

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



Ivan Petraš

UTICAJ ZAGREVANJA ELEKTRONA NA
UDARNIM TALASIMA OSTATAKA
SUPERNOVIH NA SINHROTRONSKO
ZRAČENJE

master rad

Beograd, 2024.

Mentor:

prof. dr Bojan Arbutina, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof. dr Dejan Urošević, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Vladimir Zeković, naučni saradnik
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet
Princeton University

Datum odbrane: _____

Mami i tati

Naslov master rada: Uticaj zagrevanja elektrona na udarnim talasima ostataka supernovih na sinhrotronsko zračenje

Rezime: Ostaci supernovih (OSN) predstavljaju specifične emisije magline okarakterisane jakim udarnim talasima koji se prostiru kroz međuzvezdanu materiju (MZM), komprimuju i pojačavaju međuzvezdano magnetno polje i ubrzavaju čestice. Posledično, OSN su snažni sinhrotronski radio-izvori čija emisija zavisi od većeg broja parametara, od kojih su najvažniji koncentracija elektrona u kosmičkim zracima (KZ), kao i njihov impuls pri ubrizgavanju u proces ubrzavanja, i jačina magnetnog polja u emisionoj oblasti (nizvodno, iza udara). U prikazanom modelu, za slučaj probnih čestica i nelinearni slučaj, pokušali smo bliže da odredimo ove parametre, uključivanjem zagrevanja elektrona, uz rezonantne i nerezonantne magnetne nestabilnosti koje nastaju u prekursoru KZ i komprimuju se na udarnom talasu. Na osnovu ovog modela, dobili smo sinhrotronske radio-spektre i radio-evolutivne trake u ravni radio-površinskog sjaja i prečnika ostatka ($\Sigma - D$) i izvršili poređenje sa posmatranjima.

Ključne reči: astrofizika, supernove, ostaci supernovih, ubrzavanje čestica, sinhrotronsko zračenje

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Spektar čestica	3
2.1	Raspodela čestica po impulsima	4
2.2	Normalizovana brzina u funkciji impulsa	6
2.3	Kompresija na udarnom talasu	11
2.4	Odnosi temperatura i zagrevanje elektrona	13
2.5	Fluks čestica koje napuštaju sistem	15
2.6	Gubici na sinhrotronsko zračenje	16
2.7	Iterativna procedura	16
3	Sinhrotronska emisivnost	18
4	Radio-evolucija ostataka supernovih	24
5	Rezultati	27
6	Zaključak	35
	Literatura	36

Glava 1

Uvod

Tri su opšte prihvaćene konačne faze evolucije zvezda: beli patuljci, neutronske zvezde i crne rupe. Smatra se da formiranje neutronske zvezde i nekih crnih rupa prate eksplozije supernovih (SN). To su tzv. kolapsirajuće SN – nastale u gravitacionom kolapsu, koje mogu biti tipa II i tipa Ib/c (ogoljene SN).

Supernove tipa II potiču od masivnih zvezda (populacije I), masa barem $8M_{\odot}$ (gde je M_{\odot} masa Sunca) ili više. Većinu svog života, zvezda zrači energiju koju proizvede prilikom nuklearne fuzije vodonika u helijum. Nakon vodonika, zvezda u procesu fuzije spaja helijum u teže elemente, i na kraju dolazi do gvožđa. Za ovaj i svaki sledeći element, fuzija u teže elemente troši energiju, umesto da je proizvodi. Kako energija više nije dostupna, u centru se formira gvozdeno jezgro. Kada ovo jezgro postane previše masivno, pritisak zračenja nije dovoljan da podrži težinu svih slojeva iznad, odnosno da se suprotstavi gravitacionoj sili jezgra, koje tada kolapsira. Ako je zvezda dovoljno masivna (odnosno ako ima jezgro do mase $3M_{\odot}$), doći će do eksplozije supernove. Materija koja pada iz spoljašnjih slojeva ka jezgru se odbija od njega (jezgro je već prestalo da kolapsira, i na njegovom mestu se formirala neutronska zvezda), i nastaje udarni talas. Ovaj udarni talas se širi ka spolja i razduvava spoljašnje slojeve zvezde.

Osim kolapsirajućih SN, postoje i termonuklearne SN tipa Ia. Ove supernove potiču od dvojnih sistema zvezda, koji se sastoje od belog patuljka i druge zvezde. Ako postoji tok materije odnosno mase iz pratioca ka belom patuljku, i ako traje dovoljno dugo da podigne masu belog patuljka iznad Čandrasekarove granice od $1.44M_{\odot}$, dešava se eksplozija supernove tipa Ia koja potpuno razara belog patuljka.

Supernove tipa Ib/c nastaju kolapsom jezgra masivnih zvezda koje su izgubile spoljašnji sloj od vodonika i helijuma (usled jakog zvezdanog vetra). SN tipa Ib su

izgubile većinu vodonika u spoljašnjim slojevima, dok su Ic potpuno izgubile omotač i od vodonika i od helijuma (potpuno ogoljeno CO jezgro).

Ostaci supernovih (OSN) predstavljaju emisione magline koje se sastoje od udarnog talasa koji predstavlja obod OSN koji se širi, međuzvezdane materije (MZM) koju udarni talas prebriše (pokupi) tokom prostiranja, i izbačenog zvezdanog materijala (tzv. *ejecta*). Za razliku od SN koje relativno kratko traju, OSN mogu da „žive” i stotinama hiljada godina. Evoluciju OSN grubo delimo na 4 faze:

1. Faza slobodnog širenja, tokom koje se *ejecta* kreće slobodno bez otpora (dok god se ne nakupi masa MZM koja je uporediva sa masom izbačene materije) i ova faza traje nekoliko stotina godina.

2. Adijabatska, odnosno Tejlror-Sedovljeva faza, tokom koje je energija unutar ostatka održana, izbačena materija nema više značaja, i radijativni gubici su mali. Ova faza traje nekoliko desetina hiljada godina, i može analitički da se modeluje.

3. Radijativna faza, tokom koje radijativno hlađenje iza fronta udarnog talasa postaje značajno. Ljuska OSN evoluira na delimično konstantnoj temperaturi, i vremenska skala za ovu fazu je reda veličine desetina hiljada godina ili više (i dobija se iz funkcije hlađenja).

4. Faza disipacije, kada OSN usporava do brzine zvuka i nestaje u okolnoj MZM.

OSN mogu biti detektovane na raznim talasnim dužinama, na celom elektromagnetnom spektru. S obzirom da ih karakterišu jaki udari koji se prostiru kroz MZM, OSN ubrzavaju čestice i pojačavaju međuzvezdano magnetno polje, pa su pretežno sinhrotronski radio-emiteri. Istraživanja u radio-području su dala uvid u svojstva OSN, fizičke procese koji se dešavaju u njima i njihov evolutivni status (Urošević 2020).

Sinhrotronska emisivnost zavisi od mnogo parametara, ali, ako pretpostavimo da je spektar u slučaju „probnih čestica” oblika stepenog zakona, emisivnost tada zavisi od koncentracije elektrona kosmičkog zračenja, njihovog impulsa ubrizgavanja i jačine magnetnog polja. Modelom ubrizgavanja u predstojećem poglavlju, pokušavamo da stavimo neke granice na ove veličine i procese, uključujući zagrevanje elektrona, rezonantne i nerezonantne nestabilnosti magnetnog polja proizvedene od strane kosmičkih zraka u *precursor*-u, komprimovane na udaru i advektovane u *downstream* („nizvodno,,). Na osnovu ovog modela i modela emisije, na kraju ovog rada, prikazujemo neke radio-evolutivne trake u tzv. ravni radio-površinskog sjaja i prečnika ostatka ($\Sigma - D$) i upoređujemo ih sa podacima iz posmatranja za Galaktičke i vangalaktičke OSN.

Glava 2

Spektar čestica

Prihvaćena teorija o nastanku kosmičkih zraka (KZ) kaže da oni dominantno potiču od izvora unutar naše Galaksije, kao što su OSN. Ovi izvori mogu da proizvedu čestice energija koje idu i do $\sim 10^{17}$ eV (Morlino 2016). Za sve ostale KZ koje imaju energije preko $\sim 10^{17}$ eV pa čak i do $\sim 10^{20}$ eV se smatra da potiču od vangelaktičkih izvora.

Prvi mehanizam ubrzavanja čestica je dao Fermi (1949), i taj mehanizam sada zovemo Fermijevo ubrzavanje drugog reda, jer je dobitak čestice na energiji $\Delta E/E \sim (U/c)^2$, gde je U relativna brzina između dva oblaka koji se približavaju i reflektuju čestice. Analogno, Fermijev mehanizam prvog reda zavisi kao $\Delta E/E \sim (U/c)$ i samim tim je efikasniji.

Moderna verzija Fermijevog ubrzanja prvog reda je teorija takozvanog difuznog ubrzavanja čestica (*diffusive shock acceleration* - DSA, opisana nezavisno od strane mnogih autora, kao što su Axford, Leer i Skadron (1977), Krymskii (1977), Bell (1978) i Blandford i Ostriker (1978)) gde čestice više puta difunduju kroz udarni talas iz regiona nizvodno od udara ka regionu uzvodno od udara, i svaki put dobijaju na energiji. Postoje dva glavna pristupa problemu: makroskopski i mikroskopski opisan od strane Bela (Bell 1978). Zajednička stvar za oba pristupa jeste da posmatraju tzv. slučaj probnih čestica (eng. *test-particle*, nadalje test-čestica) i nemodifikovan udar, gde čestice ne utiču na udarni talas. Ako posmatramo uticaj ubrzanih čestica na udarni talas (odnosno spregu između ova dva procesa), imamo tzv. nelinearni DSA i modifikaciju udara (Blasi 2002a; Blasi 2002b). Žiroradijus jona (protona) je reda veličine debljine udara. No, kako elektroni imaju ~ 1836 puta manju masu od protona, a žiroradijus je srazmeran masi čestice, to znači da će žiroradijus elektrona biti toliko puta manji. Posledično, ubrzavanje elektrona do energije ubrizgavanja u

DSA nije najbolje objašnjeno. Međutim, iz kinetičkih *particle-in-cell* (PIC) simulacija koje uključuju i protone i elektrone vidimo da su spektri elektrona vrlo slični spektrima protona (Arbutina i Zeković 2021).

U narednim poglavljima opisaćemo nelinearni model ubrzavanja protona i elektrona dat u radu Arbutina (2023), zasnovan na originalnom Blazijevom modelu, koji pored rezonantnih i nerezonantnih nestabilnosti magnetnog polja, uključuje i zagrevanje elektrona.

2.1 Raspodela čestica po impulsima

Polazna tačka nam je difuziono-advekciona jednačina koja opisuje transport čestica usled kombinovanih efekata difuzije i advekcije (usled makroskopskog kretanja fluida), i uz uslov stacionarnosti $\frac{\partial f(x,p)}{\partial t} = 0$; Ferrand (2010) ima oblik:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(D \frac{\partial}{\partial x} f(x,p) \right) - u \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{du}{dx} p \frac{\partial f(x,p)}{\partial x} + Q(x,p) = 0, \quad (2.1)$$

gde je p impuls, $f(x,p)$ raspodela čestica po impulsima (odnosno spektar), D je koeficijent difuzije, $Q(x,p)$ predstavlja ubrizgavanje čestica, a u je brzina fluida. Razmatramo 1D geometriju po x osi, gde u tački $x = 0$ imamo oštar *subshock*, odnosno udarni talas, za $x > 0$ imamo takozvani *downstream*, tj. oblast koju je udarni talas već prebrisao, a za $x < 0$ imamo takozvani *upstream*, tj. oblast koju udarni talas tek treba da prebriše. Određeni region ispred udarnog talasa za $x < 0$ (koji može biti značajno veći od tranzicionog regiona udarnog talasa) gde su karakteristike plazme već izmenjene zovemo *precursor*. Za ubrizgavanje pretpostavljamo da se događa isključivo na frontu udarnog talasa na sledeći način:

$$Q(x,p) = Q_0(p) \cdot \delta(x). \quad (2.2)$$

Integraleći jednačinu (2.1) od tačke 0^- (odmah ispred udarnog talasa uzvodno) do 0^+ (odmah iza udarnog talasa nizvodno), dobijamo:

$$\left(D \frac{\partial f}{\partial x} \right)_2 - \left(D \frac{\partial f}{\partial x} \right)_1 + \frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_1) + Q_0(p) = 0, \quad (2.3)$$

gde indeks 1 odgovara koordinati $x = 0^-$, indeks 2 koordinati $x = 0^+$, a f_0 raspodeli čestica na frontu udarnog talasa. Uz uslov homogenosti raspodele čestica nizvodno ($(\frac{\partial f}{\partial x})_2 = 0$), jednačina (2.3) postaje:

$$\frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} (u_2 - u_1) + Q_0(p) = \left(D \frac{\partial f}{\partial x} \right)_1. \quad (2.4)$$

Integraleći jednačinu (2.1), uz uslov (2.4), dobijamo:

$$\frac{1}{3} \cdot p \cdot \frac{df_0}{dp}(u_2 - u_1) - u_1 f_0 + Q_0(p) + \int_{-x_{\max}}^{0^-} dx f \frac{du}{dx} + \frac{1}{3} \int_{-x_{\max}}^{0^-} dx \frac{du}{dx} p \frac{\partial f}{\partial p} = 0. \quad (2.5)$$

Sada, uvodimo veličinu:

$$u_p = u_1 - \frac{1}{f_0} \int_{-x_{\max}}^{0^-} dx \frac{du}{dx} f(x, p), \quad (2.6)$$

i njeno razumevanje je ključno za ovaj proces. Vrednost u_p je tipična brzina fluida koju oseća čestica sa impulsom p , dok difunduje od udarnog talasa. No, kako je koeficijent difuzije $D(p)$ monotono rastuća funkcija od p , gde je idealni slučaj *Bohm*-ova difuzija sa $D(p) \propto p$, čestice sa impulsom p uzorkuju samo deo *precursor*-a. Dakle, u_p može da se tumači kao tipična brzina fluida u tački x_p , gde čestice menjaju svoj smer kretanja i počinju da se vraćaju ka udarnom talasu. Koristeći parcijalnu integraciju, $p \frac{d}{dp} \int_{-x_{\max}}^{0^-} dx \frac{du}{dx} f(x, p)$ možemo da zapišemo kao:

$$p \frac{d}{dp} \int_{-x_{\max}}^{0^-} dx \frac{du}{dx} f(x, p) = p \left(\frac{df_0}{dp}(u_1 - u_p) - f_0 \frac{du_p}{dp} \right), \quad (2.7)$$

pa samim tim jednačinu (2.5) možemo da zapišemo kao:

$$\frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp}(u_2 - u_p) - f_0 \left(u_p + \frac{1}{3} p \frac{du_p}{dp} \right) + Q_0(p) = 0. \quad (2.8)$$

Ako podelimo jednačinu (2.8) sa u_0 , dobijamo:

$$\frac{1}{3} p \frac{df_0}{dp} \left(\frac{1}{R_{\text{tot}}} - U_p \right) - f_0 \left(U_p + \frac{1}{3} p \frac{dU_p}{dp} \right) + \frac{Q_0(p)}{u_0} = 0, \quad (2.9)$$

gde smo uveli ukupan faktor kompresije na talasu R_{tot} , kao i normalizovanu brzinu fluida $U_p = u_p/u_0$.

Pretpostavljamo da je η udeo čestica na *subshock*-u (odnosno udarnom talasu) koje su ubrizgane u proces ubrzavanja, tačno sa impulsom p_{inj} :

$$Q_0(p) = \frac{\eta n_1 u_1}{4\pi p_{\text{inj}}^2} \delta(p - p_{\text{inj}}), \quad (2.10)$$

gde je n_1 koncentracija gasa odmah ispred udarnog talasa. Ovde možemo da napišemo implicitnu jednačinu za $f_0(p)$ kao:

$$f_0(p) = \frac{3}{U_p - \frac{1}{R_{\text{tot}}}} \frac{\eta n_1}{4\pi p_{\text{inj}}^3} \exp \left(- \int_{p_{\text{inj}}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3U_{p'}}{U_{p'} - \frac{1}{R_{\text{tot}}}} \right). \quad (2.11)$$

Impuls p_{inj} parametrizujemo kao:

$$p_{\text{inj}} = \xi p_{\text{th},2}, \quad (2.12)$$

gde je $p_{\text{th},2}$ srednji termalni impuls gasa nizvodno $p_{\text{th},2} = \sqrt{2m_p k T_2}$. Ako zahtevamo kontinuitet između termalnog tj. Maksvelovog i netermalnog spektra čestica, odnosno da $f_{\text{th}}(p_{\text{inj}}) = f_0(p_{\text{inj}})$, to implicira sledeći recept za η :

$$\eta = \frac{4}{3\sqrt{\pi}} (R_{\text{sub}} - 1) \xi^3 \exp(-\xi^2), \quad (2.13)$$

gde smo uveli faktor kompresije udarnog talasa

$$R_{\text{sub}} = \frac{u_1}{u_2}. \quad (2.14)$$

Odavde se vide dve stvari, prvo jeste to da kada R_{sub} teži jedinici, ubrizgavanje teži nuli. Takođe, vidimo da je udeo η vrlo osetljiv na vrednost ξ .

2.2 Normalizovana brzina u funkciji impulsa

U prethodnom poglavlju smo izveli jednačinu za raspodelu čestica f_0 u zavisnosti od normalizovane brzine U_p . No, iz definicije U_p , odnosno u_p je jasno da je problem nelinearan jer je u_p funkcija od f_0 . Shodno tome, potrebna nam je relacija za U_p . Da bismo to izveli, koristimo zakon održanja impulsa koji sadrži 4 člana:

$$\rho u^2 + P_{\text{th}} + P_{\text{cr}} + P_{\text{w}} = \text{const.}, \quad (2.15)$$

dinamički pritisak ρu^2 , pritisak fluida odnosno termalni pritisak P_{th} , pritisak kosmičkih zraka odnosno netermalni pritisak P_{cr} (cr - *cosmic ray*), i magnetni tj. pritisak talasa P_{w} . Zakon održanja pišemo za 2 tačke: $x = -x_{\text{max}}$ i $x = 0^-$:

$$\rho_p u_p^2 + P_{\text{th},p} + P_{\text{cr},p} + P_{\text{w},p} = \rho_0 u_0^2 + P_{\text{th},0} + P_{\text{cr},0} + P_{\text{w},0}, \quad (2.16)$$

gde napominjemo da se termalni pritisak i pritisak ubrzanih čestica sastoji od doprinosa elektrona i protona, odnosno $P_{\text{th},p} = P_{\text{th},p}^{\text{p}} + P_{\text{th},p}^{\text{e}}$ i $P_{\text{cr},p} = P_{\text{cr},p}^{\text{p}} + P_{\text{cr},p}^{\text{e}}$. Pritisak fluida u neperturbovanoj sredini $P_{\text{th},0}^{\text{p}}$ je direktno povezan sa brzinom udarnog talasa u_0 preko zvučnog Mahovog broja za protone $M_{\text{S},0}$ na sledeći način:

$$M_{\text{S},0} = \frac{u_0}{c_{\text{S},0}}, \quad (2.17)$$

gde je $c_{S,0}$ brzina zvuka definisana kao:

$$c_{S,0} = \sqrt{\frac{\gamma_{th} P_{th,0}}{\rho_0}}. \quad (2.18)$$

Kvadriranjem jednačine (2.18) uz (2.17) imamo:

$$\frac{P_{th,0}^p}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1}{\gamma_{th} M_{S,0}^2}, \quad (2.19)$$

gde je γ_{th} adijabatski indeks, jednak 5/3 za idealan gas.

Ako pretpostavimo adijabatsku kompresiju u *precursor*-u ($P\rho^{-\gamma} = \text{const.}$), dobijamo $\frac{P_{th,p}}{P_{th,0}} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)^{-\gamma_{th}} = U_p^{-\gamma_{th}}$ (uz korišćenje zakona održanja mase $\rho u = \text{const.}$). Međutim, razni procesi dovode do neadijabatske kompresije, od kojih je glavni zagrevanje gasa usled prigušenja Alfvenovih talasa. Iz Berezhko i Ellison (1999), imamo da je:

$$\begin{aligned} \frac{P_{th,p}^p}{P_{th,0}} = & \left(1 + (\gamma_{th} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} \left(1 - \left(\frac{\rho_0}{\rho_p}\right)^{\gamma_{th}}\right) - \right. \\ & \left. \frac{\gamma_{th} - 1}{M_{A,0} P_{th,0}} \int_{-\infty}^{x_p} dx \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{1-\gamma_{th}} \frac{\partial P}{\partial x}\right) \left(\frac{\rho_p}{\rho_0}\right)^{\gamma_{th}}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

gde je

$$M_{A,0} = \frac{u_0}{v_{A,0}} \quad (2.21)$$

Alfvenov-Mahov broj za protone daleko uzvodno, a

$$v_{A,0} = \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho_0}}. \quad (2.22)$$

Alfvenova brzina na istim koordinatama, sa jačinom magnetnog polja B , gde su sve veličine u cgs sistemu. Račun pokazuje da je integral sa desne strane (2.20) mali, odnosno da možemo da ga zanemarimo, odakle sledi (uz korišćenje zakona održanja mase $\rho u = \text{const.}$):

$$\frac{P_{th,p}^p}{P_{th,0}} = \left[1 + (\gamma_{th} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} \left(1 - U_p^{-\gamma_{th}}\right)\right] U_p^{-\gamma_{th}}. \quad (2.23)$$

Caprioli i dr. (2009) predlaže *a priori* dodavanje parametra ζ , takozvani Alfvenov parametar zagrevanja, na sledeći način:

$$\frac{P_{th,p}^p}{P_{th,0}} = \left[1 + \zeta(\gamma_{th} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} \left(1 - U_p^{-\gamma_{th}}\right)\right] U_p^{-\gamma_{th}}. \quad (2.24)$$

Osnovna pretpostavka modela jeste to da je koeficijent difuzije $D(p)$ monotono rastuća funkcija od impulsa p , samim tim tipično rastojanje do kojeg čestice difunduju $x_p = \frac{D(p)}{v_p}$, je veće za čestice većih energija, a manje za čestice manjih energija. Zbog toga, samo čestice sa impulsom $\geq p$ mogu značajno da utiču na fluid u tački x_p .

Netermalni pritisak (pritisak kosmičkih zraka P_{cr} , u smislu ubrzanih čestica) u *upstream*-u se računa kao (u slučaju da postoje čestice tu, odnosno ako je $f_{\text{up}} \neq 0$):

$$P_{\text{cr}} = \int_{p_{\text{min},0}}^{p_{\text{max},0}} 4\pi p'^2 f_{\text{up}}(p') \frac{p'v(p')}{3} dp', \quad (2.25)$$

gde je $v(p')$ brzina čestice sa impulsom p' . Ako brzinu izrazimo preko impulsa koristeći relativističku jednačinu $E = mc^2/\sqrt{1 - (v/c)^2}$, u jedinicama $m_p c$, dobijamo sledeću jednačinu za $P_{\text{cr},0}$:

$$P_{\text{cr}} = \frac{4\pi}{3} m_p c^2 \int_{p_{\text{min},0}}^{p_{\text{max},0}} \frac{p'^4 f_{\text{up}}(p')}{\sqrt{1 + p'^2}} dp'. \quad (2.26)$$

Za naše potrebe, pretpostavljamo da nemamo kosmičke zrake u $x = -x_{\text{max}}$, odnosno

$$P_{\text{cr},0} = 0. \quad (2.27)$$

U opštem slučaju netermalni pritisak (i za protone i za elektrone) u tački x_p se sastoji iz dva člana:

$$P_{\text{cr},p} = P_{\text{cr},p,0} + P_{\text{cr},p,1}. \quad (2.28)$$

Pritisak $P_{\text{cr},p,0}$ potiče od adijabatske kompresije čestica daleko uzvodno i jednak je:

$$P_{\text{cr},p,0} = U_p^{-\gamma_{\text{cr}}} P_{\text{cr},0}. \quad (2.29)$$

Adijabatski indeks γ_{cr} je definisan kao:

$$\gamma_{\text{cr}} = 1 + \frac{P_{\text{cr}}}{e_{\text{cr}}}, \quad (2.30)$$

gde je e_{cr} unutrašnja energija netermalnih čestica, definisana kao:

$$e_{\text{cr}} = \int_{p_{\text{min}}}^{p_{\text{max}}} K(p') f_{\text{up}}(p') 4\pi p'^2 dp', \quad (2.31)$$

gde je $K(p')$ kinetička energija čestice sa impulsom p' . Ako je izrazimo u jedinicama $m_p c^2$, dobijamo:

$$e_{\text{cr}} = 4\pi \int_{p_{\text{min}}}^{p_{\text{max}}} \left(\sqrt{1 + p'^2} - 1 \right) p'^2 f_{\text{up}}(p') dp'. \quad (2.32)$$

Odavde dobijamo da je $\gamma_{\text{cr}} \approx \frac{4}{3}$.

Pritisak $P_{\text{cr},p,1}$ potiče od čestica koje su ubrzane na udarnom talasu barem do brzine $\geq v(p)$, odnosno one sa impulsom $\geq p$, i samim tim dostižu tačku x_p . Odatle je (protonski) pritisak (uz relativističke jednačine $E = \gamma mc^2$ i $p = \gamma mv$, odnosno njihovom kombinacijom $p^3 v = \frac{p^4 c^2}{E}$) jednak:

$$P_{\text{cr},p,1}^{\text{p}} = \int_p^{p_{\text{max},1}^{\text{p}}} 4\pi p'^2 f_0^{\text{p}}(p') \frac{p'v(p')}{3} dp' = \frac{4\pi}{3} \int_p^{p_{\text{max},1}^{\text{p}}} \frac{p'^4 c^2}{\sqrt{m_{\text{p}}^2 c^4 + p'^2 c^2}} f_0^{\text{p}}(p') dp', \quad (2.33)$$

gde je c brzina svetlosti u vakuumu. Analogno za elektrone (gde je m_e masa elektrona) dobijamo:

$$P_{\text{cr},p,1}^{\text{e}} = \int_p^{p_{\text{max},1}^{\text{e}}} 4\pi p'^2 f_0^{\text{e}}(p') \frac{p'v(p')}{3} dp' = \frac{4\pi}{3} \int_p^{p_{\text{max},1}^{\text{e}}} \frac{p'^4 c^2}{\sqrt{m_e^2 c^4 + p'^2 c^2}} f_0^{\text{e}}(p') dp'. \quad (2.34)$$

Magnetni pritisak (koji potiče od magnetnih fluktuacija) u cgs sistemu jedinica, definiše se na sledeći način:

$$P_{\text{w}} = \frac{\delta B^2}{8\pi}, \quad (2.35)$$

gde je B magnetna indukcija. Magnetno polje se generiše usled raznih nestabilnosti, koje indukuju same čestice, tj. anizotropija njihove raspodele. Nestabilnosti *strujanja* (eng. *streaming instability*) mogu biti rezonantne i nerezonantne (Amato i Blasi 2009). U zavisnosti od interakcije čestica i talasa, rezonantne potiču isključivo od Alfenovih talasa, dok nerezonantne (tzv. Belove) nisu vezane za Alfenove talase. Kako nestabilnosti potiču od čestica, u prvoj aproksimaciji možemo pritisak talasa da posmatramo kao neki deo pritiska čestica, odnosno $P_{\text{w}} = \alpha P_{\text{cr}}$, kako za rezonantan tako i za nerezonantan slučaj.

Daleko uzvodno, kako raspodela čestica izotropna, nema magnetnih turbulencija, odnosno:

$$P_{\text{w},0} = 0. \quad (2.36)$$

Iz rada Caprioli i dr. (2009) imamo sledeću relaciju za rezonantne nestabilnosti:

$$\frac{P_{\text{w},p}^{\text{res}}}{\rho_0 u_0^2} = \frac{1 - \zeta}{4M_{\Lambda,0}} U_p^{-\frac{3}{2}} (1 - U_p^2), \quad (2.37)$$

gde se uvodi faktor $(1 - \zeta)$ koji reguliše prigušenje Alfvenovih talasa, i balansira faktor ζ u jednačini (2.24) koji reguliše Alfvenovo zagrevanje. Faktor $U_p^{-\frac{3}{2}}$ opisuje adijabatsku kompresiju. Za nerezonantne nestabilnosti, imamo da je (Arbutina 2023):

$$\frac{P_{w,p}^{\text{nonres}}}{\rho_0 u_0^2} = \frac{3\iota u_0}{2c} (1 - U_p), \quad (2.38)$$

gde je ι slobodan parametar vrednosti oko jedinice.

Za elektrone pretpostavljamo adijabatsku kompresiju, odnosno da je odnos pritiska fluida (uz zakon održanja mase $\rho u = \text{const.}$) jednak:

$$\frac{P_{\text{th},p}^e}{P_{\text{th},0}} = \left(\frac{\rho_p}{\rho_0} \right)^{-\gamma} = U_p^{-\gamma}. \quad (2.39)$$

Koristeći jednačinu (2.19) za termalni pritisak protona uzvodno, jednačinu (2.24) za termalni pritisak protona u tački x_p , jednačinu (2.39) za termalni pritisak elektrona u tački x_p , jednačine (2.28), (2.29), (2.33) i (2.34) za pritisak ubrzanih čestica (i protona i elektrona) u x_p , jednačine (2.37) i (2.38) za rezonante i nerezonantne nestabilnosti, uz relacije (2.27) i (2.36), sa zakonom održanja (2.16) i zakonom održanja mase $\rho u = \text{const.}$, dobijamo jednačinu:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{\gamma_{\text{th}} M_{S,0}^2} = & U_p + U_p^{-\gamma_{\text{th}}} + U_p^{-\gamma_{\text{th}}} \left(1 + \zeta(\gamma_{\text{th}} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - U_p^{\gamma_{\text{th}}}) \right) \frac{1}{\gamma_{\text{th}} M_{S,0}^2} \\ & + \frac{4\pi m_p c^2}{3\rho_0 u_0^2} \int_p^{p_{\text{max},1}^p} \frac{p'^4 f_0^p(p) dp}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{4\pi m_p c^2}{3\rho_0 u_0^2} \int_p^{p_{\text{max},1}^e} \frac{p'^4 f_0^e(p) dp}{\sqrt{1+p^2}} \\ & + \frac{1-\zeta}{4M_{A,0}} U_p^{-\frac{3}{2}} (1 - U_p^2) + \frac{3\iota u_0}{2c} (1 - U_p). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Diferenciranjem jednačine (2.40) po impulsu p dobijamo diferencijalni oblik zakona održanja impulsa:

$$\begin{aligned} \frac{dU_p}{dp} \left(1 - \frac{U_p^{-(\gamma_{\text{th}}+1)}}{M_{S,0}^2} (2 + \zeta(\gamma_{\text{th}} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}}) - \frac{1-\zeta}{8M_{A,0}} \frac{3+U_p^2}{U_p^{\frac{5}{2}}} - \frac{3\iota u_0}{2c} \right) = \\ \frac{4\pi m_p c^2}{3\rho_0 u_0^2} \frac{p^4 f_p(p)}{\sqrt{1+p^2}} + \frac{4\pi m_p c^2}{3\rho_0 u_0^2} \frac{p^4 f_e(p)}{\sqrt{1+p^2}}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

gde f_p sada odgovara raspodeli protona, a f_e raspodeli elektrona po impulsima na frontu udarnog talasa.

2.3 Kompresija na udarnom talasu

Diferencijalna jednačina za f_0 je izražena preko U_p , R_{tot} i R_{sub} , a jednačina za U_p je izražena preko f_0 i R_{prec} , gde su ξ , η , ζ i p_{max} slobodni parametri. Da bismo rešili spregnut sistem (f_0, U_p) , potrebna nam je još jedna jednačina koja povezuje bilo koja dva od tri faktora kompresije R_{sub} , R_{prec} ili R_{tot} i sadrži samo poznate parametre, gde se poslednji od njih računa direktno od dva poznata preko relacije $R_{\text{tot}} = R_{\text{sub}}R_{\text{prec}}$. Da bismo izveli tu jednačinu, opet koristimo zakon održanja impulsa, ali ovaj put za mesto odmah ispred i iza udarnog talasa, tj. za koordinate $x = 0^-$ i $x = 0^+$. Jednačina glasi:

$$\rho_1 u_1^2 + P_{\text{th},1} + P_{\text{cr},1} + P_{\text{w},1} = \rho_2 u_2^2 + P_{\text{th},2} + P_{\text{cr},2} + P_{\text{w},2}. \quad (2.42)$$

Kako je raspodela čestica neprekidna kroz udarni talas $f_1 = f_2$, samim tim su i pritisci jednaki, odnosno:

$$P_{\text{cr},1} = P_{\text{cr},2}. \quad (2.43)$$

Kako imamo namagnetisani gasni udar, to znači da važe jednačine iz Vainio i Schlickeiser (1999), odnosno da je odnos pritisaka fluida jednak:

$$\frac{P_{\text{th},2}}{P_{\text{th},1}} = \frac{(\gamma_{\text{th}} + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma_{\text{th}} - 1)(1 - (R_{\text{sub}} - 1)\Delta)}{(\gamma_{\text{th}} + 1) - (\gamma_{\text{th}} - 1)R_{\text{sub}}}, \quad (2.44)$$

gde smo uveli Δ kao

$$\Delta = \frac{(R_{\text{sub}} + 1)[P_{\text{w}}]_1^2}{(R_{\text{sub}} - 1)P_{\text{th},1}} - \frac{2R_{\text{sub}}[F_{\text{w}}]_1^2}{(R_{\text{sub}} - 1)P_{\text{th},1}u_1}, \quad (2.45)$$

uz notaciju $[X]_1^2 = X_2 - X_1$, odnosno $[P_{\text{w}}]_1^2$ je skok u magnetnom pritisku, a $[F_{\text{w}}]_1^2$ skok u fluksu magnetne energije kroz diskontinuitet (tj. udarni talas). Odavde vidimo da imamo osnovne Rankin-Igonioove jednačine kada stavimo da je $\Delta = 0$ (uz $\rho u = \text{const.}$).

Sa obe strane, posmatramo talase koji se kreću sa tokom fluida u smeru kretanja udarnog talasa, brzinom $u + v_A$ (sa indeksom +) i talase koji se kreću u suprotnom smeru od toka fluida, brzinom $u - v_A$ (sa indeksom -). Koristeći indekse kao i ranije ($i = 1, 2$ označava položaj ispred/iza udarnog talasa), imamo za pritisak P_{w} :

$$P_{\text{w},i} = \frac{1}{8\pi}(\delta B_{i-} + \delta B_{i+})^2, \quad (2.46)$$

i fluks F_{w} :

$$F_{\text{w},i} = \frac{1}{4\pi}(\delta B_{i-}^2(u - v_A) + \delta B_{i+}^2(u + v_A)) + \frac{1}{8\pi}(\delta B_{i-} + \delta B_{i+})^2 u_i. \quad (2.47)$$

Ako pretpostavimo da je Alfenova brzina mnogo manja od brzine udarnog talasa $v_A \ll u$, što će u našem slučaju uvek biti zadovoljeno, fluks je

$$F_{w,i} \approx \left(\frac{1}{4\pi} (\delta B_{i-}^2 + \delta B_{i+}^2) + \frac{1}{8\pi} (\delta B_{i-} + \delta B_{i+})^2 \right) u_i. \quad (2.48)$$

Talasi ispred fronta (uzvodno) se ili reflektuju (sa koeficijentom R) ili prenose (sa koeficijentom T) na frontu udarnog talasa, no kako je brzina udarnog talasa veća od Alfenove brzine, odnosno tok je super-Alfenovski ($u > v_A$), i reflektovani i transmittovani talasi se u stvari advektuju nizvodno, odnosno u region iza udarnog talasa. Odavde imamo da je komponenta magnetnog polja iza udarnog talasa:

$$\begin{aligned} \delta B_{2+} &= T\delta B_{1+} + R\delta B_{1-} \\ \delta B_{2-} &= T\delta B_{1-} + R\delta B_{1+}. \end{aligned} \quad (2.49)$$

Odavde je:

$$[P_w]_1^2 = (T + R)^2 - 1, \quad (2.50)$$

$$\begin{aligned} [F_w]_1^2 &= \left(\frac{u_2}{u_1} (2(T^2 + R^2) + (T + R)^2) - 3 \right) P_{w,1} u_{1+} \\ &\quad \left(1 + \frac{u_2}{u_1} (2TR - (T^2 + R^2)) \right) \frac{\delta B_{1-} - \delta B_{1+}}{2\pi} u_1. \end{aligned} \quad (2.51)$$

Iz rada McKenzie i Westphal (1969) imamo da su transmisioni i refleksioni koeficijenti u slučaju velikih Alfven-Mahovih brojeva $M_A^2 \gg R_{\text{sub}}$ jednaki:

$$\begin{aligned} T &= \frac{R_{\text{sub}} + \sqrt{R_{\text{sub}}}}{2} \\ R &= \frac{R_{\text{sub}} - \sqrt{R_{\text{sub}}}}{2} \end{aligned} \quad (2.52)$$

Kada (2.52) ubacimo u (2.50) i (2.51), dobijamo

$$[P_w]_1^2 = R_{\text{sub}}^2 - 1, \quad (2.53)$$

$$[F_w]_1^2 = 2(R_{\text{sub}} - 1)P_{w,1}u_1. \quad (2.54)$$

Kada relacije (2.53) i (2.54) vratimo u relaciju (2.45) za Δ , dobijamo da je odnos pritisaka jednak:

$$\frac{P_{\text{th},2}}{P_{\text{th},1}} = \frac{(\gamma_{\text{th}} + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma_{\text{th}} - 1)(1 - (R_{\text{sub}} - 1)^3 \frac{P_{w,1}}{P_{\text{th},1}})}{(\gamma_{\text{th}} + 1) - (\gamma_{\text{th}} - 1)R_{\text{sub}}}. \quad (2.55)$$

Data analiza odnosi se isključivo na rezonantne magnetne nestabilnosti. Nedostatak potpunog razumevanja nerezonantnih nestabilnosti onemogućava nas da sprovedemo

sličnu analizu, ali poput Arbutina (2023), možemo ih uključiti *ad hoc*, tako da P_w obuhvata i jedne i druge nestabilnosti, kao i da P_{th} obuhvata i elektrone.

Koristeći jednačinu (2.55) za odnos termalnih pritisaka, jednačinu (2.53) za razliku $P_{w,2} - P_{w,1}$, jednačinu (2.43) za netermalni pritisak, i zakon održanja mase $\rho u = \text{const.}$, dobijamo za zvučni Mahov broj $M_{S,1}$:

$$M_{S,1} = \frac{2R_{\text{sub}}}{(\gamma_{\text{th}} + 1) - (\gamma_{\text{th}} - 1)R_{\text{sub}} - 2R_{\text{sub}}(\gamma_{\text{th}} - (\gamma_{\text{th}} - 2)R_{\text{sub}})P_{w,1}^*}, \quad (2.56)$$

gde smo uveli novu promenljivu $P_{w,1}^* = \frac{P_{w,1}}{\rho_1 u_1^2}$. Ako preuredimo jednačinu (2.56), dobijamo kvadratnu jednačinu za R_{sub} koja zatvara naš sistem jednačina:

$$2(\gamma_{\text{th}} - 2)M_{S,1}^2 P_{w,1}^* R_{\text{sub}}^2 - (2 + ((\gamma_{\text{th}} - 1) + 2\gamma_{\text{th}} P_{w,1}^*)M_{S,1}^2) R_{\text{sub}} + (\gamma_{\text{th}} + 1)M_{S,1}^2 = 0. \quad (2.57)$$

2.4 Odnosi temperatura i zagrevanje elektrona

Da bismo našli odnos temperatura, koristimo jednačinu stanja idealnog gasa:

$$P = \rho \frac{R_g}{M} T, \quad (2.58)$$

gde je R_g univerzalna gasna konstanta, a M molarna masa. Direktno iz (2.58) i (2.24) za protone dobijamo:

$$\frac{T_{\text{th},1}^p}{T_{\text{th},0}^p} = \frac{\rho_{\text{th},0}}{\rho_{\text{th},1}} \frac{P_{\text{th},1}^p}{P_{\text{th},0}^p} = R_{\text{prec}}^{\gamma_{\text{th}}-1} \left(1 + \zeta(\gamma_{\text{th}} - 1) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} (1 - R_{\text{prec}}^{-\gamma_{\text{th}}}) \right). \quad (2.59)$$

Za elektrone, iz pretpostavke o adijabatskoj kompresiji tj. iz jednačine (2.39), imamo:

$$\frac{T_{\text{th},1}^e}{T_{\text{th},0}^e} = R_{\text{prec}}^{\gamma_{\text{th}}-1}. \quad (2.60)$$

Iz rada Ghavamian, Martin Laming i Rakowski (2007) znamo da postoji značajno zagrevanje elektrona u *precursor*-u, gde je vrednost zagrevanja relativno konstantna i jednaka $\Delta E = 0.3$ keV. Za brze udare, izgleda da je odnos temperatura konstantan (Ghavamian 2016). Arbutina (2023) ovo implementira tako, što oduzima vrednost ΔE od Alfenovski-zagrejanih protona i dodaju tu energiju elektronima na sledeći način:

$$kT_{\text{th},2}^p = kT_{\text{th},2}^p - \Delta E, \quad (2.61)$$

$$kT_{\text{th},2}^e = kT_{\text{th},2}^e + \Delta E, \quad (2.62)$$

gde je T' dobijeno iz jednačina skoka. Kako iz rada Ghavamian (2016) imamo da odnos temperatura nizvodno β teži konstanti (iz Rankin-Igonioovih jednačina imamo da je $\beta = T^e/T^p = m_e/m_p$) kada brzina udara raste $\beta \rightarrow \beta_0$, to znači da je energija ΔE u stvari konstantan deo temperature protona nizvodno. Odatle imamo (Arbutina 2023):

$$\Delta E = akT_{\text{th},2}^p + b. \quad (2.63)$$

Za region nizvodno, možemo da nađemo temperature iz zakona održanja energije:

$$kT_{\text{th},2}^e = \frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2\gamma_{\text{th}}} \left(1 - \frac{1}{R_{\text{sub}}^2}\right) m_e u_0^2 + (akT_{\text{th},2}^p + b), \quad (2.64)$$

$$kT_{\text{th},2}^p = \frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2\gamma_{\text{th}}} \left(1 - \frac{1}{R_{\text{sub}}^2}\right) m_p u_0^2 - (akT_{\text{th},2}^p + b). \quad (2.65)$$

Odatle sledi odnos (Ghavamian 2016) $\beta = (\frac{3}{16}m_e u_0^2 + \Delta E)/(\frac{3}{16}m_p u_0^2)$:

$$\beta = \frac{\frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2\gamma_{\text{th}}} \left(1 - \frac{1}{R_{\text{sub}}^2}\right) ((1+a)m_e + am_p) u_0^2 + b}{\frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2\gamma_{\text{th}}} \left(1 - \frac{1}{R_{\text{sub}}^2}\right) m_p u_0^2 - b}. \quad (2.66)$$

Sledi da je konstanta $b = 0.3$ keV, i, u skladu sa posmatranjima, $\beta_0 = a + (1+a)m_e/m_p \approx a = 0.05$. Ovu pretpostavku za ΔE možemo da primenimo na odnos temperatura nizvodno, tj.

$$kT_{\text{th},2}^e = \frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2\gamma_{\text{th}}} \left(\frac{1}{R_{\text{prec}}^2} - \frac{1}{R_{\text{tot}}^2}\right) m_e u_0^2 + kT_{\text{th},1}^e + \beta_0 kT_{\text{th},2}^p + \Delta E. \quad (2.67)$$

Sa druge strane, iz razmatranja u prethodnim poglavljima imamo jednačine (2.55), (2.59) i (2.60). Sledi:

$$\frac{T_{\text{th},2}^p}{T_{\text{th},0}} = \frac{1}{1+a} \left(\frac{T_{\text{th},1}^p}{T_{\text{th},0}} + \frac{T_{\text{th},2}^e}{T_{\text{th},0}}\right) A - \frac{1}{1+a} B, \quad (2.68)$$

$$\frac{T_{\text{th},2}^e}{T_{\text{th},0}} = \frac{a}{1+a} \left(\frac{T_{\text{th},1}^p}{T_{\text{th},0}} + \frac{T_{\text{th},2}^e}{T_{\text{th},0}}\right) A + \frac{1}{1+a} B, \quad (2.69)$$

gde je:

$$A = \frac{T_{2,p} + T_{2,e}}{T_{1,p} + T_{1,e}} = \frac{(\gamma + 1)R_{\text{sub}} - (\gamma - 1)[1 - (R_{\text{sub}} - 1)\Delta]}{[(\gamma + 1) - (\gamma - 1)R_{\text{sub}}] R_{\text{sub}}}, \quad (2.70)$$

$$\Delta = (R_{\text{sub}} - 1)^2 \frac{P_{r,1} + \frac{j-1}{j} P_{n,1}}{P_{p,1} + P_{e,1}},$$

$$B = \frac{\gamma_{\text{th}} - 1}{2} \left(\frac{1}{R_{\text{prec}}^2} - \frac{1}{R_{\text{tot}}^2}\right) \frac{m_e}{m_p} M_{S,0}^2 + \frac{T_{\text{th},1}^e}{T_{\text{th},0}} + \frac{b}{kT_{\text{th},0}}. \quad (2.71)$$

Kada protonska temperatura padne ispod elektronske, uzećemo da je $B = 0$ i $a = 1$, odnosno smatraćemo da je postignuta ravnoteža $T_{\text{th},2}^e = T_{\text{th},2}^p$.

Iako postoji određeno neslaganje vezano za odnos temperatura β između posmatranja udara OSN, PIC simulacija i posmatranja Sunčevog vetra (Raymond i dr. 2023), pretpostavićemo da se ovaj recept može primeniti za procenu zagrevanja elektrona kod OSN.

2.5 Fluks čestica koje napuštaju sistem

Stacionarno rešenje može da postoji jedino ako čestice impulsa preko p_{max} mogu da napuste granicu *precursor*-a u poziciji $-x_{\text{max}}$, dok naš model daje oštar prekid u raspodeli čestica na p_{max} . Kako očekujemo da čestice slobodno napuste region, dodajemo još jedan član ϕ_{esc} u jednačinu (2.9) koji će da proizvede glatki pad u spektru čestica oko p_{max} . Ako integralimo jednačinu (2.1) od tačke $-x_{\text{max}}$, gde bi čestice trebalo da napuste sistem, odnosno ako važi da je:

$$f(x_{\text{max}}) = 0, \quad (2.72)$$

sa leve strane jednačine (2.8) se pojavljuje novi član ϕ_{esc} , definisan kao:

$$\phi_{\text{esc}} = -D \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)_0, \quad (2.73)$$

što je fluks čestica koje napuštaju sistem kroz granicu $-x_{\text{max}}$. Ako, kao i ranije, pretpostavimo da nemamo čestice uzvodno (tj. $f_{\text{up}} = 0$), kao i da se ubrizgavanje čestica u proces ubrzavanja dešava samo na jednoj energiji, rešenje (2.11) postaje:

$$f_0(p) = \frac{3}{U_p - R_{\text{tot}}^{-1}} \frac{\eta n_0}{4\pi p_{\text{inj}}^3} \exp \left(- \int_{p_{\text{inj}}}^p \frac{dp'}{p'} \frac{3(U_p + \Phi_{\text{esc}}(p'))}{U_{p'} - R_{\text{tot}}^{-1}} \right), \quad (2.74)$$

gde smo definisali normalizovani fluks čestica kroz barijeru $\Phi_{\text{esc}}(p) = \frac{\phi_{\text{esc}}(p)}{u_0 f_0(p)}$. Korišćući jednačinu za x_p :

$$x_p = \frac{D(p)}{u_p} = \frac{D(p)}{u_0 U_p}, \quad (2.75)$$

i pretpostavku za koeficijent difuzije $D = \frac{pv}{3eB_0}$, aproksimiramo normalizovani fluks Φ_{esc} kao:

$$\Phi_{\text{esc}} = \frac{1}{e^{\frac{p_{\text{max}} \cdot c}{pv}}}. \quad (2.76)$$

Odavde dobijamo korekciju za spektar $f_{p,0}$ dobijen iz sistema jednačina (2.9), (2.41):

$$f_p = f_{p,0} \left(1 - e^{-\frac{p_{\text{max}}}{p}} \right)^{\frac{3R_{\text{tot}}}{R_{\text{tot}} - 1} \frac{p}{p_{\text{max}}}}. \quad (2.77)$$

Važno je napomenuti da, u stvari, integralimo samo difuziono-advekcionu jednačinu za protone, jer je raspodela elektrona po impulsima jednaka $f_e = K_{\text{ep}} \cdot f_p$, gde je K_{ep} odnos broja protona i elektrona na visokim energijama, definisan u radu Arbutina (2023) kao $K_{\text{ep}} = \frac{\eta_e}{\eta_p} \left(\frac{m_e}{m_p} \beta \right)^{\frac{3}{2(R_{\text{sub}}-1)}}$.

2.6 Gubici na sinhrotronsko zračenje

Relativistički elektroni koji se kreću u magnetnom polju emituju sinhrotronsko zračenje. Kako je magnetno polje najjače na udarnom talasu i iza njega, očekujemo da gubici tu budu najveći. Koristimo pristup iz Zirakashvili i Aharonian (2007), gde autori dodaju još jedan član u difuziono-advekcionoj jednačini: $\frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 A f)$. Uz pretpostavku o *Bohm*-ovoj difuziji ($D \propto p$), tj. uzimajući za koeficijent $A = \frac{4e^4 B^2}{9m_e^4 c^6} p^2$, autori dobijaju za rezultujući spektar na velikim impulsima $f \propto \sqrt{p} \cdot e^{-\left(\frac{p}{p_{\text{loss}}}\right)^2}$, gde je (Arbutina 2023):

$$p_{\text{loss}} = \frac{\sqrt{R_B}}{1 + \sqrt{R_B}} \frac{R_{\text{sub}} - 1}{R_{\text{tot}}} \frac{m_e^2 c^2 u_0}{\sqrt{2e^2 B_2 / 27}}, \quad (2.78)$$

uz definiciju skoka magnetnog polja na udarnom talasu $R_B = \frac{B_2}{B_1}$. Ovde samo uzimamo eksponencijalni deo zavisnosti, odnosno:

$$f_e = f_{e,0} \cdot e^{-\left(\frac{p}{p_{\text{loss}}}\right)^2}, \quad (2.79)$$

a za $p > p_{\text{loss}}$ pretpostavljamo $f_{e,0} = K_{\text{ep}} f_{p,0}$.

2.7 Iterativna procedura

Da bismo dobili raspodelu čestica po impulsima, istovremeno numerički rešavamo difuziono-advekcionu jednačinu za protone i elektrone (2.9), i diferenciran zakon održanja impulsa (2.41):

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R_{\text{tot}}} - U_p \right) p \frac{df_p}{dp} - f_p \left(U_p + \frac{1}{3} p \frac{dU_p}{dp} \right) = 0, \quad (2.80)$$

$$\frac{1}{3} \left(\frac{1}{R_{\text{tot}}} - U_p \right) p \frac{df_e}{dp} - f_e \left(U_p + \frac{1}{3} p \frac{dU_p}{dp} \right) = 0, \quad (2.81)$$

$$\frac{dU_{p^*}}{dp^*} \left(1 - \frac{U_{p^*}^{-(\gamma_{\text{th}}+1)}}{M_{S,0}^2} (2 + \zeta(\gamma_{\text{th}} - 1)) \frac{M_{S,0}^2}{M_{A,0}} - \frac{1 - \zeta}{8M_{A,0}} \frac{3 + U_{p^*}^2}{U_{p^*}^{5/2}} - \frac{3\mu u_0}{2c} \right) = \frac{p^{*4} f_p^*(p^*)}{\sqrt{1 + p^{*2}}} + \frac{p^{*4} f_e^*(p^*)}{\sqrt{1 + p^{*2}}}. \quad (2.82)$$

U poslednjoj jednačini smo uveli nove promenljive p^* , f_e^* i f_p^* , koje predstavljaju bezdimenzioni impuls i raspodele odnosno spektre čestica, definisane sa $p^* = \frac{p}{m_p c}$, $f_e^* = \frac{4\pi m_p^4 c^5}{3\rho_0 u_0^2} f_e$ i $f_p^* = \frac{4\pi m_p^4 c^5}{3\rho_0 u_0^2} f_p$. Za rešavanje sistema jednačina, koristi se Runge-Kutta metoda reda 6 (Luther 1968). Impuls p_{inj} dobijamo iz formule (2.12), odnosno:

$$p_{inj,p} = \xi \sqrt{\frac{2}{\gamma_{th}} \frac{T_{2,p}}{T_0} \frac{1}{M_{S,0}} \frac{u_0}{c}}, \quad (2.83)$$

$$p_{inj,e} = \xi \sqrt{\frac{2}{\gamma_{th}} \frac{T_{2,e}}{T_0} \frac{1}{M_{S,0}} \frac{u_0}{c}} \sqrt{\frac{m_e}{m_p}}. \quad (2.84)$$

Između $p_{inj,e}$ i $p_{inj,p}$, smatramo da je $U_p = \frac{1}{R_{prec}}$, a iterativna procedura staje kada je $U_p = 1$ na $p_{max} = \frac{3u_0}{8c^2} e B_0 R$ (gde je R prečnik ostatka supernove zadat i iznosi 10 pc). U realnosti, iterativna procedura staje na nekom p'_{max} koje se razlikuje od p_{max} , samim tim $U'_p \neq 1$. Da bismo pronašli optimalno R_{prec} koje treba zadati programu, kreće se od $R_{prec} = 1 + 10^{-10}$, i u svakoj sledećoj iteraciji petlje povećavamo R_{prec} za korak = 0.1. Kada je $p'_{max} > p_{max}$, $R_{prec} = R_{prec} - \text{korak}$, nakon toga korak delimo sa 10, odnosno korak = $\frac{\text{korak}}{10}$, i nastavljamo sa petljom ($R_{prec} = R_{prec} + \text{korak}$). Kada je zadovoljena tačnost (definisana kao $\epsilon = \frac{|p'_{max} - p_{max}|}{p_{max}}$) od 0.001, dobili smo naše optimalno R_{prec} .

Glava 3

Sinhrotronska emisivnost

Elektroni koji se kreću relativističkom brzinom u magnetnom polju zrače. U toku njihove žiracije, elektroni emituju tzv. sinhrotronsko zračenje (ili magnetni *bremsstrahlung*). Krećući od elektromagnetnog polja koje stvara naelektrisana čestica (u našem slučaju elektron), izvešćemo jednačinu za emisivnost. U ovoj glavi pratimo izvođenje iz Pacholczyk (1970).

Vektorski i skalarni potencijal u retardovanom vremenu (koji definišu elektromagnetne veličine) se dobijaju kao rešenje Maksvelovih jednačina. One opisuju elektromagnetno polje usled raspodele naelektrisanja i struja, određene njihovom gustinom Q i \vec{j} , respektivno. Udaljenost posmatrača od elementa zapremine koji sadrži neko naelektrisanje ili struju je R_0 , i integracija se vrši po celoj zapremini koja sadrži naelektrisanja ili struje. Uz ovu notaciju, vektorski i skalarni potencijali su dati sledećim formulama:

$$\begin{aligned}\vec{A}(\vec{R}, t) &= \frac{1}{c} \int R_0^{-1} \vec{j}(\vec{r}', t') \delta(t' - (t - \frac{R_0(t')}{c})) d\tau dt', \\ \varphi(\vec{R}, t) &= \int R_0^{-1} Q(\vec{r}', t') \delta(t' - (t - \frac{R_0(t')}{c})) d\tau dt',\end{aligned}\tag{3.1}$$

gde delta funkcija unutar integrala pokazuje da se gustine naelektrisanja i struja moraju uzeti u retardiranom vremenu $t' = t - \frac{R_0(t')}{c}$. Pošto u našem slučaju imamo tačkasto naelektrisanje koje se kreće velikom brzinom, gustine možemo da napišemo kao:

$$\begin{aligned}\vec{j}(\vec{R}, t) &= ec \vec{\beta}(t) \delta(\vec{R} - \vec{r}(t)), \\ Q(\vec{R}, t) &= e \delta(\vec{R} - \vec{r}(t)).\end{aligned}\tag{3.2}$$

Kada ovo vratimo u (3.1), dobijamo:

$$\begin{aligned}\vec{A}(R, t) &= \frac{e\vec{\beta}'}{R'_0(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)}, \\ \vec{\phi}(R, t) &= \frac{e}{R'_0(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)},\end{aligned}\quad (3.3)$$

gde ' označava da su vrednosti uzete u retardovanom vremenu t' , * označava jedinični vektor (tj. $\vec{R}'_0* = \frac{\vec{R}'_0}{R'_0}$, a $\vec{R}'_0(t')$ je udaljenost posmatrača od tačkastog naelektrisanja. Jačina električnog i magnetnog polja se računa iz Lenard-Vijehartovih potencijala na sledeći način:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \nabla \phi, \\ \vec{B} &= \nabla \times \vec{A}.\end{aligned}\quad (3.4)$$

Diferenciranje se vrši po vremenu i koordinatama posmatrača, odnosno prema \vec{r} i t . Kako su potencijali u (3.3) dati u funkciji retardovanog vremena t' , moramo prvo da diferenciramo prema t' , a nakon toga da koristimo jednačinu za $\frac{dt}{dt'}$ i $\nabla t'$ da bismo dobili jačinu električnog i magnetnog polja. Na velikom rastojanju od naelektrisanja, rezultat je:

$$\vec{E} = \frac{e}{R'_0} \frac{\vec{R}'_0* \times ((\vec{R}'_0* - \vec{\beta}') \times \dot{\vec{\beta}}')}{c(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)^3}, \quad \vec{B} = \vec{R}'_0* \times \vec{E}.\quad (3.5)$$

Snaga koju izrači čestica koja se kreće je data sa:

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_\Omega &= \frac{c}{4\pi} E^2 R_0^2 = \\ \frac{e^2}{4\pi c} &\left(\frac{(\dot{\vec{\beta}}')^2}{(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)^4} + \frac{2(\vec{R}'_0* \cdot \dot{\vec{\beta}}')(\vec{\beta}' \cdot \dot{\vec{\beta}}')}{(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)^5} - \frac{(\vec{R}'_0* \cdot \dot{\vec{\beta}}')^2}{\gamma^2(1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*)^6} \right).\end{aligned}\quad (3.6)$$

Ako posmatramo relativističku česticu sa brzinom bliskoj brzini svetlosti ($\beta \approx 1$), u smeru gde je veličina $1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*$ mala, količina koja se izrači je velika (u poređenju sa pravcem gde je $1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*$ reda veličine 1). Ovo se vidi iz prisustva člana $1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0*$ na velike stepene u imeniocu jednačine (3.6). Ako izmnožimo deo sa skalarnim proizvodom, i razvijemo ovaj član u Tejlorov red, zadržavajući se na drugom članu, imamo da je:

$$1 - \vec{\beta}' \cdot \vec{R}'_0* = 1 - \beta \cos \psi \approx 1 - \beta(1 - \frac{\psi^2}{2}) \approx 1 - \beta + \frac{\psi^2}{2}.\quad (3.7)$$

Odavde vidimo da je član (3.7) reda veličine $1 - \beta$ samo za $\psi \approx \sqrt{1 - \beta}$, odnosno (kako je $\beta \approx 1$) za:

$$\psi \approx \frac{1}{\gamma}. \quad (3.8)$$

Sledi da se većina energije izrači u pojas definisan malim uglom ψ oko smera vektora brzine elektrona.

Spektar sinhrotronskog zračenja elektrona može da se dobije Furijeovom analizom vektora električnog polja zračenja koje emituje elektron. Radijus-vektor koji opisuje elektron u toku žiracije je:

$$\vec{r}(t') = \frac{c\beta \sin \theta}{\omega_B} (\vec{l}_1 \cos \omega_B t' + \vec{l}_2 \sin \omega_B t') + \vec{l}_3 ct' \beta \cos \theta, \quad (3.9)$$

gde su vektori $\vec{\beta}'$ i $\dot{\vec{\beta}}'$:

$$\begin{aligned} \vec{\beta}' &= \beta \vec{n}, \\ \dot{\vec{\beta}}' &= \beta \omega_B \vec{l}_3 \times \vec{n}, \\ \vec{n} &= \sin \theta (-\vec{l}_1 \sin \omega_B t' + \vec{l}_2 \cos \omega_B t') + \vec{l}_3 \cos \theta. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Vektori \vec{l}_1 , \vec{l}_2 i \vec{l}_3 formiraju Dekartov koordinatni sistem u kome je spoljašnje magnetno polje paralelno sa vektorom \vec{l}_3 . Ugao između pravca vektora brzine elektrona i spoljašnjeg magnetnog polja je θ . Posmatrač se nalazi u $\vec{l}_2 \vec{l}_3$ ravni, a pravac ka posmatraču je dat vektorom:

$$\vec{k} = \vec{l}_2 \sin(\theta - \psi) + \vec{l}_3 (\theta - \psi). \quad (3.11)$$

Električno polje emitovanog zračenja $\vec{E}(t)$ opisujemo kao zbir Furijeovih komponenti monohromatskih talasa, frekvencije $n\omega_B/\sin^2 \theta$:

$$\vec{E}(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \vec{E}_n \exp\left(-i \frac{\omega_B n t}{\sin^2 \theta}\right), \quad (3.12)$$

gde su amplitude \vec{E}_n talasa date sa:

$$\vec{E}_n(\vec{R}) = \frac{\omega_B}{2\pi \sin^2 \theta} \int_0^{2\pi \sin^2 \theta / \omega_B} \vec{E}(t) \exp\left(i \frac{\omega_B n t}{\sin^2 \theta}\right) dt \quad (3.13)$$

(period je $2\pi \sin^2 \theta / \omega_B$). Srednja energija u toku jednog perioda, emitovana od čestice u jedinični prostorni ugao $d\Omega$ koju vidi posmatrač u jedinici vremena dt koji

se nalazi na udaljenosti R je $\widetilde{p_{n\Omega}} = \frac{c}{4\pi} \langle |\vec{E}(t)|^2 \rangle R^2$. Ovo može da se izrazi preko amplituda $\vec{E}_n(t)$:

$$\frac{4\pi}{cR^2} \widetilde{p_{n\Omega}} = \frac{4\pi}{cR^2} (\widetilde{p_{0\Omega}} + \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{p_{n\Omega}} = \vec{E}_0^2 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} |\vec{E}_n|^2). \quad (3.14)$$

Snaga $\widetilde{p_{n\Omega}}$ odgovara jednoj Furijeovoj komponenti, odnosno jednom harmoniku električnog polja. Jednačina za amplitude je data sa:

$$\vec{E}_n(\vec{R}) = \frac{\omega_B}{2\pi \sin^2 \theta} \int_0^{2\pi \sin^2 \Theta / \omega_B} \vec{E}(t) \exp\left(i \frac{nt\omega_B}{\sin^2 \theta}\right) dt, \quad (3.15)$$

dok je $\vec{E}(t)$ dato jednačinom (3.12). Rezultujuću jednačinu za \vec{E}_n možemo pojednostaviti, tako što centar koordinatnog sistema formiramo blizu elektrona, uz činjenicu da se posmatrač nalazi na velikoj udaljenosti u odnosu da radijus-vektor elektrona. Dalje, koristimo činjenicu da je kretanje elektrona ultrarelativističko, i samim tim se većina zračenja emituje u mali prostorni ugao oko pravca vektora brzine elektrona. Granice integracije za električno polje se pritom produžuju na celu realnu osu, što je takođe opravdano jer je podintegralna funkcija zanemarivo mala za velike vrednosti parametra po kom se integrirali. Koristeći prethodno navedeno, dobijamo za amplitude:

$$\vec{E}_n = n \frac{e}{\sqrt{3}\pi R c} \frac{\omega_B}{\sin^5 \theta} \exp\left(in \frac{\omega_B R}{c \sin^2 \theta}\right) \cdot \left(\vec{l} \frac{1}{\gamma^2} (1 + \gamma^2 \psi^2) K_{2/3}(y) + i \vec{m} \frac{\psi}{\gamma} \sqrt{1 + \gamma^2 \psi^2} K_{1/3}(y) \right), \quad (3.16)$$

uz definiciju varijable $y = \frac{n}{3\gamma^3 \sin^3 \Theta} (1 + \gamma^2 \psi^2)^{3/2}$. Vektor \vec{m} je definisan kao $\vec{l}_2 \cos \theta - \vec{l}_3 \sin \theta$. Srednja snaga izračena u n -tom harmoniku u prostorni ugao $d\Omega$ se dobija tako što zamenimo jednačinu (3.16) u jednačinu (3.14). $\widetilde{p_{n\Omega}}$ možemo da razložimo na dve komponente kao:

$$\widetilde{p_{n\Omega}} = \frac{c}{2\pi} |\vec{E}_n|^2 R^2 = \widetilde{p_{n\Omega}^1} + \widetilde{p_{n\Omega}^2}. \quad (3.17)$$

Komponenta 1 odgovara delu \vec{E}_n koji je paralelan sa \vec{l} , a komponenta 2 odgovara delu koji je paralelan sa \vec{m} . Sledi da su:

$$\begin{aligned} \widetilde{p_{n\Omega}^1} &= n^2 \frac{e^2 \omega_B^2}{6\pi^3 c \sin^{10} \theta} \frac{1}{\gamma^4} (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 K_{2/3}^2(y), \\ \widetilde{p_{n\Omega}^2} &= n^2 \frac{e^2 \omega_B^2}{6\pi^3 c \sin^{10} \theta} \frac{1}{\gamma^2} (1 + \gamma^2 \psi^2) \psi^2 K_{1/3}^2(y), \end{aligned} \quad (3.18)$$

Za veliko γ (što je ovde uvek zadovoljeno), većina energije se izrači u oblasti visokih brojeva harmonika, i tu možemo da smatramo da je spektar zračenja praktično kontinualan, pa možemo da napišemo:

$$\begin{aligned}\widetilde{p}_{\nu\Omega}^1 &= \widetilde{p}_{n\Omega}^1 \frac{dn}{d\nu} = \frac{3e^2\omega_B}{4\pi^2 c \sin^2 \theta} \gamma^2 (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 x^2 K_{2/3}^2(y), \\ \widetilde{p}_{\nu\Omega}^2 &= \widetilde{p}_{n\Omega}^2 \frac{dn}{d\nu} = \frac{3e^2\omega_B}{4\pi^2 c \sin^2 \theta} \gamma^4 \psi^2 (1 + \gamma^2 \psi^2) x^2 K_{1/3}^2(y),\end{aligned}\quad (3.19)$$

gde smo umesto broja harmonika n uveli frekvenciju $\nu = n \frac{\omega_B}{2\pi \sin^2 \theta}$, kao i $x = \nu/\nu_C$, $y = x/s(1 + \gamma^2 \psi^2)^{3/2}$. Definišemo kritičnu frekvenciju:

$$\nu_C = \frac{3}{4\pi} \omega_B \sin \Theta \gamma^3, \quad (3.20)$$

gde je Θ ugao između pravca ka posmatraču i pravca spoljašnjeg magnetnog polja (pritom je zadovoljeno $\Theta \approx \theta$). Iz definicije kružne žirofrekvencije $\omega_B = eB/\gamma m_e$ i relativističke energije $E = \gamma m_e c^2$ (tj. $\gamma^2 = E^2/m_e^2 c^4$), dobijamo (u cgs sistemu jedinica) jednačinu za kritičnu frekvenciju:

$$\nu_C = c_1 B \sin \Theta E^2. \quad (3.21)$$

Konstanta $c_1 = \frac{3e}{4\pi m_e^3 c^5}$ je u cgs sistemu jednaka $6.27 \cdot 10^{18}$. Snaga $p_{\nu\Omega}^i$ izračena u jedinični prostorni ugao na frekvenciji ν je:

$$p_{\nu\Omega}^i = \widetilde{p}_{\nu\Omega}^i \sin^2 \theta. \quad (3.22)$$

Koeficijent emisije ε_ν^i sinhrotronskog zračenja koje dolazi iz stacionarne oblasti sa ravnomernom raspodelom elektrona u vakuumu je

$$\varepsilon_\nu^i = \int_{4\pi} \int_0^\infty N(E, \vec{k}) p_{\nu\Omega}^i d\Omega dE, \quad (3.23)$$

gde je $N(E, \vec{k}) d\Omega dE$ broj elektrona sa vektorom brzine u prostornom uglu $d\Omega$ oko vektora \vec{k} sa energijom u intervalu od E do $E + dE$. Snaga $p_{\nu\Omega}^i$ je data jednačinom (3.22). Za izotropnu raspodelu vektora brzine elektrona, imamo da je:

$$\varepsilon_\nu^i = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty N(E) p_\nu^i dE, \quad (3.24)$$

gde je $p_\nu^i = \int_{4\pi} p_{\nu\Omega}^i d\Omega$. Usled anizotropije sinhrotronskog zračenja, integraljenje po $p_{\nu\Omega}^i$ može da se ograniči na integraljenje po prstenu, gde je većina energije izračena. Samim tim možemo da napišemo $d\Omega \approx 2\pi \sin \Theta d\psi$, a integraciju po $d\psi$ možemo da

produžimo od $(-\frac{1}{\gamma}, \frac{1}{\gamma})$ do $(-\infty, \infty)$ što neće uneti veliku grešku zbog male vrednosti podintegralne funkcije na ostalim intervalima. Odatle sledi:

$$p_\nu^i = \int_{4\pi} p_{\nu\Omega}^i d\Omega \approx 2\pi \sin \Theta \int_{-\infty}^{\infty} p_{\nu\Omega}^i d\psi = \frac{3e^2}{2\pi c} \omega_B \sin \Theta \gamma^2 x^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (1 + \gamma^2 \psi^2)^2 (K_{2/3}(\frac{x}{2} \sqrt{(1 + \gamma^2 \psi^2)^3}))^2 \right) d\psi \text{ za } i = 1$$

$$\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \gamma^2 \psi^2 (1 + \gamma^2 \psi^2) (K_{1/3}(\frac{x}{2} \sqrt{(1 + \gamma^2 \psi^2)^3}))^2 \right) d\psi \text{ za } i = 2. \quad (3.25)$$

Integrali su jednaki, respektivno:

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left(\int_x^{+\infty} K_{5/3}(z) dz + K_{2/3}(x) \right) \text{ za } i = 1$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{3}\gamma x} \left(\int_x^{+\infty} K_{5/3}(z) dz - K_{2/3}(x) \right) \text{ za } i = 2. \quad (3.26)$$

Odatle sledi da je snaga:

$$p_\nu^i = \int_{4\pi} p_{\nu\Omega}^i d\Omega \approx \frac{\sqrt{3}e^3}{2mc^2} B \sin \Theta (F(x) \pm G(x)), \quad (3.27)$$

uz definiciju funkcija F i G kao:

$$F(x) = x \int_x^{+\infty} K_{5/3}(z) dz$$

$$G(x) = x K_{2/3}(x), \quad (3.28)$$

gde su K odgovarajuće modifikovane Beselove funkcije druge vrste reda 5/3 i 2/3, na kompleksnom z . Odatle je koeficijent emisije jednak:

$$\varepsilon_\nu^i = \frac{1}{2} c_3 B \sin \Theta \int_0^\infty N(E) (F(x) \pm G(x)) dE. \quad (3.29)$$

Konstanta $c_3 = \frac{\sqrt{3}e^3}{4\pi m_e c^2}$ je jednaka $1.87 \cdot 10^{-23}$ u cgs sistemu jedinica. Ukupni koeficijent emisije je onda suma $\varepsilon_\nu = \varepsilon_\nu^1 + \varepsilon_\nu^2$, odnosno

$$\varepsilon_\nu = c_3 B \sin \Theta \int_0^\infty N(E) F(x) dE. \quad (3.30)$$

Kako radimo u prostoru impulsa, odnosno $N(E) dE = 4\pi p^2 f(p) dp$, konačna jednačina za emisivnost je:

$$\varepsilon_\nu = 4\pi c_3 B \sin \Theta \int_0^\infty p^2 f(p) F(x) dp. \quad (3.31)$$

Glava 4

Radio-evolucija ostataka supernovih

Dinamička evolucija ostatka supernove, kao što smo videli, može da se podeli na četiri faze: faza slobodnog širenja, adijabatska ili Sedovljeva faza, izotermalna ili radijativna faza, i disipacija. Evolucija prve dve faze može da se spoji i opiše jednom aproksimativnom relacijom (Arbutina 2017)

$$\frac{1}{2}u_0^2 = \frac{k_1 E_0}{k_2 M_0 + R\dot{M}/v_w + 4\pi R^3 \rho_0/3}, \quad u_0 = \frac{dR}{dt}. \quad (4.1)$$

M_0 je masa izbačene materije (eng. *ejecta*), E_0 je energija eksplozije, $\rho_0 = \mu m_H n_H$ ($\mu \approx 1.4$ je molarna masa) je gustina MZM, \dot{M} je stopa gubljenja mase (u Sunčevim masama po godini), a v_w je brzina zvezdanog vetra. Konstanta k_1 se dobija iz uslova da, kada $R \rightarrow \infty$, brzina i radijus ostatka teže Sedovljevom rešenju:

$$R = 1.15 \left(\frac{E_0}{\rho_0} \right)^{\frac{1}{5}} t^{\frac{2}{5}}. \quad (4.2)$$

Konstanta k_1 je jednaka $\frac{2\pi}{3}0.2116$, a konstanta k_2 je jednaka $\frac{2k_1 E_0}{M_0 v_0^2}$, gde je v_0 brzina slobodnog širenja ostatka. Gustina se sastoji iz homogenog i izotropnog dela koji potiče od zvezdanog vetra, odnosno:

$$\rho = \rho_0 + \frac{\dot{M}}{4\pi v_w R^2}. \quad (4.3)$$

Pitanje radio-evolucije ostatka supernove je usko povezano sa tzv. relacijom između površinskog sjaja i prečnika ostatka, ili $\Sigma - D$ relacijom. Srednji površinski sjaj ostatka je definisan kao:

$$\Sigma_\nu = \frac{L_\nu}{\pi^2 D^2}, \quad (4.4)$$

gde je D prečnik (u parsecima), a L_ν luminoznost u radio-području. Kako je luminoznost jednaka:

$$L_\nu = \varepsilon_\nu \frac{4\pi R^3}{3} f = \frac{16\pi^2 \varepsilon_\nu D^3}{8 \cdot 3} f, \quad (4.5)$$

gde je f *volume-filling factor*, odnosno faktor popunjenosti ostatka, dobijamo konačno:

$$\Sigma_\nu = \frac{2}{3} \varepsilon_\nu f D. \quad (4.6)$$

Ako je emisivnost stepena funkcija od prečnika, onda $\Sigma - D$ relacija ima oblik:

$$\Sigma_\nu = AD^{-\beta}, \quad (4.7)$$

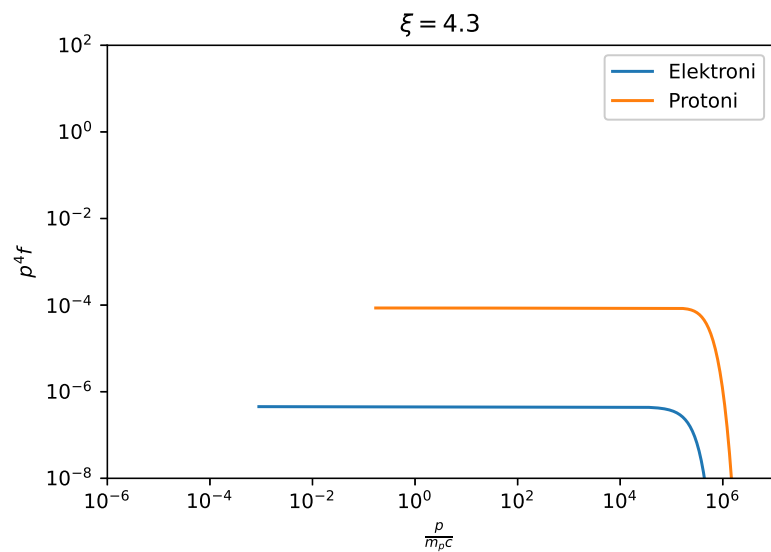
gde su A i β konstante (barem u nekim fazama evolucije). Ovu relaciju možemo da razmatramo teorijski ili empirijski. Empirijska $\Sigma - D$ relacija je usko povezana sa određivanjem udaljenosti. Određivanje udaljenosti do raznih objekata je jedan od najvećih problema u astronomiji. Kako je površinski sjaj objekta Σ_ν , veličina koja je nezavisna od udaljenosti, poznavanje udaljenosti do objekata nekom drugom metodom, možemo da izvršimo kalibraciju $\Sigma - D$ relacije i primenimo je na objekte čije udaljenosti ne znamo (preko $d = D/\theta$). Empirijskom $\Sigma - D$ relacijom su se bavili Shklovskii (1960b), Poveda i Woltjer (1968), Milne (1970), Berkhuijsen (1973), Mathewson i Clarke (1973), Green (1984), Case i Bhattacharya (1998), Urošević (2002), Arbutina, Urošević i dr. (2004), Arbutina i Urošević (2005), Urošević i dr. (2005), Pavlović, Urošević, Vukotić i dr. (2013), Pavlović, Dobardžić i dr. (2014), i mnogi drugi. Za diskusiju o selekcionim efektima u određivanju $\Sigma - D$ relacije, videti Green (1984), Green (1991), Green (2014). Prvi radovi u vezi $\Sigma - D$ relacije nisu pravili razliku između različitih klasa OSN (usled nedostatka posmatračkih podataka), već su smatrali da su svi parametri ostataka isti (kao što su energija eksplozije, masa izbačene materije, brzina slobodnog širenja, itd.), međutim kasnije je pokazano da se ovi parametri značajno razlikuju između ostataka. Usled toga, prihvaćeno je da ne postoji jedna $\Sigma - D$ relacija koja opisuje sve ostatke. Glavno pitanje je da li postoji $\Sigma - D$ relacija za neke klase ostataka. Teorijskom $\Sigma - D$ relacijom su se bavili Shklovskii (1960a), Lequeux (1962), Poveda i Woltjer (1968), Kesteven (1968), Reynolds i Chevalier (1981), Duric i Seaquist (1986), Berezhko i Völk (2004), i drugi. Iako je vrlo teško usled ogromnog broja procesa koji su uključeni, razumevanje teorijske $\Sigma - D$ relacije je ključno. Teorijska $\Sigma - D$ relacija je praktično ekvivalentna razumevanju radio-evolutivnih traka OSN, i tom problemu možemo da pristupimo analitički ili numerički, kao u Pavlović, Urošević, Arbutina

i dr. (2018). U sledećoj glavi, pored generisanih radio-spektara dobijenih na osnovu modela razmatranog u ovom radu, daćemo kao primer moguće radio-evolutivne trake za brze udare kod ostataka supernovih.

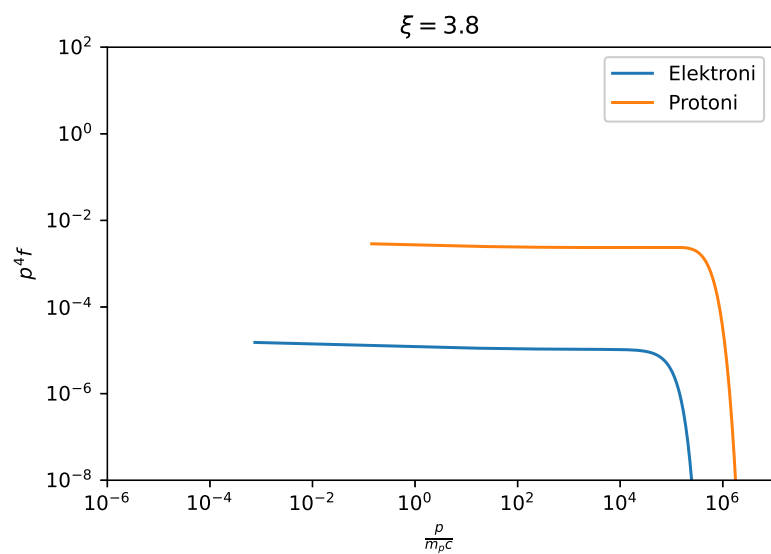
Glava 5

Rezultati

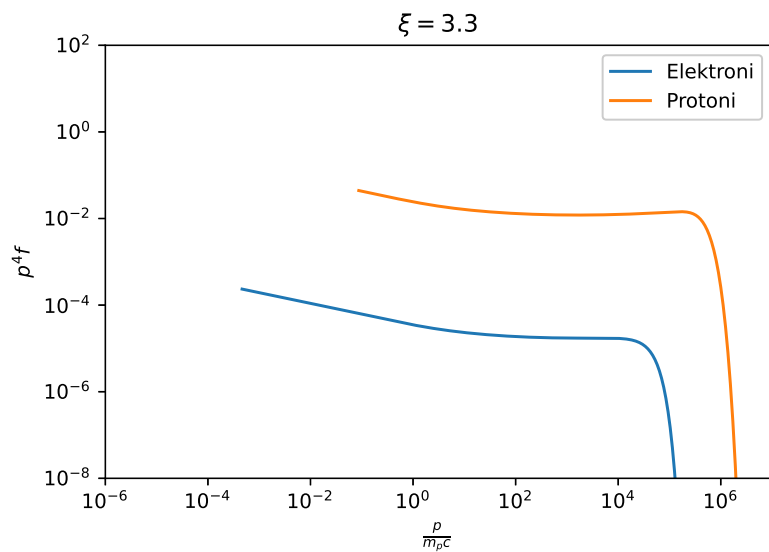
Osnovni zadatak ovog rada bio je pisanje modula u programskom jeziku Python, koji, na osnovu zadatog nelinearnog modela ubrzavanja koji uključuje zagrevanje elektrona, tj. datog spektra netermalnih elektrona, računa njihovu sinhrotronsku emisiju. Stoga, na početku ovog poglavlja dajemo tri primera spektra čestica (Slike 5.1, 5.2 i 5.3) i sinhrotronskog radio-spektra (Slike 5.4, 5.5 i 5.6) za slučajeve test-čestica, umereno modifikovanog i jako modifikovanog udara ($\xi = 4.3, 3.8$ i 3.3 , respektivno). Izuzev ovih vrednosti za parametar ubrizgavanja ξ , svi ostali parametri u tri primera su isti. Temperatura je 10^4K , a magnetno polje je $5.3775\mu\text{G}$ za $v_A = 11.7\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Za Alfvenov parametar zagrevanja ζ , ι i j koristimo $\zeta = 0.5$, $\iota = 1$, $j = 3$. Prečnik ostatka je zadat kao 10 pc , a brzina udara je $u_0 = 20000\frac{\text{km}}{\text{s}}$. Brzine ovog reda veličine bi odgovarale početnim fazama evolucije supernovih tipa Ia. Okolna koncentracija čestica je $n_0 = 1\frac{1}{\text{cm}^3}$. Kao rezultat, za Mahov i Alfven-Mahov broj dobijamo $M_{S,0} = 1205.7$, $M_{A,0} = 1705.1$. Umesto $\sin\Theta$ smo u jednačini (3.31) uzeli $\langle\sin\Theta\rangle$, odnosno usrednjenu vrednost po uglovima, i ona je $\langle\sin\Theta\rangle = \frac{1}{2}\int_0^\pi\sin^2\Theta d\Theta = \frac{\pi}{4}$. Faktor popunjenosti je 0.25 , koliko se dobija za ljusku debljine oko 10% poluprečnika.



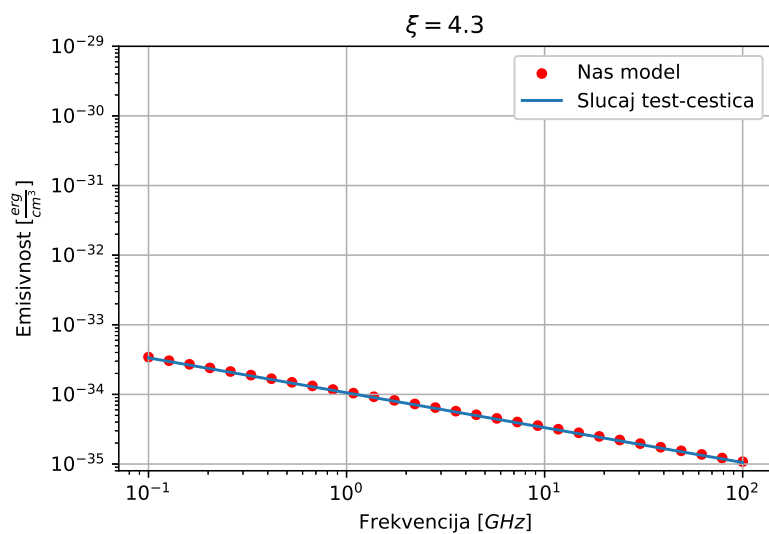
Slika 5.1: Spektar čestica za nemodifikovan udar sa $\xi = 4.3$.



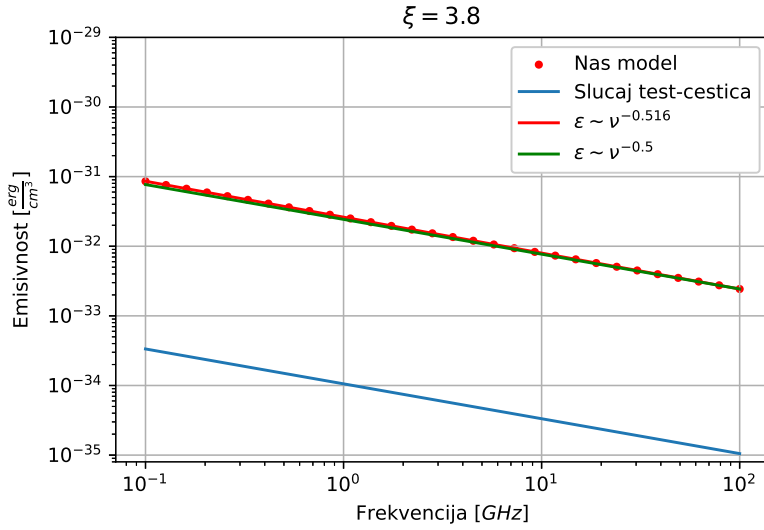
Slika 5.2: Spektar čestica za umereno modifikovan udar sa $\xi = 3.8$.



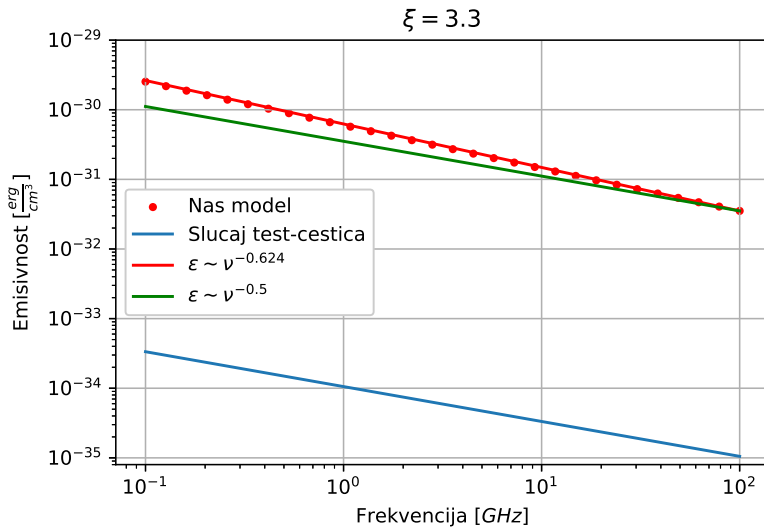
Slika 5.3: Spektar čestica za jako modifikovan udar sa $\xi = 3.3$.



Slika 5.4: Spektar sinhrotronskog zračenja za nemodifikovan udar sa $\xi = 4.3$ u poređenju sa *test-particle* modelom.



Slika 5.5: Spektar sinhrotronskog zračenja za umereno modifikovan udar sa $\xi = 3.8$ u poređenju sa *test-particle* modelom i očekivanim teorijskim krivama $\varepsilon \sim \nu^{-\alpha}$ sa $\alpha = 0.5$ i 0.516 .



Slika 5.6: Spektar sinhrotronskog zračenja za jako modifikovan udar sa $\xi = 3.3$ u poređenju sa *test-particle* modelom i očekivanim teorijskim krivama $\varepsilon \sim \nu^{-\alpha}$ sa $\alpha = 0.5$ i 0.624 .

Za slučaj test-čestica vidimo da postoji dobro slaganje našeg numeričkog modela sinhrotronskog zračenja sa analitičkim izrazom za emisivnost datim u Pacholczyk (1970). U slučaju modifikovanih udara, primećujemo da spektri zadržavaju oblik

stepenog zakona, nagib im je nešto strmiji, ali su iznad analitičke krive za emisivnost za slučaj test-čestica. Sinhrotronska emisivnost direktno zavisi od broja čestica kosmičkog zračenja tj. efikasnosti ubrizgavanja η , za koju očekujemo da bude veća za modifikovani slučaj (i zaista, za $\xi = 4.3$, $\eta = 1.6 \cdot 10^{-6}$, dok je za $\xi = 3.3$, $\eta = 0.0015$).

S druge strane, spektar čestica kod modifikovanih udara je konkavan, za čestice veće energije je blaži, a za manje energije čestica strmiji od standardnog spektra u slučaju test-čestica $f(p) \propto p^{-4}$. To bi značilo da veći doprinos emisiji imaju elektroni niže energije tj. impulsa $p \gtrsim p_{inj}$, bliži subshock-u. Za slučaj $\xi = 3.8$ dobijamo kompresije $R_{tot} = 4.063$, $R_{sub} = 3.907$, dok za slučaj $\xi = 3.3$ dobijamo $R_{tot} = 4.463$, $R_{sub} = 3.402$, odnosno, ako je energetska indeks $\Gamma = (R_{sub} + 2)/(R_{sub} - 1)$ i spektralni indeks $\alpha = (\Gamma - 1)/2$, imamo $\alpha = 0.516$ i 0.624 , respektivno. Ovi teorijski spektri su dodati na Slikama 5.5 i 5.6. Međutim, formule za sinhrotronsko zračenje podrazumevaju ultra-relativističke čestice tako da je pitanje da li integracija po raspodeli čestica $f(p)$ treba da ide od p_{inj} ili možda bolje od $m_e c$? Ovo bi trebalo ispitati u budućem radu. Kako ne postoji odgovarajuća teorija za prelazni režim između ciklotronskog i sinhrotronskog, jedino kako možemo učiniti rezultate bližim zahtevima teorije sinhrotronskog zračenja, jeste da razmotrimo još brže udare jer će kod njih p_{inj} biti bliži $m_e c$, te ćemo kao primere radio-evolutivnih traka razmotriti ogoljene supernove tipa Ib/c sa ekstremno brzim udarima (videti npr. Bell, Schure i Reville 2011).

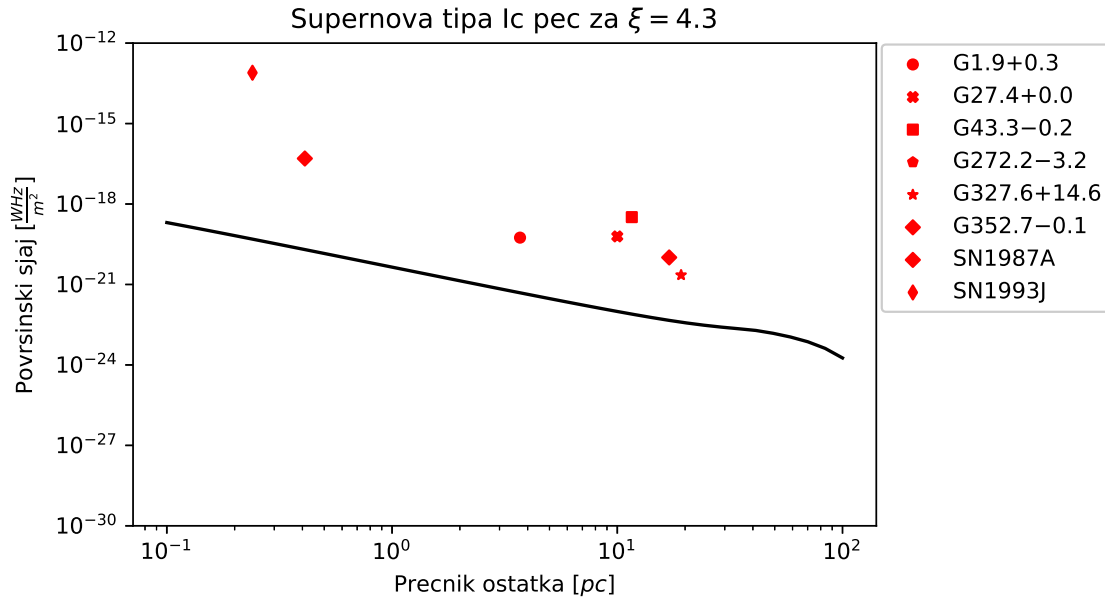
Na slikama 5.7, 5.8, 5.9 i 5.10 dati su $\Sigma - D$ dijagrami i evolutivne trake za SN Ib i Ic pec na frekvenciji od 1GHz, kao i za vrednosti parametra ubrizgavanja $\xi = 3.3$ i 4.3. Galaktički OSN (njih osam zbog preglednosti, ali se svi nagomilavaju u istom regionu), kao i podaci za njihove udaljenosti su uzeti iz Belovog rada (Bell, Schure i Reville 2011). Vrednosti fluksa na 1GHz za sve OSN osim poslednja dva su uzeti iz Grinovog kataloga (Green 2022). Uključili smo i dva OSN bliska našoj Galaksiji, SN1993J tipa Ib i SN1987A tipa II pec, za koju je početna brzina procenjena na 35000km/s (Bell, Schure i Reville 2011).

Kako podaci za SN1987A i SN1993J nisu dostupni u Grinovom katalogu, vrednosti fluksa (na 1.4GHz i 5GHz, respektivno) su uzeti iz radova Staveley-Smith i dr. (2007) i Weiler i dr. (2007), i one su 0.32 Jy i 100 mJy. Spektralni indeksi α su uzeti iz istih izvora, i oni su 0.75 i 0.81, respektivno. Uz pomoć njih (i $S_\nu \sim \nu^{-\alpha}$), dobijamo flukseve na 1GHz.

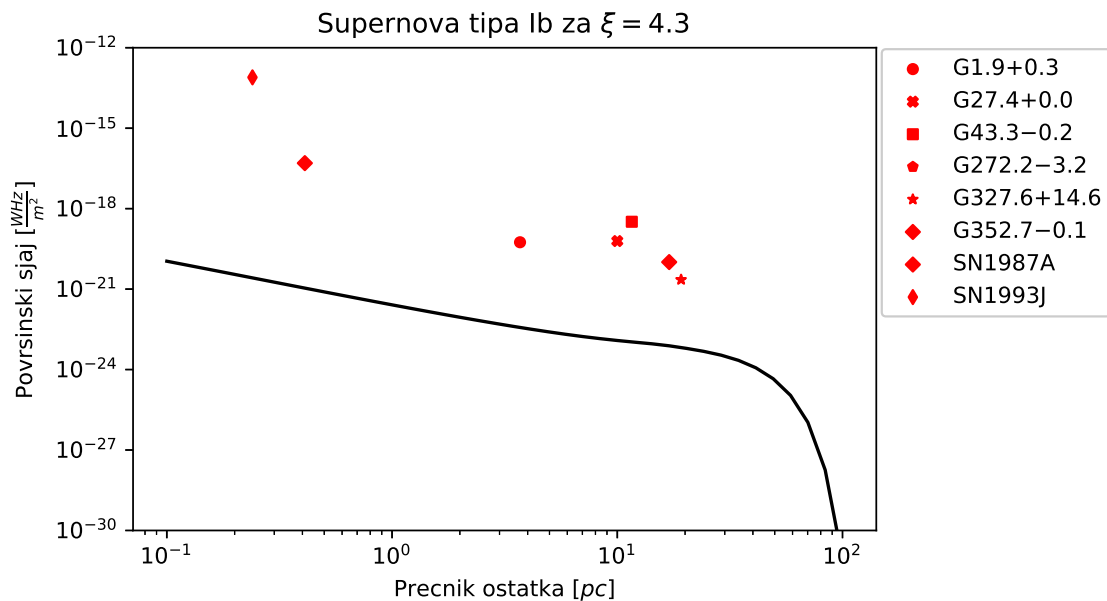
Slučaj jako modifikovanog udara ($\xi = 3.3$) daje trake koje dobro prolaze kroz

tačke, dok se krive za nemodifikovani udar nalaze nešto niže. Naravno, kako evolucija ne zavisi samo od ξ , već od velikog broja parametara (datih niže), njihovim pogodnim izborom takođe je moguće postići slaganje.

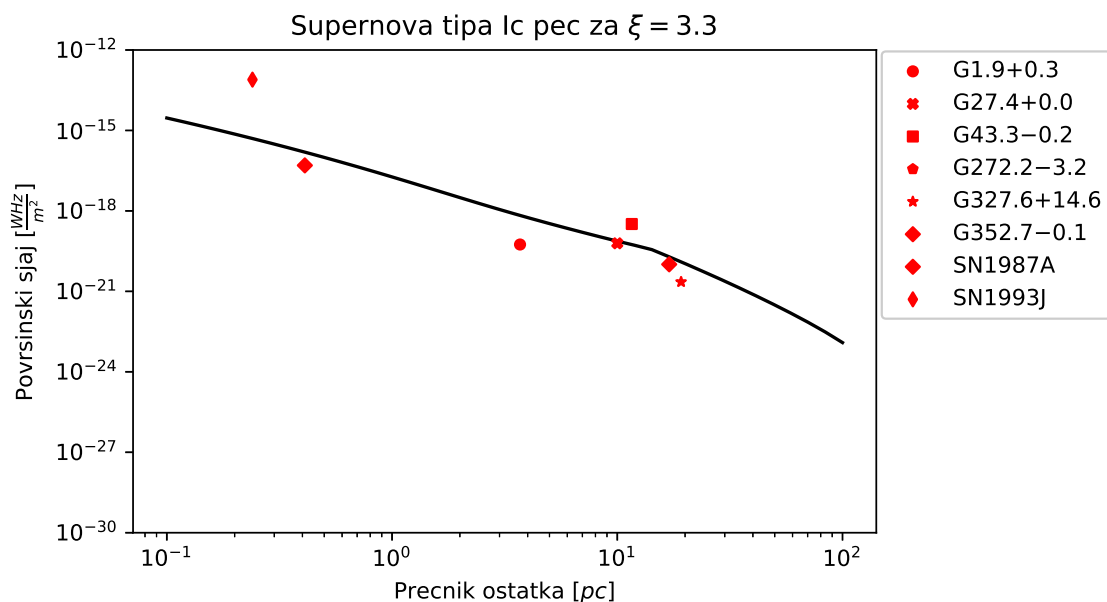
Brzina udara se dobija iz dinamičke formule (4.1) za prečnike ostataka D od 0.1 do 100pc. Brzina zvezdanog vetra je konstanta i jednaka $v_w = 10 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ za oba tipa supernovih. Brzina gubljenja mase je $\dot{M} = 10^{-4} \frac{M_\odot}{\text{yr}}$ za oba tipa. Za supernove tipa Ib, zadajemo brzinu slobodnog širenja $u_0 = 35000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, energiju eksplozije $E_0 = 10^{51}$ erg, i masu ostatka $M_0 = 0.5M_\odot$, dok za supernove tipa Ic pec (hipernove), zadajemo $u_0 = 75000 \frac{\text{km}}{\text{s}}$, $E_0 = 10^{52}$ erg, i $M_0 = 1M_\odot$.



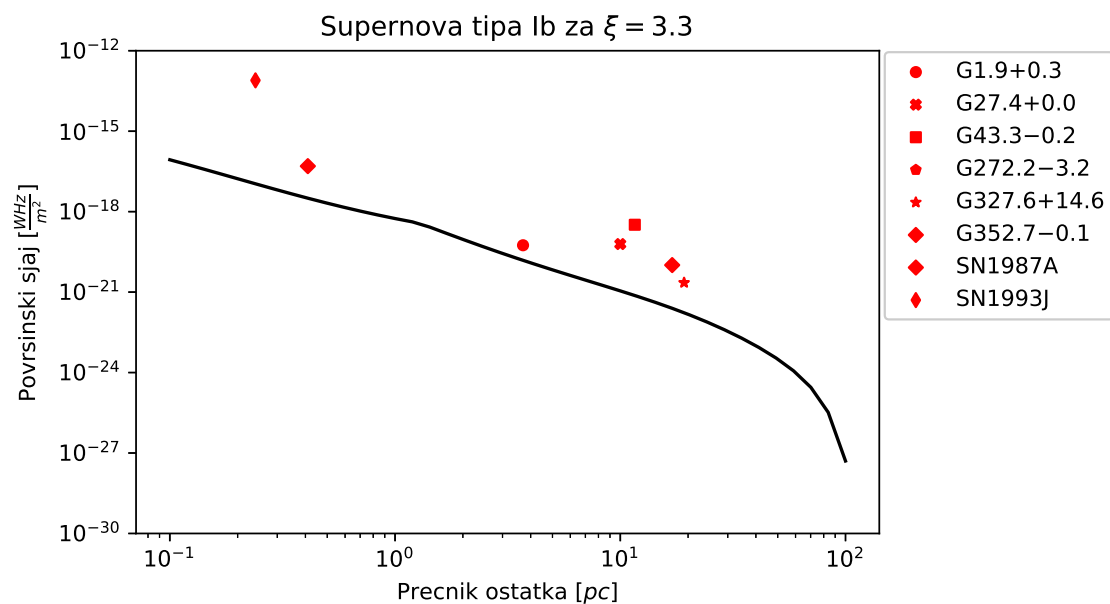
Slika 5.7: $\Sigma - D$ relacija za ostatke supernove tipa Ic pec na $\nu = 1\text{GHz}$ za $\xi = 4.3$, u poređenju sa ostacima iz Grinovog kataloga (Green 2022).



Slika 5.8: $\Sigma - D$ relacija za ostatke supernove tipa Ib na $\nu = 1\text{GHz}$ za $\xi = 4.3$, u poređenju sa ostacima iz Grinovog kataloga (Green 2022).



Slika 5.9: $\Sigma - D$ relacija za ostatke supernove tipa Ic pec na $\nu = 1\text{GHz}$ za $\xi = 3.3$, u poređenju sa ostacima iz Grinovog kataloga (Green 2022).



Slika 5.10: $\Sigma - D$ relacija za ostatke supernove tipa Ib na $\nu = 1\text{GHz}$ za $\xi = 3.3$, u poređenju sa ostacima iz Grinovog kataloga (Green 2022).

Glava 6

Zaključak

Cilj ovog rada bio je pisanje modula u programskom jeziku Python, koji na osnovu zadatog modela ubrzavanja čestica, odnosno datog spektra netermalnih elektrona, računa njihovu sinhrotronsku emisiju. Model ubrzavanja čestica je nelinearan, zasnovan na Blazijevom semi-analitičkom pristupu. Osnovna karakteristika ovog modificiranog Blazijevog modela jeste da, pored rezonantnih i nerezonantnih magnetnih nestabilnosti, uključuje zagrevanje elektrona (Arbutina 2023).

Dati su primeri spektara čestica i sinhrotronskog radio-spektra za slučaj nemodifikovanog i modificiranog udara. Za slučajeve nemodifikovanog udara tj. test-čestica dobijeno je dobro slaganje našeg numeričkog modela sinhrotronskog zračenja sa analitičkim izrazom za emisivnost datim u Paholjčikovoj knjizi (Pacholczyk 1970). U slučaju modificiranih udara, primećujemo da spektri zadržavaju oblik stepenog zakona, ali nešto strmijeg nagiba, iznad analitičke krive za emisivnost za slučaj test-čestica, što je očekivano, budući da je efikasnost ubrizgavanja veća.

Dodatno, na kraju rada, dati su $\Sigma - D$ dijagrami i evolutivne trake za brze udare kod SN Ib i Ic pec (Bell, Schure i Reville 2011) na frekvenciji od 1GHz, za vrednosti parametra ubrizgavanja $\xi = 3.3$ i 4.3. Slučaj jako modificiranog udara ($\xi = 3.3$) daje trake koje dobro prolaze kroz posmatračke tačke, dok se trake za test-slučaj nalaze nešto niže. Naravno, kako evolucija zavisi od velikog broja parametara, a ne samo od ξ , njihovim pogodnim izborom takođe je moguće postići slaganje. U budućem radu planirana je detaljnija analiza modela sinhrotronske emisije i radioevolucije, na većem uzorku i sa većim brojem različitih modela za SN tipa Ia, Ib/c i II, sa različitim parametrima eksplozije (energija, masa) i različitom gustinom okolne sredine, kao jednim od ključnih parametara u evoluciji.

Literatura

- Amato, E. i Pascale Blasi (2009). „A kinetic approach to cosmic-ray-induced streaming instability at supernova shocks”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 392.4, str. 1591. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2008.14200.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2008.14200.x).
- Arbutina, Bojan (2017). *Evolution of supernova remnants*. Sv. 97. Publications of the Astronomical Observatory of Belgrade, str. 1.
- (2023). „Nonlinear diffusive shock acceleration of cosmic rays: quasi-thermal and non-thermal particle distributions”. u: *European Physical Journal Plus* 138.9, 863, str. 863. DOI: [10.1140/epjp/s13360-023-04500-5](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04500-5). arXiv: [2309.08772](https://arxiv.org/abs/2309.08772) [[astro-ph.HE](https://arxiv.org/abs/2309.08772)].
- Arbutina, Bojan i Dejan Urošević (2005). „ Σ - D relation for supernova remnants and its dependence on the density of the interstellar medium”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 360.1, str. 76. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2005.09033.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2005.09033.x).
- Arbutina, Bojan, Dejan Urošević i dr. (2004). „L-D dependence for supernova remnants and its connection with the Σ -D relation”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 350.1, str. 346. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.07654.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.07654.x).
- Arbutina, Bojan i Vladimir Zeković (2021). „Non-linear diffusive shock acceleration: A recipe for injection of electrons”. u: *Astroparticle Physics* 127, 102546. DOI: [10.1016/j.astropartphys.2020.102546](https://doi.org/10.1016/j.astropartphys.2020.102546).
- Axford, W.I., E. Leer i G. Skadron (1977). „The Acceleration of Cosmic Rays by Shock Waves”. u: *15th International Cosmic Ray Conference* 11, str. 132.
- Bell, A.R. (1978). „The acceleration of cosmic rays in shock fronts”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 182.2, str. 147. DOI: [10.1093/mnras/182.2.147](https://doi.org/10.1093/mnras/182.2.147).

- Bell, A.R., K.M. Schure i B. Reville (2011). „Cosmic ray acceleration at oblique shocks”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 418.2, str. 1208. DOI: [10.1111/j.1365-2966.2011.19571.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2011.19571.x). arXiv: [1108.0582](https://arxiv.org/abs/1108.0582).
- Berezhko, E.G. i Donald Ellison (1999). „A Simple Model of Nonlinear Diffusive Shock Acceleration”. u: *The Astrophysical Journal* 526.1, str. 385. DOI: [10.1086/307993](https://doi.org/10.1086/307993).
- Berezhko, E.G. i H.J. Völk (2004). „The Contribution of Different Supernova Populations to the Galactic Gamma-Ray Background”. u: *The Astrophysical Journal* 611.1, str. 12. DOI: [10.1086/421937](https://doi.org/10.1086/421937). arXiv: [0404307](https://arxiv.org/abs/0404307) [[astro-ph](#)].
- Berkhuijsen, E.M. (1973). „Galactic continuum loops and the diameter-surface brightness relation for supernova remnants”. u: *Astronomy and Astrophysics* 24, str. 143.
- Blandford, Roger i J.P. Ostriker (1978). „Particle acceleration by astrophysical shocks”. u: *Astrophysical Journal* 221, str. 29. DOI: [10.1086/182658](https://doi.org/10.1086/182658).
- Blasi, Pascale (2002a). „A novel approach to non linear Shock acceleration”. u: *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements* 110, str. 475. DOI: [10.1016/S0920-5632\(02\)01539-6](https://doi.org/10.1016/S0920-5632(02)01539-6). arXiv: [0111529](https://arxiv.org/abs/0111529) [[astro-ph](#)].
- (2002b). „A semi-analytical approach to non-linear shock acceleration”. u: *Astroparticle Physics* 16.4, str. 429. DOI: [10.1016/S0927-6505\(01\)00127-X](https://doi.org/10.1016/S0927-6505(01)00127-X). arXiv: [0104064](https://arxiv.org/abs/0104064) [[astro-ph](#)].
- Caprioli, Damiano i dr. (2009). „Dynamical feedback of self-generated magnetic fields in cosmic ray modified shocks”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 395.2, str. 895. DOI: [10.48550/arXiv.0807.4261](https://doi.org/10.48550/arXiv.0807.4261). arXiv: [0807.4261](https://arxiv.org/abs/0807.4261).
- Case, Gary i Dipen Bhattacharya (1998). „A New Σ -D Relation and Its Application to the Galactic Supernova Remnant Distribution”. u: *The Astrophysical Journal* 504.2, str. 761. DOI: [10.1086/306089](https://doi.org/10.1086/306089). arXiv: [9807162](https://arxiv.org/abs/9807162) [[astro-ph](#)].
- Duric, Nebojsa i E.R. Seaquist (1986). „A Theoretical Interpretation of the Sigma-D Relation for Supernova Remnants”. u: *Astrophysical Journal* 301, str. 308. DOI: [10.1086/163900](https://doi.org/10.1086/163900).
- Fermi, Enrico (1949). „On the Origin of the Cosmic Radiation”. u: *Physical Review* 75.8, str. 1169. DOI: [10.1103/PhysRev.75.1169](https://doi.org/10.1103/PhysRev.75.1169).
- Ferrand, Gilles (2010). *Blasi's semi-analytical kinetic model of non-linear diffusive shock acceleration*.
- Ghavamian, Parviz (2016). *Electron-ion thermal equilibration in collisionless shocks*. *Supernova Remnants: An Odyssey in Space After Stellar Death*, p. 68.

- Ghavamian, Parviz, J. Martin Laming i Cara Rakowski (2007). „A Physical Relationship between Electron-Proton Temperature Equilibration and Mach Number in Fast Collisionless Shocks”. u: *The Astrophysical Journal* 654.1, str. 69. DOI: [10.1086/510740](https://doi.org/10.1086/510740). arXiv: [0611306 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0611306).
- Green, D.A. (1984). „Statistical studies of supernova remnants”. u: *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society* 209.3, str. 449. DOI: [10.1093/mnras/209.3.449](https://doi.org/10.1093/mnras/209.3.449).
- (1991). „The Distribution of Supernova Remnants in the Galaxy”. u: *Cosmic Rays, Supernovae and the Interstellar Medium* 337, str. 163.
- (2014). „The Galactic distribution of SNRs”. u: *Supernova Environmental Impacts, Proceedings of the International Astronomical Union* 296, str. 188. DOI: [10.1017/S1743921313009459](https://doi.org/10.1017/S1743921313009459). arXiv: [1309.3072](https://arxiv.org/abs/1309.3072).
- (2022). *A Catalogue of Galactic Supernova Remnants*. on-line at: <https://www.mrao.cam.ac.uk/surveys/snrs/index.html>.
- Kesteven, M. (1968). „Supernova remnants as radio sources”. u: *Australian Journal of Physics* 21, str. 739. DOI: [10.1071/PH680739](https://doi.org/10.1071/PH680739).
- Krymskii, G.F. (1977). „A regular mechanism for the acceleration of charged particles on the front of a shock wave”. u: *Akademiia Nauk SSSR, Doklady* 234, str. 1306.
- Lequeux, James (1962). „Mesures interférométriques à haute résolution du diamètre et de la structure des principales radio sources à 1420 MHz”. u: *Annales d'Astrophysique* 25, str. 221.
- Luther, H.A. (1968). „An Explicit Sixth-Order Runge-Kutta Formula”. u: *Mathematics of Computation* 22.102, str. 434. DOI: [10.1090/S0025-5718-68-99876-1](https://doi.org/10.1090/S0025-5718-68-99876-1).
- Mathewson, D.S. i J.N. Clarke (1973). „Supernova remnants in the Large Magellanic Cloud”. u: *Astrophysical Journal* 180, str. 725. DOI: [10.1086/152002](https://doi.org/10.1086/152002).
- McKenzie, James i Karl Westphal (1969). „Transmission of Alfvén waves through the earth's bow shock”. u: *Planetary and Space Science* 17.5, str. 1029. DOI: [10.1016/0032-0633\(69\)90107-X](https://doi.org/10.1016/0032-0633(69)90107-X).
- Milne, D. (1970). „Nonthermal galactic radio sources”. u: *Australian Journal of Physics* 23, str. 425. DOI: [10.1071/PH700425](https://doi.org/10.1071/PH700425).
- Morlino, Giovanni (2016). „Effects of self-generated turbulence on Galactic Cosmic Ray propagation and associated diffuse gamma-ray emission”. u: *Nuclear and Particle Physics Proceedings* 297, str. 39. DOI: [10.48550/arXiv.1706.06476](https://doi.org/10.48550/arXiv.1706.06476). arXiv: [1706.06476](https://arxiv.org/abs/1706.06476).

- Pacholczyk, A.G. (1970). *Radio astrophysics - Nonthermal processes in galactic and extragalactic sources*. Sv. 24. 9. San Francisco: W. H. Freeman, str. 269. DOI: [10.1063/1.3022939](https://doi.org/10.1063/1.3022939).
- Pavlović, Marko, A. Dobardžić i dr. (2014). „Updated radio Σ - D relation for galactic supernova remnants”. u: *Serbian Astronomical Journal* 189, str. 25. DOI: [10.2298/SAJ1489025P](https://doi.org/10.2298/SAJ1489025P).
- Pavlović, Marko, Dejan Urošević, Bojan Arbutina i dr. (2018). „Radio Evolution of Supernova Remnants Including Nonlinear Particle Acceleration: Insights from Hydrodynamic Simulations”. u: *The Astrophysical Journal* 852.2, 84, str. 12. DOI: [10.3847/1538-4357/aaa1e6](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aaa1e6). arXiv: [1711.06013](https://arxiv.org/abs/1711.06013).
- Pavlović, Marko, Dejan Urošević, Branislav Vukotić i dr. (2013). „The Radio Surface-brightness-to-Diameter Relation for Galactic Supernova Remnants: Sample Selection and Robust Analysis with Various Fitting Offsets”. u: *The Astrophysical Journal Supplement Series* 204.1, str. 4. DOI: [10.1088/0067-0049/204/1/4](https://doi.org/10.1088/0067-0049/204/1/4).
- Poveda, A. i L. Woltjer (1968). „Supernovae and Supernova Remnants”. u: *Astronomical Journal* 73, str. 65. DOI: [10.1086/110600](https://doi.org/10.1086/110600).
- Raymond, John i dr. (2023). „Electron–Ion Temperature Ratio in Astrophysical Shocks”. u: *The Astrophysical Journal* 949.2, 50, str. 16. DOI: [10.48550/arXiv.2303.08849](https://doi.org/10.48550/arXiv.2303.08849). arXiv: [2303.08849](https://arxiv.org/abs/2303.08849).
- Reynolds, S.P. i R.A. Chevalier (1981). „Nonthermal radiation from supernova remnants in the adiabatic stage of evolution”. u: *Astrophysical Journal* 245, str. 912. DOI: [10.1086/158868](https://doi.org/10.1086/158868).
- Shklovskii, Iosif (1960a). „Secular Variation of the Flux and Intensity of Radio Emission from Discrete Sources”. u: *Astronomicheskii Zhurnal* 37, str. 256.
- (1960b). „The Nature of Supernovae”. u: *Astronomicheskii Zhurnal* 37, str. 369.
- Staveley-Smith, L. i dr. (2007). „The Radio Evolution of SN1987A”. u: *Supernovae and Gamma-Ray Bursters. AIP Conference Proceedings* 937, str. 96. DOI: [10.1063/1.3682888](https://doi.org/10.1063/1.3682888).
- Urošević, Dejan (2002). „Empirical Sigma-D relations and main galactic radio loops”. u: *Serbian Astronomical Journal* 165, str. 27. DOI: [10.2298/SAJ0265027U](https://doi.org/10.2298/SAJ0265027U).
- (2020). „Determining the evolutionary status of supernova remnants”. u: *Nature Astronomy* 4, str. 910. DOI: [10.1038/s41550-020-01228-5](https://doi.org/10.1038/s41550-020-01228-5).
- Urošević, Dejan i dr. (2005). „The Σ - D relation for supernova remnants in nearby galaxies”. u: *Astronomy and Astrophysics* 435.2, str. 437. DOI: [10.1051/0004-6361:20042535](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20042535).

LITERATURA

- Vainio, R. i R. Schlickeiser (1999). „Self-consistent Alfvén-wave transmission and test-particle acceleration at parallel shocks”. u: *Astronomy and Astrophysics* 343, str. 303.
- Weiler, Kurt i dr. (2007). „Long-Term Radio Monitoring of SN 1993J”. u: *The Astrophysical Journal* 671.2, str. 1959. DOI: [10.1086/523258](https://doi.org/10.1086/523258). arXiv: [0709.1136](https://arxiv.org/abs/0709.1136).
- Zirakashvili, V.N. i F. Aharonian (2007). „Analytical solutions for energy spectra of electrons accelerated by nonrelativistic shock-waves in shell type supernova remnants”. u: *Astronomy and Astrophysics* 465.3, str. 695. DOI: [10.1051/0004-6361:20066494](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066494). arXiv: [0612717](https://arxiv.org/abs/0612717) [[astro-ph](https://arxiv.org/archive/astro)].

Biografija autora

Ivan Petraš je rođen u Pančevu, 15. jula 1999. Osnovnu školu završio je 2014. godine, a Elektrotehničku školu Nikola Tesla u Pančevu završio je 2018. godine. Po završetku srednje škole, iste godine upisuje Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, smer Astrofizika. Osnovne studije završava u julu, 2023. godine sa prosekom 8.41 i iste godine upisuje master studije, smer Astrofizika. Na trećoj godini osnovnih studija u organizaciji Katedre za astronomiju obavlja letnju praksu na Astronomskoj opservatoriji u Beogradu, pod mentorstvom dr Ane Vudragović. Tema prakse je bila „Modelovanje SAGA galaksija u infracrvenom delu spektra”, čiji su rezultati objavljeni u radu 2022. godine u časopisu *Astronomy & Astrophysics* (Vudragović, A., Petraš, I., Jovanović, M., Knežević, S., and Samurović, S., Implications of the Correlation between Bulge-to-Total Baryonic Mass Ratio and the Number of Satellites for SAGA Galaxies, *Astronomy & Astrophysics*, June 2022.).