

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



Marko M. Gavrilović

ANALIZA EFEKTA JARKOVSKOG KOD
BRZO ROTIRAJUĆIH ASTEROIDA

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

dr Dušan MARČETA, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Anđelka KOVAČEVIĆ, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Bojan NOVAKOVIĆ, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Nataša TODOROVIĆ, viši naučni saradnik
Astronomska opservatorija Beograd

Datum odbrane: 27. septembar 2024.

*Ova master teza nastala je na osnovu istraživanja koje se
sprovodi u okviru projekta ENIGMA (br. 7453) koji
finansira Fond za nauku Republike Srbije kroz program
Prizma.*

Sadržaj

1	Uvod	1
1.1	Cilj rada	1
1.2	Princip delovanja efekta Jarkovskog	3
1.3	Dosadašnja istraživanja efekta Jarkovskog	6
2	Teorijska analiza efekta Jarkovskog	8
2.1	Jednačina energije	8
	Zakon održanja energije	8
	Furijeov zakon za toplotni fluks	10
	Jednačina za entalpiju	11
	Zakon održanja energije za homogeno kruto telo	12
2.2	Model prenosa toplote kod asteroida	13
	Ravnotežna temperatura	13
	Jednačina kondukcije	14
	Definisanje graničnog uslova	14
2.3	Sila efekta Jarkovskog	15
	Energija zračenja i specifični svetlostni intenzitet	15
	Relativistička energija i implus čestice	17
	Pritisak zračenja	19
	Sila efekta Jarkovskog	22
2.4	Analitičko rešenje za slučaj jednodimenzionog problema	23
	Određivanje temperaturnog polja	23
	Određivanje sile Jarkovskog	28
2.5	Linearna teorija efekta Jarkovskog za kružne orbite	29
3	Numerički model efekta Jarkovskog	32
3.1	Formiranje numeričke mreže	32

3.2	Ojlerova metoda za rešavanje jednačine prenosa toplote	34
3.3	Diskretizacija diferencijalne jednačine kondukcije	36
3.4	Toplotni fluks, pritisak zračenja i granični uslovi	38
	Toplotni fluks - uopštena forma	38
	Toplotni fluks usled kondukcije	38
	Toplotni fluks usled Sunčevog zračenja	39
3.5	Određivanje površina i zapremina ćelija	41
3.6	Izračunavanje sile efekta Jarkovskog	44
4	Rezultati i diskusija	47
4.1	Analiza raspodele temperature	48
4.2	Analiza efekta Jarkovskog	60
4.3	Numeričke performanse razvijenog modela	65
4.4	Zaključci i mogući pravci daljeg istraživanja	67
	Bibliografija	69

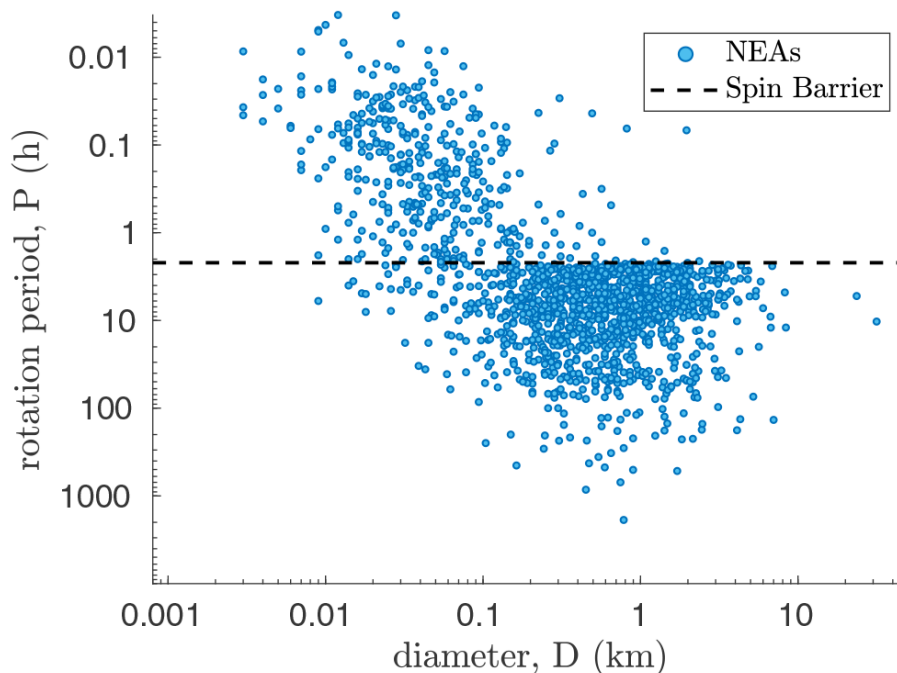
Glava 1

Uvod

1.1 Cilj rada

Tema ovog rada je dublje razumevanje efekta Jarkovskog kod asteroida koji su ekstremno brzi rotatori unutar populacije asteroida bliskih Zemlji (u daljem tekstu biće korišćena engleska skraćenica NEA – Near-Earth Asteroids). Rad se fokusira na ispitivanje efikasnosti ovog efekta u slučajevima kada periodi rotacije asteroida traju izuzetno kratko, od nekoliko sekundi do nekoliko minuta. Takođe, ispituje se primenljivost postojećih analitičkih modela efekta Jarkovskog u ovim specifičnim okolnostima.

Asteroidi bliski Zemlji imaju rotacione periode koji variraju od nekoliko sekundi do nekoliko meseci. Većina ovih asteroida, međutim, ima rotacione periode duže od približno 2.2 sata, što predstavlja takozvanu rotacionu barijeru. Ova barijera definiše najbržu moguću rotaciju koju asteroidi bez unutrašnje čvrstoće (tzv. „rubber piles”) mogu da izdrže bez raspadanja usled centrifugalnih sila. Na slici 1.1 prikazane su veličine i rotacioni periodi asteroida u blizini Zemlje [26, 2].



Slika 1.1: Mereni periodi rotacije asteroida bliskih Zemlji.

Na slici 1.1 može se uočiti da asteroidi manji od oko 150-200 metara često imaju periode rotacije ispod rotacione barijere. Ustvari, ustanovljeno je da brzi rotatori čine većinu malih asteroida u blizini Zemlje, što ih svrstava u značajnu, ali slabo istraženu subpopulaciju. U skorije vreme otkriveno je više objekata koji imaju ekstremno brze rotacije, poput asteroida 2011 PT sa periodom rotacije od 11 minuta [4, 2] ili asteroida 2016 GE1 sa periodom rotacije od svega 34 sekunde [25, 3].

Osim ovoga, kod nekih brzih rotatora, poput prethodno pomenutih, takođe je uočena značajna promena velike poluose. Primera radi, promena velike poluose kod asteroida 2016 GE1 je oko 0.06 auMy^{-1} , tj. oko 9 kmy^{-1}) [3]. Imajući u vidu da efekat Jarkovskog nije jedini negravitacioni efekat koji može izazvati promenu orbitalne energije asteroida, potrebno je ispitati da li je ovaj efekat dovoljno efikasan kod asteroida sa izuzetno brzim rotacionim periodima, i u slučaju da jeste, koje fizičke karakteristike asteroida omogućavaju takvu efikasnost. Zbog toga je važno razviti model pomoću kojeg je moguće ispitati efikasnost ovog efekta kod veoma brzih rotatora.

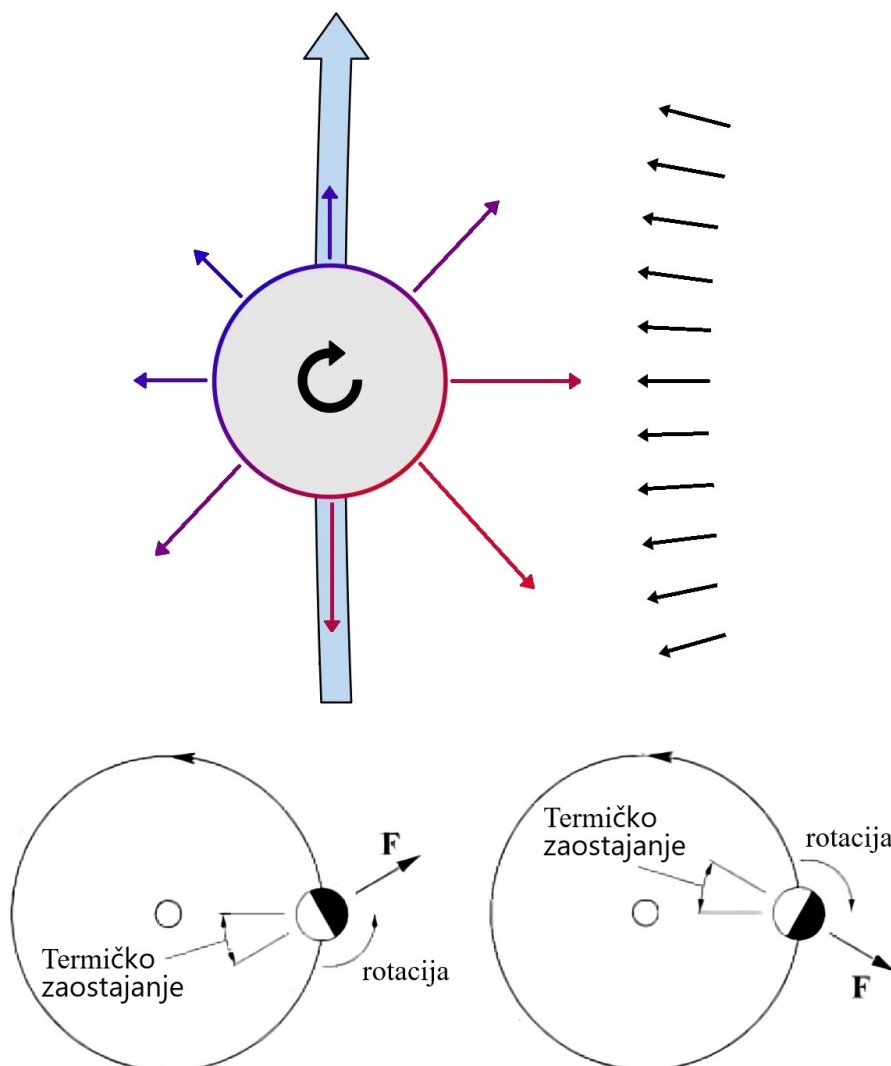
Specifični cilj ovog rada je razvijanje robusnog numeričkog modela efekta Jarkovskog, baziranog na simulaciji toplotne kondukcije kroz asteroid, kao i apsorpcije sunčevog zračenja i njegove emisije u infracrvenom domenu. Ovaj model uključuje

razvoj *Python* koda, u kojem će se primeniti metoda konačnih razlika kako bi se odredila raspodela temperature na površini asteroida, a zatim i sila koja izaziva efekat Jarkovskog, odnosno promenu velike poluose asteroida. Korišćenjem razvijenog numeričkog modela efekta Jarkovskog, biće ispitana njegova efikasnost kod brzih rotatora, kao i primenljivost postojećih teorijskih modela u ovim slučajevima.

1.2 Princip delovanja efekta Jarkovskog

Efekat Jarkovskog predstavlja negravitacioni fenomen koji se javlja usled anizotropne emisije toplote kao posledice nejednake raspodele temperature na površini asteroida. Ovaj efekat izaziva promenu u orbitalnoj energiji asteroida, odnosno u njegovoj velikoj poluosi, a intenzitet efekta zavisi, između ostalog, i od fizičkih karakteristika površine asteroida, kao i njihove unutrašnje strukture. Shodno tome, efekat Jarkovskog predstavlja mesto gde se susreću orbitalna dinamika i fizičke osobine asteroida. Teorijski modeli efekta Jarkovskog omogućavaju izračunavanje promene velike poluose asteroida na osnovu različitih relevantnih parametara (period rotacije, položaj ose rotacije, gustina, toplotna provodljivost, toplotni kapacitet, albedo). Budući da efekat Jarkovskog izaziva površinska sila, ona je srazmerna površini asteroida, tj. kvadratu prečnika ($\sim D^2$). Međutim, ubrzanje koje je posledica te sile je obrnuto srazmerno masi asteroida, koja je sa druge strane direktno srazmerna zapremini tj. trećem stepenu prečnika ($\sim D^{-3}$). Ova dva efekta dovode do toga da je efekat Jarkovskog zapravo obrnuto srazmeran prečniku asteroida ($\sim 1/D$), te analiza ovog efekta ima poseban značaj za male asteroide.

Takozvani generalni efekat Jarkovskog sastoji se iz dve komponente - dnevne i sezone. Na slici 1.2 šematski je prikazan princip delovanja dnevne komponente efekta Jarkovskog.

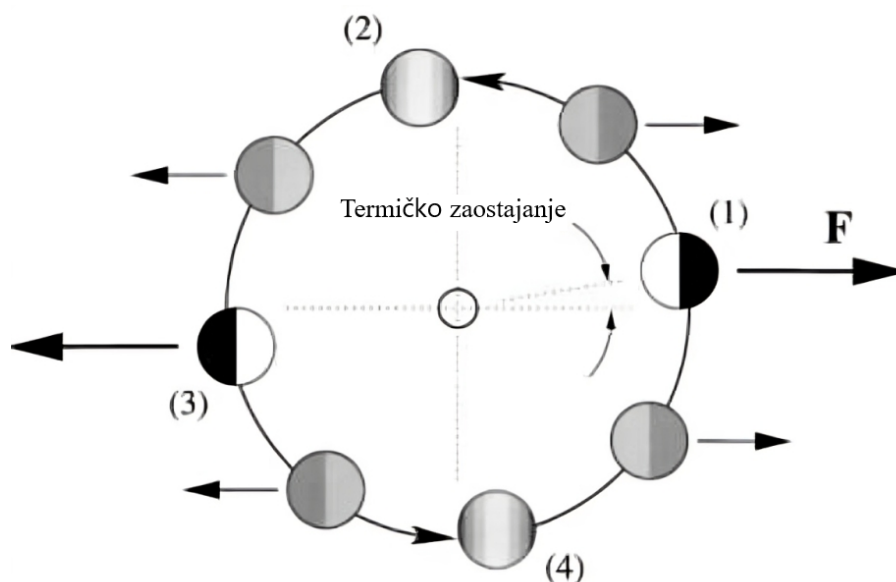


Slika 1.2: Gornji panel ilustruje raspodelu temperature po površini asteroida, kao i anizotropnu emisiju zračenja. Intenzitet reemisije zračenja simbolično je prikazan dužinom strelica na gornjoj slici, što će direktno uticati na pravac pomeranja asteroida. Pravac orbitalnog kretanja asteroida označen je velikom svetlo plavom strelicom. Donji panel ilustruje termičko zaostajanje u slučaju direktne (levo) i retrogradne (desno) rotacije. Pravac pomeranja asteroida će zavisiti od položaja zagrejanije strane u odnosu na Sunce, tj. od smera rotacije asteroida. Termičko zaostajanje je pojava gde površina asteroida, usled termalne inercije površine, ima maksimalnu temperaturu nešto kasnije u odnosu na trenutak kada je najintenzivnije osvetljena Suncem.

Kao što se može videti na gornjem panelu slike 1.2, usled akumulacije toplote i termalne inercije površine asteroida, popodnevna strana asteroida je nešto toplija od prepodnevne strane. Ovo uzrokuje da popodnevna strana reemituje nešto više energije u vidu zračenja u infracrvenom opsegu. Posledica ovog zračenja je mala

sila koja dovodi do pomeranja asteroida. Na donjem panelu slike 1.2 vidi se da kod direktnih rotatora ova sila deluje u smeru vektora brzine, dovodeći tako do postepenog povećanja mehaničke energije, što na dužim vremenskim skalama za posledicu ima povećanje velike poluose asteroida. Sa druge strane, kod retrogradnih rotatora, ova sila usmerena je suprotno od vektora brzine, dovodeći tako do smanjenja velike poluose.

Sa druge strane, sezonska komponenta efekta Jarkovskog posledica je orbitalnog kretanja oko Sunca. Za razliku od dnevne, sezonska komponenta uvek dovodi do smanjenja velike poluose asteroida. Na slici 1.3 prikazan je princip delovanja ove komponente efekta.



Slika 1.3: Princip delovanja sezonske komponente efekta Jarkovskog.

Kao što se može videti na slici 1.3, termalno kašnjenje uvek izaziva silu usmerenu suprotno od vektora brzine, te tako dovodi do smanjenja velike poluose.

Struktura ovog master rada je takva da je u nastavku ovog poglavlja opisan princip delovanja efekta Jarkovskog, kao i dosadašnji radovi o njegovom određivanju analitičkim i numeričkim pristupom. U Poglavlju 2 predstavljena je teorijska analiza efekta Jarkovskog, sa detaljnim osvrtom na osnovne zakone fizike koji su uzrok ovog efekta, model prenosa toplote, određivanje temperaturnog polja po površini i unutrašnjosti asteroida, kao i sila koja dovodi do efekta Jarkovskog. U ovom poglavlju je takođe dat detaljan osvrt na neke analitičke pristupe za određivanje

ovog efekta kako bi se ukazalo na njihovu složenost čak i nakon uvođenja značajnih aproksimacija. U Poglavlju 3 opisan je numerički model efekta Jarkovskog koji je razvijen u ovom radu, dok su u Poglavlju 4 prikazani dobijeni rezultati, kao i zaključci i mogući pravci daljeg istraživanja.

1.3 Dosadašnja istraživanja efekta Jarkovskog

Efekat Jarkovskog dobio je ime po Ivanu Osipoviču Jarkovskom, rusko-poljskom inženjeru i naučniku. Iako je prvenstveno bio inženjer, njegovo interesovanje obuhvatalo je i oblasti fizike i astronomije. Njegove teorije o etru i gravitaciji, koje nisu bile široko prihvaćene, postavile su temelje za njegovu ideju o termalnom efektu koji utiče na kretanje nebeskih tela. Iako efekat nosi njegovo ime, njegovi radovi u kojem se prvi put opisuje efekat u teorijskom smislu, dugo su ostali nepoznati široj naučnoj zajednici. Ponovno otkriće Jarkovskog efekta dogodilo se zahvaljujući radu Ernesta Opika [10] i Vladimira Radžievskog [12] tokom 1950-ih, koji su nezavisno jedan od drugog teoretizovali slične efekte. Njihovo zanimanje za dinamiku asteroida podstaklo je dalja istraživanja koja su potvrdila i proširila originalnu ideju Jarkovskog.

Mnogi autori su istraživali Jarkovski efekat. Međutim, zbog različitih aproksimacija koje su koristili, dostupni prostor uticajnih parametara u tim studijama je ograničen. Peterson [11] je koristio Furijeovu ekspanziju skraćenu na četvrti red kako bi proučio tzv. dnevni efekat Jarkovskog, uzrokovan rotacijom asteroida. Rubincam [13, 14] je identifikovao sezonsku komponentu efekta Jarkovskog i uveo linearizaciju graničnih uslova na površini asteroida [15, 16], te su njegovi rezultati važeći samo za male ekscentričnosti orbite. Vokrouhlický i Farinella [22] razvili su nelinearizovani pristup sezonskom efektu koji je važeći za velika tela. Isti autori su u kasnijem radu [23] uklonili ograničenje na velika tela, ali je taj pristup nepraktičan za relativno velike ekscentričnosti.

Pored toga, drugi efekti koji bi mogli biti važni za određivanje raspodele temperature na površini asteroida tretirani su uz uvođenje različitih aproksimacija kako bi se problem pojednostavio. Ovi efekti uključuju izolaciju regolitom [21], nesferične oblike [19], dok mnogi drugi efekti poput poroznosti materijala, temperaturne zavisnosti toplotne provodljivosti i toplotnog kapaciteta i sl. još uvek nemaju odgovarajući model.

Osim analitičkog pristupa, postoji više radova u kojima se efekat Jarkovskog određuje numeričkim putem. Spitale i Greenberg [17] predstavljaju model konačnih elemenata u kojem se jednačine prenosa toplote rešavaju numeričkim putem. Ovaj pristup je korišćen kao osnova za razvoj numeričkog modela predstavljenog u ovom master radu. U poslednje vreme za analizu efekta Jarkovskog autori su koristili komercijalne softverske pakete koji se koriste u inženjerskim aplikacijama. Xu et al. [27] koriste softver *COMSOL* za analizu efekta Jarkovskog kod tela nepravilnog oblika.

Treba takođe istaći da efekat Jarkovskog, osim uticaja na orbitalnu dinamiku i evoluciju populacija malih tela Sunčevog sistema, može da predstavlja posredni mehanizam preko koga se mogu analizirati drugi fenomeni poput karakteristika materijala od kojih su asteroidi sačinjeni [npr. 8] i određivanja starosti sudarnih familija asteroida [npr. 7]. Uzimajući sve navedeno u obzir, jasno je da određivanje efekta Jarkovskog, posebno u slučajevima kojima do sada nije bilo posvećeno mnogo pažnje, predstavlja važan zadatak, te je širi cilj ovog master rada da generalno doprinese boljem razumevanju ovog efekta.

Glava 2

Teorijska analiza efekta Jarkovskog

Numerički model efekta Jarkovskog koji je razvijen u ovom radu zasniva se na simulaciji kretanja toplotne energije kroz asteroid. Imajući to u vidu, posebna pažnja posvećena je teorijskim konceptima kao i izvođenju svi relevantnih jednačina implementiranih u numerički model za analizu ovog problema.

2.1 Jednačina energije

Zakon održanja energije

Zakon održanja energije je jedan od osnovnih zakona fizike koji se takođe naziva i *prvi zakon termodinamike* ili *jednačina energije*. On glasi: *promena energije materijalnog sistema u toku vremena jednaka je zbiru snaga svih sila i razmenjene količine toplote*. Ovaj zakon kaže da se energija materijalnog sistema ne može izgubiti već samo može preći iz jednog oblika u drugi. Matematička formulacija zakona održanja energije je

$$\frac{DE}{Dt} = \dot{W} + \dot{Q}, \quad (2.1.1)$$

gde su: E ukupna energija sistema, \dot{W} suma snaga svih sila i \dot{Q} razmenjena količina toplote. Ovde se pod terminom razmenjena količina toplote podrazumeva samo količina toplote razmenjene kondukcijom, i neće se uračunati one količine toplote koje se mogu razmeniti zračenjem, sagorevanjem ili nekom drugom hemijskom reakcijom. Ukoliko se sada posmatra određena zapremina nekog kontinuuma, elementarni delić tog kontinuuma će imati zapreminu: dV , gustinu ρ , temperaturu T i brzinu v . Ukupna energija ćelije elementarne zapremine dV jednaka je zbiru

unutrašnje energije dU i kinetičke energije dE_k , odnosno

$$dE = dU + dE_k = edm + \frac{1}{2}v^2 dm,$$

odnosno

$$dE = \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) dm = \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho dV, \quad (2.1.2)$$

Gde je e je specifična unutrašnja energija (unutrašnja energija po jedinici mase) i v intenzitet vektora brzine elementarne zapremine dV . Integraljenjem jednačine (2.1.2) se dobija izraz za ukupnu energiju materijalnog sistema u posmatranoj kontrolnoj zapremini kontinuuma V_k :

$$E = \iiint_{V \in V_k} \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho dV, \quad (2.1.3)$$

odnosno, kada se izraz (2.1.3) uvrsti u zakon održanja ukupne energije sistema (2.1.1)

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{V \in V_k} \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) \rho dV = \dot{W} + \dot{Q}. \quad (2.1.4)$$

Kada se primeni *Lajbnicovo pravilo* o pravu zamene redosleda integraljenja i diferenciranja, i kada se ukupna snaga sila koje dejstvuju na elementarnu zapreminu dV razloži na snagu zapreminskih sila \dot{W}_V i snagu površinskih sila \dot{W}_A jednačina (2.1.4) dobija sledeći oblik

$$\iiint_{V \in V_k} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) dV = \dot{W}_V + \dot{W}_A + \dot{Q}. \quad (2.1.5)$$

Na elementarni delić posmatranog kontinuuma dejstvuje elementarna zapreminska sila

$$d\mathbf{F}_V = \mathbf{f} dm = \mathbf{f} \rho dV, \quad (2.1.6)$$

čija je snaga na celokupnoj kontrolnoj zapremini posmatranog kontinuuma

$$\dot{W}_V = \iiint_{m \in V_k} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{f}_V = \iiint_{V \in V_k} \rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV. \quad (2.1.7)$$

Sa druge strane, na elementarni deo kontrolne površine dejstvuje elementarna površinska sila

$$d\mathbf{F}_A = \boldsymbol{\sigma}_n dA = \mathbf{f} \rho dV, \quad (2.1.8)$$

čija je snaga na celokupnoj kontrolnoj površini posmatranog kontinuuma

$$\dot{W}_A = \iint_{A \in A_k} \boldsymbol{\sigma}_n \cdot \mathbf{v} dA = \iint_{A \in A_k} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} n dA, \quad (2.1.9)$$

odnosno, primenom *teoreme Gaus-Ostrogradski*, prethodni izraz se svodi na

$$\dot{W}_A = \iiint_{V \in V_k} \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV, \quad (2.1.10)$$

gde je $\boldsymbol{\sigma}$ tenzor ukupnog napona. Razmenjena količina toplote kontinuuma sa okolinom preko kontrolne površine je

$$\dot{Q} = - \oiint_{A \in A_k} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n} dA = - \iiint_{V \in V_k} \nabla \cdot \mathbf{q} dV, \quad (2.1.11)$$

gde je \mathbf{q} specifični toplotni fluks. Uvrštavanjem u polazni oblik zakona održanja energije (2.1.5) svih prethodnih predmetnih članova, (2.1.9)-(2.1.11) dobija se *integralni oblik zakona održanja*

$$\iiint_{V \in V_k} \rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) dV = \iiint_{V \in V_k} \rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} dV + \iiint_{V \in V_k} \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV - \iiint_{V \in V_k} \nabla \cdot \mathbf{q} dV. \quad (2.1.12)$$

Na osnovu prethodne jednačine, integralnog oblika zakona održanja energije, dobija se i *lokalni oblik jednačine promene ukupne energije* posmatranog materijalnog sistema kao

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) - \nabla \cdot \mathbf{q}. \quad (2.1.13)$$

Jednačina energije (2.1.13) je osnovni oblik zakona održanja energije. Ova jednačina može da se izvesnim transformacijama napiše u više različitih oblika pogodnim za namenske primene.

Furijev zakon za toplotni fluks

Furijev zakon predstavlja jedan od fundamentalnih zakona termodinamike i opisuje kako se toplota prenosi kroz materijal. Ovaj zakon je ključan za razumevanje procesa kondukcije toplote i ima široku primenu u mehanici, fizici, geofizici i mnogim drugim naučnim disciplinama. Matematička formulacija Furijevog zakona je

$$\mathbf{q} = -k \nabla T, \quad (2.1.14)$$

gde su \mathbf{q} vektor toplotnog fluksa (količina toplote koja prolazi kroz jedinicu površine po jedinici vremena), k koeficijent toplotne provodljivosti materijala (konstantna karakteristika materijala) i ∇T gradijent temperature (promena temperature po jedinici dužine). Ukoliko se prostiranje toplote prati u Dekartovom trodimenzionalnom ortonormiranom koordinatnom sistemu, Furijeov zakon se može na pisati na sledeći način:

$$\mathbf{q} = -k\nabla T = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \mathbf{e}_j, \quad i = x, y, z. \quad (2.1.15)$$

Sada se izraz za jednačinu energije (2.1.13), koji je direktna posledica razmenjene količine toplote kontinuuma sa okolinom $-\nabla \mathbf{q}$, može napisati kao

$$-\nabla \mathbf{q} = -\frac{\partial q_i}{\partial x_j}, \quad (2.1.16)$$

odnosno

$$-\nabla \mathbf{q} = \nabla \cdot (k\nabla T) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right). \quad (2.1.17)$$

Što se tiče fizičkog značenja može se reći sledeće: Furijeov zakon kaže da je toplotni fluks proporcionalan negativnom gradijentu temperature. To znači da toplota teče iz oblasti više temperature prema oblasti niže temperature. Negativni znak u formuli označava da je pravac toplotnog fluksa suprotan pravcu porasta temperature. Koeficijent toplotne provodljivosti k zavisi od materijala i može značajno varirati. Na primer, metali imaju visoku toplotnu provodljivost (npr. bakar i aluminijum), dok materijali poput stakla, plastike i gasa imaju nisku toplotnu provodljivost.

Uzimajući u obzir i Furijeov zakon za toplotni fluks (2.1.16) i (2.1.17), jednačina energije (2.1.13) se sada može napisati u sledećem obliku

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \nabla \cdot (k\nabla T). \quad (2.1.18)$$

Sada ostaje da se vidi na koji način se može leva strana jednačine (2.1.18) transformisati.

Jednačina za entalpiju

Entalpija kao jedna od osnovnih energetske termodinamičke veličine definisana je kao:

$$h := c_p T = e + \frac{p}{\rho} = c_v T + \frac{p}{\rho} \left[\frac{\text{J}}{\text{kg}} \right], \quad (2.1.19)$$

gde su c_p specifična toplota pri konstantnom pritisku i c_v specifična toplota pri konstantnoj zapremini, čija je merna jedinica [J/(kgK)]. Iz izraza za definiciju entalpije (2.1.19) sledi

$$e = h - \frac{p}{\rho} = c_p T - \frac{p}{\rho}. \quad (2.1.20)$$

Kada se izraz (2.1.20) uvrsti u izraz za jednačinu energije (2.1.18) on dobija sledeći oblik

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(c_p T - \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \right) = \rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) + \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (2.1.21)$$

Zakon održanja energije za homogeno kruto telo

Kada je u pitanju homogeno kruto telo, po samoj definiciji, to znači da je rad svih unutrašnjih sila na ma kom virtualnom pomeraju jednak nuli. Uopštenije rečeno, to podrazumeva da rastojanja između bilo koje dve proizvoljne tačke tog tela bivaju nepromenjena tokom kretanja tog tela u prostoru i tokom vremena.

Kod približno krutog tela može se reći da su brzine ćelija, odnosno elementarnih zapremina tog tela bliske nuli, gotovo zanemarljive $\mathbf{v} = 0$. Prema tome, snage svih sila koje dejstvuju na ćeliju tog krutog tela su približne nuli, čija je direktna posledica

$$\rho \mathbf{f}_V \cdot \mathbf{v} \approx 0, \quad \nabla \cdot (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}) \approx 0, \quad (2.1.22)$$

što isto važi i za izraz za kinetičku energiju ćelije, odnosno

$$\frac{\rho}{2} \frac{D(v^2)}{Dt} \approx 0. \quad (2.1.23)$$

Ukoliko su termofizičke karakteristike materijala, odnosno asteroida, nepromenjene veličine u toku vremena jednačina energije (2.1.21) se može napisati u sledećem obliku

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) = \nabla \cdot (k \nabla T). \quad (2.1.24)$$

Što se tiče totalnog izvoda, odnosno izraza sa leve strane jednakosti izraza (2.1.24), važi sledeće

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) = \rho \frac{\partial (c_p T)}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (c_p T), \quad (2.1.25)$$

a, s obzirom da je $\mathbf{v} = 0$ prethodni izraz postaje

$$\rho \frac{D}{Dt} (c_p T) = \rho \frac{\partial (c_p T)}{\partial t} = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (2.1.26)$$

Sada se izraz za zakon održanja ukupne energije homogenog krutog tela sa konstantnim termofizičkim svojstvima može napisati u sledećem obliku kao

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla \cdot (k \nabla T) = k \nabla^2 T = k \Delta T, \quad (2.1.27)$$

odnosno, ako se sad uvede pojam *termalne difuzivnosti materijala* $\alpha = k/(\rho c_p)$, sledi da je

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \Delta T, \quad (2.1.28)$$

što se u literaturi naziva *jednačina kondukcije*. Jednačina kondukcije u otvorenom/razvijenom obliku, u trodimenzionalnom dekartovom desnoorijentisanom ortonormiranom koordinatnom sistemu ima sledeći oblik

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T}{\partial q_i^2},$$

odnosno ukoliko se za prostorne koordinate usvoje x , y i z , postaje

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (2.1.29)$$

2.2 Model prenosa toplote kod asteroida

Model prenosa toplote kod asteroida se zasniva na numeričkom rešavanju jednačine kondukcije 2.1.29. Da bi se ušlo u proces rešavanja ove jednačine potrebno je postaviti početne i granične uslove. Početni uslovi su definisani tako da asteroid ima homogeno temperaturno polje sa temperaturom koja odgovara takozvanoj ravnotežnoj temperaturi.

Ravnotežna temperatura

Ravnotežna temperatura T_{eq} asteroida može se izračunati na osnovu pretpostavke da je energija koju asteroid prima od Sunca u potpunosti balansirana sa energijom koju emituje u svemir. Matematički, ovo stanje ravnoteže može se izraziti pomoću sledeće jednačine:

$$\pi R^2 (1 - A) \frac{L_{\odot}}{4\pi r^2} = 4\pi R^2 \epsilon \sigma T_{eq}^4, \quad (2.2.1)$$

gde R predstavlja usrednjeni radijus asteroida, A Bondov albedo, L_{\odot} luminoznost Sunca, tj. ukupnu snagu Sunčevog zračenja čija je vrednost $L_{\odot} = 3.83 \cdot 10^{26}$ W,

r predstavlja rastojanje posmatranog asteroida od Sunca, ϵ emisivnost, dok je σ Stefan-Bolcmanova konstanta. Kada se jednačina 2.2.1 reši po ravnotežnoj temperaturi T_{eq} sledi

$$T_{eq} = +\sqrt[4]{\frac{(1-A)L_{\odot}}{16\pi\epsilon\sigma r^2}}. \quad (2.2.2)$$

Jednačina kondukcije

Jednačina kondukcije je ključna za razumevanje kako se toplota prostire kroz unutrašnjost asteroida. U kontekstu asteroida, ova jednačina opisuje kako se energija prenosi kroz različite slojeve materijala od površine prema unutrašnjosti i obrnuto.

Dakle, **prostiranje toplote unutar asteroida se vrši putem kondukcije**, dok je jednačina kojom se opisuje takvo stanje prostiranja toplote određena izrazom (2.1.29) i naziva se *jednačina kondukcije*, koja u svom osnovnom obliku za slučaj konstante toplotne provodljivosti glasi:

$$\rho c_p \frac{\partial T}{\partial t}(t, \mathbf{r}) = \nabla \cdot [k \nabla T(t, \mathbf{r})] = k \nabla^2 T(t, \mathbf{r}), \quad (2.2.3)$$

gde su k termička/toplotna provodljivost asteroida, ρ gustina asteroida, c_p specifični toplotni kapacitet pri konstantnom pritisku, T temperatura, a t vreme. Ova jednačina opisuje kako temperatura T varira sa vremenom t i položajem \mathbf{r} unutar asteroida. Jednačina kondukcije se koristi za određivanje temperaturnog polja unutar asteroida i po njegovoj površini.

Definisanje graničnog uslova

U modeliranju termalnih procesa kod asteroida, granični uslovi igraju ključnu ulogu u određivanju kako toplota utiče na površinu asteroida. Jedan od osnovnih graničnih uslova uključuje razmatranje kako asteroid apsorbuje, emituje i reflektuje Sunčevu energiju. Ove interakcije su direktno povezane sa svojstvima površine asteroida, kao što su albedo, emisivnost i toplotna provodljivost.

U kontekstu graničnog uslova za model kondukcije, neophodno je uzeti u obzir kako se toplota prenosi sa površine u unutrašnjost asteroida. Granični uslov se formuliše tako što se na površini asteroida balansira emisija toplote i apsorbovana Sunčeva energija. Matematički posmatrano, ovo se može izraziti pomoću sledeće relacije:

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\text{površina}} + \epsilon \sigma T^4 = (1-A) \mathbf{E}(t) \cdot \mathbf{n}_{\perp}(\mathbf{r}) \quad (2.2.4)$$

gde k predstavlja toplotnu provodljivost asteroida, ϵ - emisivnost površinskog sloja asteroida, σ Stefan-Boltzmannovu konstantu, A Bondov albedo, T temperaturu na površini, $\mathbf{E}(t)$ lokalni fluks sunčevog zračenja, a $\mathbf{n}_\perp(\mathbf{r})$ je jedinični normalni vektor na površini asteroida.

Bondov albedo A predstavlja deo upadne Sunčeve svetlosti (na svim talasnim dužinama) koja se reflektuje sa površine asteroida, bez apsorpcije. Vrednost albeda može značajno varirati zavisno od sastava i strukture površine asteroida. Sa druge strane, emisivnost ϵ je merilo koliko efikasno materijal emituje toplotnu energiju u poređenju sa idealnim crnim telom.

Ovaj granični uslov omogućava numeričko modelovanje temperaturnog polja u unutrašnjosti i po površini asteroida, i određivanje efekta Jarkovskog, o čemu je detaljno diskutovano u Poglavlju 3.

2.3 Sila efekta Jarkovskog

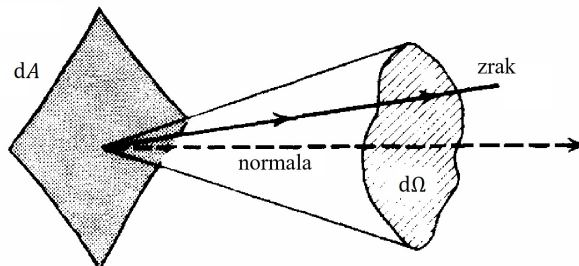
Energija zračenja i specifični svetlostni intenzitet

Fluks predstavlja meru koja se odnosi na ukupnu količinu energije koju nose svi svetlostni zraci dok prolaze kroz određenu površinu. Da bi se bolje razumelo zračenje, potrebno je usresrediti se na ukupnu energiju koju prenose pojedinačni svetlostni zraci. Međutim, ono što je u ovom slučaju specifično i što treba odmah napomenuti je da jedan svetlostni zrak sam po sebi praktično ne prenosi energiju, jer je energija koju nosi jedan zrak veoma mala, gotovo zanemarljiva. Zbog toga, da bi se adekvatno opisala energija zračenja, mora se posmatrati energija koju nosi ceo snop zraka.

Da bi se definisao izraz za energiju zračenja potrebno je uključiti sledeće korake. Najpre, potrebno je definisati elementarnu površinu dA normalnu na pravac snopa zračenja i smatrati da pravci svih zraka prolaze kroz površinu određenu elementarnim prostornim uglom $d\Omega$ datog snopa zračenja. Ono što je karakteristično za ovaj slučaj je to da je oblast definisana diferencijalom prostornog ugla $d\Omega$ paralelna sa ravni određenoj elementarnom površinom dA (slika 2.1). Ukupna količina energije koja prolazi kroz diferencijal površine dA u vremenskom intervalu dt i frekventnom opsegu $d\nu$ je definisana pomoću sledeće relacije:

$$dE_{\nu\perp} = I_\nu dA dt d\Omega d\nu, \quad (2.3.1)$$

pri čemu je I_ν *specifični intenzitet zračenja* koji ima dimenziju $\text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{ster}^{-1}\text{Hz}^{-1}$.

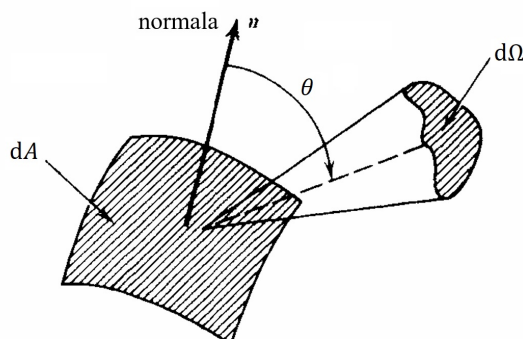


Slika 2.1: Geometrija normalno usmerenih zraka.

Dakle, kao što se može videti iz jednačine (2.3.1), specifični intenzitet I_ν je veličina koja zavisi od prostornih koordinata, pravca (orijentacije) i frekvencije zračenja. Diferencijal frekvecnije $d\nu$ definiše se određenom relacijom koja uzima u obzir sve zrake unutar pomenutog prostornog ugla za dati frekventni domen. Sada se postavlja pitanje, kako bi izgledao izraz za energiju (2.3.1) kad bi se zračenje vršilo od površine dA u pravcu ugla θ , pravcu definisanom u odnosu na normalu diferencijala površine dA kroz diferencijal prostornog ugla $d\Omega$ (2.3). Za ovako određeni slučaj, izraz za energiju je jednačina (2.3.1) pomnožena sa $\cos \theta$, odnosno sledeći izraz:

$$dE_\nu = dE_{\nu\perp} \cos \theta = I_\nu \cos \theta dA dt d\Omega d\nu. \quad (2.3.2)$$

Ovakav pristup omogućava detaljan opis kako se energija prenosi kroz prostor i kako različiti faktori, poput ugla pod kojim zraci prolaze kroz površinu, utiču na količinu prenesene energije.



Slika 2.2: Geometrija proizvoljno/koso usmerenih zraka.

Relativistička energija i impuls čestice

Da bi se postupak dobijanja izraza za pritisak zračenja odredio do kraja, potrebno je sada osvrnuti se na postupak dobijanja ukupne energije čestice iz specijalne teorije relativiteta. Jedan od fundamentalnih rezultata specijalne teorije relativnosti, koju je utemeljio Albert Ajnštajn (*Albert Einstein*) 1905. godine, jeste relacija koja povezuje masu čestice i energiju čestice, poznata kao čuvena *Ajnštajnova formula* $E = mc^2$. Ova formula direktno ukazuje na to da masa mirovanja čestice predstavlja zapravo oblik energije. Međutim, kada se čestica kreće ovaj izraz mora imati dopunski član koji bi dovodio do uticaja i samog kretanja na ukupnu energiju čestice. Dakle, kada se čestica kreće, njena ukupna energija nije samo energija mirovanja, već uključuje i kinetičku energiju čestice. Cilj ovog poglavlja rada jeste da pokaže kako izgleda opšti izraz za ukupnu energiju čestice u pokretu, koji uzima u obzir kako energiju mirovanja, tako i kinetičku energiju.

Osnova za izvođenje izraza za ukupnu energiju relativističke čestice počinje od *Lorencovih transformacija* koje definišu kako energija i impuls/količina kretanja zavise od brzine čestice. Za česticu koja se kreće, ukupna energija E i impuls p su povezani sa masom m koju čestica ima u toku mirovanja i brzinom svetlosti c . Ukupna energija čestice određena je kao

$$E = \gamma mc^2, \quad (2.3.3)$$

gde je γ *Lorencov faktor* definisan kao

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.3.4)$$

Sa druge strane, izraz za određivanje impulsa čestice koji takođe zavisi od Lorencovog faktora i brzine čestice može da se predstavi kao

$$p = \gamma mv, \quad (2.3.5)$$

gde je v brzina kretanja čestice.

Nakon što se Lorencov faktor uvrsti u izraz za ukupnu energiju čestice (2.3.3) on postaje

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (2.3.6)$$

Sa druge strane, kada se izraz za Lorencov faktor (2.3.4) uvrsti u izraz za impuls/količinu kretanja čestice (2.3.5), on dobija sledeći oblik

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (2.3.7)$$

Da bi odredio opšti izraz za ukupnu energiju čestice E u funkciji impulsa p i mase mirovanja m potrebno je da se izrazi (2.3.6) i (2.3.7) kvadriraju, pa se dobiju relacije

$$E^2 = \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.3.8)$$

odnosno

$$p^2 = \left(\frac{mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right)^2 = \frac{m^2 v^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.3.9)$$

Kada se jednačina (2.3.9) pomnoži sa kvadratom brzine svetlosti ona postaje

$$p^2 c^2 = \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (2.3.10)$$

Sada se od izraza za ukupnu energiju čestice (2.3.8) može oduzeti izraz (2.3.10), pri čemu se dobija sledeća relacija:

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^4}{1 - \frac{v^2}{c^2}} - \frac{m^2 v^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}}, \quad (2.3.11)$$

odakle sledi

$$E^2 - p^2 c^2 = \frac{m^2 c^2}{1 - \frac{v^2}{c^2}} (c^2 - v^2). \quad (2.3.12)$$

Sada se izraz za Lorencov faktor može napisati na sledeći način:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{c}{\sqrt{c^2 - v^2}}, \quad (2.3.13)$$

odnosno

$$\gamma^2 = \frac{1}{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \frac{c^2}{c^2 - v^2}, \quad (2.3.14)$$

odakle sledi

$$c^2 - v^2 = c^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \quad (2.3.15)$$

Kada se relacija (2.3.15) uvrsti u izraz (2.3.12) on postaje

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4 \quad (2.3.16)$$

Ovaj izraz predstavlja fundamentalnu relaciju u specijalnoj teoriji relativiteta, koja povezuje ukupnu energiju čestice E sa njenim impulsom p i masom u toku stanja mirovanja m . Izraz $E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$ je univerzalan i primenljiv na sve čestice, uključujući i fotone (koji imaju nultu masu mirovanja), pri čemu se ovaj izraz svodi na $E = pc$.

Pritisak zračenja

Da bi se odredio pritisak kojim čestice dejstvuju na telo izloženo njima potrebno je, najpre, odrediti impuls čestice. Impuls čestice figuriše u izrazu za ukupnu energiju čestice u kvantnoj mehanici koji je određen relacijom (2.3.16), odnosno:

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4,$$

Važna karakteristika ove relacije je da može biti primenjena na kontinualne veličine kao i na same čestice. Kao što je već napomenuto, za slučaj zračenja, čestice koje se analiziraju su fotoni i njihova masa je jednaka nuli. Prema tome, izraz za ukupnu energiju čestice - fotona E_f određen je sledećom relacijom:

$$E_f = pc. \quad (2.3.17)$$

Kada se prethodni izraz diferencira i izrazi impuls/količina kretanja čestice važi

$$dE_f = cdp \quad \rightarrow \quad dp = \frac{1}{c}dE_f. \quad (2.3.18)$$

Sa druge strane, diferencijal emitovane energije zračenja dat je izrazom (2.3.2)

$$dE_\nu = I_\nu \cos \theta dA dt d\Omega d\nu.$$

Prema tome, kada se izraz (2.3.2) uvrsti u izraz (2.3.18) dobije se izraz za impuls/količinu kretanja u sledećoj formi:

$$dp = \frac{1}{c}I_\nu \cos \theta dA dt d\Omega d\nu \quad (2.3.19)$$

Da bi se formulisao pritisak zračenja $d\Phi_r(\nu)$ kojim čestica dejstvuje na elementarnu površinu dA potrebno je, najpre, odrediti silu kojom foton dejstvuje na nju.

Dakle ako je impuls/količina kretanja čestice određen kao $d\mathbf{p} = \gamma \mathbf{v} dm$, to znači da je sila ($\mathbf{\Psi}$) određena kao izvod impulsa po vremenu, odnosno:

$$d\mathbf{p} = \mathbf{\Psi} dt \quad \rightarrow \quad \mathbf{\Psi} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.3.20)$$

Prema tome, pritisak kojim čestice djeluju na elementarnu površinu dA određen je kao:

$$d\Phi_r(\nu) = \frac{\mathbf{\Psi} \cdot \mathbf{n}}{dA} \quad (2.3.21)$$

Sada se može formulirati diferencijal pritiska zračenja $d\Phi_r(\nu)$, koristeći definiciju da pritisak izazvan zračenjem predstavlja transfer impulsa u pravcu normale i kroz elementarnu površinu dA , te može biti predstavljen izrazom

$$d\Phi_r(\nu) = \frac{dp}{dAdt} \cos \angle (\mathbf{\Psi}, \mathbf{n}), \quad (2.3.22)$$

odnosno

$$d\Phi_r(\nu) = \frac{dp}{dAdt} \cos \theta. \quad (2.3.23)$$

Izraz (2.3.28) predstavlja pritisak izazvan zračenjem sa elementarne površi dA . Sada, kada se izraz (2.3.19) uvrsti u izraz (2.3.28) on dobija sledeći oblik:

$$d\Phi_r(\nu) = \frac{1}{dAdt} \left(\frac{1}{c} I_\nu \cos \theta dAdtd\Omega d\nu \right) \cos \theta, \quad (2.3.24)$$

odnosno

$$d\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (2.3.25)$$

S obzirom da je asteroid oblika sfere potrebno je primetiti da element elementarne površine dA zrači izotropno u polusferu u pravcu njegove spoljašnje normale. Ukupni pritisak po jedinici frekvencije u jednoj tački može se dobiti integraljenjem po polusferi na sledeći način

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} \iint I_\nu \cos^2 \theta d\Omega d\nu. \quad (2.3.26)$$

Da bi se uprostio račun, prethodni izraz se može napisati na sledeći način

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} \int \left(\int_{(\nu)} d\nu \right) I_\nu \cos^2 \theta d\Omega, \quad (2.3.27)$$

pri čemu je zbog pretpostavke da se određuje pritisak zračenja pri jediničnoj frekvenciji

$$\int_{(\nu)} d\nu = 1$$

Sada se izraz (2.3.27) može napisati u svom novom obliku kao

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega. \quad (2.3.28)$$

S obzirom da je sada potrebno integraliti po polusferi iznad površine, potrebno je izraz za diferencijal prostornog ugla $d\Omega$ napisati u funkciji zenitskog i azimutalnog ugla kao:

$$d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi,$$

pri čemu treba voditi računa o sledećim granicama koje ovi uglovi imaju

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Sada izraz za pritisak zračenja (2.3.28) postaje

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} \int I_\nu \cos^2 \theta d\Omega = \frac{1}{c} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I_\nu \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (2.3.29)$$

Ako ne postoje informacije o raspodeli specifičnog intenziteta po polusferi koja okružuje određenu tačku, može se pretpostaviti da je specifični intenzitet konstantan u odnosu na ugao posmatranja. Ipak, može se dozvoliti mogućnost da se ovaj intenzitet menja sa različitim položajima na površini. Uzimajući ovo u obzir, integral pritiska zračenja može se transformisati na sledeći način

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} I_\nu \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (2.3.30)$$

odnosno

$$\Phi_r(\nu) = \frac{1}{c} I_\nu \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = 2\pi \frac{I_\nu}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta. \quad (2.3.31)$$

Rešenje preostale integralne sume iz relacije (2.3.31) ima sledeću vrednost

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{1}{3},$$

pa se može napisati izraz za pritisak zračenja u sledećem obliku

$$\Phi_r(\nu) = 2\pi \frac{I_\nu}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{2\pi I_\nu}{3c} \quad (2.3.32)$$

Ako se pretpostavi da je u pitanju zračenje crnog tela, može se napisati sledeće

$$\pi I_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kt} - 1}, \quad (2.3.33)$$

gde je h *Plankova konstanta*. Broj π stoji sa leve strane izraza uz I_ν da bi konvertovao I_ν iz $W/(m^2\text{Hz ster})$ u $W/(m^2\text{Hz})$ tako da se slaže sa jedinicom *Plankovog zakona*. Da bi se našli svi intenziteti kroz sve moguće frekvencije Plankov zakon se integrali tako da se dobije relacija

$$\pi \frac{dI}{d\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kt} - 1}, \quad (2.3.34)$$

odnosno

$$\pi I(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{h\nu/kt} - 1} d\nu = \sigma T^4(\mathbf{r}, t), \quad (2.3.35)$$

gde je σ *Stefan-Bolcmanova konstanta (Stefan-Boltzman)*, a sama desna strana prethodnog izraza predstavlja *Stefan-Bolcmanov zakon*. Merna jedinica dobijenog izraza je W/m^2 . Konačno, može se predstaviti izraz za ukupni pritisak zračenja za sve moguće frekvencije kao

$$\Phi_r(\mathbf{r}, t) = \int \Phi_r(\nu) d\nu = \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T^4(\mathbf{r}, t), \quad (2.3.36)$$

gde je ϵ *emisioni koeficijent* s obzirom da asteroid ne emituje zračenje kao idealno crno telo. Merna jedinica dobijenog izraza je N/m^2 . Kao što se može videti, pritisak zračenja $\Phi_r(\mathbf{r}, t)$ zavisi od prostornih koordinata \mathbf{r} i vremena t jer je temperaturno polje funkcija istih veličina.

Sila efekta Jarkovskog

Sada kad je određen pritisak zračenja može se preći na određivanje sile efekta Jarkovskog. Poznavajući temperaturno polje asteroida $T(\mathbf{r}, t)$, odnosno temperaturno polje bilo kog tela, može se odrediti elementarna sila zračenja koja je direktna posledica emisije fotona, noseći količinu kretanja dalje od elementarne površine dA kao

$$d\mathbf{F}_Y = -\Phi_r(\mathbf{r}, t) d\mathbf{A} = -\Phi_r(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}(\mathbf{r}) dA \quad (2.3.37)$$

odnosno, kad se izraz za pritisak zračenja (2.3.36) uvrsti u prethodnu relaciju dobija se da je

$$d\mathbf{F}_Y = -\frac{2}{3c} \epsilon \sigma T^4(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}(\mathbf{r}) dA, \quad (2.3.38)$$

gde je \mathbf{n} jedinični spoljašnji vektor normale (orijentisan od asteroida ka okolini), dok predznak minus figuriše u jednačini da bi promenio dejstvo sile koja gura asteroid na

suprotnu stranu od emisije fotona sa elementarne površine dA . Naravno, ukupna sila, odnosno integralni oblik sile efekta Jarkovskog, određena je integralom jednačine (2.3.38) kao:

$$\mathbf{F}_Y = - \iint_{A_{ast}} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T^4(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}(\mathbf{r}) dA. \quad (2.3.39)$$

Kao što se može pretpostaviti, analitički pristup rešavanju ovakvog problema za prostorni slučaj, zahtevao bi vrlo složen proces, koji u opštem slučaju ne bi ni bio izvodljiv, tako da se uticaj sile Jarkovskog na kretanje asteroida može odrediti uvođenjem odgovarajućih aproksimacija ili numeričkim putem kao što je slučaj u ovom radu.

2.4 Analitičko rešenje za slučaj jednodimenzionog problema

Određivanje temperaturnog polja

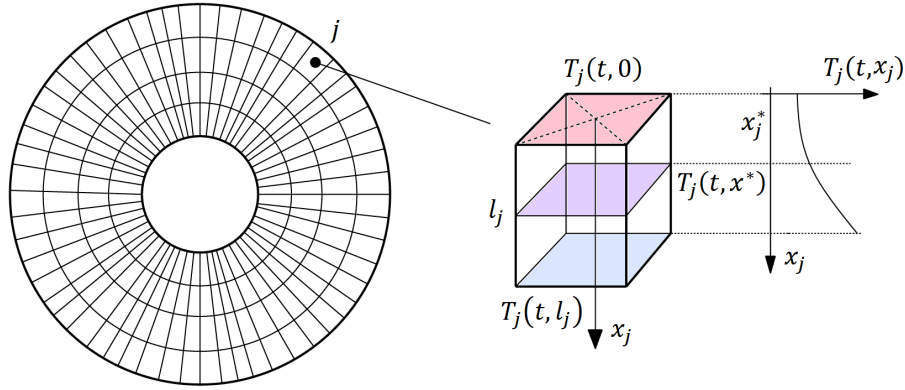
Da bi se odredio efekat Jarkovskog analitičkim putem potrebno je rešiti vrlo složen matematički problem što u opštem slučaju nije moguće. Analitički pristup ovom problemu može da se sagleda u tome da se asteroid podeli na tanke niti, usmerene od centra asteroida ka njegovoj površini, tako da svakoj niti odgovara jedan deo površine asteroida koji je u određenom trenutku izložen Sunčevim zracima. Menjajući svoj položaj u odnosu na asteroid, smenjuju se i različite niti (ili ćelije, tj. male površine između susednih niti) izložene Sunčevim zracima, slika 2.3.

Dakle, razmatra se jedan jednodimenzioni model: poluprostor $x \geq 0$ koji se sastoji od homogenog materijala, izložen periodičnom zračenju sa fluksom $\mathbf{E}(t)$. Međutim, da bi se krenulo dalje, potrebno je videti na šta će da se svedu jednačine kondukcije i granični uslov. Za jednodimenzioni problem, jednačina kondukcije, određena izrazom (2.1.29) može da se napiše na sledeći način

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, x) = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x), \quad (2.4.1)$$

gde je α koeficijent termičke difuzivnosti materijala $\alpha = k/(\rho c_p)$. Sa druge strane, granični uslov, određen jednačinom (2.2.4), za jednodimenzioni problem ima sledeći oblik

$$-k \frac{\partial T}{\partial x}(t, x) + \epsilon \sigma T^4(t, x) = (1 - A)E(t). \quad (2.4.2)$$



Slika 2.3: Šematski prikaz modela za jednodimenzionu analizu temperaturnog polja. Na levoj slici prikazana je numerička mreža sa naznačenom j -tom ćelijom. Sa desne strane je dat šematski prikaz raspodele temperaturnog polja j -te ćelije asteroida u tri preseka. Početak ćelije (prema postavljenom lokalnom koordinatnom sistemu) ima temperaturu $T_j(t, 0)$, proizvoljni položaj unutar ćelije određen je koordinatom x^* lokalnog koordinatnog sistema x_j , dok je temperatura j -te ćelije na dubini l_j $T_j(t, l_j)$.

Ovde je zadatak odrediti funkciju temperature $T(x, t)$ koja zavisi od rastojanja x i vremena t . Sada je potrebno videti kako se može predstaviti periodično zračenje fluksa $E(t)$. S obzirom na prirodu problema, periodično zračenje fluksa $E(t)$ može biti predstavljeno sledećom relacijom

$$E(t) = E_\beta + E_\Omega e^{i2\pi ft}, \quad (2.4.3)$$

gde frekvencija f može označavati dnevno ili sezonsko kretanje Sunca. Prethodni izraz se može napisati kao

$$E(t) = E_\beta + E_\Omega \cos(2\pi ft) + iE_\Omega \sin(2\pi ft). \quad (2.4.4)$$

Naravno, samo realni deo fluksa, odnosno prethodne jednačine

$$R_e\{E(t)\} = E_\beta + E_\Omega \cos(2\pi ft) \quad (2.4.5)$$

je relevantan za razmatranje. Sa druge strane, kako je $E(t)$ harmonična funkcija, i temperatura $T(t, x)$ može da se pretpostavi u istom obliku. To znači da će i odgovor temperature u stacionarnom stanju biti sličnog odgovora/odziva na dati fluks koji na asteroid deluje. Dakle, pretpostavka je da nestacionarno polje temperature ima sledeći oblik

$$T(t, x) = T_\beta + T_\Omega(x) e^{i2\pi ft}, \quad (2.4.6)$$

pri čemu $T_\Omega(x)$ može biti kompleksna funkcija, što direktno podrazumeva fazni pomak/promenu temperature u odnosu na ulazno zračenje. Sada je jednačinu (2.4.6) potrebno uvrstiti u jednačinu kondukcije za jednodimenzioni slučaj (2.4.1), pri čemu su dati izvodi određeni kao

$$\frac{\partial T}{\partial t}(t, x) = i2\pi f T_\Omega(x) e^{i2\pi ft},$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}(t, x) = \frac{d^2 T_\Omega}{dx^2}(x) e^{i2\pi ft},$$

tako da se sada izraz (2.4.1) može napisati u sledećem obliku

$$\alpha \frac{d^2 T_\Omega}{dx^2}(x) e^{i2\pi ft} = i2\pi f T_\Omega(x) e^{i2\pi ft}. \quad (2.4.7)$$

Radi dobijanja netrivialnog rešenja potrebno je da važi

$$e^{i2\pi ft} \neq 0,$$

pri čemu se sada jednačina (2.4.7) svodi na sledeći oblik

$$\alpha \frac{d^2 T_\Omega}{dx^2}(x) = i2\pi f T_\Omega(x). \quad (2.4.8)$$

S obzirom da je $T_\Omega = T_\Omega(x)$, i kako su sve ostale veličine koje figurišu u jednačini konstantne veličine, jednačina (2.4.8) se naziva *homogena linearna diferencijalna jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima*, odnosno drugačije zapisana kao

$$\frac{d^2 T_\Omega}{dx^2}(x) - \frac{i2\pi f}{\alpha} T_\Omega(x) = 0. \quad (2.4.9)$$

Rešenje ove diferencijalne jednačine se može lako predstaviti na sledeći način

$$T_\Omega(x) = A_1 e^{\sqrt{i2\pi f/\alpha} x} + A_2 e^{-\sqrt{i2\pi f/\alpha} x}, \quad (2.4.10)$$

gde su A_1 i A_2 integracione konstante. Da bi se dobilo nedivergentno rešenje, potrebno je da važi $A_1 = 0$, što se lako može zaključiti iz prethodne jednačine, dok se sa druge strane druga integraciona konstanta A_2 može odrediti iz jednog početnog uslova. Da bi se nedivergentni slučaj zadovoljio, lako se može pokazati da granični uslovi imaju sledeće vrednosti

$$T_\Omega(x_0) = T_\Omega(0) \quad (2.4.11)$$

kao i

$$\left(\frac{dT_{\Omega}}{dx}\right)_{x0} + \sqrt{i2\pi f/\alpha}T_{\Omega}(0) = 0, \quad (2.4.12)$$

gde je $x0$ koordinata zadatog graničnog uslova - u ovom slučaju usvaja se da je 0 zato što je lokalni koordinatni sistem postavljen na samoj stranici j -te ćelije.

Primenjujući pomenute granične uslove (2.4.11) i (2.4.12), na jednačinu (2.4.10), sledi

$$T_{\Omega}(0) = A_1 + A_2, \quad (2.4.13)$$

$$\text{odnosno } \left(\frac{dT_{\Omega}}{dx}\right)_{x0} = \sqrt{i2\pi f/\alpha}(A_1 - A_2) = -\sqrt{i2\pi f/\alpha}T_{\Omega}(0), \quad (2.4.14)$$

odakle se dobija nedivergentno rešenje jendačine (2.4.9) dato u sledećem obliku

$$T_{\Omega}(x) = T_{\Omega}(0)e^{-\sqrt{i2\pi f/\alpha}x} = T_{\Omega}(0)e^{-(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}x}. \quad (2.4.15)$$

Sada se jednačina (2.4.15) može uvrstiti u jednačinu (2.4.6) pri čemu je

$$T(t, x) = T_{\beta} + T_{\Omega}(0)e^{-(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}x}e^{i2\pi ft}. \quad (2.4.16)$$

Može se videti da se promene temperature smanjuju sa dubinom x kao $e^{-x/\delta}$ gde je dubina prodiranja termalnog talasa reda veličine $\delta = \sqrt{\alpha/(\pi f)}$. Takođe, postoji i određeni fazni pomak. Međutim, ono što još uvek nije poznato to je temperatura $T(0, t)$. Ovde se koristi granični uslov (2.4.2) u koji je potrebno uvrstiti prethodnu jednačinu (2.4.16), gde je izvod

$$\frac{\partial T}{\partial x}(t, x) = -(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}T_{\Omega}(0)e^{-(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}x}e^{i2\pi ft}. \quad (2.4.17)$$

Sada granični uslov (2.4.2), kada se prethodni izraz uvrsti u njega, postaje

$$k(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}T_{\Omega}(0)e^{-(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}x}e^{i2\pi ft} + \epsilon\sigma \left[T_{\beta} + T_{\Omega}(0)e^{-(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}x}e^{i2\pi ft}\right]^4 = (1-A)(E_{\beta} + E_{\Omega}e^{i2\pi ft}). \quad (2.4.18)$$

Sada je potrebno odrediti kolika je vrednost funkcije kada je $x = 0$, odnosno $T(t, 0)$

$$k(1+i)\sqrt{\pi f/\alpha}T_{\Omega}(0)e^{i2\pi ft} + \epsilon\sigma \left[T_{\beta} + T_{\Omega}(0)e^{i2\pi ft}\right]^4 = (1-A)(E_{\beta} + E_{\Omega}e^{i2\pi ft}). \quad (2.4.19)$$

Izračunavanje četvrtog stepena, a posebno nalaženje rešenja, bilo bi veoma složeno. Ipak, može se pretpostaviti da je $T_{\Omega}(0) \ll T_{\beta}$ (tj. promene temperature su male u

odnosu na srednju temperaturu). Takođe, sada je potrebno linearizovati prethodnu jednačinu kao

$$[T_\beta + T_\Omega(0)]^4 \approx T_\beta^4 + 4T_\beta^3 T_\Omega(0) + O[T_\Omega^2(0)].$$

Sada se mogu oduzeti članovi sa T_β i E_β , jer oni tačno odgovaraju ravnotežnoj temperaturi u jednačini (2.4.19), tako da se dobija linearna jednačina za $T_\Omega(0)$ sledećeg oblika

$$(1 + i)\sqrt{\pi f k c_p \rho} T_\Omega(0) + 4\epsilon\sigma T_{eq}^3 T_\Omega(0) = (1 - A)E_\Omega. \quad (2.4.20)$$

Dakle, površinska temperatura ćelije jedne niti posmatranog asteroida može da se izrazi kao

$$T(t, 0) = T_{eq} + \frac{(1 - A)E_\Omega e^{i2\pi ft}}{(1 + i)\sqrt{\pi f k c_p \rho} + 4\epsilon\sigma T_{eq}^3}. \quad (2.4.21)$$

Kao što se da primetiti, u brojiocu se nalazi kompleksan broj. Nakon pojedinih algebarskih operacija, prethodni izraz može da se napiše na sledeći način

$$T(t, 0) = T_{eq} + \frac{(1 - A)E_\Omega}{4\epsilon\sigma T_{eq}^3} \frac{1}{1 + 2\Theta + 2\Theta^2} e^{i(2\pi ft + \phi_{th})} \quad (2.4.22)$$

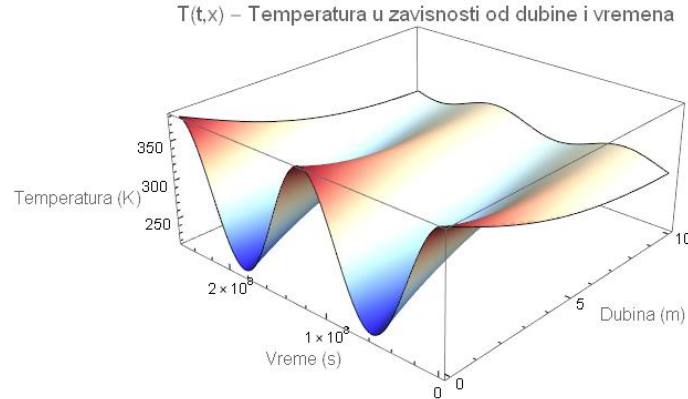
gde su termalni parametar Θ i fazni pomak ϕ_{th} određeni kao

$$\Theta = \frac{\sqrt{\pi f k c_p \rho}}{4\pi\epsilon\sigma T_{eq}^3}, \quad \text{tg}\phi_{th} = -\frac{\Theta}{1 + \Theta}. \quad (2.4.23)$$

Iako nije od ključnog značaja, jer se proces prostiranja toplote unutar asteroida vrši putem kondukcije, konačan izraz za temperaturu $T(t, x)$ određen je sledećom jednačinom

$$T(t, x) = T_{eq} + \frac{(1 - A)E_\Omega}{4\epsilon\sigma T_{eq}^3} \frac{1}{1 + 2\Theta + 2\Theta^2} e^{i(2\pi ft + \phi_{th} - \sqrt{\pi f/\alpha x})} e^{-\sqrt{\pi f/\alpha x}}. \quad (2.4.24)$$

Grafički prikaz jednačine (2.4.24) može da se vidi na dijagramu prikazanom na slici 2.3 sa datim opisom slike i vrednostima, kao i materijalom za koji je dijagram formiran. Dijagram je formiran za balzatnu stenu čija je gustina $\rho = 3500 \text{ kg/m}^3$, specifične toplote pri konstantnom pritisku $c_p = 680 \text{ J/(kgK)}$, toplotne provodljivosti $k = 1.5 \text{ W/(m} \cdot \text{K)}$.



Slika 2.4: 3D grafikon dubine x u odnosu na vreme t u odnosu na temperaturu $T(t, x)$ kao rezultat jednodimenzionalnog modela problema (jednačina (2.4.24)). Svojstva materijala odgovaraju bazaltnoj steni, sa termalnom provodljivošću $k = 1.5 \text{ W/(mK)}$. Amplituda fluksa E_Ω je polovina ravnotežnog fluksa E_β na 2.5 AU od Sunca; frekvencija fluksa $E(t)$ odgovara orbitalnom periodu od $P = 4$ godine. Fluks je prikazan kao tanka linija u (t, T) ravni i skaliran je isto kao i amplituda površinske temperature $T_\Omega(0)$. Termalno kašnjenje između incidentnog fluksa $E(t)$ i površinske temperature $T(0, t)$ tada iznosi ($\phi_{\text{th}} \approx -4^\circ$).

Određivanje sile Jakrovskog

Znajući površinsku temperaturu $T(t, 0)$ (na objektu bilo kog oblika), možemo izračunati elementarnu silu zračenja efekta Jarkovskog usled emisije fotona, koji nose impuls sa pojedinačnog površinskog elementa dA , određenu izrazom (2.3.38) kao:

$$d\mathbf{F}_Y = -\frac{2}{3c}\epsilon\sigma T^4(\mathbf{r}, t)\mathbf{n}(\mathbf{r})dA,$$

Faktor $\frac{2}{3}$ odgovara Lambertovom zakonu rasipanja; \mathbf{n} označava spoljašnji normalni jedinični vektor. Za jednodimenzionalni slučaj, ovaj izraz se svodi na

$$d\mathbf{F}_{Yx} = -\frac{2}{3c}\epsilon\sigma T^4(t, 0)\mathbf{n}(0)dA = \frac{2}{3c}\epsilon\sigma T^4(t, 0)\mathbf{e}_x dA, \quad (2.4.25)$$

gde je $\mathbf{n}(0) = -\mathbf{e}_x$ zapravo jedinični vektor normalne na površinski sloj posmatrane niti materijalnog sistema - asteroida, pri čemu je \mathbf{e}_x jedinični vektor orijentisan u pozitivnom smeru x ose. Ubrzanje nastalo kao posledica efekta Jarkovskog - ubrzanje homogenog tela - asteroida ukupne mase m se zatim dobija integracijom preko cele površine:

$$\mathbf{a}_{Yx} = -\frac{2}{3} \frac{\epsilon\sigma}{mc} \iint_{A_0} dA \mathbf{n}(0) T^4(t, 0) \approx -\frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{mc} T_{\text{eq}}^3 \iint_{A_0} dA \mathbf{n}(0) T_\Omega(0), \quad (2.4.26)$$

gde se ponovo može koristiti linearizovani oblik temperaturnog polja $T^4(t, 0)$ u tački $x = 0$. Kada se prethodna jednačina napiše kao projekcija na x osu dobija sledeći oblik

$$\mathbf{a}_{Yx} = \frac{8}{3} \frac{\epsilon\sigma}{mc} T_{\text{eq}}^3 \iint_{A_0} dA \mathbf{e}_x T_{\Omega}(0). \quad (2.4.27)$$

Glavna orbitalna perturbacija uzrokovana ubrzanjem koje je direktna posledica efekta Jarkovskog (2.4.27) a_Y je drift - poremećaj velike poluose asteroida. Prva Gaussova jednačina [1] onda glasi:

$$\frac{da}{dt} = \frac{2\tau}{n} + O(e), \quad (2.4.28)$$

gde τ označava transverzalnu komponentu ubrzanja \mathbf{a}_{Yx} . Kao što se može videti iz jednačine (2.4.27), rezultirajuće ukupno transverzalno ubrzanje τ (stoga, stopa drifta velike poluosi $\frac{da}{dt}$) je proporcionalno odstupanjima temperature od ravnoteže i obrnuto proporcionalno veličini asteroida (jer $F_Y \propto$ površini asteroida A i $a_Y = \frac{F}{m}$).

Iz prethodnog razmatranja očigledno je koliko je analitički model efekta Jarkovskog složen, čak i u slučaju jednodimenzione aproksimacije, tako da razvoj numeričkih modela predstavlja prirodnu alternativu.

2.5 Linearna teorija efekta Jarkovskog za kružne orbite

Model efekta Jarkovskog koji je korišćen za poređenje sa rezultatima dobijenih pomoću razvijenog numeričkog modela, opisan je u radovima Davida Vokroličkog i saradnika [20, 18]. U daljem tekstu, ovaj model biće nazivan *linearni model*. Ovaj model predstavlja standard u izučavanju efekta Jarkovskog, kao i njegovom korišćenju za određivanje fizičkih karakteristika asteroida, poput toplotne provodljivosti i termalne inercije [2, 3, 8, 6].

U ovom modelu materijalni sistem, što je u ovom slučaju razmatranja asteroid, se posmatra kao sferno telo koje se kreće po kružnoj orbiti oko zvezde, u ovom slučaju oko Sunca. Da bi se rešila jednačina prenosa toplote - kondukcije (2.1.29), jer se asteroid smatra idealno krutim telom, neophodno je linearizovati granične uslove. Kao rezultat, promena velike poluose orbite asteroida da/dt uzrokovana efektom Jarkovskog može se podeliti na dva osnovna doprinosa/sabirka: deo koji je posledica sezonskog efekta Jarkovskog, označen kao $(da/dt)_s$, i deo koji je posledica dnevnog

efekta Jarkovskog, označen kao $(da/dt)_d$. Promena velike poluose orbite asteroida koja je direktna posledica sezonskog efekta jarkovskog može se odrediti pomoću izraza

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_s = \frac{4}{9} \frac{\alpha\Phi}{\omega_{rev}} F(R'_s, \Theta_s) \sin^2 \gamma, \quad (2.5.1)$$

dok se promena velike poluose orbite asteroida koje je direktna posledica dnevnog efekta Jarkovskog može predstaviti pomoću izraza

$$\left(\frac{da}{dt}\right)_d = -\frac{8}{9} \frac{\alpha\Phi}{\omega_{rot}} F(R'_d, \Theta_d) \cos \gamma. \quad (2.5.2)$$

U prethodne dve jednačine, α predstavlja koeficijent apsorpcije na površini asteroida, dok Φ označava koeficijent pritiska zračenja [24], γ označava nagib ose rotacije, dok je ω_{rev} ugaona brzina orbitalnog kretanja asteroida oko zvezde - Sunca. Sa druge strane parametri R'_s i R'_d su bezdimenzionalne veličine, odnosno skalirane vrednosti radijusa asteroida R , definisane pomoću sledećih izraza:

$$R'_s = \frac{R}{l_s}, \quad R'_d = \frac{R}{l_d}. \quad (2.5.3)$$

Ova dva izraza uvode skaliranje koje uključuje dubine prodiranja sezonskih i dnevnih toplotnih talasa, označene kao l_s i l_d , definisane su sledećim izrazima, respektivno:

$$l_s = \sqrt{\frac{k}{\rho C \omega_{rev}}}, \quad l_d = \sqrt{\frac{k}{\rho c_p \omega_{rot}}}, \quad (2.5.4)$$

pri čemu k predstavlja termičku/toplotnu provodljivost asteroida, c_p je specifični toplotni kapacitet asteroida, dok ρ označava gustinu asteroida. Dubine prodiranja l_s i l_d direktno zavise od ovih termalnih svojstava asteroida. Pored toga, ove dubine prodiranja zavise i od frekvencija rotacije - ugaone brzine rotacije asteroida, pri čemu se ω_{rot} odnosi na frekvenciju rotacije asteroida oko sopstvene ose, dok ω_{rev} predstavlja orbitalnu frekvenciju asteroida oko Sunca. Ugaona brzina asteroida ω_{rot} određena je sledećim izrazom

$$\omega_{rot} = \frac{2\pi}{P}, \quad (2.5.5)$$

gde je P period rotacije posmatranog asteroida. Termalni parametri, označeni kao Θ_s i Θ_d , takođe su povezani sa fizičkim svojstvima asteroida. Oni su definisani pomoću sledećih relacija:

$$\Theta_s = \sqrt{\frac{\rho K C \omega_{rev}}{\epsilon \sigma T_*^3}}, \quad \Theta_d = \sqrt{\frac{\rho K C \omega_{rot}}{\epsilon \sigma T_*^3}} \quad (2.5.6)$$

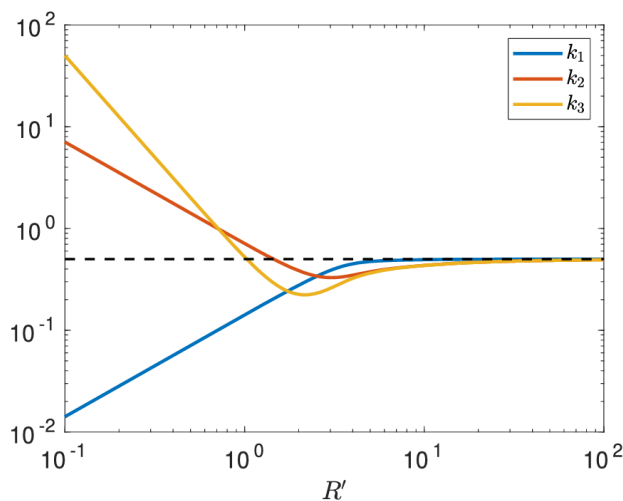
U prethodne dve jednačine, σ predstavlja Stefan-Bolcmanovu konstantu, dok ϵ predstavlja emisivnost površine asteroida, T_* označava temperaturu subsolarne tačke asteroida, koja se može izraziti na sledeći način:

$$T_* = \sqrt[4]{\frac{\alpha \mathcal{E}_\odot}{\epsilon \sigma}}, \quad (2.5.7)$$

gde je \mathcal{E}_\odot solarni fluks zračenja na određenoj udaljenosti asteroida od Sunca. U jednačinama (2.5.1) i (2.5.2) figuriše i funkcija F i ona ima sledeći oblik:

$$F(R', \Theta) = -\frac{k_1(R') \Theta}{1 + 2k_2(R') \Theta + k_3(R') \Theta^2}. \quad (2.5.8)$$

Ova funkcija zavisi od skaliranog radijusa asteroida, R' , kao i od termalnog parametra Θ . Koeficijenti k_1 , k_2 , i k_3 su pozitivne analitičke funkcije koje zavise od skaliranog radijusa - konstante R' [19, 20]. Na slici 2.5 koja predstavlja zavisnost ovih koeficijenata od vrednosti konstante skaliranog radijusa R' , može se primetiti da svi koeficijenti teže vrednosti 1/2 kada je skalirani radijus R' dovoljno veliki.



Slika 2.5: Funkcionalni prikaz zavisnosti koeficijenata k_1 , k_2 i k_3 od koeficijenta skaliranog radijusa R' . Promena koeficijenta k_1 u zavisnosti od R' prikazana je plavom bojom, zavisnost k_2 prikazana je narandžastom bojom, dok je zavisnost koeficijenta k_3 prikazana žutom bojom.

Kao što je ranije istaknuto, sezonska komponenta Jarkovskog efekta uvek izaziva smanjenje velike poluose. Nasuprot tome, pravac migracije asteroida koji je uzrokovan dnevnom komponentom efekta Jarkovskog zavisi od položaja, odnosno nagiba ose rotacije γ u odnosu na orbitalnu ravan asteroida, pri čemu je migracija najizraženija kada γ ima vrednosti od 0° ili 180° .

Glava 3

Numerički model efekta Jarkovskog

U ovom radu razvijen je napredni numerički pristup zasnovan na metodu konačnih elemenata kako bi se sproveda nezavisna provera ranijih rešenja u slučajevima gde su ti modeli bili validirani i pouzdani, kao i da bi se proširila teorija na nove režime koji do sada nisu bili detaljno razmatrani u prethodnim istraživanjima. Metodologija prati prethodno opisani pristup za numeričku analizu efekta Jarkovskog [17]. Numerički model je implementiran u programskom jeziku Python i dostupan je u GitHub repozitorijumu¹. Dobijeni rezultati su upoređivani sa linearnim modelom, koji je takođe implementiran u Python kod i dostupan je u istom repozitorijumu.

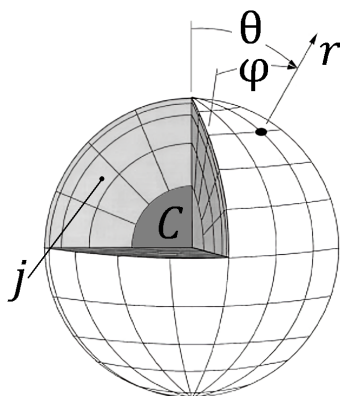
3.1 Formiranje numeričke mreže

Da bi se precizno odredilo stanje temperaturnog polja asteroida, koristi se metoda konačnih razlika za rešavanje jednačine prenosa toplote 2.1.29. Ova metoda uključuje podelu tela na diskretne ćelije, pri čemu se pretpostavlja da su materijalna svojstva i temperatura unutar svake ćelije uniformni. Granični uslovi usled solarne insolacije (2.2.4) računaju se za svaki vremenski korak tokom rotacije asteroida.

U ovom istraživanju se pretpostavlja da je telo asteroida sferno, iako je pristup razvijen na način koji omogućava lako prilagođavanje za elipsoidna tela. Centar tela zauzima jedna sferna ćelija, a oko nje se prostire mreža ćelija koje su uniformno raspoređene u pravcu dužine i širine. U radijalnom pravcu, ćelije su posebno tanke blizu površine tela, kako bi se omogućilo precizno praćenje temperaturnog profila

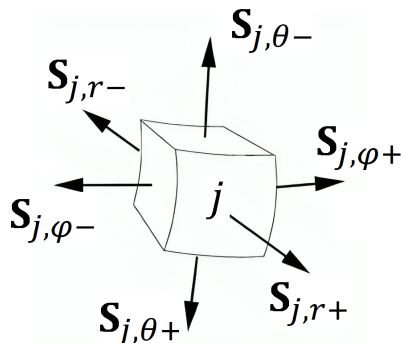
¹<https://github.com/dusanmarceta/Yarkovsky>

bliže površini gde su promene temperature veće. Geometrija mreže sačinjene od konačnih elemenata koja se koristi za računanje je prikazana na slici 3.1.



Slika 3.1: Šema mreže koja se koristi za rešavanje jednačine prenosa toplote unutar sfernog tela. Čelije su ravnomerno raspoređene duž linija kolatituda θ i longitude φ . U radijalnom pravcu, razmak između ćelija nije konstantan, već se postepeno smanjuje prema površini, gde postaje izuzetno mali kako bi se obezbedila preciznost u modeliranju termalnih efekata na površini. U samom centru tela nalazi se jedna velika sferna ćelija C koja predstavlja osnovu mreže i od koje se ostatak mreže širi prema spoljašnjim slojevima. Proizvoljna j -ta ćelija numeričke mreže označena je sa j .

Sada je potrebno obratiti pažnju na proizvolju j -tu ćeliju numeričke mreže. Na slici 3.2 prikazana je tipična necentralna proizvoljna ćelija postavljene numeričke mreže. Vektor $\mathbf{S}_{j,i}$ označava normalni jedinični vektor površine svake ćelije, gde prvi indeks j , $j \in \mathbb{Z}_0^+$ označava indeks ćelije numeričke mreže, dok drugi indeks i predstavlja sfernu koordinatu koja je konstantna na toj površini ćelije $i = r+, r-, \varphi+, \varphi-, \theta+, \theta-$, pri čemu znak pored odgovarajuće sferne koordinate (+ ili -) označava da li je data normala usmerena u pravcu porasta ili smanjenja odgovarajuće koordinate. Na primer, $\mathbf{S}_{m,r+}$ označava jedinični vektor normale u radijalnom pravcu m -te ćelije, koja je usmerena ka spoljašnjosti sfere. Važno je napomenuti da centralna ćelija ima granice samo u radijalnom pravcu, s obzirom na njen poseban položaj u centru tela i na njen oblik - oblik sfere.



Slika 3.2: Geometrija proizvoljne ćelije prikazana je sa definisanim normalnim vektorima za svaku stranu ćelije. Normalni vektor za svaku stranu identifikovan je pomoću dva indeksa, pri čemu je prvi indeks indeks ćelije, dok drugi indeks ukazuje na to koja sferna koordinata (r , θ ili φ) ostaje konstantna duž te strane ćelije. Drugi indeks sadrži znak $+$ ili $-$ koji služi za razlikovanje između dve suprotne strane koje definišu granice ćelije u tom pravcu. Ovakva identifikacija omogućava precizno praćenje i analizu prostorne orijentacije svake ćelije u mreži.

3.2 Ojlerova metoda za rešavanje jednačine prenosa toplote

Računanje temperature $T(\mathbf{r})$ u svakoj ćeliji tela u trenutku $t_0 + \Delta t$ vrši se na osnovu temperature u prethodnom vremenskom trenutku t_0 . Ovo se postiže korišćenjem Ojlerove metode prvog reda, jednostavne ali efikasne numeričke metode koja omogućava kontinuirano ažuriranje vrednosti temperature u svakom konačnom elementu asteroida u svakom vremenskom koraku, pružajući detaljnu sliku temperaturnog polja asteroida tokom vremena.

Računanje temperature j -te ćelije posmatranog asteroida u sledećem vremenskom intervalu $t_0 + \Delta t$ određeno je na sledeći način

$$T_j(\mathbf{r}_j, t_0 + \Delta t) = T_j(\mathbf{r}_j, t_0) + \Delta t \left. \frac{\partial T_j}{\partial t} \right|_{t_0}(\mathbf{r}_j, t) + \mathcal{O}(\Delta t^2). \quad (3.2.1)$$

Ono što je karakteristično za ove probleme je mogućnost pojave nestabilog numeričkog procesa. Da bi numerički proračun bio stabilan, potrebno je definisati odgovarajući vremenski korak. Veličina vremenskog koraka Δt određena je dimenzijom ćelije u mreži, jer u svakom vremenskom intervalu termalna perturbacija se širi na određenu udaljenost, koja se može izraziti sledećom formulom:

$$l \approx \sqrt{\frac{k \Delta t}{\rho c_p}}.$$

U ovoj formuli, k predstavlja toplotnu provodljivost materijala, ρ je gustina, dok je c_p specifični toplotni kapacitet materijala od kojeg je asteroid sačinjen. Ako bi vremenski korak bio prevelik, termalna perturbacija bi mogla da se širi dalje nego što je dimenzija ćelije, što bi dovelo do nereálnih rezultata jer u takvom slučaju ćelije u mreži mogu komunicirati samo sa svojim neposrednim susedima. Dakle, da bi se usvojio odgovarajući vremenski korak, kao faktor sigurnosti, biće određen na osnovu najmanje ćelije numeričke mreže čija je karakteristična dimenzija l_{min} , pa se može napisati sledeće

$$l_{min} = \sqrt{\frac{k\Delta t^*}{\rho c_p}} \quad (3.2.2)$$

odakle je odgovarajući vremenski korak Δt^* određen kao

$$\Delta t^* = \frac{\rho c_p l_{min}^2}{k}. \quad (3.2.3)$$

Ovaj problem bi se donekle mogao ublažiti primenom numeričke metode višeg reda, čime bi se postigla veća preciznost. Ipak, umesto da se uvode kompleksnije metode, vremenski korak je jednostavno ograničen, kao što je gore pokazano, tako da bude dovoljno kratak (obično je dovoljno da bude manji od 1/20 perioda rotacije).

Sada se temperatura j -te ćelije u sledećem vremenskom intervalu $t_0 + \Delta t^*$ određuje kao

$$T_j(\mathbf{r}_j, t_0 + \Delta t^*) = T_j(\mathbf{r}_j, t_0) + \Delta t^* \left. \frac{\partial T_j}{\partial t} \right|_{t_0}(\mathbf{r}_j, t) + \mathcal{O}(\Delta t^{*2}), \quad (3.2.4)$$

čime je, uz poznati vremenski gradijent temperature u svakom konačnom elementu posmatranog materijalnog sistema $\partial T_j / \partial t|_{t_0}(\mathbf{r}_j, t)$, potpuno određeno temperaturno polje asteroida $T(\mathbf{r}, t)$.

3.3 Diskretizacija diferencijalne jednačine kondukcije

Da bi se izvršila diskretizacija diferencijalne jednačine prenošenja toplote - jednačine kondukcije (2.1.29), prvo je potrebno nju pomnožiti sa diferencijalom zapremine (elementarnim zapreminskim delom) posmatranog asteroida tako da se dobije sledeće

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} dV_j = \alpha \Delta T_j dV_j, \quad (3.3.1)$$

gde je T_j temperatura asteroida u neposrednoj okolini tačke j ograničene lokalnom elementarnom zapreminom dV_j . Sada se prethodna jednačina može napisati kao

$$\rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} dV_j = k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j. \quad (3.3.2)$$

Sada se prethodni izraz (3.3.2) može napisati u integralnom obliku kao

$$\iiint_{V_j} \rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} dV_j = \iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j. \quad (3.3.3)$$

Levi izraz u prethodnoj jednačini, nakon integracije, dobija sledeći oblik

$$\iiint_{V_j} \rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} dV_j = \rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} V_j, \quad (3.3.4)$$

gde je sada V_j zapremina j -tog konačnog elemeneta posmatranog asteroida. Sada se jednačina (3.3.3) može napisati u sledećem obliku

$$\rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} V_j = \iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j. \quad (3.3.5)$$

Izraz sa desne strane jednakosti (3.3.5) može da se transformiše na sledeći način

$$\iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j = k \iiint_{V_j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial T_j}{\partial q_i} \right) dV_j \quad (3.3.6)$$

odnosno, kada se izvrši prva aproksimacija po koordinati q_j

$$k \iiint_{V_j} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\frac{\partial T_j}{\partial q_i} \right) dV_j = k \sum_{i=1}^3 \iint_{A_{i,j}} \left[\left(\frac{\partial T_j}{\partial q_i} \right)_{j+1|i} - \left(\frac{\partial T_j}{\partial q_i} \right)_{j|i} \right] dA_{i,j}. \quad (3.3.7)$$

Sada kada se izvrši aproksimacija i gradijenta temperature $\partial T_j / \partial q_i$ dobija se

$$\iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j = k \sum_{i=1}^3 \oint_{A_{i,j}} \left[\left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right)_{j+1|i} - \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right)_{j|i} \right] dA_{i,j}. \quad (3.3.8)$$

S obzirom na poznatu geometriju numeričke mreže poznate su površine svih konačnih elemenata. Prema tome, diferencijal površine $dA_{i,j}$ je određen u svom konačnom obliku, pa se prethodna jednačina može napisati kao

$$\iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j = k \sum_{i=1}^3 \left[\left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right)_{j+1|i} - \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right)_{j|i} \right] \Delta A_{i,j}, \quad (3.3.9)$$

odnosno, radi lakšeg zapisa:

$$\iiint_{V_j} k \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 T_j}{\partial q_i^2} dV_j = k \sum_{i=1}^3 \Delta \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}^{j+1|i} \Delta A_{i,j}. \quad (3.3.10)$$

Sada, kada se jednačina (3.3.10) uvrsti u jednačinu (3.3.5) dobija se diskretizovani oblik diferencijalne jednačine kondukcije

$$\rho c_p \frac{\partial T_j}{\partial t} \Delta V_j = k \sum_{i=1}^3 \Delta \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}^{j+1|i} \Delta A_{i,j}, \quad (3.3.11)$$

odakle se direktno može odrediti vremenski gradijent temperature $\partial T_j / \partial t$ u j -toj ćeliji

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{k}{\rho c_p \Delta V_j} \sum_{i=1}^3 \Delta \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}^{j+1|i} \Delta A_{i,j}, \quad (3.3.12)$$

odnosno

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = \frac{\Phi_j}{\rho c_p \Delta V_j}, \quad (3.3.13)$$

gde je Φ_j ukupan toplotni fluks j -te ćelije definisan desnom stranom izraza (3.3.11). Sada se na osnovu jednačine (3.2.4) može odrediti temperatura j -te ćelije u narednom vremenskom trenutku $t_0 + \Delta t^*$ kao

$$T_j^{(n+1)} = T_j^{(n)} + \frac{\Delta t^* k}{\rho c_p \Delta V_j} \sum_{i=1}^3 \Delta \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}^{j+1|i} \Delta A_{i,j} + \mathcal{O}(\Delta t^{*2}), \quad (3.3.14)$$

odnosno

$$T_j^{(n+1)} = T_j^{(n)} + \frac{\Delta t^*}{\rho c_p \Delta V_j} \Phi_j + \mathcal{O}(\Delta t^{*2}). \quad (3.3.15)$$

Primenom jednačine (3.3.15) za svaku ćeliju numeričke mreže elemenata, temperaturno polje asteroida $T(\mathbf{r}, t)$ je pooptuno određeno.

3.4 Toplotni fluks, pritisak zračenja i granični uslovi

Toplotni fluks - uopštena forma

Ako se obrati pažnja na toplotni bilans j -te ćelije Φ_j u izrazu (3.3.11), može se zaključiti da se on sastoji od šest članova, tj. flukseva pomnoženih sa odgovarajućom površinom j -te ćelije asteroida. Ovaj izraz može se napisati i u sledećem obliku

$$\Phi_j = k \sum_{i=1}^3 \Delta \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}^{j+1|i} \Delta A_{i,j} = \sum_{i=1}^p J_{j,i} \Delta A_{j,i}, \quad (3.4.1)$$

gde je p broj stranica koje ćelija ima. U opštem slučaju necentralna ćelija ima šest stranica, dok ćelije koja se nalaze uz osu obrtanja mogu imati manje površina. Takođe, ćelije koje se nalaze na površini nemaju susednu ćeliju u smeru $r+$. Izraz za toplotni fluks kroz proizvoljnu stranu ćelije se može zapisati u obliku

$$J_{j,i} = k \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}. \quad (3.4.2)$$

Kada se za proizvoljnu necentralnu ćeliju izraz (3.4.1) napiše pomoću prethodno uvedene notacije (slika 3.2) važi sledeće

$$\begin{aligned} \Phi_j = & J_{j,r+} \Delta A_{j,r+} + J_{j,r-} \Delta A_{j,r-} + J_{j,\theta+} \Delta A_{j,\theta+} + \\ & J_{j,\theta-} \Delta A_{j,\theta-} + J_{j,\varphi+} \Delta A_{j,\varphi+} + J_{j,\varphi-} \Delta A_{j,\varphi-}. \end{aligned} \quad (3.4.3)$$

Ova jednačina se koristi za izračunavanje energetskog bilansa svake ćelije u svakom trenutku vremena, kao i za izračunavanje temperatura ćelije pomoću jednačine (3.3.15).

Toplotni fluks usled kondukcije

U izrazu (3.4.3), ne moraju svi sabirci biti posledica iste prirode toplotnog dejstva na ćeliju. Ukoliko je reč o proizvoljnoj unutrašnjoj ćeliji, reč je o toplotnoj

kondukciji, a za toplotni fluks se onda kaže da je konduktivan toplotni fluks. On se može predstaviti i u vektorskom obliku na osnovu jednačine (3.4.1), na sledeći način

$$J_{j,i} = k \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i} = k (\nabla T_j)|_i \cdot \mathbf{S}_{j,i}, \quad (3.4.4)$$

gde je $\mathbf{S}_{j,i}$ jedinični vektor normale na i -tu stranicu j -te ćelije, a gradijent $(\nabla T_j)|_i$

$$(\nabla T_j)|_i = \left(\frac{T_{j+1}^{(n)} - T_j^{(n)}}{\Delta q_i} \right) \Big|_{j|i}. \quad (3.4.5)$$

Temperaturni gradijent $k (\nabla T_j)|_i$ koji predstavlja promenu temperature preko površine jedne ćelije koja se nalazi na koordinatama (r, θ, φ) , izračunava se korišćenjem aproksimacije razlike. Ova metoda se zasniva na proračunu pravca normalnog na datu površinu, odnosno duž pravca na kojem temperatura najbrže raste ili opada. Na primer, u radijalnom pravcu, temperaturni gradijent (3.4.5) može se izraziti kao razlika u temperaturi između tačke koja se nalazi na rastojanju Δr_{j+} od centra ćelije i same tačke u centru, podeljena sa istim tim rastojanjem, tj. rastojanjem između težišta ćelija:

$$(\nabla T_j)_{r+} \approx \frac{T(r_j + \Delta r_{j+}, \theta_j, \varphi_j; t) - T(r_j, \theta_j, \varphi_j; t)}{\Delta r_{j+}}.$$

Toplotni fluks usled Sunčevog zračenja

U kontekstu graničnog uslova za model kondukcije, neophodno je uzeti u obzir kako se toplota prenosi sa površine u unutrašnjost asteroida. Granični uslov se formuliše tako što se na površini asteroida balansira emisija toplote i apsorbovana Sunčeva energija.

Matematički posmatrano, ovo se može izraziti pomoću relacije (2.2.4) i ona, za površinsku/spoljašnju ćeliju s čija je površina β , ima sledeći oblik:

$$k \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{r}} \Big|_{\beta} + \epsilon \sigma T_s^4 = (1 - A) \mathbf{E}_{\odot}(t) \cdot \mathbf{n}_{s,\beta\perp}(\mathbf{r}_s), \quad (3.4.6)$$

gde k predstavlja termičku provodljivost asteroida, ϵ - emisivnost površinskog sloja asteroida, σ Stefan-Boltzmannovu konstantu, T_s temperaturu na površini asteroida u tački s , $\mathbf{E}_{\odot}(t)$ lokalni fluks sunčevog zračenja, A predstavlja Bondov albedo, dok je $\mathbf{n}_{s,\beta\perp}(\mathbf{r}_s)$ jedinični normalni vektor na površini asteroida u posmatranoj ćeliji

mreže. Iz izraza (3.4.6) može se lako izraziti fluks solarnog zračenja kroz površinu β , s -te ćelije

$$J_{s,\beta} = k \left. \frac{\partial T_s}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\beta}. \quad (3.4.7)$$

Dakle, za ćelije koje se nalaze na površini, toplotni fluks $J_{s,\beta}$ predstavlja razliku između Sunčevog zračenja koje dopire do površine asteroida i toplotnog zračenja koje ta površina emituje. Na osnovu jednačina (3.4.6) i (3.4.7), izraz za ovaj toplotni fluks u s -toj ćeliji kroz izloženu/spoljašnju stranicu β , može se izraziti sledećom formulom

$$J_{s,\beta} = (1 - A)\mathbf{E}_{\odot}(t) \cdot \mathbf{n}_{s,\beta\perp}(\mathbf{r}_s) - \epsilon\sigma T_s^4. \quad (3.4.8)$$

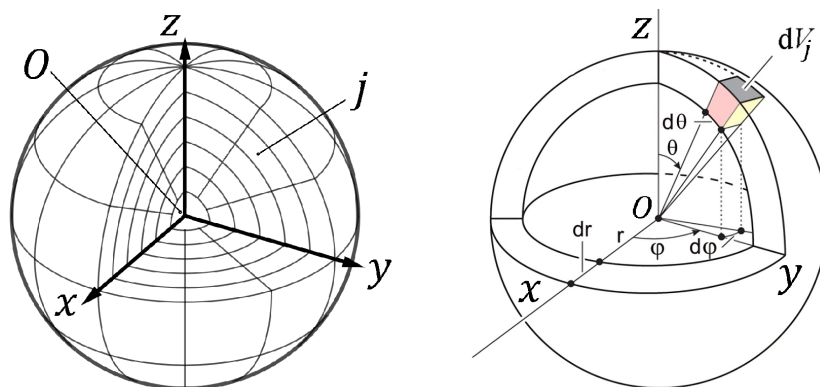
Ukoliko je, okolna temperatura T_{∞} u kojoj se asteroid nalazi različita od nule, jednačina (3.4.8) postaje

$$J_{s,\beta} = (1 - A)\mathbf{E}_{\odot}(t) \cdot \mathbf{n}_{s,\beta\perp}(\mathbf{r}_s) - \epsilon\sigma (T_s^4 - T_{\infty}^4). \quad (3.4.9)$$

Na dnevnoj strani asteroida, Sunčevo zračenje doprinosi ukupnom toplotnom protoku, dok je na noćnoj strani, gde nema direktnog Sunčevog zračenja, jedini relevantan član u izrazu toplotno zračenje koje asteroid emituje u svemir. Ova razlika između ulaznog i izlaznog toplotnog toka igra ključnu ulogu u određivanju temperaturnog stanja na samoj površini asteroida.

3.5 Određivanje površina i zapremina ćelija

Kao što se može videti u jednačini za određivanje toplotnog bilansa za jednu ćeliju (3.4.3), za određivanje temperature, pored toplotnih flukseva, potrebno je odrediti i površine svih ćelija. Sa druge strane, ako se obrati pažnja na jednačinu (3.3.15) koja predstavlja izraz za određivanje temperature ćelije u sledećem vremenskom trenutku.



Slika 3.3: Prikaz mreže (levo) i položaja j -te ćelije u sfernom koordinatnom sistemu (desno).

Radi lakšeg računa i prirode problema, površine i zapremine ćelija su određene u sfernom koordinatnom sistemu, u prostoru koordinata r , θ i φ (slika 3.3.).

Određivanje zapremine ćelija

Diferencijal zapremine asteroida dV , u sfernom koordinatnom sistemu, je oblika

$$dV = r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta. \quad (3.5.1)$$

Ukoliko je položaj j -te ćelije određen tako da su vrednosti koordinata r , θ i φ sledeće

$$r_{j-} \leq r \leq r_{j+}, \quad \theta_{j-} \leq \theta \leq \theta_{j+}, \quad \varphi_{j-} \leq \varphi \leq \varphi_{j+}, \quad (3.5.2)$$

onda je, na osnovu jednačine (3.5.1), i granica posmatranog domena (3.5.2), zapremina j -te ćelije asteroidne mreže određena pomoću sledeće integralne sume

$$\Delta V_j = \iiint_{V_j} r^2 \sin \theta dr d\varphi d\theta = \int_{r_{j-}}^{r_{j+}} r^2 dr \int_{\theta_{j-}}^{\theta_{j+}} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{j-}}^{\varphi_{j+}} d\varphi, \quad (3.5.3)$$

odnosno

$$\Delta V_j = \frac{1}{3} (r_{j+}^3 - r_{j-}^3) [\cos(\theta_{j-}) - \cos(\theta_{j+})] (\varphi_{j+} - \varphi_{j-}). \quad (3.5.4)$$

Razlika dva ugla $\varphi_{j+} - \varphi_{j-}$ ima istu vrednost za sve ćelije asteroidne mreže, pa važi sledeće

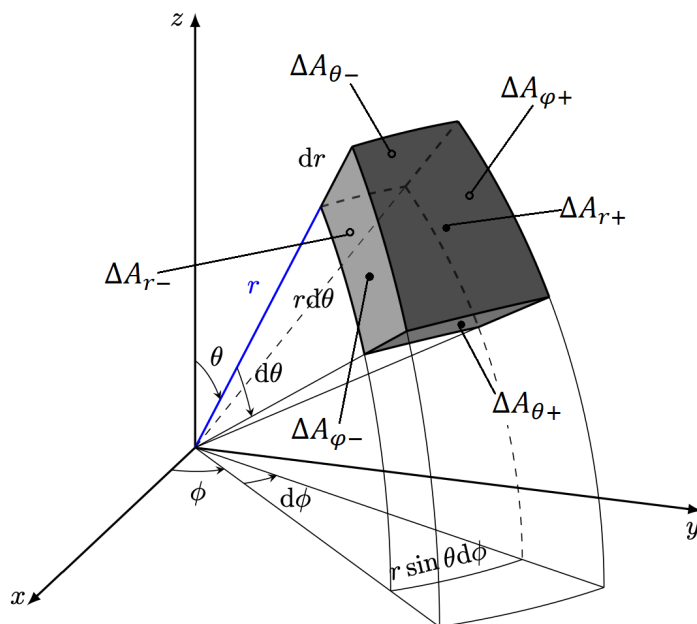
$$\Delta\varphi_j = \varphi_{j+} - \varphi_{j-} = \Delta\varphi, \quad (3.5.5)$$

tako da se sada zapremina j -te ćelije može napisati u sledećem obliku

$$\Delta V_j = \frac{1}{3} (r_{j+}^3 - r_{j-}^3) [\cos(\theta_{j-}) - \cos(\theta_{j+})] \Delta\varphi. \quad (3.5.6)$$

Određivanje površina ćelija

U opštem slučaju (isključujući centralnu ćeliju) ćelija numeričke mreže može imati maksimalno 6 stranica. Takvih ćelija svakako ima najviše u numeričkoj mreži ćelija asteroida. Numeracija stranica ćelije koja ima šest strana prikazana je na slici (3.2)



Slika 3.4: Prikaz usvojenih oznaka površina jedne šestostrane ćelije numeričke mreže asteroida.

Kada se pogleda slika 3.4 može se zaključiti da su „bočne” stranice ćelije $\Delta A_{j,\varphi+}$ i $\Delta A_{j,\varphi-}$ jednake. To podrazumeva da se može napisati sledeća relacija

$$\Delta A_{j,\varphi+} = \Delta A_{j,\varphi-} = \Delta A_{j,\varphi\pm} \quad (3.5.7)$$

Diferencijal te površine može da se odredi na sledeći način

$$dA_\varphi = r dr d\varphi, \quad (3.5.8)$$

odakle se integraljenjem dalje određuje vrednost površina $\Delta A_{j,\varphi_\pm}$ kao

$$\Delta A_{j,\varphi_\pm} = \iint_{A_{j,\varphi_\pm}} r dr d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_{j-}}^{r_{j+}} \theta \Big|_{\theta_{j-}}^{\theta_{j+}} = \frac{1}{2} (r_{j+}^2 - r_{j-}^2) (\theta_{j+} - \theta_{j-}). \quad (3.5.9)$$

Razlika dva ugla $\theta_{j+} - \theta_{j-}$ ima istu vrednost za ćelije asteroidne mreže, pa važi sledeće

$$\Delta\theta_j = \theta_{j+} - \theta_{j-} = \Delta\theta,$$

tako da se sada površina φ_\pm j -te ćelije može napisati u sledećem obliku

$$\Delta A_{j,\varphi_\pm} = \frac{1}{2} (r_{j+}^2 - r_{j-}^2) \Delta\theta. \quad (3.5.10)$$

Sada se može preći na određivanje površina $\Delta A_{j,\theta_+}$ i $\Delta A_{j,\theta_-}$. Analogno kao i u slučaju sa prethodnom površinom, diferencijal ove površine dA_θ je određen kao

$$dA_\theta = r \sin\theta dr d\varphi, \quad (3.5.11)$$

odakle se integraljenjem dalje određuje vrednost površina $\Delta A_{j,\varphi_\pm}$ kao

$$\Delta A_{j,\theta_\pm} = \iint_{A_{j,\theta_\pm}} r \sin\theta dr d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \Big|_{r_{j-}}^{r_{j+}} \varphi \Big|_{\varphi_{j-}}^{\varphi_{j+}} \sin\theta_{j\pm} = \frac{1}{2} (r_{j+}^2 - r_{j-}^2) (\varphi_{j+} - \varphi_{j-}) \sin\theta_{j\pm}, \quad (3.5.12)$$

gde je sada sa razlogom u jednačini ostala oznaka $\theta_{j\pm}$ što podrazumeva da ove dve površine nisu iste. Tačnije, svakoj od površina odgovara jedna vrednost ugla θ_j , što podrazumeva da će površinama $\Delta A_{j,\theta_+}$ i $\Delta A_{j,\theta_-}$ odgovarati vrednosti uglova θ_{j+} , odnosno θ_{j-} , respektivno. Uzimajući ovo u obzir, kao i relaciju (3.5.5), površine θ_\pm j -te ćelije mogu se napisati u sledećem obliku

$$\Delta A_{j,\theta_\pm} = \frac{1}{2} (r_{j+}^2 - r_{j-}^2) \Delta\varphi \sin\theta_{j,\pm}. \quad (3.5.13)$$

Preostalo je još da se odrede površine $\Delta A_{j,r_+}$ i $\Delta A_{j,r_-}$ koje su upravne na radialni pravac/poteg r . Diferencijal ove sferne površine dA_r može da se odredi na sledeći način

$$dA_r = r^2 \sin\theta d\theta d\varphi, \quad (3.5.14)$$

odakle se integraljenjem dalje određuje vrednost površina $\Delta A_{j,r\pm}$ kao

$$\begin{aligned} \Delta A_{j,r\pm} &= \iint_{A_{j,r\pm}} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi = r_{j,\pm}^2 \int_{\theta_{j-}}^{\theta_{j+}} \sin \theta d\theta \int_{\varphi_{j-}}^{\varphi_{j+}} d\varphi \\ &= r_{j,\pm}^2 \cos \theta \Big|_{\theta_{j-}}^{\theta_{j+}} \varphi \Big|_{\varphi_{j-}}^{\varphi_{j+}} = r_{j,\pm}^2 [\cos(\theta_{j-}) - \cos(\theta_{j+})] (\varphi_{j+} - \varphi_{j-}), \end{aligned} \quad (3.5.15)$$

gde je sada sa razlogom u jednačini ostala oznaka $r_{j\pm}$ što podrazumeva da ove dve površine nisu iste. Tačnije, svakoj od površina odgovara jedna vrednost polarnog potega/koordinate r_j , što podrazumeva da će površinama $\Delta A_{j,r+}$ i $\Delta A_{j,r-}$ odgovarati vrednosti polarnih potega r_{j+} , odnosno r_{j-} , respektivno. Uzimajući ovo u obzir, kao i relaciju (3.5.15), površina r_{\pm} j -te ćelije može se napisati u sledećem obliku

$$\Delta A_{j,r\pm} = r_{j\pm}^2 [\cos(\theta_{j-}) - \cos(\theta_{j+})] \Delta\varphi. \quad (3.5.16)$$

Izrazima (3.5.6), (3.5.10), (3.5.13) i (3.5.16) određene su sve površine i zapremine ćelija numeričke mreže elemenata posmatranog materijalnog sistema, u ovom slučaju asteroida. Sada se mogu rešiti ključni izrazi (3.3.15) i (3.4.3) koji služe za određivanje toplotnog bilansa ćelije, gde je, pored toplotnih flukseva kroz površi ćelija, potreban podatak o samim površinama ćelija i, naravno sračunavanje temperature u sledećem vremenskom trenutku, što podrazumeva i podatak o zapremini ćelija.

3.6 Izračunavanje sile efekta Jarkovskog

Ukupna sila definisana u svom integralnom obliku koja je direktna posledica efekta Jarkovskog, određena je integralom jednačine (2.3.39) kao:

$$\mathbf{F}_Y = - \oiint_{A_{ast}} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T^4(\mathbf{r}; t) \mathbf{n}(\mathbf{r}) dA,$$

gde je \mathbf{n} jedinični eksterni/spoljašnji vektor normale orijentisan od asteroida ka okolini, dok predznak minus figuriše u jednačini da bi promenio dejstvo sile koja gura asteroid na suprotnu stranu od emisije fotona sa elementarne površine dA .

Kao što je već napomenuto, analitički pristup rešavanju ovakvog problema za prostorni slučaj, zahtevao bi vrlo složen i naporan proces, koji u opštem slučaju ne bi ni bio moguć, tako da se uticaj sile Jarkovskog na kretanje asteroida može odrediti numeričkim putem ili uvođenjem različitih aproksimacija. Sada, kada je mehanički sistem podeljen na konačan broj elemenata, formulacija sile efekta Jarkovskog mora

biti prilagođena tom slučaju. Za spoljnu ćeliju s čija je stranica $\beta = r_+$ izložena dejstvu pritiska Solarnog zračenja, elementarna sila (samo za tu spoljnu ćeliju) efekta Jarkovskog se određuje na sledeći način

$$\mathbf{F}_{Y_{s,r_+}} = - \iint_{\Delta A_{s,r_+}} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T_s^4(\mathbf{r}_s; t) \mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s) dA, \quad (3.6.1)$$

gde je $T_s^4(\mathbf{r}_s; t)$ temperatura s -te ćelije, a $\mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s)$ - spoljašnji vektor normalne za posmatranu s -tu ćeliju. Za granicu integrala jasno stoji $\Delta A_{s,r_+}$ što podrazumeva da se integrali samo za taj deo sfere koji je ograničen tom spoljašnjom stranicom ćelije. Sada kada je potrebno odrediti ukupnu - rezultujuću silu efekta Jarkovskog na asteroid kao celinu, potrebno je sabrati sve sile određene jednačinom (3.6.1) kao

$$\mathbf{F}_Y = - \sum_{s=1}^{n_\varphi n_\theta} \iint_{\Delta A_{s,r_+}} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T_s^4(\mathbf{r}_s; t) \mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s) dA, \quad (3.6.2)$$

gde je $n_\varphi n_\theta$ ukupan broj spoljašnjih ćelija asteroida. Međutim, numerički proračun bi se dosta zakomplikovao kada bi se ovaj integral rešavao. Da bi se to zaobišlo može se postaviti sledeća relacija koja podrazumeva da se sa povećanjem ćelija numeričke mreže površinske ćelije asteroida smanjuju pa samim tim teže da postanu bliske ravnim glatkim površima, što bi značilo da vektor normale za datu površ ostaje uvek upravan na novu ravan. To podrazumeva da $\Delta\varphi$ i $\Delta\theta$ moraju biti što manji, odnosno

$$\lim_{\substack{\Delta\varphi \rightarrow 0 \\ \Delta\theta \rightarrow 0}} \sum_{s=1}^{n_\varphi n_\theta} \iint_{\Delta A_{s,r_+}} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T_s^4(\mathbf{r}_s; t) \mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s) dA \approx \sum_{s=1}^{n_\varphi n_\theta} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T_s^4(\mathbf{r}_s; t) \mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s) \Delta A_{s,r_+}, \quad (3.6.3)$$

čime se određuje sila efekta Jarkovskog kao

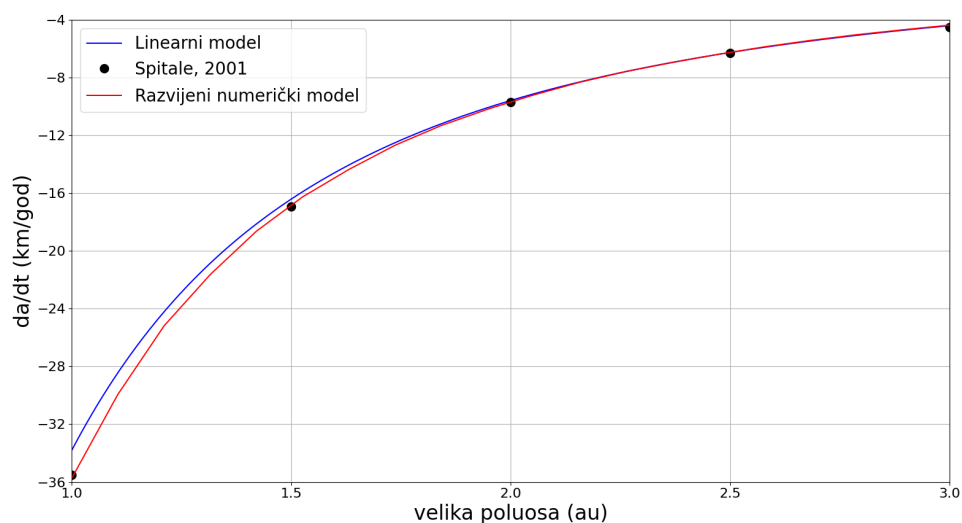
$$\mathbf{F}_Y = - \sum_{s=1}^{n_\varphi n_\theta} \frac{2}{3c} \epsilon \sigma T_s^4(\mathbf{r}_s; t) \mathbf{n}_{r_+}(\mathbf{r}_s) \Delta A_{s,r_+}. \quad (3.6.4)$$

Nakon što se izračuna sila Jarkovskog, ona se može razložiti na radijalnu komponentu (F_{YR}), koja nema značajnijeg uticaja na orbitu asteroida, i na poprečnu komponentu (F_{YT}), koja dovodi do promene velike poluose usled efekta Jarkovskog. Promena velike poluose se računa na osnovu Gausove jednačine [1]

$$\frac{da}{dt} = \frac{2a}{nrm} \sqrt{1 - e^2} F_{YT}, \quad (3.6.5)$$

gde je n srednje kretanje, r trenutno rastojanje do Sunca, e ekscentričnost orbite, i m masa asteroida.

Validacija razvijenog numeričkog modela izvršena je u odnosu na linearni model [20], kao i na numerički model [17], koji je služio kao osnov za razvoj modela prezentovanog u ovom radu. Na slici 3.5 upoređeni su rezultati, na osnovu čega se vidi da je razvijeni model u saglasnosti sa pomenutim modelima.



Slika 3.5: Prikazana je promena velike poluose usled efekta Jarkovskog dobijena pomoću tri različita modela. Rezultati se odnose na asteroid sa sledećim karakteristikama: $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $k = 1.5 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, $c_p = 1000 \text{ J/(kg}\cdot\text{K)}$, $\epsilon = 1$, $p = 0$, $\gamma = 180^\circ$.

Glava 4

Rezultati i diskusija

U ovom radu pažnja je fokusirana na intenzivno testiranje razvijenog numeričkog modela, kao i na njegovu primenu na brzo rotirajuće asteroide i analizu uticaja karakteristika materijala na efekat Jarkovskog. Numerički model računa generalni efekat Jarkovskog, ali je testiran samo doprinos dnevne komponente efekta Jarkovskog, dok testiranje doprinosa sezonske komponente tek sledi. Iako trenutna verzija koda može da računa efekat Jarkovskog za asteroide sa nagnutom ekvatorskom ravni u odnosu na orbitalnu ravan, kao i za ekscentrične orbite, u ovom odeljku su prikazani rezultati za slučaj asteroida na kružnoj orbiti poluprečnika 1 AJ i osu rotacije upravnu na orbitalnu ravan, sa ciljem da se fokus stavi na uticaj brzine rotacije i karakteristika materijala. Rezultati su prikazani za sferni asteroid sa sledećim fizičkim karakteristikama:

prečnik, $D = 1$ m

gustina, $\rho = 1000$ kg/m³

toplotni kapacitet, $C_p = 1000$ J/(kg · K)

Bondov albedo, $p = 0$

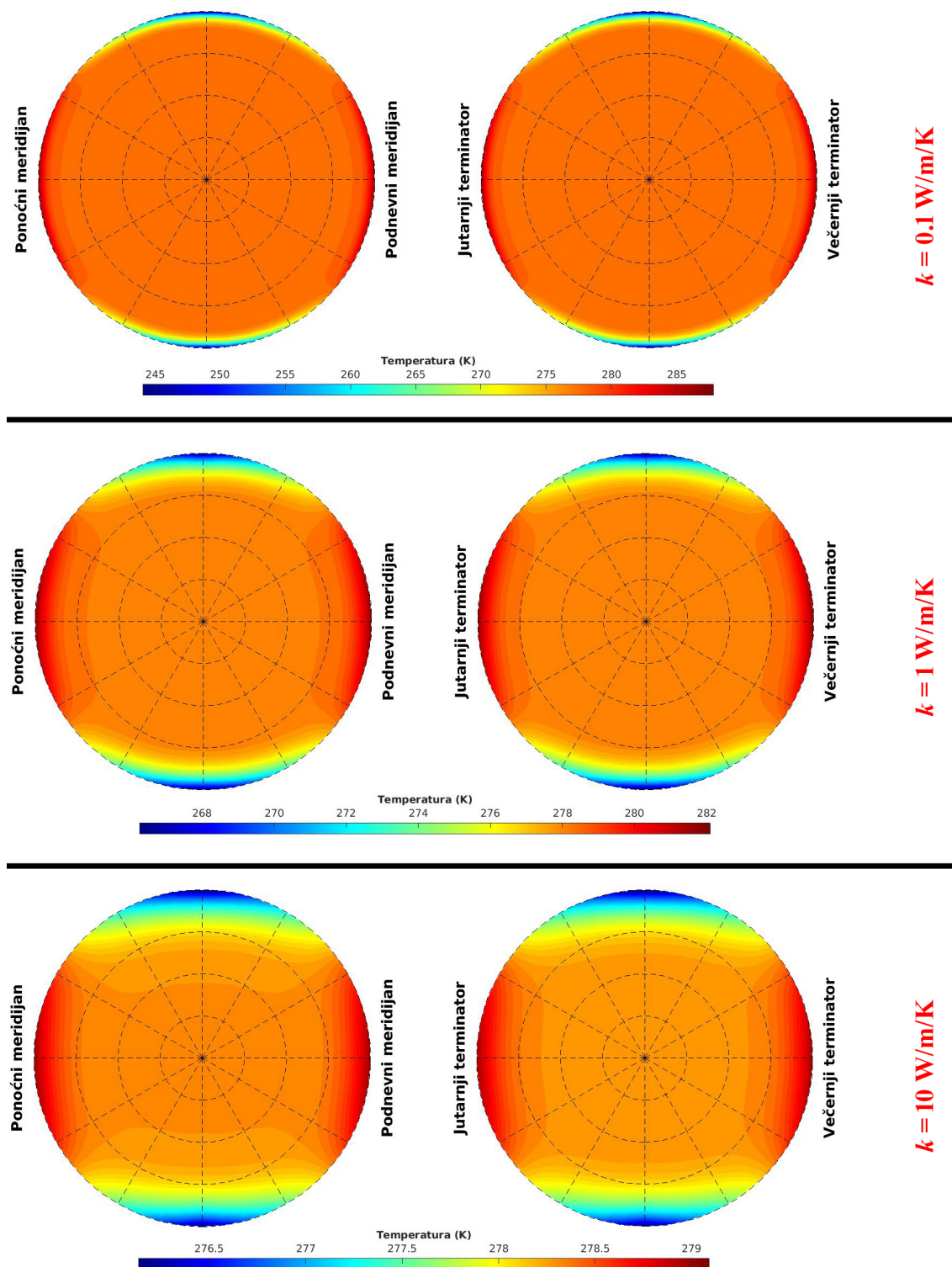
emisivnost, $\epsilon = 1$

U cilju analize uticaja perioda rotacije analizirani su vrednosti od 10 s do 2h, dok su za analizu uticaja karakteristika materijala analizirane vrednosti toplotne provodljivosti od 10^{-5} do 10 W/(m·K). Na ovaj način pokriven je širok opseg taksonomskih klasa asteroida [5, 9].

4.1 Analiza raspodele temperature

Budući da je efekat Jarkovskog posledica specifične raspodele temperature po površini, kao i po unutrašnjosti asteroida, izvršena je analiza kako ove raspodele zavise od toplotne provodljivosti i perioda rotacije. Na slici 4.1 prikazane su raspodele temperature po karakterističnim poprečnim presecima asteroida. Jedan karakterističan presek sadrži podnevni i ponoćni meridijan, dok drugi sadrži jutarnji i večernji terminator. Na ovaj način možemo da sagledamo kako se temperatura menja ispod površine u trenutku podneva, ponoći, izlaza i zalaza Sunca.

Na slici 4.1 prikazane su raspodele temperature po karakterističnim presecima za slučaj izuzetno brze rotacije sa periodom od samo 10 s. Da bi se prikazao uticaj karakteristika materijala, raspodele su prikazane za tri vrednosti toplotne provodljivosti - 0.1, 1 i 10 W/(m·K).



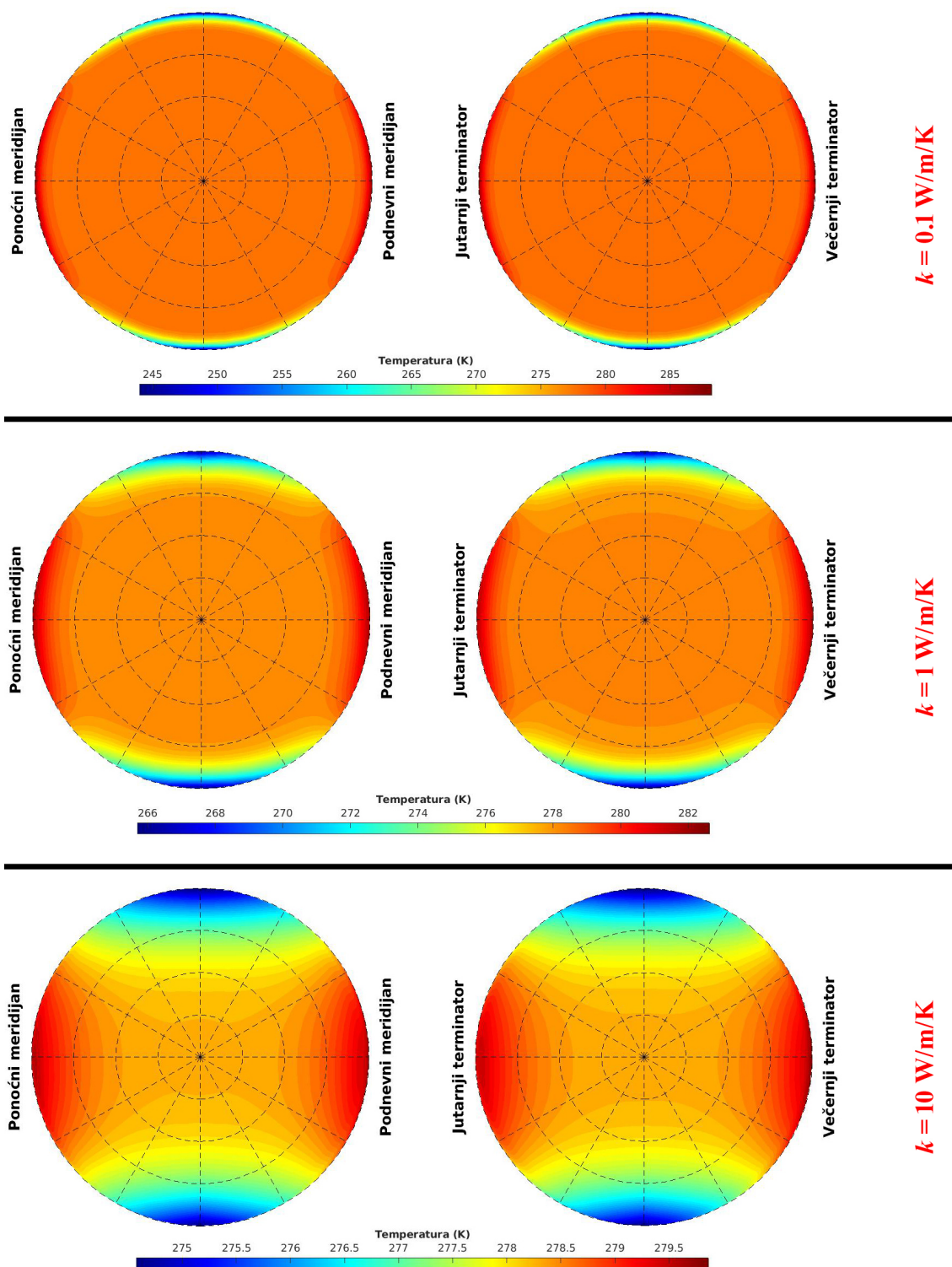
Slika 4.1: Raspodjele temperature po karakterističnim poprečnim presjecima asteroida za period rotacije $P = 10 \text{ s}$. Parovi raspodjele odgovaraju različitim toplotnim provodljivostima: gornji par za $k = 0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, srednji par $k = 1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, donji par za $k = 10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

Na slici 4.1 uočljivo je da su raspodele približno simetrične, što znači da nema velike razlike između raspodele temperature ispod podnevnog i ponoćnog meridijana, ili između jutarnjeg i večernjeg terminatora. Ovo je posledica izuzetno brze rotacije sa periodom od samo 10 s, koja dovodi do toga da je temperaturno polje unutar asteroida skoro nezavisno od vremena.

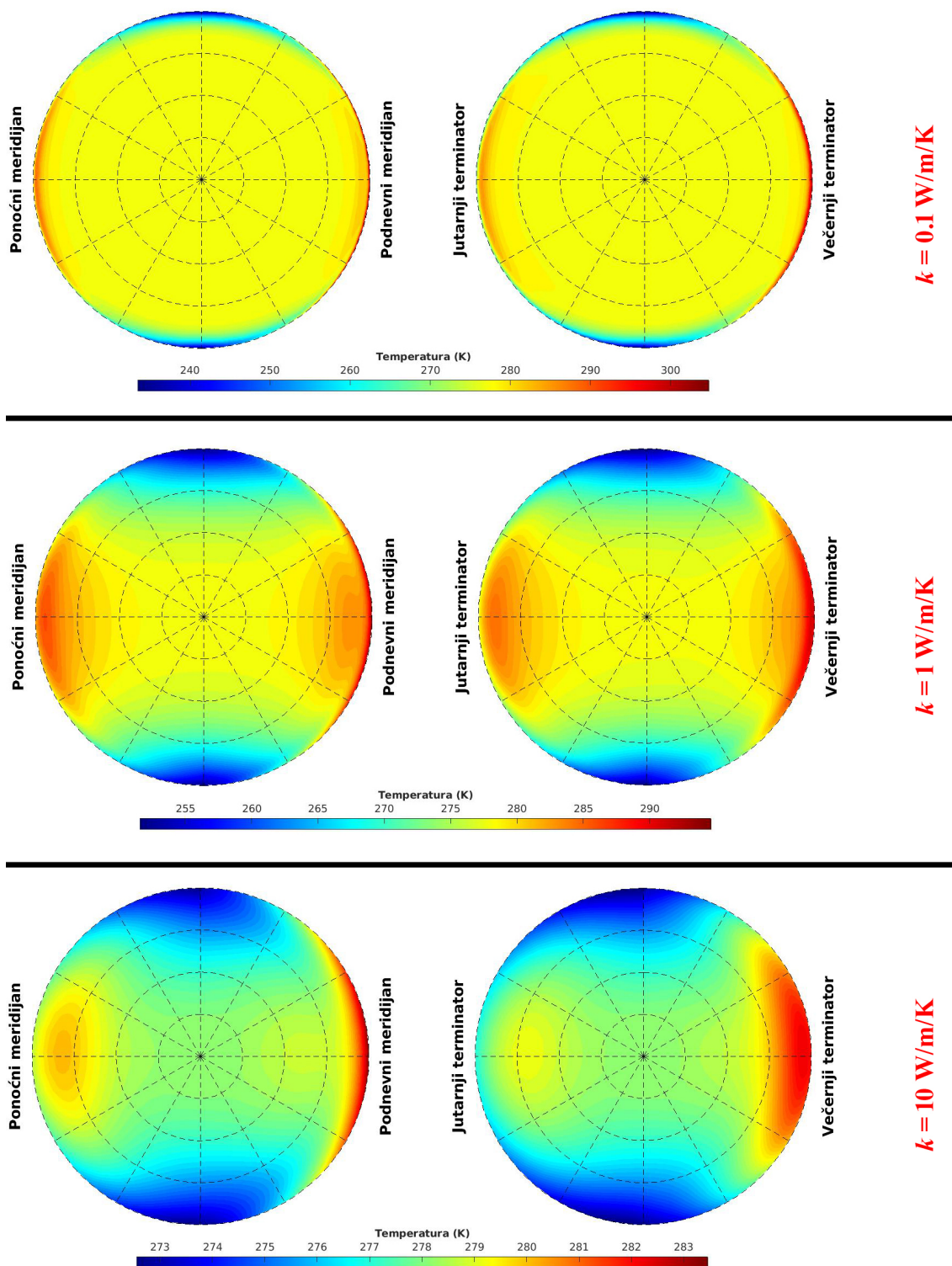
Što se tiče uticaja toplotne provodljivosti, upoređivanjem parova raspodela za različite vrednosti ove veličine, može se uočiti da i pri ovako velikim ugaonim brzinama rotacije, ona ima značajan uticaj na promenu temperature sa dubinom. Za veće vrednosti toplotne provodljivosti dolazi do zagrevanja dubljih slojeva asteroida. Takođe, uočljivo je da povećanje toplotne provodljivosti dovodi do značajnog smanjenja opsega temperature. Na dijagramu gde je prikazano temperaturno polje asteroida, slika 4.1, može se primetiti da je opseg temperature za vrednost koeficijenta termičke provodljivosti $k = 0.1 \text{ W}/(\text{mK})$ od 245 K do 290 K, dok je za vrednosti $k = 10 \text{ W}/(\text{mK})$ taj opseg od 275 K do 280 K.

Da bi se analiziralo kako se temperaturno polje menja prilikom promene brzine rotacije, i dalje ostajući u zoni super brze rotacije, na slici 4.2 prikane su iste raspodele za slučaj perioda rotacije od 1 min. Na slici 4.2 može se uočiti da i u slučaju 6 puta sporije rotacije, nema velikih promena u raspodelama temperature po karakterističnim presecima, i da se u ovom slučaju mogu izvući veoma slični zaključci kao i u slučaju perioda rotacije od 10 s. Drugim rečima, može se uočiti da je period rotacije od 1 min, nedovoljan da bi doveo da uočljivije zavisnosti temperaturnog polja od vremena.

Da bi se prethodne raspodele uporedile sa slučajem značajno sporije rotacije, na slici 4.3 prikazane su raspodele temperature po karakterističnim presecima za slučaj rotacije sa periodom od 1 h. Treba napomenuti da i ovaj slučaj predstavlja slučaj brze rotacije, budući da je i dalje značajno ispod takozvane spin barijere ($\sim 2.2 \text{ h}$), ali se ipak ne može kvalifikovati kao slučaj super brze rotacije, kao u prethodna dva slučaja.



Slika 4.2: Raspodjele temperature po karakterističnim poprečnim presjecima asteroida za period rotacije $P = 60 \text{ s}$. Parovi raspodjele odgovaraju različitim toplotnim provodljivostima: gornji par za $k = 0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, srednji par $k = 1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, donji par za $k = 10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

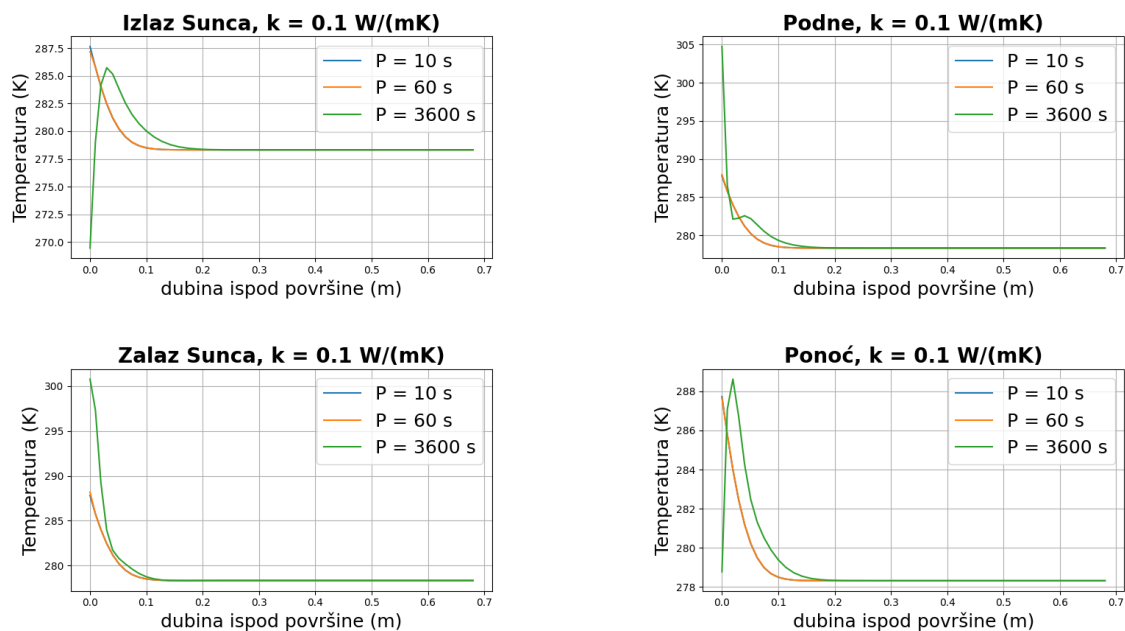


Slika 4.3: Raspodjele temperature po karakterističnim poprečnim presjecima asteroida za period rotacije $P = 1 \text{ h}$. Parovi raspodjele odgovaraju različitim toplotnim provodljivostima: gornji par za $k = 0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, srednji par $k = 1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, donji par za $k = 10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

Za razliku od slučajeva sa periodom rotacije od 10 s i 1 min, na slici 4.3 može se uočiti značajna asimetrija u raspodeli temperature po karakterističnim poprečnim preseccima. Uočljivo je da je podnevni meridijan znatno topliji od ponoćnog, i što je presudno značajno za efekat Jarkovskog, večernji terminator je znatno topliji od jutarnjeg. Ova pojava je posledica akumulacije toplote tokom jednog perioda rotacije. Ova akumulacija dovodi do toga da je popodnevna strana asteroida toplija od prepodnevene, što rezultira anizotropnim zračenjem u infracrvenom opsegu i efektom Jarkovskog.

Da bi se dobio detaljniji uvid u efekat akumulacije toplote, kao i u uticaj toplotne provodljivosti, analizirana je promena temperature sa dubinom na ekvatoru. Na slici 4.4 prikazane su ove promene za slučaj veoma male toplotne provodljivosti od $0.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ i za četiri karakteristična trenutka tokom jednog perioda rotacije asteroida. Da bi se analizirao uticaj perioda rotacije, prikazana su tri slučaja: 10 s, 1 min i 1 h.

Kao što je i očekivano na osnovu analize temperaturnog polja po poprečnim preseccima, u slučajevima super brze rotacije (10 i 60 s) krive su veoma slične, kako međusobno, tako i za različite trenutke tokom rotacije asteroida. Sa druge strane, u slučaju rotacije sa znatno dužim periodom (1 h) dnevne promene su veoma uočljive. Na gornjem levom panelu se vidi da je temperatura površine najniža u trenutku izlaza Sunca, kao i da se ona povećava sa dubinom, budući da su unutrašnji slojevi izolovani površinskim slojevima. Do podneva (gornji desni panel) temperatura površine značajno poraste (za oko 35 K) usled akumulacije toplote, dok se temperatura unutrašnjih slojeva menja u daleko manjoj meri. Uočljiva je zanimljiva pojava da se minimalna temperatura u podne javlja na oko 2 cm dubine, što je približno ista dubina na kojoj se u podne i u trenutku izlaza Sunca javlja najveća temperatura.

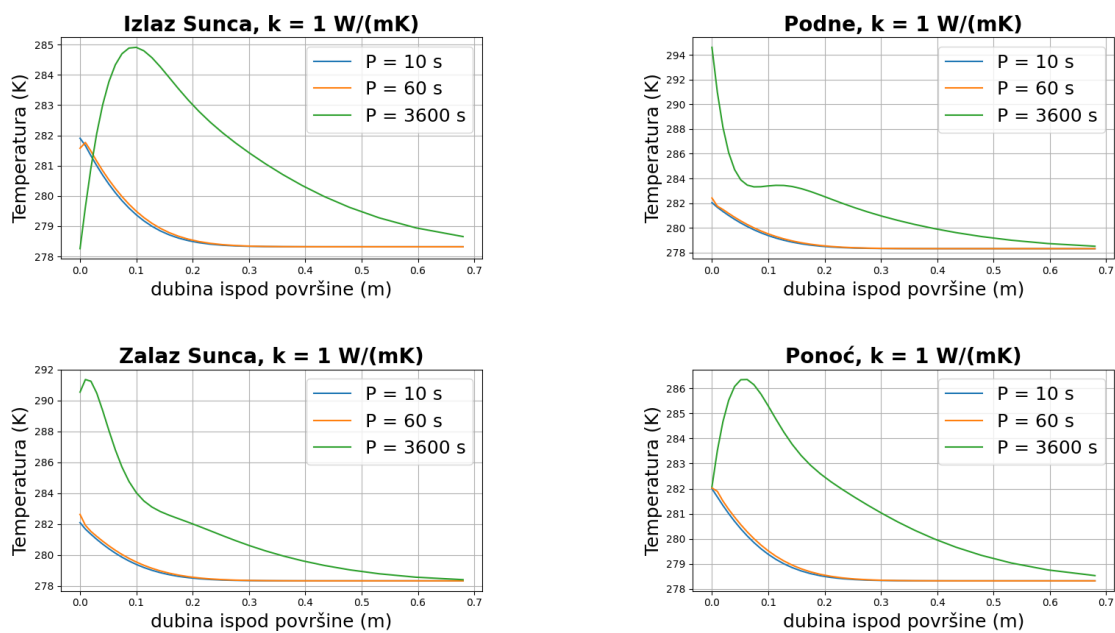


Slika 4.4: Promena temperature sa dubinom na ekvatoru za četiri karakteristična trenutka tokom dana. Promene su prikazane za tri perioda rotacije: 10 s, 1 min, 1h, kao i za vrednost koeficijenta toplotne provodljivosti od $0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Na dijagramu je uočljivo da se vrednost temperature kada su periodi rotacija $P = 10 \text{ s}$ i $P = 60 \text{ s}$ približno jednake tako da se plava i narandžasta linija zbog malih razlika preklapaju.

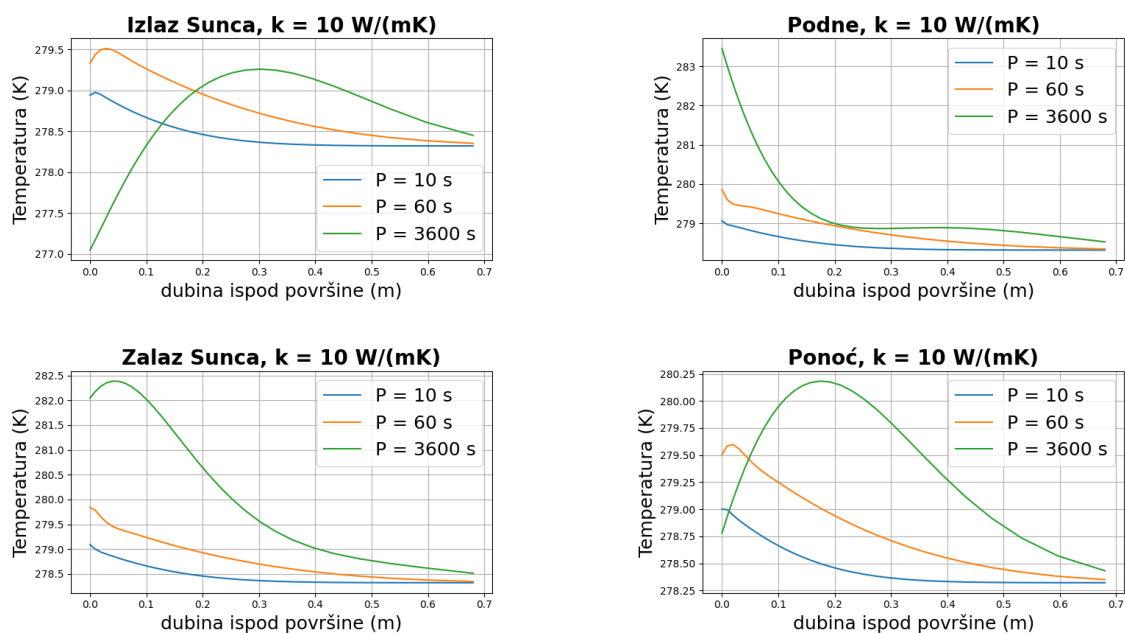
Do ovoga dolazi upravo zbog činjenice da se površinski slojevi zagrevaju znatno brže od unutrašnjih. U trenutku zalaza Sunca (donji levi panel), temperatura površine je skoro ista kao i u trenutku podneva. Temperatura površine je zapravo nastavila da raste nakon podneva, a potom je opala na skoro istu vrednost u trenutku zalaza Sunca. Ova pojava nije uočljiva na ovim dijagramima, budući da nije obuhvaćen period između podneva i zalaza Sunca, ali će biti naglašena u nastavku ovog poglavlja, prilikom analize raspodele temperature po samoj površini asteroida. Nakon zalaza Sunca, kao što je i očekivano, temperatura nastavlja da pada, što je uočljivo na donjem desnom panelu slike 4.4. I u ovom slučaju, pad temperature je više izražen na površini, nego u unutrašnjosti asteroida.

U prethodnom slučaju toplotna provodljivost je vema mala ($0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$). Zbog ovoga je temperaturno polje, pogotovo kod veoma brze rotacije, dominantno određeno apsorpcijom i reemisijom zračenja sa Sunca. Kondukcija je previše spora da bi tokom kratkog perioda rotacije mogla značajnije da utiče na raspodelu temperature.

Da bi se videlo kako veća toplotna provodljivost može da utiče na ovu raspodelu, prikazani su isti dijagrami kao na slici 4.4, ali ovog puta za veće vrednosti toplotne provodljivosti. Na slici 4.5 korišćena je toplotna provodljivost od $1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, dok je na slici 4.6 korišćena je vrednost od $10 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.



Slika 4.5: Promena temperature sa dubinom na ekvatoru za četiri karakteristična trenutka tokom dana. Promene su prikazane za tri perioda rotacije: 10 s, 1 min, 1h, kao i za vrednost koeficijenta toplotne provodljivosti od $1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

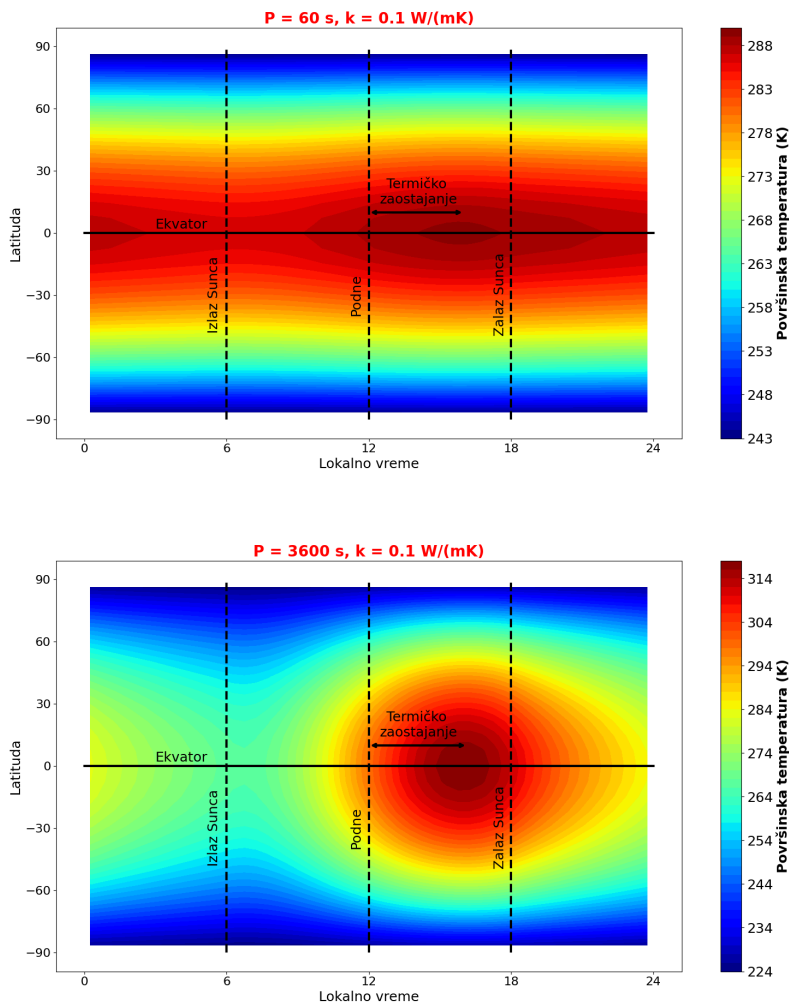


Slika 4.6: Promena temperature sa dubinom na ekvatoru za četiri karakteristična trenutka tokom dana. Promene su prikazane za tri perioda rotacije: 10 s, 1 min, 1h, kao i za vrednost koeficijenta toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

Na slikama 4.5 i 4.6 može se uočiti da koeficijent toplotne provodljivosti od $1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ i dalje nije dovoljan da bi napravio uočljivu razliku između dva slučaja veoma brze rotacije, jer se dve krive za temperaturnu razliku (plava i narandžasta) skoro poklapaju. Sa druge strane, u slučaju koeficijenta toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$, ova razlika postaje uočljiva. U ovom slučaju kondukcija je dovoljno efikasna da napravi značajnije promene temperaturnog polja tokom dana. Može se uočiti da temperaturno polje kod perioda rotacije od 1 min pokazuje slične karakteristike kao što je prethodno opisano za rotaciju od 1 h, samo naravno u mnogo manjoj meri.

Budući da je efekat Jarkovskog posledica raspodele temperature po površini asteroida, ovoj raspodeli je posvećena posebna pažnja. Pošto, kao što je prethodno pokazano, razlike u raspodeli temperature za dva slučaja veoma brze rotacije (10 s i 60 s) nisu vizuelno upečatljive, u nastavku je prikazan samo jedan od ova dva slučaja ($P = 60 \text{ s}$) i upoređivan je sa slučajem sporije rotacije ($P = 1 \text{ h}$). Takođe, radi preglednosti, prikazani su rezultati za dve vrednosti koeficijenta toplotne provodljivosti: 0.1 i $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Na slici 4.7 prikazana je raspodela temperature po

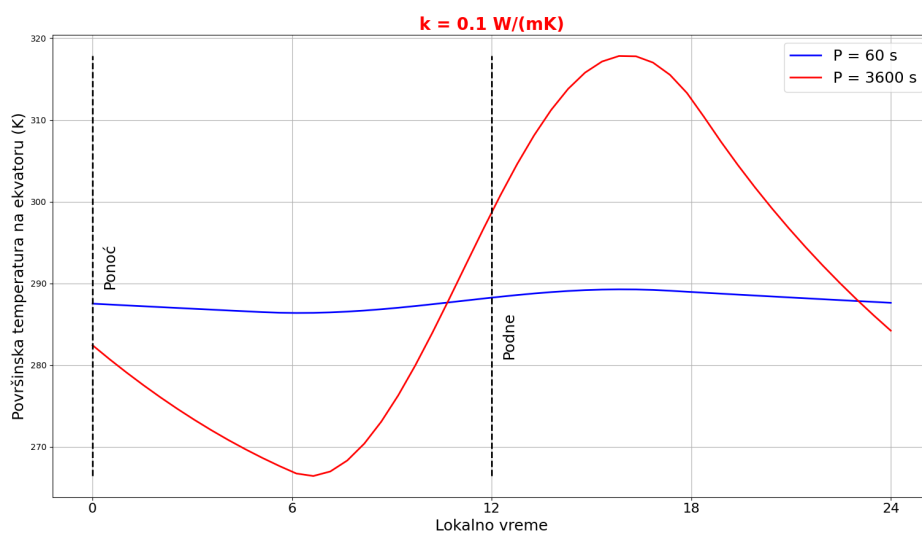
površini asteroida za toplotnu konduktivnost $0.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.



Slika 4.7: Raspodela temperature po površini asteroida za $P = 60 \text{ s}$ (gornji ipanel) i $P = 1 \text{ h}$ (donji panel). U oba slučaja je korišćen koeficijent toplotne provodljivosti od $0.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

Na slici 4.7 može se uočiti koliko period rotacije značajno utiče na raspodelu temperature po površini asteroida. Zanimljivo je da je takozvano termičko zaostajanje, koje predstavlja meru koliko je najtoplija tačka na ekvatoru vremenski udaljena od podneva, približno isto u oba slučaja, tako da je najtoplija tačka javlja na oko 4 h posle podne¹. Sa druge strane, promena temperature je značajno veća u slučaju sporije rotacije, što je prikazano na slici 4.8.

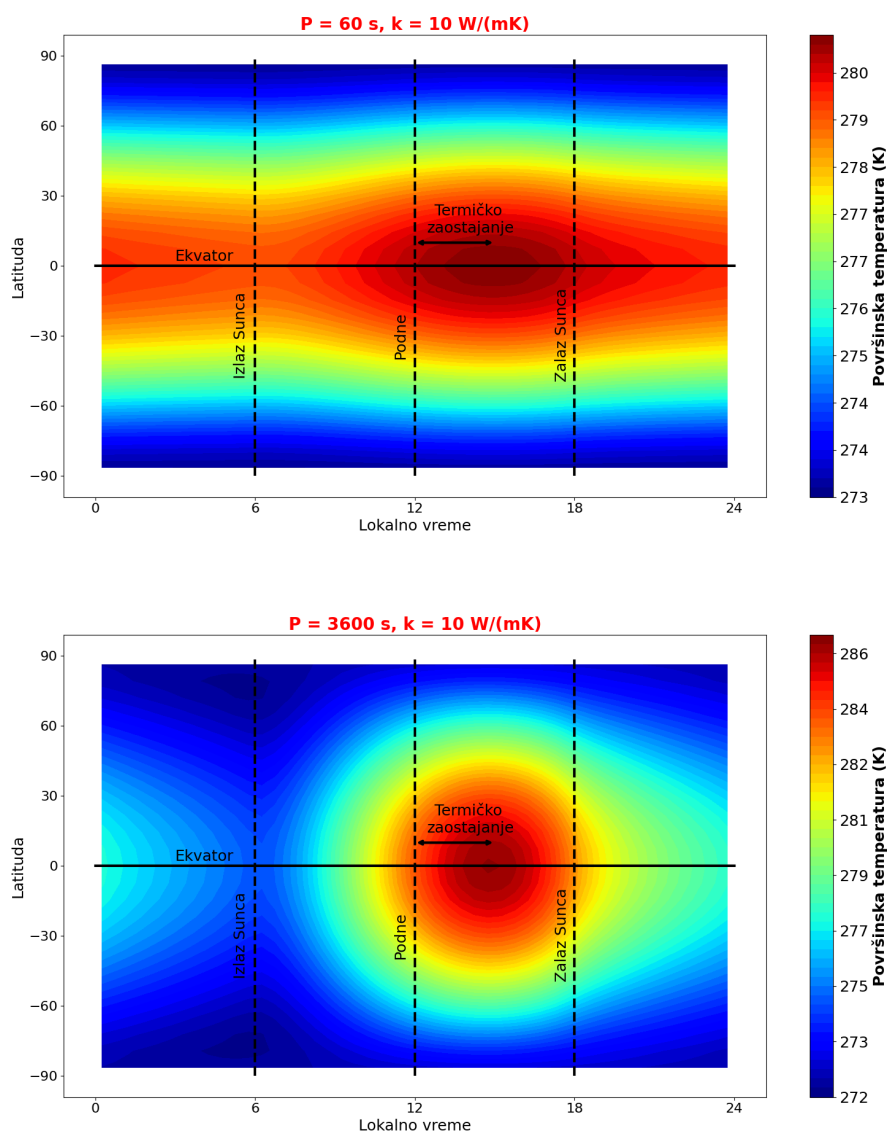
¹Bez obzira na period rotacije, u ovom slučaju merna jedinica od jednog časa (h) predstavlja vreme koje je potrebno da se astroid okrene za 15° oko svoje ose.



Slika 4.8: Promena temperature na ekvatoru tokom jedne rotacije za koeficijent toplotne provodljivosti od $0.1 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

Na slici 4.8 uočava se da je dnevna promena temperature na ekvatoru oko 50 K (u rasponu od 270 do 320 K) u slučaju sporije rotacije ($P = 1 \text{ h}$), dok je u slučaju veoma brze rotacije ($P = 60 \text{ s}$) ova promena svega nekoliko stepeni (286.5 K do 289.6 K).

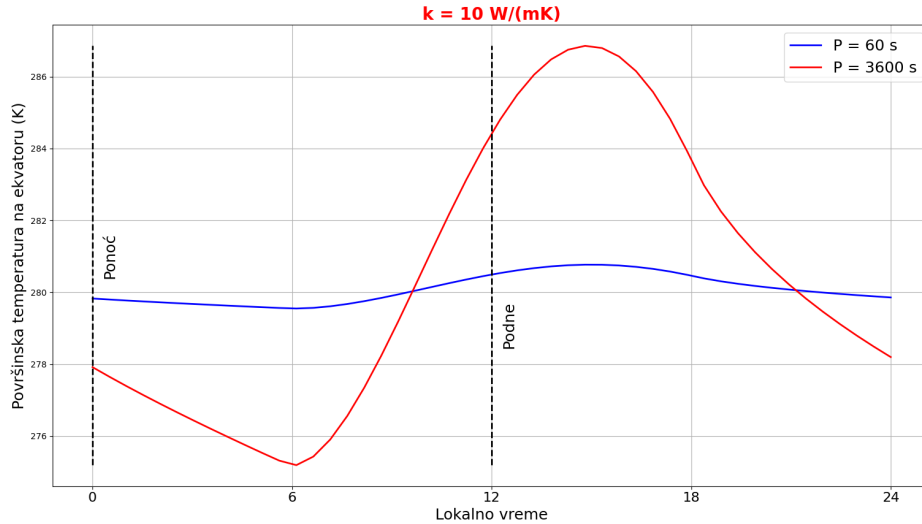
Na slici 4.9 prikazana je raspodela temperature po površini asteroida za dva perioda rotacije (1 min i 1 h), ovog puta za veći koeficijent toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.



Slika 4.9: Raspodela temperature po površini asteroida za $P = 60 \text{ s}$ (gornji ipanel) i $P = 1 \text{ h}$ (donji panel). U oba slučaja je korišćen koeficijent toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

Na slici 4.9 se uočava da je u slučaju sporije rotacije dobijena mnogo veća promena temperature po površini asteroida, koja na ekvatoru iznosi oko 10 stepeni. Sa druge strane, kod veoma brze rotacije, temperatura je skoro konstantna duz iste latitude.

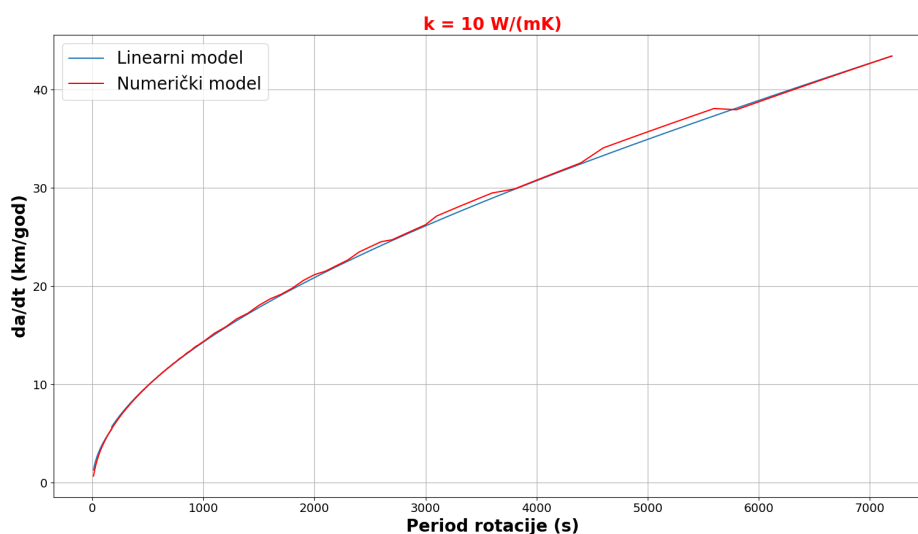
Na slici 4.9 uočava se da je termičko zaostajanje u ovom slučaju manje, te se maksimalna temperatura javlja oko 3 h posle podne. Takođe dnevna promena temperature je značajno manja, kao što se može videti na slici 4.10. Oba ova efekta dovode do smanjenja efekta Jarkovskog.



Slika 4.10: Promena temperature na ekvatoru tokom jedne rotacije za koeficijent toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

4.2 Analiza efekta Jarkovskog

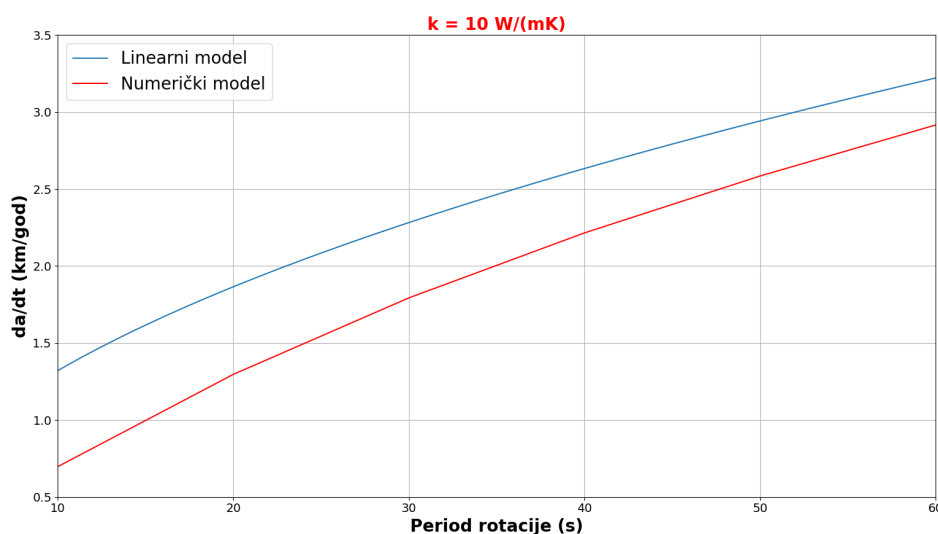
Nakon analize temperaturnog polja po površini i unutrašnjosti asteroida, prikazana je analiza samog efekta Jarkovskog, tj. promene velike poluose orbite, i kako ona zavisi od različitih parametara. Takođe, rezultati dobijeni pomoću razvijenog numeričkog modela su upoređeni sa Linearnim modelom [20], koji predstavlja standard za analizu efekta Jarkovskog. Na slici 4.11 prikazana je zavisnost efekta Jarkovskog od perioda rotacije u opsegu od 10 s do 2h za toplotnu provodljivost od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.



Slika 4.11: Promena velike poluose u zavisnosti od perioda rotacije za koeficijent toplotne provodljivosti od $10 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$. Prikazane su vrednosti dobijene pomoću razvijenog numeričkog modela, kao i pomoću Linearnog modela.

Na slici 4.11 se može uočiti da su rezultati dobijeni pomoću razvijenog numeričkog modela u saglasnosti sa rezultatima dobijenim pomoću linearnog modela. Ova saglasnost predstavlja još jednu validaciju razvijenog numeričkog modela. Takođe, vidi se da je promena, u ovom slučaju velike poluose, oko 1 km/god do oko 40 km/god u zavisnosti od perioda rotacije asteroida.

Ipak, za veoma kratke periode rotacije, dolazi do značajnijeg odstupanja, kao što je prikazano na slici 4.12.

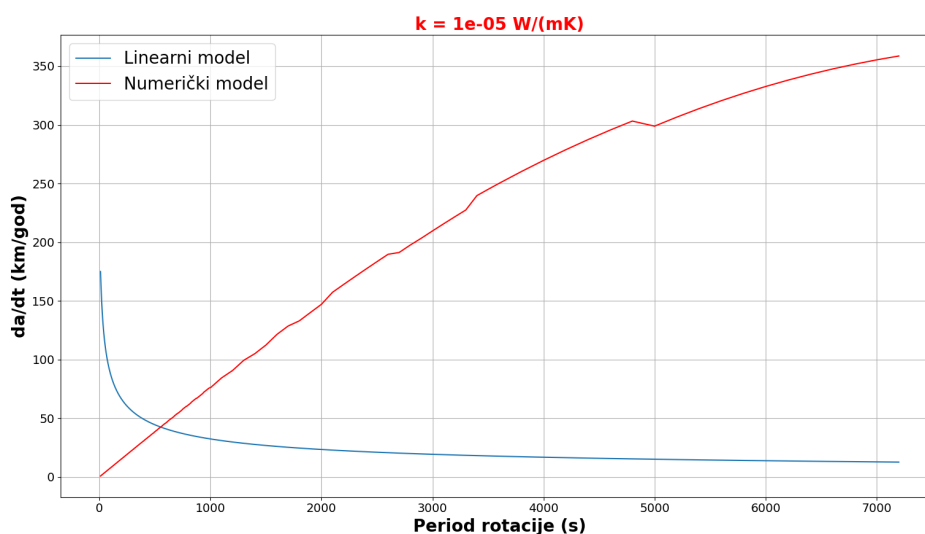


Slika 4.12: Upoređivanje razvijenog numeričkog modela i Linearnog modela za slučajev ekstremno brze rotacije.

Na slici 4.12 uočljivo je da za ekstremno male periode rotacije, linearni model daje dvostruko veće vrednosti efekta Jarkovskog. Primera radi, za period rotacije od 10 s, promene su 0.72 km/god i 1.44 km/god, za numerički i za linearni model, respektivno.

Kada je reč o značajno manjim vrednostima toplotne provodljivosti, razlike između modela su veoma značajne. Na slici 4.13 prikazani su rezultati za veoma male vrednosti k : 10^{-1} , 10^{-3} i $10^{-5} \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$.

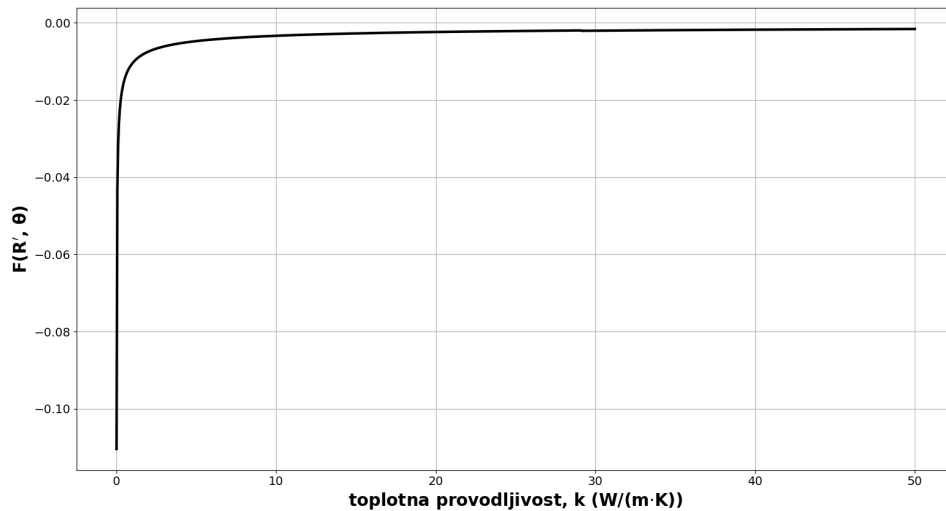




Slika 4.13: Promena velike poluose u zavisnosti od perioda rotacije za koeficijent toplotne provodljivosti od $0.1 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ (gornji panel), $10^{-3} \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ - srednji panel i $10^{-5} \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ - donji panel. Prikazane su vrednosti dobijene pomoću razvijenog numeričkog modela, kao i pomoću Linearnog modela.

Na slici 4.13 uočljive su dve značajne činjenice. Prvo, linearni model ne daje realistične rezultate za veoma male vrednosti koeficijenta toplotne provodljivosti. Ovo je uočljivo za slučajeve kada je $k = 10^{-3}$ i $k = 10^{-5} \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$ gde linearni model ne daje očekivanu zavisnost efekta Jarkovskog od perioda. Sa druge strane, razvijeni numerički model daje konzistentne rezultate i u ovim slučajevima. Drugi značajan zaključak je da kod jako malih vrednosti koeficijenata toplotne provodljivosti, njegova vrednost prestaje da ima značajniji uticaj na efekat Jarkovskog. Ova činjenica može se uočiti upoređivanjem rezultata dobijenih pomoću numeričkog modela za $k = 10^{-3}$ i $k = 10^{-5} \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, gde se vidi da je efekat Jarkovskog približno isti. U ovim slučajevima, koeficijent toplotne provodljivosti je toliko mali da kondukcija više ne igra značajnu ulogu za uspostavljanje temperaturnog polja po površini asteroida, te zbog toga ima i zanemarljiv uticaj na efekat Jarkovskog.

Razlog zbog kojeg linearni model ne daje realistične rezultate za ekstremno male vrednosti toplotne provodljivosti je u ponašanju funkcije $F(R', \theta)$ (jednačina 2.5.8), koja figuriše u izrazima za dnevnu i sezonsku komponentu efekta Jarkovskog u linearnom modelu (jednačine 2.5.1 i 2.5.2). Na slici 4.14 prikazana je ova funkcija u zavisnosti od toplotne provodljivosti, za period rotacije od 60 s.

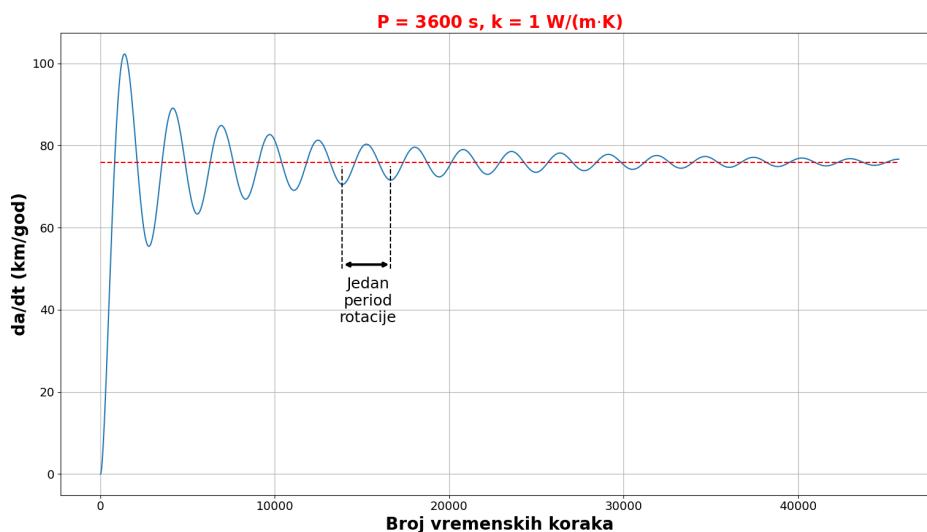


Slika 4.14: Funkcija $F(R', \theta)$ (jednačina 2.5.8) u zavisnosti od toplotne provodljivosti, za period rotacije od 60 s.

Kao što se može videti na slici 4.14, u oblasti ekstremno male toplotne provodljivosti, $F(R', \theta)$ asimptotski teži ka $-\infty$, što za posledicu ima nerealno velike vrednosti efekta Jarkovskog.

4.3 Numeričke performanse razvijenog modela

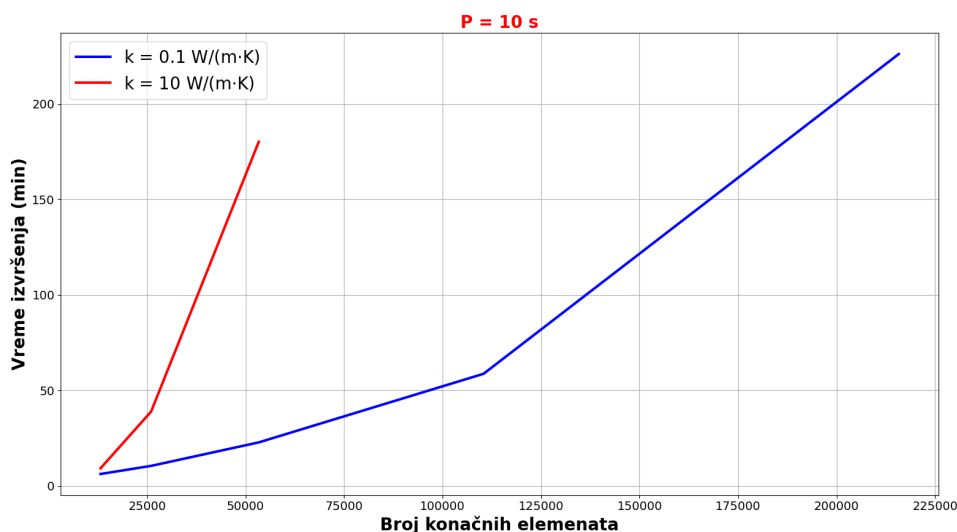
U prethodna dva poglavlja pokazano je da razvijeni numerički model daje rezultate koji su u saglasnosti sa dostupnim modelima. Međutim, osim tačnosti, za svaki numerički model veliki značaj ima i njegova numerička efikasnost. Kao što je prethodno opisano, simulacija započinje pod pretpostavkom da sve ćelije imaju istu temperaturu, koja je jednaka ravnotežnoj površinskoj temperaturi. Nakon toga, u iterativnom postupku, temperaturno polje se računa dok ne dođe do konvergencije. Tipičan proces konvergencije za razvijeni numerički model prikazan je na slici 4.15.



Slika 4.15: Proces konvergencije kod razvijenog numeričkog modela.

Na slici 4.15 uočava se da promene velike poluose usled efekta Jarkovskog osciluju oko rešenja sa periodom od jednog perioda rotacije. U trenutnoj verziji koda, rešenje se usvaja kao srednja vrednost susednih lokalnih ekstrema kada je njihova razlika manja od neke definisane vrednosti. Međutim, vizuelnom inspekcijom slike 4.15 može se uočiti da bi se slična vrednost dobila ako se uzmu i prva dva lokalna ekstrema. Na ovaj način može se značajno ubrzati preces dobijanja rešenja uz minimalni gubitak tačnosti.

Vreme izračunavanja zavisi najviše od rezolucije numeričke mreže, tj. broja konačnih elemenata, kao i od koeficijenta toplotne provodljivosti. Na slici 4.16 prikazano je vreme izračunavanja u zavisnosti od ova dva parametra, za slučaj ekstremno brze rotacije od 10 s.



Slika 4.16: Vreme izračunavanja u zavisnosti od rezolucije i toplotne provodljivosti. Izračunavanje je vršeno na jednom jezgru Intel Core i5-9500 CPU @ 3.00GHz. Uslov konvergencije je postavljen tako da razlika između dva susedna ekstrema funkcije prikazane na slici 4.15 bude manja od 5 %.

Na slici 4.16 može se uočiti da vreme izračunavanja ne zavisi linearno od rezolucije numeričke mreže. Takođe, toplotna provodljivost ima veliki uticaj na proces konvergencije, budući da ima ključnu ulogu u jednačini kondukcije (2.1.29) koja se rešava u svakoj iteraciji. Iako postoji više načina da se unapredi numerička efikasnost modela, od kojih su neki navedeni u narednom poglavlju, i u sadašnjem obliku model može da se primenjuje za sistematsku analizu na dostupnim radnim stanicama.

4.4 Zaključci i mogući pravci daljeg istraživanja

U okviru rada na ovoj master tezi razvijen je numerički model efekta Jarkovskog čija validacija je izvršena u odnosu na postojeće modele. Ovaj model omogućuje proširenje opsega parametara na kojima postojeći modeli ne daju adekvatne rezultate. Ovo se pre svega odnosi na slučajeve veoma malog koeficijenta toplotne provodljivosti. Numerička efikasnost modela u sadašnjem obliku dozvoljava njegovu sistematsku upotrebu, ali je dalje unapređenje ovog aspekta poželjno, pogotovo imajući u vidu njegovu primenu na ekscentrične orbite.

Dalji razvoj numeričkog modela efekta Jarkovskog biće usmeren u dva pravca. Jedan pravac će biti usmeren ka sistematskom testiranju efekata koji su ugrađeni u

postojeću verziju modela, poput ekscentričnosti i nagiba ose rotacije. Sa druge strane radiće se na uključivanju drugih mogućnosti, poput slojeva sa različitim fizičkim karakteristikama.

Kada je reč o unapređenju numeričke efikasnosti koda, neke mogućnosti su već ugrađene, ali zahtevaju sistematsko testiranje. Primera radi, kod veoma malih vrednosti koeficijenta toplotne provodljivosti, promene temperature se dešavaju u veoma tankom površinskom sloju asteroida, o čemu je diskutovano u poglavlju 4. U ovim slučajevima nema razloga vršiti numerički zahtevnu simulaciju toplotne kondukcije u ćelijama koje se nalaze duboko unutar asteroida, već je neophodno simulirati ovaj proces samo u tankoj ljusci na njegovoj površini. Još jedna od mogućnosti za unapređenje numeričke efikasnosti je ispitivanje konvergencije rešenja i uticaj izbora lokalnih ekstrema na tačnost rešenja, o čemu je diskutovano u poglavlju 4.3

Bibliografija

- [1] J. M. A. Danby. *Fundamentals of Celestial Mechanics*. Willmann-Bell, Inc., Richmond, Virginia, USA, 1988.
- [2] M. Fenucci, B. Novaković, D. Vokrouhlický, and R. J. Weryk. Low thermal conductivity of the superfast rotator (499998) 2011 PT. *Astronomy and Astrophysics*, 647:A61, Mar. 2021. doi: 10.1051/0004-6361/202039628.
- [3] M. Fenucci, B. Novaković, and D. Marčeta. The low surface thermal inertia of the rapidly rotating near-Earth asteroid 2016 GE1. *Astronomy and Astrophysics*, 675:A134, July 2023. doi: 10.1051/0004-6361/202346160.
- [4] J.-B. Kikwaya Eluo and C. W. Hergenrother. Physical characterization of fast rotator NEOs. In *IAU General Assembly*, volume 29, page 2255911, Aug. 2015.
- [5] M. Krause, J. Blum, Y. V. Skorov, and M. Trieloff. Thermal conductivity measurements of porous dust aggregates: I. Technique, model and first results. *Icarus*, 214(1):286–296, July 2011. doi: 10.1016/j.icarus.2011.04.024.
- [6] B. Novaković and M. Fenucci. ASTERIA — Thermal inertia evaluation of asteroid Didymos. *Icarus*, 421:116225, Oct. 2024. doi: 10.1016/j.icarus.2024.116225.
- [7] B. Novaković, G. Tsirvoulis, M. Granvik, and A. Todović. A Dark Asteroid Family in the Phocaea Region. *Astronomical Journal*, 153(6):266, June 2017. doi: 10.3847/1538-3881/aa6ea8.
- [8] B. Novaković, M. Fenucci, D. Marčeta, and D. Pavela. ASTERIA-Asteroid Thermal Inertia Analyzer. *Planetary Science Journal*, 5(1):11, Jan. 2024. doi: 10.3847/PSJ/ad08c0.

- [9] C. S. Noyes, G. J. Consolmagno, R. J. Macke, D. T. Britt, and C. P. Opeil. Low-temperature thermal properties of iron meteorites. *Meteoritics Planetary Science*, 57(9):1706–1721, Sept. 2022. doi: 10.1111/maps.13895.
- [10] E. J. Opik. Collision probability with the planets and the distribution of planetary matter. *Pattern Recognition and Image Analysis*, 54:165–199, Jan. 1951.
- [11] C. Peterson. A Source Mechanism for Meteorites Controlled by the Yarkovsky Effect. *Icarus*, 29(1):91–111, Sept. 1976. doi: 10.1016/0019-1035(76)90105-6.
- [12] V. V. Radzievskii. A mechanism for the disintegration of asteroids and meteorites. *Astronomicheskii Zhurnal*, 29:162–170, Jan. 1952.
- [13] D. P. Rubincam. LAGEOS orbit decay due to infrared radiation from earth. *Journal of Geophysics Research*, 92:1287–1294, Feb. 1987. doi: 10.1029/JB092iB02p01287.
- [14] D. P. Rubincam. Yarkovsky thermal drag on LAGEOS. *Journal of Geophysics Research*, 93(B11):13805–13810, Nov. 1988. doi: 10.1029/JB093iB11p13805.
- [15] D. P. Rubincam. Asteroid orbit evolution due to thermal drag. *Journal of Geophysics Research*, 100(E1):1585–1594, Jan. 1995. doi: 10.1029/94JE02411.
- [16] D. P. Rubincam. Yarkovsky thermal drag on small asteroids and Mars-Earth delivery. *Journal of Geophysics Research*, 103(E1):1725–1732, Jan. 1998. doi: 10.1029/97JE03034.
- [17] J. Spitale and R. Greenberg. Numerical Evaluation of the General Yarkovsky Effect: Effects on Semimajor Axis. *Icarus*, 149(1):222–234, Jan. 2001. doi: 10.1006/icar.2000.6477.
- [18] D. Vokrouhlicky. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. I. Linear theory. *Astronomy and Astrophysics*, 335: 1093–1100, July 1998.
- [19] D. Vokrouhlicky. Diurnal Yarkovsky effect as a source of mobility of meter-sized asteroidal fragments. II. Non-sphericity effects. *Astronomy and Astrophysics*, 338:353–363, Oct. 1998.

- [20] D. Vokrouhlický. A complete linear model for the Yarkovsky thermal force on spherical asteroid fragments. *Astronomy and Astrophysics*, 344:362–366, Apr. 1999.
- [21] D. Vokrouhlický and M. Brož . An improved model of the seasonal Yarkovsky force for regolith-covered asteroid fragments. *Astronomy and Astrophysics*, 350: 1079–1084, Oct. 1999.
- [22] D. Vokrouhlický and P. Farinella. The Yarkovsky Seasonal Effect on Asteroidal Fragments: A Nonlinearized Theory for the Plane-Parallel Case. *Astronomical Journal*, 116(4):2032–2041, Oct. 1998. doi: 10.1086/300565.
- [23] D. Vokrouhlický and P. Farinella. The Yarkovsky Seasonal Effect on Asteroidal Fragments: A Nonlinearized Theory for Spherical Bodies. *Astronomical Journal*, 118(6):3049–3060, Dec. 1999. doi: 10.1086/301138.
- [24] D. Vokrouhlický, W. F. Bottke, S. R. Chesley, D. J. Scheeres, and T. S. Statler. The Yarkovsky and YORP Effects. In P. Michel, F. E. DeMeo, and W. F. Bottke, editors, *Asteroids IV*, pages 509–531. 2015. doi: 10.2458/azu_uapress_9780816532131-ch027.
- [25] B. D. Warner. Near-Earth Asteroid Lightcurve Analysis at CS3-Palmer Divide Station: 2016 January-April. *Minor Planet Bulletin*, 43(3):240–250, July 2016.
- [26] B. D. Warner, A. W. Harris, and P. Pravec. The asteroid lightcurve database. *Icarus*, 202(1):134–146, July 2009. doi: 10.1016/j.icarus.2009.02.003.
- [27] Y.-B. Xu, L.-Y. Zhou, H. Hui, and J.-Y. Li. The diurnal Yarkovsky effect of irregularly shaped asteroids. *Astronomy and Astrophysics*, 666:A65, Oct. 2022. doi: 10.1051/0004-6361/202243049.

Biografija autora

Marko Gavrilović (*Beograd, 6. jul 1998.*) završio je srednju školu sa najvišom prosečnom ocenom 5.00 i diplomom „Vuk Karadžić“. Osvojio je četiri medalje na regionalnim i državnim takmičenjima Ministarstva prosvete, nauke i tehnološkog razvoja, dve godine za redom, iz mehanike i programiranja. Proglašen je za „Najboljeg učenika generacije“. Dobitnik je Pohvale Nj.K.V. Prestolonaslednika Aleksandra u ime Kraljevskog doma Karađorđevića. Osvojio je Nagradu Grada Beograda kao i Nagradu Sekretarijata za obrazovanje za postignuća tokom školovanja. Kao delegat bio je poseban član pete sesije modela Ujedinjenih nacija.

Završio je osnovne studije na Mašinskom fakultetu sa najvišim prosekom 10.00, sa diplomskim radom iz Mehanike fluida. Četiri godine zaredom, nagrađivan je za postignuća tokom školske godine. Osvojio je prvo mesto iz predmeta Mehanika na Mašinjadi – takmičenju studenata iz zemlje i regiona. Proglašen je za „Najboljeg studenta generacije Osnovnih akademskih studija“. Bio je član Saveta Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu od 2018. do 2020. godine.

Završio je Master studije na istom fakultetu na modulu Mehanika sa najvišim prosekom 10.00, sa prvim master radom u istoriji fakulteta iz Analitičke mehanike. Na drugoj godini master studija, postaje prvi saradnik u nastavi na Katedri za mehaniku. Kao mentor i kapiten, njegov tim osvaja prvo mesto iz Mehanike na Mašinjadi. Dobitnik je stipendije za izuzetno nadarene studente Republike Srbije, tri godine zaredom. Proglašen je za „Najboljeg studenta generacije master akademskih studija“, kao i „Najboljeg studenta generacije“ za sveobuhvatne studije. Dobitnik je Povelje „Najbolji student generacije“ Univerziteta u Beogradu.

Upisao je i master studije na Matematičkom fakultetu, modul Astroinformatika i doktorske studije na Mašinskom fakultetu Univerziteta u Beogradu. Završio je ispite i priprema doktorsku tezu. Asistent je na Mašinskom fakultetu na Katedri za mehaniku. Ima zvanje istraživač pripravnik, koje dodeljuje Matematički institut SANU. Nosilac je stipendije Ministarstva nauke, tehnološkog razvoja i inovacija – Nagrade za talentovane mlade istraživače za naučnoistraživački rad sa 1. mestom na rang listi. Član je EUROMECH-a - Evropskog društva za mehaniku, COST-a – Evropske saradnje u nauci i tehnologiji, u tri radne grupe: WG2: Tamna materija i kosmologija, WG3: WISPs u astrofizici, WG5: Diseminacija i komunikacija. Član je Srpskog društva za mehaniku. Trenutno radi na tri evropska projekta klase – *Horizon Europe Projects* i na tri državna projekta Republike Srbije.