko reza (S, T):

$$f(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(u, v) - \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} f(v, u).$$

Minimalan rez je rez čiji je kapacitet minimalan nad svim rezovima u mreži.

Lema 2.2. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, f funkcija toka u G i neka je (S, T) proizvoljni rez nad G. Tada važi sledeće:*

$$|f| = f(S, T)$$

Definicija 2.14. Neka je $G = (V, E)$ graf i $(G; c; s; t)$ mreža. *Kapacitet reza* (S, T) definišemo na sledeći način:

$$c(S, T) = \sum_{u \in S} \sum_{v \in T} c(u, v)$$

Lema 2.3. *U mreži $(G; c; s; t)$ vrednost proizvoljnog toka f je ograničena odozgo kapacitetom bilo kog reza (S, T) nad G, tj.*

$$|f| \leq c(S, T)$$

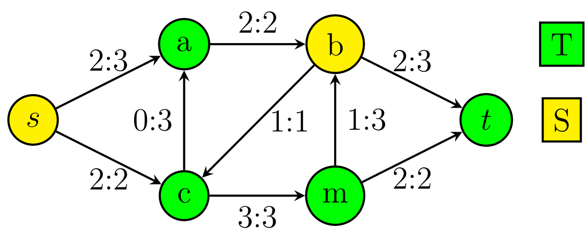
Primer 2.4. Neka je prikazan graf $G = (V, E)$, sa mrežom $(G; c; s; t)$ i funkcijom $f(u, v)$ protoka u mreži, definisali smo jedan rez kao što je prikazano na slici 17. Sa slike možemo primetiti:

a) Protok nad rezom (S,T) je:

$$f(S,T) = (sa)+(sc)+(ba+bc+bm+bt) = (2+2)+(-2+1-1+2) = 4.$$

b) Kapacitet nad rezom (S,T) je:

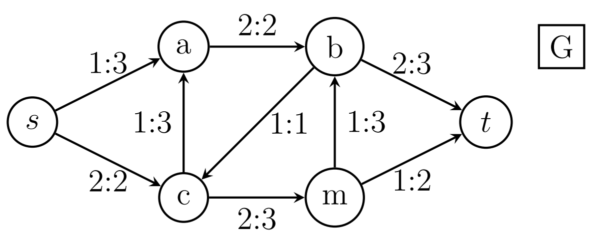
$$c(S,T) = (sa+sc)+(bc+bt) = (3+2)+(1+3) = 9.$$



Slika 17: Primer mreže sa jednim rezom (S,T)

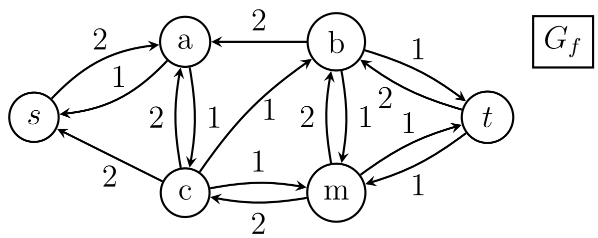
Definicija 2.15. Neka je $(G;c;s;t)$ mreža i funkcija $f(u,v)$ protoka u mreži. *Kapacitet reziduuma* definišemo na sledeći način: za svako $u,v \in V$

$$c_f(u,v) = \begin{cases} c(u,v) - f(u,v), & \text{ako } (u,v) \in E, \\ f(u,v), & \text{ako } (v,u) \in E, \\ 0, & \text{inače .} \end{cases}$$



Definicija 2.16. Neka je $(G;c;s;t)$ mreža, funkcija $f(u,v)$ protoka u mreži i $c_{f(u,v)}$ kapacitet reziduuma. Mrežu reziduuma za mrežu $(G;c;s;t)$ definišemo kao $(G_f;c_f;s;t)$, gde je G_f graf definisan sa $G_f = (V, E_f)$ i

$$E_f = \{(u,v) \in V \times V | c_f(u,v) > 0\}$$



Slika 18: Primer grafa G i rezidualnog grafa G_f

Napomena 2.2. Kako grane u G_f mogu biti grane u G ili paralelne ali suprotnog smera, zaključujemo da $|E_f| \leq 2|E|$.

Definicija 2.17. Neka je $(G_f; c_f; s; t)$ dopunjujuća mreža reziduuma za mrežu $(G; c; s; t)$, funkcija f tok u mreži G i funkcija $f^{'}$ tok u mreži G_f. Funkciju dopunjujućeg toka $f \uparrow f^{'} : V \times V \to \mathbb{R}$ definišemo na sledeći način:

$$(f \uparrow f^{'})(u,v) = \begin{cases} f(u,v) + f^{'}(u,v) - f^{'}(v,u), & \text{ako } (u,v) \in E \\ 0, & \text{inače }. \end{cases}$$

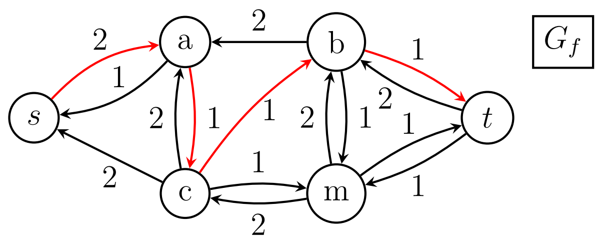
Lema 2.4. *Neka je $(G; c; s; t)$ mreža i $f(u,v)$ funkcija protoka u G. Neka je $(G_f; c_f; s; t)$ dopunjujuća mreža reziduuma za G sa funkcijom toka $f^{'}(u,v)$. Tada je funkcija $f \uparrow f^{'}$ tok u G i vrednost tog toka je*

$$|f \uparrow f^{'}| = |f| + |f^{'}|.$$

Definicija 2.18. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, $f(u,v)$ funkcija toka u G, i $(G_f; c_f; s; t)$ mreža reziduuma za G. *Put dopunjujućeg toka* p je putanja od s do t u G_f.

Napomena 2.3. Po definiciji G_f, tok na grani (u,v) u p možemo povećati za maksimum $c_f(u,v)$ (jer inače će se prekršiti ograničenje kapaciteta nad (u,v) ili (v,u) u G). Zato maksimalnu vrednost sa kojom možemo da dopunimo tok na putanji p, možemo zapisati kao

$$c_f(u,v) = min\{c_f(u,v) \mid (u,v) \in p\}.$$

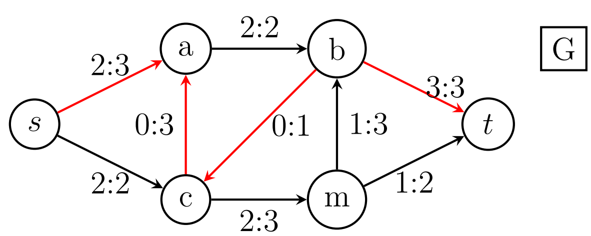


Slika 19: Primer puta dopunjujućeg toka $p = \{s, a, c, b, t\}$

Definicija 2.19. Neka je $(G; c; s; t)$ mreža, $f(u, v)$ funkcija toka u G i neka je $(G_f; c_f; s; t)$ mreža reziduuma za G. Neka je p put dopunjujućeg toka u G_f. Ako funkciju $f_p : V \times V \to \mathbb{R}$ definišemo kao:

$$f_p(u, v) = \begin{cases} c_f(p), & (u, v) \in p \\ 0, & \text{inače} . \end{cases}$$

tada je f_p tok u G_f i vrednost toka $|f_p| = c_f(p) > 0$.



Slika 20: Primer povećanja toka duž putanje $p = \{s, a, c, b, t\}$ za vrednost $c_f(p) = 1$

Narednu teoremu su dokazali L. R. Ford[7] i D. R. Fulkerson[8] u radu [10].

Teorema 8. *(Ford-Fulkerson) Neka je* $(G; c; s; t)$ *mreža i funkcija* $f(u, v)$ *protok u mreži. Maksimalna vrednost protoka u mreži jednaka je minimalnom kapacitetu reza, tj:*

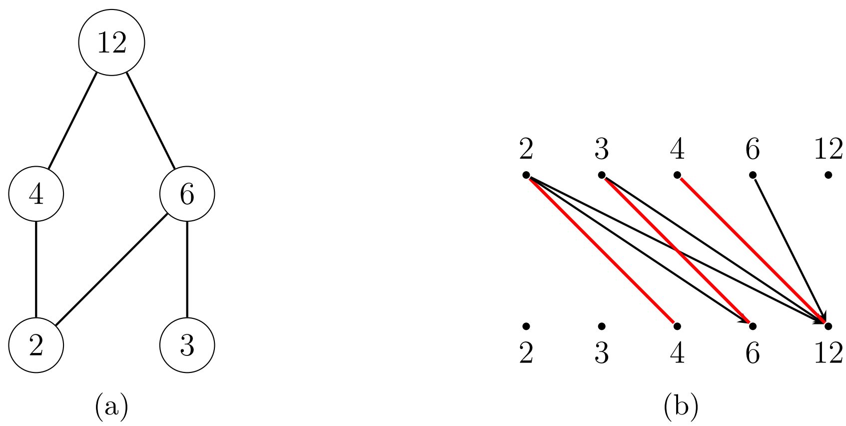
$$max_f|f| = min_{(S,T)}c(S, T)$$

Za prethodnu teoremu koristi se još naziv max-flow min-cut teorema ili MFMC teorema.

[7]Lester Randolph Ford, američki matematičar (1886-1967)
[8]Delbert Ray Fulkerson, američki matematičar (1924-1976)

2.2.4 Dokaz koristeći Kőnig-ovu Teoremu

Dokaz. Neka je $(P, \leq)$ zadani poset nad skupom $P = \{x_1, ..., x_n\}$. Definišimo bipartitivni graf $G = (A, B)$ na sledeći način:
$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$ i neka važi $a_i b_j \in E(G)$ ako i samo ako $x_i \leq x_j$ i $x_i \neq x_j$.
Za sam dokaz biće nam potrebne sledeće dve leme.



Slika 21: Primer poset grafa (a) i njegovog bipartitivnog grafa (b). Crvene linije predstavljaju nezavisne linije u grafu.

Lema 2.5. *Neka je M skup nezavisnih linija u G. Tada postoji kolekcija lanaca ϑ poseta P takva da važi $|M| + |\vartheta| = n$, $|P| = n$.*

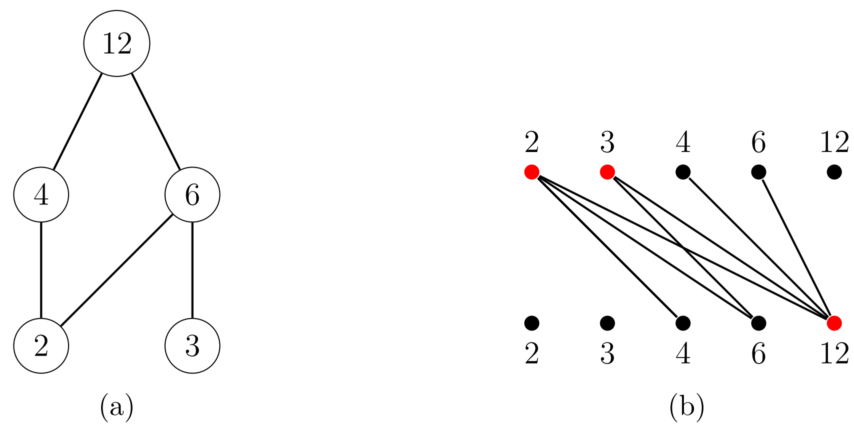
Dokaz. Pretpostavimo da je $M = \{a_{i_1} b_{i_2}, a_{i_3} b_{i_4}, ..., a_{i_{2k-1}} b_{i_{2k}}\}$, odakle sledi da $x_{i_1} \leq x_{i_2}$, $x_{i_3} \leq x_{i_4}$,..., $x_{i_{2k-1}} \leq x_{i_{2k}}$. Među ovih $2k$ x_i-jeva postoji skup ϑ' lanaca svaki veličine najmanje dva, koji su međusobno neuporedivi jer su elementi skupa M nezavisni. Proširićemo skup ϑ' do skupa ϑ svih lanaca, na trivijalan način, dodajući sve jednočlane lance koji nisu bili prisutni u ϑ'. Definišimo sada n_j kao broj elemenata u j-tom lancu iz kolekcije ϑ. Tada dobijamo da važi

$$n = \sum_{j=1}^{|\vartheta|} n_j = \sum_{j=1}^{|\vartheta|} (n_j - 1) + |\vartheta| = |M| + |\vartheta|$$

jer postoji tačno $n_j - 1$ linija u j lanaca kolekcije ϑ.

□

Lema 2.6. *Neka je $C_G \subseteq A \cup B$ minimalni pokrivač bipartitivnog grafa $G = (A, B)$ poseta P. Tada postoji antilanac U iz P da važi $|C_G| + |U| \geq n$.*



Slika 22: Primer poset grafa (a) i njegovog bipartitivnog grafa (b). Crveni čvorovi predstavljaju minimalni čvorni pokrivač.

Dokaz. Neka $C_G = \{a_{i_1}, a_{i_2}, ..., a_{i_k}, b_{j_1}, b_{j_2}, ..., b_{j_m}\}$ predstavlja minimalni pokrivač bipartitivnog grafa G. Primetimo da C_G odgovara podskupu Q skupa P tako da važi $|Q| \leq |C_G|$. Neka je $U = P \backslash Q$. Tada su elementi skupa U po parovima nezavisni u P jer je C_G minimalni pokrivač od G. Takođe, možemo primetiti da važi

$$|C_G| + |U| \geq |Q| + |U| = |Q| + |P \backslash Q| = |P| = n.$$

□

Sada smo pripremljeni za nastavak dokaza Dilvortove teoreme. Neka je P proizvoljan poset i neka je $G = (A, B)$ bipartitivan graf poseta P. Neka je L_G maksimalni skup nezavisnih linija u G i neka je $C_G \subseteq A \cup B$ minimalni pokrivač G. Sada po lemi 2.5 imamo da postoji skup lanaca ϑ koji particioniše poset P takav da važi $|L_G| + |\vartheta| = n$. Po lemi 2.6 postoji antilanac poseta P i važi $|C_G| + |U| \geq n$. Sada, po teoremi Kőnig, imao da je $|L_G| = |C_G|$ pa sledi $|\vartheta| \leq |U|$. Sa druge strane možemo primetiti, za svaki lančani pokrivač ϑ' i svaki proizvoljni antilanac U' poseta P mora važiti da je $|U'| \geq |\vartheta'|$ jer važi da $|U' \cap \vartheta'| \leq 1$, tj. neće postojati dva elementa antilanca $|U'|$ u istom lancu iz ϑ'. Tada važi da je $|\vartheta| = |U|$, odakle sledi da je ϑ minimalan lančani pokrivač poseta P i U maksimalni antilanac.

□

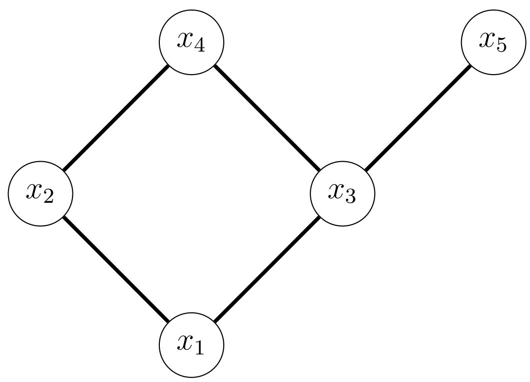
2.2.5 Dokaz koristeći Kőnig-Egerváry Teoremu

Dokaz. Neka je $(P, \leq)$ zadani poset, gde je $P = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ konačan uređen skup. Posete možemo predstaviti pomoću $(0-1)$ matrice reda n, na sledeći način:

$$M(P) = [a_{ij}]_{n \times n}$$

gde je

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ako postoji } x_i \prec x_j, \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$



(a) Haseov dijagram poseta

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	1	1	1
x_2	0	0	0	1	0
x_3	0	0	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0

(b) (0-1) matrica poseta

Slika 23

Kao sto možemo primetiti, ukoliko imamo da je $a_{ij} = 1$, onda $a_{ji} = 0$. Definišimo **nezavisan skup**, koji predstavlja skup jedinica u matrici $M(P)$ za koje važi da nikoje dve nisu u istoj vrsti ili koloni. Tada sledi da svaki lanac u $(P, \leq)$ definiše jedan nezavisan skup jedinica (sa dva ili više elemenata) u matrici $M(P)$[9]. Pretpostavimo da particija skupa P na lance sadrži p_i lanaca dužine k_i, gde je $i = 1, 2, ..., r$ i $k_i > 1$ i q lanaca dužine 1. Tada je

$$n = \sum p_i k_i + q.$$

[9]Primer: Ako je n = 8, onda iz lanaca $x_2 - x_3 - x_5 - x_7 - x_8$ od 5 elemenata dobijamo nezavistan skup $\{x_2x_3, x_3x_5, x_5x_7, x_7x_8\}$ sa 5-1=4 elementa.

Ova particija određuje jedan nezavisan skup(jedinica) od m elemenata, gde je

$$m = \sum p_i(k_i - 1) = \sum p_i k_i - \sum p_i = n - q - \sum p_i$$

Primetimo da suma $\sum p_i$ predstavlja broj lanaca dužine veće od 1, pa zbir $q + \sum p_i$ predstavlja broj lanaca skupa P. Sada iz jednačine

$$n = m + (q + \sum p_i)$$

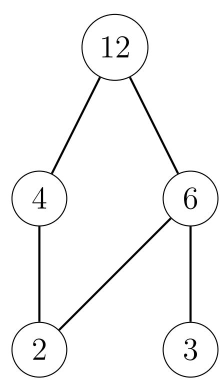
dobijamo da je broj elemenata skupa P jednak zbiru broja lanaca u particiji P i broja jedinica u dobijenom nezavisnom skupu. Sada, ako postoji maksimalan nezavisan skup sa brojem elemenata t, tada postoji particija skupa P na minimalan broj lanaca, i to na q lanaca dužine 1 i na $n - q - t$ lanaca dužine veće od 1.
Na osnovu teoreme Kőnig-Egerváry, sve jedinice u matrici $M(P)$ se mogu pokriti sa t linija, dok sa manje od t to nije moguće.

Ovaj minimalni pokrivač odgovara skupu D neuporedivih elemenata sačinjenih od $n - t - q$ elemenata skupa P (jedan od svakog od $n - t - q$ lanaca dužine veće od 1). Skup E sastoji se od q lanaca dužine 1. Tada $F = D \cup E$ je skup kardinalnosti $n - t$ čiji su elementi međusobno neuporedivi. Dakle, postoji antilanac u P karinalnosti $n - t$ i dekompozicija P koja se sastoji od $n - t$ lanaca.

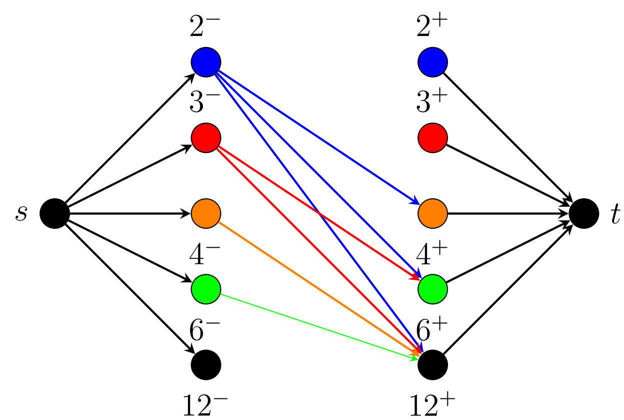
□

2.2.6 Dokaz koristeći Ford-Fulkerson Teoremu

Dokaz. Neka je $(P, \leq)$ zadani poset. Sada ćemo izvesti mrežu $D = (G; c; s; t)$ iz poseta na sledeći način. Za svako $p \in P$ imamo dva čvora u mreži, p^+ i p^-. Pored ovih čvorova imamo i dodatna dva, s kao izvor i t kao ponor. Za $p \leq q$ i $p \neq q$, imamo ivicu (p^-, q^+) definisana u mreži. Svaka ivica će biti kapaciteta 1.



(a) Poset delilaca broja 12



(b) Mreža nastala iz poseta

Slika 24

Neka je f maksimalan protok kroz mrežu D i (S, T) minimalan rez konstruisan pomoću Ford-Fulkersonovog algoritma, tako da važi $|f| = c(S, T)$. Primetimo da svaki put od s do t ima formu $s \to p^- \to q^+ \to t$, za svako $p, q \in P$ ukoliko važi $p \leq q$. Tada $|f|$ predstavlja broj elemenata $p \in P$ takvih da važi $f(s, p^-) = 1$ i $f(p^-, q^+) = 1$. Definišimo sledeći skup

$$C = \{p \in P : f(s, p^-) = 0\}.$$

Primetimo da važi

$$|C| = |P| - |f| \qquad (1)$$

Pokažimo da se P može predstaviti unijom $|C|$ lanaca.
Ako $p \in P \backslash C$, tada važi $f(s, p^-) = 1$, odakle sledi da će postojati jedinstveni naslednik $\sigma(p) \in P$ da važi $f(p^-, \sigma(p)^+) = 1$ i $p \leq \sigma(p)$. Tada za svako $p \in P$ postoji definisan lanac

$$p = p_0 \leq p_1 \leq ... \leq p_n \in C$$

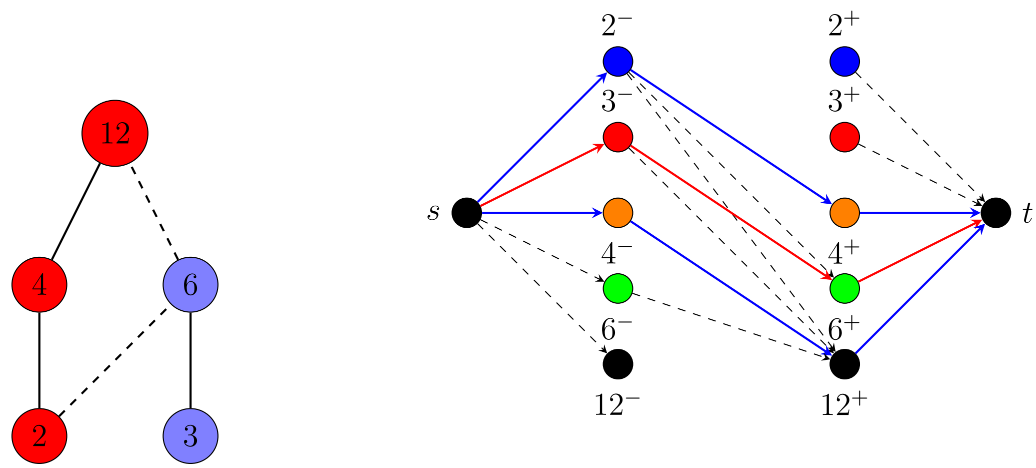
u P takav da $p_{k+1} = \sigma(p_k)$ za $k = 0, ..., n-1$. Pošto je P konačan poset, svaki lanac takođe mora biti konačan, a jedini elementi koji nemaju svoje naslednike su elementi skupa C. Za $p \in P \setminus C$ definišimo $\varepsilon(p)$ kao jedinstven element skupa C u kojem se lanac koji počinje iz p završava, i neka važi $\varepsilon(t) = t$ za $t \in C$, tada

$$\{\{p \in P : \varepsilon(p) = q\} : q \in C\}.$$

particioniše P u $|C|$ lanaca.

Koristići se primerom sa slike 25b, možemo primetiti da maksimalan protok definiše sledeća dva lanca:

1. $s \to 2^- \to 4^+ \to 4^- \to 12^+ \to t$ tj. lanac (2-4-12)
2. $s \to 3^- \to 6^+ \to t$ tj. lanac (3-6)



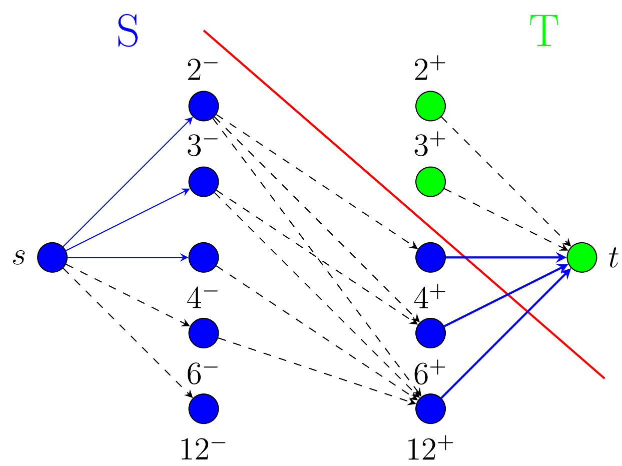
(a) Poset sa obelezenim lancima

(b) Mreza sa maksimalnim protokom

Slika 25

Sada ćemo napraviti antilanac koristeći se definisanim rezom (S, T).

Neka se A sastoji od onih vrednosti $p \in P$ takvih da važi da je $p^- \in S$ i $p^+ \in T$. Koristeći se osobinama reza (S, T) pokazaćemo da važi $|A| = |P| - c(S, T)$ i da su elementi skupa A neuporedivi. Za drugo tvrdjenje, posmatrajmo $p, q \in A$, $p \neq q$. Pošto $p^- \in S$ i $q^+ \in T$, ne možemo imati slučaj da (p^-, q^+) bude ivica sa nultim protokom. Dakle, ili (p^-, q^+) nije ivica, u tom slučaju $p \nleq q$, ili je $f(p^-, q^+) = 1$. Ukoliko bi važilo $f(p^-, q^+) = 1$ tada bi postojao put iz s do t što bi pravilo kontradikciju sa maksimalnim protokom, odakle sledi da je A jedan antilanac.



Slika 26: Minimalni rez (S, T)

Sada razmotrimo prvo tvrđenje. Videli smo da ivice oblika (p^-, q^+) ne mogu ići iz S u T. Dakle, jedine ivice koje doprinose kapacitetu reza $c(S, T)$ su one oblika (s, p^-) i (p^+, t), drugim rečima isključeni su članovi skupa A. Odatle sledi

$$c(S, T) = |P| - |A| \qquad (2)$$

Iz jednačina (1) i (2) sledi tvrdjenje:

$$|A| = |P| - c(S, T) = |P| - |f| = |C|$$

$\square$

3 Posledice Dilvortove teoreme

Halova teorema i Erdős–Szekeres teorema su među fundamentalnim rezultatima kombinatorike. U ovom poglavlju, prikazaćemo kako se ove dve teoreme mogu dokazati kao posledice Dilvortove teoreme, ističući dublje veze među ovim važnim matematičkim konceptima.

3.1 Halova teorema

Definicija 3.1. Neka je X neprazan skup, i neka je $S = \{S_1, S_2, ..., S_n\}$ familija podskupova skupa X. Tada n-torku $(x_1, x_2, ..., x_n) \in S_1 \times S_1 \times ... \times S_n$ koja zadovoljava sledeće uslove:

- $x_i \in S_i$ za svako $i = 1, 2, ..., n$
- $x_i \neq x_j$ za svako $i \neq j$

nazivamo **sistemom različitih predstavnika(SRP)**.

Primer 3.1. Posmatrajmo skup $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ i jednu familiju njegovih podskupova:
$S_1 = \{1, 2\}$, $S_2 = \{1, 2, 3\}$, $S_3 = \{2, 3\}$, $S_4 = \{1, 3, 5\}$. Odavde možemo zaključiti da je SRP (1,3,2,5)

Teorema 9. *(Hall - teorija skupova, 1935)*[10] *Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ neki konačni skupovi. Ti skupovi imaju sistem različitih predstavnika ako i samo ako unija bilo kojih k posmatranih skupova sadrži bar k elementanta, odnosno:*

$$\textit{za sve } \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq [n] \textit{ važi } |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}| \geq k$$

Dokaz. Neka su $A_1, A_2, ..., A_n$ konačni skupovi.
Posmatrajmo poset P koji čine svi elementi iz $\cup_{i\in[n]} A_i$ i još n specijalnih elemenata $x_1, x_2, ..., x_n$ koji ne pripadaju nijednom od A_i.
Poredak na posetu P definišemo ovako:
Elementi $\cup_{i\in[n]} A_i$ su minimalni, dok je x_i veći od svih elemenata iz A_i. Uslov iz Holove teoreme

$$\text{za sve } \{i_1, i_2, ..., i_k\} \subseteq [n] \text{ važi } |A_{i_1} \cup A_{i_2} \cup ... \cup A_{i_k}| \geq k$$

[10] Philip Hall, engleski matematičar (1904-1982)

nam garantuje da najveći antilanac A u tom posetu ne može imati više od $|\cup_{i\in[n]}A_i|$ elemenata.
Stoga, elementi iz $\cup_{i\in[n]}A_i$ čine antilanac maksimalne veličine u P. Iskoristimo Dilvortovu teoremu, i primetimo da u dekompoziciji P u disjunktne lance svaki x_i pripada tačno jednom od tih lanaca.
Uočimo n lanaca oblika $\{a_i < x_i\}$. Minimalni elementi tih lanaca čine sistem različitih pretstavanika.

□

3.2 Erdős–Szekeres teorema

Teorema 10. *(Erdős–Szekeres, 1935)*[11] *Neka je $A = (a_1, a_2, ..., a_n)$ konačan niz od n različitih realnih brojeva. Ako je $n \geq sr + 1$ tada A ima rastući podniz dužine $s + 1$ ili opadajući podniz dužine $r + 1$ (ili oboje).*

Na primer, u svakom nizu od 7 različitih realnih brojeva možemo pronaći rastući podniz dužine 4 ili opadajući podniz dužine 3.
Takođe u nizu od 101 različitim realnih brojeva imam monotone podnizove dužine 11.

Dokaz. Pretpostavimo, da imamo niz različitih realnih brojeva dužine $sr+1$ i definisanu relaciju na tom skupu brojeva na sledeći način:

$$a_i \leq a_j \text{ ako i samo ako } i \leq j.$$

Na osnovu definisane relacije možemo zaključiti da je jedan lanac jedan rastući podniz našeg niza, kao i da je antilanac opadajući podniz. Pretpostavimo da ne postoji antilanac dužine $s + 1$. Tada zaključujemo da je "širina skupa"(set width) najviše s. Koristeći sada Dilvortovu teoremu naš skup može biti pokriven sa minimum s lanaca. Ako je svaki od tih lanaca dužine najviše r tada dolazimo do zaključka da naš skup ima najviše sr elementata, što je kontradikcija.
To sada znači da će najmanje jedan od lanaca imati najmanje $r+1$ elemenata, pa će postojati rastući podniz našeg niza dužine $r + 1$. □

[11] Paul Erdős (1904-1982), George Szekeres (1911-2005) madjarski matematičari

Zaključak

U ovom radu smo se bavili istraživanjem parcijalno uređenih skupova (poseta) i Dilvortove teoreme, koja je jedno od ključnih otkrića u teoriji poseta. Analizirali smo različite dokaze ove teoreme, što nam je omogućilo dublje razumevanje njenog značaja i primena.

Prikazali smo nekoliko pristupa dokazu Dilvortove teoreme, uključujući direktne i indirektne metode. Svaki od ovih dokaza osvetljava teoremu iz različitih uglova, pružajući uvid u njene različite aspekte i moguće primene. Direktni dokazi su nam omogućili da sagledamo osnovne principe teoreme, dok su indirektni dokazi, izvedeni iz drugih važnih teorema, ukazali na povezanost Dilvortove teoreme sa drugim rezultatima u matematici.

Ova raznovrsnost pristupa ne samo da proširuje naše razumevanje Dilvortove teoreme, već i pokazuje kako različiti matematički alati i metode mogu dovesti do istog rezultata potvrdjujući važnost Dilvortove teoreme i čineći je značajnom ne samo u teoriji parcijalno uredjenih skupova, već i u širem matematičkom kontekstu.

Istraživanje poseta i Dilvortove teoreme kroz različite dokaze i perspektive pokazalo je koliko je ova teorema duboka i sveobuhvatna. Ona ne samo da pruža rešenja za teorijske probleme, već i omogućava primenu tih rešenja u stvarnim problemima u raznim naučnim i inženjerskim disciplinama.

***

Veliku zahvalnost dugujem svom mentoru dr Tanji Stojadinović na pomoći, savetima i ukazanom poverenju tokom izrade rada. Takođe se zahvaljujem članovima komisije dr Nebojiši Ikodinoviću i dr Slavku Moconji.

Ovim putem želim da se zahvalim mojoj porodici na podršci i ukazanom poverenju, koju su mi pružili tokom mog školovanja.

Rad posvećujem svom ocu.

Literatura

[1] V. Petrović, Teorija grafova, Univerzitet u Novom Sadu, Novi Sad, 1998.

[2] V. Petrović, Predavanja iz kombinatorike, dostupno na `https://people.dmi.uns.ac.rs/~vojpet/`

[3] F. Galvin, A proof of Dilworth's chain decomposition theorem, Amer. Math. Monthly 101:4 (1994), 352-353.

[4] Duško Jojić, *Elementi enumerativne kombinatorike*, Naša knjiga, Beograd, 2011.

[5] Maria Kiss, *Sedam znamenitih ekvivalentnih tvrđenja iz kombinatorike*, Master rad, Novi Sad, 2018.

[6] Vedran Krčadinac, Predavanja iz kombinatorike, Sveučilište u Zagrebu, 2023.

[7] J. Neggers, Hee Sik Kim, Basic Posets, 1998.

[8] M. A. Perles, A proof of Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets, Israel J. Math. 1 (1963), 105-107.

[9] Philip F. Reichmeider - The equivalence of some combinatorial matching theorems, PhD thesis at Adelphi University, 1978.

[10] L. R. Ford, Jr.i D. R. Fulkerson, Flows in Networks, Princeton University Press, Princeton, N. J. (1962).

[11] Helge Tverberg, On Dilworth's decomposition theorem for partially ordered sets, J. Combinatorial Theory 3 (1967), 305-306.

[12] Joseph P.S. Kung, Gian-Carlo Rota, Catherina H.Yan, The Rota Way, 2009.

[13] Y.L. Ershov, Handbook of Recursive Mathematics, Volume 2, Recursive Algebra, Analysis and Combinatorics, 1998.

[14] Maja Cvitković, *Kombinatorika (zbirka zadataka)*, Element, Zagreb, 1994.

[15] When Combinatorics and Flow Networks Intersect, dostupno na https://www.unswcpmsoc.com/assets/workshops/programming/2023/Max_flow_workshop_Slides.pdf