SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
UNION DES SOCIÉTÉS DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R.P.F.Y.

PRVI KONGRES MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

BLED 8—12. XI. 1949

PREMIER CONGRÈS DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R.P.F.Y.

II

NAUČNA SAOPŠTENJA I OBAVEŠTENJA
COMMUNICATIONS ET EXPOSÉS SCIENTIFIQUES

Naučna knjiga

IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD, 1951

SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
UNION DES SOCIÉTÉS DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R. P. F. Y.

PRVI KONGRES MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

BLED 8—12. XI. 1949

PREMIER CONGRÈS DES MATHÉMATICIENS ET PHYSICIENS DE LA R.P.F.Y.

II

NAUČNA SAOPŠTENJA I OBAVEŠTENJA
COMMUNICATIONS ET EXPOSÉS SCIENTIFIQUES

Naučna Knjiga

IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD, 1951

Redaktor:
TATOMIR ANĐELIĆ

ŠTAMPA GRADSKO ŠTAMPARSKO PREDUZEĆE „GRADSKA ŠTAMPARIJA" SUBOTICA — 70-1

SADRŽAJ

SEKCIJA A.

SEKCIJA B.

IZ MOJEGA ŽIVLJENJA IN DELA

JOSIP PLEMELJ, LJUBLJANA

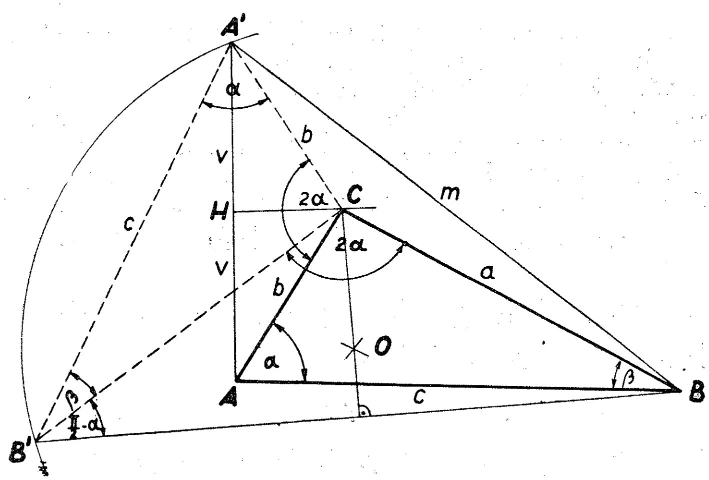
Dragi tovariši!

Prijatelji so mi sporočili, da je bila od več strani izražena želja, naj bi jaz kot nestor jugoslovanskih matematikov na našem I. kongresu spregovoril nekaj besedi o svojem delu, s katerim sem se ukvarjal, ali pa o doživetjih, ki sem jih imel v svojem dolgem strokovnem življenju. Če sem prav razumel Vašo željo, da naj bi se skupno nekoliko ozrli nazaj v moje življenje, potem se dokaj ujemamo v istem interesu. Star človek se najraje ozira v življenje nazaj, saj mu misel na prihodnost ničesar več ne obeta. Pri meni je, mislim, ta starčevska lastnost še posebno močno izražena; to je pač zaradi prav izrednih razmer, v katere sem bil postavljen po sili časa. Imam občutek, da me je narava usposobila za neko misijo v matematičnem svetu, usoda pa mi je po kratkih letih odtegnila pogoje, v katerih bi se bil mogel svoji naravi primerno udejstvovati. Že po dvanajstih letih univerzitetnega profesorstva in le malo več matematičnega publicističnega delovanja je nastopila prva svetovna vojna. Konec vojne je pomenil zame popoln preobrat tudi v mojem znanstvenem življenju. Zadnja deset letja pred prvo vojno so bila v stari cesarski monarniji karakterizirana z neprestanimi notranjimi boji med nemškim in drugimi narodi, pri prvem za nadvlado, pri drugih za enakopravnost. Ti boji so se od leta do leta stopnjevali. Zase se res nisem mogel pritoževati, dosegel sem vse pravočasno, bil v stiku s stanovskimi tovariši vsega sveta in z njimi sodeloval, posebno pa so me še moji kolegi iz Nemčije kakor iz Avstrije imeli čisto za svojega, čeprav so poznali moje poreklo. Malo jih danes še živi, vsi so mi ostali zvesti do zadnjega. Če smo se menili o politiki, sem videl, da hočejo biti pravični, pa vsa njihova vzgoja je bila taka, da niso mogli razumeti resničnega stanja. Mene pa je politična napetost in očitna krivičnost v stari državi tako razdvojila z državo samo, da sem, ko je Avstrija svetovno vojno cinično izzvala, z vsakim utripom svojega srca želel pogin te države. Na univerzi v Černovicah smo imeli misijo širiti slavo nemške kulture na vzhod in jaz sem si samo želel, da neham čimprej ni delovati v čast nemški znanosti in se posvetiti delu za svoj narod. Toda prišel sem domu v čisto drugačne razmere, potrebe in zahteve. Povojne težave v strokovnem stiku s svetom, moja tukajšnja strokovna osamljenost, potreba po organizacijski in upravni sposobnosti, ki je prav nič nimam, in še razni drugi vzroki v meni in izven mene so povzročili, da sem od tedaj skoraj da le še učitelj matematike, pa prav malo ustvarjalec novega. Prav zato se tako rad oziram nazaj na čase mlajših let, ko sem živel in sodeloval v sredi matematičnega sveta, zlasti pa me gane spomin na one čase, ko sem se še razvijel v šoli.

Svojih del, ki sem jih priobčeval, vam ne bom tu obnavljal. Zdi se mi, da tu ni primerna prilika za to. Če se želi kdo seznaniti s kakim mojim delom, je to vedno mogoče, saj so spisi natisnjeni. Morda pa ne boste nezadovoljni, če vam narišem tu neki doživljaj iz svojega gimnazijskega življenja. Zvezan je z nekim popolnoma elementarnim geometrijskim problemom, na katerega sem se v poznejšem času večkrat povrnil, ker se na ta doživljaj s posebnim veseljem spominjam. Za nekaj pa vas že naprej prosim: ne vzemite tega, kar vam bom pravil, kot bahanje, fanfaronado o mojem zgodnjem začetku. Res je, da sem si bil že v prvih letih gimnazije svest svoje superionosti v matematiki. Za to zavest so mi dali ne samo dijaki, ampak tudi učitelji dosti povoda. Snov iz matematike za vso gimnazije sem obvladal konec III. in v začetku IV. razreda in sem že, kolikor mi je bilo dostopno, posegal preko tega. Prevzel se pa kljub temu nisem nikdar; čutil sem se učenca med učenci, saj v humanističnih predmetih sem bil le srednji dijak.

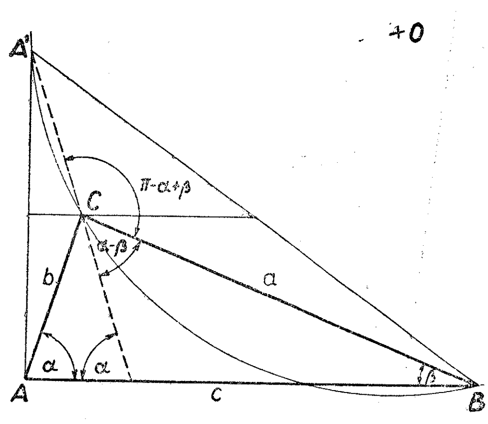
Ne bom prikrival — kdo nima nekaj samoljubja — da mi je zelo dobro delo, da so me dijaki tako respektirali, pa prav radi imeli; še posebno pa mi je bilo všeč, da me je moj učitelj prof. Vincenc Bornštner, ki me je dobil v četrtem gimnazijskem razredu takoj spoznal in očitno smatral, da sega moje znanje daleč preko razreda. S petim razredom pričenši me tudi ni niti enkrat v vsej višji gimnaziji vprašal za red, niti enkrat me ni klical pred tablo, kar je bila edina njegova navada, kadar je spraševal za red. Menda so mu zadoščali formalno za klasifikacijo pismeni izdelki. Tega ne morem več ugotoviti.

Sedaj pa dogodek: Bilo je v aprilu 1891. v petem razredu. Razred je imel dve vrsti klopi s prehodom v sredi in jaz sem sedel na krajnem notranjem sedežu zelo zadaj, mislim, da sta bili le dve klopi za menoj. Prof Borštner ni predaval; je le naložil iz knjige lekcijo za prihodnjo uro, poklical k tabli po dva učenca in tam obravnaval snov in pri tem zapletal ves razred v sodelovanje. Imel pa je navado, da je prav rad dajal geometrijske konstrukcijske naloge, ki jih je tedaj narekoval iz neke zbirke, ki jo je prinesel s seboj. Nekoč da med drugimi nalogo: Načrtaj trikotnik, ako je dana ena stranica, višina nanjo in diferenca kotov ob nji. Sošolci so se pred uro obračali name, če je bila naloga le količkaj težka. Ta naloga se po več urah vprašanim ni posrečila in jih je vprašal kako drugo. Imel je profesor Borštner navado, da je šel izpred katedra in se ustavil pred menoj, sedel k meni v klop in odtod spraševal. Nekoč reče, da moramo tudi to nalogo vendar že napraviti in ker se mu je najbrž sumljivo zdelo, da se še ni posrečila, se obrne kameni in me vpraša, če sem morda to konstrukcijo poskusil. Jaz sem mu rekel, da ne vidim poti do rešitve. Nato je rekel, da bo v prihodnji uri sam to pokazal. To me vzpodbudi, da si to reč ponovno ogledam in prišel sem na rešitev s pomožnimi točkami, črtami itd., da se mora zdeti človeškemu umu nedostopna, če mu je prikrita pot, ki je mene nujno privedla k cilju. V prihodnji uri je sedel profesor Borštner zopet ob meni v klopi. Po običajnem spraševanju učencev pravi: „No, sedaj pa napravimo še to konstrukcijsko nalogo.“ Jaz mu šepnem, da se mi je med tem rešitev posrečila in on reče: „No, pokažite mi, kako ste to napravili.“ Mislil je pač, da na listku. Jaz napravim kretnjo z vprašanjen: K tabli grem?



Slika 1

On reče: Dobro.“ Odmakne se mi in greva pred tablo. Jaz načrtam trikotnik ABC (sl. 1) z običajno analizo: Dana stranica $AB = c$, višina v_c in diferenca $0\angle\alpha - \beta\angle\pi$. Potegnimo, pravokotnice AA' iz A na stranico AB in naj bo $AA' = 2v_c$. Zvežimo A s C, tako da je $A'C = AC = b$ in potegnimo $A'B = m$. Ob daljici $A'C$ nanesimo na ven ob A' kot α in na levi krak $A'B' = c$. Tako nastali trikotnik $A'B'C \cong ABC$. Pri B' je $\sphericalangle A'B'C = \beta$ in $\sphericalangle A'CB' = \gamma$. Trikotnik BCB' je enakokrak in $\sphericalangle BCB' = 2\alpha$, tako da je tedaj $\sphericalangle BB'C = \frac{\pi}{2} - \alpha$. Sedaj je $\sphericalangle A'B'B = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$ in se da konstruirati nad stranico BA' kot obodni kot nekega kroga. Točko B' dobiš potem takoj, ker je $A'B' = c$. Ker je trikotnik BCB' enakokrak, leži točka C na simetrali stranice BB' tam, kjer ta seka paralelko z AB v dani višini v_c. S tem je trikotnik ABC načrtan. Profesor Borštner strmi, videč to kuriozno rešitev, prijemajoč se za glavo: „Aber um Herrgottswillen, das ist doch harsträubend, das ist doch menschenunmöglich auf so einen Einfall zu kommen; sagen Sie mir doch, was hat Sie zu dieser Idee geführt!“. Jaz sem mu rekel, da te čudne rešitve nisem uganil, ampak sem se, ker se mi rešitev ni hotela posrečiti, vprašal po trigonometrični določitvi trikotnika in geometrijska razlaga rešitve me je privedla na tole čisto geometrično umljivo konstrukcijo. S prof. Borštnerjem nisva nadalje govorila o tem, ampak je sam pokazal potem neko drugo lažjo rešitev (slika 2.), ki bi jo mogel posneti iz svoje konstrukcije, pa je nisem zapazil, ker sem imel



Slika 2

natančno začrtano pot. Mislim pa, tovariši, če se vam je zdelo toliko zanimivo, da ste sledili mojemu izvajanju, da se ne čudite mojemu profesorju, da se mu je zdela konstrukcija za človeško pamet nedosegljiva, ampak da ste v enakem položaju, ker imate še preko oči kopreno, ki vam prikriva pot, ki je v resnici nakazala ves potek načrtanja. Zato vam hočem to zapreko odvzeti. Trigonometrična rešitev je lahka: z višino iz oglišča C na stranico AB c razpade ta na dvadela v. cot α in v. cot β in je tedaj

$$v\,(\cot\alpha + \cot\beta) = c \text{ ali } v \sin(\alpha + \beta) = c \sin\alpha \sin\beta.$$

To se da pisati

$$2\,v \sin(\alpha + \beta) = c\,[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

Ker je $\alpha + \beta = \pi - \gamma$, se glasi ta enačba

$$2\,v \sin\gamma - c \cos\gamma = c \cos(\alpha - \beta).$$

Iz te enačbe je treba določiti kot γ. Najlažja pot je, če vpeljemo nek pomožni kot μ. Postavimo namreč

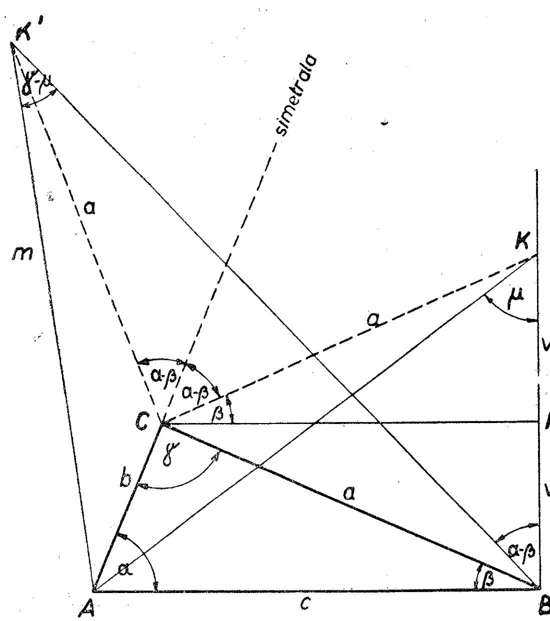
$$2\,v = m \cos\mu,\quad c = m \sin\mu.$$

Obe enačbe dasta enolično za μ nek oster kot in za m neko pozitivno dolžino.

Enačba za γ pa se sedaj glasi

$$m \sin(\gamma - \mu) = c \cos(\alpha - \beta)$$

To enačbo je možno tolmačiti kot sinusov stavek nekega trikotnika, v kojem sta c in m dve stranici in njuna nasprotna kota pa sta $\gamma - \mu$ ozir. $\frac{\pi}{2} \mp (\alpha - \beta)$. Pri navedeni konstrukciji je ta trikotnik $BA'B'$, kjer je $BA' = m$ in $A'B' = c$ in $\sphericalangle BB'A' = \frac{\pi}{2} - \alpha + \beta$ ter $\sphericalangle A'BB' = \gamma - \mu$, kar je lahko uvideti. Na tej moji konstrukciji je iskani trikotnik dvakrat načrtan uvidel pa sem nekaj poznaje, da je možno tolmačenje zgornje enačbe tudi s trikotnikom, kojega ena stranica je že kar AB. To privede na zelo lepo in kratko konstrukcijo (slika 3.). Na sliki je $K'AB$ oni trikotnik.



Slika 3

Daljica $CK = a$ je preko AC simetrično preložena v $CK' = a$ in obenem je $AK = AK' = m$. V Černovicah sem kot profesor govoril z dvema svojima učencema o tem elementarnem geometričnem problemu in rekel, da je moj srednješolski učitelj to nalogo narekoval iz neke zbirke. Prinesla sta mi res zbirko, kjer je bila med besedilom prav ona slika iz Borštnerjeve konstrukcije. Žal si nisem zapisal naslova te knjige, ki je brez dvoma bila zbirka prof. Borštnerja. V Ljubljani na klasični gimnaziji, t. j. našem nekdanjem zavodu, učiteljska knjižnica te knjige sedaj nima, pač pa sem od tam dobil knjigo Wiegand: Geometrische Aufgaben für Obergymnasien, kjer te naloga ni. Našel pa sem v nji nalogo: Načrtaj trikotnik, če je dana iz enega oglišča dolžina kotne simetrale, iz drugega oglišča pravokotnika na to simestralo, v tretnjem oglišču pa kot. Ta naloga se da, kako sem videli prevesti na prejšnjo in to privede na novo, prav lepo konstrukcijo. V celot, sem poleg dveh rešitev, ki sem jih dobil od drugod, sam našel še devet različnih rešitev, zadnja ima pripis: v noči 1. jan. 1940. po Silvestru 1939.

Tako je nastala iz priložnostnih pogledov na ta problem cela monografija tega, meni v spominu tako dragega vprašanja. Priobčil o tem elementarnem problemu nisem ničesar. Pač pa sem publiciral kot elementarni problem konstrukcijo pravilnega krogu včrtanega sedmerokotnika in sicer natančno, ne aproksimativno; tako enostavno rešitev s trisekcijo kota, kakor je bila doslej neznana in ki nujno privede do stare indijske oz. babilonske približne konstrukcije. Ta moj uspeh, ki izhaja tudi iz mojih srednješolskih let bo morda prav zato, ker se tiče vprašanja ki, izvira iz davnih časov, je preprostemu matematičnemu razumu dostopna in bo zato gotovo vedno izzivalo nekaj zanimanja, ta moj spis bo torej morda v prihodnosti preživel moja ostala dela, ki so se gibala na kraju tega, kar je bilo s tedanjimi pripomočki dosegljivega in kar je našlo po svetu nekaj priznanja.

Po tem mojem hvalisanju pa mi dovolite, da o sebi omenim tudi drugo stran, da napravim tako nekoliko ravnotežja. Rodil sem se l. 1873. na Bledu kot sin mizarja in malega kmeta. Oče pa mi je umrl, ko sem bil star eno leto. Po očetovi smrti je nastala gmotna stiska in sem le težko in slučajno dosegel, da me je moja mati, čisto preprosta kmečka ženska, dala v šolo v Ljubljano, kar sem si tako želel, ker sem videl, da so se šolali bogatega soseda otroci. S skromnimi prispevki od doma pa s precejšnimi podporami dobrih ljudi sem se preživel do konca IV. razreda, s petim razredom pričenši pa sem se vzdrževal s poučevanjem svojih sošolcev iz matematike prav lahko in popolnoma sam. Ker pa nisem imel od mladih let nobenega pravega voditelja in nadzornika izven šole se je v meni razvil silen čut samostojnosti in neodvisnosti in se mi ni bilo lahko pokoriti zahtevam drugih, to še posebno, ko sem se popolnoma osamosvojil. Tako mi ni bilo lahko vdati se pritisku disciplinskih predpisov in sem dobil že v 5. razredu 2 uri šolskega zapora, karcerja, v 6. razredu sem sedel 5 ur, seveda vedno z neizogibnimi posledicami glede ocene vedenja in šolnine. Po sedmem razredu pa me ravnatelj ni več hotel vzeti kot učenca na šolo. Študiral sem zadnje leto kot privatist, ostati sem moral v Ljubljani, ker sem bil navezan na zaslužek pri sošolcih. Vendar sem napravil maturo brez vsake zamude že v tem letu.

Končno mi dovolite, dragi tovariši, ki imate na srednjih šolah pred seboj učence, kakor sem bil jaz učenec pred svojimi učitelji, pa tudi vsi drugi med vami, ki ste napravili isto pot, da pred vami skromno izpolnim svojo dolžnost do svojih učiteljev s tem, da pristavim na njihov nagrobnik pripis svoje hvaležnosti. Vsi so že dolgo pod zemljo, bili se mi dobri, prizanesljivi in naklonjeni. Niti eden mi ni očital prestopkov ali količkaj zato poslabšal svojega odnosa do mene. Celo ozirali so se na moj posebni položaj in me niso spraševali novih lekcij, dokler jih nismo predelali v šoli. Mnogo lepega in za življenje koristnega sem dobil od njih. Blag jim bodi spomin.

V svojih poznejših letih sem skušal uravnati svoje življenje po smernicah, ki sem jih prejel v šoli. Za vse življenje sem imel v sebi kritika in sodnika. Tak sodnik ni prestrog, pa moja sodba o sebi je bila negativna, nezadovoljiva, nisem mogel biti zadovoljen s svojim življenjem in svojim delom iz vzrokov, ki so bili največ v meni samem in ne bom zaključil svojega življenja v zavesti, da je bilo srečno. Zato mi je v tolažbo, da mi je dana prilika, da morem pred Vami, ki ste najširši forum naše stroke v državi, sedaj na kraju svojega življenja izpovedati svoj konfiteor, Vi pa boste sodili.

RÉMINISCENCES DE MON PASSÉ ET DE MON TRAVAIL

PAR J. PLEMELJ

L'auteur nous rapporte parmi bien d'autres un détail de ses premières années de création dans la domaine de mathématiques; il nous raconte, comment alors qu'il était encore lycéen comme plus tard quand il fut devenu savant, un problème de construction l'a toujours attiré: construire un triangle d' après les données: c, h_c, $0 < \alpha - \beta < \pi$.

PROBLEMATIKA I ZNAČENJE DJELIMIČNO UREĐENIH SKUPOVA

ĐURO KUREPA, ZAGREB

Time što su takozvane direktne metode prodrle u matematiku i matematika postala naukom o skupovima ili množinama, mnogo se proširio doseg matematike i mnogo je prisnijom postala njena veza sa prirodom i životom. Uzimajući tako svagdašnji pojam kao što je skup (cjelina, množina, zbirka i sl.) kao osnovni objekt svojega istraživanja, postaje matematika još više povezanom sa svim drugim naukama.

U sklopu opće problematike, igra uređenost skupova znatnu ulogu. Sada ćemo objasniti najprije taj pojam.

1. Što znači da je skup uređen? Navedimo dva primjera.

Primjer 1. Ako M znači kakvu množinu skupova (na pr. množinu svih krugova u ravnini), pa ako za dva skupa A i B označujemo sa

$$A \subseteq B, \text{ odnosno sa } B \supseteq A,$$

činjenicu da je skup A sadržan u skupu B u smislu da je svaki element (broj, točka, atom, jedinka) skupa A ujedno i element (broj, točka . . . .) skupa B, dobili smo time mogućnost povezivanja među skupovima. Očito su vazda ispunjena ova dva uslova:

$A \subseteq A$ za svaki skup A (relacija $\subseteq$ je refleksivna ili povratna);

Ako je $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, onda je $A \subseteq C$ (relacija $\subseteq$ je tranzitivna ili prelazna).

Kraće se kaže, baš zato što su ispunjena ta dva uslova, da je svaka množina skupova uređena (potpuno ili nepotpuno s obzirom na relaciju sadržavanja $\subseteq$. Tako na primjer ako nam $K(S;r)$ označuje kuglu (nutrinu i omeđenje) sa središtem u S i radiusom r, onda je jasno da je

$$K(S,r) \subseteq K(S,r'), \text{ ako je } r \subseteq r'$$

i da za $r \subset r'$ neće biti $K(S,r) \subseteq K(S,r')$, što se kraće onda izražava sa

$$K(S,r) \subset K(S,r').$$

Ta osnovna poredbena relacija $\subseteq$ podsjeća nas na uobičajeni znak $\leqslant$, što ga upotrebljavamo kod realnih brojeva. Ali već tako jednostavan primjer kao promatranje skupa (K, L) od dvije kugle K, L koje se dotiču izvana ili od kojih jedna leži izvan druge, pokazuje, da ne mora biti ispunjena ni jedna od ovih relacija.

$$K \subseteq L \text{ ili } L \subseteq K,$$

tako da su s obzirom na poredbenu relaciju $\subseteq$ elementi K i L neuporedljivi, a svaki skup množina koji će sadržavati K i L kao svoje elemente bit će doduše uređenim, ali ne potpuno nego tek nepotpuno.

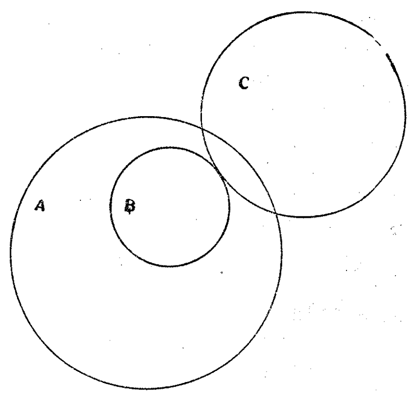
Prema tome kad se kaže, da je svaka porodica skupova uređena s obzirom na relaciju $\subseteq$, onda će tu još moći da nastupe razni slučajevi:

P r v i k r a j n j i s l u č a j : Sistem je potpuno uređen u smislu da za ma koja njegova dva člana bar jedan od ovih je sadržan u drugome.

D r u g i k r a j n j i s l u č a j : Sistem je potpuno neuređen u smislu da ni jedan član nije niti sadržan niti sadrži ikoji drugi član sistema osim samoga sebe.

O p ć i s l u č a j : Zadana množina sadrži i uporedljivih različitih elemenata i neuporedljivih elemenata.

Posljednje je slučaj sa skupom (A,B,C) kojemu su elementi tri nacrtana kruga A,B,C.



Sl. 1

P r i m j e r 2. Niz prirodnih brojeva je skup sastavljen od svih prirodnih brojeva uređen po veličini, t.j. tako da bude

1 ispred 2, 2 ispred 3, 3 ispred 4, ... pa tako dobivamo

$$1, 2, 3, 4, 5, \ldots\ldots\ldots\ldots n, n+1 \ldots\ldots\ldots$$ [1])

Ako je n prirodni broj, a n' isto tako, pa ako nam

$$n \leqslant n' \text{ odnosno } n' \geqslant n$$

znači isto što i činjenica da n' ne dolazi ispred n, onda se vidi da je s obzirom na relaciju $\leqslant$ skup N svih prirodnih brojeva potpuno uređen; vazda je naime ispunjena bar jedna od relacija

$$n \leqslant n', \; n' \leqslant n.$$

Zato i možemo govoriti o uređenom skupu

$$(N; \leqslant)$$

prirodnih brojeva kao nizu 1, 2, 3, ... prirodnih brojeva. Vidimo da

---

[1]) Inače, prirodni brojevi se definiraju kao t. zv. konačni skupovi o kojima se računa po izvjesnim zakonima; specijalno, dva skupa A i B shvaćena kao kardinalni brojevi smatraju se identički jednakima, ako postoji obostrano jednoznačna transformacija f sa svojstvom da bude $fA = B$. Primjetimo da je skup S konačan onda ako za svako obostrano jednoznačno preslikavanje f relacija $fS \subseteq S$ povlači $fS = S$.

niz prirodnih brojeva ima osnovno svojstvo minimuma: ne samo da sam niz prirodnih brojeva nego i svaki njegov dio ima svoj vlastiti, svoj sopstveni početni element. Kraće se kaže: skup prirodnih brojeva uređen po veličini jest dobro uređen. I skup cijelih brojeva je uređen i to potpuno, ali nije dobro uređen, jer nema početnog elementa.

Definicija. S obzirom na binarnu relaciju $\leqslant$ skup S je djelimično (parcijelno) uređen[1]) ako je relacija $\leqslant$ u S povratna i prelazna, t.j. ako je:

1) $a \leqslant a$ za svaki element skupa;

2) Ako je $a \leqslant b$, $b \leqslant c$, onda je $a \leqslant c$, pa bili a, b, c inače ma kakvi elementi skupa.

Po konvenciji, mjesto $a \leqslant b$ piše se također $b \geqslant a$, i obrnuto. Uređenje (potpuno ili ne) skupa povlači relaciju jednakosti, jer ćemo za dva elementa a, b uređena skupa reći da su jednaka i pisati $=$ onda i samo onda ako je i

$$a \leqslant b \text{ i } b \leqslant a.$$

Ako je

$$a \leqslant b \text{ ali nije } b \leqslant a, \text{ piše se}$$

$$a < b, \text{ odnosno } b > a,$$

i kaže da je $a(b)$ manje (veće) od $b(a)$ u užem smislu. Ako nije niti $a \leqslant b$ niti $b \leqslant a$, kaže se da su elementi a, b neuporedljivi s obzirom na $\leqslant$ i piše

$$a \parallel b \text{ odnosno } b \parallel a.$$

2. Nekoliko uređenja skupa N svih prirodnih brojeva. Skup N može se urediti i drukčije, a ne samo po „veličini" svojih elemerata; ako na primjer sve neparne brojeve stavimo ispred svih parnih brojeva, dobivamo potpuno uređenje:

$$(2.1) \qquad 1,3,5 \ldots . \; 2n+1, \ldots . . \; 2,4,6 \ldots . .$$

Ako naizmjence stavljamo prirodne brojeve ispred i iza svih promatranih brojeva, dobivamo ovakvo uređenje:

$$(2.2) \qquad \ldots 9,7,5,3,1,2,4,6,8,10, \ldots . .$$

koje nas potsjeća na cijele racionalne brojeve. Zbilja ovo uređenje (permutacija) skupa N može posve da preuzme ulogu svih cijelih racionalnih brojeva

$$-n \ldots . . -3, -2, -1, \text{ i } 1, 2, 3$$

Ako prirodne brojeve sijemo oscilirajući umetajući svaki put po jedan prirodni broj prešavši preko već prosutog prirodnog broja, dobivamo ovakvo uređenje[2]):

$$(2.3) \ldots . . 9, \ldots . 3, . . 10, . . 8, . . 11, . . 1, \ldots 7, . . 4, . . 6, \ldots 2, \ldots 5, \ldots .$$

---

[1]) Kraće bi se moglo govoriti naprosto o uređenim (potpuno ili nepotpuno) skupovima

[2]) Čitalac neka sam ispisuje brojeve 1, 2, 3, . . . po redu.

Ta permutacija (uređenje) skupa N može da posluži kao skup svih racionalnih brojeva; to je naime uređenje slično s uređenjem skupa R svih racionalnih brojeva, pa preko jednog sličnog preslikavanja skupa R možemo u permutaciju (2.3.) uvesti i računske radnje.

Ali, skup N se ne može tako urediti (potpuno ili nepotpuno) pa da dobivena permutacija skupa N preuzme ulogu skupa svih realnih brojeva, linearnog kuntinuuma. Ovaj je naime skup efektivno opsežniji od skupa N.

3. Transfinitni redni brojevi. Dobro uređeni skupovi. Već smo istakli osnovno svojstvo minimuma niza prirodnih brojeva; to svojstvo promatrano na proizvoljnim uređenim skupovima dovodi nas do transfinitnih rednih brojeva, jedne od najoriginalnijih tvorevina Cantora. Uređen skup je dobro uređen, ako taj skup kao i svaki njegov nepust dio ima svoj vlastiti početni element; i pust skup smatramo dobro uređenim.

Teorija dobro uređenih skupova jeste generalizacija izučavanja skupova prirodnih brojeva. Zato dobro uređeni skupovi i jesu nosioci izvjesnih svojstava koje nazivamo rednim brojevima. Po definiciji, pod rednim brojevima razumijevamo dobro uređene skupove; pritom dva slična dobro uređena skupa smatramo kao jedan te isti redni broj, analogno kao što na primjer različite izraze $\frac{2}{3}$ i $\frac{4}{6}$ smatramo jednim te istim realnim brojem.

Suma rednih brojeva definira se na zgodan način „nanošenjem".

Tako na primjer skupovi $2, 4, 6, \ldots$

$1, 3, 5, \ldots$

jesu dobro uređeni, te kao takvi pretstavljaju jedan te isti redni broj, t. zv. redni broj ω_0 odnosno ω, koji je pretstavljen nizom prirodnih brojeva $1, 2, 3, \ldots$, Dobro uređeni skup (1,2) pretstavlja redni broj drugi, isto kao i skupovi (5,7), $(3 \prec 1)$, $(a \prec b)$, itd. Dobro uređeni skup

$$2,3 \ldots n, n+1, \ldots, 1$$

pretstavlja određeni redni broj, i to $\omega+1$, koji je $< \omega$, što znači da se broj ω može preslikati pomoću sličnosti na početni komad od $\omega+1$, ali da ne važi obrat.

Ako promatramo niz A neparnih prirodnih brojeva, pa ako iza njega dolazi niz $2A$ svih dvostrukih neparnih brojeva

$$2.1, 2.3, \ldots\ldots 2.(2n+1), \ldots$$

pa poslije toga skup 2^2A svih brojeva $2^2(2n+1)$, itd., dobija se niz nizova prirodnih brojeva:

$$A, 2A, 2^2A, \ldots\ldots 2^k A, \ldots$$

ili explicite:

$$(3.1) \quad 1,3,5, \ldots, 2.1, 2.3, 2.5, \ldots\; 2^k.1,\; 2^k.2, \ldots 2^k(2n+1), \ldots$$

Tako preuređen skup N prirodnih brojeva definira određeni redni broj t. zv.

$$\omega+\omega+\omega+\ldots = \omega \cdot \omega = \omega^2.$$

„Nanošenjem“ broja „prvog“ iza čitavog broja ω^2 (na primjer tako da 1 premjestimo iz (3.1) stavljajući ga poslije svih drugih brojeva u gornjem skupu) dolazi se do broja ω^2+1, pa onda slično do ω^2+2 itd. Ako u (3.1) izdvojimo broj ω:

$$5, 3.5, \ldots, (2n+1)5, \ldots$$

pa ga stavimo iza svih ostalih članova skupa (3.1), dobit će se dobro uređen skup koji kao broj glasi $\omega^2+\omega$. Pođemo li od skupa P svih primbrojeva i broja 1:

$$P=(1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, \ldots .)$$

pa iza P stavimo niz $2P$, pa niz $2^2P \ldots$ pa niz $2^kP, \ldots \ldots$ dobit ćemo redni broj ω^2; stavimo li zatim nizove

$$3P,\ 3^2P, \ldots\ 3^kP, \ldots .$$

pa nizove $5P$, $5^2P, \ldots \ldots$ itd., dobit ćemo izvjesno preuređenje (permutaciju) skupa N kao nosilac novog rednog broja.

Sva moguća dobra uređenja skupa N prirodnih brojeva definiraju takozvane redne brojeve druge Cantorove klase, a sami ti brojevi shvaćeni kao elementi određuju dobro uređen skup svih prebrojivih rednih brojeva; taj skup shvaćen kao redni broj označuje se sa

$$\omega_1 \text{ ili } \Omega$$

pa je skup svih rednih brojeva koji su $<\omega_1$, t.j. skup sastavljen od 0, prirodnih brojeva i prebrojivih rednih brojeva, logični pendant linearnom kontinuumu t.j. skupu svih realnih brojeva.

Redni brojevi $<\omega_1$ ne mogu se svrstati u običan niz, jer ih ima efektivno više od prirodnih brojeva. Cantorov problem kontinuuma sastoji se u pitanju, da li se čitav linearni kontinuum može obostrano jednoznačno preslikati na skup svih rednih brojeva $<\omega_1$; drugim riječima, da li se, pomoću rednih brojeva $<\omega_1$ može uvesti individualno razlikovanje (prebrojavanje) skupa svih realnih brojeva.

Primjetimo da je pomoću rednih brojeva $<\omega_1$ Denjoy riješio problem obrata deriviranja uvođenjem takozvane totalizacije. Interesantan je Denjoyov način uređivanja skupa N, on polazi od reda oblika

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!},$$

pri čemu je $a_n = 0, 1, 2 \ldots . n-1$, i shvata taj red kao „neperovski“ razvoj sume a toga reda: on interpretira broj a_n bilo tako da je u uređenju skupa $(1,2, \ldots n)$ broj n po redu a_n-ti, bilo da u uređenju brojeva $1,2, \ldots n$ broj n dolazi baš poslije a_n pritom, ako je $a_n=0$, to znači da n stoji na prvom mjestu, ispred svih brojeva $1,2, \ldots n-1$.

4. Skup N kao mrežast skup. Ali skup N možemo bar djelimično urediti i ovako: Ako su m i n prirodni brojevi, neka

(4.1) $\qquad m \leqslant n$, odnosno $n \geqslant m$, znači da je m divizor broja n.

Očito je skup N uređen, ali ne potpuno, jer na primjer niti je $2 \leqslant 3$, niti $3 \geqslant 2$.

Tako djelimično uređen skup N možemo označiti sa

$$(N; \leqslant). \tag{4.2}$$

Broj 1 ostaje prvim elementom skupa (4.2.); u preostalom skupu ima neizmjerno mnogo prvih elemenata: to je skup P svih primbrojeva; njih možemo zvati brojem 1; slijedeći sloj sastavljen od svih prvih elemenata skupa

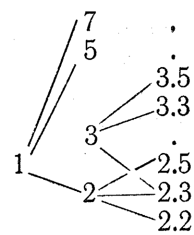
$$N \setminus (1,2,3,5,7,11,\ldots)$$

i ima oblik $P.P$ t.j. sastavljen je od produkata po dva primbroja; zatim dolazi sloj sastavljen od produkata od po tri jednaka ili nejednaka ($=$ ili $\neq$) primbroja, itd.

Shematski možemo skup (4.2) pretstaviti po slojevima ovako:

početni sloj (sloj 0)
sloj 1 $=$ skup P
sloj 2 $=$ skup $P.P$
sloj 3 $=$ skup $P.P.P$

odnosno



Na pojedinoj vertikalnoj liniji nema različitih neuporedljivih elemenata. Uporedljivi elementi spojeni su crtom, bilo direktno, bilo indirektno.

Interesantno svojstvo toga skupa jeste svojstvo što odgovara brojevima $M(a,b) =$ najveća zajednička mjera brojeva a i b; i $v(a,b) =$ najmanji zajednički višekratnik (multiplum) brojeva a i b. Pritom je $M(a,b)$ najveća minoranta brojeva $a{:}b$; označimo je u zavisnosti od a i b sa

$$a \cap b, \qquad \text{t.j.} \quad M(a,b) = a \cap b \tag{4.1}$$

Stavimo slično:

$$a \cup b = v(a,b). \tag{4.2}$$

Očito su ispunjeni ovi uslovi:

$\mathrm{I}^{\cup}$	$a \cup b = b \cup a$	(zakon komutacije)	$a \cap b = b \cap a$	$\mathrm{I}^{\cap}$
$\mathrm{II}^{\cup}$	$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$	(zakon asocijacije)	$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$	$\mathrm{II}^{\cap}$
$\mathrm{III}^{\cup}$	$a \cup (a \cap b) = a$	(zakon povezivanja)	$a \cap (a \cup b) = a$	$\mathrm{III}^{\cap}$

Na taj način, u tako uređenom skupu N postoje dva binarna operatora $\cup$ (spajanje) i $\cap$ (presjek), od kojih je svaki komutativan, asocijativan, a k tome međusobno povezani tako da uzastopni zahvat jednog i drugog operatora na neki element ostavlja ovog na miru.

Tako organiziran skup zove se mrežastim skupom ili strukturom.[1]) Prema tome djelimično uređen skup (N i L) je mrežast; tako organizovan skup možemo označiti i sa $(N; \cup, \cap)$, da time istaknemo postojanje

---

[1]) Engl. lattice; njem. Verband.

dvaju operatora $\cup$ i $\cap$ u N. U posljednje vrijeme teorija općih mrežastih skupova, zahvaljujući radovima raznih matematičara u Francuskoj, Njemačkoj, Rusiji i naročito Americi, pokazala je znatan uspjeh. Tako Bell u svojoj knjizi „Development of Mathematics", 1945 godine govori o djelimično uređenim skupovima kao centralnom djelu današnje matematike, ushićen time što je teorija specijalno mrežastih skupova povezala tako raznovrsne matematičke discipline kao što su: projektivna geometrija, teorija brojeva, matematička logika itd.

Ako se mrežastom skupu $(S, \cup, \cap)$

(4.3) relacija $a \cup b = b$

(4.4) piše $a \leqslant b$,

odmah se vidi da skup S postaje djelimično uređenim i da se operatori $a \cup b$ i $a \cap b$ svode na traženje supremuma i infimuma dvočlanog skupa $\{a, b\}$.

Ono što kod mrežastih skupova upada u oči to je potpuna dualnost između obih operatora $\cup$ i $\cap$, nešto što nam je poznato tek iz projektivne geometrije. To upada u oči tim više što kod grupolikih skupova - grupa - imamo samo jedan binaran operator koji je komutativan i asocijativan, a kod t. zv. tjelesa, dva binarna operatora, koji nastupaju sasvim nesimetrično: dok skup grupolik s obzirom na jedan operator, s obzirom na drugi operator grupolik je ne sam skup nego onaj njegov najveći dio koji nema neutralnog elementa s obzirom na prvi operator; nadalje se zahtjeva distributivnost užeg operatora prema širemu.

Primjer iz matematičke logike. Ako za dva suda a, b pišemo $a \leqslant b$ onda i samo onda, ako iz a slijedi b, tada je svaki skup sudova djelimično uređen - nepotpuno ili potpuno. Specijalni aksiomi i teoreme izvjesne aksiomatizirane teorije, na primjer algebre ili geometrije i sl., organizuju mrežast skup; tu se pod supremom $a \cup b$ (infimum $a \cap b$) sudova a, b, misli na sud koji je istinit onda i samo onda, ako je istinit bar jedan (oba) od zadanih sudova. Taj je primjer glasovit, jer je to prvi mrežast skup koji je svijesno uveden (Boole 1847, Peirce, 1867).

Primjer iz računa vjerojatnosti. Skup svih događaja jeste mrežast s obzirom na $\leqslant$, ako pod $a \leqslant b$ razumijevamo da iz a slijedi b u smislu da je vjerojatnost 0 da će se dogoditi a, a ne b.

Primjer iz projektivne geometrije. Promatramo li skup S raznih linearnih prostora (prazan skup v, tačke, pravce, ravnine, trodimenzione prostore itd.), pa ako za dva takova prostora a i b razumijevamo pod $a \cap b$ presjek tih prostora, a pod $a \cup b$ onaj najmanji prostor koji sadrži i a i b, onda vidimo da je skup S mrežast.

5. Razvrstani skupovi i problem kontinuuma. Skup C svih realnih brojeva ne možemo dobiti preuređujući skup N, jer je skup C efektivno opsežniji od N. Ali se možemo pitati, da li možemo provesti individualiziranje svih realnih brojeva pomoću preuređenja skupa N koji zadovoljavaju principi minimuma. Cantor je mislio da se to može. Ta glasovita Cantorova hipoteza kontinuuma privukla je pažnju mnogih matematičara. Nalažene su razne ekvivalencije, ali samo dokaz mogućnosti ili ne-

mogućnosti nije se pojavljivao sve do prije deset godina kad je Gödel-u pošlo za rukom da tu učini ozbiljan zahvat.

U drugu ruku, teoriju t. zv. dobro uređenih skupova, t.j. tako uređenih skupova da im svaki dio ima početni elemenat, razradio je Cantor do u tančine. Prirodno je da se promatraju i takovi djelimično uređeni skupovi, koji imaju svojstvo da im svaki uređeni dio ima početni element.

Nazovimo razvrstanim skupom svaki parcijalno uređen skup, koji ima svojstvo da mu svaki uređen dio ima prvi element.

Kao što se dobro uređen skup sastoji po redu od određenih elemenata koji se nižu jedan za drugim, tako se razvrstani skupovi sastoje od pojedinih slojeva (vrsta, generacija i sl.). Početni sloj razvrstana skupa S simbolički

$$(5.1) \qquad R_0 S$$

jest skup svih početnih elemenata skupa S; za svaki redni broj $\alpha > 0$ definira se sloj α, simbolički $R_\alpha S$, kao početni sloj skupa

$$S \setminus \bigcup_{\xi < \alpha} R_\xi S$$

koji je sastavljen od onih elemenata skupa S koji ne leže ni u jednom od prethodnih slojeva $R_\xi S$, $(\xi < \alpha)$, dakle

$$(5.2.) \qquad R_\alpha S = R_0 \left(S \setminus \bigcup_{\xi \leqslant \alpha} R_\xi S\right).$$

Prvi broj γ za koji je

$$(5.3) \qquad R_\gamma S = v \text{ (vacuum)}$$

zove se rang razvrstana skupa S i može se, u zavisnosti od S označiti sa

$$(5.4) \qquad \gamma S.$$

Na taj način za svaki razvrstan skup S imamo određen redni broj γS i množinu disjunktnih neuređenih skupova

$$(5.5) \qquad R_0 S, R_1 S, \ldots\ldots\ldots R_\alpha S, \ldots\ldots (\alpha < \gamma S)$$

koji naravno iscrpljuju čitav skup S dakle

$$(5.6) \qquad S = \bigcup R_\alpha S, \ (\alpha < \gamma S).$$

Kao tipičan primjer razvrstanih skupova možemo uzeti ma koji skup ljudi (živih ili mrtvih), pa definirati relaciju $\leqslant$ tako da za dva ljudska stvorenja a,b relacija $a \leqslant b$ znači da se a ili podudara sa b ili da je a direktni predak od b.

Razvrstani skupovi su vrlo prirodna generalizacija dobro uređenih skupova i upravo je pravo čudo da ih ljudi nisu prije promatrali. A međutim njihova teorija je u najužoj vezi baš sa samim problemom kontinuuma. Da se to vidi, navedimo ovaj dvostruki teorem:

Ako je W ma kakav razvrstan skup sa svojstvom da mu je svaki uređen dio najviše prebrojiv; ako je nadalje svaki sloj toga skupa[1]) konačan t.j.

$$< k\omega_0 \quad | \quad \leqslant k\omega_0$$

onda je rang toga skupa

$$< \omega_1 \quad | \quad \leqslant \omega_{\gamma(o)+1} \, .$$

Redni broj

$$\omega_1 \quad | \quad \omega_{\gamma(o)+1}$$

jest najmanji redni broj koji tome uslovu zadovoljava.

Da Cantorova hipoteza $2^{k\omega} = k\omega_1$ bude istinita, nužno je i dovoljno da iz

(5.7) $$bW \leqslant k\omega_0$$ slijedi jednakost broja

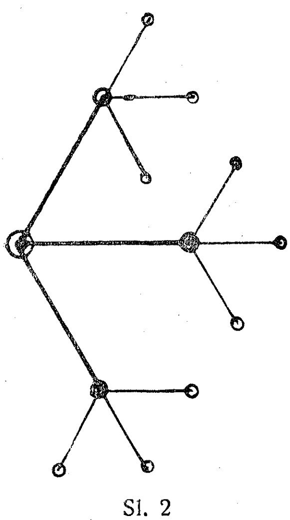
(5.8) $$k \sup_{W} \gamma W, \; (k, R_\alpha W < k\omega_0, \; \alpha < \gamma W)$$

i broja

(5.9) $$\sup_{W} k\gamma W, \; (k, R_\alpha W \leqslant k\omega_0, \; \alpha < \gamma W);$$

pritom je W ma koji razvrstan skup. Relacija (5.7) znači da je svaki uređen (neuređen) dio skupa W najviše prebrojiv. To znači da se u suštini kod Cantorove hipoteze radi o komutativnosti dvaju operatora.

6. Problem cijepanja. - Suslinov problem i razvrstano uređeni skupovi. Problem diferencijacije. U prirodi ima i takovih organizama koji se razmnažaju cijepanjem na dva ili više dijelova. Potomstvo jednog takvog mikroba možemo pretstaviti ovako (sl. 2).



Sl. 2

Tu vidimo da se radi o razvrstanom skupu, ali ujedno i takvom da je skup predaka svakog individuuma potpuno uređen, tako da nema neuporedljivih predaka jednog te istog individuuma. Takovi skupovi zovu se razvrstano uređeni (tableaux ramifiés).

Problem koji se tu postavlja jeste ovaj: ako zamislimo da se taj problem dijeljenja na tri dijela (pa i na neizmjerno mnogo dijelova) neprestano odvija, ali da s vremena na vrijeme ipak ugine po jedan jedini individuum, pitanje je da li nužno mora nastupiti momenat izginuća sveukupnog potomstva zadanog individuuma i prije no što se prijeđe generacija svakog reda $< \omega_1$, ili pak ima i tako sposobnih individua da izbjegnu smrti ako ona slučajno dođe da pokosi jednog iz njegove generacije tako da generacija (sloj reda α) postoji za svaki $< \omega_1$?

---

[1]) $k\omega_0$ je kardinalni broj od ω_0, t.j. kardinalni broj skupa N prirodnih brojeva. $\omega_{\gamma(o)}$ je prvi redni broj kojemu je kardinalni broj jednak kardinalnom broju kontinuuma.

Problem možemo shvatiti i ovako: pođemo li od određena segmenta uređena skupa, pa ga raskomadamo recimo na deset dijelova; sa svakim od tih komada činimo isto, i to bez prestanka, dok ne dođemo do atoma t.j. do nedjeljivih dijelova - tačaka; pita se da li se proces toga raskomadavanja nužno mora završiti nakon prebrojivo mnogo koračaja, ako nam je unapred poznato da u početnom skupu nema neprebrojivo mnogo disjunktnih segmenata.

Problem još nije potpuno riješen, a ekvivalentan je sa Suslinovim problemom koji pita da li je linearni kontinuum karakteriziran kao uređen neprekidan skup kojemu je svaki sistem disjunktnih intervala najviše prebrojiv.

Razvrstano uređeni skupovi, t.j. djelimično uređeni skupovi sa svojstvom da je skup predaka svakog elementa dobro uređen čine podesnu podlogu za izučavanje Suslinovog problema.

Inače, razvrstano uređeni skupovi nastaju shematizacijom procesa subdivizije.

7. Monotone transformacije djelimično uređenih skupova. Pravo bogatstvo i mnogostrukost djelimično uređenih skupova vidi se naročito kad se promatraju razna međusobna preslikavanja tih skupova. Ako svakom elementu x djelimično uređena skupa

$$(S_1\,; \leqslant_1) \tag{7.1}$$

pridijelimo određen elemenat $f(x)$ djelimično uređena skupa

$$(S_2\,; \leqslant_2), \tag{7.2}$$

pa ako iz $a \leqslant_1 b$ u skupu (7.1) slijedi $f(a) \leqslant_2 f(b)$ u skupu (7.2), veli se, da je f monotono uzlazno preslikavanje skupa (7.1) na skup (7.2).

Monotono uzlazno preslikavanje skupa $(S; \leqslant_1)$ na skup $(S_2 \leqslant_2)$ zove se monotono silazno preslikavanje skupa (7.1) na (7,2). Monotona preslikavanja jesu zajedničko ime za monotono uzlazna i monotono silazna preslikavanja.

Specijalno je jasno, što će se razumijevati pod monotono uzlaznim realnim funkcijama u zadanu djelimično uređenu skupu.

Kako se među djelimično uređenim skupovima ističu skupovi

$$(p(S)\,; \subseteq) \tag{7.3}$$

t.j. svi dijelovi određena skupa S, koje međusobno povezujemo relacijom $\subseteq$, promatraju se i monotona preslikavanja parcijalno uređenog skupa (7.3) na sama sebe. To preslikavanje ima odraza i u samom skupu S, koji time postaje topološkim prostorom ili naprosto prostornim skupom. Upravo je nevjerovatno, koliko se toga može reći o tako dobijenom prostoru i koliko toga već iz elementarne matematike ima korijena u činjenici, da na raznolike načine pridružujemo svakom skupu $X \subseteq S$ izvjestan skup $\overline{X} \subseteq S$, tako zv. zapremina skupa X, i to tako da većem skupu pripada i veća zapremina. U taj dio teorije skupova, koji se zove topologija, ne možemo ovdje više niti zalaziti. U vezi sa monotonim preslikavanjem parcijelno uređenih skupova javlja se mnoštvo raznih problema. Tako na primjer, ako se parcijalno uređen skup može rastaviti na dva (neprebrojljivo mnogo) dijela(ova), u svakom od kojih postoji čisto uzlazna realna funkcija, da li to onda važi i za sam skup?

Promatrajmo skup

$$(wh\,; \leqslant) \tag{7.4}$$

svih dobro uređenih dijelova skupa R racionalnih brojeva, pri čemu za dva dobro uređena skupa A i B relacija

$$A \leqslant B$$

iskazuje činjenicu da je skup A sličan s početnim komadom skupa B. Tad se može dokazati da je (7.4) razvrstano uređen skup i da u njemu postoji čisto uzlazna realna funkcija. Može li se pri tom zahtijevati da ova prihvaća samo racionalne vrijednosti?

Inače, postojanje čisto uzlaznih funkcija u nekom parcijalno uređenom skupu pruža dragocjen podatak za taj skup. Tako na primjer *ako u razvrstano uređenom neprebrojljivom skupu postoji čisto uzlazna realna funkcija, postoji u tom skupu neprebrojljiv neuređen dio.* Pitanje, da li isti zaključak važi i za svaki neprebrojljiv razvrstano uređeni skup, ekvivalentno je sa Suslinovim problemom.

8. *Kako nastaju djelimično uređeni skupovi?* Kad tako vidimo, da se djelimično uređeni skupovi javljaju skoro svuda, postavlja se pitanje da li možemo navesti postupak kako da prikažemo djelimično uređene skupove. Između krajnjih slučajeva: da je skup potpuno uređen, pa čak i potpuno dobro uređen do druge krajnosti, da je skup neuređen leži nepregledni broj prelaznih mogućnosti.

I tu je došlo do interesantne povezanosti između klasične matematike i novije teorije uređenih skupova.

Svi znamo za obične permutacije i za pojavu da je važno znati da li u zadanoj permutaciji ima i koliko ih ima tako zv. inverzija (derangementa) kako ih je G. Gramer nazvao prije dva vijeka. Međutim, ako imamo konkretnu permutaciju zadanih elemenata, recimo permutaciju

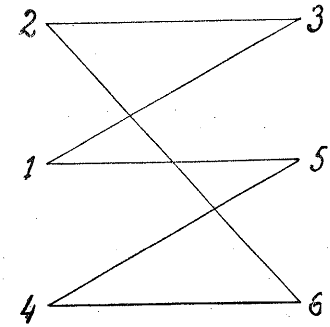
2 3 5 4 1 elemenata 1, 2, 3, 4, 5,

tada tu novu permutaciju t.j. preuređenje skupa 1, 2, 3, 4, 5, možemo interpretirati kao uređenje skupa koje nastaje superpozicijom zadanih potpunih uređenja. Tako će svakoj inverziji u zadanoj permutaciji odgovarati par neuporedljivih elemenata i obrnuto.

U gornjem slučaju imamo ovaj djelimično uređen skup:

$$\begin{tikzcd}[arrows=-] 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] \arrow[dr] & 5 \\ & & 4 \\ 1 & & \end{tikzcd}$$

tj. usporedljivi elementi su spojeni direktno ili indirektno, i to tako da svaki lijevi prethodi svakom desnom s kojim je povezan. Pa se postavlja problem: može li se svaki konačni skup od n elemenata dobiti superpozicijom dviju permutacija tih elemenata? Stvar ide za $n=2, 3, 4, 5$, ali već za $n=6$ ne ide, jer parcijalno uređeni skup[1]) sa shemom



ne može nastati superpozicijom dviju permutacija elemenata 1, 2, 3, 4, 5, 6, ali može superpozicijom triju permutacija na pr. ovih

$$\begin{matrix} 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, \\ 1, & 4, & 5, & 2, & 3, & 6, \\ 4, & 2, & 6, & 1, & 5, & 3. \end{matrix}$$

Ta činjenica ima odraza u strukturnoj razlici između naše ravnine i prostora, kao što ćemo pokazati na drugom mjestu. Ujedno ćemo pokazati i da kompleksni kontinuum kao i sve Descartes-ove prostore možemo shvatiti ne doduše kao potpuno uređene, ali kao nepotpuno uređene skupove, odakle proizilaze njihova opća topološka svojstva. Ujedno se pokazuje da se svako uređenje skupa S može shvatiti kao superpozicija izvjesnog broja potpunih uređenja (permutacija) toga skupa S.

9. Opća definicija djelimično uređenih skupova. Djelimično uređen skup je svaki sistem

$$(S\,;\approx\,;\leqslant)$$

sastavljen od tri stvari: prvo od određena skupa S, drugo iz određene relacije ekvivalentnosti (ravnopravnosti) $\approx$ i treće iz određene relacije uređaja $\leqslant$; pri tom važi uslov djelimične simetrije: ako za $a, b \in S$ važi $a \approx b$, onda važi i $a \leqslant b$, $b \geqslant a$.

Drugim riječima, uređena trojka

$$(S\,;\approx\,;\leqslant) \tag{9.1}$$

sastavljena od skupa S te binarnih relacija

$$\approx \text{ i } \leqslant \text{ u } S \tag{9.2}$$

jest djelimično (parcijelno) uređen skup (ili kraće uređen skup) onda i samo onda, ako za svaki $a, b \in S$ možemo reći da li je $a \approx b$ (a ekvivalentno b) ili nije $a \approx b$, te da li je $a \leqslant b$ (a manje ili jednako b) ili nije $a \leqslant b$. Pritom relacije $\approx$ i $\leqslant$ ispunjavaju ova tri uslova:

I. uslov povratnosti (refleksije): obje relacije $\approx$ i $\leqslant$ jesu u S povratne, t.j.

---

[1]) Primijetimo da je taj skup sličan sa skupom što je sastavljen od vrhova i strana nekog trokuta, kad se uredi relacijom inkluzije.

(9.3) $$a \approx a \qquad (a \varepsilon S)$$

(9.4) $$a \leqslant a \qquad (a \varepsilon S).$$

II. uslov prelaznosti (tranzitivnosti): obje relacije $\approx$ i $\leqslant$ jesu u S prelazne:

(9.5) ako je $a, b, c \varepsilon S$, te ako je $a \approx b$, $b \approx c$ onda je $a \approx c$;

(9.6) ako je $a, b, c \varepsilon S$, te ako je $a \leqslant b$, $b \leqslant c$ onda je $a \leqslant c$.

III. uslov djelimične simetrije: ako je $a, b \varepsilon S$, te ako je

(9.7) $$a \approx b$$

onda je

(9.8) $$b \approx a, \text{ te } a \leqslant b \text{ i } b \leqslant a.$$

Ako nam jednakost

(9.9) $$a = b$$

ima da znači isto što i sistem

(9.10) $$a \leqslant b, \ b \leqslant a;$$

ako nadalje

(9.11) $$a < b$$

ima da znači $a \leqslant b$ ali da nije $b \leqslant a$, onda se lako dokazuje da važe uobičajena pravila o $\leqslant$ i $<$; tako na primjer ovdje relacije $=$ i $<$ jesu također prelazne; ako je $a = b < c$, onda je $a < c$, itd.

PROBLÉMATIQUE DES ENSEMBLES PARTIELLEMENT ORDONNÉS

PAR GEORGES KUREPA

Ensemble partiellement ordonné est tout système

(1) $$(E; \sim; \leqslant)$$

constitué d'un ensemble E et de deux relations binaires $\sim$, $\leqslant$ vérifiant les trois conditions que voici:

1° (codition de reflexité) Les relations $\sim$, $\leqslant$ sont refléxives:

(2) $$a \sim a, \quad a \leqslant a, \quad (a \varepsilon E);$$

2° (condition de transitivité) Les relations $\sim$, $\leqslant$ sont transitives: si $a, b, c \varepsilon E$ et si

(3) $$a \sim b \sim c \text{ alors } a \sim c;$$

De même: si $a, b, c \in E$ et si

(4) $$a \leqslant b \leqslant c, \text{ alors } a \leqslant c.$$

3° (condition de symmétrie partielle) Si $a, b \in E$ et si

(5) $$a \sim b, \text{ alors } b \sim a \text{ et } a \leqslant b,\ b \leqslant a.$$

On donne plusieurs exemples d'ensembles partiellement ordonnés; en particulier, on fait mention de quelques ordinations partielles ou totales de l'ensembles N des nombres naturels telles que: l'ordination suivant la grandeur des nombres naturels, les bonnes ordinations de N et la considération des nombres transfinis ordinaux dénombrables de Cantor, l'ordination partielle de N par la relation $\leqslant$ ou

(6) $$m \leqslant n$$

veut dire que m est un diviseur de n; à ce propos, on fait mention que l'ensemble $(N, \leqslant)$ est une s t r u c t u r e dans le sens que quelsque soient les éléments $m, n \in N$, il existe dans $(N, \leqslant)$ le suprémum et l'infimum de ceux-ci (cf. Birkhoff).

On donne d'autres exemples de structures telles que: logique mathématque, la géometrie projective etc.

En particulier, on parle des e n s e m b l e s p a r t i e l l e m e n t b i e n o r d o n n é s c'est-à-dire de tout ensemble partiellement ordonné tel que chacun de ses sous-ensembles ordonnés soit bien ordonné; c'est que la classe des ensembles pareils est intimement lié à l'hypothèse du continu de Cantor. En particulier en désignant pour un ensemble partiellement ordonne X par

(7) $$R_0 X$$

l'ensemble des points initaux de X, on définit, par récurrence, pour tout ensemlbe partiellement bien ordonné

(8) $$W$$

le nombre ordinal

(9) $$\gamma W \text{ (le rang de } W)$$

et la suite des rangées de W;

(10) $$R_0 W, R_1 W, \ldots, R_\alpha W, \ldots, (\alpha < \gamma W)$$

de la manière suivante :

En posant pour tout ordinal β

(11) $$R_\beta W = R_0 (W \setminus U_\xi R_\xi W), (\gamma < \beta)$$

il y aura certainement des β vérifiant

(12) $$R_\beta W = \text{vide};$$

le premier ordinal pareil sera designe par γW.

En considérant des W dont tout ensemble ordonné est $\leqslant X_0$, on démontre la proposition suivante (Kurepa [7]).

Pour que l'hypothèse de Cantor

$$2^{\aleph} = \aleph_1$$

soit vraie, il faut et il suffit que le cardinal[1])

$$k \sup_W \sup \gamma W, \ (kR_\alpha W < k\omega_0, \ \alpha < \gamma W)$$

coincide avec le cardinal

$$\sup k\gamma W, \ (kR_\alpha W \leqslant k\omega_0, \ \alpha < \gamma W).$$

On fait mention de la suivante

Condition de ramification:

Les prédécesseurs de tout point de l'ensemble constituent un sous-ensemble ordonné, la condition intervenant dans l'étude de problème de Suslin. On en fait une application biologique. L'intérêt de la condition provient du théorème suivant (cf. Kurepa [4] p. 106, 124, 132):

Pour que la réponse au problème de Suslin soit affirmative, il faut et il suffit que, quel que soit l'ensemble partiellement bien ordonné vérifiant la condition de ramification précédente et jouissant de la propriété que chacun de ses sous-ensembles ordonnés (antiordonnés) soit $\leqslant \aleph_0$, soit lui-même au plus dénombrable.

Un chapitre fondamental des ensembles partiellement ordonnés c'est l'étude des transformation monotones (croissantes et décroissantes) de ceux-ci (cf. Kurepa [6]). La-dessus, il y a un grand nombre de problèmes non résolus; par exemple,

Si un ensemble part. ordonné E est réunion de deux ($\aleph_0$) ensembles dans chacun desquels il existe une fonction réelle strictement croissante, en existe-il une dans l'ensemble E lui-même?

Dans la famille wR des sous-ensembles bien ordonnés de l'ensemble ordonné R des nombres réels, ordonnée partiellement par la relation $\leqslant$ disant „être une section commenceante de", il y a une fonction réelle strictement croissante, mais on ne sait pas s'il existe une transformation strictement croissante de wR en R.

Enfin, étant donné la diversité extrême des ensembles partiellement ordonnés, le problème suivant se pose: peut-on générer d'une maniere uniforme tout ensemble partiellement ordonné?

Et fait interessant, la liason avec un vieux problème dans la théorie des permutation, celui des inversions (des dérangements de Cramer) résout le problème: un dérangement a lieu toutes les fois que deux éléments ne se trouvent pas dans la même relation d'ordre dans la permutation considérée et dans la permutation normale donnée.

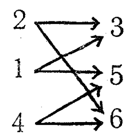
---

1) kX = le cardinal (la puissance) de X; par consequent, $k\omega_0 = \aleph_0$.

Bref, en superposant (cf. Kurepa [6_2], p. 487 en note) deux ordinations d'un même ensemble E en déclarant que le point a de E précède le point b de E si et seulement si a précède b dans les deux ordinations considérées, on obtient un ensemble partiellement ordonné.

D'une façon analogue, on peut composer une famille quelconque d'ordinations de E; on peut prouver qu'on obtient ainsi chaque ordination partielle de E.

L'exemple de l'ensemble partiellement ordonné donne le schéma,



dans lequel 2 précède 3 et 6
1 „ 3 et 5
4 „ 5 et 6, tandis que des autres élements sont incomparables entre eux, montre qu'il existe un ensemble part. ordonné E qu'on obtient en superposant trois ordinations totales de l'ensemble, soit, les ordinations que voici

1 ,	2 ,	3 ,	4 ,	5 ,	6
1	4	5	2	3	6
4	2	6	1	5	3

alors qu'on ne le peut pas obtenir en superposant deux ordinations totales de E.

L'auteur annoce un travail qui traitera l'ensemble des nombres complexes et tous les espaces cartésiens comme des espaces partiellement ordonnés, la structure topologique de ceux-ci étant une conséquence de leurs ordinations partielles.

Literatura:

Bell, The Development of Mathematics, N. York - London 1945
Birkhoff, The Lattice Theory, New York 1940
Bourbaki, N. Topologie générale, Paris 1940
Algébre, Paris, 1942
Denjoy A., L'enumeration transfinie, Paris, 1946
Hausdorff, Grundzüge der Mengenlehre, Leipzig 1914
Kurepa: Ensembles ordonnés ramifiés Thèse, Paris, 1935 (isto u Publ. Math. Belgrade, IV, 1935 1 - 138)
Ensembles lineaires et une classe de tableax ramifiés, (Tableaux ramifiés de M. Aronszajn) Publ. Math. Belgrade, 6, 1937 p, 129 - 160).
Transformations monotones des ensembles partiellement ordonnés, Revista de Sc. Lime, 1940, Ano 42,827-846; Ano 43,1941,483-500.

AKTUALNI PROBLEMI MODERNE TEORIJE PARCIJALNIH JEDNAČINA PRVOG REDA S JEDNOM NEPOZNATOM FUNKCIJOM

NIKOLA SALTIKOV, BEOGRAD

Sadržaj

Uticaj problema triju tela na razvitak teorije parcijalnih jednačina prvog reda. Teorija funkcionalnih grupa, diferencijalnih invarijanata i integrabilnog elementa.

UVOD

Problem triju tela koji je postavio Klero 1759 godine, a koji se njemu pokazao kao malo pristupačan za konačno rešenje, ipak je pružio najviše potstreka za napredovanje teorije parcijalnih jednačina prvog reda.

Kanonički sistem običnih diferencijalnih jednačina kretanja triju tela iznosi 18 jednačina sa 10 poznatih integrala. Medjutim, korelativna parcijalna jednačina traži, za rešenje dotičnog problema integraljenja, svega 9 integrala odgovarajućeg kanoničnog sistema, ali pod uslovom da bi se oni nalazili u naročitoj medjusobnoj vezi, naime u involuciji.

Pomenutih 10 integrala ovaj uslov ne zadovoljavaju i nisu u stanju da izdvoje traženih 9 integrala; a nove integrale niko nije uspeo da pronadje. Otud nastaje teškoća za rešenje posmatranog problema u konačnom obliku.

Prema tome, kako nije uspelo integraljenje posmatranog sistema, pojavila se težnja da se iskoriste poznati integrali za uprošćavanje diferencijalnih jednačina kretanja triju tela.

Jakobi je požnjeo, u ovom pogledu, najznačajniji uspeh time što je pokazao, 1842 godine, da je posmatrani problem ekvivalentan, sa teoriskog gledišta, poznatom problemu kretanja jedne tačke u trodimenzionalnom prostoru. Istina je da do sada ovaj rezultat ostaje neiskorišćen sa praktičkog gledišta. Jakobijevo otkriće pojavilo se kao sinteza opštijih posmatranja u oblasti parcijalnih jednačina, koje je Jakobi primenio za proučavanje i tumačenje kanoničkih osobina integrala problema triju tela.

Drugi važan pronalazak dugujemo Ž. Bertranu. On je pokazao da u jednačinama kretanja dva tela, na koje se takodje svodi posmatrani problem, broj promenljivih 12 može da se smanji na 9. Ali se pri tome gubi kanonički oblik diferencijalnih jednačina. Ovaj je bio zatim uspostavljen od strane E. Bura, koji je ponovo vratio jednačinama dotičnog kretanja kanonički oblik. Ova Bertranova i Burova ispitivanja otvorila su novu eru za stvaranje novijih metoda integraljenja parcijalnih jednačina.

U daljem razvitku njihove teorije odigrali su važnu ulogu radovi S. Li-a i A. Majera u toku poslednje četvrtine prošlog veka. Naročito su istraživanja S. Li-a uticala na stvaranje modernih metoda integraljenja parcijalnih jednačina i na ispoljavanje aktualnih problema integraljenja.

I PROBLEM INTEGRALJENJA KANONIČNOG SISTEMA OBIČNIH JEDNAČINA I KORELATIVNE PARCIJALNE JEDNAČINE

Uočimo kanonički sistem $2n$ običnih diferencijalnih jednačina:

$$\left.\begin{array}{c}\dfrac{dx_i}{dt} = \dfrac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dfrac{dp_i}{dt} = -\dfrac{\partial H}{\partial x_i}, \\ (i = 1, 2, \ldots, n)\end{array}\right\} \tag{1}$$

sa $2n$ nepoznatih funkcija

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n. \tag{2}$$

od nezavisno promenljive t.

Odgovarajuća linearna parcijalna jednačina s jednom nepoznatom funkcijom f od sviju $2n$ promenljivih veličina (2) i t, posmatranih kao nezavisno promenljive, a koja služi za odredjivanje integrala (prvih integrala) sistema (1) glasi

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (H, f) = 0, \tag{3}$$

gde se Poasonove zagrade odnose samo na promenljive (2). Korelativna sistemu (1) nelinearna parcijalna jednačina prvog reda s jednom nepoznatom z od promenljivih (2) prve klase, tj. od prvih n veličina i od t piše se ovako

$$p + H(t, x_1 x_2, \ldots, x_n, p_1 p_2, \ldots, p_n.) = 0, \tag{4}$$

gde se $p, p_1, \ldots \ldots p_n$ (kanoničke promenljive druge klase) smatraju sada kao parcijalni izvodi

$$p = \frac{\partial z}{\partial t}, p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i} \quad (i, = 1, 2, \ldots, n).$$

Problemi integraljenja parcijalne jednačine (4), korelativnog kanoničkog sistema (1) i istovetne jednačine (3), bili su pokrenuti od strane Hamiltona, i produbljeni i široko uopšteni od Jakobija. On je pokazao da će se jednačina (4) integraliti pomoću kvadrature čim bude poznato n integrala u involuciji kanoničkog sistema (1). Ako broj nepoznatih integrala u involuciji sistema (1) bude manji od broja n, onda se red kanoničkog sistema smanjuje za dvaput toliko jedinica, koliko je poznato dotičnih integrala. Otud dolazi važan zaključak.

Ako mehanički problem dopušta integral živih sila i tri integrala površina, pri čemu funkcija sile ne zavisi od promene vremena, onda se red odgovarajućeg kanoničkog sistema smanjuje za 6 jedinica. To proizlazi otud što sistem dotičnih poznatih integrala izdvaja tri integrala u involuciji.

Jakobi nije uspeo objaviti sve svoje radove za svog života. Dok se čekalo na objavljivanje njegovih radova, više od Jakobijevih pronalazaka bilo je pronadjeno u Francuskoj, gde su bila sa velikom pažnjom praćena Jakobijeva istraživanja. Posećujući Francusku, Jakobi je pisao, 1842 god., svom bratu, u Petrograd: „. . . . . u Parizu je svaki detalj mojih radova bolje poznat nego što sam ja to mogao izdaleka pretpostaviti.“

Liuvil, Bertran i Bur su nastavili, sa velikim uspehom, Jakobijevo istraživanje na polju parcijalnih jednačina.

Naročito se istakao Liuvil sa svojom teorijom integrala kanoničkih jednačina (1) pod opštijom pretpostavkom o rešljivosti po kanoničkim promenljivim druge klase sistema *n* integrala u involuciji jednačina (1), nego što je to slučaj kod Jakobija. Liuvilovi rezultati, koji su bili objavljeni 20 godine pre nego što je S. Li uveo nove pojmove o svojim integralima, mnogo su premašili pomenute Liove integrale — i po dubini, i po opštosti zamisli.

II. DVA NOVIJA PROBLEMA O SMANJIVANJU REDA KANONIČKOG SISTEMA I BROJA PROMENLJIVIH U PARCIJALNIM JEDNAČINAMA

Pretpostavimo da linearna parcijalna jednačina (3) koja se zove linearna parcijalna jednačina karakteristika nelinearne parcijalne jednačine (4) ima ν različitih integrala

$$f_1, f_2, \ldots f_\nu . \tag{5}$$

Ovi integrali poseduju osobinu da zagrade Poasona sastavljene od makojeg para dotičnih integrala pretstavljaju isto integral linearne parcijalne jednačine (3).

Kaže se da posmatrani integrali (5) sačinjavaju funkcionalnu grupu integrala linearne jednačine karakteristika, ako u njima svaki par integrala odredjuje integral, koji se nalazi u skupu integrala (5).

Po sebi se razume da svaki skup integrala u involuciji medjusobno pretstavlja poseban slučaj funkcionalne grupe integrala, koji dozvoljava, kako je gore navedeno, da se smanji na izvesni način red kanoničkog sistema (1).

Sad se postavlja opštije pitanje o iskorišćavanju funkcionalne grupe integrala za integraljenje kanoničkog sistema (1) i korelativne parcijalne jednačine (4).

Jakobi, a i Bertran, sa svoje strane, su rešili ovaj problem za slučaj funkcionalne grupe triju integrala i pokazali kako se tada izdvaja sistem triju integrala u involuciji kanoničkog sistema (1). Ovo rešenje dotični naučnici su primenili na problem triju tela, da bi smanjili red odgovarajućeg kanoničkog sistema za 6 jedinica, kako je to bilo gore rečeno.

S. Li je postavio ovaj problem u najopštijem obliku. Sada je teorija dotičnog problema postala veoma jednostavna.

Prvo pitanje koje se javlja traži takozvane izuzetne funkcije grupe (5):

$$\Phi_j (f_1, f_2, \ldots, f_\nu) \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu) \tag{6}$$

tj. funkcije integrala (5) koje se nalaze u involuciji izmedju sebe i sa svakim od integrala (5).

Lako se dokazuje da je razlika izmedju reda grupe (5) (tj. broja ν njihovih elemenata) i broja μ izuzetnih funkcija posmatrane grupe pretstavlja uvek paran broj:

$$\nu - \mu = 2\rho.$$

Kako su izutetne funkcije (6) integrala kanoničkog sistema (1) u involuciji, onda se njegov red smanjuje za 2μ jedinica. Što se tiče broja ρ, on igra važnu ulogu za odredjivanje broja izuzetnih funkcija i iznalaženja niza Jakobijevih funkcija, pomoću kojih se rešava problem integraljenja korelativne parcijalne jednačine (4).

Prema vrednosti istog broja ρ formira se i odgovarajući broj različitih linearnih parcijalnih jednačina, na čije se integraljenje svodi problem integraljenja polazne jednačine (1).

Tako na primer kanonički sistem gore navedenih 18 jednačina kretanja triju tela, koji ima, pod najopštijom pretpostavkom, 10 poznatih integrala, svodi se na integraljenje sistema šest nelinearnih jednačina sa devet kanoničkih promenljivih druge klase [1]. Prema tome, u ma kojem bi obliku uzeli posmatranje problema kretanja triju tela, dolazimo do zaključka da je on, sa teoriskog gledišta, istovetan problemu kretanja jednog izvesnog tela u trodimenzionalnom prostoru.

Pomenuti broj ρ odredjuje se neposredno iz posmatranja funkcija grupe (5) i unapred ukazuje broj izuzetnih funkcija, koji mora postojati za dotičnu funkcionalnu grupu.

Drugi problem o smanjivanju reda kanoničkog sistema (1) i broja promenljivih veličina u parcijalnim jednačinama vezan je sa pojmom o polarnoj grupi funkcija u odnosu na funkcionalnu grupu integrala (5). Da bismo objasnili ovaj novi pojam, formirajmo sistem linearnih parcijalnih jednačina

$$(f_i, f) = 0, \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu) \tag{7}$$

gde nepoznata f pretstavlja funkciju kanoničkih promenljivih (2) posmatranih kao nezavisno promenljive.

Pošto integrali (5) sačinjavaju funkcionalnu grupu integrala, to su jednačine (7) saglasne i pretstavljaju tako zvani zatvoreni sistem ν parcijalnih linearnih jednačina. Broj različitih integrala sistema (7) koji sačinjavaju potpuni sistem integrala jeste $2n - \nu$. Svaki integral sistema (7), tj. diferencijalnih invarijanata, poseduje sličnu osobinu sa integralima karakteristika i takodje se svodi na funkcionalnu grupu diferencijalnih invarijanata.

Da bismo pokazali ulogu ove funkcionalne grupe za integraljenje posmatranih parcijalnih jednačina, uporedimo osobine obeju funkcionalnih grupa.

Zato, najpre, napomenimo da se pojam funkcionalnih grupa integrala karakteristika proširuje na svaki *normalni* sistem diferencijalnih jednačina, tj. onih koje se nalaze u involuciji, pri čemu se Poasonove zagrade od levih strana jednačine anuliraju identički.

Na dotične sisteme jednačina proširuju se osobine koje važe za jednu jednačinu i korelativni kanonički sistem, i odgovarajuća linearna parcijalna jednačina karakteristika zamenjuju se generalisanim kanoničkim sistemom jednačina u totalnim diferencijalima, odnosno sistemom linearnih parcijalnih jednačina.

Na ovaj normalni sistem se proširuje Poasonova teorema o formiranju novih integrala sistema, pomoću zagrada Poasona od dva različita integrala.

Sa drugog gledišta, dotična Poasonova teorema se smatra kao partikularni slučaj jedne opštije Jakobijeve teoreme, koja kaže, da *svaki integral jedne od jednačina normalnog sistema linearnih parcijalnih jednačina, zamenjen u operatoru leve* strane ma koje druge jednačine istog sistema, daje opet integral prve jednačine.

Ova Jakobijeva teorema služi kao ključ Jakobijeve metode integraljenja parcijalnih jednačina. Medjutim, dotična teorema ne može se primeniti u našoj teoriji diferencijalnih invarijanata. Uzrok je u tome to što se u teoriji diferencijalnih invarijanata ne pojavljuju normalni, no zatvoreni sistemi linearnih jednačina. Ovi se razlikuju od normalnih sistema time što se Poasonove zagrade od levih strana posmatranih sistema ne anuliraju identički nego na osnovu jednačina posmatranog sistema. Da bismo prebrodili teškoće, koje se tu pojavljuju, objavili smo, 1946 godine, u Comptes rendus Pariske Akademije novu teoriju koja obuhvata i Jakobi-Poasonova istraživanja, a zasniva se na sledećim teoremama:

I. Uočimo zatvoreni sistem linearnih parcijalnih jednačina prvog reda s jednom nepoznatom funkcijom, koji se sastoji iz dva skupa jednačina; jednačine prvog skupa nalaze se medjusobno u involuciji sa svakom jednačinom druge grupe; medjutim, jednačine druge grupe sačinjavaju zatvoreni sistem. Svaki integral jednog od dva skupa datih jednačina, zamenjen u operatoru leve strane ma koje jednačine drugog skupa jednačina, daje opet integral istog skupa jednačina.

Pridjimo sad normalnom sistemu nelinearnih jednačina, čiji sistem linearnih parcijalnih jednačina karakteristika poseduje funkcionalnu grupu integrala. U dotičnom slučaju operatori posmatranih linearnih jednačina izražavaju se pomoću Poasonovih zagrada. Linearne parcijalne jednačine karakteristika nalaze se medjusobno u involuciji, a isto i sa svakim integralom parcijalnih jednačina diferencijalnih invarijanata date funkcionalne grupe integrala karakteristika. Medjutim, ove poslednje linearne parcijalne jednačine sačinjavaju zatvoreni sistem. Za to linearne parcijalne jednačine karakteristika pretstavljaju sada prvi skup jednačina, a drugi skup sačinjavaju linearne parcijalne jednačine diferencijalnih invarijanata.

Odavde dobivamo drugu teoremu, koja generališe Poasonovu teoremu, na ime:

II. Zagrade Poasona formirane izmedju levih strana normalnog sistema nelinearnih parcijalnih jednačina i diferencijalnih invarijanata funkcionalne grupe integrala karakteristika datog sistema daju nove diferencijalne invarijante posmatrane funkcionalne grupe integrala karakteristika.

Navedene teoreme daju mogućnost stvoriti novu metodu integraljenja nelinearnih parcijalnih jednačina, objavljenu u prvoj svesci „Publications Mathématiques" Matematičkog instituta Srpske Akademije nauka.

Sada je moj učenik Bogoljub Stanković, došao do nove ideje iznalaženja diferencijalnih invarijanata samo pomoću operacije diferencijaljenja. On polazi od dva osnovna stava:

1^0 Svaka se parcijalna jednačina izražava pomoću diferencijalnih invarijanata, koji sačinjavaju izvesnu funkcionalnu grupu integrala karakteristika [2];

2° Ma koji skup funkcija može da pretstavlja integrale karakteristika izvesne parcijalne jednačine samo pod uslovom da posmatrane funkcije sačinjavaju funkcionalnu grupu [3].

Uzimajući u obzir navedene osobine funkcionalnih grupa, B. Stanković je pronašao novi postupak za integraljenje parcijalnih jednačina.

Polazaći od ispitivanja Bertrana i Bura, koji su se bavili samo problemom triju tela, teorija diferencijalnih invarijanata je dobila najopštiji razvitak i obuhvatila problem integraljenja parcijalnih jednačina opšteg oblika.

Prirodno je sad postaviti pitanje, šta može još da dade ova teorija za problem triju tela, iz kojeg je i ponikla.

Klero, čim je postavio ovaj problem, kaže: „. . . J'ai trouvé les six équations[1]) que je viens de trouver dès le premier temps que j'ai envisagé le problème des trois corps, mais je n'ai jamais fait que peu d'efforts pour les résoudre, parce qu'elles m'ont toujours paru peu traitables. Peut-être promettront-elles plus à d'autres. Pour moi je les ai promptement abandonnées pour employer la méthode d'approximation . . .“ U toku skoro 150 godina su se ove metode približnog integraljenja uspešno razvijale i doživele veliko usavršavanje. Ipak, jedan od tvoraca dotičnih metoda, čuveni astronom Hugo Gylden, naglasio je da problem triju tela mora da bude rešen u konačnom obliku u sledećim rečima:

„Nous devons exercer notre esprit de telle manière que la solution que l'on va trouver définitivement soit simple . . . Une telle évolution de point de vue mathématique va nous donner de nouvelles formes fonctionnelles. Or, on ne doit pas espérer que nous allons résoudre le problème des trois corps d'une manière enchantée ou par intuition - au contraire on va atteindre la solution requise par une voie, où à chaque pas nous devrons surmonter de grandes difficultés“.

Teorija diferencijalnih invarijanata pretstavlja široki izbor različitih oblika invarijanata. Zato možemo da se zapitamo, da li se možda izmedju njihovih grupa nalaze one funkcije, na koje misli Gylden? U savremenom stanju nauke, proučavanje dotičnih diferencijalnih invarijanata može da pruži korisne podatke za tumačenje posmatranog problema.

III. INTEGRABILNI ELEMENAT

Uočimo nelinearnu parcijalnu jednačinu

$$F\,(x_1,\ x_2,\ .\ .\ .,\ x_n\ ,\ p_1,\ p_2,\ .\ .\ .\ p_n\,) = 0 \tag{8}$$

pri čemu je

$$\frac{\partial F}{\partial p_1} \lesseqgtr 0. \tag{9}$$

Pretpostavimo da odgovarajuća linearna jednačina karakteristika

$$(F,\ f) = 0 \tag{10}$$

1) Reč je o problemu triju tela u ravni.

ima, pored očevidnog integrala F, još $n + \nu - 1$ različitih integrala

$$f_1, f_2, \ldots, f_{n+\nu-1} \ (\nu < n). \tag{11}$$

Mi ćemo kazati da integrali (11) sačinjavaju integrabilni element jednačine (8), ako izraz

$$dz = \sum_{s=1}^{n} p_s \, dx_s \tag{12}$$

postaje tačan diferencijal, pod uslovom integrala karakteristika

$$F = a, \ f_1 = C_1 \ldots, f_{n+\nu-1} = C_{n+\nu-1}, \tag{13}$$

gde su a, $C_1, \ldots \ldots C_{n+\nu-1}$ proizvoljne konstante.[1])

Ovaj se sistem zove integrabilni elemenat jednačine (8).

Teorija integrabilnog elementa obuhvata obe klasične metode integraljenja, naime: 1° Teoriju karakteristika, i 2° Novu Jakobijevu metodu, koje se pokazuju kao dva granična slučaja teorije integrabilnog elementa.

Zaista ako je

$$\nu = n - 1 \tag{14}$$

jednačine (13) pretstavljaju opšti integral karakteristika date jednačine (18). Tada se, prema uslovu (9), sve promenljive izražavaju, pomoću jednačina (13), pod pretpostavkom (14), kao funkcije jedne promenljive x_1. Prema tome relacija (12) postaje tačan diferencijal.

Za drugi granični slučaj je

$$\nu = 0. \tag{15}$$

Tada, prema uslovu da je relacija (12) tačan diferencijal, jednačine (13) sačinjavaju sistem u involuciji.

Vraćamo se sad opštem slučaju integrabilnog elementa (13), gde

$$0 < \nu < n - 1,$$

pod pretpostavkom da integrali (11) odredjuju integrabilni element.

Lako je dokazati da se zahvaljujući integrabilnom elementu, pomoću kvadrature obrasca (12) odredjuje potpuni integral jednačine (8), stavljajući za to $a = 0$, a opšti integral običnih diferencijalnih jednačina karakteristika dobiva pod pretpostavkom $a \lessgtr 0$.

Navedimo naročito da za odredjivanje potpunog integrala parcijalnih jednačina postoje specijalne karakterističke funkcije koje generališu odgovarajuće funkcije teorije karakteristika. Medjutim obrasci, koji definišu opšti integral običnih diferencijalnih jednačina karakteristika, obuhvataju izvesne Jakobijeve formule sastavljene pomoću njegove glavne funkcije.

Najzad, teorija integrabilnog elementa svodi integraljenje parcijalne jednačine (8) sa funkcional-

---

[1]) Ovaj je pojam uveo 1903 godine N. Saltykow [2, 4].

nom grupom integrala karakteristika (11) na algebarske operacije eliminacije, pod pretpostavkom da je ispunjen uslov

$$\nu = n + \rho + 1, \mu = n - \rho - 1.$$

Zaista, funkcionalna grupa poznatih integrala izdvaja, pod navedenim okolnostima, integrabilan elemenat. Prema tome se potpuni integral posmatrane jednačine (8) nalazi pomoću kvadrature i algebarskih eliminacija.

PROBLÈMES ACTUELS DE LA THÉORIE MODERNE D' ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE À UNE FONCTION INCONNUE

PAR N. N. SALTYKOW

Clairaut avait composé, l' année 1759, les 18 équations différentielles des trois corps, en citant leurs 10 intégrales connues. Il considerait cependant comme inabordable l' intégration du dit système en termes finis. Dès lors les géomètres ont exercé vainement leurs efforts pour résoudre le problème posé.

Néanmoins ces recherches ont eu pour effet la création des théories d' équations canoniques et des celles aux dérivées partielles du premier ordre correspondantes. On a réussit, de cette manière, d' abaisser l' ordre d' équations canoniques du problème des trois corps, en le réduisant, au moins de point de vue théorique, à un certain problème d' un corps seulement.

Deux méthodes générales ont été fondées dernièrement dans le but d' achever l' intégration des équations étudiées: la théorie des groupes fonctionnels et celle des invariants différentiels.

La première méthode sert à composor les nouvelles intégrales en involution des équations canoniques ou bien des nouvelles équations aux dérivées partielles en involution avec celles que l' on considère.

Quant à la méthode des invariants différentielles, elle fournit des nouvelles variables d' une importance toute spéciale. En effet, les équations étudiées s' expriment en nouvelles variables, dont le nombre est moindre que celui des anciennes.

Enfin, les modernes études sur les équations en question ont établi les nouveaux procédés de leur intégration, au moyen des méthodes élémentaires d' éliminations, des quadratures et des différentiations. Ces dernières engendrent, comme cas particuliers limites, les deux méthodes classiques pour former, d' une part, les intégrales complètes d' équations aux dérivées partielles et, d' autre coté, les integrales générales des caractéristiques.

Les méthodes que l' on vient de citer entr'ouvrent un champ très vaste pour des nouvelles recherches dans le domaine des équations aux dérivées partielles. Il se pose surtout le problème d' application de ces modernes méthodes dans les problèmes de la mécanique céleste qui leur avait donné naissance.

Literatura

1. Saltikov N.: Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvog reda sa jednom nepoznatom funkcijom. Posebno izdanje Srpske Akademije nauka, Beograd, 1947, str. 736.

2. Saltikov N.: Etude sur l' évolution des méthodes modernes d'intégration des équations aux dérivées partielles de premier ordre. Paris, Gauthier—Villars, 1934 p. 24.

3. a) Mihnjević D.: Struktura parcijalnih jednačina sa datim integralima karakteristika (Glas Srpske akademije nauka CLXV. Prvi razred, 81 A. Mat. nauke, Beograd, 1935, glava VII.

b) Saltikov N.: Struktura normalnog sistema parcijalnih jednačina prvog reda, pomuću integrala karakteristika (Glas Srpske akademije nauka CLXXIII. Prvi razred 85 A. Mat. nauke, Beograd, 1936.

4. a) Saltikov N.: Sur le problème de S. Lie (Comptes rendus des Séances de l' Academie de Sciences, Paris, 24 Aout 1903.

b) Saltikov N.: Méthodes modernes d' intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre a une fonction inconnue. Paris, Gauthier—Villars, 1934, chapitre I.

DOBIJANJE DIFERENCIJALNIH INVARIJANATA INFINITEZIMALNIH TANGENCIJALNIH TRANSFORMACIJA BEZ INTEGRACIJE

BOGOLJUB STANKOVIĆ, BEOGRAD

Neka smo pri rešavanju parcijalne diferencijalne jednačine

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n, p_1, p_2, \ldots p_n) = 0 \tag{1}$$

$$\left(p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k}\right).$$

Jakobijevom metodom našli samo k integrala jednačine karakteristika

$$(F, f) = 0, \tag{2}$$

koji ne moraju biti u involuciji, već čine funkcionalnu grupu. Formirajmo sistem

$$(f_i\,, \nu) = 0 \qquad (i = 1, 2 \ldots k) \tag{3}$$

čiji se integrali zovu diferencijalne invarijante infinitezimalnih tangencijalnih transformacija, a koji služe da se u jednačini karakteristika (2) smanji broj nezavisno promenljivih za k.

Cilj ovoga je da se pokaže kako se do diferencijalnih invarijanata moži doći pomoću diferenciranja, pa čak i iz same jednačine (1).

1° F je diferencijalna invarianta ili funkcija od njih, jer je rešenje sistema (3). Možemo, medjutim, smatrati da je F uvek funkcija diferencijalnih invarijanata; ako se F poklapa sa nekom diferencijalnom invarijantom, možemo uvek umesto $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{2n-k}$ (diferencijalnih invarijanata) uzeti $2n - k$ funkcija

$$\mu_i\,(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{2n-k}), \; (i = 1, 2, \ldots 2n-k) \tag{4}$$

i to takvih da su različite u odnosu na $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{2n-k}$. Funkcije (4) su integrali sistema (3), jer su funkcije diferencijalnih invarijanata. Da su različite u odnosu na parametarske promenljive dokazaćemo koristeći osobinu funkcionalnih determinanata

$$D\left(\frac{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{2n-k}}{x_{k+1} \ldots x_n, p_1 \ldots p_n}\right) = D\left(\frac{\mu_1 \ldots \mu_{2n-k}}{\nu_1, \ldots \nu_{2n-k}}\right) D\left(\frac{\nu_1 \ldots \nu_{2n-k}}{x_{k+1} \ldots x_n, p_1 \ldots p_n}\right).$$

Kako su, naime, $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{2n-k}$ različiti integrali sistema (3), a $\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{2n-k}$ različiti u odnosu na $\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{2n-k}$, funkcionalna determinanta

$$D\left(\frac{\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_{2n-k}}{x_{k+1}, \ldots x_n, p_1, \ldots p_n}\right)$$

različita je od nule.

2^0 Pretpostavimo da je moguće naći r različitih funkcija

$$\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r, \quad (r < 2n) \tag{5}$$

i to takvih da čine funkcionalnu grupu i da se F može napisati

$$F = \Phi\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r).$$

Formirajmo sistem

$$X_i\,(f) \equiv (\varphi_i, f) = 0; \tag{6}$$

Poasonove zagrade od ma koje dve jednačine tog sistema biće

$$(X_j, X_k) \equiv (\varphi_j, (\varphi_k, f)) - (\varphi_k, (\varphi_j, f)).$$

Kako je na osnovu Jakobijeve teoreme

$$(\varphi_j, (\varphi_k, f)) - (\varphi_k, (\varphi_j, f)) = ((\varphi_j, \varphi_k), f),$$

to se Poasonove zagrade

$$(X_j, X_k) \equiv ((\varphi_j, \varphi_k), f)$$

anuliraju na osnovu sistema (6) i sistem (6) je zatvoren.

Integrali sistema (6) su integrali jednačine karakteristika (2); kako je, naime, $F = \Phi\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r)$, to je

$$(F, f_s) = \sum_{i=1}^{r} (\varphi_i, f_s)\,\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_i},$$

a ovo se anulira na osnovu sistema (6).

Iz svega ovoga sledi da su $\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_r$ diferencijalne invarijante.

3^0 Neka nam je nemoguće da odmah iz jednačine (1) nadjemo funkcije (5) koje bi činile funkcionalnu grupu. Uzmimo tada s ma kakvih funkcija

$$\psi_1, \psi_2 \ldots \psi_s \tag{7}$$

koje ne čine funkcionalnu grupu, ali takvih da je

$$F = \Psi\,(\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_s).$$

Formirajmo sada Poasonove zagrade

$$(\psi_i, \psi_j). \quad (i = 1, 2 \ldots s; j = 1, 2 \ldots s,) \tag{8}$$

One zagrade koje daju funkcije različite od (7) pridodajmo funkcijama (7) i sa tako povećanim brojem ponovi no operaciju (8) sve dok ne dobijemo l funkcija koje čine funkcionalnu grupu. Ove su tada diferencijalne invarijante. Dokaz za to indentičan je sa onim iz 2^0 kada smo bili u mogućnosti da funkcije (5) dobijemo odmah iz date jednačine.

Razumljivo ovo koristi samo ako je $l < 2n$.

4^0 Pitanje najveće funkcionalne grupe (5) je pitanje najmanje funkcionalne grupe integrala jednačine karakteristika (2). Naime, integrali sistema (6) koji su i integrali jednačine karakteristika čine funkcionalnu grupu. Kako jedan integral jednačine (2) zajedno sa datom jednačinom (1) čini najmanju funkcionalnu grupu integrala jednačine (2), to uvek postoje takve funkcije (5) da je $r \leqslant 2n - 2$.

5^0 Pretpostavili smo da se F može uvek napisati

$$F = \Phi\,(\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_r)\,;$$

jednačina karakteristika izgleda tada

$$(F, f) = \sum_{i=1}^{r} (\varphi_i, f) \frac{\partial F}{\partial \varphi_i}\,.$$

Vidi se da su oni integrali karakteristične jednačine, koji bi dali datu grupu diferencijalnih invarianata (5), integrali i sistema (14) i obratno.

Kako se funkcije ψ svode na funkcije φ, to sve što smo pokazali za φ važi i za ψ.

6^0 Na kraju ćemo primetiti ovo: ako poznajemo jedan ili više integrala karakteristične jednačine koji su u involuciji, olakšava se traženje funkcija φ ili ψ. Do toga ćemo zaključka doći na osnovu sledeće dve proste konstatacije.

Prvo: Neka je $F = F\,(u, v)$ i

$$\frac{\partial F}{\partial v} \gtrless 0;$$

ako je u diferencijalna invarijanta, onda je i v diferencijalna invarijanta ili funkcija od njih. Jer iz

$$(f_i, F) = (f_i, u) \frac{\partial F}{\partial u} + (f_i, v) \frac{\partial F}{\partial v} = 0$$

sledi

$$(f_i, v) = 0.$$

Drugo: Neka je F funkcija sledećeg oblika

$$F = F\,(f + \varphi + \psi + \ldots)$$

gde je

$$f = f\,(v_1, u), \quad \varphi = \varphi\,(v_2, v), \quad \psi = \psi\,(v_3, w);$$

ako su v_1, v_2, v_3 diferencijalne invarijante, onda su i u, v, w diferencijalne invarijante ili funkcije od njih. Jer, F je funkcija diferencijalnih invarijanata i ostaće rešenje sistema

$$(f_i, f) = 0$$

i onda kada se stavi da je neka od diferencijalnih invarijanata jednaka nuli; ako se to učini za sve sem za jednu imaćemo ono o čemu smo malopre govorili.

Ako pretpostavimo da je F funkcija i integrala u involuciji, koristeći navedene konstatacije, olakšava se nalaženje funkcija φ ili ψ, koje, vidimo, mogu biti čak i integrali karakteristične jednačine.

GEWINNUNG VON DIFFERENTIALINVARIANTEN DURCH DIFFERENZIERUNG

VON B. STANKOVIĆ

Wird eine Lösung der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung mit n unabhängigen Veränderlichen

$$F\ (x_1, x_2, \ldots x_n,\ p_1, p_2 \ldots p_n) = 0 \tag{1}$$

gesucht, wobei man nur über m $(m < n - 1)$ verschiedene Integrale

$$f_1, f_2, \ldots f_m \tag{2}$$

der charakteristischen Gleichung

$$(F, f) = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_s}\frac{\partial f}{\partial p_s} - \frac{\partial F}{\partial p_s}\frac{\partial f}{\partial x_s} = 0 \tag{3}$$

verfügt, so bedient man sich der Integrale des Systems:

$$(f_i, v) = \sum_{s=1}^{m} \frac{\partial f_i}{\partial x_s}\frac{\partial v}{\partial p_s} - \frac{\partial f_i}{\partial p_s}\frac{\partial v}{\partial x_s} = 0. \qquad (i = 1, 2 \ldots m) \tag{4}$$

In dieser Mitteilung wird gezeigt, dass die Integrale des Systems (4), Differentialinvarianten, aus der Gleichung (1) ohne Integration gewonnen werden können, so dass die Kenntnis der Integrale (2) überhaupt nicht erforderlich wird.

Literatura

N. Saltikov: „Metode integraljenja parcijalnih jednačina prvoga reda". Posebna izdanja SAN Bgd. 1947 god.

N. Saltikov: „Méthodes classiques d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre, Gauthier-Villars, Paris, 1931.

N. Saltikov: „Applications des invariantes diférentielles pour intégrer les équations aux dérivées partielles du premier ordre a une fonction inconue". Publications de l'Institut Math. T. I, Bgd. 1947.

N. Saltikov: „Kanonički oblik funkcionalnih grupa" Glas SAN CLXXVIII, Bgd. 1939 g.

D. Mihnjević: „Struktura parcijalnih jednačina prvoga reda sa jednom nepoznatom funkcijom", Doktorska teza.

O STANOVIŠTIMA U GEOMETRIJI

MILOŠ RADOJČIĆ, BEOGRAD

Ako je uopšte moguće reći u tri reči šta je geometrija, rekao bih: nauka o prostoru. Ona obuhvata razne i obimne matematičke teorije. Svud je reč o prostornim odnosima. Svud se polazi od prostornih pretstava i na njih se vazda vraća. Pa ipak, velika je raznovrsnost geometrijskih teorija. Ona proizlazi iz mnogih i raznih stanovišta u geometriji. Osvrnimo se jednom na ta stanovišta. Poklonimo im jedan čas pažnje. U nauci je uopšte važno uočiti, ne samo predmet koji posmatramo, već i naučno gledište s koga posmatramo, stanovište na kome stojimo. Time se stiče zreliji odnos prema predmetu. Svaka vrsta ili grana geometrije proizlazi iz svoga karakterističnog stanovišta. Mi ta stanovišta ne možemo ni razmotriti sva. O tome bi bilo potrebno više od jednog predavanja. No razmatrajući stanovišta imaćemo priliku i da bacimo letimične poglede na glavne grane geometrije.

Kad se u antičko doba razvila elementarna geometrija kao logička nauka, kad su geometri stare Grčke počeli dokazivati i nizati stavove, izvađajući jedne iz drugih po načelu dedukcije, polazeći od malog broja pretpostavki, to beše veliko otkriće. Otkrilo se novo stanovište na koje se uspela čovečja svest: stanovište logičke dedukcije. Pronalaskom toga stanovišta rodila se ne samo geometrija kao prava nauka, već i matematika uopšte u današnjem smislu reči. Jer mislim da imaju pravo oni koji smatraju da je deduktivna metoda glavno obeležje matematike.

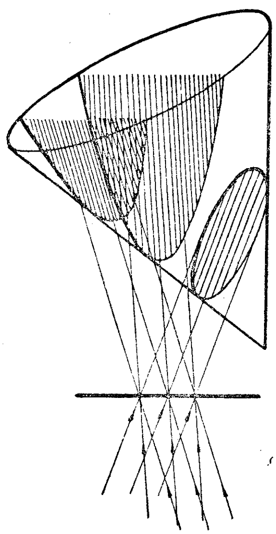
U ranija doba, kroz hiljade godina koje se gube u prehistoriji, ljudi su pronalazili i posmatrali geometrijske činjenice sa stanovišta života i mističkih pogleda na svet. Očiglednost beše jedina potpora, naslućena logička povezanost velika zagonetka. Geometrija je tada još na svome izvoru, naučne metode još nema, ona crpe iz iskustva svoje gradivo. Kako Herodot kaže, u premeravanju zemljišta poreklo je geometrije. To je dakle stanovište prakse više nego teorije, stanovište empirije, indukcije, koja tek sluti puteve dedukcije.

Iz tog prvobitnog stanja geometrija se razvila u Grčkoj upravo time što je praktičara nadjačao teoretičar, egipatsko-vavilonskog žreca grčki filosof i logičar. Ubrzo geometrija se razvila toliko da se moglo javiti delo kao što su „Elementi“ Euklida, gde se sistematski izlaže gradivo i dosledno sprovodi jedna metoda. To je stanovište nauke uopšte. Ono se prvi put javlja u geometriji.

Ali, naravno, pojavom novoga staro se ne gubi sasvim, nego se prožima novim i razvija dalje. Praksa se razvija dalje, indukcija ostaje u postulatima i aksiomama, na samom čelu dedukcije.

Za kratko vreme grčka geometrija se razvila do znatne visine. U Apolonijevoj teoriji konusnih preseka dostigla je uglavnom svoj vrhunac, koji se posle, vekovima, nije više dostizao a kamo li prestizao.

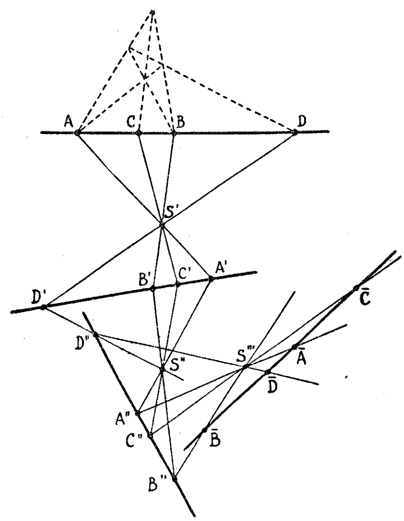
Možemo se diviti Apolonijevoj oštroumnosti u ispitivanju elipse, hiperbole, parabole, no svaka od tih krivih proučava se zasebno. Tek u 17. stoleću, u delima Keplera, Paskala, Dezarga sazreva ujedno stopljeno posmatranje tih triju krivih, što karakteriše projektivnu geometriju. Zbog te njene moći sinteze ona je nazvana još i sintetičkom geometrijom. Tu je novo stanovište. Ničući iz iskustva nauka je u davnini dohvatila prvo svako telo, svaki oblik zasebno, u njegovu odvojenom postojanju i nemenjanju. Teže je bilo pristupiti menjanju u prirodi i obuhvatanju mnoštava oblika u njihovim uzajamnim srodstvima. Zato se i razvila bila prvo elementarna geometrija, proučavajući oblike koji se takoreći ne kreću niti menjaju, izdvajajući prostorne odnose iz vremenskog toka, apstrahujući od činjenice da „sve teče". Reč „stereon", koja se javlja i u nazivu „stereometrija" i kojom su Grci nazivali geometrijsko telo, znači „čvrsto", „kruto". Cela elementarna geometrija izražava u neku ruku odnose u svetu uzajamno nepomičnih čvrstih materijalnih tela. Takvo je njeno stanovište.


Sl. 1

Naprotiv, u projektivnoj geometriji napuštamo čvrsto telo, nema više kongruentnih oblika, jedino što prava linija ostaje prava. To nije više svet čvrstih tela u miru, već u neku ruku igra pravolinijskih zraka svetlosti u plinovitu svetu. Elipsa se tu takoreći kreće i pretvara u hiperbolu prošavši kroz oblik parabole (sl. 1); no sa stanovšita projektivne geometrije pred nama je ipak neprestano isto: konusni presek. Tu je stupilo na snagu novo načelo, koje karakteriše možda najdublje veliki preokret u matematici, koji se zgusnuo oko 17. stoleća i znači ujedno pojavu infinitezimalnog računa i njegovih dalekosežnih primena u prirodnim naukama. To je stanovište koje ubuhvata bivanje, kretanje, pretvaranje. No pri tome, saobrazno logičkoj dedukciji, geometrija nalazi i u kretanju mir, i u menjanju ono što se ne menja. Tako je npr. kad se posle ma koliko sečenja i projektovanja dobiva u projektivnoj geometriji iz harmonijske grupe tačaka A, B, C, D opet harmonijska grupa $\bar{A}$, $\bar{B}$, $\bar{C}$, $\bar{D}$ (sl. 2).

Ali s tim u vezi moralo se u projektivnoj geometriji pojimanje prostora duboko izmeniti dodavanjem beskrajno dalekih, tobožnjih tačaka, tobožnjih pravih i jedne tobožnje ravni, apstraktno dodane i usled koje prostor postaje zatvoren u sebi samom, donekle analogno sferi ili drugoj zatvorenoj površi. Tako ulazi u pojam prostora već nešto što ne odgovara više našim pretstavama. Odustajemo od toga da geometrija tumači neposredno iskustvo. Tu se javlja prvi put stanovište napuštanja prostornih pretstava i usvajanja geometrijskih odnosa koji, štaviše, protivreče pretstavama.

Pre toga stojalo se naivno na stanovištu da geometrija mora biti veran odraz našeg iskustva u okolnom prostoru. No veliki napreci geometrije u novije doba proistekli su znatnim delom iz napuštanja toga starog stanovišta i usvajanja novog, mnogo šireg.



Sl. 2

To se osobito pokazalo u *neeuklidskim geometrijama*. One se izgrađuju apstraktno logički. Kad su, vekovima, geometri pokušavali uzalud da pomoću ostalih Euklidovih pretpostavki dokažu njegov peti postulat — koji znači da postoji kroz zadatu tačku samo jedna prava paralelna datoj pravoj — nisu znali ni koliko se i kakvih problema iza toga skriva, niti da im neuspeh dolazi otud što su još sputani čulnim pretstavama, što se nisu dovoljno uzdigli do nezavisnog, čistijeg logičkog stanovišta.

No ti uzaludni pokušaji doveli su, kako znamo, početkom prošlog stoleća Gausa, Lobačevskog i druge do prvih neeuklidskih geometrija. Pri tome je došlo do izraza sledeće stanovište, koje karakteriše tačnije takozvanu *višu geometriju*. U euklidskoj, elementarnoj geometriji nastojimo da u početku iznesemo sve pretpostavke, potrebne da bi se na njima sagradila *cela* zgrada elementarne, iskustvu saobrazne geometrije. U neeuklidskim geometrijama, naprotiv, uzimamo samo jedan deo tih polaznih pretpostavki, tih aksioma, postulata — a izvesnu aksiomu ili celu grupu aksioma izostavljamo ili preinačujemo. Tako nastaje takozvana *apsolutna geometrija* kad odbacimo aksiomu paralelnosti. Ako pak unesemo stav: da se kroz tačku van prave može povući više od jedne paralele, ili pak samo jedna, ili čak nijedna, dobivamo redom: *hiperbolnu geometriju* Lobačevskoga, našu *euklidsku geometriju*, koja se u tom sklopu ideja naziva *parabolnom*, i *elipsnu geometriju* Rimana, u kojoj prave linije nisu više beskrajne.

Isto *stanovište odbacivanja i menjanja aksioma* nalazimo i u projektivnoj geometriji. Ova se osniva samo na aksiomama pripadanja, rasporeda i neprekidnosti, kontinualnosti, dok su aksiome kongruentnosti i aksioma paralelnosti odbačene. Isto tako nastaje i *nearhimedovska geometrija* izostavljanjem Arhimedove aksiome neprekidnosti, i razne druge geometrije u savremenoj matematici.

I u *topologiji*, koja se razvila tek od polovine prošlog veka, stojimo na tom istom stanovištu. Topologija ne zna ni za podudarne oblike, ni za pravu i ravan: u njoj se zadržala samo neprekidnost. Ona se bavi, kao što znamo, geometrijskim osobinama koje se održavaju pri makakvim neprekidnim transformacijama. Sa stanovišta topologije krug, trougao i kvadrat su isto, jer se kontinualnim transformacijama dobivaju jedno iz drugoga. Takvi oblici zovu se *homeomorfnim*. I sfera, elipsoid i tetraedar su među sobom homeomorfni, ali torus nije: ne možemo ga neprekidnom transformacijom pretvoriti u sferu. Predmet topologije je, takoreći svet mekanih, deformabilnih, elastičnih tela, koja se ne kidaju niti igde slepljuju, ali gde stalnih oblika nema. Dakle i pomenuto stanovište kretanja, pretvaranja nalazimo tu ponovo.

Unesemo li u topologiju projektivne aksiome, nastaće kao njen posebni slučaj projektivna geometrija; unesemo li u projektivnu geometriju aksiome podudarnosti i uporednosti, nastaće, tek tada, kao još posebniji slučaj naša euklidska geometrija. Tako se naša obična geometrija rađa iz mnogo opštijih geometrija. Uopštavanje je, razume se, jedno od glavnih načela u matematici i jedno od najplodnijih stanovišta savremene geometrije.

Ali proučavajući opšte prostore stali smo već i na stanovište teorije množina, mnoštava, skupova, te osnovne matematičke nauke. U njoj je reč o svima mogućim, najčešće beskrajnim mnoštvima kakvih bilo elemenata, pa i geometrijskih. U njoj dolazi do pravog izraza osnovna uloga beskrajnosti u matematici uopšte. Jedan od njenih prvih i glavnih tvoraca, Kantor, pokrenuo je krajem prošlog veka time silan razvoj, kako u geometriji tako i u algebri i analizi. Teorija množina je omogućila mnogo veću oštrinu i dubinu rasuđivanja. Setimo se samo beskrajnih množina tačaka na pravoj i u ravni: tačaka nagomilavanja, otvorenih i zatvorenih mnoštava, svugde gustih i nigde gustih, perfektnih, kontinuuma i njegovih međa itd. I što se tiče same geometrije to je veličanstvena zgrada koja kristalnom jasnošću obuhvata najopštija mnoštva geometrijskih elemenata. Kako je uzan bio izbor onih oblika koji su se proučavali nekad! Počelo se u davnini s najjednostavnijim telima kao što su kocka, lopta; prešlo se na razne polijedre itd.; počelo se s pravom, tačkom, ravni, krugom; prešlo se na konusne preseke i još neke linije. Nije li jedno od glavnih obeležja grčke geometrije u zahtevu da se konstrukcije imaju vršiti samo lenjirom i šestarom? No umesto toga uzanog stanovišta, koje daje antičkoj geometriji njen stil, stali smo u teoriji geometrijskih mnoštava na obratno stanovište: ne pitamo, kako ćemo praktički konstruisati neki lik; zar bi se ona beskrajna mnoštva tačaka mogla uopšte konstruisati potpuno? Tražimo samo da ih definišemo. I ne biramo koje ćemo oblike proučavati, već razvijamo teoriju najopštijih oblika i množina oblika. U teoriji geometrijskih množina stojimo dakle na stanovištu sistematskog proučavanja makakvih, najopštijih geometrijskih tvorevina.

Razume se da i malopre spomenuta stanovišta o napuštanju prostornih pretstava i o menjanju i odbacivanju aksioma dolaze u geometrijskoj teoriji mnoštava do mnogostrukog izraza. No ta stanovišta došla su do svog najpotpunijeg izraza u proučavanju osnova i same elementarne geometrije, u aksiomatici geometrije, koja se razvila krajem prošlog i početkom ovog stoleća iz ispitivanja pokrenutih pronalaskom neeuklidske geometrije. Osobito Hilbert i njegova škola prokrčili su u tom pravcu znatan put, koji ih je doveo do ispitivanja osnova matematike uopšte, do tako zvane matematičke logike, koja, možda, više od svega drugog karakteriše matematičko istraživanje danas.

U aksiomatičkom zasnivanju i građenju geometrije apstrahujemo potpuno od neposrednog sadržaja geometrijskih pojmova i zadržavamo samo logičke oblike geometrijskih stavova. To je stanovište potpunog napuštanja geometrijskih pretstava. Ne gledamo takoreći više na geometriju kao na nauku o prostornim odnosima, već kao na posve apstraktnu nauku o praznom logičkom ustrojstvu tih odnosa. Osnovni zadaci aksiomatike sastoje se, kao što je poznato, iz tri pitanja: 1. je li aksiomama obuhvaćeno sve što je potrebno da bi se iz njih izveli svi stavovi dotične geometrije? 2. ne protivreče li aksiome jedna drugoj? i 3. ne sadrži li sistem aksioma više nego što je neophodno? — Stojeći na stanovištu odbacivanja i menjanja aksioma, aksiomatika iznalazi dokaze da je sistem aksioma potpun, neprotivrečan, i da su aksiome nezavisne među sobom. To je mnogo viši stepen apstrakcije nego što se u Euklidovo doba moglo dostići. Tek tu je logika došla do svoje prave čistote, i razumljivo je što se time pokrenuo moćan razvoj u istraživanju osnova cele matematike, koji je dubinom i oštroumnošću nadmašio, može biti, sva ranija matematička dostignuća.

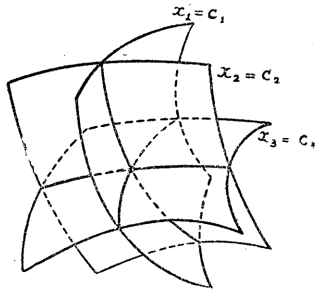
No vratimo se u prošlost. Jedan od najvažnijih događaja u razviću geometrije nastupio je u 17. stoleću otkrićem a n a l i t i č k e g e o m e t r i j e. Usled razvitka algebre u prethodnom veku nastalo je, neizbežno, prožimanje geometrije algebrom; prvo po načinu Vieta i Getaldića, koji prilaze još bez koordinatnog sistema algebarskom rešavanju geometrijskih zadataka, a uskoro potom objavljuje Dekart načela svoje geometrije, koja se temelji na koordinatnim sistemima i gde se svaki geometrijski oblik razlaže na koordinate svojih elemenata. Umesto geometrijskih konstrukcija sad se izvodi algebra, kasnije i analiza, s jednačinama u kojima se pojavljuju koordinate kao poznate i nepoznate veličine. To je k o o r d i n a t n a g e o m e t r i j a. Novo stanovište. Geometrija putem algebre, ali gde ne računamo sa svima mogućim dužima, uglovima itd., već sistematski svodimo sve veličine na samo neke, kao što su koordinate tačaka ili oni koeficijenti koji nam se u jednačinama nameću sami. Dotada sputana složenošću svojih konstrukcija, sad je geometrija mogla poći pobednički na osvajanje mnogih problema pred kojima je vekovima stojala nemoćna. Njen domašaj se umnogostručio. Stanovište takozvane čiste, tj. k o n s t r u k t i v n e g e o m e t r i j e beše zamenjeno novim, stanovištem koordinatne, analitičke geometrije.

U njoj se nastoji pre svega da se svakom geometrijskom problemu nađe odgovarajući algebarsko-analitički izraz. Pri tome je trebalo razraditi temelj novom stanovištu: ideju koordinata i njihovih uzajamnih preobražavanja. Posle Dekartovih pravolinijskih koordinata prešlo se na polarne i druge, u ravni i prostoru, dok se najzad ta središnja ideja nije shvatila u svojoj opštoj srži. Svaki postupak po kome dodeljujemo tačkama ravni parove brojeva ili tačkama prostora trojke brojeva, i obratno, daje nam izvestan koordinatni sistem u opštem smislu reči. Ako su x_1, x_2, x_3 kakve bilo koordinate tačaka u prostoru, veza s koordinatama x, y, z izvesnog pravolinijskog sistema data je određenim funkcijama opšte vrste:

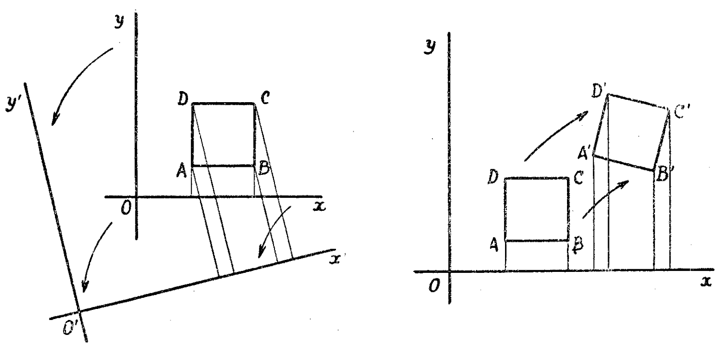
$$x_i = f_i\,(x, y, z), \quad i = 1, 2, 3.$$

Za svaku trojku brojeva x_1, x_2, x_3 imamo tri površi (plohe) koje se seku (sl. 3), opšte uzevši, u jednoj tački, čije su to koordinate. Pravolinijski i polarni koordinatni sistem javljaju se kao posebne vrste toga opšteg, krivolinijskog sistema.

Menjanjem koordinatnih sistema postiže se velika pokretnost, koja je neophodna u rešavanju mnogih zadataka geometrije. Stanovište kretanja i pretvaranja dolazi tu do vidnog izraza. Štaviše, zanimljivo je da to isto možemo posmatrati sa još jednog stanovišta, dajući istim računskim radnjama drugo geometrijsko tumačenje: umesto da transformaciju koordinata shvatimo kao promenu koordinatnog sistema u odnosu na iste tačke, možemo je shvatiti i kao promenu tačaka u istom koordinatnom sistemu. Tada nam isti obrasci pretstavljaju nekakvo preslikavanje u ravni ili prostoru. Evo dakle dva razna stanovišta pred istim analitičkim izrazima. Tako npr. prelaz iz jednog u drugi pravougli sistem s jednakim jediničnim dužima dobiva značenje premeštanja figura (sl. 4), a prelaz iz pravouglog u kosougli sistem dobiva značenje afinog preslikavanja, kakvo vidimo npr. u odnosu nekog ravnog lika obasjanog suncem i njegove senke (sl. 5). S t a n o v i š t e p r e s l i k a v a n j a jedno je od osnovnih u savremenoj geometriji.

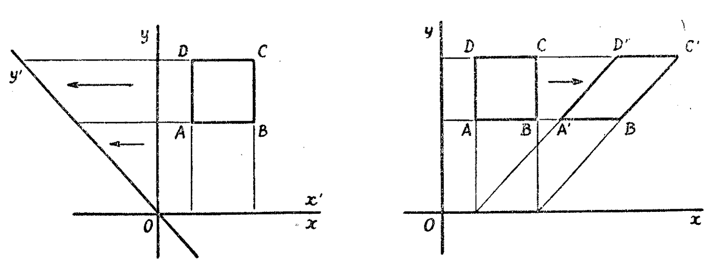


Sl. 3



Sl. 4

Projektivna geometrija je sva u tome. I proistekla je iz projektovanja likova jedne ravni na drugu ravan. Projektovanje je preslikavanje. Pravo poreklo projektivne geometrije je u perspektivi, u n a c r t n o j g e o-



Sl. 5

m e t r i j i, koja se obično proučava kao posve praktična grana geometrije. Ali ne zaboravimo da se i nacrtna geometrija može strogo deduktivno razviti. To je euklidska geometrija u prostoru, no izvođena putem projektovanja, konstruktivno, u ravni. To su preslikavanja prostornih oblika na ravni. Postoji dakle posebno stanovište nacrtne geometrije. S njega se ne posmatraju samo projektivni odnosi, već i afini i kongruentni.

Projektivna geometrija bavi se samo projektivnim preslikavanjem. Pri tome pravoj odgovara prava, ravni ravan, no beskrajno dalekoj, tobožnoj tački može odgovarati obična tačka i obratno. Da bi se svemu tome dao pogodan analitički izraz, moraju se uvesti svima poznate homogene koordinate, kojih ima jedna više od običnih, nehomogenih. U najprostijem slučaju to su za tačke prostora četiri koordinate X, Y, Z, U, koje stoje s običnim koordinatama x, y, z u vezama

$$x = \frac{X}{U},\; y = \frac{Y}{U},\; z = \frac{Z}{U}.$$

Tada tačku ne karakterišu više same vrednosti koordinata, već njihove razmere. Beskrajno daleke tačke su one za koje je $U = 0$. Ovo je jednačina tobožne ravni. — U opštem slučaju to su projektivne koordinate x_1, x_2, x_3, x_4, određene vezama

$$x_i = a_i\, x + b_i\, y + c_i\, z + d_i\,, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

Jednačina ravni glasi tada

$$u_1\, x_1 + u_2\, x_2 + u_3\, x_3 + u_4\, x_4 = 0.$$

Koeficijenti u_i određuju ravan kao što veličine x_i određuju tačku. Otuđ nazivamo te koeficijente projektivnim koordinatama ravni, dakle u još jednom smislu proširujemo pojam koordinata. Isto tako imamo u ravni koordinate pravih. Zakon dualnosti dobiva time usled simetrije formula svoj analitički izraz. A s t a n o v i š t e d u a l n o s t i jedno je od glavnih u projektivnoj geometriji. S njega cela ta oblast pokazuje svu svoju jednostavnu lepotu. U ideji izomorfnih grupa i ekvivalentnih geometrija dobilo je stanovište dualnosti svoj opšti oblik i značaj.

Transformacije koordinata, koje u prostoru određuju projektivno preslikavanje, su makakve homogene linearne supstitucije:

$$x'_i = a_{i1}\, x_1 + a_{i2}\, x_2 + a_{i3}\, x_3 + a_{i4}\, x_4, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

i

$$u'_i = \alpha_{i1}\, u_1 + \alpha_{i2}\, u_2 + \alpha_{i3}\, u_3 + \alpha_{i4}\, u_4, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

za kolineacije, a

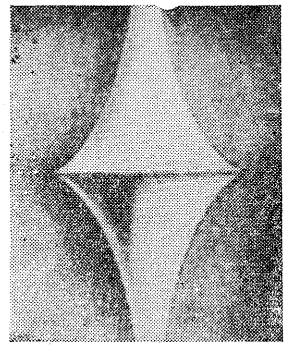
$$u'_i = b_{i1}\, x_1 + b_{i2}\, x_2 + b_{i3}\, x_3 + b_{i4}\, x_4, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

ili

$$x'_i = \beta_{i1}\, u_1 + \beta_{i2}\, u_2 + \beta_{i3}\, u_3 + \beta_{i4}\, u_4, \qquad i = 1, 2, 3, 4$$

za korelacije, koje pretvaraju tačku u ravan i obratno, u skladu s načelom dualnosti. Ali ne zaboravimo da se u geometriji proučavaju i svakovrsne opštije transformacije koje definišu opštija i drugačija preslikavanja, druge i opštije geometrije i prostore. Tako npr. imamo za obostrano jednoznačne algebarske transformacije a l g e b a r s k u g e o m e t r i j u, a za konformno preslikavanje u ravni, na površi ili u prostoru k o n f o r m n u g e o m e t r i j u.

Posebni značaj dobiva stanovište preslikavanja u neeuklidskoj geometriji kada tražimo da neeuklidsku ravan preslikamo na euklidsku i neeuklidski prostor u euklidski. Na taj način dobivamo, ipak, pretstave o prostorima koje ne možemo neposredno sebi predočiti. Tako je npr. u geometriji na sferi ostvarena planimetrija Rimanove sferne geometrije: sfera je euklidska slika ravni sfernog prostora. Tako je Beltrami ukazao na pseudosferu (sl. 6)



Sl. 6

kao na sliku jednog dela ravni Lobačevskog. Poenkare je štaviše dokazao unutarnju neprotivrečnost geometrije Lobačevskoga, preslikavši na izvestan način beskrajni prostor te geometrije u unutrašnjost lopte našeg euklidskog prostora. Pri tome odgovaraju ravnima delovi sfera a pravim kružni lukovi. Zaključio je iz mogućnosti te trodimenzione slike da je hiperbolna geometrija u sebi neprotivrečna, kao i sama euklidska geometrija.

Najzad i u aksiomatici geometrije uopšte, kad za aksiome dokazujemo neprotivrečnost, nezavisnost i potpunost, preslikavamo jednu oblast na drugu i geometriju uopšte na izvesnu oblast aritmetike, a iz neprotivrečnosti aritmetike zaključujemo da nam je i geometrija neprotivrečna. Pri tome, u stvari, stojimo istovremeno na stanovištu analitičke geometrije.

Tako se stanovišta vazda ukrštaju, udružuju i sadrže jedna u drugima, obasjavajući sve nove sklopove činjenica. Vratimo se stanovištu analitičke geometrije. Ono je omogućilo ne samo uspešno rešavanje mnogih „nerešljivih" problema, već i otkrivanje novih oblasti geometrijskog istraživanja. I sam pojam prostora proširio se u nedogled. Pre svega, obrazovanjem pojma višedimenzionog prostora. Zatim, svakojakim menjanjem i uopštavanjem predmeta pa i osnovnih svojstava prostora. Naravno, čim smo napustili trodimenzioni prostor mogućnost predočavanja prestala je takoreći potpuno. Ali tu je upravo snaga analitičke geometrije, što su njeni računi nezavisni od prostornih pretstava i prema tome naši zaključci ostaju isto tako tačni kao da u svim tim izmišljenim prostorima konkretno živimo. Bavimo se u stvari algebrom i analizom, i rekli bismo da samo pogodni nazivi i obeležavanja čine naš rad geometrijskim, ali često su nas ta uopštenja dovela do vrlo konkretnih saznanja. Stanovište analitičke geometrije sjedinjeno sa stanovištima uopštavanja, preslikavanja itd. vode pouzdanim putovima naučnog istraživanja.

Nije uvek lako ni sagledati stanovište na kome stojimo. Obično se nova problematika počne razvijati prema još nejasnoj težnji uperenoj u izvesnom pravcu. Načela se tek utvrđuju. No u nejasnoj težnji stanovište na koje se staje već postoji skriveno. Podići u svest to stanovište znači osvrnuti se na već sagrađeno delo i tek sad ga svesno izgrađivati. Jesmo li uopšte sagledali jedno stanovište do kraja? To je, strogo uzev, nemoguće ako se ne vidi i suprotno stanovište i uzajamni odnos svih stanovišta koja s prvim imaju veze.

Tako, kad smo dodirnuli geometriju starih Grka, izneli smo neka njena stanovišta. Nismo ih pobrojali sva. Nešto najosnovnije, što ne rekosmo, je sama opštost geometrijskih istina. Još i ne sluteći Pitagorin stav biće da su sumersko-egipatski harpedonapti pokazivali najpre, možda zatezanjem konopca, na trouglu čije su strane imale dužinu tri, četiri i pet „prutova", da je jedan ugao prav. Posle se uvidelo da to vredi za sve trougle kojima se strane odnose kao 3 : 4 : 5 i da je osim toga kvadrat sagrađen nad hipotenuzom jednak zbiru kvadrata nad obema katetama. Od toga, već prilično opšteg saznanja dospelo se vremenom do još mnogo opštijeg, do Pitagorina stava za sve pravougle trougle. Put do njega bio je dug. No predmet geometrije je proučavanje tih opštih činjenica, zajedničkih svim geometrijskim objektima izvesne vrste. Te objekte možemo menjati, transformovati u izvesnim granicama — opšta činjenica ostaje. Tako npr. možemo menjati i položaj i veličinu i oblik trougla — činjenica da njegovi uglovi iznose zajedno dva prava ugla ostaje. Stanovište menjanja i preobražavanja bilo je u stvari skriveno sadržano u geometriji još od prvih njenih početaka. I, stojalo se već i na stanovištu uopštavanja, koje odlikuje svako mišljenje u pojmovima. Mi smo ga malopre našli i u visinama složenih problema savremene geometrije.

Ali ovim razmatranjem prilazimo istodobno stanovištu teorije grupa. Ono je dovelo krajem prošlog veka Klajna da odredi na izvestan način predmet elementarne geometrije. Ako se zapitamo kako smemo menjati figure da bi se održale osobine koje proučava elementarna geometrija, vidimo da položaj i veličinu figure smemo kako bilo menjati, samo „oblik" ne, jer npr. krug treba da ostaje krug. Polazna i promenjena figura moraju biti slične. Transformacije koje održavaju sličnost zovu se ekviformnim. Tačnije, one se sastoje iz translacija, rotacija oko osa, simetrija u odnosu na ravan i homotetija. Ono što se postiže uzastopnim ekviformnim transformacijama može se postići i jednom takvom transformacijom ili, kako se u teoriji grupa kaže, proizvod ekviformnih transformacija je opet ekviformna transformacija. To je ono glavno svojstvo koje odlikuje takozvanu grupu uopšte. Elementarna geometrija proučava osobine koje ostaju invarijantne spram svih ekviformnih transformacija. Nju definiše grupa tih transformacija. Tako je svaka vrsta geometrije okarakterisana izvesnom grupom transformacija prostora ili u prostoru.

Ovo stanovište je unelo mnogo svetlosti u pojedine geometrije i u njihove uzajamne odnose. Ono npr. uvršćuje u grupu topoloških transformacija projektivnu grupu kao podgrupu, afinu grupu kao podgrupu projektivne, ekviformnu kao još užu podgrupu. Tako se štaviše i elipsna i hiperbolna geometrija mogu izvesti iz projektivne grupe.

No vratimo se još jednom u 17. stoleće. Samo na pola veka iza otkrića analitičke geometrije dolazi u radovima Njutna i Lajbnica do izraza novo otkriće, jedno od najvećih u povesti matematike: pronašla se takozvana infinitezimalna metoda, matematička analiza. U njenom postanku je geometrija već imala osnovnu ulogu. Setimo se samo problema tangente, rektifikacije i kvadrature. Sad je trebalo da infinitezimalni račun prožme geometriju. Opštu osnovu je pružala analitička geometrija. Tako se razvila primena analize na geometriju, istinsko ispitivanje krivih linija, krivih površi, geometrijskih oblika vrlo opštih vrsta, pred kojima je do tog časa misao stojala nemoćna, ograničena na mali broj pristupačnih primera. Infinitezimalni račun je doneo novo stanovište s nedoglednim vidicima na sve strane.

U geometriji bilo je osobito pogodno posmatrati takozvane beskrajno male veličine, bolje reći diferencijale. U početku je analitička geometrija proučavala oblike samo u njihovoj celini, no u mnogim i nekim glavnim pitanjima behu teškoće nesavladive. One su se savladale tek kada se našao put da se zaobiđu. Trebalo je po infinitezimalnoj metodi posmatrati geometrijske odnose o malome, u blizini pojedinih tačaka, gde se beskrajno male veličine višeg reda mogu zanemariti, te se oblici uprošćavaju, krivo se može zameniti pravim i računski izrazi postaju osobito jednostavni. To je stanovište diferencijalne geometrije. Ono nas je odvelo u proširivanju i produbljivanju pojimanja prostora dalje no što bi sva ranije pomenuta stanovišta mogla zajedno sama. S pravom se smatra da je uloga diferencijalne geometrije najznačajnija u obrazovanju savremenog pojma prostora.

Potsetimo se prvo teorije krivih površi. Ako su tačke jedne površi određene u dekartovskom koordinatnom sistemu funkcijama

$$x = x\ (u,\ v),\ y = y\ (u,\ v),\ z = z\ (u,\ v)$$

dvaju parametara, imamo za svaku stalnu vrednost u ili v izvesnu liniju na površi. Sve te linije obrazuju mrežu izvesnog krivolinijskog koordinatnog sistema na površi. Diferencijal ds dužine kakve bilo krive na površi dobiva se u zavisnosti od diferencijala du i dv, kao što je poznato, iz odnosa

$$ds^2 = g_{11}\ du^2 + 2\, g_{12}\ du\ dv + g_{22}\ dv^2,$$

gde su g_{11}, g_{12}, g_{22} izvesne funkcije parametara u i v. Desni analitički izraz ima zaista osnovnu ulogu u celokupnoj teoriji površi. Ta homogena forma zove se osnovna metrička forma površi. Merenje dužina, uglova i površina površi, celokupna metrika površi potpuno je određena koeficijentima g_{ik}.

Da bi se razradila geometrija na nekoj površi nije dakle potrebno poći od koordinata x, y, z, od oblika i položaja površi u prostoru. Dovoljno je utvrditi kakve bilo koordinate u, v na površi i pronaći funkcije g_{ik}. Ove se mogu izračunati samim merenjem diferencijala ds. Dakle, da bi se razvila geometrija na površi dovoljna su merenja na samoj njoj, ne mora se izlaziti van nje u prostor. To je takozvano unutarnje stanovište, s koga razvijamo unutarnju geometriju neke površi.

Napuštanje spoljnjeg stanovišta i prihvatanje unutarnjeg postaje osobito potrebno kad se prethodno promatranje prenese na prostore triju i više dimenzija. Mogu se, pre svega, po analogiji na krive površi, zamisliti krivi prostori, koji stoje u euklidskim prostorima s više dimenzija kao što neka površ stoji u trodimenzionom euklidskom prostoru. Gledajući s unutarnjeg stanovišta, potrebne su za trodimenzioni krivi prostor tri kakve bilo koordinate u_1, u_2, u_3. Tada se metrička forma neposredno uopštava:

$$ds^2 = \sum_{1}^{3}{}_{ik}\, g_{ik}\, du_i\, du_k.$$

Njom je unutarnja geometrija krivog prostora potpuno određena.

Značajnu ulogu ima pojam krivine takvog prostora. To je uopštenje Gausove potpune krivine krivih površi. Sfera, pseudosfera i ravan su površi čija je potpuna krivina u svim tačkama jednaka, stalna: za sferu pozitivna, za pseudosferu negativna, za ravan nula. Tako je i u one tri neeuklidske geometrije: odlikuje ih stalnost potpune krivine; u elipsnom prostoru ona je pozitivna, u hiperbolnom negativna, u euklidskom (parabolnom) nula. Riman, koji je te odnose prozreo, mogao je tada lako izgraditi ideju svoga opšteg, rimanskog prostora, u kome se krivina menja od tačke do tačke, kao na makakvoj obloj površi. Pri tome je uzeo u obzir koji bilo broj dimenzija. Polazna tačka je uvek metrička forma

$$ds^2 = \sum_{1}^{n}{}_{ik}\, g_{ik}\, du_i\, du_k.$$

Veličanstvena je opštost tih rimanskih prostora. Euklidski prostor i dva njemu srodna neeuklidska su sasvim posebni slučaji. — No činilo se da nikad matematička misao nije u smelosti svojoj otišla dalje od realnosti, nego tada. Nije li već Lobačevski bio u očima sveta tvorac praznih, nepotrebnih apstrakcija? Pa ipak, upravo ti najapstraktniji Rimanovi prostori pokazali su se u Ajnštajnovoj opštoj teoriji relativnosti najbliži zbilji. Njihov proizvoljni oblik bio je upravo potreban da bi se mogao prilagoditi složenoj stvarnosti svemira.

Tu dobiva kako uopštavanje tako i unutarnje stanovište najkonkretniji značaj. Hoćemo li da konkretnim merenjem, recimo u smislu astrofizike, utvrdimo geometriju koja u svetu vlada, moramo merenja vršiti u njemu; ne možemo izići iz prirodnog prostora u nekakav četvorodimenzioni prostor i odonud proučavati ustrojstvo našeg prostora. Tu je dakle unutarnje stanovište jedino moguće.

U tom krugu problema, koji je došao do veličanstvenog izraza u teoriji relativnosti, stali smo s geometrijom na novo stanovište, jedno od najznačajnijih, na fizičko stanovište. Pitamo se kakva geometrija vlada u realnom prostoru i znamo da nam odgovor mogu dati samo posmatranja i eksperimenti. Već u specijalnoj teoriji relativnosti primoravaju nas činjenice fizike da prostor ne posmatramo odvojeno, već u jedinstvu s fizičkim zbivanjima. Nisu zbivanja podvrgnuta prostoru, već je prostor organski deo jedne, nerazdvojne vasionske zbilje. Činjenice traže da prostor i vreme stopimo u jedinstvo zasnovano na rasprostiranju svetlosti i tako izgradimo širu, prirodi srodniju matematičku teoriju. No i tada obuhvata geometrija sve svojom neeuklidskom četvorodimenzionom prostornom shemom, koja se u teoriji relativnosti naziva „svet."

U opštoj teoriji relativnosti ide to veliko stapanje dalje; gravitacija prilazi jedinstvu; geometrija gubi još više od svoje apstraktne nezavisnosti; ali opet biva u stanju da obuhvati sve snagom opštih rimanskih ili još opštijih prostora. Prostorno-vremenski svet je četvorodimenziono rimansko prostranstvo, njegova promenljiva krivina zavisi od gustine materije na pojedinim mestima. Usled postojanja toga stanovišta može se reći da geometrija uvire u fiziku; u jedinstveno gledanje na prirodu, iz koga je nekad, pre više od dve hiljade godina geometrija potekla. Ali, sad su to ogromne oblasti matematičkih teorija, koje protkivaju naša duboka saznanja o svetu.

Dalje u posmatranju raznih stanovišta u geometriji nećemo ići. Osvrnimo se samo još na vektorski i tenzorski račun, koji se često ubraja u geometriju, i na široko polje primena geometrije. Vektori nisu čisto geometrijski objekti, tenzori još manje. Opšte stanovište je matematičko, ali ne geometrijsko. Vektori su doduše smešteni u prostoru, imaju svoj smer, ali nisu nikakve duži. Npr. u mehanici sila je vektor, ali nije duž, nije geometrijski objekt, ma da ima smer i napadnu tačku. No vektori se mogu primeniti u geometriji, kao i u raznim oblastima teorijske fizike, i prikazati orijentisanim dužima.

Primene geometrije su nebrojene, ali s njima napuštamo polje same geometrije pa i predmet ovog razmatranja. O geometrijskim stanovištima u drugim naukama i oblastima ljudske delatnosti nismo nameravali govoriti. Svakom je poznato da se geometrijski mogu prikazati razne vrste objekata i u matematici i van nje, i da se razni predmeti mogu proučavati metodama geometrije. No osvrnuvši se ukratko na stanovišta u geometriji, izneli smo letimičan pregled i same geometrije i njenog razvoja ukoliko nam je to u tako zbijenom posmatranju bilo moguće.

SUR LES POINTS DE VUE QUI DOMINENT LA GÉOMÉTRIE

PAR M. RADOJČIĆ

Conférence, donnant un aperçu des diverses branches de la géométrie en considérant les principaux points de vue auxquels on ce place en géométrie.

FUNKCIJE I PRESLIKAVANJA U VEZI SA SREDNJOM ŠKOLOM

ĐURO KUREPA

Pojam funkcije i uopće preslikavanja od osnovne su važnosti u čitavom duhovnom životu čovjeka. U srednjoj školi sretne se učenik sa mnogo i vrlo raznovrsnih preslikavanja i funkcija; nešto svijesno, a nešto, većim dijelom, nesvijesno. Čak i s obzirom na funkcije u užem smislu, učenik se upozna s pojedinim funkcijama i postupkom kako se dotična funkcija izračunava, a da ipak ne shvati, da se pritom radi o odredjenoj funkciji. Tako na pr. kod logaritmiranja od učenika se traži da odredi karakteristiku i mantisu logaritma, ali mu nije svijesno zadano da u tome postupku vidi odredjenu funkcionalnu zavisnost medju zadanim brojem i nadjenom karakteristikom ili mantisom. A da ne govorimo koliko malo učenik čuje o preslikavanju (povezivanju) raznovrsnih elemenata medju sobom kao brojeva na jednoj strani i tačaka ili crta na drugoj strani.

Kod funkcije je od osnovne važnosti da znamo s k u p S u kojem ćemo funkciju definirati, a onda postupak f kojim ćemo svakom elementu (broju, tački, atomu) x toga skupa S t.j. svakoj vrijednosti nezavisne promjenljive x pridijeliti odredjen predmet $f(x)$; naravno, $f(x)$, sa svoje strane, može biti broj, tačka, linija itd. Ako je slučajno $f(x)$ jedan ili više realnih brojeva, tada se funkcija f zove r e a l n o m.

Najčešće se podje od skupa C_1, odnosno C svih realnih brojeva[1]) (linearni kontinuum), pa se onda raznim računskim postupcima određuje broj ili brojevi $f(x)$. Tako na pr. ako se svaki x pomnoži sa 3 i dobivenom proizvodu doda 5, dobije se funkcija $3x + 5$.

Da se medjutim radi i o općenitijim preslikavanjima (funkcijama), ma da se to izričito ne kaže, pokazaće nam slijedeći primjeri.

1. K o n a č n i i b e s k o n a č n i n i z o v i. Svakako, od svih brojeva najbolje poznajemo; p r i r o d n e b r o j e v e ; pogotovo prva dva prirodna broja

$$1, 2$$

i njihov skup $\{1, 2\}$. Svako jednoznačno preslikavanje f skupa $\{1, 2\}$ zove se d v o č l a n i m n i z o m ili u r e d j e n o m d v o j k o m, pa se $f(1)$ zove prvim, a $f(2)$ drugim članom dotičnog niza; sam niz se ispisuje ovako :

$$f(1),\ f(2) \text{ ili još češće } f_1,\ f_2 \text{ odnosno } (f_{(1)}, f_{(2)}) \text{ ili } (f_1, f_2).$$

Napose se može govoriti o realnim jednoznačnim funkcijama definiranim u skupu $\{1, 2\}$.

[1]) Podsjetimo čitaoca da pod realnim brojem razumijevamo svaki obični, decimalni, broj. Oni decimalni brojevi koji su periodični zovu se r a c i o n a l n i m a; iracionalni brojevi jesu neperiodski decimalni brojevi.

Potpuno slično definira se tročlani niz ili uredjena trojka kao bilo koja funkcija u tročlanom skupu $\{1, 2, 3\}$. Niz od n članova ili uredjena n-orka jest svaki postupak f kojim svakom od brojeva $1, 2, \ldots, n$ pridijeljujemo potpuno odredjen predmet (broj, tačku, liniju itd.); sam niz se na vidan način prikazuje ovako:

$$f(1), f(2), \ldots, f(n)$$

ili još češće

$$f_1, f_2, \ldots, f_n$$

da se naznači da „nezavisna promjenljiva" označuje prirodan broj. Tako na pr. govori se o nizu od 5 kvadrata

$$K_1, K_2, K_3, K_4, K_5$$

pri čemu je za $n = 1, 2, 3, 4$, kvadrat K_{n+1} upisan u kvadrat K_n. Predmeti $f(1), \ldots, f(n)$ zovu se članovi niza i to po redu: prvi, drugi, $\ldots, n$-ti član niza. Tako na pr. govori se o prirodnom nizu e kemijskih elemenata; kod njega je $e_1 = H$, $e_2 = He$, $e_{82} = Pb$ (olovo) $e_{92} = U$ (uran).

Svako jednoznačno preslikavanje f skupa N prirodnih brojeva zove se beskonačan niz; on se obično prikazuje ovako:

$$f(1), f(2), \ldots, f(n), f(n+1), \ldots$$

ili

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, f_{n+1}, \ldots$$

Tako na pr. govori se o nizu recipročnih vrijednosti negativnih cijelih brojeva:

$$\frac{1}{-1}, \frac{1}{-2}, \ldots, \frac{1}{-n}, \ldots$$

Govori se o beskonačnom nizu kvadrata i kružnica

$$\square_1, \bigcirc_1, \square_2, \bigcirc_2, \ldots$$

pri čemu je kružnica $\bigcirc_n$ upisana u kvadrat $\square_n$, a opisana oko kvadrata $\square_{n+1}$.

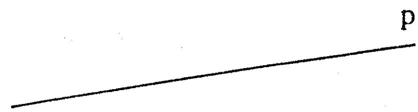
Konačno svaki predmet za sebe možemo shvatiti jednočlanim nizom.

Na taj način vidimo kako pojam niza pada u okvir funkcija koje su definirane u cijelom skupu prirodnih brojeva ili kojem njegovu dijelu. Pritom vidimo da vrijednost funkcije (= član niza) može biti bilo kakav stvaran ili zamišljen predmet.

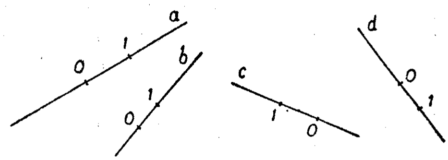
To je jedna vrsta preslikavanja (funkcija) koja dolazi u srednjoj školi, a koju smo htjeli naročito istaći.

2. Koordinatna os kao osnovni primjer preslikavanja (veze).

Koordinatna os ili brojevni pravac jest svaka prava crta (linija) na kojoj ističemo dvije tačke, pa jednoj pridijelimo (koordiniramo) broj 0, a drugoj broj 1. Ona istaknuta tačka kojoj je pridijeljena 0 zove se *početna tačka* ili *ishodište*, a označujemo je sa O (početno slovo latinske riječi *origo-početak*) ili (*o*) ili naprosto sa 0 da time naročito istaknemo da je tačka povezana (koordinirana) sa brojem 0. Ona druga istaknuta tačka pravca označuje se sa J (jedinica) ili sa (1) ili 1 ili kakvim drugim znakom (na pr. x_1, f_1 i sl.) koji bi nas podsjetio na jedinicu. Ona se naziva *jediničnom tačkom*.



Ovaj pravac nije brojevan



Svaki od pravaca a, b, c, d, je brojevan

Smjer na brojevnom pravcu od ishodišta prema jediničnoj tački zove se *pozitivan*; suprotni smjer zove se *negativni smjer brojevnog pravca*.

Uklonimo li sa koordinatne osi *ishodište* 0, raspada se ona u dva potpuno odredjena polupravca; onaj od tih dvaju polupravaca u kojem leži i jedinična tačka, zove se *pozitivna poluos koordinatne osi*. Negativna poluos je ona preostala polovina.

Prema tome:

Svaka koordinatna os sastoji se od tri posve odredjena dijela i to od ishodišta, od pozitivne poluosi i od negativne poluosi.

Dužinu $\overline{01}$ što je odredjuje ishodišna i jedinična tačka upotrebljavamo kao *jedinicu za mjerenje* (*jedinična dužina*). Dužinu naime $\overline{01}$ što je odredjuju te dvije istaknute tačke uzimamo kao *jedinicu za mjerenje* po brojevnom pravcu. Kliže li se po pravcu dužina $\overline{01}$ tako da joj početna tačka 0 dodje u tačku imena 1, drugi njen kraj pašće u tačku kojoj ćemo pridijeliti (koordinirati) broj 2, pa je možemo i označiti sa (2) ili 2 i zvati *tačka 2 zadanog brojevnog pravca*. Daljim nanošenjem jedinične dužine $\overline{01}$ preko tačke 2 dolazimo do *tačke* 3 brojevnog pravca, pa do tačke 4 itd. Pokliznemo li po brojevnom pravcu jediničnu dužinu $\overline{01}$ ne preko točke (1) nego u suprotnom, negativnom, smjeru tako da još kraj imena (1) dodje u tačku (0), pada prvi kraj (0) u odredjenu tačku brojevnog pravca kojoj ćemo dodijeliti broj —1 i nazvati je tačkom (—1) ili —1 brojevnog pravca. Daljim klizanjem preko —1 dolazimo do tačke —2, pa do tačaka (—3), (—4), (—5) itd.

Prirodno je da sredini jedinične dužine $\overline{01}$ pridijelimo broj $^1/_2$ i da je nazovemo *tačkom* ($^1/_2$) *ili* $^1/_2$ *koordinatne osi*. Nanosimo li dužinu $\overline{0\frac{1}{2}}$ u smjeru od 0 prema 1 recimo 7 puta, doći ćemo do odredjene tačke pravca, koju ćemo obilježiti sa $\left(7\cdot\frac{1}{2}\right)$ odn. $\left(\frac{7}{2}\right)$ ili $\frac{7}{2}$. Da smo nanosili u suprotnom smjeru, prirodno bi bilo da dobivenu tačku naznačimo sa $\left(-\frac{7}{2}\right)$ ili $-\frac{7}{2}$.

Na taj način suprotnim brojevima pridijeljene su na koordinatnoj osi tačke koje su položene simetrično prema početku 0.

Prirodno je takodjer da broju $\sqrt{2}$, za koji znamo da je jednak dijagonali jediničnog kvadrata, pridijelimo na koordinantnoj osi onu tačku što je dobijemo kad počam od 0 nanesemo u pozitivnom smjeru dijagonalu kvadrata kojemu je stranica jednaka jediničnoj dužini. Sad nam je jasno kako ćemo nacrtati tačku koja bi odgovarala broju $\frac{\sqrt{2}}{3}$ ili $-\frac{5}{2}\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $-\frac{2}{5}\sqrt{7}$ itd.

D e f i n i c i j a. A p s c i s a t a č k e T n a k o o r d i n a t n o j o s i j e s t b r o j k o j i p o s v o j o j v r i j e d n o s t i k a z u j e k o l i k o s e p u t a j e d i n i č n a d u ž i n a n a l a z i u d u ž i n i $\overline{0T}$; t a j b r o j i m a b i t i p o z i t i v a n i l i n e g a t i v a n, v e ć p r e m a t o m e d a l i s e t a t a č k a T n a l a z i u p o z i t i v n o j i l i n e g a t i v n o j p o l u o s i; s a m o m i s h o d i š t u p r i p a d a b r o j 0 k a o a p s c i s a.

Na taj način dobivamo ovu o s n o v n u v e z u i z m e d j u r e a l n i h b r o j e v a i t a č a k a p r a v c a: s v a k o m r e a l n o m b r o j u p r i p a d a n a k o o r d i n a t n o j o s i j e d n a j e d i n a v l a s t i t a t a č k a, k o j o j j e t a j b r o j a p s c i s a. Obrnuto, s v a k o j t a č k i k o o r d i n a t n e o s i p r i p a d a j e d a n j e d i n i r e a l a n b r o j k a o n j e z i n a a p s c i s a.

U p a m t i. Apscisa tačke je neimenovan broj (a ne na pr. dužina). Pomoću svoje apscise, tačka je potpuno odredjena na koordinatnoj osi. Zato i apscisa može da posluži za oznaku dotične tačke. A p s c i s a n e k e t a č k e k o o r d i n a t n e o s i m e t n u t a u z a g r a d u m o ž e d a p o s l u ž i z a o z n a č i v a n j e t e t a č k e i n j e n o g p o l o ž a j a n a k o o r d i n a t n o j o s i.

Ako pak tačka već od prije ima svoju oznaku na pr. A, M, T , i sl., onda se nova oznaka pomoću apscise stavlja neposredno iza stare oznake, pa se tako govori o tački A ili A(3) ili (3). Slično se govori o tačkama $B(-2)$, $M\left(\frac{3}{4}\right)$, $C\left(7\frac{\sqrt{2}}{5}\right)$, $D(\log 17)$, $E(-\cos 50)$ itd.; a govori se i naprosto o tačkama (5), $\left(-\frac{7}{3}\right)$, $(\cos 1)$, $(\log 72{,}14)$ itd.

Koordinatna os omogućuje dvostruk prelaz: s jedne strane prelaz od brojeva (apscisa) ka svojim tačkama te osi, te obrnuto, prelaz od tačaka ka brojevima — svojim apscisama.

Zato se i može govoriti o tačkama (0), (5), (—4)[1], pa čak i o tačkama —1, —8, 17, log 2 itd. na koordinantnoj osi, odnosno o brojevima A, M, N i sl., ako su A, M, N odredjene tačke koordinatne osi.

Eto, to preslikavanje igra osnovnu ulogu; na osnovu njega postaje svaki pravac nosiocem svih realnih brojeva.

3. K o o r d i n a n t n i s i s t e m u r a v n i n i jest sistem od dvije koordinatne osi te ravnine od kojih jedna (t.zv. ordinatna os ili os ipsilona, os y) nastaje iz druge (t. zv. apscisna os ili os iksova, os x) ro-

---

[1]) Čitaj: nula, pet, minus četiri.

tacijom oko zajedničkog početka 0 za 90° u pozitivnom smislu (t.j. suprotno od smjera kretanja kazaljki na satu).

Koordinatnim sistemom povezujemo tačke ravnine i uredjene dvojke brojeva. Naime, neka je M proizvoljna tačka (ravni); povučemo li kroz M pravac paralelno s ordinatnom osi, sjeći će on apscisnu os u posve odredjenoj tački M_x ; ona s obzirom na apscisnu os ima posve odredjenu apscisu x, pa se broj x zove apscisom zadane tačke M s obzirom na zadani koordinatni sistem. Isto tako, povučemo li kroz M pravac paralelno s apscisom osi, sjeći će on ordinatnu os u odredjenoj tački; apscisa te tačke s obzirom na ordinatnu os zove se ordinatom zadane tačke M s obzirom na zadani sistem koordinata. Apscisa x i ordinata y tačke M s obzirom na zadani koordinatni sistem zovu se jednim imenom koordinate tačke M. Da se vidno istakne veza medju M i brojevima x i y piše se $M = M(x, y)$ ili $M(x, y)$ pa se govori o tački $M(x, y)$ odnosno o tački (x, y).

Prema tome, svakoj tački M (ravni) pripada uredjena dvojka brojeva x i y; prvi član te dvojke jest apscisa, a drugi član jest ordinata tačke M. Važi i obrat, svakoj uredjenoj dvojki x, y brojeva pripada jedna jedina tačka, naime tačka (x, y), kojoj je prvi član dvojke apscisa, a drugi član dvojke ordinata.

Na taj način vidimo kako čitava ravan postaje nosiocem uredjenih dvojki brojeva t.j. svih jednoznačnih realnih preslikavanja dvočlanog skupa $\{1, 2\}$ koji je sastavljen od brojeva 1 i 2.

4. Brojevna (trigonometrijska, koordinatna) kružnica. Trigonometrijske funkcije.

Realne brojeve možemo smjestiti ne samo na beskonačnom pravcu nego i na konačnoj kružnici.

Stvarno, ako na zadanu kružnicu k nacrtamo tangentu t, na t prenesemo zadanu koordinatnu os sa svim realnim brojevima, pa onda zamislimo da se kružnica k neprestano kotrlja (bez klizanja) po tangenti t, dotaknuće pritom kružnica k svaku tačku T tangente svojom jednom jedinom tačkom T'; ako je $T = T(x)$ t.j. ako je x apscisa tačke T na koordinatnoj osi t, možemo broj x smjestiti u onu tačku T' kružnice kojom će se kružnica dodirnuti pravca t u tački T.

Najzgodnije je tangentu t proglasiti koordinatnim (brojevnim) pravcem ovako: tačku dodira uzeti za koordinatni početak 0, radius kružnice za jediničnu dužinu, a broj 1 smjestiti na t tako da idući po t u pozitivnom smjeru krug k ostaje na pozitivnoj poluravni t.j. nalijevo. Ako tada po kružnici namotavamo pozitivnu koordinatnu poluos u pozitivnom smislu, a negativnu poluos u negativnom smislu, dospjeće svaka tačka $T(x)$ sa brojevnog pravca a time i svaki broj x na potpuno odredjeno mjesto kružnice. Kružnica nosi sve brojeve.

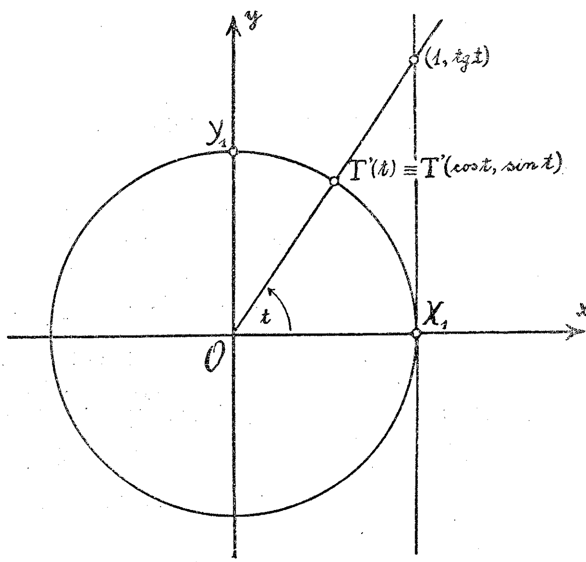
Pritom u istu tačku kružnice pada aritmetički dvoniz brojeva,[1]) kojemu je razlika jednaka opsegu 2π kružnice (radius je $= 1$).

Broj x može se zvati apscisom tačke T' s obzirom na kružnicu k.

Sa brojevnom kružnicom kao nosiocem (spremištem) svih realnih brojeva trebalo bi da budemo načistu i sprijateljeni kao i sa brojevnim pravcem.

Pomoću brojevne kružnice možemo dati jednostavnu definiciju trigonometrijskih funkcija.

Pridružimo trigonometrijskoj kružnici k koordinatni sistem ovako: njegov početak neka bude u središtu 0 kružnice; jedinična tačka X_1 apscisne osi neka bude u onoj tački kružnice u kojoj leži broj nula; time je već odredjeno, da je jedinična tačka Y_1 ordinatne osi tamo gdje na kružnici leži broj $\frac{\pi}{2}$. Na taj način svaka tačka $T'(x)$ kružnice ima svoju vlastitu apscisu x s obzirom na kružnicu, ali ima odredjenu apscisu i ordinatu s obzirom na nacrtani koordinatni sistem; pomoću broja x odredjena je tačka T' na kružnici, kao i njene koordinate s obzirom na koordinatni sistem: ove se u svojoj zavisnosti od x zovu kosinus i sinus broja x i označuju sa $\cos x$, $\sin x$, tako da ista tačka T' kružnice glasi $(\cos x, \sin x)$.



Tangens broja x vidi se sa slike: to je ordinata tačke u kojoj pravac $OT'(x)$ siječe pravac koji se kruga dotiče u jediničnoj tački X_1 apscisne osi.

---

[1]) Dvoniz je svako preslikavanje skupa svih cijelih brojeva: osnovni dvoniz jest sam skup $\quad -n, -n+1, \ldots, -1, 0, 1, 2, \ldots$ svih cijelih brojeva. Dvoniz je aritmetički, ako je razlika izmedju svakog člana dvoniza i prethodnog člana dvoniza jedan te isti broj — t. zv. razlika dvoniza.

Analogno, apscisa tačke u kojoj pravac OT' siječe pravac koji kružnicu dodiruje u jediničnoj tački Y_1 ordinatne osi zove se kotangens broja x.

Vrlo jednostavna očitavanja sa slike (simetrija s obzirom na koordinatne osi i koordinatni početak) dovode nas odmah do osnovnih trigonometrijskih formula. Tako na pr. činjenica, da su suprotni brojevi x i $-x$ smješteni na brojevnoj kružnici simetrično s obzirom na njen početak (dakle slično kao što važi za koordinatnu os), pa prema tome i simetrično s obzirom na apscisnu os, ta činjenica se odrazuje u poznatim formulama da je

$$\sin(-x) = -\sin x\ ,\ \cos(-x) = \cos x.$$

Primjedba. Naravno, da se brojevi mogu smjestiti i na kakvu drugu liniju (zatvorenu, konačnu ili beskonačnu) kao na pr. na duž, trougao, kvadrat, na parabolu; na jednu granu hiperbole itd. Tako na pr. ako brojevnu os presavinemo (poput beskonačne trake poštanskih maraka) u svima cjelobrojnim tačkama, pa te jedinične komade slažemo jedne na druge kao da su to poštanske marke, postaće jedinična duž nosiocem svih realnih brojeva: na njen početak pašće svi parni brojevi 0, ± 2, ± 4, . . . a na njen kraj smjestit će se svi neparni brojevi; u samoj sredini duži leže svi brojevi oblika $n+\frac{1}{2}$, gdje je n ma koji cijeli broj. Na taj način svakom broju pripada jedna jedina tačka dok obrnuto svakoj tački pripada jedan jedini broj tek onda ako se linija svakom svojom tačkom raspada u dva beskonačno duga komada. Ako je nosilac brojeva konačne dužine (duž ili luk smatramo zatvorenom linijom koju obadjemo tek onda kad čitavu duž predjemo od jednog kraja do drugog i natrag), onda položaj tačke zavisi od broja i taj je položaj isti kad se broj promijeni za dužinu zatvorene linije.

To je tako jednostavan, prirodan i važan primjer periodskih funkcija. Napose, time što se položaj tačke na brojevnoj kružnici ne mijenja, kad se broj promijeni za opseg 2π kružnice (radius je jedinica) dobivamo osnovnu periodsku funkciju, a posljedica toga jest periodičnost trigonometrijskih funkcija.

5. Razna geometrijska preslikavanja. Time što svakom trokutu odredjujemo težište, imamo odredjena preslikavanja trokuta u pojedine tačke. Isto tako imamo posla s odredjenim preslikavanjem trokuta kad tražimo središte kružnice koja je oko trokuta opisana.

Simetrija s obzirom na zadanu tačku, pravac ili ravan tri su dalja primjera preslikavanja: tu svakoj tački T odredjujemo potpuno odredjenu tačku T' takozvanu simetričnu sliku zadane tačke T. Simetrična slika neke figure jest skup slika svih tačaka od kojih je ta figura sastavljena. Tako na pr. simetrična slika kocke s obzirom na tačku u kojoj se dijagonale kocke sastaju jest ta ista kocka, pa se u tom i sastoji centralna simetrija kocke. Sinusoida ima beskonačno mnogo središta simetrije (sve prevojne tačke sinusoide); svaka tačka pravca jest odredjeno središte simetrije pravca.

Projiciranje je takodjer odredjeno preslikavanje.

Zgodan primjer preslikavanja dobijemo kad svakoj tački pridružimo njenu polaru s obzirom na zadan čunjosjek (recimo elipsu) odnosno svakom pravcu pridružimo pol njegov s obzirom na zadan čunjosjek.

Promatramo li lukove krivulje $y = \log x$ za koje je

$$10^n \leqslant x < 10^{n+1}, \text{ (} n \text{ je cio broj)}$$

pa pomaknemo li svaki taj luk paralelno tako da njegov lijevi kraj dodje na ordinatnu os, tada svi ti preneseni lukovi obrazuju baš krivulju $y = r(\log x)$.

Medju funkcijama specijalno se ističu one koje uzimaju uvijek jednu te istu vrijednost, bez obzira na pripuštenu vrijednost nezavisno promjenljive; to su t. zv. k o n s t a n t e. Tako na pr. osnovna jednakost $\frac{a}{b} = \frac{ax}{bx}$ za $x \neq 0$ pokazuje da je svaki razlomak funkcija broja x i to takova funkcija koja prima jednu te istu vrijednost za svaki $x \neq 0$. Za samu nulu ta funkcija nije definirana. Grafikon $y = \frac{ax}{bx}$ funkcije $\frac{ax}{bx}$ podudara se sa pravcem $y = \frac{a}{b}$ iz kojega je iskinuta tačka $\left(0, \frac{a}{b}\right)$.

8. N e k o l i k o t i p o v a f u n k c i j a. O b r a z o v a n j e n o v i h f u n k c i j a. Medju najjednostavnije funkcije spadaju: linearne $ax+b$, razlomljeno linearne $\frac{ax+b}{cx+d}$, kvadratne funkcije $ax^2 + bx + c$, trigonometrijske funkcije, potencija x^α, eksponencijalne funkcije a^x, logaritamska funkcija $\log x$ itd. Pritom se podrazumijeva da je x realan broj i to bilo kakav, uz jedno jedino ograničenje, da dotična funkcija ima realno značenje. Tako na pr. kod logaritma se podrazumijeva da je logaritmand pozitivan realan broj.

Od elementarnih funkcija mogu se obrazovati i zamršenije funkcije putem slaganja, krpljenja itd. Slaganje se sastoji u tom da se argument jedne funkcije zamijeni kakovom funkcijom: tako na pr. $\cos x^2$ je složena funkcija koja nastaje slaganjem elementarnih funkcija kosinusa i kvadriranja.

K r p l j e n j e se sastoji u tome da se funkcija u različitim područjima definira na različite načine, a ne nužno onake kako bi čovjek očekivao. Tako na pr. funkcija $y = x$ definirana je za svaki x isto kao i funkcija $y = -x$; medjutim ograničimo li za prvu funkciju nezavisnu varijablu da bude $\geqslant 0$, a za drugu da bude < 0, dobije se k r p l j e n a f u n k c i j a koja se zove m o d u l, i označuje sa $|x|$ i koja je dakle definirana ovako:

$$\begin{aligned} |x| &= x \quad &&\text{za} \quad x \geqslant 0, \\ |x| &= -x \quad &&\text{za} \quad x < 0. \end{aligned}$$

Slika te funkcije podudara se sa polupravcima koji raspolavljaju prvi i drugi kvadrant ravni. Ako je $f(x) = \sin x$ za $x \leqslant 0$

$$= 2x \quad \text{za } x > 0,$$

onda je f jedna krpljena funkcija, a geometrijski je predočena sa pola sinusoide i pola pravca. Isto tako funkcija h za koju je

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \quad \text{za} \quad x < 0 \\ &= 1 \quad \text{za} \quad x > 0 \end{aligned}$$

nastaje krpljenjem dviju konstanata.

Kamen ispušten iz visine h nalazi se u času t u nadmorskoj visini $v(t)$; očigledno je da je $v(t)$ krpljena funkcija.

Zamijenimo li negativne vrijednosti sinusa sa nulom, dobije se krpljena funkcija koja se pojavljuje u tehnici.

R a č u n s k e o p e r a c i j e s f u n k c i j a m a. Podvrgnemo li funkcije računskim operacijama, dobićemo često ponovno funkcije. Sabiranjem konačno mnogo funkcija oblika $a_n x^n$ (n cio broj $\geqslant 0$) dobiva se najopćenitiji algebarski polinom. Izmnažanjem konačno mnogo funkcija oblika $x - a_n$ i proizvoljna broja b dobiva se takodjer najopćenitiji algebarski polinom (Gauss). Sabiranjem nekoliko funkcija oblika $a_n \cos n x$, $b_n \sin n x$ (n cio broj) nastaju vrlo raznovrsne funkcije, a jedna od bitnih naučnih tekovina jest činjenica da se dosta opsežna klasa funkcija može prikazati sumom beskonačnog reda funkcija kojemu su svi članovi oblika $a_n \cos n x + b_n \sin n x$; pritom je n cio broj $\geqslant 0$, dok su a_n, b_n odredjeni brojevi; ta se činjenica upotrebljava u vrlo raznovrsnim razmatranjima fizike, atomistike, kemije (otuda golema važnost trigonometrijskih funkcija).

9. F u n k c i j e i p r i r o d n i p o j a v i. Izvor sve novih i novih funkcija jest produbljeno izučavanje prirodnih i društvenih pojava. Tu vidimo najraznoličnije povezanosti pa i takove koje još ne znamo prevesti na matematički jezik. Jedan od bitnih znakova napretka pojedine nauke sastoji se u pronalaženju veza medju pojedinim njenim dijelovima. Tako na pr. u fizici znamo za povezanost magnetskih, električkih i optičkih pojava. Našlo se da karakter talasnih elektromagnetskih pojava zavisi od dužine valova λ te pojave:

Ako je $4 \cdot 10^{-4}$ cm $\leqslant \lambda \leqslant 7 \cdot 10^{-4}$ cm, tada se to talasanje zove svjetlost, a zapažamo je svojim okom;

ako je $10^3 \leqslant \lambda \leqslant 10^5$ cm, tada se to talasanje zove radiovalovi, jer se upotrebljava u radiotehnici. Za ultravioletno svjetlo je λ oko 10^{-5} cm.

Ako je λ oko 10^{-8} cm, tada se radi o Röntgenovim zrakama; za kozmičke je zrake λ ispod sićušnog broja 10^{-12} cm.

Koliki je to uspjeh nauke da tako raznovrsne pojave svodi na zajedničko promatranje u svojoj zavisnosti od brojeva! Čovjek je našao da se energija iz jednog oblika može prevesti u drugi oblik, pa je čak i odredio koliko energije jednog oblika proističe iz toliko i toliko energije drugog oblika. Tako na pr. zna se za vezu izmedju 1 kalorije toplotne energije i 424 kg*m mehaničkog rada. Našla se veza medju masom i energijom. Vrsta kemijskog elementa zavisi od broja protona u jezgru atoma toga elementa, te tako imamo jednoznačno preslikavanje niza prirodnih brojeva 1,2,3,...91,92 na skup kemijskih elemenata.

Sve su to veze nadjene dugim i napornim radom naučenjaka.

Dandanas mnogobrojna mjerenja, preračunavanja i zaključivanja dovode nas do sve novih i novih funkcija i preslikavanja, pa i do takovih u koje čovjek u prvi mah nipošto ne bi vjerovao da su moguća (na pr. izgleda nevjerovatno da se tačke bilo kakve male duži mogu tako porazmjestiti da ispune čitav beskonačni prostor!).

FONCTIONS ET CORRESPONDANCES EN LIAISON AVEC L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE

PAR G. KUREPA

On constate que la notion de fonction et celle de correspondance sont fondamentales; on donne quelques exemples de correspondances entre des objets qui ne sont pas nécessairement des nombres. On définit la paire ordonnée comme une fonction uniforme définie dans l'ensemble $\{1, 2\}$ composé des deux nombres 1 et 2; d'une façon analogue, on définit la suite de n termes ou le n-tuple ordonné comme toute fonction uniforme définie dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, n\}$ des nombres naturels $\leqslant n$. La suite infinie elle-même est une fonction uniforme dans l'ensemble des nombres naturels.

L'un de plus importants exemples de correspondance est celle entre des nombres reels d'une part et des points d'une droite d'autre part (ou d'une autre ligne, finie ou infinie); on considère l'axe (la droite) numérique justement come un procédé d'application du continu numérique C des nombres réels sur le continu géométrique constitue de points d'une ligne.

En particulier, on parle du cercle trigonométrique comme d'un porteur (support) de tout les nombres réels. Chemin faisant on mentionne que les nombres réels peuvent être logés sur des lignes bien variées (par exemple sur le périmètre d'un triangle, sur un segment d'une ligne droite etc.). Seulement, dans le cas général, les correspondances qu'on obtient ainsi entre des nombres et des points ne sont plus biunivoques. Et on se rend compte que d'une façon bien naturelle on est ainsi amené à considérer des fonctions périodiques dont l'important exemple est celui indiquant la position du point sur un cercle trigonométrique en fonction du nombre correspondant.

On parle de correspondances variées où les variables ne sont pas nécessairement des nombres. Par exemple, le problème de trouver le centre du cercle circonscrit à un triangle $\triangle$ en est un exemple oú l'on fait correspondre à tout triangle un point du plan du triangle. L'aire, le volume, le poids des corps en sont d'autres exemples.

En physique et en chimie on recontre â tout pas des correspondances et des enchevêtrements de phénomènes. Même dans le cadre des fonctions numériques il y a d'intéressantes exemples qu'on ne mentione pas explicitement; telles sont par exemple les fonctions $[x]$, $[\log x]$, $x - [x]$, $x - [\log x]$; la considération comparative des courbes représentatives de ces quatre fonctions est fort instructive.

PRIKAZ JEDNOG NOVIJEG PROBLEMA U ALGEBRI

DRAGOLJUB MARKOVIĆ, BEOGRAD

I z l a g a n j e p r o b l e m a.[1]) Problemi ove vrste imaju za zadatak da prouče osobine korena jedne algebarske jednačine

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0,$$

kad se izvesni koeficijenti utvrde, a ostali smatraju potpuno proizvoljnim. Drukčije rečeno, treba odrediti u ravni kompleksne promenljive oblasti koje sadrže jedan ili više korena algebarske jednačine, ali tako da odredba tih oblasti zavisi jedino od grupe datih koeficijenata. Po pravilu, ove oblasti su krugovi opisani od početka. Prema tome, rezultati koji rešavaju ovaj problem obuhvataju ne samo jedan jedini polinom, nego čitavu familiju polinoma, čija promenljivost zavisi od one grupe među veličinama $a_0, a_1, a_2, \dots, n$ koje se u konkretnom problemu smatraju proizvoljnim (slobodnim).

Ovakvi problemi, kao što se vidi, imaju prvenstveno karakter dokaza egzistencije jedne takve oblasti.

Osnovni problem ove vrste može se formulisati:

O d r e d i t i k r u g o k o p o č e t k a u k o m e s e n a l a z i b a r j e d a n k o r e n p o l i n o m a

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n ,$$

a l i t a k o d a n j e g o v p o l u p r e č n i k z a v i s i s a m o o d a_0, a_1 i n i l i s a m o o d a_0 i a_1, a n e z a v i s i o d o s t a l i h k o e f i c i j e n a t a.

Ovaj problem vodi poreklo iz teorije funkcija, a neposredno iz ovoga problema:

z a c e l u f u n k c i j u

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + \dots \qquad (a_1 \neq 0)$$

b a r j e d n a o d j e d n a č i n a

$$f(x) = 0, \qquad f(x) = 1$$

i m a j e d a n k o r e n u k r u g u č i j i j e c e n t a r u p o č e t k u, a p o l u p r e č n i k z a v i s i s a m o o d a_0 i a_1.

Ovo je tzv. teorema P i c a r d - L a n d a u - a koja je inspirisala probleme takvog karaktera za polinome.

---

[1]) Svi podaci navedeni u ovom prikazu odnose se na literaturu meni poznatu do 1939 g.

R a z v i j a n j e i r e š e n j e p r o b l e m a. Početkom ovoga stoleća L a n d a u je prvi dokazao da trinomna jednačina

$$1 + x + ax^n = 0$$

ima bar jedan koren u krugu $|x| = 2$; ma kakvi bili a i n ($a_0 = a_1 = 1$). Ono što je glavno, Landau je postavio pitanje da li možda i jednačina

$$a_0 + a_1x + a_2x^{\nu_2} + \dots + a_k x^{\nu_k} = 0$$
$$(1 < \nu_2 < \nu_3 < \dots < \nu_k)$$

od $k + 1$ člana ima jedan koren u krugu

$$|x| \leqq R(a_0, a_1, k),$$

čiji poluprečnik zavisi samo od prva dva koeficijenta i od broja članova.

Na ovo pitanje pozitivno je odgovorio L. F e j é r dokazavši da takva jednačina ima bar jedan koren u krugu

$$|x| \leqq k \left|\frac{a_0}{a_1}\right|$$

i time odredio oblik funkcije

$$R\,(a_0, a_1, k).$$

U daljem razvoju ovoga problema P. M o n t e l proširuje osnovnu teoremu na dokaz egzistencije ne samo jednog korena nego i više tj. p korena ($p < n$). On dokazuje da j e d n a č i n a o d $k + 2$ č l a n a

$$1 + x^2 + a_1x^{\nu_1} + \dots + a_k x^{\nu_k} = 0$$
$$(\nu_k > \nu_{k-1} \dots > \nu_1 > 2)$$

i m a s i g u r n o d v a k o r e n a u k r u g u o k o p o č e t k a č i j i j e r a d i u s

$$R = \sqrt{\binom{k+2}{2}},$$

i naslućuje da j e d n a č i n a

$$1 + x^p + a_1x^{\nu_1} + \dots + a_k x^{\nu_k} = 0$$
$$(\nu_k > \nu_{k-1} > \dots > \nu_1 > p > 0)$$

i m a v e r o v a t n o p k o r e n a u k r u g u

$$|x| = \sqrt[p]{\binom{p+k}{p}},$$

č i j i r a d i u s z a v i s i s a m o o d p r v a d v a k o e f i c i j e n t a, o d s t e p e n a p i o d b r o j a č l a n o v a k.

Najzad P. Montel dokazuje da jednačina

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p + a_{p+1} x^{n_{p+1}} + \dots a_{p+k} x^{n_{p+k}} = 0$$

$(a_p \neq 0)$ ima p korena u krugu čiji je poluprečnik R

$$R = \varphi\,(a_0, a_1, \dots, a_p, K)$$

tj. neka funkcija zavisna od $p+1$ prvih koeficijenata i od broja k ostalih.

E. van Vleck i Biernacki potvrđuju pretpostavku P. Montel-a i daju oblik funkcije R. Biernacki dokazuje da jednačina

$$1 + x^p + a_1 x^{\nu_1} + \dots + a_k x^{\nu_k} = 0$$

ima p korena u krugu čiji je centar u početku, a poluprečnik

$$R = \sqrt[p]{\frac{\nu_1 \cdot \nu_2 \dots \nu_k}{(\nu_1 - p)(\nu_2 - p)\dots(\nu_k - p)}} < \sqrt[p]{\binom{p+k}{p}},$$

razultat koji je precizniji od pretpostavke Montel-a jer je dat veći broj podataka $(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k)$, ali u sebi sadrži i Montel-ov.

E. van Vleck je takođe i neposredno potvrdio Montel-ovu pretpostavku za jednačinu oblika

$$1 + x^p + a_{p+1} x^{p+1} + \dots + a_n x^n = 0,$$

i to nešto ranije no Biernacki. Osim toga Van Vleck je dokazao važan rezultat:

Jednačina

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} + a_p x^p + \dots + a_{p+h} x^{p+h} + \dots + a_n x^n = 0$$

ima p nula u krugu oko početka čiji je poluprečnik neka funkcija

$$R = \varphi\,(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_{p+h}, n). \qquad a_{p+h} \neq 0$$

$$h = 0, 1 \dots n - p$$

On je skrenuo pažnju na činjenicu da skup

$$E_0\,(a_0, a_1, \dots, a_{p-1}, a_p, n)$$

nije jedini koji ograničava p korena date jednačine, već to može biti i skup

$$E_h\,(a_0, a_1, \dots, a_p, a_{p+h}, n).$$

$$0 \leqslant h \leqslant n - p$$

Najzad je R. Ballieu po metodi Van Vlecka odredio vrednost poluprečnika R za gornju jednačinu, dokazavši da je on dat pozitivnim korenom ρ_0 jednačine

$$\rho^{p+h} \, |a_{p+h}| = \sum_{\nu=1}^{p} \binom{h+\nu-1}{\nu-1} \binom{n-p+\nu}{h+\nu} \rho^{p-\nu} a_{p-\nu}$$

$$0 \leqslant \nu \leqslant n-p.$$

Osnovna karakteristika navedenih rezultata je u tome da su oni dobiveni algebarskim putem, tj. metodama elementarne algebre. Sledstveno tome principu, ja sam produžio ispitivanja prethodnika i istraživao i druge oblasti (sem krugova), po pravilu najmanje oblasti u kojima se nalazi bar jedan koren najmanjeg modula. Za polinom oblika

$$1 + x + a_2 x^2 + \dots a_n x^n = 0$$

dobio sam da je ta oblast krug

$$| x + 1 | \leqslant 1,$$

a za polinome sa prazninama to su uopštene lemniskate.

Mislim da bi bilo od interesa navesti na kraju i jedan problem još novijeg datuma (1940 g.) koji je u izvesnom pogledu srodan sa ovim problemom, a koji bi se po A. Ostrowskom mogao ovako formulisati:

Između kojih granica varira (x_κ) $1 \leqslant k \leqslant n$ kad se argumenti koeficijenata $a_0, a_1, \dots a_n$ algebarske jednačine

$$a_0, a_1 x \dots a_n x^n = 0$$

proizvoljno menjaju, a njihove apsolutne vrednosti utvrde.

Ostrowski meri ovu varijaciju pomoću odnosa $\frac{R_k}{r_k}$, pri čemu R_k znači tačnu gornju granicu za $|x_k|$, a r_k tačnu donju granicu za isti koren. On je dokazao da je za jednačinu gornjeg oblika tzv. „relativna širina“

$$\frac{R_k}{r_k} < 0{,}73\,(n+1)^2, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n$$

E. Batschelet je u svojoj tezi (1944 g.) odredio ove varijacije posebice za svaki koren jednačine trećeg stepena.

Problem nije obrađen za opšti slučaj jednačine stepena n.

SUR LE PROBLÈME „PICARD-LANDAU“ EN ALGÈBRE

PAR D. MARKOVITCH

L'auteur fait une exposition historique du problème „Picard-Landau“ et des résultats obtenus pour les polynômes. L'article a pour le but de donner les renseignement sur l'état dans lequel s'est trouvée ce problème jusqu'à l'année 1939.

Literatura

1) Landau E. Ueber den Picardschen Satz (Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich; 51, 1906).

2) Fejér L. Ueber die Wurzel von kleinsten absoluten Betrage einer algebr. Gleichung (Mathematische Annalen; t. 65, 1908).

3) Montel P. Sur les modules des zéros des polynômes (Annales de l'Ecole Normale Supérieure, t. 40, 1923).

4) Van Vleck E. B. On limits to the absolute value of the roots of a polinomial (Bul. de la Société mathématique de France; t. 53. 1925).

5) Biernacki M. Sur les équations algébriques contenant des paramètres arbitraires (Bul. international de l'Académie polonaise des Sciences et des Lettres; série A, 1927).

6) Ballieu R. Limitations en module et localisations des zéros des polynômes (Mém. da la Société royale des Sciences de Liège, 4-e série t. I, fasc. 2-3).

7) Ostrowski A. Recherches sur la méthode de Graeffe et les zéros des polynômes et des séries de Laurent (Acta math.; t. 72, 1940).

8) Batschelet E. Untersuchungen über die absoluten Beträge der Wurzeln algebrischer, insbesondere kubischer Gleichung (Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel, Bd. IV, 1944).

O TEOREMI GRACE-a

— DRAGOLJUB MARKOVIĆ, BEOGRAD —

Klasična teorema G r a c e-a glasi:
A k o s u k o e f i c i j e n t i a i b a l g e b a r s k i h j e d n a č i n a

$$1)\qquad P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0 \text{ i } Q_n(y) = \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu y^\nu = 0$$

v e z a n i r e l a c i j o m

$$2)\qquad \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \frac{a_\nu b_{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}} = 0$$

o n d a k r u g C k o j i s a d r ž i s v e k o r e n e p r v e j e d n a č i n e s a d r ž i b a r j e d a n k o r e n d r u g e, i o b r n u t o.

Prikazaćemo najpre jedan nov dokaz ove teoreme, a potom primenjujući je, uopštiti jednu teoremu L a g u e r r e-a.

D o k a z. Da bi se rezultat odnosio na svaki krug u ravni kompleksne promenljive, izvršimo u jednačinama 1) transformaciju

$$3)\qquad x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \alpha$$

pri čemu je α neka tačka u ravni, a ξ i η novi koreni. Jednačine 1) i uslov 2) tada postaju

$$4)\quad \overline{P_n}(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} P^{(\nu)}(\alpha) \frac{\xi^\nu}{\nu!} = 0 \text{ i } \overline{Q_n}(\eta) = \sum_{\nu=0}^{n} Q^{(\nu)}(\alpha) \frac{\eta^\nu}{\nu!} = 0$$

$$5)\qquad U(\alpha) = \frac{1}{n!} \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu Q^{(\nu)}(\alpha) P^{(n-\nu)}(\alpha)$$

Može se dokazati da je uslov 5) jednak nuli za svako α ako je ispunjen uslov 2). To sledi iz rezultata ispitivanja J. D i e u d o n n é-a, koji je dokazao da je uslov 2) invarijantan prema svakoj homografskoj transformaciji[1]).

[1]) J. Dieudonné — Sur le théoréme de Grace et les rélations algébriques analogues (Bulletin de la Société math. de France).

Slično postupku Dieudonné-a dokazuje se da je $U(\alpha) = 0$ na sledeći način: pošto je $P_n^{(n+1)}(\alpha) = 0$, $Q_n^{(n+1)}(\alpha) = 0$, onda je

$$\frac{dU}{d\alpha} = \frac{QP^{(n+1)} + PQ^{(n+1)}}{n!} \equiv 0.$$

Prema tome je

$$U(\alpha) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu \alpha^\nu = c_0 = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^n \frac{a_n b_{n-\nu}}{\binom{n}{\nu}}$$

a s obzirom na 2)

$$U(\alpha) \equiv 0$$

za svaku vrednost α. (Vidi Aubert et Papelier, II zad. 701)

Iz 4) za $P_n(\xi) = 0$ izlazi da je ($|\xi| = \rho$)

$$\rho^n \left| P^{(n)}(\alpha) \right| \leqslant \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \nu!\, \rho^{n-\nu} \left| P^{(n-\nu)}(\alpha) \right| ,$$

što znači da se svi koreni polinoma $P_n(x)$ nalaze u krugu C_α koji je dat jednačinom

$$|x - \alpha| = \rho_0 ,$$

gde je ρ_0 pozitivan koren jednačine

$$\rho^n \left| P^{(n)}(\alpha) \right| = \sum_{\nu=1}^{n} \binom{n}{\nu} \nu!\, \rho^{n-\nu} \left| P^{(n-\nu)}(\alpha) \right| .$$

S druge strane, ako se u uslov $U(\alpha) = 0$ umesto $Q^{(\nu)}(\alpha)$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots n$) unesu odgovarajući izrazi za elementarne simetrične funkcije korena $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ ($|\eta_1| \leqslant |\eta_2| \leqslant \ldots \leqslant |\eta_n|$), biće

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, P^{(n-\nu)}(\alpha)\, \sigma_{n-\nu}(\eta) = 0$$

ili

$$\sum_{\nu=0}^{n} \nu!\, P^{(n-\nu)}(\alpha)\, \sigma_n\left(\frac{1}{\eta}\right) = 0.$$

Kad se izmedju svih korema uzme u obzir samo koren η_1 najmanjeg modula, iz poslednje jednačine dobiće se

$$|\eta_1| \left| P^{(n)}(\alpha) \right| \leqslant \sum_{\alpha=0}^{n} \nu! \binom{n}{\nu} |\eta_1|^{n-\nu} \left| P^{(n-\nu)}(\alpha) \right|,$$

što pokazuje da je gornja granica za $|\eta_1|$ ista kao i za modul makojeg korena ξ. To znači da se bar jedan koren y_1 polinoma $Qn(y)$ (koji odgovara korenu η_1) nalazi u krugu određenom jednačinom

$$|y_1 - \alpha| = \rho_0,$$

tj. u istom krugu C_α u kome se nalaze svi koreni x_i polinoma $P_n(x)$, čime je teorema Grace-a dokazana.

Primenom teoreme Grace-a može se dokazati ova proširena teorema Laguerre-a: *u unutrašnjosti ili na periferiji svakog kruga C koji sadrži tačke α i β_k*

$$\beta_k = \alpha - e^{\frac{2k\pi i}{\nu}} \sqrt[\nu]{\frac{n!}{(n-\nu)!} \frac{P_n(\alpha)}{P_n^{(\nu)}(\alpha)}}$$

$(\nu = 1, 2, \ldots, n;\ k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1;\ P_n^{(\nu)}(\alpha) \neq 0,\ P_n^{(\alpha)} \neq 0)$ *leži najmanje jedan koren datog polinoma $P_n(x)$.*

Dokaz. Neka je

$$P_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0$$

data algebarska jednačina koja se transformacijom $x = \alpha + \xi$ pretvara u

$$\overline{P_n}(\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} C_\nu \xi_\nu = 0, \quad C_\nu = \frac{P_n^{(\nu)}(\alpha)}{\nu!}.$$

Ako se između koeficijenata c_ν i elementarnih simetričnih funkcija S_ν korena ξ_i postave odnosi

$$c_0 = (-1)^n C_n S_n$$

$$c_\nu = (-1)^{n-\nu} C_n S_{n-\nu}, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n-1$$

slediće

$$C_\nu S_n - (-1)^\nu C_0 S_{n-\nu} = 0$$

tj. relacija tipa 2). Tada koeficijenti jednačine

$$C_\nu \xi^n - (-1)^\nu C_0 \xi^{n-\nu} \binom{n}{n-\nu} = 0$$

i koeficijenti date jednačine

$$C_n \xi^n + C_{n-1} \xi^{n-1} + \ldots C_1 \xi + C_0 = 0$$

zadovoljavaju uslov 2) koji glasi

$$C_\nu\, C_0 - (-1)^{2\nu} \binom{n}{n-\nu} \cdot \frac{C_0\ C_\nu}{\binom{n}{\nu}} = 0$$

Shodno teoremi G r a c e-a krug koji sadrži sve korene prve jednačine sadržaće bar jedan koren druge. Koreni prve jednačine su: $n - \nu$ korena jednaki su nuli, a ostalih ν korena su

$$\xi_k = e^{\frac{2k\pi i}{\nu}} \sqrt[\nu]{\frac{n!}{(n-\nu)!} \frac{P_n(\alpha)}{P_n^{(\nu)}(\alpha)}}, \quad 0 \leq k \leq \nu - 1.$$

Ako se ovi prenesu na prvobitnu jednačiuu $P_n(x) = 0$ biće: $n - \nu$ korena su jednaki α, a ostalih $\beta_k = \alpha + \xi_k$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \nu - 1)$.

Prema tome krug koji sadrži sve tačke α i β_k mora sadržati bar jedan koren date jednačine $P_n(x) = 0$.

Za $\nu = 1$ dobiće se klasična teorema L a g u e r r a-a koja glasi: u unutrašnjosti ili na periferiji kruga povučenog kroz tačke α i $\beta_0 = \alpha - n \dfrac{P_n(\alpha)}{P'_n(\alpha)}$ leži najmanje jedan koren jednačine $P_n(x) = 0$ $(P'_n(\alpha) \neq 0,\ P_n(\alpha) \neq 0)$.[1]

Klasična teorema Laguerre-a ne može se primeniti na jednačinu

$$P_n(x) = 1 + x^p + a_{p+1}\, x^{p+1} \ldots . + a^n\, x^n = 0, \quad (p > 1)$$

ako je $\alpha = 0$, jer je $P'(o) = 0$.

Medjutim u ovoj uopštenoj formi za $\nu = p$ biće

$$P_n(o) = 1, \quad P_n^{(p)}(o) = p!$$

$$\alpha = 0, \ \beta_k = - e^{\frac{2k\pi i}{p}} \sqrt[p]{\binom{n}{p}}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, p - 1$$

pa se može dobiti ovaj rezultat:

u krugu koji je opisan oko početka poluprečnikom $|\beta_k| = \sqrt[p]{\binom{n}{p}}$ leži p korena date jednačine[2])

$$1 + x^p + a_{p+1}\, x^{p+1} \ldots a_n\, x^n = 0$$

makakvi bili koeficijenti a_i.

---

[1]) Vidi npr. B i e b e r b a c h-B a u e r — A l g e b r a, str. 207. Isto tako i E. B a t s c h e l e t — U e b e r d i e A b s c h ä t z u n g d e r W u r z e l n a l g. G l e i c h. (E l e m e n t e d e r M a t h e m a t i k, B d. I (5, 1946, B a s e l). On je izmedju ostalih primena teoreme G r a c e-a, dobio i klasičnu teoremu L a g u e r r e-a.

[2]) E. V a n V l e c k i B i e r n a c k i M, dobili su ovaj rezultat za p korena navedene jednačine.

SUR LE THÉORÈME DE GRACE

PAR D. MARKOVITCH

L'auteur expose d'abord un procédé direct et élémentaire pour démontrer le théorème de Grace qui donne des renseignements sur la position entre deux groupes de points (racines) du plan complexe. Puis, en appliquant ce théorème, l'auteur généralise le suivant théorème de Laguerre:

Le cercle qui contient les points

$$\alpha \text{ et } \beta_k = \alpha - e^{\frac{2k\pi i}{\nu}} \sqrt[\nu]{\frac{n!\, Pn\ (\alpha)}{(n - \nu!)\, P_n{}^{(\nu)}(\alpha)}}$$

$$\nu = 1, 2, \ldots, n, k = o, 1, 2, \ldots \nu - 1, P_n(\alpha) \neq 0, P_n{}^{\nu}(\alpha) \neq 0$$

contient aussi au moins une racine de l'équation

$$P_n\ (x) = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\nu} x^{\nu} = 0$$

Ce résultat pour $\nu = 1$ vérifie le théorème clasique de Laguerre.

Literatura

1) J. Dieudonné citira literaturu:

J. H. Grace, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, t. 11, 1900, p. 352—357.

G. Szegö, Math. Zeitschrift, t. 13, 1922, p. 31.

J. Egervary, Acta Univ. Hung. Francesco—Josephinae, t. 1, 1922, p. 39—45.

M. Cohn, Math. Zeitschrift, t. 14, 1922, p. 110—148.

2) E. B. Van Vleck, On limits to the absolute value of the roots of a polynonial (Bul. de la Société math. de France; t. 55, 1925).

3. M, Biernacki, Sur les équations algébriques contenant des paramétres arbitraires (Bull. international de l' Académie polonaise des Sciences ei des Lettres série A, 1927).

SPEKTRI BROJEVA KOJI NISU CELI

KONSTANTIN ORLOV, BEOGRAD

Opšti način obrazovanja spektara makakvih brojeva dao je M. Petrović[1]) ali takav spektar nije prugasti tj. on se obrazuje pomoću pomoćne funkcije $\Phi(x)$ i ne može se koristiti u primenama. Stoga se dosad pristupalo obrazovanju spektra niza brojeva, koji nisu celi ne neposredno već posredno. Prvo se taj niz pomoću izvesne transmutacije pretvarao u niz celih brojeva, pa se zatim obrazovao spektar tog niza celih brojeva, koji je na posredan način pretstavljao i spektar niza prvobitnih brojeva.

Naravno da uz takav spektar mora biti dodata i transmutacija koja pretvara prvobitni niz brojeva u niz celih brojeva.

Cilj ovog rada je neposredno obrazovanje spektra brojeva koji nisu celi.

Ovo je moguće kada je niz brojeva P_k sastavljen iz ma kakvih brojeva, ali mora biti unapred poznat zakon na osnovu koga se svi ovi brojevi mogu obrazovati. Osim toga taj zakon mora obuhvatati samo konačan broj različitih brojeva. U tom slučaju spektar se može obrazovati sa uniformnim ritmom.

1. Spektri niza ma kakvih pozitivnih brojeva.

Neka je dat konačan ili beskonačan niz pozitivnih brojeva P_k ma kakvog ali unapred datog oblika takvog, koji obuhvata konačan broj različitih brojeva. Pokazaćemo kako se u tom slučaju obrazuje spektar sa uniformnim ritmom.

Napišimo brojeve P kao decimalne brojeve. Tada se dobija:

$$
\begin{aligned}
P_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_1^3 a_1^2 a_1^1, b_1^1 b_1^2 b_1^3 \ldots\ldots\ldots, \\
P_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_2^3 a_2^2 a_2^1, b_2^1 b_2^2 b_2^3 \ldots\ldots\ldots \\
(1) \quad & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
P_k &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\, a_k^3 a_k^2 a_k^1, b_k^1 b_k^2 b_k^3 \ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

gde a_i^j znači j-tu cifru celog dela broja P_i (računajući cifre s desna u levo), a b_i^j j-tu decimalu broja P_i (decimale se računaju s leva na desno). Neka je h broj cifara celog dela najvećeg od brojeva P. Pošto broj različitih brojeva P je konačan to ma da dva broja iz niza P mogu imati za ceo deo i za izvestan broj decimala iste cifre koje idu istim redom ipak se uvek može naći ceo pozitivan broj p takav da se svi brojevi P razlikuju bar za dve jedinice p-tog decimalnog mesta.

[1]) Petrovitch Michel. Leçons sur les spectres mathématiques professées à la Sorbonne. Gauthier-Villars, 1928.

Uzmimo za uniformni spektralni ritam

$$H = h \div p \div 2 \tag{2}$$

i obrazujmo sa tim ritmom, prema sledećoj formuli, broj S

$$S = P_1 + P_2 \cdot 10^{-H} + P_3 \cdot 10^{-2H} + P_4 \cdot 10^{-3H} + \ldots\ldots + P_k \cdot 10^{-(K-1)H} + \ldots\ldots \tag{3}$$

Taj broj zvaćemo s p e k t a r uočenog niza sa uniformnim spektralnim ritmom H.

Jasno je, pošto brojevi P imaju konačan ili beskonačan broj decimala, da će se decimale pojedinih brojeva P p o m e š a t i i da k-ti pojas sastavljen iz konačnog broja cifara H n e m o ž e pretstavljati k-ti broj niza tj. broj P_k, jer ovaj ima u opštem slučaju beskrajno mnogo decimala.

Međutim sve ovo ne smeta da broj S bude spektar niza brojeva P, jer spektar mora zadovoljavati samo ove uslove 1) da se iz niza brojeva može naći spektar a iz spektra niz brojeva, 2) za utvrđeni spektralni ritam H sa kojim se niz slaže, svaki niz može imati samo jedan spektar i 3) svaki spektar za utvrđeni spektralni ritam koji on dopušta odgovara samo jednom (ili nijednom) nizu.

Spektar obrazovan na gornji način ispunjava drugi uslov, a to da on ispunjava prvi i treći uslov pokazaćemo sada, istovremeno dajući način kako se iz spektra dobija niz.

Neka je dat spektar S pozitivnih brojeva unapred datog oblika, sa uniformnim ritmom H koji se slaže sa nizom. Tada treba obrazovati tablicu svih brojeva tog datog oblika (što je moguće jer je broj različitih brojeva koji pripadaju tom obliku brojeva konačan). U toj tablici treba potražiti broj koji je sastavljen iz celog dela i p prvih decimala broja S. Ako u tablici nađemo takav broj ili broj koji je od ovoga manji za jednu jedinicu p-tog decimalnog mesta, tada je taj broj prvi broj traženog niza. (Mogućnost da se u tablici nađu i broj sastavljen iz celog dela i prvih p decimala broja S i broj za jednu jedinicu p-tog mesta manji, je isključena, jer svi brojevi obrazovane tablice brojeva datog oblika moraju se prema pretpostavci razlikovati bar za 2 jedinice p-tog decimalnog mesta). Ako se takav broj ne nađe onda broj S ne pretstavlja spektar nijednog niza brojeva datog oblika. Tako se nalazi prvi broj niza P_1.

Da bi smo našli drugi broj niza uočimo da se jednačina (3) može napisati i na sledeći način:

$$(S - P_1)\, 10^{H} = P_2 + P_3 \cdot 10^{-H} + P_4 \cdot 10^{-2H} + \ldots\ldots + P_k \cdot 10^{-(K-2)H} + \ldots\ldots \tag{4}$$

Iz jednačine (4) se vidi da broj

$$(S - P_1)\, 10^{H}$$

pretstavlja spektar svih brojeva uočenog niza sem prvog. Prema tome da bismo našli drugi član niza treba obrazovati redukovani spektar

$$S_1 = (S - P_1)\, 10^{H} \tag{5}$$

iz koga se na isti način, kao što se nalazi iz S broj P_1, nalazi broj P_2. Traženje daljih članova vrši se iz novih redukovanih spektara S_2, S_3 itd. Na taj način smo pokazali da tako obrazovani spektar zadovoljava i prvi i treći uslov a ujedno smo pokazali kako se iz spektra dobiva niz brojeva.

Izgleda da je time što moramo unapred znati oblik brojeva P i što tih brojeva različitih međusobno mora biti konačan broj učinjeno veliko ograničenje koje kod spektara celih brojeva sa uniformnim ritmom ne postoji. Međutim u stvari nije tako. Oba ova ograničenja postoje i tamo. To što se mogu obrazovati spektri celih brojeva pretstavlja unapred zadati oblik brojeva, a njih mora biti konačan broj jer moraju biti manji od broja 10^H gde je H uniformni spektralni ritam.

Na taj način ova metoda pretstavlja generalizaciju postupka obrazovanja prugastih spektara, koji je stvorio M. Petrović[1]) bez ikakvih novih ograničenja.

Radi konkretnijeg prikazivanja metoda navešćemo primere.

1) Obrazovati spektar niza razlomaka

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{2}{5}, \quad \frac{3}{8}, \quad \frac{4}{9}$$

Ti brojevi napisani kao decimalni biće

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$
$$\frac{2}{5} = 0{,}4000 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$
$$\frac{3}{8} = 0{,}3750 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$
$$\frac{4}{9} = 0{,}4444 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots .$$

Iz tablice ovih brojeva se vidi da je

$$h = 0 \qquad\qquad p = 2$$

a iz obrasca (2) dobijamo $H = 4$

Dakle biće

$$
\begin{array}{ll}
P_1 & = 0{,}33333333333333333 \ldots\ldots\ldots\ldots . \\
P_2 \cdot 10^{-H} & = 0{,}00004000000000000 \ldots\ldots\ldots\ldots . \\
P_3 \cdot 10^{2H} & = 0{,}00000000375000000 \ldots\ldots\ldots\ldots . \\
\underline{P_4 \cdot 10^{-3H}} & = \underline{0{,}00000000000044444 \ldots\ldots\ldots\ldots .} \\
S & = 0{,}3333 \,/\, 7333 \,/\, 7083 \,/\, 7777 \,/\, \dot{7}
\end{array}
$$

Time je primer završen.

Ako bi se htelo iz spektra naći niz bilo bi potrebno unapred znati oblik članova niza.

2) Dat je spektar

$$S = 0{,}15679 \,/\, 02345 \,/\, 72345 \,/\, 66789 \underset{\circ}{/} \dot{9}$$

niza brojeva sledeće strukture: svi brojevi su beskonačni decimalni razlomci koji imaju za ceo deo nulu, prva cifra im je 1, t r e ć a j e z a 1 v e- ć a o d d r u g e, č e t v r t a z a 1 v e ć a o d t r e ć e, p e t a z a 1 v e ć a o d č e t v r t e, šesta i sve dalje cifre su jednake petoj; sa uniformnim ritmom $H = 5$.

Treba obrazovati t a b l i c u svih brojeva zadatog oblika. Ona će biti:

$$(6) \qquad \begin{array}{l} 0{,}1012\dot{3} \\ 0{,}1123\dot{4} \\ 0{,}1234\dot{5} \\ 0{,}1345\dot{6} \\ 0{,}1456\dot{7} \\ 0{,}1567\dot{8} \\ 0{,}1678\dot{9} \end{array}$$

Iz ove tablice se vidi da je $h = 0$, $p = 3$ a prema obrascu (2) dobija se $H = 5$. Prema tome zbilja se ritam H slaže sa nizom.

Uzevši ceo deo i $p = 3$ decimale spektra imamo 0,156. U tablici (6) broj koji ima ove cifre za početne cifre nalazi se na 6 mestu i glasi $0{,}1567\dot{8}$. Taj broj pretstavlja prvi broj niza. Da bismo našli drugi član niza treba naći S_1. Tok računa je ovaj:

$$\begin{array}{rl} S = & 0{,}15679 \;\, 02345 \;\, 72345 \;\, 66789 \;\, \dot{9} \\ \underline{P_1 = } & \underline{0{,}15678 \;\, 88888 \;\, 88888 \;\, 88888 \;\, \dot{8}} \\ & 0{,}00000 \;\, 13456 \;\, 83456 \;\, 77901 \;\, \dot{1} \end{array}$$

$$S_1 = 0{,}13456 \,/\, 83456 \,/\, 77901 \underset{\circ}{/} \dot{1}$$

Napomenimo da iako su S i P_1 razlomci sa beskrajno velikim brojem cifara ipak oduzimanje tih brojeva u praktičnim problemima ne pretstavlja veliku teškoću.

Istim postupkom dobija se da je drugi član $0{,}1345\dot{6}$ i da je

$$S_2 = 0{,}16790 \,/\, 11234 \underset{\circ}{/} \dot{4}$$

Zatim da je treći član $0{,}1678\dot{9}$, a

$$S_3 = 0{,}11234 \underset{\circ}{/} \dot{4}$$

Najzad je četvrti član $0{,}1123\dot{4}$, a

$$S_4 = 0$$

što pokazuje da dalje nemamo članova, prema tome znak $\underset{\circ}{/}$ koji pokazuje koliko članova imamo je u stvari izlišan, ali ćemo ga i dalje zadržati da bi se odmah znao broj članova, ukoliko je taj broj konačan.

Niz je $0{,}1567\dot{8}$, $0{,}1345\dot{6}$, $0{,}1678\dot{9}$, $0{,}1123\dot{4}$

Time je primer završen.

2. Spektri niza makakvih brojeva (pozitivnih i negativnih).

Ova metoda se može generalisati i na spektre brojeva mešovitog znaka. Pokazaćemo sada kako se u ovom slučaju obrazuje spektar.

Pretpostavimo da je dat niz različito označenih brojeva. Radi konkretnijeg izlaganja neka je taj niz

$$P_1, \; -P_2, \; P_3, \; -P_4, \; -P_5, \; P_6 \tag{7}$$

Iz ovog niza obrazujemo dva niza, jedan sastavljen od pozitivnih brojeva a drugi od apsolutnih vrednosti negativnih. Ti će nizovi biti:

$$P_1, \; . \; , P_3, \; . \; , \; . \; , P_6 \tag{8}$$

$$. \; , P_2, \; . \; , P_4, \; P_5, \; . \tag{9}$$

Popunimo prazna mesta nulama i tada ćemo dobiti ova dva niza

$$P_1, \; 0, \; P_3, \; 0, \; 0, \; P_6 \tag{I}$$

$$0, \; P_2, \; 0, \; P_4, \; P_5, \; 0 \tag{II}$$

Broj h i dalje označavaće broj cifara celog dela najvećeg (po modulu) broja iz niza (7) a p će biti ceo pozitivan broj takav da se svi brojevi niza (7) razlikuju bar za 3 jedinice p-tog decimalnog mesta. Uniformni ritam H dat je istom jednačinom

$$H = h + p + 2$$

i sa tim ritmom moramo obrazovati spektre nizova (I) i (II), to će biti neki brojevi S_I i S_{II}. Spektar niza (2) biće njihova razlika.[1])

$$S = S_I - S_{II}$$

Pokažimo sad, obrnuto, kako se iz spektra S može naći niz brojeva. I u ovom slučaju treba obrazovati tablicu sastavljenu od svih brojeva unapred datog oblika. Iz te tablice određuju se prema ranije iznetom brojevi h i p. Pretpostavimo da je spektar S pozitivan broj (ako je spektar negativan, to možemo, ne gledajući na znak tj. smatrajući da je on pozitivan, tražiti članove, ali tada na kraju računa, u rezultatu moramo promeniti znake svim članovima). Stoga će prvi član biti pozitivan i on se lako može naći u obrazovanoj tablici brojeva.

Treba napomenuti da kad uzmemo ceo deo i p decimala broja S onda u obrazovanoj tablici svih različitih brojeva datog oblika možemo naći ili taj broj ili broj za jednu jedinicu p-tog decimalnog mesta veći, ili za jednu

---

[1]) Iscrpan dokaz dat je u mojoj tezi „Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara". Str. 8—14. Beograd 1935.

jedinicu p-tog decimalnog mesta manji i taj nađeui broj uzeti za prvi broj (od ta tri broja samo jedan može biti u tablici, jer se u njoj svi brojevi razlikuju bar za tri jedinice p-tog decimalnog mesta).
Kad tako nađemo P_1 moguća su tri slučaja

$$P_1 = S \qquad P_1 < S \qquad P_1 > S.$$

U prvom slučaju niz je sastavljen samo iz jednog člana i traženje je prema tome završeno. U drugom slučaju idući član niza je takođe pozitivan i njegovo traženje se vrši na način iznet u prvom paragrafu. U trećem slučaju idući član je negativan a za odredbu njegove apsolutne vrednosti služi nam redukovani spektar

$$S_1 = |P_1 - S|\, 10^H$$

Traženje njegove apsolutne vrednosti vrši se na raniji način. Ako se sad desi da je

$$|P_2| > S_1$$

to znači da je P_2 član suprotnog znaka od prethodnog, tj. pozitivan član, jer je pred njim bio negativan član. Uopšte

$$|P_j| > S_{j-1}$$

pokazuje da je P_j suprotnog znaka od člana P_{j-1}

a
$$|P_j| < S_{j-1}$$

pokazuje da je P_j istog znaka kao i član P_{j-1}. Odredba apsolutnih vrednosti uvek se vrši iz

$$S_j = \big|S_{j-1} - |P_j|\big| \cdot 10^H$$

I tako se rad nastavlja dok se ne izračunaju svi članovi niza.

Navešćemo radi konkretnijeg prikazivanja sledeće primere:

1) Obrazovati spektar različito označenih brojeva

$$\frac{1}{16},\ -\frac{1}{6},\ -\frac{e}{4},\ \frac{e}{8}$$

Nizovi I i II su

$$\frac{1}{16},\ 0,\ 0,\ \frac{e}{8}$$

$$0,\ \frac{1}{6},\ \frac{e}{4},\ 0$$

Pošto brojevi u pitanju imaju sledeće vrednosti

$$\frac{1}{16} = 0{,}0625 \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1\dot{6}$$

$\frac{e}{8} = 0{,}3397852285\ldots \qquad \frac{e}{4} = 0{,}6795704571\ldots.$

to je $h = 0$, $p = 2$, $H = 4$

i spektri nizova I i II biće

$S_{\mathrm{I}} = 0{,}0625/0000/0000/3397/85\ldots,$

$S_{\mathrm{II}} = 0{,}0000/1667/3462/3712/37\ldots.$

i najzad spektar S biće

$S = 0{,}0624/8332/6537/9685/48\ldots$

Time je primer završen.

2) Dat je spektar različito označenih brojeva

$$S = 6{,}14152/98211/36713/30100/5\ldots.$$

sa uniformnim ritmom $H = 5$ koji se slaže sa nizom brojeva koji imaju oblik $\pm(a + b\pi)$ gde su a i b celi pozitivni brojevi, i gde je moduo članova niza manji od 10.

Tablica svih brojeva uočenog oblika u ovom slučaju biće

	1	$1+\pi = 4{,}14\ldots$	$2\pi = 6{,}28\ldots$	$5+\pi = 8{,}14\ldots$
	2	5	7	$2+2\pi = 8{,}28\ldots$
	3	$2+\pi = 5{,}14\ldots$	$4+\pi = 7{,}14\ldots$	9
(10)	$\pi = 3{,}146$		$1+2\pi = 7{,}28\ldots$	$6+\pi = 9{,}14\ldots$
	4	$3+\pi = 6{,}14\ldots$	8	$3+2\pi = 9{,}28\ldots$
				$3\pi = 9{,}42\ldots$

i u nju još ulaze isti brojevi sa znakom minus. Iz ove tablice se vidi da je

$$h = 1 \qquad p = 2$$

i prema tome $H = 5$ slaže se zbilja sa nizom.

Da bismo našli prvi član niza moramo uzeti iz spektra ceo deo i p decimala tj. u ovom slučaju broj 6,14. Tim ciframa odgovara u tablici (10) broj $3 + \pi$, što znači da je $P_1 = 3 + \pi$ ili

$$P_1 = 6{,}14159265358979323846\,2\ldots$$

Pošto je

$$P_1 > S$$

to će idući član P_2 biti suprotnog znaka nego P_1 tj. biće negativan. Njegovu apsolutnu vrednost naći ćemo iz redukovanog spektra

$$S_1 = |S - P_1|\ 10^H$$

tj. iz

$$S_1 = 6{,}28324/53079/93745/7\ldots$$

Broju 6,28 odgovara u tablici (10) broj 2π prema tome je $P_2 = -2\pi$

$$P_2 = -6{,}2831853071795865\ldots$$

Pošto je

$$|P_2| < S_1$$

to idući član P_3 biće istog znaka kao i prethodni tj. biće negativan. Njegovu apsolutnu vrednost naći ćemo iz redukovanog spektra

$$S_2 = \Big|S_1 - |P_2|\Big| \cdot 10^H$$

ili

$$S_2 = 6{,}00008/14159\underset{\circ}{/}2\ldots$$

Na taj način dobijamo da je $P_3 = -6$.

Pošto je

$$|P_3| < S_2$$

to četvrti član će biti istog znaka kao treći tj. opet negativan a odgovarajući redukovani spektar je

$$S_3 = 8{,}14159\underset{\circ}{/}2\ldots$$

Iz ovog redukovanog spektra nalazimo da je četvrti član $-(5+\pi)$. Ako ne upotrebljavamo znak $\underset{\circ}{/}$ može se pomisliti da imamo još članova pošto ovde, zbog beskrajnog niza decimala, koje niti su napisane niti uopšte poznate, ne možemo tvrditi da je idući redukovani spektar S_4 nula. Ali kad nađemo S_4 redovnim postupkom vidimo da je

$$S_4 = 0{,}0\ldots\ldots.$$

Pošto takvom spektru ne odgovara ni jedan broj iz obrazovane tablice, to znači da peti član uopšte ne postoji i da je $S_4 = 0$ ili pak da uočenom spektru ne odgovara nijedan niz datog oblika. Prema tome uočeni niz sadrži četiri člana i glasi

$$3+\pi, \qquad -2\pi, \qquad -6, \qquad -(5+\pi)$$

Time je primer završen.

3. Spektri funkcija.

Prema teoriji matematičkih spektara, spektrom funkcije se zove spektar koeficijenata Mac-Laurin-ovog reda u koji se funkcija razlaže. Tj. ako funkciju napišemo u obliku

$$f(x) = P_1 + P_2 x + P_3 x^2 \ldots + P_k x^{k-1} + \ldots\ldots$$

to spektar funkcije $f(x)$ biće spektar koeficijenata P.

Ako uzmemo spektar sa uniformnim ritmom H to će takav spektar funkcije $f(x)$ biti:

$$S = P_1 + P_2 \cdot 10^{-H} + P_3 10^{-2H} + \ldots + P_k 10^{-(k-1)H} + \ldots\ldots$$

S druge strane je

$$f(10^{-H}) = P_1 + P_2 \cdot 10^{-H} + P_3 10^{-2H} + \ldots + P_k 10^{-(k-1)H} + \ldots$$

i prema tome biće

$$S = f(10^{-H}), \tag{11}$$

što kod posrednog obrazovanja spektara nije slučaj.

Kako je u uočenom slučaju koeficijenti P ma kakvi brojevi (unapred datog oblika) to znači da ova značajna formula važi i u ovom slučaju. To daje naročiti značaj iznetoj metodi obrazovanja spektara, jer se pri tome kod funkcija ne moraju poznavati koeficijenti Mac-Laurin-ovog reda već se spektar može naći neposredno iz ma kog oblika funkcije. To što formula (11) ostaje u ovom slučaju u važnosti omogućava da se sve primene matematičkih spektara sa uniformnim ritmom, naprimer razlaganje u red, mogu vršiti i na funkcijama čiji koeficijenti nisu celi brojevi.

Napominjemo, da u slučaju ako članovi niza brojeva (ili koeficijenti razvijanja funkcije u Mac-Laurin-ov red) naglo opadaju moguće obrazovati spektar sa manjim spektralnim ritmom H nego što zahteva obrazac (2), štaviše H može biti nula ili i negativan broj. To bi bili novi, dosad neuvedeni spektri bez disperzije odnosno sa negativnom disperzijom. Taj deo teorije matematičkih spektara čeka obradu. U ovom radu obradio sam pitanje obrazovanja spektara samo sa uniformnim ritmom. Bilo bi od interesa ispitati slučajeve drugih spektralnih ritmova, jer oni (ukoliko su ubrzani) postavljaju manje zahteve nizu brojeva, tako da svakako može, u mnogim slučajevima, otpasti zahtev da mora biti konačan broj različitih brojeva klase brojeva čiji se spektri obrazuju. Ovo bi bila druga tema za obradu.

LES SPECTRES DES NOMBRES QUI NE SONT PAS ENTIERS

PAR CONSTANTIN ORLOFF

Ce travail est consacré à une méthode directe de formation des spectres cannelés des nombres qui ne sont pas entiers. Jusqu'à présent il n'existait aucune méthode directe pour une telle formation et on se servait des méthodes indirectes qui n'avaient d'ailleurs aucunes application. La méthode directe exposée dans ce travail est applicable aussi bien pour les suites des nombres comme pour les fonctions, satisfaisant pour les dernières l'équation

$$S = f(10^{-h})$$

h donnant le rythme spectral uniforme du spectre. Celà permet d'appliquer ces spectres de la même manière comme on applique les spectres cannelés des nombres entiers dans les problèmes de la Méthode spectrale.

MATEMATIČKI SPEKTRI

KONSTANTIN ORLOV, BEOGRAD

„Teorija spektara[1]) je najoriginalnije delo Mihaila Petrovića“ kaže profesor dr. Milanković u predgovoru Notice sur les travaux scientifiques de M. Petrovitch [1][2]) stavljajući matematičke spektre na prvo mesto od pet velikih grupa njegovih radova. I ne samo to, već je to delo uopšte jedno od najoriginalnijih u matematičkom stvaranju.

Sam proces razvitka pojedinih nauka i njihovih grana obično ih udaljuje jedne od drugih. Stoga su od osobitog interesa oni radovi koji ih približuju, stvarajući veze izmedju njih na taj način što se ideje, metode i rezultati pozajmljuju iz jedne nauke i unose u drugu. Matematičke ideje i metode tako često se pozajmljuju od drugih nauka da bi samo nabrajanje tih nauka i ideja zauzelo dosta vremena. Broj tih nauka, koje se postupno matematiziraju, postaje iz godine u godinu sve veći tako da se sada čak i hirurgija (nakon radova sovjetskog profesora A. Limberga 1947 god.) služi matematikom. Mora se istaći činjenica da se pojedine grane matematike naglije razvijaju usled potrebe drugih nauka za izvesnim matematičkim aparatom. Ali je jedinstveni slučaj u matematici, bar u takvom obimu, jasnoći i preciznosti, da se metod, koji se pokazao plodan u drugoj nauci, prenese u matematiku i razradi u čitavu teoriju, koja se opet primenjuje u drugim naukama. U tom pogledu interesantan je slučaj astronomije u kojoj se sa velikim uspehom primenjuju svetlosni spektri, a mogu se primeniti i matematički spektri [2].

Petrovićev rad pokazuje da se, eventualno, i druge ideje iz drugih nauka mogu korisno primeniti u matematici i ukoliko bi budućnost donela i takve pozajmice, Petroviću bi u tom pogledu pripalo prvenstvo.

Matematički spektri baziraju na jednostavnoj i dobro poznatoj činjenici da se proučavanje neprekidne funkcije od jedne ili više promenljivih (ili opštije svake funkcije odredjene uslovima koji su izbrojljivi) svodi na proučavanje jednog jedinog decimalnog razlomka. „Ali ova teoriska činjenica“, kaže E. Borel u predgovoru knjige Les spectres numériques [3] „nije od velike pomoći sve dotle dok se ne odredi konkretna veza koja se može postaviti izmedju funkcije i decimalnog razlomka“. Sve dotle „bi to bila nekorisna komplikacija, koja bi se dobila mesto uprošćavanja“.

Matematički spektri baš i pretstavljaju taj konkretni način povezivanja funkcija sa decimalnim razlomcima. Govoreći o njima Borel kaže „tu je

---

[1]) U početku Petrović je upotrebljavao naziv brojni spektri pa je taj naziv zamenio opštijim matematički spektri sredinom dvadesetih godina.

[2]) Broj u uglastim zagradama znači pozivanje na literaturu, čiji spisak je dat na kraju, a broj u običnim zagradama znači pozivanje na formulu u tekstu.

neograničeno polje ispitivanja, gde se glavna teškoća . . . sastoji u tome da se izaberu logičke forme interesantne i plodne izmedju beskonačno mnogo njih koji se nama pružaju".

Pojava matematičkih spektara, (a kao njihov početak možemo računati 1917 godinu), izazvala je živo interesovanje naučnog sveta. Analizu prve knjige Mihaila Petrovića Les spectres numériques, koja je izašla 1919 godine dao je pored ostalih Maurice d'Ocagne, koji kaže: „Njegova teorija brojnih spektara i time stvorena spektralna metoda tako je elastična i tako plodna u primenama" [4]. Predgovor toj knjizi napisao je E. Borel. Najzad 1928 godine Petrović je pozvan na Sorbonu da održi kurs svoje teorije matematičkih spektara, koji je iste godine i štampan [5]. Petrović se bavio spektrima više od 20 godina, a do 1932 godine jedini je on objavljivao radove iz ove oblasti.

Hteo bih ovom prilikom, da ukažem na jednu zabludu, koja je kod nas ukorenjena. To je pogrešno mišljenje da se matematički spektri isključivo mogu primeniti na već rešene probleme u cilju njihovog aritmetiziranja tj. dobijanja svih uslova u aritmetičkom obliku. Ustvari pomoću matematičkih spektara mogu se rešavati novi problemi, štaviše i takvi koji se na drugi način ne mogu rešiti.

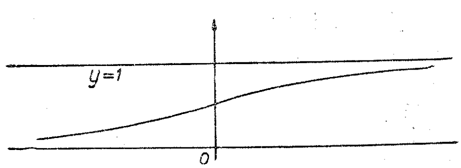
Teorija matematičkih spektara

„Matematički spektri pripadaju grani matematike, koja je tek napravila svoje prve korake, a koja je posvećena odnosima dvaju osnovnih matematičkih bića funkcije i broja" [5], tako definiše Petrović mesto svoje teorije u nauci. Za opštu pak definiciju spektra uzima se: „Spektar skupa (O) konkretnih ili apstraktnih stvari O_1, O_2, O_3 . . . je linearan niz S, ograničen ili neograničen, grupa znakova m_1, m_2, m_3 . . . povezanih sa stvarima O_k. Veza je takva da jedna stvar O_k jednoznačno odredjuje grupu znakova m_k i da obratno ova grupa znakova m_k odredjuje stvar O_k pod uslovom da sve stvari O_k i svi znaci m_k mogu biti na taj način odredjeni. Kao primer spektra skupa (O) konkretnih stvari pomenućemo optički spektar. Kao primer spektra skupa (O) apstraktnih stvari naznačićemo spektar skupa brojeva [5].

Opšti način obrazovanja matematičkog spektra skupa (P) realnih brojeva P_k je vezan za pomoćnu funkciju $\Phi(x)$ takvu da kriva $y = \Phi(x)$ ima sledeću osobinu: svakoj realnoj vrednosti x odgovara jedna jedina realna vrednost y, i ta vrednost se nalazi izmedju 0 i 1; svakoj pak realnoj vrednosti y iz tog intervala odgovara jedna jedina realna vrednost x. Takvih funkcija ima beskrajno mnogo, na primer takva je funkcija

$$\Phi(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}$$

čiji je grafik



Sl. 1

Pomoću ove funkcije obrazuju se decimalni brojevi

$$
(1) \quad \begin{array}{l}
\Phi(P_1) = 0,\ a_1^1\ a_1^2\ a_1^3 \ldots\ldots\ldots \\
\Phi(P_2) = 0,\ a_2^1\ a_2^2\ a_2^3 \ldots\ldots\ldots \\
\Phi(P_3) = 0,\ a_3^1\ a_3^2\ a_3^3 \ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}
$$

gde a_k^h označava h-tu decimalu k-tog broja ove tablice. Obrazujmo sad pomoću „metoda dijagonala" broj S

$$S = 0,\ a_1^1\ a_2^1\ a_1^2\ a_3^1\ a_2^2\ a_1^3\ a_4^1\ a_3^2 \ldots\ldots\ldots$$

Način obrazovanja broja S može biti dat sledećom shemom gornjih i donjih indeksa

$$
\begin{array}{c|cc|ccc|cccc|l}
1 & 1 & 2 & 1 & 2 & 3 & 1 & 2 & 3 & 4 & \ldots\ldots\ldots \\
1 & 2 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 3 & 2 & 1 &
\end{array}
$$

iz koje se vidi da: 1) broj članova u svakoj novoj grupi povećava se za jedinicu, 2) u svakoj grupi gornji indeks raste za jedinicu a donji opada za jedinicu, 3) zbir indeksa kod svih članova iste grupe je isti a povećava se za jedinicu pri prelazu iz jedne grupe u sledeću.

Na osnovu ovog moguće je izvesti sledeće zaključke: [6]

1^0 decimal a_k^h nalazi se u broju S na α-tom decimalnom mestu čiji je rang $h + \frac{1}{2}(k + h - 1)(k + h - 2)$.

2^0 α-ti decimal broja S je decimal a_k^h gde su indeksi h i k dati sledećim obrascima

$$h = \alpha - \frac{n(n-1)}{2} \qquad\qquad k = \frac{n(n+1)}{2} - \alpha + 1$$

a gde n ima značenje

$$n = \left[\tfrac{1}{2}\left(1 + \sqrt{8\alpha - 7}\right)\right] \; ^{1)}$$

Iz ovog sleduje da se broj S može jednoznačno odrediti pomoću brojeva tablice (1) i obratno jednoznačno odredjuje sve brojeve ove tablice. Zbog osobina funkcije $\Phi(x)$ postoji ista zavisnost izmedju broja S i brojeva P_k i obratno, kao i ona izmedju S i brojeva $\Phi(P_k)$. Stoga je S spektar skupa (P) realnih brojeva P_k. Na sličan način može se obrazovati spektar skupa (V) kompleksnih brojeva V_k. Ovaj način obrazovanja spektra, iako je opšti, retko se primenjuje zbog njegove nepraktičnosti. On ima teoriski značaj. U praksi se primenjuju tzv. prugasti spektri koji se lakše obrazuju, ali su ograničeni na izvesne klase brojeva.

Pretpostavimo da su realni brojevi čiji prugasti spektar hoćemo da obrazujemo celi pozitivni brojevi N_k [2]). U tom slučaju mesto unapred izabrane pomoćne funkcije $\Phi(x)$, možemo se poslužiti, radi obrazovanja spektra,

---

1) $[p]$ označava najveći ceo broj manji ili jednak broju p.

2) Medju njima mogu biti i nule.

nizom unapred izabranih celih pozitivnih brojeva h_k takvih da je $h_k \geqslant l_k$ za svaki indeks k, gde l_k označava broj cifara broja N_k. Spektar se obrazuje ovako, prvo se obrazuju grupe cifara G_k sastavljene na sledeći način: grupa cifara G_k sadrži sve cifre broja N_k napisane istim redom, ali kojima prethodi onoliki broj nula da ukupan broj cifara grupe G_k iznosi h_k. Zatim se grupe cifara G_k ispisuju jedna za drugom bez ostavljanja ikakve praznine

$$G_0\, G_1\, G_2\, G_3 \ldots\ldots\ldots,.$$

Još se stavi decimalna zapeta izmedju G_0 i G_1 i spektar S pretstavlja broj

$$S = G_0, G_1\, G_2\, G_3\,, \ldots\ldots$$

koji ima konačno ili beskonačno veliki broj decimala prema tome da li je skup celih pozitivnih brojeva N_k bio konačan ili beskonačan. Iz samog načina obrazovanja broja S vidi se da on zadovoljava definiciju spektra. Brojevi h_k, koji zamenjuju funkciju $\Phi(x)$ pri obrazovanju spektra igraju posve drugu ulogu od ove funkcije, jer dok bi uzimanje druge funkcije $\Phi(x)$ promenilo sve decimale broja S, dotle promena niza brojeva h_k ne menja decimale sa značenjem niti njihov red već jedino povećava ili smanjuje broj nula koje razdvajaju pojedine grupe cifara sa značenjem.

Ovako obrazovani spektar sastoji se iz spektralnih pojaseva G_k, a svaki pojas sastoji se iz dva dela „svetlog" dela sastavljenog iz cifara sa značenjem, naime cifara broja N_k i „tamnog" dela sastavljenog iz samih nula. Sličnost sa optičkim spektrom otvorila je put ovoj fizičkoj terminologiji. Unapred izabrani celi pozitivni brojevi h_k obično su dati obrascem

$$h_k = \varphi\,(k)$$

ma da se mogu izabrati i na drugi način (na primer, rekursivnim obrascem). Zakon koji ih odredjuje naziva se spektralnim ritmom. Najčešći su spektralni ritmi

$$h_k = h \quad \text{(uniformni ritam)}$$
$$h_k = h + ck \quad \text{(jednako ubrzani ritam)}$$

gde su h i c celi pozitivni brojevi.

Za spektralni ritam se kaže da se on slaže sa izvesnim nizom celih pozitivnih brojeva ako je ispunjen uslov

$$h_k \geqslant l_k$$

za svako k. Isto tako se kaže i da niz dopušta ovaj spektralni ritam. Spektralni ritam igra ogromnu ulogu u obrazovanju spektara i često njegova odredba i pretstavlja najvažniji deo problema.

Spektrom funkcije naziva se spektar koeficijenata razlaganja ove funkcije u Mac-Laurin-ov red. Ako su ovi koeficijenti celi pozitivni brojevi, to se za funkciju može obrazovati prugasti spektar na pokazani način. I za spektar funkcije spektralni ritam može biti različit. Najjednostavniji i u isti mah najrašireniji je uniformni spektralni ritam. Za taj ritam spektar funkcije $f(x)$ se izražava pomoću sledećeg obrasca

$$S = f(10^{-h}) \tag{2}$$

Zacelo ako se funkcija $f(x)$ napiše u obliku

$$f(x) = N_0 + N_1 x + N_2 x^2 + N_3 x^3 + \ldots\ldots$$

gde su N_k celi pozitivni brojevi to je

$$f(10^{-h}) = N_0 + N_1 \cdot 10^{-h} + N_2\, 10^{-2h} + N_3\, 10^{-3} + \ldots\ldots$$

ili

$$f(10^{-h}) = N_0,\ \underbrace{(000\ldots 0N_1)}_{h \text{ cifara}} \ \Big| \ \underbrace{(000\ldots 0N_2)}_{h \text{ cifara}} \ \Big| \ \underbrace{(000\ldots 0N_3)}_{h \text{ cifara}} \ \Big| \ldots$$

i time je gornji obrazac dokazan.

A to znači da se spektar funkcije može dobiti iz ma kog oblika funkcije bez poznavanja koeficijenata njenog razvijanja u Mac-Laurin-ov red i prema tome baš spektar se može primeniti radi nalaženja ovih koeficijenata. Za druge, složenije spektralne ritme nema sličnog obrasca u konačnom obliku. Već za jednako ubrzani ritam, spektar funkcije se dobija u obliku odredjenog integrala.

Ponekad je potrebno dobiti spektre koji bi bili celi brojevi. Tada mesto da dopisujemo grupe cifara G_k s leva na desno, dopisujemo ih sa desna na levo i spektar ima oblik

$$S = G_m \ldots\ldots G_2 G_1 G_0.$$

Naravno da je takvo obrazovanje spektra moguće samo ako je niz celih brojeva konačan. Ovakvi spektri nazivaju se inversni. Za inversni spektar polinoma (sa celim pozitivnim koeficijentima) sa uniformnim ritmom važi obrazac

(3) $$S = f(10^h)$$

Drugi način obrazovanja spektra koji je celi broj, jeste množenje broja

$$G_0, G_1 G_2 \ldots\ldots\ldots\ldots G_m$$

sa dovoljno velikom dekadnom jedinicom. Tada je spektar

$$S = G_0 G_1 G_2 \ldots\ldots\ldots G_m.$$

Ovakvi spektri zovu se pomereni. Za pomereni spektar polinoma n-tog stepena $f(x)$ važi obrazac

(4) $$S = 10^{nh} f(10^{-h})$$

Obe ove vrste spektara uvedene su mnogo docnije [7].

Za slučaj kad je niz celih brojeva N_k sastavljen iz pozitivnih i negativnih brojeva, upotrebljavao se u početku spektar niza apsolutnih vrednosti brojeva N_k i dopunski niz znakova. Takav spektar nije zadovoljavao nijedan od obrazaca (2) (3) (4) i bio praktički neupotrebljiv. Tek 1935 god. [8] proširen je način dobijanja prugastih spektara i na nizove celih brojeva (pozitivnih i negativnih) tako da dobijeni spektri zadovoljavaju obrasce

(2) (3) (4). Ovim spektrima služio se i sam M. Petrović u svojim docnijim radovima [9], [10]. Za obrazovanje ovakvih spektara spektralni ritam mora biti takav da bude $h_k > l_k$ (a ne $h_k \geqslant l_k$). Pokazaćemo na primerima obrazovanje spektra ovih brojeva kao i nalaženje niza brojeva kad je dat spektar.

PRIMER: Naći spektar niza brojeva +1, —2, 0, +8, 0, —3, 0, +6, 0, +5, recimo, sa najmanjim dopuštenim uniformnim ritmom. Pošto h_k mora biti veće od l_k a $l_k = 1$, to znači da uniformni ritam koji se slaže sa ovim nizom je bar $h = 2$. Stoga ćemo sa ovim ritmom i obrazovati spektar. Sam proces obrazovanja spektra sastoji se u sledećem: Prvo treba razdvojiti niz na dva niza, prvi koji bi sadržao samo pozitivne brojeve i drugi koji bi sadržao samo apsolutne vrednosti negativnih brojeva, prazna mesta u oba niza treba popuniti nulama

(I) 1, 0, 0, 0, 8, 0, 0, 0, 6, 0, 5

(II) 0, 2, 0, 1, 0, 0, 3, 0, 0, 0, 0.

Zatim treba za oba niza obrazovati spektre S_I i S_{II} sa istim ritmom (u ovom slučaju sa uniformnim ritmom $h = 2$).

$$S_I = 1, \;|00|00|00|08|00|00|00|06|00|05$$

$$S_{II} = 0, \;|02|00|01|00|03|00|00|00|00|00$$

Razlika $S = S_I - S_{II}$ i jeste traženi spektar

$$S = 0, \;|97|99|99|07|99|97|00|06|00|05$$

Iz samog načina obrazovanja izlazi da niz, za slučaj unapred datog ritma, koji se sa njim slaže, jednoznačno odredjuje spektar. Napomenimo da bismo za drugi spektralni ritam imali drugi spektar. Osim toga vidimo da pojas koji odgovara negativnom broju počinje devetkom, a pojas koji odgovara pozitivnom broju počinje nulom. (Ovo sve važi za spektar koji je pozitivan broj, ako pak spektar bude negativan broj onda je obratno). Osim toga pojas koji odgovara pozitivnom broju ima vrednost ili samog tog broja, (ako pojas iza njega počinje nulom) ili pak ima vrednost odgovarajućeg broja umanjenu za jedinicu (ako pojas iza njega počinje devetkom). Na taj način je lako iz spektra S odrediti pozitivne brojeve niza, a kad je to učinjeno onda je lako obrazovati pomoćni spektar S_I, a na osnovu njega i spektar $S_{II} = S_I - S$. Ovaj pak odredjuje negativne brojeve niza, te je na taj način niz odredjen.

PRIMER: Dat je spektar niza celih (pozitivnih i negativnih) brojeva.

$$S = 2, \;|97|99|92|06|00|04$$

sa uniformnim spektralnim ritmom $h = 2$, koji se slaže sa tim nizom, treba odrediti niz. Na osnovu napred iznetog pozitivni brojevi (ili nule) niza biće na prvom, petom, šestom i sedmom mestu, a njihove vrednosti biće 3, 6, 0, 4. Ispišimo ih stavljajući na prazna mesta nule.

(I) $\qquad 3, 0, 0, 0, 6, 0, 4.$

Spektar S_I tako dobijenog niza obrazovan sa istim ritmom biće

$$S_I = 3, \mid 00 \mid 00 \mid 00 \mid 06 \mid 00 \mid 04$$

a $S_{II} = S_I - S$ biće

$$S_{II} = 0, \mid 02 \mid 00 \mid 08 \mid 00 \mid 00 \mid 00$$

iz čega izlazi da je niz negativnih brojeva (niz II) sledeći

$$0, -2, 0, -8, 0, 0, 0.$$

Superponiranjem ili što je u ovom slučaju isto, sabiranjem oba niza dobija se niz

$$3, -2, 0, -8, 6, 0, 4$$

koji odgovara datom spektru. Na donekle sličan način mogu se obrazovati i spektri brojeva koji nisu celi. Ovo proširenje definitivno je izvršeno 1949 i tema je zasebnog saopštenja [13].

Napomenimo da postoje i približni spektri koji su u stvari približne vrednosti spektara. Pošto su oni prugasti, a svaka pruga odredjuje jedan broj niza (ili koeficijenat razvijanja funkcije u Mac-Laurin-ov red) to se iz približnog spektra tačnog do izvesne decimale može tačno odrediti niz prvih (po redu) brojeva (odnosno prvih koeficijenata razvijanja funkcije u Mac-Laurin-ov red). Ovo ne važi za opšti način obrazovanja spektara, jer u tom slučaju približni spektar može dati samo približnu vrednost prvih brojeva) odnosno koeficijenata razvijanja funkcije u Mac-Laurin-ov red).

Spektralnom generatrisom $F(x)$ niza celih brojeva naziva se funkcija koja svojom brojnom vrednošću za utvrdjenu vrednost x daje spektar. Obično je ta vrednost $x = 1$. Mnoge stranice Petrovićevih radova posvećene su analizi ove funkcije. Osim ove funkcije, postoje i druge funkcije vezane za spektre.

Spektralnim faktorima nazivaju se samo oni faktori pomeranih ili inversnih spektara [7] koji pretstavljaju spektre nekih funkcija.

Napomenimo da jedan isti niz brojeva (ili funkcija) može imati beskrajno mnogo različitih spektara što zavisi od pomoćne funkcije $\Phi(x)$ koja može uzimati različite oblike (za opšti način obrazovanja spektra), odnosno od niza brojeva h_k (spektralnog ritma), za slučaj obrazovanja prugastih spektara.

Predjimo sad na računske radnje sa spektrima. One, očigledno, mogu imati smisla samo onda, kada spektar koji se dobija kao rezultat računskih radnji nad spektrima pretstavlja spektar rezultata istih računskih radnji nad nizovima brojeva (odnosno funkcijama). Pošto se nad nizovima, od algebarskih računskih radnji, mogu vršiti samo sabiranje i oduzimanje to i nad odgovarajućim spektrima se mogu vršiti ove dve računske radnje. Ove dve računske radnje mogu se vršiti i sa spektrima neuniformnog spektralnog ritma. Za spektre koji odgovaraju funkcijama sa celim koeficijentima razvijanja u Mac-Lourin-ov red mogu se pored ovih računskih radnji vršiti i množenje i stepenovanje a ostale algebarske računske radnje samo onda ako se unapred zna da rezultat primene tih radnji na funkcije daje funkciju čiji su koeficijenti razvijanja u Mac-Lourin-ov red takodje celi brojevi (odnosno brojevi za koje se zna da pripadaju izvesnoj klasi brojeva). Napomenimo da se svi spektri moraju obrazovati za isti uniformni spektralni ritam, (za slučajeve sabiranja i oduzimanja ritam ne mora biti uniforman), i taj ritam mora se slagati ne samo sa svima funkcijama sa čijim spektrima mislimo da računamo, već se taj ritam mora slagati i sa funkcijom koja će proizaći kao rezultat tih računskih radnji, tj. sa funkcijom koju hoćemo da nadjemo. U ovome često i leži glavna teškoća računanja sa spektrima odnosno računanja sa funkcijama pomoću njihovih spektara. Ovde ćemo pomenuti problem rekursivnog izračunavanja spektara kad izmedju funkcija postoji rekursivna veza [11]. Konkretno se ovaj način primenjuje na izračunavanje koeficijenata eliptičnih funkcija $Sn\,z$, $Cn\,z$, $dn\,z$, $Z(z)$, $Al(z)$, $Al_1(z)$, $Al_2(z)$, $Al_3(z)$, koji su funkcije od k.

Primena matematičkih spektara (Spektralna metoda)

Iznećemo sada u najkraćim potezima oblasti na koje se matematički spektri najviše primenjuju. To su algebra, analiza, teorija brojeva, teorija verovatnoće i teorija funkcija. Isto tako iznećemo i konkretne primere tih primena. Opšti postupak u spektralnoj metodi je, na osnovu datih podataka u problemu, a pomoću izvesnih razmišljanja i izračunavanja, obrazovati spektar (ili spektre) koji daje odgovor na postavljeni problem. Interesantno je istaknuti na koji način prugasti spektar daje odgovor na postavljeni problem. To se dešava na različite načine: prvo, spektar može svakim svojim pojasom (a tih pojaseva može biti konačan ili beskonačan broj) da da brojni odgovor na konačan ili beskonačan broj pitanja postavljenih u problemu. Drugo, spektar može svakim svojim pojasom da odgovara sa „da“ ili „ne“ na konačan ili beskonačan broj pitanja postavljenih u problemu. Na primer, sa „da“ odgovara spektar ako je dotični pojas sastavljen od samih nula a sa „ne“, ako to nije slučaj. Najzad, spektar može samo jednim svojim pojasom izvesnog ranga odgovoriti na postavljeno pitanje, dok su svi ostali pojasevi bez interesa. Malo opširnije obradićemo spektralni način utvrdjivanja da li se polinom sa celim koeficijentima razlaže (raspada) na polinome-faktore sa celim koeficijentima, kao i nalaženje samih tih faktora.

Za to razlaganje postojala je jedino Kronecker-ova metoda [12]. Ona je mešovita, aritmetičko-algebarska, a sastoji se u tome što za $n+1$ celih vrednosti x, naime $x = a_i$ $(i = 1,2 \ldots . n + 1)$, izračunaju brojne vrednosti polinoma n-tog stepena, sa celim koeficijentima, $f(x)$ koji se razlaže tj. brojevi $f(a_i)$. Svaka dobijena brojna vrednost $f(a_i)$ se zatim razlaže na činioce koji se medjusobno kombinuju. Na taj način se dobija ogroman broj skupova od po $n+1$ brojnih vrednosti, od kojih je svaki činilac po jedne od vrednosti $f(a_i)$. Jasno je da polinom činilac sa celim koeficijentima $f_i(x)$ $(i = 1,2 \ldots . m\ m \leqslant n)$ mora dobiti za $x = a_i$ vrednosti koje su činioci $f(a_i)$. To su, dakle, potrebni uslovi za polinome-činioce $f_i(x)$. Svakom skupu od $n+1$ činilaca $f(a_i)$ odgovara konačan ma da često vrlo veliki broj polinoma sa celim koeficijentima od prvog do $(n-1)$-og stepena, koji svi za $x = a_i$ uzimaju brojne vrednosti tih činilaca $f(a_i)$. Medju tim polinomima nalaze se svi polinomi činioci $f_i(x)$ polinoma $f(x)$. Svi polinomi koji odgovaraju svim skupovima činilaca $f(a_i)$ mogu se obrazovati a zatim se može probanjem utvrditi koji su od njih zapravo polinomi činioci $f_i(x)$. Za taj aligoritam sam Kronecker kaže da on daje mogućnost da se razlože polinomi „in endlich vielen Schritten".

Napomenimo, da je J. Molk smatrao da je nemoguće naći aritmetičke dovoljne uslove za razlaganje polinoma, što je spektralnom metodom učinjeno.

Pomoću Kronecker-ove metode svodi se razlaganje polinoma na razlaganje izvesnog broja celih brojeva, dok se pomoću spektralne metode svodi isti problem na razlaganje jednog jedinog celog broja.

Neka je dat polinom $f(x)$ stepena n, sa celim koeficijentima A_i, i njega treba razložiti na faktore-polinome $f_i(x)$, koji takodje imaju cele koeficijente.

Pošto su poznati koeficijenti A_i polinoma $f(x)$, to se može naći gornja granica modula korena, a kad se zna gornja granica modula korena, to se može naći granica l, koju ne može preći nijedan koeficijent (po modulu) faktora, sa celim koeficijentima, polinoma $f(x)$ i bez poznavanja samih tih faktora-polinoma. Prema tome je moguće naći uniformni ritam h, koji se slaže sa svima tim faktorima. Isto tako pošto znamo da broj faktora ne može biti veći od n, a stepen pojedinih faktora manji je od n, dok moduli njihovih koeficijenata ne prelaze izvesnu nadjenu granicu, to i proizvod takvih faktora mora za module svojih koeficijenata takodje imati izvesnu granicu koja se može odrediti. Naravno da se ta granica može neposredno dobiti pošto znamo polinom $f(x)$ koji je ustvari proizvod tih faktora, ali mi sad smatramo da je on nepoznat i tražimo granicu za koeficijente polinoma proizvoda iz polinoma faktora koju dopuštaju uniformni ritam h, i koji, kad se pomnože, daju polinom n-tog stepena. Prema tome je uvek moguće naći uniformni ritam H, koji se slaže sa proizvodom takvih faktora.

Posto su ovako definisani pojmovi postupak za razlaganje polinoma je sledeći:

Da bi se polinom $f x)$ sa celim koeficijentima razložio na faktore $f_i(x)$, nerazložive polinome iste vrste, treba obrazovati celi inversni[1]) spektar S, polinoma $f(x)$, sa uniformnim ritmom H tj. broj

$$S = f(10^H),$$

zatim ga razložiti na spektralne faktore S_i širine H sa prazninama (obaveznim mračnim delovima) širine $H—h$. Brojevi S_i biće spektri nerazloživih faktora polinoma $f(x)$ tj. spektri polinoma $f_i(x)$, a kad su poznati spektri poznati su i sami polinomi.

Ovi su uslovi u isti mah i potrebni i dovoljni.

Kako je $f(x)$ deljivo sa svakim svojim faktorom $f_i(x)$, i kako $f_k(x)$ ima cele koeficijente, i dopušta ritam h, to spektar S_i mora biti faktor spektra S, jer su ti spektri u stvari brojne vrednosti odgovarajućih polinoma za $x = 10^H$, i to spektralni faktor gore navedenih osobina.

Uslov je dakle potreban.

S druge strane, svakom spektru S_i, odgovara po jedan polinom $f_i(x)$ sa celim koeficijentima, a proizvodu svih polinoma $f_i(x)$, pošto je ritam H

---

[1]) Isto tako mesto celog inversnog može se upotrebiti celi pomereni spektar, pri čemu se dokaz vrlo malo menja.

dovoljno velik, odgovaraće proizvod svih spektara S_i to jest broj S. Kako proizvod svih polinoma $f_i(x)$ dopušta ritam H, to se dobijaju dve funkcije $f(x)$ i $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ sa celim koeficijentima, koje imaju isti spektar S za isti ritam H. Kako taj ritam dopuštaju obe funkcije, to je ovo prema teoriji matematičkih spektara moguće samo tako, ako je

$$f(x) = \prod_{i=1}^{m} f_i(x).$$

U s l o v j e d a k l e d o v o l j a n.

Očigledno je da su polinomi $f_i(x)$ neraspadljivi, ako se ima na umu da je razlaganje broja S na spektralne faktore gornjih osobina vršeno dogod je moguće.

Pokažimo sad kako se odredjuju brojevi h i H.

Iz sledećeg oblika polinoma faktora

$$f_i(x) = B_i \prod_{k=m_i}^{r_i} (x-\alpha_k),$$

gde su α_k koreni polinoma $f(x)$, B_i delitelj koeficijenta A_0; $(r_i - m_i + 1)$, stepen polinoma $f_i(x)$ koji ima za korene polinoma $f(x)$ počev od m_i-tog pa do r_i-tog izlazi pomoću elementarnih razmišljanja da su im svi koeficijenti manji ili jednaki (po modulu) broju

$$A_0 \left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)^{n-1} l^{n-1}.$$

Iz toga sleduje da svi polinomi $f_i(x)$ dopuštaju uniformni spektralni ritam

$$h = [L_1] + 2,$$

gde je

$$L_1 = \log \binom{n-1}{v_1} + (n-1)\log [A_0 + (A_k)] - (n-2)\log A_0$$

i

$$v_1 = \left[\frac{n-1}{2}\right]$$

a A_k najveći (po modulu) koeficijenat polinoma $f(x)$. Na taj način broj h je odredjen.

Predjimo sad na odredjivanje uniformnog ritma H, koji se slaže sa proizvodom svih polinoma $f_i(x)$.

Pomoću elementarnih razmišljanja izlazi da su svi koeficijenti takvog proizvoda manji ili jednaki

$$10^{nh}\binom{n}{\left[\frac{n}{2}\right]}$$

Prema tome će proizvod $\prod_{i=1}^{m} f_i(x)$ dopuštati uniformni ritam

$$H = nh + [L_2] + 2,$$

gde je

$$L_2 = \log \binom{n}{v_2}$$

a

$$v_2 = \left[\frac{n}{2}\right]$$

Time je odredjivanje brojeva h i H završeno.

Primer: Razložiti polinom

$$f(x) = x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 7x + 2$$

na faktore polinome sa celim koeficijentima.

Odredimo prvo brojeve h i H. Za uočeni slučaj biće

$$A_0 = 1, \qquad (A_k) = 7, \qquad n = 4,$$

stoga prema obrascima biće

$$h = 5 \qquad\qquad H = 22\,.$$

Prema tome, spektar S biće

$$S = f(10^{22}) = 10_{21}\,50_{21}\,29_{21}\,30_{21}\,2\ ^{1)}$$

Ovaj spektar treba razložiti na spektralne faktore sa pojasevima širine $H = 22$ cifre i sa praznimama od $H - h = 17$ cifara. Tok razlaganja je

$$\begin{array}{r|l} 10_{21}\,50_{21}\,29_{21}\,30_{21}\,2 & 10_{21}\,19_{22} \\ 10_{21}\,29_{21}\,8 & 10_{21}\,29_{21}\,8 \\ 1 & \end{array}$$

Kako nadjeni faktori zadovoljavaju sve postavljene uslove to su

$$S_1 = 1\ 0_{21}\ 1\ 9_{22} \qquad\qquad S_2 = 1\ 0_{21}\ 2\ 9_{21}\ 8$$

spektri neraspadljivih faktora-polinoma $f_1(x)$ i $f_2\,x)$, a sami ti polinomi biće

$$f_1(x) = x^2 + 2x - 1 \qquad\qquad f_2(x) = x^2 + 3x - 2$$

---

[1]) 0_n ili 9_n označava niz od n nula odnosno n devetki.

Spektralna metoda se takodje primenjuje i na traženje zajedničkih delitelja polinoma

Drugi primer pokazuje kako pomoću spektra možemo dobiti broj celih rešenja jedne jednačine sa dve nepoznate, oblika

$$ax + by = k$$

za izvesne granice nepoznatih x i y. Ovde su a, b, k celi pozitivni brojevi. Primenimo to na jednačinu

$$3x + 2y = 19 \cdot \qquad 0 \leqslant x \leqslant 10$$
$$0 \leqslant y \leqslant 9$$

Ritam koji ovaj problem dopušta je h = 1 a spektar je

$$S = \frac{9(m+1)ah}{9ak} \times \frac{9(n+1)bh}{9bk},$$

gde su m i n gornje granice nepoznatih x i y. Ovde je $a = 3$, $b = 2$, $k = 19$, $m = 10$, $n = 9$. Prema tome spektar izračunat u decimalnom obliku je

S = 0, 1 0 1 1 1 1 2 1 2 2 2 2 3 2 3 3 3 3 4 3 4 3 3 4 3 3 4 3 3 4...

Ovde je od interesa samo k + 1 pojas (u našem slučaju dvadeseti pojas odnosno dvadeseti decimal), koji svojom brojnom vrednošću daje broj rešenja. Taj broj je 3. Lako se može uveriti da ima tri rešenja (x = 1, y = 8; x = 3, y = 5; x = 5, y = 2).

Treći primer pokazuje kako se iz spektra može naći beskrajan niz odredjenih integrala istog oblika, naime integrala

$$I_n = \frac{2^{2n+1}}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} cos^{2n} t \; dt \cdot$$

Ovde uniforman ritam nije moguć, jer vrednosti integrala rastu beskonačno, već je moguć jednako ubrzani ritam

$$h_k = k,$$

tj. prvi pojas ima jednu cifru, drugi dve, treći tri itd. Svaki pojas daje vrednost integrala sa istim indeksom tj. prvi pojas daje vrednost integrala, gde je $n = 1$, drugi gde je $n = 2$ itd. do beskonačnosti. Sam spektar dobija se u obliku odredjenog integrala

$$S = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta\,(4\; cos^2 t) dt,$$

gde je $\theta(x)$ poznata transcendentna funkcija

$$\theta(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2+n} x^n \qquad q = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

Brojna vrednost spektra je

$$S = 0{,}1 \ / \ 02 \ / \ 006 \ / \ 0020 \ / \ 00070 \ / \ 000252 \ / \ 0000924 \ldots\ldots$$

Isto tako se spektralna metoda primenjuje i na utvrdjivanje da li je jedna funkcija inversija A b e l-ovih integrala [10].

Četvrti spektar

$$S = \frac{1}{9_2} + \frac{1}{9_4} + \frac{1}{9_6} + \ldots\ldots\ldots \ \ldots\ldots + \frac{1}{9_{200}} - \frac{1}{100}, \ \frac{9_4}{9 \, . \, 9_2}$$

vezan je za proste brojeve, ritam je ovde uniforman i iznosi h = 2. On važi do broja 100. Svakom broju odgovara po jedan pojas ovog spektra i to jedinici odgovara prvi pojas, broju dva drugi pojas itd. Ako je broj prost odgovarajući pojas je sastavljen od samih nula, ako je broj složen onda to nije slučaj. Prema tome izbrojivši pojaseve sastavljene od samih nula saznajemo koliko ima prostih brojeva manjih od jednog unapred zadatog broja (jedinica se ovde računa kao prost broj). U decimalnom obliku ovaj spektar glasi

$$S = 0{,}00 \ |00|00|01|00|02|00|02|01|02|00|04|00|02|02|03|00|07 \ldots\ldots$$

Isto tako se spektralna metoda može primeniti i na klase brojeva, sledeće strukture

$$N_1 C_n N_2 C_n N_3 C_n \ldots\ldots\ldots N_{k-l} C_n N_k \qquad k \geqslant 3$$

$$n = 0,1,2 \ldots\ldots$$

gde su N_i makakvi brojevi sa istim brojem cifara p, a C_n je niz od n cifara na nekim mestima gornjeg izraza su sve ove cifre nule, tako da imamo niz od n uzastopnih nula $00..00 = 0_n$, dok su na drugim sve ove cifre devetke, tako da imamo niz od n uzastopnih cifara: $99..99 = 9_n$. Broj n varira od 0 do ∞.

Za svaku klasu brojeva gornje strukture dokazuje se sledeća teorema:

Za svaku klasu brojeva gornje strukture mogu se odrediti tri cela pozitivna broja n_1, n_2, n_3. A k o s e d e s i d a s e s p e c i j a l a n b r o j u o č e n e k l a s e, k o j i o d g o v a r a v r e d n o s t i $n = n_1$, s m a t r a n k a o s p e k t o r s a r i t m o m $H = n_1 + p$, m o ž e r a z l o ž i t i n a s p e k t r a l n e f a k t o r e s a p r a z n i n a m a š i r i n e n_2, to n i j e d a n b r o j t e k l a s e k o j i o d g o v a r a v r e d n o s t i m a $n \geqslant n_3$ n i j e p r o s t [8]. Date su i formule za izračunavanje n_1, n_2, n_3 i funkciji od k, N_1 i p. Napomenimo da ovo važi za klase brojeva gornje strukture ne samo u dekadnom već i makom brojnom sistemu.

Peti spektar

$$S = (2 + 10^{-5})^{10} - 2^{10}$$

pokazuje verovatnoću dva suprotna dogadjaja A i B čije su verovatnoće $p = \frac{2}{3}$, $q = \frac{1}{3}$. Ritam je $h = 5$. U decimalnom obliku spektar glasi

$$S = 0{,}05120/11520/15360/13440/08064/03360/00960\ldots..$$

Verovatnoća da se dogadjaj A dogodi od 10 pokušaja $10 - k$ puta (a dogadjaj B, k puta) dobija se kad se $k + 1$ pojas (od 5 cifara) podeli sa stalnim brojem

$$3^{10} = 59049.$$

Naprimer verovatnoća P_4 da se dogadjaj A dogodi 6 puta a B dogodi 4 puta data je petim pojasom podeljenim sa 59049 tj.

$$P_4 = \frac{8064}{59049} = 0{,}136545\ldots$$

Šesti primer pretstavlja primenu spektralne metode na razvijanje funkcija u Mac-Laurin-ov red, naime na razvijanje konačnog Lambert-ovog reda

$$f(z) = \frac{z}{1-z} + \frac{z^2}{1-z^2} + \frac{z^3}{1-z^3} + \ldots\ldots.. + \frac{z^m}{1-z^m}$$

gde je $m < 100$.

Unapred mora biti poznato samo to da su koeficijenti ovog razvijanja celi pozitivni brojevi i brzina njihovog rašćenja radi odredbe spektralnog ritma. Spektralni ritam mora biti takav, da svaki pojas bude dovoljno širok tj. da ima dovoljno veliki broj cifara da primi odgovarajući koeficijenat razvijanja funkcije. U — suprotnom slučaju nastupilo bi najahivanje koeficijenata i broj $S = f(10^{-h})$ ne bi morao pretstavljati spektar funkcije. Poznato je da su koeficijenti razlaganja gornjeg Lambert-ovog reda dvociferni brojevi (ili jednociferni), što važi za prvih dvadeset koeficijenata. Stoga funkcija dopušta uniforman ritam $h = 2$, tj. spektar će se deliti na pojaseve stalne širine od po dve cifre. Sam spektar dat je brojem

$$S = \frac{1}{9_2} + \frac{1}{9_4} + \frac{1}{9_6} + \ldots\ldots + \frac{1}{9_m}.$$

U decimalnom obliku S iznosi

$$S = 0{,}01|02|02|03|02|04|02|04|03|04|02|06|02|04|04|05|02|06|02|06\ldots.$$

što daje razvijanje funkcije $f(z)$ u red oblika

$$f(z) = z + 2\,z^2\, 2z^3 + 3z^4 + 2z^5 + 4z^6 + 2z^7 + 4z^8 + 3z^9 + \ldots..$$

Završavajući ovo obaveštenje valja reći nekoliko reči o perspektivi daljeg razvitka ove teorije.

Moguća su i dalja usavršavanja ove metode kao i proširenje njene primene na nove oblasti i nove probleme, ali ipak valja imati na umu reči E. Borela, iz predgovora knjizi „Les spectres numériques“ napisane 1919 godine, tj. kad se teorija spektara tek radjala.

„Ovo delo je posvećeno jednoj od najtežih grana matematike: odnosima teorije funkcija i transcendentne aritmetike. Ova grana je, ako se tako može reći, u kolevci i verovatno je da njeno napredovanje neće biti brzo, jer su tu ogromne teškoće“.

To je možda razlog zašto su oni koji nastavljaju ovo delo M. Petrovića tako malobrojni.

LES SPECTRES MATHÉMATIQUES

PAR CONSTANTIN ORLOFF

Ce travail est un aperçu général sur les spectres mathématiques et la méthode spectrale. La première partie du travail traite l'historiat de cette théorie, en donnant aussi les opinions des savants sur cette théorie. La seconde partie est consacrée à la théorie des spectres mathématiques contentant non seulement les résultats du fondateur de cette théorie M. Petrovitch, mais aussi les résultats récents obtenus par l'auteur de ce travail jusqu'à l'année 1949. La troisième partie s'occupe des applications de cette théorie à l'algèbre, l'analyse, la théorie des nombres et à la probabilité, c'est à dire s'occupe de la méthode spectrale en donnant ainsi des preuves que cette méthode est capable non seulement d'arithmétiser les conditions des problèmes déjà résolue; mais aussi de résoudre de nouveaux problèmes, dont la rásolution par les autres méthodes est impossible.

Literatura

1) Notice sur les travaux scientifiques de Petrovitch, Paris 1922.

2) M. Petrovitch: Le procédé spectral de calcul numérique en Astronomie. (Annuaire de l'Observatoire astronomique de Belgrade 2,1930).

3) M. Petrovitch: Les spectres numériques, Paris 1919.

4) M. d'Ocagne: Revue générale des sciences pures et appliquées, numéro du 15 Novembre 1919.

5) M. Petrovitch: Leçons sur les spectres mathématiques. Paris 1928.

6) M. Petrovitch: Brojni spektri pojava. (Glas Srpske Akademije, Beograd 1926).

7) K. Orlov: Primena spektralnog računa na probleme o polinomima. (Glas Srpske Akademije CLII, Beograd 1932). Application du calcul spectral aux problèmes sur les polynomes. (Bulletin de l'Académie Serbe Nr. 1, Belgrade 1933).

8) K. Orlov: Aritmetičke i analitičke primene matematičkih spektara. Beograd, 1935.

9) M. Petrovitch: Théorème sur les fonctions algébriques à coefficients tayloriens commensurables. (Revue Mathématique de l'Union Interbalcanique. Athène 1936),

10) M. Petrovitch: Séries de puissances à coefficients nombres entiers comme inversions des intégrales abeliennes. (La revista de ciencias Nr. 420 Ano XXXVIII Lima-Peru, 1937).

11) K. Orlov: Rekurzivno izračunavanje matematičkih spektara (Glas Srpske Akademije CLIV, Beograd 1933). Evaluations des spectres mathématiques à l'aide de relations de reccurence (Bulletin de l'Académie Serbe, Nr. 1, Belgrade 1933).

12) L. Kronecker. Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Grössen (Journal für Mathem. 92. 1882).

13) K. Ortov: Spektri brojeva koji nisu celi.

RAZVOJ I ZNAČAJ TEORIJE DIVERGENTNIH REDOVA U MATEMATIČKOJ ANALIZI

JOVAN KARAMATA, BEOGRAD

1.1. Smisao teorije divergentnih redova i pregled postupaka zbirljivosti najbolje ćemo uvideti ako u kratkim potezima iznesemo njihov istorijski razvoj. Jedan od glavnih uzroka postanka ove teorije treba tražiti u težnji za preciznošću i strogošću logičkih zaključaka, što se posle radova Leibnitz-a, Newton-a, Euler-a i porodice Bernoulli-a pokazalo kao neophodno za dalji napredak matematičke analize.

Istorija matematike nas uči da je ta strogost u vrhuncu razvoja antičke matematike bila na besprekornoj visini. Iako pojam granice, prelaz ka granici i granični procesi, nisu postojali u današnjem smislu, ipak Eudoxos-ova ekshaustiona metoda i izvanredni radovi Arhimeda o komplanaciji i kubaturi lopte, kao i kvadraturi kruga i parabole, pokazuju sa kolikom se brižljivošću već tada pristupalo ovim suptilnim problemima. Ta rigoroznost se u toku vremena gubila uporedo sa opadanjem značaja matematike. Tek u njenom preporodu dolazi ova riguroznost ponova do izražaja, ali ovoga puta sa razvojem novog matematičkog jezika, posle radova Oresmus-a i Vieta-e, čime je data naročita mogućnost za usavršavanje te strogosti. Ovo pada u vreme Leibnitz-a i Newton-a, neposredno pre pojave infinitezimalnog računa, tj. u vreme samog njegovog rađanja. U ovo vreme se ova preciznost ponovo javlja, naročito u radovima Pascal-a i Fermat-a, gde su granični procesi sprovedeni sa najvećom riguroznošću.

Cela ova epoha okarakterisana je statičkim načinom mišljenja za razliku od novog impulsa koji, naročito infinitezimalnim računom, u granične procese uvodi dinamizam matematičkog rezonovanja. Moglo bi se na prvi pogled činiti čudno da je sama riguroznost u rezonovanju popustila posle otkrića infinitezimalnog računa, utoliko pre što je jedan od najznačajnijih analitičkih pojmova — beskonačan red — baš infinitezimalnim računom došao do svog punog izražaja. Međutim, uzrok ovome leži u tome, kao što je Knopp u uvodu svoje knjige o beskonačnim redovima primetio, „što su veliki stvaraoci infinitezimalnog računa — Leibnitz i Newton — kao i njihovi sledbenici bili zasenjeni obiljem novih saznanja koja su iz tog izvora proistekla i nisu ni osećali potrebu da posvete pažnju kritici njihovih osnova". Sem toga novim dinamičkim načinom rezonovanja trebalo je prvo stvoriti potrebnu osnovnu građu, tj. dovoljno novih pojmova, kako bi se preko njih ova riguroznost mogla docnije do tančina sprovesti.

1.2. Osnovni pojam konvergencije beskonačnih procesa, koja je otuda proistekla, nije u to vreme postavljen na svoje pravo mesto, niti je mogao biti rigurozno definisan, štaviše na samu konvergenciju beskonačnih redova nije se obraćala gotovo nikakva pažnja. Tako, među ostalim, u Euler-ovim delima stoji da se razvijanjem u red funkcija

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^3 + \ldots\ldots$$

i

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots\ldots$$

može, za $x = -1$, redovima

$$1 - 1 + 1 - 1 \ldots\ldots = \Sigma (-1)^\nu$$

odnosno

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots = \Sigma (-1)^\nu (\nu + 1)$$

pripisati vrednost 1/2, odnosno 1/4, ili da se, za $x = -2$, može redovima

$$1 - 2 + 4 - 8 + \ldots = \Sigma (-1)^\nu \, 2^\nu$$

odnosno

$$1 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 8 + \ldots = \Sigma (-1)^\nu (\nu + 1) \, 2^\nu$$

pripisati zbir 1/3, odnosno 1/9. Za konvergenciju ovih redova nije se tada niko interesovao. Ukoliko je neko na nju i obratio pažnju, dobiveni zaključci su bili često pogrešni. Tako još 1770 godine Lagrange smatra kao dovoljan kriterium za konvergenciju reda $\Sigma\, u_n$ da $u_n \to 0$, iako je još Mengoli 1650 godine dokazao divergenciju harmoniskog reda $\Sigma\, 1/\nu$. Još i sam Euler, pored toga što se stalno služio redovima čiji opšti član ne teži nuli, uviđa da uslov da opšti član teži nuli nije dovoljan za konvergenciju reda, međutim, on čini sličnu grešku pri dokazu konvergencije reda $\Sigma\, 1/\nu^2$. Euler je naime primetio da divergencija harmoniskog reda sledi iz činjenice da grupa

$$u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{2n}$$

od n njegovih uzastopnih članova, tj. niz

$$g_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2n}$$

ne teži nuli, i pošto je dokazao da odgovarajuća grupa

$$G_n = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^3} + \ldots + \frac{1}{(2n)^2}$$

reda $\Sigma\, 1/n^2$ teži nuli, pogrešno zaključuje da ovaj red mora konvergirati. Iako je zaključak tačan, njegovo rezonovanje je ipak pogrešno, jer bi iz toga sledila konvergencija reda $\Sigma \dfrac{1}{n \lg n}$, čija grupa od n uzastopnih članova teži takođe nuli, dok je sam red divergentan.

Uostalom, i pod pretpostavkom da su ovakvi zaključci ispravni, ovi se zaključci mogu odnositi samo na redove čiji opšti član u_n teži nuli. Utoliko je čudnije da su matematičari onoga doba, a naročito Euler, pripisivali određene brojne vrednosti redovima kod kojih ni sam opšti član ne teži nuli, kao što je, na primer, slučaj sa redom $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$. Iako članovi ovog reda ne teže nuli, pokušavalo se na razne načine da se njemu pripiše vrednost 1/2 kao zbir. Od ovih pokušaja najznačajniji je Leibnitz-ov. Međutim, već kod redova

$$\Sigma (-1)^{\nu} (\nu + 1) \quad \text{i} \quad \Sigma (-1)^{\nu} 2^{\nu}$$

ovakva razmatranja nisu dovela do željenih rezultata. I pored toga Euler i njegovi savremenici su se gotovo celo stoleće — 1750—1850 — nesmetano služili ovim redovima. Kadgod bi naišli na ovakve divergentne redove oni bi za njihov zbir uzimali vrednost koja se dobivala bilo iz funkcije generatrise, bilo iz izraza iz koga je red proistekao za odgovarajuću specijalnu brojnu vrednost promenljive. Značajno je da su se ovako dobiveni rezultati docnije pokazali gotovo uvek kao tačni, a razlog ovome videćemo iz docnijeg izlaganja.

1.3. Kasniji pokušaji da se objasne ove pojave kod divergentnih redova ostali su bezuspešni dogod nije bio precizno definisan pojam konvergencije, i dok se nije dobila jasna pretstava o graničnim procesima. Ovo je ostvareno tek radovima Cauchy-a i Abel-a.

U svojoj knjizi „Analyse algébrique" koja je izašla 1821 godine, Cauchy definiše red Σu_n kao konvergentan, ako niz njegovih delimičnih zbirova

$$s_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n\,, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

teži određenoj graničnoj vrednosti, i ističe da je za to potrebno i dovoljno, ne samo da opšti član $u_n \to 0$, ili da grupa od n uzastopnih članova

$$s_{2n} - s_n = \sum_{n+1}^{2n} u_{\nu} \to 0,$$

već da svaka grupa od p uzastopnih članova

$$s_{n+p} - s_n = \sum_{n+1}^{n+p} u_{\nu}$$

sa proizvoljnim p nezavisnim od n, mora težiti nuli.

Sprovodeći konsekventno ovaj pojam, Cauchy ide tako daleko da kategorički odbacuje svaki divergentan red, kao red kojem se ne može pripisati nikakva vrednost kao zbir, i to ne samo da bi postigao traženu rigurositet u rezonovanju, već i stoga što se u ono doba preterano služilo divergentnim redovima.

Odmah posle ovog Cauchy-eva dela izašla je 1826 god. rasprava N. H. Abel-a „Ispitivanje reda $1 + \frac{m}{1} x + \ldots$", koja se oslanja na

Cauchy-evo delo, ali sama obiluje novim metodama i stavovima. Ovi stavovi su i danas poznati pod imenom „Abel-ovi stavovi", i njima je naročito istaknut značaj novog načina rigurognog posmatranja, kao i uvođenja Cauchy-evih preciznih definicija.

Od ovih stavova navedimo samo stav o neprekidnosti Taylor-ova reda koji je u neposrednoj vezi sa našim izlaganjem, i koji glasi:

Ako je red Σu_ν konvergentan, tj. ako

$$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu \to s, \text{ kad } n \to \infty,$$

tada red

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu\, x^\nu = f(x)$$

konvergira za $|x| < 1$, i tada je funkcija $f(x)$ neprekidna u tački $x = 1$, tj.

$$f(x) \to s \text{ kad } x \to 1 - 0.$$

1.4. Uporedimo ovaj stav sa Euler-ovom definicijom zbira divergentnog reda, recimo reda

$$+1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

U tu svrhu pođimo od funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ čiji razvitak u red glasi

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu\, x^\nu = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots.$$

Ova funkcija istina neprekidna u tački $x = 1$, tj. $f(x) \to 1/2$ kad $x \to 1$, međutim, red $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ divergira. Do koje je mere Euler u pravu da zbiru ovoga reda pripiše vrednost $f(1) = 1/2$, zapravo da obrne Abel-ov stav, tj. da iz neprekidnosti funkcije zaključi zbir reda? Po Euler-u za zbir divergentnog reda treba uzeti vrednost funkcije iz koje je red potekao. Međutim, odmah se postavlja pitanje ne bi li se mogla pronaći i neka druga funkcija koja dovodi do istog reda $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, ali koja za istu vrednost nezavisne promenljive uzima vrednost različitu od 1/2. Takve funkcije nije teško pronaći. Razvijanjem funkcije

$$\frac{1}{1+x+x^2} = \frac{1}{1-x^3} - \frac{x}{1-x^3}$$

u red po stepenima od x dobivamo takav jedan primer. Zaista je

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + \ldots..,$$

odakle se, za $x = 1$, dobiva

$$1/3 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

Može se, štaviše, postići da se redu $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ pripišu kao zbir ma koji pravi razlomak, ako se pođe od funkcije

$$\frac{1-x^n}{1-x^m} = 1 - x^n + x^m - x^{n+m} + x^{2m} - x^{n+2m} \ldots,$$

gde je $n < m$. Iz ovog se obrasca, za $x = 1$, dobiva

$$n/m = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

Ako još navedemo i primer koji je dao Pringsheim

$$0 = 1 - 1 + x^2 - x^2 + x^4 - x^4 + \ldots = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{2[\nu/2]}$$

vidimo da za vrednost zbira ovoga reda možemo dobiti i nulu, tj.

$$0 = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots$$

1.5. Činjenica da jednom istom redu možemo pripisati prvo vrednost $1/2$, zatim $1/3$, n/m, i najzad 0, tako je paradoksalna, da izgleda uzaludan svaki pokušaj da se jednom divergentnom redu pripiše neka određena vrednost kao zbir. Posmatramo li za sad prva dva primera, možemo na „prirodan" način naći izlaz iz ovog paradoksa u Leibnitz-ovu pokušaju da redu $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ pripiše zbir $1/2$. Leibnitz posmatra niz delimičnih zbirova reda $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$, tj. niz

$$1,\ 0,\ 1,\ 0,\ \ldots$$

i primećuje da se broj 0 isto tako često javlja kao i broj 1, tako da se kao najprirodniji zbir ovoga reda dobiva aritmetička sredina, tj. $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$.

Isto tako možemo postupiti i kod reda

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + x^3 - x^4 + \ldots.$$

ako stepene koji nedostaju upotpunimo sa stepenima čiji su koeficijenti nula:

$$\frac{1}{1+x+x^2} = 1 - x + 0 \cdot x^2 + x^3 - x^4 + 0 \cdot x^5 + x^6 - x^7 + 0 \cdot x^8 - \ldots\ldots$$

Tada, za $x = 1$, dobivamo red

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots\ldots$$

čiji su delimični zbirovi

$$1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, \ldots.$$

Ovde imamo dvaput više nula od jedinica, tako da kao najverovatniju vrednost zbira dobivamo aritmetičku sredinu

$$\frac{0+0+1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Slično je i kod razvijanja funkcije $\frac{1-x^n}{1-x^m}$, gde se prilikom obrazovanja delimičnih zbirova kod m prvih članova, broj 1 javlja n puta, dok se broj 0 javlja $(m\text{-}n)$ puta.

1.6. Proširujući ova razmatranja Frobenius je 1880 god. (u 89 svesci Crelle-ovog Journal-a) dao uopštenje Abel-ova stava, koje je u stvari već Leibnitz naslutio, i koje glasi:

Neka je

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu;$$

tada iz

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \ldots + s_n}{n} \to s, \ n \to \infty,$$

sledi

$$f(x) = u_0 + u_1 x + \ldots + u_n x^n + \ldots \to s, \ x \to 1.$$

Na ovaj način se prošireni zbir reda $\Sigma\, u_\nu$ uvodi preko granice

$$\lim_{n=\infty} = \frac{s_1 + s_2 + \ldots + s_n}{n} = s,$$

ako ova granična vrednost postoji. Međutim, da bi ovako uveden pojam zbira bio potpuno osnovan, morao bi se prošireni zbir poklapati sa stvarnim zbirom posmatranog reda kad ovaj poslednji postoji, tj. kad je red konvergentan. Da je ovo zaista slučaj vidimo iz stava koji je dao još Cauchy, i koji glasi:

Iz

$$s_n \to s$$

sledi

$$\frac{1}{n}(s_1 + s_2 + \ldots + s_n) \to s.$$

Kao što vidimo ovim postupkom, tj. obrazovanjem aritmetičkih sredina, mogu se ne samo divergentnim redovima

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \ldots.$$

$$1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots..$$

$$\underbrace{1 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{m} - \underbrace{1 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{n-m} + \ldots.$$

pripisati vrednosti 1/2, 1/3, m/n kao njihovi prošireni zbirovi, već se u opštem slučaju može uvek uzeti

$$s = \lim_{n=\infty} \frac{1}{n} (s_1 + s_2 + \ldots + s_n), \qquad s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu,$$

kao prošireni zbir reda $\Sigma\, u_\nu$, kadgod ova granična vrednost postoji.

1.7. Ovim još daleko nismo obuhvatili sve divergentne redove. Dovoljno je zato da uočimo red

$$1 - 2 + 3 - 4 + \ldots,$$

koji nastaje iz funkcije

$$\frac{1}{(1+x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 - 4x^3 + \ldots.,$$

za $x = 1$, i kome bi stoga trebalo pripisati vrednost 1/4. Međutim, ovde se postupkom aritmetičkih sredina ne može doći do tog rezultata. Da bismo uprostili račun pokazaćemo to na redu

$$0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots..,$$

koji proizlazi iz funkcije

$$\frac{x}{(1+x)^2} = 0 + x - 2x^2 + 3x^3 - 4x^4 + \ldots$$

za $x = 1$, i kome bi se na osnovu sličnih razmatranja morala pripisati vrednost 1/4. Delimični zbirovi ovoga reda su

$$s_n: \qquad 0, 1, -1, +2, -2, +3, -3, \ldots..$$

a zbirovi članova ovoga niza su

$$S_n = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu: \qquad 0, 1, 0, 2, 0, 3, 0, \ldots.,$$

tako da niz aritmetičkih sredina

$$\sigma_n = \frac{1}{n} S_n: \qquad 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 0, \ldots..$$

uopšte ne konvergira već oscilira između 0 i 1/2.

Međutim, aritmetičke sredine ovih aritmetičkih sredina $\frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} \sigma_n$ teže određenoj granici, i to upravo 1/4, kao što se to iz Euler-ovih razmatranja moglo i očekivati.

1.8. Ovu ideju Hölder 1882 konsekventno razvija dalje, da bi putem iteracija aritmetičkih sredina dobio niz postupaka sa sve većim poljem dejstva.

Označimo sa $h_n^{(1)}$ niz prvih aritmetičkih sredina niza s_n, tj.

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu .$$

Ponavljanjem ovog postupka Hölder obrazuje sredine

$$h_n^{(1)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(1)}$$

: : : : : : : : : : : : : : :

$$h_n^{(k)} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=0}^{n} h_\nu^{(k-1)} .$$

Ako, počev od nekog određenog k, niz $h_n^{(k)}$ konvergira određenoj graničnoj vrednosti s, tada Hölder smatra ovu vrednost s kao prošireni zbir reda Σu_ν. Za ove „Hölder-ove sredine“ dokazao je sam Hölder 1882 god. proširenje Frobenius-ova stava:

Ako za izvestan ceo broj k

$$h_n^{(k)} \to s \quad \text{kad} \quad n \to \infty,$$

tada i

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu x^\nu \to s \quad \text{kad} \quad x \to 1 - 0.$$

1.9. Ovakvo proširenje pojma zbira divergentnog reda pokazalo se docnije kao veoma plodno. Već nekoliko godina docnije (1890) dao je Cesàro lepu primenu na Cauchy-ev proizvod dva beskonačna reda. Poznato je da Cauchy-ev proizvod dva konvergentna reda ne mora biti konvergentan. Međutim, Cesàro je pokazao, u to vreme neočekivani rezultat, da niz aritmetičkih sredina reda, dobivenog Cauchy-evim množenjem dva konvergentna reda, mora uvek konvergirati i to tačno proizvodu zbirova ovih redova.

Ako uzmemo u obzir Cauchy-ev stav o aritmetičkim sredinama (1821), i uvedemo prošireni zbir posretstvom aritmetičke sredine, vidimo da je Frobenius-ovim stavom (1880) uopšten Abel-ov stav o neprekidnosti (1826), a Cesàro-vim stavom (1890) upotpunjen Cauchy-ev stav o proizvodu redova.

1.10. Istovremeno sa proširenjem Cauchy-eva stava o proizvodu redova a neposredno posle Hölder-a uveo je Cesàro, primenom sličnih iteriranih postupaka, novu vrstu sredina.

Neka je

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} u_\nu,$$

$$S_n^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{n} s_\nu,$$

$$S_n^{(2)} = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{(1)},$$

i uopšte, ponavljanjem sabiranja,

$$S_n^{(k)} = \sum_{\nu=0}^{n} S_\nu^{(k-1)}.$$

Kako se u $S_n^{(1)}$ nalaze $n+1 = \binom{n+1}{1}$ članova niza s_n, a u $S_n^{(2)}$

$1+2+\ldots+n+(n+1) = \binom{n+2}{2}$ članova niza s_n, i uopšte u $S_n^{(k)}$

$$\binom{k-1}{k-1} + \binom{k}{k-1} + \binom{k+1}{k-1} + \ldots + \binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k}{k}$$

članova niza s_n, to C e s à r o, pri uopštenju prostih aritmetičkih sredina, obrazuje sredine

$$c_n^{(k)} = \frac{S_n^{(k)}}{\binom{n+k}{k}}.$$

Ovi su izrazi znatno prostiji od H ö l d e r-ovih $h_n^{(k)}$ (sem slučaja $k=1$, gde je $c_n^{(1)} = h_n^{(1)}$), prvo stoga, što se mogu eksplicitno izraziti u obliku

$$c_n^{(k)} = \frac{1}{\binom{n+k}{k}} \sum_{\nu=0}^{n} \binom{n+k-1-\nu}{k-1} s_\nu$$

a drugo što se oni lako dobivaju pomoću funkcije generatrise

$$\frac{1}{(1-x)^k} \sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} S_\nu x^\nu.$$

Pomoću sredina $c_n^{(k)}$ C e s à r o definiše prošireni zbir reda Σu_ν graničnom vrednošću

$$\lim_{n=\infty} c_n^{(k)} = s,$$

ako ova postoji za izvesno k.

1.11. Kako Hölder-ovim, tako i Cesàro-vim sredinama, prošireni zbir konvergentnog reda uvek postoji i jednak je običnom zbiru toga reda. Štaviše, i Cesàro-vi postupci su u toliko „jači“ ukoliko je k veće, tj. njihovo polje dejstva je utoliko šire. Drugim rečima, ako granična vrednost $\lim\limits_{n=\infty} c_n^{(k)} = s$ postoji za izvesno k, ona postoji i za svako $k' > k$, i ima istu vrednost, tj.:

$$\lim_{n=\infty} c_n^{(k')} = s, \quad \text{za} \quad k' > k.$$

Kao što je to pokazao još Cesàro, za ovo je dovoljno dokazati da Iz

$$c_n^{(k)} \to s, \quad n \to \infty,$$

sledi

$$c_n^{(k+1)} \to s, \quad \text{za svako} \quad k > 0.$$

Kako je

$$c_n^{(k+1)} = \frac{\binom{k}{k} c_0^{(k)} + \binom{k+1}{k} c_1^{(k)} + \ldots + \binom{k+1}{k} c_n^{(k)}}{\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{k+n}{k}},$$

to vidimo da se $c_n^{(k+1)}$ može izraziti kao „proširena sredina“ niza $c_n^{(k)}$, i to sa težinama

$$p_\nu = \binom{k+\nu}{k},$$

tako da je ovaj stav sadržan u jednom opštem stavu koji potiče od Jensen-a.

1.12. Još 1888 godine Jensen je dao ustvari prvo bitno uopštenje Cauchy-eva stava o aritmetičkim sredinama koje glasi:

Neka je p_ν niz pozitivnih brojeva (težina) čiji zbir

$$P_n = p_0 + p_1 + \ldots + p_n \to \infty \quad \text{sa} \quad n.$$

Iz konvergencije niza a_n, tj. iz

$$a_n \to a,$$

uvek sledi konvergencija proširenih aritmetičkih sredina,

$$\frac{p_0 a_0 + p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n}{p_0 + p_1 \ldots + p_n} \to a, \; n \to \infty.$$

Ovim stavom, koji uostalom sadrži veći deo pomenutih stavova, završena je u izvesnom smislu prva etapa u teoriji divergentnih redova. U ovom periodu dati su i proučeni uglavnom navedeni specijalni postupci koji su omogućili B o r e l-u da da pokušaj jedne opšte teorije divergentnih redova i stvori njima adekvatnu terminologiju.

2.1 Ako granica

$$\lim_{n=\infty} c_n^{(k)} = s$$

postoji počev od izvesnog k, tada je Cesàro nazvao niz s_n, odnosno red Σu_ν „k-trostruko neodređen". Ovaj način izražavanja nije se održao. Danas je uobičajeno da se za red koji ne konvergira, ali kome se jednim od opisanih postupaka može pripisati neka vrednost kao zbir, kaže da je z b i r l j i v tim postupkom. Taj naziv zadržavamo i za nizove. Da bi se označilo kojim je postupkom neki niz, odnosno red, zbirljiv upotrebljavaju se, kratkoće radi, velika latinska slova. Tako se k-ta H ö l d e r-ova sredina označava sa H_k, ili (H,k), a k-ta C e s à r-ova sredina sa C_k, ili (C,k). Tada se kaže da je niz ili red zbirljiv-(H,k), ili -(C,k). a egzistencija granične vrednosti ovih sredina obeležava se kod nizova sa

$$(H,k) - \lim_{n=\infty} s_n = s, \quad \text{odnosno} \quad (C,k) - \lim_{n=\infty} s_n = s,$$

a kod redova sa

$$(H,k) - \sum_{o}^{\infty} u_n = s, \quad \text{odnosno} \quad (C,k) - \sum_{o}^{\infty} u_n = s.$$

Ovim načinom pisanja možemo do sad pomenute stavove izraziti u obliku:

Svaki konvergentan red je zbirljiv-(H,k), odnosno -(C,k) za svako $k \geqslant 1$.

Iz zbirljivosti-(H,k) sledi zbirljivost -$(H,k+1)$.

Iz zbirljivosti -(C,k) sledi zbirljivost -$(C,k+1)$.

Ovi stavovi se nazivaju „stavovi permanencije",jer je prošireni zbir dobiven ovim postupcima jednak zbiru reda kad je ovaj konvergentan ili zbirljiv nižeg reda.

U opštem slučaju kažemo da je jedan postupak p e r m a n e n t a n, ako je s v a k i konvergentan niz ili red zbirljiv tim postupkom sa istom graničnom vrednošću.

2.2. Iz ovog sledi da se polje dejstva ovih postupaka zbirljivosti ne smanjuje kad k raste, ako se pod poljem dejstva podrazumeva skup svih redova, odnosno nizova koji su zbirljivi jednim postupkom. Tako smo već videli da red

$$0 + 1 - 2 + 3 - 4 + \ldots .$$

nije zbirljiv-$(H,1)$, ali je zbirljiv-$(H,2)$. Mogu se lako navesti primeri nizova koji nisu zbirljivi-$(H,k-1)$, ali su zbirljivi-(H,k). Stavimo, na primer

$$h_n^{(k-1)} = (-1)^n$$

i odatle izračunajmo unatrag sam niz s_n. Ovim jednoznačno određen niz s_n, na osnovu stava o permanenciji, nije zbirljiv-(H,k') za $k' \leqslant k-1$, jer nije zbirljiv-$(H,k-1)$ međutim, on je zbirljiv-(H,k) sa proširenim zbirom $1/2$. Sličan primer se može dati i za zbirljivost-(C,k).

2.3. Ma da polje dejstva ovih postupaka zbirljivosti raste sa k, ipak postoje nizovi sa suviše velikim oscilacijama koji nisu zbirljivi ni jednim od postupaka (C,k), ili (H,k), ma kako velik bio k. To važi već za Euler-ov red koji smo naveli u početku:

$$1-2+4-\ldots+(-1)^n 2^n+\ldots\ldots$$

Njegovi članovi obrazuju geometrisku progresiju sa količnikom -2. Stoga se pri uzastopnom obrazovanju zbirova $S_n^{(k)}$ ne menja veličina njihovih oscilacija, jer je

$$s_n=S_n^{(1)}=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(-1)^n 2^n,$$

$$S_n^{(2)}=\frac{n+1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{9}(-1)^n 2^n,$$

$$:::::::::::::::::::::::::::::::$$

tako da ovi zbirovi posle deobe sa

$$\binom{n+1}{1}, \binom{n+2}{2}, \ldots \binom{n+k}{k}$$

još uvek osciliraju između $-\infty$ i $+\infty$, ma kako velik bio k.

Da bi uklonio ovaj nedostatak, tj. da bi proširio polje dejstva postojećih postupaka dao je Borel nove postupke zbirljivosti. On je u isti mah izložio jedan princip po kome se mogu obrazovati postupci zbirljivosti sa sve većim poljem dejslva. Njegovi radovi iz ove oblasti padaju u vreme između 1896—1900 godine, a 1901 on daje prvi pregled teorije divergentnih redova u svojoj knjizi „Leçons sur les séries divergentes“.

2.4. Borel je primetio da svaka proširena aritmetička sredina

$$M(P_n): \qquad \frac{p_0 s_0+p_1 s_1+\ldots+p_n s_n}{p_0+p_1+\ldots+p_n}=\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu,$$

$$\text{sa } P_n=\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu \text{ i } p_\nu>0,$$

može poslužiti kao postupak zbirljivosti, i da je ovaj postupak, prema Jensen-ovu stavu permanentan kad $P_n \to \infty$, tj. da iz

$$s_n \to s$$

sledi

$$M(P_n)-\lim_{n=\infty} s_n \to s.$$

Ali svi ovi postupci $M(P_n)$, ma kako niz P_n težio beskonačnosti nisu u stanju da red $\Sigma\,(-s)^n 2^n$ učine zbirljivim. Posmatramo li neku $M(P_n)$ sredinu

$$\frac{1}{P_n}\sum_{\nu=0}^{n} p_\nu s_\nu = \frac{p_0}{P_n} s_0 + \frac{p_1}{P_n} s_1 + \ldots + \frac{p_{n-1}}{P_n} s_{n-1} + \frac{p_n}{P_n} s_n,$$

vidimo da će se oscilacije niza utoliko više smanjiti ukoliko težine

$$g_{\nu,\,n} = \frac{p_\nu}{P_n}, \ \nu = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

brže teže nuli. Drugim rečima, da bi red $\Sigma\, u_\nu$ mogao biti zbirljiv — $M(P_n)$ treba da niz težina p_n/P_n utoliko brže teži nuli, ukoliko su veće oscilacije članova toga reda. Medjutim, ovaj niz ne može da teži nuli proizvoljno brzo, jer prema jednom A b e l-ovu stavu, red $\Sigma\ p_\nu/P_\nu$ mora divergirati da bi P_n težio beskonačnosti, a što je za permanenciju postupka $M(P_n)$ neophodno. Prema tome, niz p_n/P_n može težiti nuli samo kao

$$\frac{1}{n}, \text{ ili } \frac{1}{n\ lg\ n}, \text{ itd.},$$

a ovim brzinama se ne mogu izravnati veće oscilacije niza s_n, kao što je to, na primer, slučaj sa nizom

$$s_n = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu 2^\nu = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-1)^n 2^n$$

Prema tome, da bismo redove sa velikim oscilacijama mogli učiniti zbirljivim prisiljeni smo da za težine uzimamo članove brzo konvergentnih redova. Zbog toga je B o r e l uveo sredine u obliku beskonačnih redova i dao im oblik

$$B\ (p_n):\qquad \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)\, s_\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)}$$

gde red $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)$ mora brzo konvergirati, tj. članovi $p_n(x)$ moraju brzo težiti nuli, da bi se u izrazu

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)\ s_\nu$$

velike oscilacije niza s_n mogle izravnati. Kad bi prošireni zbir reda

$\sum_{\nu=0}^{n} u_\nu = s_n$ bio definisan samim izrazom $B(p_n)$, zavisio bi on od svih, tj. i od prvih članova niza s_n; jedna takva sredina bila bi neupotrebljiva, jer proširena granična vrednost ne bi smela da zavisi od njegovih početnih članova. Da bismo u tom izrazu uklonili uticaj prvih članova moramo smanjivati težine $p_n(x)$ prvih članova niza s_n u odnosu na ostale članove. Ovo postižemo ako u težinama uvedemo još jedan parametar tako da prve težine iščezavaju kad pustimo da ovaj parametar teži nekoj konačnoj granici ili beskonačnosti.

2.5. Na osnovu ovakvog rezonovanja B o r e l je izveo uslove koje moraju zadovoljavati težine da bi sredinama $B(p_n)$, u njihovom najopštijem obliku, mogao dobiti postupak zbirljivosti takav da stav permanencije ostaje u važnosti.

Da bismo ovo pokazali označimo sa

$$g_n(x) = \frac{p_n(x)}{\sum_{\nu=0}^{\infty} p_\nu(x)}$$

„normirane težine“ sredine $B(p_n)$. Tada je za svako x

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x) = 1, \tag{1}$$

i za svako n i x

$$g_n(x) > 0. \tag{2}$$

Pomenuta osobina, koju moraju ispunjavati normirane težine ovog postupka da bi on bio permanentan, izražava se u činjenici da mora

$$g_n(x) \to 0 \text{ za svako konačno } n = 0,1,2,\ldots, \tag{3}$$

kad x teži nekoj granici x_0 koja može biti i ∞.

Opšti stav permanencije tada glasi:

A k o s u u s l o v i (1), (2) i (3) i s p u n j e n i, i z k o n v e r g e n c i j e n i z a s_n, t j. i z

$$s_n \to s, \quad n \to \infty,$$

u v e k s l e d i d a ć e i

$$B(g_n): \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} g_\nu(x)\, s_\nu \to s \quad \text{k a d } x \to x_0.$$

2.6. Sredinama $B(g_n)$ B o r e l je dao veoma opšte postupke zbirljivosti i uzimajući specijalne težine $g_n(x)$ uspeo je da polje dejstva tako dobivenih postupaka zbirljivosti proširi u pravcu u kome je želeo.

Takav jedan specijalan slučaj smo već sreli kod samog T a y l o r-ova reda, jer je izraz

$$A: \qquad (1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = \frac{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu}{\sum\limits_{\nu=0}^{\infty} x^\nu}, \quad (x \to 1-0),$$

specijalan oblik sredina $B(g_n)$ sa normiranim težinama oblika

$$g_\nu(x) = (1-x)x^\nu, \quad (x \to 1).$$

Sam stav permanencije ovog postupka je ustvari A b e l-ov stav o neprekidnosti T a y l o r-ova reda na rubu, zbog čega ovaj postupak zbirljivosti nazivamo Abel-ovim i obeležavamo slovom A. Ovaj stav tada možemo formulisati i ovako:

S v a k i k o n v e r g e n t a n r e d j e z b i r l j i v-A s a i s t i m z b i r o m.

Slično možemo izraziti i F r o b e n i u s-H ő l d e r-ov stav; kao i C e s à r o-ov stav:

S v a k i r e d k o j i j e z b i r l j i v-(H, k), i l i -(C, k) z a i z v e s n o k j e i s t o v r e m e n o i z b i r l j i v-A s a i s t i m p r o š i r e n i m z b i r o m.

Iz ovog stava sledi da je polje dejstva Abel-ova postupka zbirljivosti veće od polja dejstva ma kog H ő l d e r-ova ili C e s à r-ova postupka. Ali i pored toga, red $\Sigma\,(-1)^\nu\, 2^\nu$ nije zbirljiv ni Abel-ovim postupkom, iako je ovaj red potekao iz T a y l o r-ova reda funkcije $\dfrac{1}{1-x}$. Ovo zato što je A b e l-ova sredina ovoga reda data izrazom

$$(1-x)\sum_{\nu=0}^{\infty} s_\nu x^\nu = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu 2^\nu x^\nu$$

koji konvergira samo za $|x| < 1/2$, dok za vrednosti x-a u blizini jedinice taj zbir divergira, tako da je ovaj izraz baš za ove vrednosti x-a neupotrebljiv, a otuda se ni sam red ne može učiniti zbirljivim-A.

2.7. Da bi uklonio ovaj nedostatak, B o r e l uzima za težine $g_\nu(x)$ niz koji teži nuli brže od težina Abel-ova postupka, tj. od niza $(1-x)x^n$, i kao najjednostavniji takav niz uzima

$$p^n(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

Kako je u ovom slučaju

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{x^\nu}{\nu!} = e^x,$$

i kako normirane težine teže nuli za svako konačno n, tj.

$$g^n(x) = e^{-x} \frac{x^n}{n!} \to 0 \quad \text{kad } x \to \infty,$$

to su ovim ispunjeni uslovi permanencije ovog postupka zbirljivosti.

Ovako definisana sredina

$$B: \qquad e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} x^\nu, \ (x \to \infty),$$

kao i sam postupak zbirljivosti poznati su pod imenom Borel-a, a za red koji je zbirljiv ovim postupkom kažemo da je zbirljiv-B.

Tek ovim Borel-ovim postupkom red $\Sigma\ (-1)^n 2^n$ postaje zbirljiv. Stavimo li, naime, u izrazu B

$$s_n = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}(-2)^n$$

tada vidimo da je

$$e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} x^\nu = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} e^{-3x}.$$

Prema tome

$$e^{-x} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{s_\nu}{\nu!} x^\nu \to \frac{1}{3} \quad \text{kad } x \to \infty,$$

dakle upravo onoj vrednosti koju je naznačio Euler.

3.1. Činjenica da je Taylor-ov red zbirljiv i za obe vrednosti od x koje leže izvan kruga konvergencije dovela je Borel-a na jednu od najlepših primena postupaka zbirljivosti. Ako posmatramo red

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^\nu$$

tada je lako videti da je on zbirljiv-B za svako $x > -1$, i to sa proširenim zbirom koji upravo iznosi $\frac{1}{1+x}$. Ovaj Taylor-ov red može se, dakle, Borel-ovim postupkom „analitički produžiti". Drugim rečima, vrednosti funkcije date Taylor-ovim redom mogu se ovim postupkom dobiti i za one vrednosti x-a za koje ovaj red divergira. *Borel* je ovaj rezultat dao u punoj opštosti kako za realno tako i za kompleksno x, i tačno odredio oblast u kojoj je jedan Taylor-ov red zbirljiv-B, tj. u kojoj se on može analitički produžiti.

3.2. Skoro u isto vreme, 1900 godine, dao je Fejér jednu značajnu primenu Cesàro-ova postupka zbirljivosti na Fourier-ove redove. Kao što je poznato, Fourier-ov red

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} (a_\nu \cos \nu x + b_\nu \sin \nu x)$$

funkcije $f(x)$ ne mora konvergirati ni tamo gde je funkcija $f(x)$ neprekidna. Međutim je Fejér pokazao da je Fourier-ov red ma koje funkcije uvek zbirljiv-$(C,1)$ za sve one vrednosti od x za koje je funkcija neprekidna.

Prema tome, jedno od najtežih pitanja, naime, koje uslove mora zadovoljavati funkcija $f(x)$ da bi njen Fourier-ov red bio konvergentan, a koje pitanje u svom opštem obliku ni do danas nije rešeno, postaje izlišno, kada se mesto obične konvergencije posmatra zbirljivost -$(C,1)$.

3.3. Ova dva rezultata po svojoj lepoti i značaju privukla su opštu pažnju na pojam zbirljivosti, tako da od početka ovog stoleća započinje treći period teorije divergentnih redova, u kome su se intenzivno počeli uvoditi i obrađivati najraznovrsniji postupci zbirljivosti koji su dobili primenu u svim granama matematičke analize.

Ne navodeći dalje rezultate u teoriji Fourier-ovih i njima srodnih redova dobivenih pojmom zbirljivosti, pomenimo samo princip analitičkog produženja koji je ovim dobio nov analitički aparat. Tako je Borel-ov rezultat da svojim postupkom analitički produži Taylor-ov red preko kruga konvergencije sve više i više usavršavan. Dok se Borel-ovim postupkom funkcija $f(x)$ može analitički produžiti još uvek samo u ograničenom delu ravni, to da bi se ovo područje povećalo dati su novi postupci sa sve većim poljem dejstva. Tako se došlo do postupaka oblika $B(g_n)$ koji Taylor-ov red jedne date funkcije produžuju na njeno celokupno definiciono područje, preciznije, u njenoj celoj Mittag-Leffler-ovoj zvezdi. Štaviše, u najnovije vreme Heller u svojoj doktorskoj tezi, koja je u pripremi, proširuje pojam zbirljivosti tako da funkciju može produžiti preko tačaka diskontinuiteta na samoj Mittag-Leffler-ovoj zvezdi, u tačkama u kojima je ova regularna,

3.4. Analitičko produženje pojmom zbirljivosti prenosi se i na druge vrste redova. Tako je Bohr, 1909 godine (C.R.148) pokazao da se postupkom (C,k) Dirichlet-ov red

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{u_\nu}{\nu^s},$$

koji konvergira desno od prave $R\{s\} = \sigma_0$, može analitički produžiti levo od ove prave i da se ova oblast uopšte uzev povećava sa k.

Istovremeno, Marcel Riesz (C.R.149) pokazuje da se ista posmatranja mogu preneti i na opšte Dirichlet-ove redove.

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \, e^{-s\lambda_\nu}$$

ako se mesto postupka-(C,k) uvede postupak

$$R(\lambda_n,k): \qquad \sum_{\lambda_\nu \leqslant x} \left(1 - \frac{\lambda_\nu}{x}\right)^k u_\nu, \quad (x \to \infty),$$

tako da se težine λ_ν poklapaju sa eksponentima Dirichlet-ova reda.

3.5. Važnost i upotreba pojma zbirljivosti u sve većem obimu dovodi do čitavog niza osnovnih pojmova. Pored osnovnog pojma proširene granice

$$(C,k) - \lim_{x=x_0} f(x),$$

javljaju se i pojmovi neprekidnost-(C,k), diferencijabilnost-(C,k), integrabilnost-(C,k), nesvojstvena integrala, itd.

Tako je, na primer, funkcija

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \text{ za } x \neq 0 \text{ i } f(0) = 0,$$

neprekidna-$(C,1)$ u tački $x = 0$, a funkcija $x\,f(x)$ diferencijabilna-$(C,1)$ u tački $x = 0$.

3.6. Napomenimo ovde da sa ovako proširenim pojmovima graničnih procesa svi računi Euler-a postaju potpuno egzaktni. Kao najfrapantniji primer za ovo navedimo da je Euler, jedan vek pre Riemann-a, izveo funkcionalnu jednačinu za ξ-funkciju, i to upravo preko divergentnih redova. Svi njegovi granični prelazi su sa gledišta divergencije nedopušteni, ali rezultat je tačan, i celo njegovo izvođenje može se preko pojma zbirljivosti rigurozno opravdati. U celom tom, i za današnje shvatanje komplikovanom računu, Euler je svakom divergentnom redu i graničnom procesu uvek pripisao „pravu vrednost", a sa današnjom oznakom ovo postaje potpuno rigurozno, ako se samo ispred graničnih procesa stavi znak onog postupka zbirljivosti koji osigurava konvergenciju.

4.1. Pored osnovnog principa permanencije nekog postupka zbirljivosti još je Borel u svojim radovima istakao da razni postupci zbirljivosti, kojima je moguće pripisati prošireni zbir nekom divergentnom redu, mogu biti od praktičnog značaja samo ako jednom te istom redu odgovara uvek isti prošireni zbir. Ukoliko se povećavao broj najraznovrsnijih postupaka zbirljivosti, utoliko je postajalo sve jasnije da je iluzorno tražiti jedan opšti, apsolutni postupak zbirljivosti kojim bi se svakom divergentnom redu mogao pripisati određeni prošireni zbir, koji bi za svaki određeni red bio jednak proširenom zbiru dobivenom ma kojim od navedenih specijalnih postupaka zbirljivosti. Ovo pitanje treba iz osnove drukčije postaviti, a ne kao što je to učinio Borel, i da bismo lakše shvatili problematiku koja se ovde postavlja, pođimo od Pringsheim-ova primera:

$$0 = \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu x^{2[\nu/2]} = 1 - 1 + x^2 - x^2 + x^4 - x^4 + \ldots.$$

iz koga smo izveli da je

$$1 - 1 + 1 - 1 + \ldots. = 0,$$

a za koji rezultat nismo dali dovoljno objašnjenje.

Ovaj rezultat stoji u svakom slučaju u protivrečnosti sa Euler-ovim rezultatom, naime da je $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots = \frac{1}{2}$, a pored toga nismo u stanju da na Pringsheim-ov izraz primenimo ona rasuđivanja koja su nas dovela do zbira reda $1 - 1 + 0 + 1 - 1 + 0 + \ldots$ i njemu sličnih redova, i to tako što smo divergentnom redu pripisali kao zbir onaj broj koji sledi iz polaznog izraza.

Borel pobija ovo Pringsheim-ovo shvatanje i tvrdi da je jednačina $\frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ uopšte tačna, kada se do nje došlo „prirodnim putem", tj. kada se ona pojavila u toku računa, a da je netačna kada je izvedena preko veštački stvorenog primera, koji je stvoren jedino zato da bi se njen prvobitni smisao pobio.

4.2. Posmatrajmo stoga Pringsheim-ov izraz nešto bliže, da bismo videli da li je on zaista veštački produkt. Stvar će biti jasnija kad se pođe od nešto opštijeg izraza

$$\varphi(x) = u_0 + u_1 + u_2 x^2 + u_3 x^2 + u_4 x^4 + u_5 x^4 + \ldots =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \; x^{2\,[\nu/2]}.$$

Ovaj izraz pretstavlja jednu određenu funkciju, a u isti mah i potpuno određen postupak zbirljivosti oblika $B(g_n)$ koji zadovoljava uslove permanencije.

Uporedimo ovaj postupak sa Abel-ovim, tj. sa

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu \; x^\nu .$$

Na osnovu permanencije oba postupka biće $f(1-0) = \varphi(1-0)$ ako prvobitni red konvergira, tj. i prošireni zbirovi dobiveni ovim postupkom su tada jednaki. Međutim, ako ovaj red divergira, i ako primetimo da je

$$\varphi(x) - f(x) = (1-x)\,(u_1 + u_3 x^2 + u_5 x^4 + \ldots)$$

vidimo da se već kad

$$u_{2k+1} \to u = 0, \quad (k \to \infty),$$

oba proširena zbira moraju razlikovati, jer tada, prema opštem stavu permanencije

$$\varphi(x) - f(x) \to u/2, \quad (x \to 1).$$

Razlog ovome leži u disparatnoj prirodi niza eksponenata

$$0, 0, 2, 2, \ldots, 2\left[\frac{n}{2}\right], \ldots, \quad \text{odnosno} \quad 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots$$

jer prvi niz u odnosu na drugi ima nešto nepravilan tok.

Ako istaknemo ovu veću ili manju nepravilnost toka niza eksponenata, tada ovim možemo dobiti zadovoljavajući odgovor na postavljeno pitanje. Ako je, naime, red $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$ potekao iz razvitka izvesnog analitičkog izraza čiji članovi imaju u odnosu na prirodni niz izvestan regularni tok, tada mu možemo uvek kao prošireni zbir pripisati vrednost *1/2*. Tako, na primer razvitak

$$\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+(2x)^2} + \frac{1}{1+(3x)^2} - \ldots = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{x} \frac{1}{e^{\pi/x} - e^{-\pi/x}}$$

za ovaj red daje upravo vrednost *1/2* kad $x \to 0$. Ali i obratno, pod ovim uslovima regularnosti može se zaključiti da i sam izraz uzima vrednost *1/2* ako iz njega, pod istim uslovima, proističe red $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$.

Euler i njegovi savremenici imali su vanredan instinkt za ovu regularnost, iako ona tada eksplicitno nije bila izražena.

Iz dosadašnjeg izlaganja možemo zaključiti da divergentnom redu o čijem poreklu ništa ne znamo ne možemo nikada pripisati određenu vrednost kao prošireni zbir, jer za svaki takav red možemo uvek naći takav postupak zbirljivosti da se njime može dobiti po volji ma koji broj kao njegov prošireni zbir. Jasno je da se težine dva postupka zbirljivosti, koji za isti red daju različite proširene zbirove, ne mogu jedne prema drugima regularno odnositi, tako da se cela ova problematika svodi na jednu preciznu definiciju pojma regularnog ponašanja. Prirodno je da se pri obrazovanju ovakvog pojma regularnosti pođe od niza prirodnih brojeva 1,2,3,... i otuda, kao što je to učinio Hardy, primenom osnovnih računskih radnji obrazuje klasa regularnih nizova, tzv. klasa logaritamsko-eksponencijalnog tipa. Ovako obrazovana klasa regularnih nizova je ona koja je organski vezana za Taylor-ove i obične Dirichlet-ove redove, jer kod ovih redova niz prirodnih brojeva igra istaknutu ulogu. Kod opštih Dirichlet-ovih redova, međutim, ovu ulogu preuzima niz λ_n, i ako se ovaj niz brojeva u odnosu na prirodni niz brojeva iregularno ponaša, potrebno je izgraditi pojam regularnosti u odnosu na ovaj niz, recimo logaritamsko-eksponencijalnog tipa.

Otuda vidimo da je za svaku grupu problema potrebno na podesan način uspostaviti postupke zbirljivosti i pojam regularnosti koji omogućavaju da se ovi problemi mogu organski međusobno obraditi. U ovom leži uzrok zašto je za ove poslednje četiri decenije poniklo toliko mnogo i tako različitih postupaka zbirljivosti, tako da se današnji problem u samoj teoriji divergentnih redova, ne uzimajući u obzir njihove najraznovrsnije primene, svodi na proučavanje i ispitivanje međusobnih veza samih postupaka zbirljivosti. Jedan od otvorenih puteva za ovo ispitivanje sastoji se baš u tome da se pomenuti pojam regularnosti precizno definiše i njime obuhvate ovi problemi.

LE DÉVELOPPEMENT ET L'IMPORTANCE DE LA THÉORIE DES SÉRIES DIVERGENTES DANS L'ANALYSE MATHÉMATIQUE

PAR J. KARAMATA

Dans cette communication l'auteur a sommairement exposé le développement de la théorie des séries divergentes et les méthodes des leur sommations dès Euler, Abel, Hölder, Cesàro et Borel jusqu'à nos jours. Il a ensuite exposé l'importance et l'application de cette théorie au développement des fonctions en séries, au prolongement analytique des fonctions, ainsi qu'à l'extension des notions de la valeur limite, de la continuité, de la dérivée et de l'integral.

O ASIMPTOTSKIM REŠENJIMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

TADIJA PEJOVIĆ, BEOGRAD

Pod asimptotskim rešenjem neke diferencijalne jednačine razume se vrednost integrala te jednačine kada se nezavisno promenljiva uvećava beskonačno. U većini slučajeva nije moguće izraziti eksplicitne integrale diferencijalnih jednačina iz kojih bi se dobila asimptotska rešenja. Stoga se na razne načine pribegava ispitivanju ponašanja integrala u beskonačnosti, tj. kada se nezavisno promenljiva uvećava beskonačno. Mi ćemo ovde ukratko izneti kako se ispituje ponašanje integrala u beskonačnosti pomoću asimptotskih redova i pomoću sukcesivnih aproksimacija.[1]

1. Problem ispitivanja asimptotskih rešenja diferencijalnih jednačina potiče od Poincaré-a[2]). On pretstavlja integrale jedne homogene linearne jednačine pomoću asimptotskih redova. Pod asimptotskim redom neke funkcije f(x) razume se red oblika

$$f(x) \sim A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots . \tag{1}$$

kod koga je

$$\lim_{x \to \infty} x^n \left[f(x) - A_0 - \frac{A_1}{x} - \frac{A_2}{x^2} - \ldots \frac{A_n}{x^n} \right] = 0, \quad (n = 0,1,2\ldots).$$

Prema samoj definiciji, red (1) može se napisati u obliku

$$f(x) = A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{A_n + \varepsilon_n}{x^n}\;^{3)}$$

gde je

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon_n = 0 \qquad (n = 0, 1, 2\ldots)$$

Koeficijenti reda (1) dati su izrazima

$$A_0 = \lim_{x \to \infty} (fx), \quad A_1 = \lim_{x \to \infty} x\,[f(x) - A_0],$$

---

1) Treba napomenuti da postoje i druge metode za ispitivanje integrala u beskonačnosti o kojima nećemo govoriti.

2) Acta mathématica, t. 8, 1886.

3) Asimptotskim redovima bavio se istovremeno i Stieltjes i on ih je zvao semikonvergentnim redovima (Th. J. Stieltjes, Recherches sur qulques séries semi-convergentes. Annales de l'école normale supérieure, (3), Bd. 3. 1886). Medjutim, zadržan je naziv asimptotski redovi, jer naziv semi-konvergentni redovi odgovara drugoj vrsti redova.

$$(2)\quad \begin{cases} A_2 = \lim\limits_{x \to \infty} x^2 \left[f(x) - A_0 - \dfrac{A_1}{x} \right], \dots . \\ A_n = \lim\limits_{x \to \infty} x^n \left[f(x) - A_0 - \dfrac{A_1}{x} - \dots - \dfrac{A_{n-1}}{x^{n-1}} \right] \end{cases}$$

Kao povod za pretstavljanje integrala neke diferencijalne jednačine pomoću asimptotskih redova, poslužio je Poincaré-u Stirling-ov red

$$(3)\quad \log \Gamma(x+1) = \frac{1}{2} \log(2\pi) + \left(x + \frac{1}{2}\right) \log x - x + \\ + \frac{B_1}{1 \cdot 2x} - \frac{B_2}{3 \cdot 4x^2} + \frac{B_3}{5 \cdot 6x^3} - \dots ,$$

gde su B_1, B_2, $B_3, \dots .$ Bernoulli-evi brojevi. Red (3) je divergentan za sve konačne vrednosti x. Medjutim, za velike vrednosti x red 3) može se upotrebiti i on asimptotski pretstavlja funkciju

$$\log \Gamma(x+1).$$

Članovi reda (3) donekle naglo opadaju a posle rastu. Ako se pak zaustavimo na članu koji prethodi najmanjem članu, onda je greška učinjena na funkciji $\log \Gamma(x+1)$ pretstavljenom redom (3) vrlo mala.

Poincaré je pokazao da se sa asimptotskim redovima oblika (1) mogu vršiti izvesne formalne računske operacije kao i sa konvergentnim redovima.

Mi ćemo odmah preći na primenu ovih redova na integraciju diferencijalnih jednačina.

Uzmimo na primer jednačinu

$$(4)\quad \frac{dy}{dx} - y + \frac{1}{x} = 0$$

i pokušajmo pretstaviti integral ove jednačine pomoću reda oblika (1). Izvodni red reda (1) biće

$$(5)\quad \frac{dy}{dx} \sim -\frac{A_1}{x^2} - \frac{2A_2}{x^3} - \dots \frac{n\,A_n}{x^{n+1}} - \dots .$$

Zamenom y i y' iz relacija (1) i (5) u jednačini (4) i stavljajući koeficijente uz $\dfrac{1}{x^n}$ $(n = 0, 1, 2 \dots)$ jednaki nuli, dobiće se

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = -A_1, \dots, \quad A_{n+1} = -n\,A_n$$

ili

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 1, \quad A_2 = -1, \quad \dots, \quad A_{n+1} = (-1)^n\, n!$$

Ako se vrednosti ovih koeficijenata zamene u redu (1), dobiće se rešenje jednačine (4) pretstavljeno asimptotskim redom

$$(6)\quad y \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \dots + (-1)^n \frac{n!}{n^{n+1}} + \dots ,$$

koje formalno zadovoljava jednačinu (4). Ovaj red je divergentan za sve konačne vrednosti x, ali ako x raste, na primer zajedno sa n, to je n-ti član

$$\frac{n!}{n^{n+1}},$$

koji prema Stirling-ovoj formuli teži nuli za $n \to \infty$ tj.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n!}{n^{n+1}} = 0.$$

Prema tome, naizmeničan red (6) pretstavlja asimptotski integral jednačine (4) za x dovoljno veliko.

Opšti integral jednačine (4) glasi

$$y = e^x \left(C - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-x}}{x} dx \right).$$

Da bismo ispitali ponašanje ovoga integrala u beskonačnosti, napišimo ga u obliku

$$y = \frac{C - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-x}}{x} dx}{e^{-x}}. \tag{7}$$

Za $x \to \infty$ imenitelj e^{-x} teži nuli, integral

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$$

konvergira. Stoga se može izabrati konstanta C da i brojitelj teži nuli, tj. da je

$$C - \int_{x_0}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = C - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-x}}{x} dx - \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx = 0$$

odakle je
$$C - \int_{x_0}^{x} \frac{e^{-x}}{x} dx = \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx.$$

Prema tome, integral (7), koji može imati izvesnu konačnu vrednost za $x \to \infty$ glasi

$$y = \frac{\int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx}{e^{-x}} dx = e^x \int_{x}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx. \tag{8}$$

Ovaj integral, prema L'Hospit-ovom pravilu, imaće vrednost

$$\text{(9)} \qquad \lim_{x \to \infty} y = \lim_{x \to \infty} \frac{-\dfrac{e^{-x}}{x}}{-e^{-x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Dakle, jednačina (4) ima jedno rešenje koje teži nuli za $x \to \infty$. Iz jednačine (9) se vidi, da se rešenje (8) jednačine (4) ponaša kao $\frac{1}{x}$ za x dovoljno veliko.

Pokazaćemo sada, da se rešenje (8) može pretstaviti u obliku asimptotskog reda (6). Radi toga treba samo izvršiti uzastopne delimične integracije integrala (8).

Prva delimična integracija, stavljajući

$$u = \frac{1}{x}, \quad e^{-x}\, dx = dv,$$

$$du = -\frac{dx}{x^2}, \quad -e^{-x} = v,$$

daje

$$y = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx = e^x \left[-\frac{e^{-x}}{x} \right]_x^\infty - e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx$$

ili

$$y = \frac{1}{x} - e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^2}\, dx\,.$$

Druga pak integracija, stavljajući

$$u = \frac{1}{x^2}, \quad e^{-x}\, dx = dv$$

daje

$$y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + 2e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x^3}\, dx$$

Produžujući tako uzastopne parcijalne integracije, dobiće se red (6) koji asimptotski pretstavlja rešenje (8) jednačine (4). Iz jednačine (9) vidi se, da rešenje (8) jednačine (4) pretstavljeno asimptotskim redom (6) teži nuli za $x \to \infty$. Prema tome, rešenje (8) jednačine (4) u obliku asimptotskog reda glasi

$$\text{(10)} \quad y = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\, dx \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \ldots + (-1)^n \frac{n!}{x^{n+1}} + \ldots$$

Iz relacija (9) i (10) se vidi, da se asimptotski red (10) rešenja (8) jednačine (4) ponaša kao $\frac{1}{x}$ za velike vrednosti x. Prema jednačinama (2) za izračunavanje koeficijenata asimptotskog reda (10), relacija (10) daje

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
&A_0 = 0 = \lim_{x\to\infty} e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,,\\
&A_1 = 1 = \lim_{x\to\infty} e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx\,,\\
&A_2 = -1 = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \frac{1}{x}\right),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_{n+1} = (-1)^n\, n! \lim_{x\to\infty} x^{n+1} \left(e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \cdots \right.\\
&\qquad \left. - (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{x^n}\right).\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
\right.
$$

Lako je videti, da se vrednosti za A_0, A_1, A_2, ... A_n, ... mogu dobiti iz samih relacija (11), ne vodeći računa o asimptotskom redu (10). Tako, na primer, vrednost za A_0 u prvoj od jednačina (11) sleduje iz relacije (9). Vrednost za A_1 iz druge od gornjih jednačina biće

$$A_1 = \lim_{x\to\infty} x\, e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx}{\frac{1}{xe^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{1}{xe^x}}{-\frac{x+1}{x^2e^x}} = 1.$$

Isto tako je

$$A_2 = \lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}\,dx - \frac{1}{xe^x}}{\frac{1}{x^2e^x}} = -1.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Kao što se vidi asimptotski redovi oblika (1), iako divergiraju, imaju smisla i mogu se korisno upotrebiti za pretstavljanje funkcija za velike vrednosti x.

Pored asimptotskog reda oblika (1) može se posmatrati i asimptotski red oblika

$$e^{\alpha x}\, x^{r}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right). \tag{12}$$

Za jednu funkciju f(x) kaže se da je pretstavljena asimptotskim redom oblika (12), ako je funkcija $e^{-\alpha x}\, x^{-r}\, f(x)$ pretstavljena asimptotskim redom

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots$$

napred definisanim, [1]), tj. ako je

$$e^{-\alpha x}\, x^{-r}\, f(x) \sim A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots.$$

odakle je

$$f(x) \sim e^{\alpha x}\, x^{r}\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right).$$

Red oblika (12) poznat je pod imenom normalni red. Normalni redovi mogu se korisno upotrebiti za pretstavljanje integrala izvesnih diferencijalnih jednačina.[2])

Neka je na primer, data homogena linearna jednačina *n*-toga reda

$$\frac{d^n y}{dx^n}+P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+P_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\ldots+P_{n-1}\frac{dy}{dx}+P_n\, y=0, \tag{13}$$

gde su koeficijenti P_i pretstavljeni asimptotskim redovima

$$P_i \sim a_i+\frac{a_{i1}}{x}+\frac{a_{i2}}{x^2}+\ldots,\quad (i=1,2\ldots n) \tag{14}$$

---

[1]) U opštem slučaju za jednu funkciju f(x) kaže se da je pretstavljena asimptotskim redom

$$\varphi(x)+\psi(x)\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right),$$

ako je

$$\frac{f(x)-\varphi(x)}{\psi(x)},\qquad \psi(x)\neq 0$$

pretstavljeno asimptotskim redom

$$A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots$$

odakle je

$$f(x)\sim\varphi(x)+\psi(x\left(A_0+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right),$$

funkcije $\varphi(x)$ i $\psi(x)$ su definisane za velike vrednosti *x*.

[2]) Detaljnije o primeni normalnih redova na rešavanje diferencijalnih jednačina videti još: J. Horn, Gevöhnliche Differentialgleichungen, Leipzig, 1905.

ili u obliku

$$P_i = a_i + \frac{a_{i1}}{x} + \frac{a_{i2}}{x^2} + \dots + \frac{a_{ip} + \varepsilon_p}{x^p},$$

koji su divergentni za sve konačne vrednosti x ili mogu biti i konvergentni u blizini tačke $x \to \infty$ [1]). Ako se u jednačini (13) izvrši smena

$$y = ze^{\alpha x} \tag{14'}$$

gde je z nova nepoznata funkcija a α izvesna konstanta, dobija se jednačina

$$\frac{d^n z}{dx^n} + Q_1 \frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + Q_2 \frac{d^{n-2} z}{dx^{n-2}} + \dots + Q_{n-1} \frac{dz}{dx} + Q_n z = 0, \tag{15}$$

gde je

$$\left\{\begin{aligned} & Q_1 = n\alpha + P_1 \\ & \dots\dots\dots\dots \\ & Q_{n-1} = n\alpha^{n-1} + (n-1)\,\alpha^{n-2} P_1 + \dots + 2\alpha P_{n-2} + P_{n-1} \\ & Q_n = \alpha^n + \alpha^{n-1} P_1 + \dots + \alpha P_{n-1} + P_n \end{aligned}\right. \tag{15'}$$

Prema (14) ovi koeficijenti imaju oblike asimptotskih redova

$$Q_i = b_i + \frac{b_{i1}}{x} + \frac{b_{i2}}{x^2} + \dots, \quad (i = 1, 2 \dots n)$$

gde su, prema (15'),

$$b_n = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots + \alpha a_{n-1} + a_n \tag{16}$$

$$b_{n-1} = n\,\alpha^{n-1} + (n-1)\, a_1 \alpha^{n-2} + \dots + a_{n-1}, \tag{16'}$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

Potražimo rešenja jednačina (15) u obliku asimptotskog reda

$$z \sim \sum_{v=0}^{\infty} A_v x^{r-v} = A_0 x^v + A_1 x^{r-1} + \dots + A_v x^{r-v} + \dots \tag{17}$$

Zamenjujući z i njegove uzastopne izvode do reda n u jednačini (15) i stavljajući $b_n = 0$ dato jednačinom (16), zatim izjednačujući koeficijente uz iste stepene od x^{r-1}, x^{r-2}, ..., x^{r-v}, ..., sa nulom, dobiće se jednačine

$$\left\{\begin{aligned} & [b_{n-1} r + b_{n1}]\, A_0 = 0, \\ & [b_{n-1} (r-1) + b_{n1}]\, A_1 + [b_{n-2}\, r\,(r-1) + b_{n-1,1}\, r]\, A_0 = 0, \\ & \dots\dots\dots\dots\dots \\ & [b_{n-1} (r-v) + b_{n1}]\, A_v + \dots \qquad = 0. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

Pod pretpostavkom da je $b_{n-1} \neq 0$, tada je iz prve od jednačina

$$r = -\frac{b_{n1}}{b_{n-1}} \tag{18'}$$

---

[1]) Ako je red (14) konvergentan za sve vrednosti x veće od jednog konačnog broja (ma koliko bio veliki), onda je tačka $x \to \infty$ r e g u l a r n a t a č k a za funkciju P_i. Ako je pak gornji red divergentan za sve konačne vrednosti x (ma koliko one bile velike), onda je tačka $x \to \infty$ *iregularna* tačka za funkciju P_i.

A_0 je proizvoljno. Sledeći koeficijenti A_ν dobiće se iz ostalih jednačina (18). Prema tome, red (17) čiji su koeficijenti A_ν $(\nu = 1,2..)$ dati jednačinama (18) zadovoljavaju formalno jednačinu (15). Stoga će, prema (14'), asimptotski red

$$(19) \qquad y \sim e^{\alpha_x} x^r \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + ..\right)$$

zadovoljavati formalno jednačinu (13), gde je α prost koren jednačine

$$(20) \qquad b_n = \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \ldots + \alpha\, a_{n-1} + a_n = 0$$

r je dato jednačinom (18'), A_0 je proizvoljno a ostali koeficijenti A_ν $(\nu=1,2...)$ dati su jednačinom (18). Svakom prostom korenu α_i jednačine (20) odgovaraće po jedan red oblika (19) koji će formalno zadovoljavati jednačinu (13). Redovi (19) su u opštem slučaju divergentni za sve konačne vrednosti x. Izuzetno oni mogu biti konvergentni u blizini tačke $x \to \infty$.

Na primer data je jednačina

$$(21) \qquad \frac{dy}{dx} + Py = 0$$

gde je

$$P = a + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots$$

ili u obliku

$$(22) \qquad P = a + \frac{a_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots + \frac{a_{p+1} + \varepsilon_{p+1}}{x^{p+1}}$$

sa

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon_{p+1} = 0.$$

Jednačina (21) posle smene (14') postaje

$$\frac{dz}{dx} + (\alpha + P)\, z = 0.$$

Tražeći formalno rešenje ove jednačine u obliku asimptotskog reda (17), tj. određujući α tako da je $\alpha + a = 0$ i izjednačujući koeficijente uz iste stepene od x^{r-1}, x^{r-2}, $x^{r-\nu}$, ... sa nulom, dobiće se relacije

$$(r + a_1)\, A_0 = 0$$
$$(r - 1 + a_1)\, A_1 + A_0\, a_2 = 0$$
$$- - - - - - - - -$$

Prva od ovih jednačina daje $r = - a_1$, A_0 je proizvoljno, ostale jednačine daju koeficijente A_ν $(\nu = 1,2\ldots)$. Prema tome formalno rešenje jednačine (21) biće

$$y \sim e^{-a_x} x^{-a_1} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right)$$

Iz same jednačine (21) se vidi, da je njen integral

$$(23) \qquad y = e^{-\int P dx}$$

ili, vodeći računa o koeficijentima P u jednačini (22) i računskim operacijama sa asimptotskim redovima,[1])

$$y = e^{-\int P dx} = e^{-a_x}\, x^{-a_1}\left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \dots\right)$$

gde se koeficijenti A_ν dobijaju iz koeficijenata funkcije P pomoću očevidnih operacija iz same jednačine (23).

Iz prednjeg, iako kratkog izlaganja vidi se značaj asimptotskih redova za rešavanje diferencijalnih jednačina.

2). Isto tako i metoda sukcesivnih aproksimacija čini velike usluge pri asimptotskom rešavanju diferencijalnih jednačina.

Uzmimo, na primer, sistem linearnih jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = f_i(t), \qquad (i = 1,2, \dots n) \tag{24}$$

gde su a_{ik} i $f_i(t)$ neprekidne funkcije realne promenljive $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ i zadovoljavaju uslove

$$\lim_{t \to \infty} a_{ik} = \bar{a}_{ik}, \qquad \lim_{t \to \infty} f_i(t) = 0. \tag{24'}$$

Potražimo rešenja x_i jednačina (24) za $t \to \infty$[2]).

Radi toga posmatraćemo najpre sistem jednačina

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{u} \bar{a}_{ik}\, x_k = f_i(t), \qquad (i = 1,2, \dots, n) \tag{25}$$

gde su $\bar{a}_{ik}$ konstante a

$$\lim_{t \to \infty} f_i(t) = 0\text{[3])}. \tag{25'}$$

---

[1]) Što se tiče operacija sa asimptotskim redovima videti: K. Knopp, Theorie und Anwendungen der Unendlichen Reihen, Berlin, 1931 g.

[2]) Videti: O. Perron, Mathematische Zeitschrift B. 6 (1920) B. 17 (1923).
H. Späth, Mathematische Zeitschrift; B. 33 (1929)
T. Péyovitch, Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, I, 1939.

[3]) Ako je $\lim\limits_{t \to \infty} f_i(t) = b_i$ onda je $f_i(t) = b_i + \psi_i(t)$ sa $\lim\limits_{t \to \infty} \psi_i(t) = 0$

u tom slučaju sistem (25) glasi

$$\frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{\infty} \bar{a}_{ix}\, x_k = b_i + \psi_i(t)$$

koji posle smene,

$$x_i = A_i + y_i$$

postaje

$$\frac{dy_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik} y_k = \psi_i(t)$$

gde su A_i konstante date jednačinama

$$\bar{a}_{i1}\, A + \bar{a}_{i2}\, A_2 + \dots + \bar{a}_{in}\, A_n = b_i.$$

Poznato je da se sistem jednačina (25), linearnom supstitucijom sa stalnim koeficijentima

$$(26) \qquad z_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} x_k, \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

ili u obliku

$$(26') \qquad x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} z_k, \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

čije su determinante

$$|b_{ik}| \neq 0, \quad |\alpha_{ik}| \neq 0,$$

može svesti na kanoničan oblik, koji zavisi od prirode korena r_i karakteristične jednačine

$$(27) \qquad \lambda(r) = \begin{vmatrix} \bar{a}_{11} + r & \bar{a}_{12} \ldots \bar{a}_{1n} \\ - - - & - - - \\ \bar{a}_{n1} & \bar{a}_{n2} \quad \bar{a}_{nn} + r \end{vmatrix} = 0$$

Ako su svi koreni r_i gornje jednačine različiti, onda se sistem (25) smenom (26) može svesti na oblik

$$\frac{dz_i}{dt} - r_i z_i = \varphi_i(t), \quad (i = 1, 2 \ldots, n)$$

gde je

$$(28) \qquad \varphi_i(t) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} f_k(t), \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

Ako pak jednačina (27) ima višestrukih korena, onda svakome takvome korenu r reda *p* $(r_1 = r_2 = \ldots r_p)$ odgovaraće po jedna grupa jednačina oblika

$$(29) \qquad \begin{cases} \dfrac{dz_1}{dt} - r_1 z_1 = \varphi_1(t) \\[2mm] \dfrac{dz_2}{di} - r_1 z_2 - z_1 = \varphi_2(t) \\ - - - - - - - \\ \dfrac{dz_p}{dt} - r_1 z_p - z_{p-1} = \varphi_p(t) \end{cases}$$

gde su funkcije $\varphi_i(t)$ date jednačinama (28) i koje, prema (25′) zadovoljavaju uslov

$$(29') \qquad \lim_{t \to \infty} \varphi_i(t) = 0$$

Integracija jednačina (29) daje

$$
(29'')\quad \begin{cases}
z_1 = e^{r_1 t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_1(t)\,dt + C_1\right), \\
z_2 = e^{r_1 t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_2(t)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} z_1\,dt + C_2\right), \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — —} \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — —} \\
z_p = e^{r_1 t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_p(t)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} z_{p-1}\,dt + C_p\right)
\end{cases}
$$

ili

$$
(30)\quad \begin{cases}
z_1 = e^{r_1 t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_1(t)dt + C_1\right) \\
z_2 = e^{r_1 t}\left\{\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_2(t)dt + \int\limits_{t_0}^{t} dt\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_1(t)dt + C_1\right] + C_2\right\}
\end{cases}
$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — — —

a) Ako je $r_1 = \rho_1 + \theta_1 i$ realan negativan ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 < 0$, onda jednačine (30), prema (29′), glase[1])

$$
\lim_{t\to\infty} |z_1| = \lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_1(t)dt + C_1\right|}{e^{-\rho_1 t}} \leq \frac{1}{\rho_1} \lim_{t\to\infty} |\,\varphi_1(t) = 0
$$

$$
\lim_{t\to\infty} |z_2| = \lim_{t\to\infty} \frac{\left|\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_2(t)\,dt + \int\limits_{t_0}^{t} dt\left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\,\varphi_1(t)dt + C_1\right] + C_2\right.}{e^{-\rho_1 t}}
$$

ili $$\lim_{t\to\infty} |\,z_2\,| \leq \frac{1}{\rho_1} \lim_{t\to\infty} |\,\varphi_2(t)\,| + \frac{1}{\rho_1^2} \lim_{t\to\infty} \varphi_1(t) = 0,$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

tj. opšti integrali jednačina (30) teže nuli za $t \to \infty$.

---

1) Prema Stolz-ovom pravilu (O. Stolz, Grundzüge der Differential- und Integral-rechnung, Leipzig, 1893, s. 77.).

b) Ako je pak r_1 realan pozitivan ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 > 0$, onda rešenja jednačina (29″) koja teže nuli za $t \to \infty$ glase[2]:

$$
(31) \quad \begin{cases} z_1 = e^{r_1 t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_1(t) dt \\ z_2 = e^{r_1 t} \left[\int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_2(t)\, dt + \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_2 t} z_1\, dt \right], \\ \text{— — — — — — — — — — — —} \end{cases}
$$

ili

$$
(31') \quad \begin{cases} z_1 = e^{r_1 t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt, \\ z_2 = e^{r_1 t} \left[\int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_2(t)\, dt + \int\limits_{\infty}^{t} dt \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt \right] \\ \text{— — — — — — — — — — — — — —} \end{cases}
$$

odakle je

$$
\lim_{t \to \infty} |z_1| \leqslant \frac{1}{\rho_1} \lim_{t \to \infty} |\varphi_1(t)| = 0
$$

$$
\lim_{t \to \infty} |z_2| \leqslant \frac{1}{\rho_1} \lim_{t \to \infty} |\varphi_2(t)| + \frac{1}{\rho_1^2} \lim_{t \to \infty} |\varphi_1(t)| = 0;
$$

— —

c) Ako je $r_1 = \theta_1$ imaginaran broj ili jednak nuli sa $\theta_1 = 0$, onda će rešenja (31) težiti nuli ako integrali

$$
\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_k(t)\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, p)
$$

$$
\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} z_k\, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots, p^{-1})
$$

konvergiraju. Ovi integrali, prema (30), glase

$$
\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt \quad , \qquad \int\limits_{t_0}^{\infty} dt \int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt,
$$

— — — — — — — — — —

[2]) Prema L'Hospital-ovom pravilu.

$$\underbrace{\int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} dt \ldots \int_{t}^{\infty}}_{p \text{ puta}} e^{-r_1 t} \varphi_1(t)\, dt, \ldots\ldots$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_2(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_2(t)\, dt, \ldots.$$

$$\underbrace{\int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} dt \ldots \int_{t}^{\infty}}_{(p-1) \text{ puta}} e^{-r_1 t} \varphi_2(t)\, dt, \ldots..$$

$$\int_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} \varphi_p(t)\, dt.$$

Konvergencije gornjih integrala, prema (28) svodi se na konvergenciju integrala

$$(32) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t} f_k(t)\, dt, \quad \int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} e^{-r_1 t} f_k(t)\, dt, \\ \text{— — — — — — —} \\ \text{— — — —} \\ \underbrace{\int_{t_0}^{\infty} dt \int_{t}^{\infty} dt \ldots \int_{t}^{\infty}}_{p \text{ puta}} e^{-r_1 t} f_k(t)\, dt, \qquad (k = 1,2, \ldots, n). \end{array} \right.$$

Kao što se vidi, korenu reda p karakteristične jednačine (27) odgovara sistem rešenja jednačina (29") koji ima ove osobine.

1- Ako je $r_1 = \rho_1 + \theta_1 i$ realan negativan ($\theta_1 = 0$) ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 < 0$ onda opšti integrali jednačina (29") teže nuli za $t \to \infty$

2- Ako je $r_1 = \rho_1 + \theta_1 \iota$ realan pozitivan ($\theta_1 = 0$) ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 > 0$ onda se konstante Cp mogu izabrati, tako da jednačine (29") imaju jedan sistem rešenja koji teži nuli za $t \to \infty$

3- Ako je $r_1 = \theta_1 \iota$ imaginaran broj ili jednak nuli sa $\theta_1 = 0$, onda jednačine (29") imaju jedan sistem rešenja koji teži nuli za $t \to 0$, ako integrali (32) konvergiraju.

Na isti način se može postupiti i sa ostalim korenima karakterestične jednačine (27).

Kako sistem jednačina oblika (29") ima rešenja koja teže nuli za $t \to \infty$ pod gore navedenim uslovima, to će, prema (26') i sistem jednačina (25) imati rešenja koja teže nuli za $t \to \infty$, pod istim uslovima. Lako je videti iz samih jednačina (25) da je

$$\lim_{t \to \infty} \frac{dx_i}{dt} = 0$$

kad je $\lim\limits_{t \to \infty} x_i = 0$.

Prema tome imamo sledeću teoremu [1]).

J e d n a č i n e (25) g d e s u $\bar{a}_{ik}$ k o n s t a n t e a $\lim\limits_{t \to \infty} f_i(t) = 0$ i m a j u j e d a n s i s t e m r e š e n j a k o j i i m a o s o b i n e

$$\lim_{t \to \infty} x_i = 0 , \quad \lim_{t \to \infty} \frac{dx_i}{dt} = 0$$

a k o, z a s v a k i i m a g i n a r a n k o r e n i l i j e d n a k n u l i r e d a p, k o n v e r g i r a j u i n t e g r a l i (32). S i s t e m r e š e n j a x z a v i s i ć e o d o n o l i k o p r o i z v o l j n i h k o n s t a n a t a k o l i k o k a r a k t e r i s t i č n a j e d n a č i n a (27) i m a r e a l n i h n e g a t i v n i h i k o m p l e k s n i h k o r e n a s a r e a l n i m n e g a t i v n i m d e l o m. (Svaki takav višestruki koren reda p računat je p puta).

Gornja teorema važi i za linearnu jednačinu

$$x^{(n)} + \bar{a}_1 x^{(n-1)} + \ldots + \bar{a}_n x = f(t),$$

gde su $\bar{a}_i$ konstante a $f(t)$ neprekidna funkcija za $t \geqslant t_0 > 0$ sa uslovom $\lim\limits_{t \to \infty} f(t) = 0$, jer se ona može svesti na sistem od linearnih jednačina oblika (25).

Uzmimo na primer

$$\text{(33)} \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - y = 0, \\[2mm] \dfrac{dy}{dt} - x = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

koje zadovoljavaju uslove jednačine (25). Ako se stavi, prema (26),

$$\text{(34)} \qquad u = x + y, \qquad v = -x + y$$

gornje jednačine postaju

$$\frac{du}{dt} - u = \frac{1}{t},$$

$$\frac{dv}{dt} + v = \frac{1}{t},$$

---

[1]) Ovu sam teoremu dokazao prvi put u radu pod naslovom: Sur les solutions asymptotiques des équations differentielles linéaires (Publications mathématiques de l'Université de Belgrade, t. I. 1932).

čiji su opšti integrali

$$u = e^t \left(\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-t}}{t}\, dt + C_1 \right),$$

$$v = e^{-t} \left(\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t}}{t}\, dt + C_2 \right).$$

Lako je videti da integrali ovih jednačina koji teže nuli za $t \to \infty$ glase

$$(34') \quad \begin{cases} u = e^t \displaystyle\int_{\infty}^{t} \frac{e^{-t}}{t}\, dt \\ v = e^{-t} \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t}}{t}\, dt + C_2 \right). \end{cases}$$

Stoga će integrali jednačina (33), koji teže nuli za $t \to \infty$ prema (34) glasiti

$$(35) \quad \begin{cases} x = \dfrac{e^t}{2} \displaystyle\int_{\infty}^{t} \frac{e^{-t}}{t}\, dt - \dfrac{e^{-t}}{2} \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t}}{t}\, dt + C_2 \right), \\ y = \dfrac{e^t}{2} \displaystyle\int_{\infty}^{t} \frac{e^{-t}}{t}\, dt + \dfrac{e^{-t}}{2} \left(\displaystyle\int_{t_0}^{t} \frac{e^{t}}{t}\, dt + C_2 \right), \end{cases}$$

gde je C_2 proizvoljna konstanta. Prema gornjoj teoremi to je jasno, jer su koreni karakteristične jednačine sistema (33) $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Stoga integrali sistema (33), koji teže nuli za $t \to \infty$ moraju zavisiti od onoliko proizvoljnih konstanata, koliko karakteristična jednačina ima negativnih ili kompleksnih korena sa negativnim realnim delom. U ovom slučaju je jedan takav koren $r_2 = -1$ i integrali zavise od jedne proizvoljne konstante C_2. Iz sistema (33) se vidi, da je y izvod od x, što potvrđuju i jednačine (35). Lako je videti, da se sistem (33) svodi na jednačinu drugoga reda

$$\frac{d^2x}{dt^2} - x = \frac{1}{t},$$

čije je rešenje dato prvom od jednačina (35) i koje ima osobinu

$$\lim_{t \to \infty} x = 0, \quad \lim_{t \to 0} \frac{dx}{dt} = 0.$$

3). Vratimo se sada jednačinama (24) čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove (24') i napišimo ih u obliku

$$(36) \qquad \frac{dx_i}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, x_k$$

gde je

$$\delta_{ik}(t) = \bar{a}_{ik} - a_{ik}, \quad \lim_{t \to \infty} \delta_{ik}(t) = 0. \tag{36'}$$

Potražimo sada rešenja jednačina (36) pomoću metode sukcesivnih aproksimacija.

Neka je, za $t \geqslant t_0 > 0$ jedan sistem ograničenih rešenja jednačina (25)[1], tj

$$|x_i^0| \leqslant M, \qquad (i = 1,2, \ldots, n); \tag{37}$$

može se formirati niz funkcija

$$x_i^1,\ x_i^2, \ldots, x_i^m, \ldots \quad (i = 1,2, \ldots, n),$$

kao uzastopna rešenja jednačina

$$\frac{dx_i^m}{dt} + \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ik}\, x_k^m = f_i(t) + \sum_{k=1}^{n} \delta_{ik}(t)\, x_k^{m-1}. \tag{38}$$

Radi toga u gornjim jednačinama izvršimo smenu

$$z_i^m = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, x_k^m, \qquad |b_{ik}| \neq 0, \ (b_{ik} = \text{konstanta}) \tag{39}$$

što se može napisati u obliku

$$x_i^m = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\, z_i^m \qquad |\alpha_{ik}| \neq 0, \ (\alpha_{ik}\ \text{konstanta}), \tag{39'}$$

i izaberimo konstante b_{ik} tako da se sistem (38) svede na kanoničan oblik. Tada će svakome korenu r karakteristične jednačine (27) reda p ($r_1 = r_2 = \ldots r_p$) odgovarati po jedna grupa jednačina oblika

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dz_1^m}{dt} - r_1 z_1^m = \varphi_1(t) + \psi_1^{m-1}(t), \\[2ex] \dfrac{dz_2^m}{dt} - r_1 z_2^m - z_1^m = \varphi_2(t) + \psi_2^{m-1}(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{dz_p^m}{dt} - r_1 z_p^m - z_{p-1}^m = \varphi_p(t) + \psi_p^{m-1}(t), \end{array} \right. \tag{40}$$

gde je $\varphi_i(t)$ dato jednačinom (28) a

$$\psi_i^{m-1}(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t)\, x_k^{m-1} + \ldots + b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t)\, x_k^{m-1}. \tag{41}$$

---

[1]) koji smo već ispitali

Opšti integrali jednačina (40) biće

$$
(42)\quad
\begin{cases}
z_1^m = e^{r_1 t}\left(\int_{t_1}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right) + e^{r_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_1^{m-1}(t)\,dt \\
z_2^m = e^{r_1 t}\left(\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_2(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} z_1^m\,dt + C_2\right) + \\
\quad + e^{r_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_2^{m-1}(t)\,dt, \\
\text{ili prema prvoj jednačini} \\
z_2^m = e^{r_1 t}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_2(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} dt\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\varphi_1(t)\,dt + C_1\right] + \right. \\
\quad \left. + C_2\right\} + e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_2(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} dt\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_1^{m-1}(t)\,dt\right], \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Ove jednačine, prema jednačinama (30) mogu se napisati u obliku

$$
(42')\quad
\begin{cases}
z_1^m = z_1^0 + e^{r_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_1^{m-1}(t)\,dt, \\
z_2^m = z_2^0 + e^{r_1 t}\left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_2^{m-1}(t)\,dt + \int_{t_0}^{t} dt\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\psi_1^{m-1}(t)\,dt\right] \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{cases}
$$

Stavljajući u ovim jednačinama $m = 1,2,\dots$ dobićemo uzastopna rešenja z_i^m.

a) Neka je $r_1 = \rho_1 + \theta_1 \iota$ realan negativan $(\theta_1 = 0)$ ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 < 0$.

Za $m = 1$ jednačina (41) prema (37) daje

$$
(42'')\qquad |\psi_i^0(t)| \leqslant M\,\delta_i(t)
$$

sa

$$
\delta_i(t) = |b_{i1}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_{1k}(t)| + \dots + |b_{in}|\sum_{k=1}^{n}|\delta_{nk}(t)|,
$$

gde je, prema (36'),

$$
(a)\qquad \lim\ \delta_i(t) = 0.
$$

Prema tome, jednačine (42'), za $m = 1$, daju

$$(b)\quad \begin{cases} |z_1^1 - z_1^0| \leqslant M\, e^{-\rho_1 t} \int_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t}\, \delta_1(t)\, dt \\ |z_2^1 - z_2^0| < M\, e^{-\rho_1 t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t}\, \delta_2(t)\, dt + \int_{t_0}^{t} dt \int_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t}\, \delta_1(t)\, dt \right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

odakle je

$$|z_1^1 - z_1^0| \leqslant M\, \eta_1(t),$$
$$|z_2^1 - z_2^0| \leqslant M\, \eta_2(t),$$
$$\dots\dots\dots$$

tj.

$$|z_i^1 - z_i^0| \leqslant M\, \eta_i(t), \qquad (i = 1, 2, \dots, p)$$

gde je

$$\lim_{t \to \infty} \eta_i(t) = 0,$$

jer svi izrazi na desnoj strani nejednačina (b), prema (a), teže nuli za $t \to \infty$.

b) Neka je $r_1 = \rho_1 + \theta_1$ i realan pozitivan ($\theta_1 = 0$) ili kompleksan broj sa realnim delom $\rho_1 > 0$.

U tom slučaju integrali (42) koji mogu težiti nuli za $t \to \infty$, biće

$$z_1^m = e^{r_1 t} \int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \varphi_1(t)\, dt + e^{r_1 t} \int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt,$$

$$z_2^m = e^{r_1 t} \left[\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\, \varphi_2(t)\, dt + \int_{\infty}^{t} dt \int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \varphi_1(t)\, dt \right] +$$
$$+ e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \overset{m-1}{\psi_2}(t)\, dt + \int_{\infty}^{t} dt \int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt \right],$$
$$\text{— — — — — — — — — — — — — — —}$$

ili, prema (31'),

$$(43)\quad \begin{cases} z_1^m = z_1^0 + e^{r_1 t} \int_{\infty}^{t} e^{-rt}\, \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt \\ z_2^m = z_2^0 + e^{r_1 t} \left[\int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \overset{m-1}{\psi_2}(t)\, dt + \int_{\infty}^{t} dt \int_{\infty}^{t} e^{-r_1 t}\, \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt \right], \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

Lako je videti kao i u slučaju pod a) da je za $m = 1$

$$
(c)\quad \left\{
\begin{array}{l}
|z_1^1 - z_1^0| \leqslant M e^{\rho_1 t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \delta_1(t)dt, \\
|z_2^1 - z_2^0| \leqslant M e^{\rho_1 t} \left[\int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \delta_2(t)dt + \int\limits_{\infty}^{t} dt \int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \delta_1(t)dt \right], \\
\text{— — — — — — — — — — — — — — —}
\end{array}
\right.
$$

odakle je

$$|z_i^1 - z_i^0| \leqslant M_i \eta(t), \qquad (i=1,2\,\ldots,\, p)$$

gde je

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0.$$

c) Neka je $\rho_1 = \theta_{1i}$ imaginaran broj ili jednak nuli sa $\theta_1 = 0$.

Tada rešenja koja mogu težiti nuli jesu oblika (43), ako integrali, prema (42),

$$
(44)\quad \left\{
\begin{array}{l}
\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt, \\
\int\limits_{t_0}^{t} e^{-r_1 t} \overset{m-1}{\psi_2}(t)\, dt + \int\limits_{t_0}^{\infty} dt \int\limits_{t}^{\infty} e^{-r_1 t} \overset{m-1}{\psi_1}(t)\, dt, \\
\text{— — — — — — — — — — — — —}
\end{array}
\right.
$$

konvergiraju. U tom slučaju iz jednačina (43) za $m = 1$ kao pod a) i pod b) sleduje

$$|z_i^1 - z_i^0| \leqslant M\eta_i(t), \quad (i = 1.\ 2, \ldots, p)$$

sa

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0$$

Integrali (44) koji moraju konvergirati za $m = 1$ postaju

$$\int\limits_{t_0}^{\infty} e^{-r_1 t}\, \psi_1^0(t)\, dt,$$

$$\int\limits_{t_0} e^{-r_1 t}\, \psi_2^0(t)\, dt, \int\limits_{t_0}^{\infty} dt \int\limits_{t}^{\infty} e^{-r_1 t}\, \psi_1^0(t)\, dt,$$

— — — — — — — — — — —

ili, prema (42″)

$$(45)\quad \begin{cases} \int_{t_0}^{\infty}\delta_1(t)\,dt, \quad \int_{t_0}^{\infty}dt\int_{t}^{\infty}\delta_1(t)dt, \dots, \underbrace{\int_{t_0}^{\infty}dt\int_{t}^{\infty}dt\dots\int_{t}^{\infty}\delta_1(t)\,dt}_{p\ \text{puta}}, \\ \int_{t_0}^{\infty}\delta_2(t)\,dt, \dots, \underbrace{\int_{t_0}^{\infty}dt\int_{t}^{\infty}dt\dots\int_{t}^{\infty}\delta_2(t)dt}_{(p-1)\ \text{puta}}, \dots\dots \\ \int_{t_0}^{\infty}\delta_p(t)dt. \end{cases}$$

Na sličan način može se postupiti i sa ostalim korenima karakteristične jednačine (27) i dobiće se, za $m=1$ pri konvergenciji integrala (45) u slučaju imaginarnih korena ili jednakih nuli,

$$(46)\qquad |z_i^1 - z_i^0| \leqslant M\eta_i(t), \qquad (i = 1, 2, \dots n)$$

sa

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i(t) = 0$$

Iz jednačine (39′) sleduje

$$(46')\qquad x_i^m - x_i^{m-1} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}(z_k^m - z_z^{m-1}), \qquad (i=1, 2, \dots, n)$$

odakle je, za $m=1$, prema (46),

$$(47)\qquad |x_i^1 - x_i^0| \leqslant M\,\varepsilon_i(t) \leqslant M\varepsilon_i.$$

gde je

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max_{t\geqslant t_0>0} e_i(t).$$

Sledeća uzastopna rešenja z_i^m dobiće se iz relacije dobijenih iz jednačina (42′)

$$(48)\quad \begin{cases} z_1^m - z_1^{m-1} = e^{r_1 t}\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\left[\overset{m-1}{\psi_1}(t) - \overset{m-2}{\psi_1}(t)\right]dt, \\ z_2^m - z_2^{m-1} = e^{r_1 t}\left\{\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\left[\overset{m-1}{\psi_2}(t) - \overset{m-2}{\psi_2}(t)\right]dt + \right. \\ \qquad \left. + \int_{t_0}^{t}dt\int_{t_0}^{t} e^{-r_1 t}\left[\overset{m-1}{\psi_1}(t) - \overset{m-2}{\psi_1}(t)\right]dt\right\}, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — —} \end{cases}$$

odnosno iz relacija dobijenih iz jednačina (43)

$$(48')\quad \begin{cases} z_1^m - z_1^{m-1} = e^{r_1 t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \left[\psi_1^{m-1}(t) - \psi_1^{m-2}(t) \right] dt, \\ z_2^m - z_2^{m-1} = e^{r_1 t} \left\{ \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \left[\psi_2^{m-1}(t) - \psi_2^{m-2}(t) \right] dt + \right. \\ \qquad \left. + \int\limits_{\infty}^{t} dt \int\limits_{\infty}^{t} e^{-r_1 t} \left[\psi_1^{m-1}(t) - \psi_1^{m-2}(t) \right] dt \right\}, \\ - - - - - - - - - - - - - - \end{cases}$$

Iz jednačina (41) dobija se

$$\psi_i^{m-1}(t) - \psi_i^{m-2}(t) = b_{i1} \sum_{k=1}^{n} \delta_{1k}(t) \, (x_k^{m-1} - x_k^{m-2}) + \ldots +$$

$$+ b_{in} \sum_{k=1}^{n} \delta_{nk}(t) \, (x_k^{m-1} - x_k^{m-2}).$$

Za $m = 2$, prema (47), imaćemo

$$| \psi^1(t) - \psi_i^0(t) | \leqslant M \, \varepsilon_i \, \delta_i(t).$$

prema tome za $m = 2$ jednačine (48) daju

$$(49)\quad \begin{cases} |z_1^2 - z_1^1| \leqslant M \, \varepsilon_i \, e^{\rho_1 t} \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_1(t) \, dt, \\ |z_2^2 - z_2^1| \leqslant M \, \varepsilon_i \, e^{\rho_1 t} \left[\int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_2(t) \, dt + \int\limits_{t_0}^{t} dt \int\limits_{t_0}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_1(t) dt \right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

a jednačine (48')

$$(49')\quad \begin{cases} |z_1^2 - z_1^1| \leqslant M \, \varepsilon_i \, e^{\rho_1 t} \int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_1(t) \, dt, \\ |z_2^2 - z_2^1| \leqslant M \, \varepsilon_i \, e^{\rho_1 t} \left[\int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_2(t) dt + \int\limits_{\infty}^{t} dt \int\limits_{\infty}^{t} e^{-\rho_1 t} \, \delta_1(t) \, dt \right], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Iz jednačina (49) i (49'), prema (b) i (c) dobija se

$$(50) \qquad |z_i^2 - z_i^1| \leqslant M\,\varepsilon_i\,\eta_i\,(t)$$

gde je

$$\lim_{t\to\infty} \eta_i\,(t) = 0,$$

pod pretpostavkom da integrali (45) konvergiraju u slučaju imaginarnih korena ili jednaki nuli.

Jednačina (46') za $m = 2$, prema (50), daje

$$|x_i^2 - x_i^1 \leqslant M\,\varepsilon_i\,\varepsilon_i\,(t) \leqslant M\,\varepsilon_i^2,$$

gde je

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i\,(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max_{t \geqslant t_0 \geqslant 0} \varepsilon_i\,(t)$$

Produžujući tako dobiće se niz uzastopnih rešenja x_i^m $(m = 1,2,..)$ **koja** zadovoljavaju uslove

$$|x_i^m - x_i^{m-1}| \leqslant M\,\varepsilon_i^{m-1}\,\varepsilon_i\,(t) \leqslant M\,\varepsilon_i^m$$

gde je

$$\lim_{t\to\infty} \varepsilon_i\,(t) = 0, \qquad \varepsilon_i = \max_{t \geqslant t_0 \geqslant 0} \varepsilon_i\,(t)$$

Ako se t_0 izabere dovoljno veliko da je

$$\varepsilon_i = \max_{t \geqslant t_0 \geqslant 0} \varepsilon_i\,(t) < 1,$$

onda red

$$M\,(1 + \varepsilon_i + \varepsilon_i^2 + ..)$$

konvergira. Stoga će redovi

$$(51) \qquad x_i = x_i^0 + \sum_{i=1}^{n} (x_i^m - x_i^{m-1})$$

uniformno konvergirati za sve vrednosti $t \geqslant t_0 \geqslant 0$ gde je t_0 **dovoljno** veliko, i pretstavljati rešenja sistema (24) koja zadovoljavaju uslove

$$(52) \qquad \lim_{t\to\infty} x_i = \lim_{t\to\infty} x_i^0, \qquad (i = 1,2,..,n)$$

Prema tome imamo sledeću teoremu:

Jednačine (24), čiji koeficijenti zadovoljavaju uslove (24'), imaju, za $t \geqslant t_0 \geqslant 0$, t_0 je dovoljno veliko, jedan sistem rešenja x_i pretstavljen redovima **(51)** koji ima osobine (52), gde je x_i^0 sistem ograničenih rešenja jednačina (25), ako za svaki imaginaran koren ili jednak nuli reda *p* konvergiraju integrali **(45)**. Ovaj sistem rešenja zavisiće od onoliko proizvoljnih konstanata koliko karakteristična jednačina (27) **ima realnih** negativnih ili kompleksnih korena sa **real**nim negativnim delom.[1])

---

[1]) U napred pomentum radu ovu sam teoremu malo drugojačije izveo (loco cit.).

Teorema važi i za linearnu jednačinu *n*-toga reda

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = f(t)$$

ako koeficijenti zadovoljavaju uslove

$$\lim_{t \to \infty} a_i = \bar{a}_i, \qquad \lim_{t \to \infty} f(t) = 0.$$

Uzmimo, na primer, sistem jednačina

$$\text{(53)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} - \dfrac{1}{t} x - y = 0, \\ \dfrac{dy}{dt} - x + e^{-t} y = \dfrac{1}{t}, \end{cases}$$

i napišimo ih u obliku

$$\frac{dx}{dt} - y = \frac{1}{t} x,$$

$$\frac{dy}{dt} - x = \frac{1}{t} - e^{-t} y.$$

Potražimo uzastopna rešenja x^m, y^m $(m = 1,2, \ldots)$ sistema

$$\text{(54)} \quad \begin{cases} \dfrac{dx^m}{dt} - y^m = \dfrac{1}{t} x^{m-1} \\ \dfrac{dy^m}{dt} - x^m = \dfrac{1}{t} - e^{-t} y^{m-1}, \end{cases}$$

polazeći od rešenja x^0 i y^0 datih jednačinama (33)[2]. Radi toga izvršićemo smenu

$$u^m = x^m + y^m, \quad v^m = -x^m + y^m$$

ili

$$x^m = \frac{u^m}{2} - \frac{v^m}{2}$$

$$\text{(54')} \qquad y^m = \frac{u^m}{2} + \frac{v^m}{2}$$

i sistem (54) postaje

$$\frac{du^m}{dt} - u^m = \frac{1}{t} + \frac{1}{t} x^{m-1} - e^{-t} y^{m-1},$$

$$\frac{dv^m}{dt} + v^m = \frac{1}{t} - \frac{1}{t} x^{m-1} - e^{-t} y^{m-1},$$

odakle je

$$u^m = e^t \left(\int_{t_0}^{t} \frac{e^{-t}}{t} dt + C_1 \right) + e^t \int_{t_0}^{t} e^{-t} \left(\frac{1}{t} x^{m-1} - e^{-t} y^{m-1} \right) dt$$

---

[2]) Koja smo već našli.

$$v^m = e^{-t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{e^t}{t}\,dt + C_2\right) - e^{-t}\int\limits_{t_0}^{t} e^t\left(\frac{1}{t}\,x^{m-1} + e^{-t}\,y^{m-1}\right)dt.$$

Integrali koji mogu težiti nuli glase

$$u^m = e^t \int\limits_{\infty}^{t} \frac{e^{-t}}{t}\,dt + e^t \int\limits_{\infty}^{t} e^{-t}\left(\frac{1}{t}\,x^{m-1} - e^{-t}\,y^{m-1}\right),$$

$$v^m = e^{-t}\left(\int\limits_{t_0}^{t} \frac{e^t}{t}\,dt + C_2\right) - e^{-t}\int\limits_{t_0}^{t} e^t\left(\frac{1}{t}\,x^{m-1} + e^{-t}\,y^{m-1}\right)dt,$$

ili, prema (34')

$$(55)\qquad \begin{cases} u^m = u^0 + e^t \displaystyle\int\limits_{\infty}^{t} e^{-t}\left(\frac{1}{t}\,x^{m-1} - e^{-t}\,y^{m-1}\right)dt, \\ v^m = v^0 - e^{-t} \displaystyle\int\limits_{t_0}^{t} e^{t}\left(\frac{1}{t}\,x^{m-1} + e^{-t}\,y^{m-1}\right)dt. \end{cases}$$

Polazeći od rešenja x^0, y^0 jednačina (35) odnosno od rešenja u^0, v^0 jednačina (34'), dobiće se uzastopna rešenja u^m, v^m odnosno, prema (54'), uzastopna rešenja x^m, y^m. Tako, na primer, za $m = 1$ jednačine (55) daće

$$u^1 = u^0 + e^t \int\limits_{\infty}^{t} e^{-t}\left(\frac{1}{t}\,x^0 - e^{-t}\,y^0\right)dt,$$

$$v^1 = v^0 - e^{-t} \int\limits_{t_0}^{t} e^{t}\left(\frac{1}{t}\,x^0 + e^{-t}\,y^0\right)dt,$$

gde x^0 i y^0 treba zameniti njihovim rešenjima (35), odakle će se, prema (54') dobiti prve aproksimacije x^1, y^1. Lako je videti da je

$$\lim_{t\to\infty} x^1 = \lim_{t\to\infty} x^0 = 0,$$

$$\lim_{t\to\infty} y^1 = \lim_{t\to\infty} y^0 = 0.$$

Kao što se vidi metoda sukcesivnih aproksimacija ima veliki značaj za asimptotsko rešavanje diferencijalnih jednačina. Pored napred pomenutih jednačina ona se korisno može primeniti i na druge jednačine, no o teme nećemo ovde govoriti.

SUR LES SOLUTIONS ASYMPTOTIQUES DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

PAR T. PÉYOVITCH

Nous appelons la solution asymptotique d'une équation différentielle la valeur de l'intégrale de cette équation, lorsque la variable indépendante augmente indéfiniment, Dans la plus part de cas, il est impossible d'exprimer l'intégrale d'une équation sous la forme explicite, d'ou l'on peut obtenir la solution asymptotique. Pour cela, nous sommes obligés d'étudier les solutions asymptotiques des équations différentielles de la maniere différente. Dans cette conférence nous donnons quelques renseignement pour l'étude des solutions asymptotiques utilisant les séries asymptotiques de Poincaré et la méthode d'approximations succes sives de Picard.

OSNOVI JEDNE METODE U GEOMETRIJI

ŠEFKIJA RALJEVIĆ, SARAJEVO

Autor izlaže sadržaj svoje knjige istog naziva koja je uglavnom završena sa namerom da to posluži kao jedan od novih momenata u diskusiji po pitanjima programa i nastave u našim srednjim školama.

U ovom prikazu on izlaže jednu metodu korišćenja imaginarne jedinice za primene u elementarnoj geometriji i razrađuje je u detaljima.

GENERALIZACIJA LAPLASOVE TEOREME I PRIMENA OVE NA ODREDJIVANJE VREDNOSTI MAKSIMALNOG MODULA DETERMINANTE

MIRKO STOJAKOVIĆ, BEOGRAD

I

Determinanta

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

može se po definiciji napisati u obliku

$$(1) \qquad \Delta_n = \sum (-1)^{P(j_1, j_2, .., j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdot\cdot a_{nj_n},$$

gde je $(j_1, j_2, \dots . j_n)$ neka permutacija brojeva $1, 2, \dots . n$, $P(j_1, j_2, \dots . j_n)$ broj inverzija u toj permutaciji, a zbir se uzima preko svih $n!$ permutacija.

Ako se svaki minor k-toga reda, koji je sadržan u k određenih vrsta (odnosno stubaca), pomnoži svojim komplementarnim minorom $(n—k)$-toga reda, uzimajući ovaj sa znakom $+$ ili $-$ prema tome da li je zbir indeksa elemenata glavne dijagonale minora k-toga reda paran ili neparan, pa ako se svih $\binom{n}{k}$ ovako dobivenih proizvoda sabere, dobiva se, prema Laplasovoj teoremi, determinanta Δ_n. Označimo li, dakle, sa M_{k_ν} jedan od minora k-toga reda i sa M_{n-k_ν} njegov komplementarni minor, biće

$$(2) \qquad \Delta_n = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{k}} M_{k_\nu} \, M_{n-k_\nu} \; (-1)^{\sum\limits_{s=1}^{k} (i_s + j_s)},$$

gde se sabiranje vrši preko svih $\binom{n}{k}$ mogućih izbora k stubaca (odnosno vrsta), a $\Sigma(i_s + j_s)$ je zbir indeksa elemenata glavne dijagonale minora M_{k_ν} medju čijim vrstama i stupcima nema inverzija. Za $k = 1$ iz (2) dobiva se poznato pravilo za razvijanje determinante Δ_n po elementima jedne kolone:

$$(3) \qquad \Delta_n = \sum_{i=1}^{n} (a_{ij} \, M_{ij} \cdot (-1)^{i+j}).$$

Laplasovu teoremu moguće je generalisati na sledeći način.

U determinanti Δ_n uočimo k_1 odredjenih vrsta (u buduće reč „vrsta" može se svuda zameniti rečju „stubac" i obrnuto), medju preteklih $(n-k_1)$ vrsta uočimo daljih k_2 vrsta, itd, medju preteklih $(n-k_1-k_2-\ldots-k_{l-1})$ vrsta uočimo k_l vrsta, čime dobivamo ostatak od $(n-k_1-\ldots-k_{l-1}-k_l)$ vrsta. Ako na prvih k_1 vrsta formiramo minor k_1-toga reda M_{k_1} uzevši za to elemente iz bilo kojih k_1 stubaca, zatim na daljih k_2 vrsta medju preteklim stupcima formiramo minor k_2-toga reda M_{k_2}, itd; pa na isti način formiramo minor k_{l-1}-toga reda $M_{k_{l-1}}$ i k_l-toga reda M_{k_l}, tada na kraju ostaje kao komplementarni minor $(n-k_1-k_2-\ldots-k_{l-1}-k_l)$-toga reda $M_{(n-k_1-\ldots-k_l)}$. Uz ove oznake važi

T e o r e m a: A k o s e m i n o r i M_{k_1}, $M_{k_2}, \ldots, M_{k_l}$, $M_{(n-k_1..k_l)}$ p o m n o ž e i f o r m i r a j u s l i č n i p r o i z v o d i z a s v a k i m o g u ć i i z b o r s t u b a c a n a u o č e n i h $k_1, k_2, k_3, \ldots k_l$ v r s t a, t a d a z b i r s v i h o v i h p r o i z v o d a, u z e t i h s a o z n a k o m $+$ i l i $-$, p r e m a t o m e d a l i j e b r o j i n v e r z i j a m e d j u i n d e k s i m a e l e m e n a t a g l a v n e d i j a g o n a l e m i n o r a $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots M_{k_l}$ p a r a n i l i n e p a r a n, d a j e d e t e r m i n a n t u Δ_n.

Može se, dakle, pisati

$$\Delta_n = \sum_{(k_1, k_2, \ldots k_l)} M_{k_1} M_{k_2} \ldots M_{k_l} M_{n-k_1-k_2-\ldots k_l} \cdot (-1)^{P(k_1, k_2 \ldots k_l)} \tag{4}$$

gde se sabiranje vrši preko svih $\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\ldots\binom{n-k_1-k_2-\ldots k_{l-1}}{k_l}$ mogućih izbora od po $k_1, k_2, k_3, \ldots k_l$ - stubaca izmedju n postojećih. Izraz $P(k_1, k_2 \ldots k_l)$ može se pisati u oblika

$$P(k_1, k_2 \ldots k_l) = \sum_{s=1}^{s=k_1+k_2+\ldots+k_l} (i_s + j_s) + \sum_{s=k_1+1}^{s=k_1+k_2+\ldots+k_l} (\gamma'_s + \gamma''_s), \tag{5}$$

gde je prvi zbir u (5) u stvari zbir indeksa $i_s\, j_s$ elemenata glavne dijagonale minora $M_{k_1}, \ldots, M_{k_l}$, a γ'_s broj koji kazuje koliko brojeva manjih od i_s ima medju prvim indeksima elementa glavne dijagonale prethodnih minora, dok γ''_s ima slično značenje za druge indekse.

D o k a z. Očigledno je najpre da se za $k_1 = 1$, $k_2 = 1, \ldots, k_{l-1} = 1$, $k_l = 1$, $k_1 + k_2 + \ldots + k_l = n - 1$ izraz (4) svodi na (1), za $k_2 = k_3 = \ldots = k_l = 0$, na (2), a za $k_1 = 1$, $k_2 = k_3 = \ldots = k_l = 0$ na (3). Izrazi (1), (2), (3) obuhvaćeni su, dakle, tvrdjenjem (4) kao specijalni slučajevi.

Uzme li se da (1) važi po definiciji, može se minor M_{k_1} napisati kao zbir $k!$ proizvoda od po k elemenata $a_{i_1 j_1}\, a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_{k_1} j_{k_1}}$; minor M_{k_2} može se napisati kao zbir $k_2!$ proizvoda od po k_2 elemenata $a_{i_{k_1+1}\, j_{k_1+1}} \ldots a_{i_{k_1+k_2}\, j_{k_1+k_2}}$ itd; minor M_{k_l} može se napisati kao zbir $k_l!$ proizvoda od po k_l elemenata $a_{i_{k_1+k_2+\ldots k_{l-1}+1}\, j_{k_1+k_2+\ldots+k_{l-1}+1}} \ldots a_{i_{k_1+\ldots+k_l}\, j_{k_1+\ldots+k_l}}$; najzad minor $M_{(n-k_1-\ldots-k_l)}$ može se pisati kao zbir $(n-k_1-k_2-\ldots-k_{l-1}-k_l)!$ proizvoda od po $(n-k_1-\ldots-k_l)$ elemenata $a_{i_{k_1+\ldots k_l+1}\, j_{k_1+\ldots+k_l+1}}\, a_{i_n j_n}$.

Čitav proizvod $M_{k_1} M_{k_2} \dots M_{(n-k_1 \dots k_l)}$ u razvijenom obliku može se, dakle, pisati kao zbir $k_1!\, k_2! \dots k_l!\, (n-k_1-\dots-k_l)!$ proizvoda od po n elemenata $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$.

Drugom nekom izboru minora odgovara isto toliko sabiraka, a kako ima svega

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-k_2-\dots-k_{l-1}}{k_l}$$

mogućih različitih izbora, biće prema (4) ukupno

$$\binom{n}{k_1} \binom{n-k_1}{k_2} \dots \binom{n-k_1-k_2 \dots k_{l-1}}{k_l} \cdot k_1!\, k_2! \dots k_{l-1}! \cdot k_l!\, (n-k_1-\dots k_l)!$$

sabiraka u obliku proizvoda od po n elemenata, to jest tačno $n!$ sabiraka, koliko determinanta Δ_n ima i prema (1). Kako, po samom načinu formiranje minora, medju dobivenim sabircima $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ ne može biti dva sa identičnim redom indeksa (svaki minor uvlači u proizvod indekse koje ne sadrži drugi a unutar jednog istog minora nema jednakih permutacija), to dobivenih $n!$ sabiraka $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ potpuno iscrpljuju sve moguće permutacije indeksa. Izraz (4) daje, dakle, u pogledu broja i vrste sabiraka isto što i (1). Time je dokazan prvi deo teoreme.

Ostaje da se dokaže i važenje tvrđenja (5). U tom cilju odredićemo broj inverzija u permutaciji

$$(6) \quad \begin{pmatrix} i_1 & i_2 \dots i_{k_1} & i_{k_1+1} \dots i_{k_1+k_2} \dots i_{k_1+k_2+\dots k_l} & i_{k_1+k_2+\dots k_l+1} \dots i_n \\ j_1 & j_2 \dots j_{k_1} & j_{k_1+1} \dots j_{k_1+k_2} \dots j_{k_1+k_2+\dots k_l} & j_{k_1+k_2+\dots k_l+1} \dots j_n \end{pmatrix},$$

gde gornji red pretstavlja, uređene po veličini, prve indekse elemenata glavnih dijagonala svih minora M, a drugi to isto za druge indekse. Ovde je, dakle,

$$(6) \quad \begin{cases} i_1 < i_2 < \dots < i_{k_1}, \\ i_{k_1+1} < i_{k_1+2} < \dots < i_{k_1+k_2}, \\ - - - - - - - - \\ i_{k_1+k_2+\dots k_l+1} < \dots < i_n\,; \end{cases}$$

$$(6') \quad \begin{cases} j_1 < j_2 < \dots < j_{k_1}, \\ - - - - - - - \\ j_{k_1+k_2+\dots k_l+1} < \dots < j_n. \end{cases}$$

Posmatrajmo samo prve indekse (6). Indeksi prve grupe od k_1 brojeva $i_1, \dots i_{k_1}$ čine sa sledećim indeksima $i_{k_1+1}, \dots i_n$ ukupno

$$\sum_{s=1}^{k_1} i_s - \binom{k_1+1}{2}$$

inverzija. Indeksi druge grupe od k_2 brojeva $i_{k_1+1}, \dots i_{k_1+k_2}$ čine sa sledećim indeksima $i_{k_1+k_2+1}, \dots i_n$ ukupno

$$\sum_{k_1+1}^{k_1+k_2} (i_s - \gamma_s') - \binom{k_2+1}{2}$$

inverzija, gde, na primer, broj $\gamma'_{k_1+k_2}$ kazuje koliko među indeksima prethodne grupe ima brojeva manjih od $i_{k_1+k_2}$. (Indeksi jedne grupe ne mogu činiti inverzije sa manjim indeksima prethodne grupe). Slično dolazimo do zaključka o broju inverzija koje čine indeksi ostalih grupa; na kraju vidimo da broj inverzija koje čine indeksi $i_{k_1+\dots k_{l-1}+1}, \dots, i_{k_1+k_2+\dots+k_l}$ sa indeksima poslednje grupe iznosi

$$\sum_{k_1+k_1+\dots+k_{l-1}+1}^{k_1+\dots+k_l} (i_s - \gamma_s') - \binom{k_l+1}{2}.$$

Na taj način, celokupni broj inverzija među prvim indeksima izraza (5) iznosi

$$\sum_{1}^{k_1+\dots+k_l} (i_s - \gamma_s') - \binom{k_1+1}{2} - \binom{k_2+1}{2} - \dots - \binom{k_l+1}{2}.$$

Slično se za druge indekse (6') dobiva kao broj inverzija izraz

$$\sum_{1}^{k_1+\dots+k_l} (j_s - \gamma_s'') - \binom{k_1+1}{2} - \binom{k_1+1}{2} - \dots - \binom{k_l+1}{2},$$

gde γ_s'' ima za druge indekse slično značenje kao γ_s' za prve indekse i gde je $\sum_{1}^{k} \gamma_s'$ isto kao i $\sum_{1}^{k_1} \gamma_s''$ jednako nuli (jer prva grupa nema prethodne).

Ukupan broj I inverzija i za prve i za druge indekse izraza (6) biće, dakle,

$$I = \sum_{1}^{k_1+k_2+\dots+k_l} (i_s + j_s - \gamma_s' - \gamma_s'') - 2\left[\binom{k_1+1}{2} + \binom{k_2+1}{2} + \dots + \binom{k_l+1}{2}\right]. \tag{7}$$

Kako je očigledno (upoređivanjem [7] sa [5])

$$I \equiv P(k_1, k_2, \dots k_l) \ mod(2),$$

to odatle sleduje važenje i drugog dela tvrđenja a time je teorema u celosti dokazana.

PRIMER. U determinanti petoga reda

$$(8)\qquad D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 5 & 0 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 2 \end{vmatrix},$$

uzećemo $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ (i prema tome $n - k_1 - k_2 = 2$) i formirati minore drugog reda po prvoj i trećoj vrsti, a minore prvog reda po četvrtoj vrsti (i prema tome dobivati komplementarne minore po drugoj i petoj vrsti). Prema (4) dobićemo:

$$D = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} 1 + \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} \left(4 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right) -$$
$$- \begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 78.$$

II

Pokazaćemo kako se zaključci izvedeni u prethodnom odeljku mogu primeniti za ocenu maksimalne vrednosti modula determinante.

Znamenita teorema Hadamard-a[1] daje mogućnost za procenu maksimalne vrednosti modula determinante na osnovu posmatranja zbira kvadrata elemenata pojedinih kolona determinante.

Prof. T. Pejović je u više svojih radova obrađivao isti problem, kako u opštem slučaju tako i u pojedinim specijalnim slučajevima[2]. Izvesne radove posvetili su ovom pitanju i M. Petrović i J. Karamata[3]. Prof. Bilimović u jednom svom skorašnjem radu[4] uspeo je da pokaže kako je, pod izvesnim uslovima, moguće postaviti niz sve tačnijih uzastopnih maksimalnih vrednosti za moduo date determinante, pri čemu prva vrednost u tom nizu odgovara Hadamard-ovoj teoremi, a poslednja tačnoj vrednosti modula date determinante.

Mi ćemo iz izraza (1), (2) i (4) izvesti nejednačine koje takođe daju vrednost koju moduo date determinante ne može da pređe.

Iz (1) sleduje

$$|\Delta_n| = \left|\sum (-1)^{P(j_1 \cdot\cdot j_n)} a_{1j_1} \cdots a_{nj_n}\right| \leqslant \sum \left|a_{1j_1} \cdot\cdot a_{nj_n}\right|.$$

Ako je, dakle, A_i maksimalni moduo među modulima elemenata i-te vrste, biće

$$(9)\qquad |\Delta_n| < \sum A_1 A_2 \,..\, A_n = n!\, A_1 A_2 \,..\, A_n.$$

Ako s M_k označimo maksimalni moduo medju modulima minora k-toga reda, a sa M_{n-k} maksimalni moduo medju modulima komplementarnih minora, iz (2) izlazi

$$|\Delta_n| = \left|\sum M_{k_\nu} M_{n-k_\nu} (-1)^{\Sigma(i_s + j_s)}\right|,$$

to jest

(10) $\quad |\Delta_n| < \binom{n}{k} M_k M_{n-k}.$

Najzad, ako sa $M_{k_1}, M_{k_2}, \ldots M_{k_l}, M_{n-k_1-k_2-\ldots k_l}$ označimo maksimalne module medju modulima minora k_1-toga, k_2-toga, ... k_l-toga i $(n-k_1-k_2-\ldots k_l)$-toga reda, iz (4) dobiva se

(11) $\quad |\Delta_n| < \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\ldots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{l-1}}{k_l} M_{k_1} M_{k_2} \ldots M_{k_l} M_{n-k_1-\ldots k_l}.$

Izrazi (10) i (11) daju nove mogućnosti za procenu maksimalne vrednosti modula determinante.

Kao primer posmatrajmo determinantu Δ_4 navedenu u pomenutoj raspravi A. Bilimovića.

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Prema Hadamard-ovoj teoremi dobiva se za maksimalni moduo ove determinante

(12) $\quad \Delta_4^2 \leqslant 22500.$

Prema metodi prof. Bilimovića dobiva se (kao druga u nizu vrednosti)

(13) $\quad \Delta_4 \leqslant 2900.$

Prema (10); uzimajući $k=2$, sa minorima kroz prve dve i kroz zadnje dve vrste, izlazi

$$\Delta_4^2 < \left[\binom{4}{2} \cdot 2 \cdot 5\right]^2 = 3600,$$

to jest nešto više nego prema (13) a znatno manje nego prema (12) uz prostije sračunavanje nego u oba ta slučaja.

Uzmimo kao drugi primer determinantu petoga reda, Δ_5, navedenu u knjizi „Einführung in die höhere Mathematik" — Mangoldt-Knopp - I - str. 74:

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 6 & 1 & 7 & 7 \\ 8 & 1 & 2 & 6 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & 7 & 4 \\ 2 & -9 & 3 & 9 & 6 \end{vmatrix} \quad (= 135).$$

Prema Hadamard-ovoj teoremi biće

$$|\Delta_5| = \sqrt{55 \cdot 184 \cdot 130 \cdot 91 \cdot 211} \approx 164\ 400.$$

Prema (11), uzimajući $k_1 = 1$ (prvu vrstu), $k_2 = 2$ (druge dve vrste) i $n-k_1-k_2 = 2$ (poslednje dve vrste), dobivamo $M_{k_1} = 5$, $M_{k_2} = 45$, $M_{n-k_1-k_2} = 36$, te je

$$|\Delta_5| < \binom{5}{1}\binom{4}{2} \cdot 5 \cdot 45 \cdot 36 = 243000,$$

to jest ne bliže ali i ne mnogo dalje od prave vrednosti modula nego prema Hadamard-ovoj teoremi. Prema (10), za $k = 3$, dobiće se već znatno manja vrednost

$$|\Delta_5| < 52360;$$

(minor M_k uzet je na prve tri vrste i prvom, drugom i četvrtom stupcu, minor M_{n-k} na drugom i četvrtom stupcu).

LA GÉNÊRALISATION DU THÉORÈME DE LAPLACE ET SON APPLICATION A LA DETERMINATION DU MAXIMUM DU MODULE DU DÉTERMINANT

PAR M. STOJAKOVIĆ

L'auter généralise de la manière suivante le théorème de Laplace: Si l'on fait le produit des mineurs

$$M_{k_1},\ M_{k_2},\ \ldots\ldots,\ M_{k_1},\ M_{n-k_1-k_2-\ldots-k_1}$$

du déterminat Δ_n et si l'on forme des produits analogues pour chaque choix possible des colonnes sur les k_1, k_2, .., k_1 lignes, alors la somme de tous ces produits, prise avec signe $+$ ou $-$ selon que le nombre d'inversions sur la diagonale principale des mineurs M_{k_1}, M_{k_2}, ..., M_{k_1} est pair ou impair, donne le déterminant Δ_n.

En prenant pour base cette généralisation, l'auteur parvient aux suivantes appréciations du module du déterminant:

$$|\Delta_n| < \binom{n}{k} M_k\ M_{n-k},$$

$$|\Delta_n| < \binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{-11}}{k_1} M_{k_1} M_{k_2}\ldots M_{k_1} M_{n-k_1-k_2-\ldots-k_1}.$$

Literatura

1) Résolution d'une question relative aux déterminants (Bull. des Sciences math. 2e Série, t. XVII, 1893, str. 240. Selects - Jubile scientifique de M. Jacques Hadamard, 1935, str. 136).

2) T. Péyovitch: Contribution a l'étude de la valeur maximum du module d'un déterminant (Journal de math. pures et appliquées, 9e série, Extrait des volumes jubilaires dédiés a M. Jacques Hadamard (1937—1938), str. 349).

3) Glas Srpske Kraljevske Akademije Nauka t. 127, 1927.

4) Anton Bilimović: O maksimalnim vrednostima modula determinante (Glas Srpske Akademije Nauka, prvi razred, t. CLXXXIX, str. 193, Beograd, 1946).

O NEKIM NOVIM REZULTATIMA I JOŠ OTVORENIM PROBLEMIMA NA PODRUČJU SINTETIČNE GEOMETRIJE U OKVIRU PLOHA 3. I 4. REDA

VILKO NIČE, ZAGREB

Od svih tvorevina u sintetičnoj geometriji sigurno su najzanimivije plohe, jer su najbliže našem realnom životu i raznim praktičnim primjenama. U ovom saopćenju osvrnut ćemo se na neke osobite vrste ploha 3. i 4. reda, i to najprije pravčaste, a onda opće. Promatrat ćemo one plohe ovih redova, koje imaju zanimive imaginarne dijelove, radi kojih kod općih ploha njihove realne forme poprimaju zanimiv izgled. Kod pravčastih ploha omogućit će nam ti imaginarni dijelovi jednostavno preslikavanje na ravnim i pojednostavit će nam njihovu konstruktivnu obradbu.

Pravčaste plohe 3. reda mogu se definirati kao presjek (ili prodor) jedne kongruencije 1. reda 2. razreda i kompleksa svih pravaca, koji sijeku neki pravac. Analogno se tako mogu definirati i pravčaste plohe 4. reda. Praktički možemo pravčaste plohe 3. reda izvesti i ovako: Zadamo li si u prostoru neku krivulju 2. reda i dva pravca l, d po volji tako, da jedan od njih (d) siječe tu krivulju, onda svi pravci, koji sijeku ta dva pravca i ovu krivulju, čine pravčastu plohu 3. reda. Pravac l može probadati ravnim ove krivulje unutar nje, izvan nje, a može pasti i u pravac d, pa prema tome dobivamo tri vrste takvih ploha. Plohe one treće vrste zovu su Cayleyeve. Ako pravac l probada ravninu krivulje 2. reda izvan te krivulje, a takvim plohama ćemo se ovdje pozabaviti, moći ćemo tim pravcem postaviti na tu krivulju dvije tangencijalne ravnine (torzalne ravnine plohe), koje pravac d sijeku u dvima točkama K_1, K_2, koje se zovu kuspidalne točke. Unutar tih dviju ravnina nalaze s sve realne izvodnice ovakve plohe, koje se u parovima sijeku na pravcu d (dvostruki pravac plohe) duž jednog od dvaju dijelova između točaka K_1, K_2. U torzalnim ravninama stežu se po dvije izvodnice u jednu, a takve se dvoznačne izvodnice zovu torzalni pravci. Na drugom dijelu (izoliranom) dvostrukog pravca između točaka K_1, K_2 sijeku se imaginarni parovi izvodnica te plohe. Kod ploha ove vrste postavljen je ovaj problem: Postoje li unutar parova imaginarnih izvodnica izotropni parovi takvih izvodnica? Realne sjecišta ovakvih izotropnih parova nazvali smo radi analogije kružnim točkama. Pobudu za ova istraživanja dao je Plückerov konoid. Kod Plückerova se konoida naime znade, da se svi čunjosjeci toga konoida projiciraju u smjeru dvostrukog pravca, na jednu direkcionu ravninu, u kružnice. Preslikavanje na ravninu, kao i razne konstruktivne zadaće na njemu, su time veoma pojednostavnjene. Sjecište parova izotropnih izvodnica na pravčastim plohama 3. reda i 4. reda, ako i kada postoje, poslužila bi nam posve analogno kao neizmjerno daleka točka dvostrukog pravca kod Plückerova konoida. Razmatranjem tih ploha došlo se je do ovih rezultata:

a) Pravčaste plohe 3. reda ne mogu imati više od dvije kružne točke.
b) Kružne točke mogu postojati samo na onim pravčastim plohama 3. reda, kod kojih je udaljenost dvostrukog pravca od centralne točke hiperbolne involucije ne jednostrukom pravcu manja od udaljenosti te točke do realnih dvostrukih točaka te involucije.

Parovi realnih izvodnica ovakve plohe sijeku jednostruki pravac u hiperbolnoj involuciji, kojoj su dvostruke točke sjecišta s torzalnim pravcima.

c) Nuždan i dovoljan uvjet za postojanje nijedne, jedne ili dviju kružnih točaka na pravčastoj plohi 3. reda je taj, da se u svesku ravnina one izvodnice te plohe, koja je paralelna s njenin jednostrukim pravcem, nalazi nijedna, jedna ili dvije ravnine, koje tu plohu sijeku u kružnici.

d) Kod konoida 3. reda može postojati samo jedna kružna točka, a nuždan i dovoljan uvjet za njeno postojanje je taj, da su mu torzalni pravci realni i jedan na drugom okomiti.

Kod pravčastih ploha 4. reda je problem kružnih točaka daleko zamršeniji nego kod onih 3. reda. Dok kod pravčastih ploha 3. reda imamo u glavnom samo tri vrste, kod takvih ploha 4. reda imamo prema razdiobi R. Sturma 12 vrsta, a svaka ova vrsta mogla bi se i dalje razdijeliti na podvrste. Pravčaste plohe 4. reda uopće ne mogu imati više od 4 kružne točke, a ako takva ploha ima dvostruki pravac ne mogu na njemu biti više od dvije. U vezi s kružnim točkama kod raznih vrsta otvoreno je na pravčastim plohama 4. reda široko polje za rad.

Opće plohe 3. reda mogu se dobiti na više raznih načina. Najpoznatiji su načini J. Steinera, H. Grassmanna, J. Majcena i drugih. Pokazalo se međutim, da se takve plohe mogu dobiti i ovako: Zadajmo si dvije linearne kongruencije i jednu točku *S*. U svakoj ravnini točke *S* nalazi se po jedna zraka svake ove kongruencije, dakle i njihovo sječište. Gibljemo li ravninu neprekinuto oko točke *S*, tad će u njoj nastalo sjecište opisivati neku opću plohu 3. reda. Ako su obje kongruencije hiperbolne, onda su njihove ravnalice (4 pravca), obje zajedničke zrake tih kongruencija (2 pravca), kao i obje zrake tih kongruencija koje prolaze točkom *S* (2 pravca), pravci ovakve opće plohe. 3. reda. Vrlo jednostavno može se naći i preostalih 19 pravaca te plohe. Ako između hiperboličnih i eliptičnih kongruencija kombiniramo po dvije, uzevši u obzir i realnost, odnosno imaginarnost, para zajedničkih zraka tih dviju kongruencija, dobit ćemo sve četiri jednodjelne opće plohe 3. reda bez singulariteta. Ovim se načinom ne može izvesti peta, dvodjelna vrsta općih ploha 3. reda, kao što je to slučaj i kod H. Grassmannovog načina. Kombiniramo li hiperbolične i parabolične kongruencije u parovima tako, da im se ravnalice sijeku, dobit ćemo opće plohe 3. reda sa singularnim (dvostrukim) točkama. Kod razvrstavanja općih ploha 3. reda poslužio se je F. Klein općom plohom 3. reda s 4 dvostruke točke, koje čine vrhove pravilnog tetraedra, a kojemu su bridovi četveroznačni pravci te plohe. Uz pomoć naših razmatranja može se ova Kleinova ploha definirati i ovako:

Uzmemo li dva para produženih nasuprotnih bridova pravilnog tetraedra kao stranice vitoperog četverokuta, koji siječemo ravninama neke točke *S*, onda sječišta spojnica probodišta nasuprotnih stranica tog vitoperog četverokuta leže na Kleinovoj plohi 3 reda. Vrhovi tog tetraedra su dvostruke točke, a produženi bridovi su joj četveroznačni pravci. Transverzale nasuprotnih stranica tog četverokuta, koje prolaze točkom *S*, kao i transverzala dijagonala tog četverokuta (preostala dva brida tetraedra), koja leži u ravnini prvih dviju, su jednoznačni pravci te plohe.

Pomoću ovakvih razmatranja dobiven je i ovaj stavak o Plükerovu konoidu:

Siječemo li ravninama neke točke S Plükerov konoid i sve te presjeke projiciramo u smjeru dvostrukog pravca na jednu direkcionu ravninu, dobit ćemo na ovoj ∞^2 cirkularnih krivulje 3. reda roda nultoga, kojih 4-struki fokusi pokrivaju čitavu tu ravninu. One točke u ravninama tih presjeka, koje se projiciraju u 4-struke fokuse njihovih projekcija, čine neku opću plohu 3. reda, koja prolazi neizmjerno dalekim parom izotropnih izvodnica i jednostrukim pravcem tog konoida u neizmjernosti. Neizmjerno daleke točka dvostrukog pravca tog konoida je dvostruka točka te plohe.

Nema sumnje, da bi bilo zanimivo potanje istražiti ovakvu plohu. Ova je ploha vezana uz neizmjerno daleki par izotropnih izvodnica ovog konoida. Takvu plohu daje međutim svaki imaginaran i realan par ne samo Plükerova konoida, nego i svake druge pravčaste plohe 3. ili 4. reda. Zanimivo bi bilo istražiti i pojedine plohe i čitav pramen takvih općih ploha 3. reda, vezanih uz neku pravčastu plohu 3. ili 4. reda.

Kao što se između svih ploha 2. reda kugla ističe kao njihov specijalan slučaj, tj. ona ploha 2. reda koja prolazi apsolutnim čunjosjekom, tako i među općim plohama 3. i 4. reda postoje vrste, koje prolaze apsolutnim čunjosjekom. Posveopćimo li običnu inverziju na kugli tako, da centar inverzije maknemo iz njenog središta, tada će ovakva kvadratna transformacija svaku drugu kuglu pretvoriti u opću plohu 4. reda, na kojoj će biti čitava prodorna krivulja obiju kugala. Ako je centar inverzije na kugli koju invertiramo, onda je nastala ploha 3. reda (degeneracija u plohu 3. reda i ravninu). Ovako nastale plohe imaju u centru inverzije dvostruku točku, a one 4. reda i dvostruku kružnicu, a sve prolaze apsolutnim čunjosjekom. Svi ravninski presjeci takvih ploha bit će cirkularne krivulje. Zanimivo bi bilo istražiti geometrijsko mjesto četverostrukih fokusa svih ravninskih presjeka s ravninama jedne točke. Četverostruki fokusi ravninskih presjeka kroz dvostruku točku ležat će, čini se, na nekoj općoj plohi 5. reda. Istraživanja ovakvih ploha daju također široko polje za rad.

Ovako izvedene plohe 3. i 4. reda nisu međutim posve analogne kugli, jer tangencijalne ravnine tih ploha duž apsolutnog čunjosjeka ne omataju imaginaran stožas 2. reda s realnim vrhom, kao što je to kod kugle. Postoje međutim opće plohe 3. i 4. reda, koje imaju i ovu bitnu karakteristiku kugle. Proširimo li poznati postupak, kojim u ravnini dobivamo cisoidu pomoću jedne točke S, pravca i neke kružnice, tako, da pravac i kružnicu pretvorimo u neku ravninu i kuglu sa središtem O, dobit ćemo takvu prostornu transformaciju, koja neizmjerno daleke elemente ostavlja invarijantnima. Dakle tangencijalan stožac kugle duž apsolutnog čunjosjeka ostaje invarijantan, a prema tome i realan vrh O tog stošca. Ovako dobivene plohe bit će 3. ili 4. reda (kugle 3. i 4. reda) prema tome, jeli točka S na kugli ili nije. Ovakve plohe imaju posve analogne osobine s kuglom, obzirom na njene cirkularne presjeke. Četverostruki fokusi ravninskih presjeka ovakvih ploha bit će uvijek u okomitoj projekciji središta O na ravninu presjeka. Ova činjenica daje nam dalje cio niz zanimivih osobina takvih ploha. Zanimivo bi bilo potanje istražiti ovakve plohe, naročito njihove kružne točke, pa geodetske i druge krivulje.

Sve ovako dobivene plohe 3. i 4. reda imaju jednu dvostruku točku. Mogu se međutim dobiti ovakve plohe (kugle) 3. reda i bez singulariteta, i to kao produkt svežnja kugala i snopa pravaca jedne točke. Ovim putem dobivaju se obje vrste općih ploha 3. reda s tri realna pravca bez singulariteta, tj. dvodjelna i jednodjelna takva ploha. Realan vrh imaginarnog tangencijalnog stošca 2. reda duž apsolutnog čunjosjeka na tim plohama, nalazi se na površini tih ploha. Potanje istraživanje i ovakvih ploha, dalo bi bez sumnje zanimive rezultate.

ÜBER EINIGE NEUE RESULTATE UND NOCH OFFENE PROBLEME AUS DEM GEBIETE DER SYNTHETISCHEN GEOMETRIE IM RAHMEN DER FLÄCHEN 3. UND 4. ORDNUNG

VON V. NIČE

Diese Mitteilung betrifft zunächst die Regelflächen 3. und 4. Ordnung und des weiteren gewisse algemeine Flächen derselben Ordnung. Wir beschränken uns auf jene allgemeinen Flächen, die interessante imaginäre Teile haben, derentwegen die reelen Teile bemerkenswerte äussere Formen annehmen. Bei den Regelflächen ermöglichen diese imaginären Teile einfache Abbildungen auf die Ebene und dadurch Vereinfachungen in der konstruktiven Behandlung dieser Flächen.

Auf einer der drei Arten von Regelflächen 3. Ordnung gibt es bekantlich imaginäre Erzeugende. Unsere Betrachtungen streben danach, solche Flächen zu entdecken, die Paare isotroper Erzeugender besitzen, und worin sich solche Flächen von den übrigen unterscheiden. Als markanteste solche Fläche erwies sich das Plückersche Konoid. Die Betrachtung dieser Flächen führte zu Resultaten, die von den Möglichkeiten und von den notwendigen und hinreichenden Bedingungen für das Bestehen solcher „Nabelpunkte" handeln.

Bei den Regelflächen 4. Ordnung ist das Problem der Nabelpunkte komplizierter als bei denen 3. Ordnung, und das Problem der Nabelpunkte auf den verschiedenen Arten solcher Flächen bedeutet ein weites Feld weiterer Untersuchungen.

Die allgemeinen Flächen 3. Ordnung können auf verschiedene Weise erhalten werden.

Am bekanntesten sind die Verfahren J. Steiner, H. Grassmann, J. Majcen u. a.

Es zeigte sich jedoch, dass man solche Flächen auch auf folgende Art erhält: Es seien zwei lineare Kongruenzen und ein Punkt S gegeben. In jeder Ebene durch den Punkt S befindet sich ein Strahl dieser Kongruenzen, also auch deren Schnittpunkt. Bewegt sich die Ebene stetig um den Punkt S, so wird dieser Schnittpunkt eine allgemeine Fläche 3. Ordnug beschreiben. Fasst man von den hyperbolischen und elliptischen Kongruenzen je zwei zusammen, wobei zu berücksichtigen ist, ob das Paar gemeinsamer

Strahlen dieser zwei Kongruenzen reel oder imaginär ist, so erhält man alle vier einteiligen allgemeinen Flächen 3. Ordnung ohne Singularitäten. Auf diese Weise lässt sich jedoch nicht die fünfte, zweiteilige Art allgemeiner Flächen 3. Ordnung erzeugen, wie das auch beim Grassmanschen Verfahren der Fall ist. Kombiniert man hyperbolische und parabolische Kongruenzen paarweise, so zwar, dass sich die Leitgeraden schneiden, so erhält man allgemeine Flächen 3. Ordnung mit singulären Punkten (Doppelpunkten). Bei der Klassifizierung der allgemeinen Flächen 3. Ordnung benützte F. Klein die allgemeine Fläche 3. Ordnung mit 4 Doppelpunkten, die die Ecken eines regelmässigen Tetraeders bilden dessen Kanten die vierdeutigen Geraden der Fläche sind. Mit Hilfe unserer Betrachtungen lässt sich diese Kleinsche Fläche sehr einfach definieren. Weiter wurde es mögiich auch folgenden Satz über das Plückersche Konoid erhalten:

Schneidet man ein Plückersches Konoid mit den Ebenen eines Punktes S und projiziert man die Schnittkurven in der Richtung der Doppelgeraden auf eine Direktionsebene, so erhält man in dieser ∞^2 zirkulärer Kurven 3. Ordnung vom Geschlecht Null, deren vierfache Brennpunkte die ganze Ebene überdecken. Jene Punkte in den Schnittebenen, die sich in die vierfachen Brennpunkte der Projektionen der betreffenden Schnitte projizieren, bilden eine allgemeine Fläche 3. Ordnung, die durch das unendlich ferne Paar isotroper Erzeugender und durch die unendlich ferne einfache Gerade des Konoids geht.

Die Fläche ist an das unendlich ferne Paar isotroper Erzeugender des Konoids gebunden. Eine solche Fläche liefert jedoch jedes reelle und imaginäre Paar nicht nur des Plückerschen Konoids, sondern auch jeder anderen Regelfläche 3. oder 4. Ordnung. Es wäre von Interesse sowohl die einzelnen Flächen, als auch den ganzen Büschel solcher allgemeiner Flächen 3. Ordnung zu untersuchen, die an die Erzeugendenpaare einer Regelfläche 3. oder 4. Ordnung und einen Punkt S gebunden sind.

Ebenso wie sich unter allen Flächen zweiter Ordnung die Kugel als besonderer Fall hervorhebt, so bestehen auch unter den allgemeinen Flächen 3. und 4. Ordnung Arten, die durch den absoluten Kegelschnitt gehen. Mittels der bekannten verallgemeinerten Inversion an einer Kugel, wird jede andere Kugel in eine allgemeine solche Fläche 4. oder 3. Ordnung verwandelt. Ist das Inversionszentrum auf der Kugel, die invertiert wird, so ist die erhaltene Fläche bekanntlich 3. Ordnung. Es währe interessant den geometrischen Ort der vierfachen Brennpunkte aller ebenen Schnitte mit den Ebenen eines Punktes zu untersuchen. Die vierfachen Brennpunkte der ebenen Schnitte durch den Doppelpunkt dürften auf einer allgemeinen Fläche 5. Ordnung liegen.

Die derart erhaltenen Flächen 3. und. 4. Ordnung sind jedoch der Kugel nicht völlig analog, da die Berüchrungsebenen dieser Flächen längs des absoluten Kegelschnittes keinen imaginären Kegel 2. Ordnung mit reeller Spitze umhüllen, wie das bei der Kugel der Fall ist. Es gibt jedoch auch allgemeine Flächen 3. und 4. Ordnug, die auch diese wesentliche Charakteristik der Kugel besitzen. Erweitert man das bekante Verfahren, nach dem man aus einem Kreise eine Zissoide erhält, so zwar, dass die Gerade und der Kreis durch eine Ebene und eine Kugel mit dem Mittelpunkt O ersetzt werden, so erhält man eine räumliche Transformation, die die unendlich fernen Elemente invariant lässt. Auch der Berührungskegel der Kugel längs des absoluten Kegelschnittes bleibt also invariant und dadurch auch die reelle Spitze O dieses Kegels. Solche Flächen haben bezüglich ihrer zirkulären Schnitte der Kugel analoge Eigenschaften.

Alle derart erhaltenen Flächen 3. und 4. Ordnung haben einen Doppelpunkt. Man kann jedoch solche Flächen 3. Ordnung auch ohne Singularitäten herstellen, und zwar als Erzeugnis eines Kugelbündels und eines Geradenbündels. Auf diesem Wege erhält man beide Arten allgemeiner Flächen 3. Ordnung mit drei reellen Geraden ohne Singularitäten. Die reelle Spitze des imaginären Berührungskegels längs des absoluten Kegelschnittes auf diesen Flächen befindet sich auf diesen Flächen selbst. Die nähere Untersuchung solcher Flächen ergäbe zweifellos interessante Resultate.

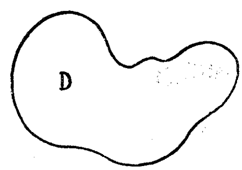
O RAZLIKOVANJU TIPA RIMANOVIH POVRŠI

M. RADOJČIĆ

1. Reč je o uniformnim analitičkim funkcijama $f(z) = w$ kompleksne promenljive z. Oblast postojanja takve funkcije je makakva oblast D u w-ravni. Funkcija je u D analitička, sem u konačnom ili beskonačnom mnoštvu polova koji se nalaze u D. Ako je $f(z)$ racionalna funkcija, oblast D je zatvorena i sastoji se iz cele w-ravni, uključivši $z = \infty$. Kako naš problem nastaje tek ako funkcija ima i esencijalnih singularnih tačaka, pretpostavljamo da je oblast D o t v o r e n a, dakle da ima rub.

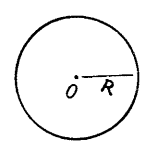
Ma da nema načelnih teškoća za posmatranje opštijih oblika, pretpostavićemo radi veće jednostavnosti da je otvorena oblast D j e d n o s t a v n o p o v e z a n a, da se njen rub sastoji iz samo jednog komada (sl. 1).

Prema jednom od osnovnih stavova o konformnom preslikavanju, svaka otvorena jednostavno povezana oblast može se preslikati obostrano jednoznačno i konformno na unutrašnjost jednog kruga S ili na celu konačnu ravan. Dakle možemo odmah pretpostaviti da je oblast postojanja funkcije $f(z)$ kružna oblast $|z| < R$, gde je R konačno ili beskonačno (sl. 2). Ako je $R = \infty$ oblast postojanja sastoji se iz cele konačne ravni i $f(z)$ je meromorfna funkcija; to je, opšte uzevši, onda kad se rub oblasti D sastoji iz samo jedne, koje bilo tačke.



Slika 1

2. Inversna funkcija $\varphi(w) = z$ je opšte gledano, multiformna i u pojedinim tačkama w ima beskrajno mnogo raznih vrednosti; ona može imati beskrajno mnogo algebarskih i transcendentnih kritičkih tačaka. Da bi se jasnije sagledale multiformne funkcije, traže se površi na kojima bi one bile uniformne; to su Rimanove površi. Da bi svi slušaoci mogli s tim pojmom vezati pretstavu, dodaću koju reč objašnjenja.



Slika 2

Npr. za funkciju $w^{\frac{1}{3}}$ je $w = 0$ algebarska kritička tačka trećeg reda. Pođemo li iz neke tačke $w_1 \neq 0$ sa jednom od tri vrednosti funkcije i obilazimo li oko kritičke tačke u jednom od dva smera, vratićemo se početnoj vrednosti tek pošto obiđemo triput. Zamislimo sad površ koja nastaje kad se poluprava s ishodištem iznad tačke $w = 0$ obrće oko tog svog ishodišta, recimo u pozitivnom smeru, udaljujući se pri tome sve više od w-ravni, ali ostajući spram te ravni uporedna. Nastaće izvesna zavojna površ. Dopustićemo da ona prekrije w-ravan tačno triput, a zatim da se poluprava vrati u svoj početni položaj. Ovo poslednje moguće je samo tako što će se poluprava naposletku spuštati a površ sebe samu preseći dvaput. No o tom presecanju ne vodimo računa, niti o udaljivanju Rimanove površi od w-ravni, već naprotiv zamišljamo da se ona sastoji iz tri r a v n a l i s t a, proizvoljno bliska w-ravni i među sobom, i koja kao tri sloja pokrivaju w-ravan.

To je jedan od najprostijih primera. Rimanske površi mogu biti raznovrsne i složene i sastojati se iz bezbroj listova koji se prostiru nad celom ω-ravni i leže jedan na drugom kao listovi zatvorene knjige, a izmenjuju se pri obilaženju oko pojedinih kritičkih tačaka. Tačke na površi, kojima odgovaraju kritičke tačke u w-ravni i oko kojih se listovi izmenjuju ili granaju nazivamo tačkama grananja. Funkcije $w^{\frac{1}{3}}$ i $\lg w$ npr., imaju po dve tačke grananja, jednu sa $w = 0$, drugu za $w = \infty$. Za opštu funkciju $\varphi(w)$ imaćemo tako vrlo opštu vrstu rimanskih površi, s beskrajno mnogo listova i tačaka grananja. Analitička funkcija $f(z)$ a isto tako i njena inversna $\varphi(w)$, vrši uzajamno jednoznačno konformno preslikavanje unutrašnjosti kruga C na odgovarajuću Rimanovu površ. Ta površ je prema tome, takođe, jednostavno povezana i otvorena. Pretpostavićemo i da je neograničena [1] i da se njen rub sastoji samo iz transcendentnih tačaka grananja (algebarske tačke grananja smatramo unutarnjim tačkama rimanske površi).

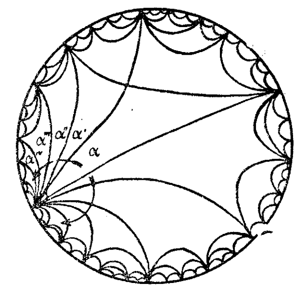
Označimo slovom S rimansku površ funkcije $\varphi(w)$, koja tu površ preslikava konformno na unutrašnjost kruga C konačnog ili beskonačnog poluprečnika R. Kad će se dogoditi jedno a kada drugo nije lako zaključiti iz oblika površi S. U tome se upravo sastoji tzv. problem tipa Rimanovih površi. Ako površi odgovara konačan krug C kažemo da je njen tip hiperbolan; ako li beskonačan krug, nazivamo tip parabolnim, a tada je funkcija $f(z)$ meromorfna. (Elipsni tip pripada zatvorenim rimanskim površima i ne čini u tom smislu teškoćaj.

Na desetak godina pre drugog svetskog rata počeo se zanimati „problemom tipa“ izvestan broj matematičara, od kojih su se istakli npr. Nevanlinna, Ahlfors, Ullrich, Kobayashi ([2] do [5]). Traži se u stvari kriterij kojim bi se razlikovao parabolni od hiperbolnog tipa površi.

3. Namera mi je da iznesem u što razumljivijem obliku dva kriterija za parabolni tip rimanskih površi S, a čiji karakter je topološki, tj. iz samih topoloških svojstava površi S zaključujemo o njenom tipu. U prvom je reč o onim funkcijama $\varphi(w)$ i površima S, kojima su kritičke tačke, odn. tačke grananja, sve transcendentne, izuzev možda konačnog broja tačaka grananja, koje mogu biti algebarske. U drugom kriteriju reč je o površima S kojima su tačke grananja naprotiv sve algebarske.

No da bismo se lakše snalazili u spletu listova površi S bolje je posmatrati umesto samu tu površ, one oblasti koje u krugu C odgovaraju pojedinim njenim listovima. Zamišljamo da je površ podeljena na listove; svaki pokriva w-ravan jedanput. Svakom listu odgovara izvesna oblast u krugu C, tzv. osnovna oblast [6]; dvama susednim listovima odgovaraju dve susedne osnovne oblasti, a ukupnosti svih listova, tj. celoj površi S, odgovara beskrajno mnogo osnovnih oblasti, koje ispunjavaju krug C. Kako nas zanimaju samo topološke okolnosti, nije nam potrebno izgraditi konformno tačnu sliku konfiguracije tih oblasti. Zamislićemo dakle da je pred nama ma kakva topološka, tj. obostrano neprekidna slika sistema listova površi S. Tada nam konfiguracija osnovnih oblasti u ravni daje topološki model konfiguracije listova (sl. 3 i 4).

4. Pretpostavimo dakle prvo da su tačke grananja sve, sem možda konačnog broja, transcendentne. Odgovaraju im tačke na krugu C, jer unutarnjim tačkama kruga odgovaraju, obratno, samo regularne tačke i algebarske tačke grananja. Dakle, sad se osnovne oblasti odlikuju krivolinijskim uglovima, kao što je npr. ugao α (sl. 3), čija temena su tačke na C. Takve uglove smo nazvali transcendentnim uglovima [7]. Svakom temenu transcendentnog ugla odgovara neka transcendentna tačka grananja površi S.



Slika 3

No takvi uglovi ne javljaju se usamljeno. Obilazimo li na površi oko jedne transcendentne tačke grananja, prolazimo kroz niz susednih uglova $\alpha, \alpha', \alpha'' \ldots$, koji je beskrajan u oba smera. Ukupnost svih takvih susednih transcendentnih uglova nazivam, ukratko, transcendentnim pramenom. Zanimljivo je da sam skup transcendentnih pramenova može u vrlo opštim slučajevima odlučiti o tipu rimanske površi. Pred nama je dakle čisto topološki kriterij. Treba samo uočiti mnoštvo transcendentnih pramenova u njegovu cikličnom rasporedu duž kruga C.

U teoriji poređanih mnoštava pominju se izolovani elementi tih mnoštava. To su elementi koji imaju i ispred i iza sebe po jedan najbliži, susedni element. Napomenimo da skup transcendentnih pramenova može biti beskrajan i nemati uopšte izolovanih elemenata; tada je skup „gust“.

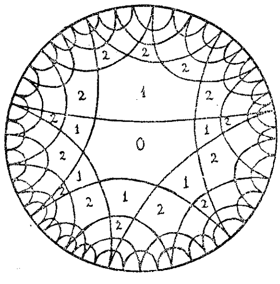
No pretpostavimo da skup transcendentnih pramenova ima izolovanih elemenata. Ako takvom skupu oduzmemo sve izolovane elemente, preostaje u opštem slučaju deo tog skupa, koji može sad opet imati izolovanih elemenata. Ako li ovom skupu, ponovo, oduzmemo njegove izolovane elemente, nastaće još uži skup, kome opet možemo oduzeti sve izolovane elemente itd.... Dogodi li se konačnim ponavljanjem tog postupka da se najzad ponište svi elementi uočenog poređanog skupa, tj. da se taj skup isprazni, kažemo, kao što je poznato, da je skup svodljiv ili reduktibilan. Svodljivi skupovi sačinjavaju vrlo široku vrstu.

Sad možemo izreći kriterij koji imamo u vidu [8]:

Ako je poređani skup transcendentnih pramenova svodljiv, Rimanova površ S je paraboľnog tipa.

O opštosti ovog stava slutićemo ako se opomenemo da za funkciju e^z postoje samo dva pramena (tj. Rimanova površ funkcije $log\ w$ ima samo dve transcendentne tačke grananja), za $e^{(z^n)}$ ima $2n$ pramenova, a za $e^{(e^z)}$ beskonačno mnogo pramenova s jedinim graničnim pramenom; ovo su pak najprostiji slučaji svodljivih skupova.

5. Ako površ S ima samo algebarskih tačaka grananja, može se tak[illegible] kriterij topološke prirode, no pri tome ne možemo voditi raču[illegible]dnom linearno poređanom skupu u vezi s rasporedom listova površi, [illegible]rethodnom posmatranju, već moramo posmatrati kako se množe listovi ili odgovarajuće osnovne oblasti u krugu C kad se postupno približujemo kružnoj liniji C. Pri tome pripada osnovna uloga pojmu generacije listova ili osnovnih oblasti [9].



Slika 4

Posmatrajmo to na topološkoj slici konfiguracije osnovnih oblasti. Sad nijedna oblast ne dopire do kružne linije (sl. 4). Tačkama u kojima se sastaju tri ili više osnovnih oblasti odgovaraju algebarske tačke grananja čiji je red veći od dva. Pođimo od koje bilo osnovne oblasti i nazovimo je nultom generacijom (u sl. 4 obeleženo znakom *O*). Ukupnost oblasti koje s nultom generacijom imaju zajedničku među nazovimo prvom generacijom (u sl. oblasti sa znakom 1); skup daljih oblasti, koje imaju zajedničke međe s prvom generacijom nazovimo drugom generacijom (u sl. oblasti 2) itd.... Tim načinom nastaje beskrajan niz generacija, bilo osnovnih oblasti, bilo odgovarajućih listova površi S. Neka je $S(n)$ broj oblasti (ili listova) u n-toj generaciji.

Možemo izreći sledeći kriterij, no u kome dolazi do izraza još i zbliženost tačaka grananja i njihov red grananja. Pretpostavićemo naime da su tačke grananja površi S reda ne većeg od izvesnog celog broja p i da postoji pozitivna donja brana ε za međusobne udaljenosti tačaka grananja, merene na površi i to sfernom merom (tj. na Rimanovoj sferi). Tada kriterij glasi [10]:

Ako red

$$(1) \qquad \sum_{\nu}^{\infty} \frac{\nu}{\delta(0)+\delta(1)+\delta(2)+\ldots+\delta(m_{\nu})}$$

diverguje, Rimanova površ S je parabolnog tipa.

Pri tome je

$$(2) \qquad m_{\nu} = \nu\left[\frac{p}{2}\right] + (\nu+1)\,P,\quad P + 6p + (6p)^2 + \ldots + (6p)\left[\frac{10\pi}{\varepsilon}\right]$$

Vidimo da će do divergovanja doći tim pre što brojevi m_{ν} sporije rastu, dakle što je broj p manji a ε veći. To znači: da bi tip bio parabolan treba da red tačaka grananja bude dovoljno nizak i da se te tačke ne zbijaju suviše. To je sasvim razumljivo.

U „problemu tipa“, kojim se izvesni matematičari u svetu zanimaju besumnje i danas, dolazi do izraza u stvari jedno od osnovnih pitanja konformnog preslikavanja i središnih pitanja teorije analitičkih funkcija, naime problem ponašanja konformnog preslikavanja na rubovima oblasti. Kad nije reč samo o preslikavanju ravnih oblasti, već makakvih, opštih rimanskih površi na delove ravni, pitanje da li je rimanska površ parabolna ili hiperbolna, je u stvari odgovarajući oblik toga osnovnog problema.

* * *

Literatura

[1] M. Radojčić, O razdeobi Rimanovih površina na listove, Glas S. K. A., Beograd 1929; O jednoj vrsti deobe Rimanovih površina na listove, ibid. 1931; Sur les fonctions inverses des fonctions méromorphes, Comptes rendus de l'Acad. des sc., t. 189, Paris 1929.

[2] R. Nevanlinna, Über Riemannsche Flächen mit endlich vielen Windungspunkten, Acta math., t. 58, 1932; etc.

[3] L. Ahlfors, Zur Bestimmung des Typus einer Riemannschen Fläche, Comment. Math. Helv., 3, 1931; Sur le type d'une surface de Riemann, Comptes rendus, t. 201, Paris 1935; etc.

[4] E. Ullrich, Über ein Problem von Herrn Speiser, Comment. math. helv., 7, 1934; etc.

[5] Z. Kobayashi, Theorems on the conformal representation of Riemann surfaces, Sci. Rep. Tokyo Bunr. Dai. 2, 1935; On the type of Riemann surfaces, ibid. 2, 1935; A remark on the type of Riemann surfaces. ibid. 3, 1937.

[6] M. Radojčić, Sur les domaines fondamentaux des fonctions méromorphes, Comptes rendus, t. 190, 1930.

[7] M. Radojčić, Sur les domaines fondamentaux des fonctions analitiques au voisinage d'une singularité essentielle, Publ. math. Univ. de Belgrade, t. 4, 1935.

[8] M. Radojčić, O skupu transcendentnih snopova u blizini nekog esencijalnog singulariteta analitičke funkcije, Glas, 175, Beograd 1937.

[9] A. Speiser, Probleme aus dem Gebiet der ganzen transcendenten Funktionen, Comment. math. helv., 1. 1929; Über Riemannsche Flächen, ibid. 2, 1930.

[10] M. Radojčić, Certains critéres concernant le type des surfaces de Riemann á points de ramification algébriques, Publ. de l'Inst. math., t. 3, Belgrade [u štampi].

* * *

SUR LE DISCERNEMENT DES TYPES DES SURFACES DE RIEMANN

PAR M. RADOJČIĆ

Exposition élémentaire des deux critères suivants, obtenus par l'auteur, concernant le type d'une surface de Riemann ouverte et simplement connexe, divisée en feuillets:

1. Lorsque l'ensemble ordonné des faisceaux transcendants est reductible, la surface de Riemann est du type parabolique (voir [8]).

2. Lorsque les points de ramification de la surface de Riemann sont tous algébriques et la série (1), ou m_ν est donné par (2), diverge, la surface est du type parabolique (voir [10]).

O NASTAVI I IZUČAVANJU MATEMATIČKE STATISTIKE

VLADIMIR VRANIĆ, ZAGREB

Na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, odnosno ranije na Filozofskom fakultetu matematika se predavala i izučavala unutar strogo povučenih granica. Pod matematikom shvatala su se samo ona područja, koja su imala svoju stoljetnu tradiciju, kao primjerice algebra, diferencijalni i intengralni račun, teorija funkcija, teorija skupova, geometrija itd. Moglo bi se uglavnom reći, da su u taj program ušle samo teoretske grane matematike. Međutim, matematika ima i svoju praktičnu primjenu i u toj primjeni ona ima svoje posebne metode, koje su poznate kao praktična analiza ili praktična matematika. Tu spadaju primjerice metode numeričkog računanja, račun izravnanja, nomografija itd. Ta grana matematike vrlo se malo predaje na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu, dok se nešto više, ako ne možda u dovoljnoj mjeri predaje na Tehničkom fakultetu.

Ne spada u okvir ovog referata da istaknemo od kolike bi važnosti bilo, kad bi se toj grani matematike na prirodoslovno-malematičkim fakultetima posvetilo više pažnje, jer svakako bi trebalo voditi računa o tome, da svršeni matematičari budu izobraženi ne samo u teoretskom smislu, već i u praktičnoj matematici. Time bi se postigla veća svestranost takvih matematičara, a osim toga dala bi se tako mogućnost tako izobraženim matematičarima, da mogu surađivati i u onim poslovima, u kojima se traže matematičari sposobni za rješavanje praktičnih zadataka, a ne da se događa, da često i diplomirani matematičari ne poznaju ni skraćene metode računanja.

Danas matematika ulazi gotovo u sve grane nauke i svuda se traže matematičari sposobni za rješavanje praktičnih problema koji iskrsavaju u pojedinim granama nauke. Matematičari, koji svršavaju Prirodoslovno-matematički fakultet u pravilu su odviše daleko od takvih problema, koje postavlja praksa, pa ako imadu prilike, da sarađuju na takvim problemima, trebaju dosta dugo vremena, dok se užive u onaj način mišljenja i u onaj način računanja, koji je potreban praksi. Smatramo stoga da bi bilo potrebno, da se na prirodoslovno-matematičkim fakultetima toj praktičnoj strani posveti nešto više pažnje, tako da diplomirani matematičari budu sigurni ne samo u rješavanju teoretskih već i praktičkih zadataka.

Među takve praktične grane matematike spada i matematska statistika i smatramo, da je potrebno uključiti u matematsku nastavu i tu granu, jedno s razloga da se matematičari upoznaju sa toliko važnim statističkim metodama, a drugo što je baš to jedna grana matematike, u kojoj može doći do punog izražaja numeričko, mašinsko i grafičko rješavanje zadataka.

Unatrag dvije godine uveden je račun vjerojatnosti zajedno sa matematskom statistikom kao obligatan predmet na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu. Bez obzira na to, da se uvođenjem tog predmeta daje prilika i studentima fizike, astronomije i geofizike, da se upoznaju s pojmovima računa vjerojatnosti i statističkim metodama, koje su potrebne u njihovoj struci, uvođenjem tog predmeta učinjen je veliki preokret u dotadašnjem shvaćanju što treba matematičaru i smatramo, da je to prvi korak da se studij matematike približi ne samo potrebama univerziteta i škole, već i potrebama prakse, u konkretnom slučaju potrebama statistike. Smatramo, da je to važan korak, jer se ranije niti račun vjerojatnosti, niti matematska statistika nisu predavale osim u sporadičnim slučajevima. I pošto je postignut taj veliki uspjeh, smatramo da je potrebno da prikažemo važnost toga i koristi, koje iz toga proizilaze, da se na taj način naučanje tog predmeta sačuva ne zbog nastavnika, koji će to predavati, već zbog budućih generacija matematičara, kojima će predavanja iz te grane biti i te kako potrebna.

Prije svega želimo konstatirati, da je kako račun vjerojatnosti, tako i matematska statistika dio matematike, ali matematike svoje vrste, koja se prilično odalečuje od uobičajenih matematskih metoda. I upravo zbog toga, jer se taj dio matematike odalečuje od ovih dosadašnjih forma, potrebno je da se matematičari time bave, jer im se na taj način širi horizont njihove matematičke erudicije, te se kod toga upoznavanja s posebnim načinom mišljenja i zaključivanja u toj struci, u kojoj se riječ „egzaktno" zamenjuje sa riječi „vjerojatno".

Matematska statistika ima veliku primjenu u biologiji, poljoprivredi, ekonomskim naukama, psihologiji, fizici, kemiji, astronomiji itd. I kao što primjerice teoretska fizika traži sve veći matematski aparat kojeg trebaju stvoriti matematičari, isto tako i statistika odnosno upravo matematska statistika traži svoje posebne matematske metode i nastaje potreba da se upravo matematičari time bave, jer inače prijeti opasnost da se ta grana nauke neće moći dalje razvijati zbog pomanjkanja potrebnih matematskih pomagala. Uostalom ovdje imamo opet jedamput primjer, kako potrebe prakse daju poticaj za razvoj jedne nove matematske metode.

Do nedavna statistika nije bila domena matematičara, zapravo su najvažnije statističke metode nastale i stvorene po biolozima, kojima je ona trebala za potrebe biologije, tako da se ne smijemo čuditi, ako Bartlett u jednom članku, kojeg još citiramo*), spominje, da je za vrijeme prošlog rata u Engleskoj ustanovljeno, da su usprkos numeričke naravi statističkih metoda, istraživači-biolozi bili mnogo više verzirani u njima nego većina matematičara i fizičara.

Međutim, kako je istaknuto u predgovoru knjižice: Darmois, Statistique Matématique. Paris 1928, str. XII., statističari služili su se kroz dugi niz godina vrlo siromašnim jezikom poznavajući samo najosnovnije postupke: aritmetičke sredine i postotke. U tom predgovoru istaknuto je, da se napredak realiziran u statističkim teorijama duguje prvenstveno nastojanjima matematičara da primjene metode analize i računa vjerojatnosti u postupku sa numeričkim podacima dobivenim promatranjem ekonomskih, socijalnih, bioloških i drugih činjenica.

*) Bartlett, Mathematical Statistics and the Universities, University Quarterly, May 1949.

Moderna matematska statistika načinila je u poslednjim decenijama ogroman progres te je uz pomoć ovih metoda statistika postavljena na posve nove temelje, koji nam daju naslućivati do kako veličajnih rezultata u naučnim istraživanjima će se moći doći uz pomoć tih metoda. Međutim, te nove metode daleko su odmakle od onih prvih — da se tako izrazimo — koraka u statistici, te metode su zaista odmakle od proračunavanja aritmetičkih sredina i procenata, tim metodama daje se nauci mogućnost rješavanja najkompliciranijih problema. Vrijedno je kod toga pogledati primjerice nedavno publiciranu knjigu švedskog matematskog statističara Haralda Craméra, Mathematical methods of statistics, Princeton 1946. Iz te knjige razabiremo, da je za proučavanje matematske statistike potrebno potpuno znanje matematike i to ne samo više analize, već i teorije skupova, kojom se već poslužio i Kolmogorov kod izgrađivanja matematičke teorije vjerojatnosti, pojma mjere skupa, Lebesgue-ovog te Lebesgue—Stieltjes-ovog pojma integrala, Fourier-ovih integrala, matrica, determinanata i kvadratičnih forma, gama- i beta-funkcije, hipergeometrijskih redova itd. Međutim, i u drugim knjigama matematske statistike — da spomenemo samo Kendall, The advanced theory of statistics, London 1947. — možemo konstatirati obilan matematski aparat, koji nam je potreban kod proučavanja matematske statistike. Spominjemo kod toga samo onaj matematički aparat, koji je potreban kod ustanovljenja i usklađenja krivulja frekvencije, kod određivanja korelacione veze i kod danas vrlo moderne grane matematske statistike: teorije uzoraka (sampling). Međutim važna je i posve teoretska strana te nauke, pojam tzv. stohastične tj. slučajne varijable, koja i onom matematičaru, koji voli apstraktna područja, daje obilno polje rada, koje je važno zbog fundiranja računa vjerojatnosti i statistike kao matematičke teorije.

Zašto ovo ističemo? Ističemo to zbog toga, jer dolazimo na pitanje koje želimo ovdje također raspravljati, a to je, da li je matematska statistika predmet statističara ili predmet matematičara. Ovo pitanje nije postavljeno suvišno. Ne radi se kod toga samo o pitanju koje nas lokalno interesira. Matematska statistika nije bila samo pastorče kod nas, već i vani u svijetu nisu joj matematičari do nedavna posvetili onu pažnju koju ona po svojoj važnosti zaslužuje. Razlozi su uvijek isti. Statistika bila je matematičaru nešto strano i prepuštalo se da se statistikom bave nematematičari kao primjerice upravo biolozi, kojima je statistika bila potrebna za izučavanje problema, koji su se pred njih postavljali.

Iz Universities Quarterly, časopisa, koji izlazi u Londonu, nalazimo u svibanjskom broju 1949. jedan članak od Bartletta, Mathematical Statistics and the Universities, gdje se konstatira, da je tek godine 1948. osnovana u Oxfordu posebna katedra za statistiku.

Budući da matematska statistika, kao što smo gore istaknuli, treba za proučavanje pojedinih problema vrlo opsežan matematski aparat, to smatramo, da se s tom granom nauke moraju baviti matematičari koji će s punom sigurnošću moći da se služe i da barataju tim aparatom. Do sada u praksi kod nas i vani u svijetu to nije bio slučaj. Matematskom statistikom bavili su se ljudi, kojima je statistika bila potrebna profesionalno, dakle primjerice biolozi, agronomi, ekonomisti itd. i koji su kod proučavanja svojih problema statističkim putem nailazili na velike poteškoće, jer im je manjkalo ono znanje iz matematike bez kojeg se izvjesna pi anja uopće ne mogu rješavati. Poradi toga nastaje potreba, da tim problemima prilaze matematičari, ali je u tu svrhu i nužno, da se i matematičari pozabave problematikom statističkih metoda, a i problematikom onih nauka u kojima su potrebne statističke metode. Takove matematičare treba danas naša država, treba ih za one probleme koji se postavljaju u ekonomskim, demografskim, biološkim itd. pitanjima i koje treba da riješi prvenstveno matematičar. Potrebno je dakle, da se vodi računa o tome, da se između studenata koji studiraju matematiku na svim našim fakultetima, a i između diplomiranih matematičara, izdvoji jedan dio koji bi se posvetio izučavanju matematske statistike. Takovi matematičari ujedno će biti potrebni kao nastavnici ostalih statističara, kod kojih se ne bi pretpostavljalo toliko opsežno matematičko znanje. Naime, isto onako kao što inženjer ne mora biti potpuno izgrađeni matematičar, tako ne mora i svaki statističar da bude potpuno upućen u cjelokupnu matematiku, ali kao što inženjer mora znati mnogo matematike, isto se mora zahtijevati i od statističara, a na matematičarima leži obaveza da im dadu ono matematsko znanje, koje će im biti potrebno ne samo u praktičnom, nego i u daljnjem naučnom radu. Nastavnici matematike takvih statističara moraju biti ne samo matematičari, već i matemematski statističari, dakle oni matematičari koji poznaju matematsku statistiku i poznaju najvažnije probleme te nauke.

Svrha je ovih redaka bila samo ta, da upozori na postojanje tog problema i da se na taj način ustanovi od kolike je zaista važnosti da se taj problem stvarno počeo kod nas rješavati, time da se račun vjerojatnosti i matematska statistika, iako još u čednom opsegu, kod nas stvarno već predaje. Daleko smo od toga, da bismo tražili da se opseg takvih kolegija poveća, jer bi to značilo znatno daljnje opterećenje studenata. Međutim, i takvi mali kolegiji dat će studentima uvid u tu granu nauke i ne sumnjamo, da će se onda među studentima naći i takovih, koji će zavoliti tu materiju i izraziti želju da se s njome i dalje bave. Takovim studentima trebalo bi onda u smislu prednjeg posvetiti punu pažnju i dati im mogućnost da se u tom predmetu bilo kod nas bilo na strani i dalje usavrše.

A REPORT ON THE INSTRUCTION AND STUDY OF MATHEMATICAL STATISTICS

Dr. VLADIMIR VRANIĆ

The purpose of this report is to show the importance of the study of Mathematical Statistics as a separate branch of Mathematics. By the introduction of the Calculus of Probability and Mathematical Statistics at the Faculty of Natural Science and Mathematics, the first step has been taken to adapt the study of Mathematics to the needs of the practice. The report is pointing out the fact that both the Calculus of Probability and Mathematical Statistics are part of Mathematics, but Mathematics of its own kind,

differing to a degree from the usual mathematical methods. The great progress of modern Mathematical Statistics is largely due to the work of Mathematicians; today it does not make use of the elementary mathematical principles only, so that the study of Mathematical Statistics calls for a thorough knowledge not of the Higher Analysis only, but of the Theory of Sets, Lebesgue's and Stieltjes principles of integrals etc, as well. This is most evident in the Theory of Sampling. All these things are important in order to fix the place of Mathematical Statistics in Science, and to ascertain whether it schould be dealt with by Statisticians or Mathematicians. As Mathematical Statistics has its own distinct methods, the need arises for Mathematicians above all to deal with it, for the development of this branch of Science would be endangered without the help of necessary mathematical appliances. The inference of this report is that Mathematical Statistics is a branch of Mathematics, and as such should be dealt with chiefly by Mathematicians.

ORGANIZACIJA NAUČNOG RADA I PRIPREMA NAUČNIH KADROVA U OBLASTI MATEMATIKE

DRAGOSLAV MITRINOVIĆ,[1]) SKOPLJE

I

Izmenjene prilike koje su nastale pod uslovima postojanja istinske narodne vlasti stvorile su povoljne mogućnosti za razvoj i razmah nauke u novoj Jugoslaviji. Osnovani su instituti pri akademijama nauka, otvoreni su novi univerziteti i visoke škole. Za osnivanje, uredjenje i snabdevanje biblioteka knjigama i časopisima daju se velika materijalna sredstva. Isto tako obezbedjena su sredstva za formiranje novih naučnih kadrova i štampanje naučnih i stručnih radova, daju se nagrade za naučni rad itd. Drugim rečima, stvorena je povoljna materijalna baza za uspešan razvoj naučnih ustanova i nauke.

Medjutim, danas se oseća veliki nedostatak naučnih i stručnih kadrova, pogotovu matematičara-naučnika. Univerzitetima i tehničkim visokim školama potreban je znatan broj nastavnika i asistenata sa solidnim stručnim i naučnim kvalifikacijama. Institutima akademija nauka potrebni su naučnici visokog ranga koji će organizovati i aktivirati naučni rad. Danas u FNRJ nema dovoljno nastavnika i naučnih radnika na matematičkom polju s potrebnim kvalifikacijama. To je nasledstvo nepravilne kadrovske politike u staroj Jugoslaviji.

Da bi se stvorio novi kadar matematičara-naučnika, a to je hitan i važan problem, potrebno je pre svega pristupiti rešavanju pitanja savremene organizacije naučnog rada. Rešenje toga problema biće, razume se, od koristi i starom kadru naučnih radnika.

Na prvom mestu treba istaći potrebu za osnivanjem jednog Matematičkog centra[2]). Taj Centar mogao bi biti ili posebna ustanova saveznog

---

[1]) Prilikom skupljanja materijala za ovaj referat kao i pri redigovanju samog referata ukazala nam je veliku pomoć Olga Mitrinović.

[2]) U inostranstvu postoje, na primer, ovi matematički centri:

1⁰ Le Centre de Documentation de l'Intermédiaire des recherches mathématiques u Parizu.

Program rada ovog Centra naveden je u časopisu: L'Intermédiaire des recherches mathématiques, t. 4, fasc. 13, 1948, p. 21—24. Ovaj Centar nije državna ustanova, već je osnovan na privatnoj inicijativi, pod rukovodstvom matematičara P. Belgodère-a;

2⁰ Mathematisch Centrum u Amsterdamu;

3⁰ U Italiji su nedavno osnovana četiri matematička centra. Njihov privremeni statut objavljen je u Bollettino della Unione matematica italiana, serie III, anno IV, 1949, p. 206–207.

U Parizu postoji takodje: Centre national de la recherche scientifique, koji je državna ustanova i pretstavlja centar za sve prirodno-matematičke nauke.

Statut ovog Centra objavljen je 25 aprila 1947 u publikaciji: Notes documentaires et études, № 608, Série française, CXXXII, Paris.

značaja, ili ustanova Akademskog saveta FNRJ. Osnivanje jednog opšteg centra za sve nauke bilo bi od manje koristi, jer svaka nauka ima specifičnosti što se odražava na sistem organizacije naučnog rada.

Po potrebi, mogli bi se osnivati i republički matematički centri.

Centar bi imao zadatak da stvori što povoljnije uslove za razvoj, širenje i korišćenje matematičkih nauka u FNRJ. Taj centar bi, s jedne strane, bio informativni ured, a s druge strane objedinjavao bi rad, na istraživačkom i nastavnom polju, matematičkih instituta akademija nauka, matematičkih ustanova pri univerzitetima i visokim školama, matematičkih društava, kao i rad pojedinaca.

Matematički centar imao bi, uglavnom, ove otseke: otsek za dokumentaciju, otsek za istraživanje, otsek za izdavanje publikacija, otsek za razmenu matematičkih publikacija s inostranim ustanovama.

Bliži zadaci pomenutih otseka bi bili:

Otsek za dokumentaciju stvorio bi što kompletniju matematičku biblioteku. Prvenstveno bi bila nabavljena literatura koja služi za naučna istraživanja: časopisi, celokupna dela matematičara-klasika, kolekcije monografija, matematičke enciklopedije i rečnici, doktorske teze i separati. Uzgred, nabavljali bi se klasični udžbenici kao i najbolji savremeni udžbenici. Biblioteku bi valjalo stvoriti brzim tempom, a zatim je stalno i uporno popunjavati.

Biblioteka Matematičkog centra formirala bi se kupovinom u inostranstvu kolekcija časopisa i drugih matematičkih dela i to prvenstveno onih kojih nema ni u jednoj biblioteci u FNRJ. Biblioteke FNRJ koje ne pripadaju matematičkim ustanovama mogle bi da ustupe Centru matematičku literaturu, ukoliko je imaju. Ovo bi se prvenstveno odnosilo na biblioteke u sedištu Centra.

Radi racionalizacije naučnog rada, potrebno je što hitnije izraditi kartoteku matematičke literature koja se nalazi u svima bibliotekama u FNRJ. Ta bi kartoteka bila obradjena u Matematičkom centru i tom prilikom bi se videlo da kod nas ima mnogo više časopisa i knjiga nego što se obično misli.

Jedan od važnih zadataka Centra bio bi štampanje kataloga knjiga i časopisa, koje imaju biblioteke FNRJ. Takav katalog učinio bi dragocenih usluga našim istraživačima, naročito u ekonomisanju s vremenom.

Centralna matematička biblioteka, zbog koncentrisanosti literature na jednom mestu, bila bi veoma podesna za korišćenje. Zbog saveznog značaja i planskog formiranja Centralna biblioteka mogla bi da postane u kratkom roku kompletnija, u pogledu matematičke literature, od svih biblioteka u zemlji.

Otsek za dokumentaciju pružao bi zainteresovanim matematičkim ustanovama pomoć u odabiranju i nabavljanju literature u slučaju ako je ta pomoć potrebna. Otsek bi to mogao da izvrši pravilno, pošto bi imao pregled postojeće literature u svim bibliotekama, a uz to bi bio obavešten o svim novinama u svetskoj literaturi.

Otsek za dokumentaciju, kolektivnim radom svih matematičkih ustanova i matematičara u zemlji, planski bi spremao materijal za izdavanje matematičkog rečnika (matematički gloser), materijal za izdavanje jedne enciklopedije, materijal za izdavanje jedne istorije razvoja matematičke nastave i nauke naroda FNRJ, itd.

Otsek bi posvetio naročitu pažnju spremanju i održavanju različitih korisnih kartoteka. Jedna bi kartoteka davala pregled važnijih nerešenih pitanja u matematici i tema za istraživanje. Druga bi kartoteka pružala pregled časopisa i matematičkih kolekcija koje sada izlaze i koje su ranije postojale, sa svima potrebnim podacima, bez obzira na to da li ih imamo u bibliotekama u zemlji ili ne. Kartoteka koja bi davala pregled odabranih osnovnih matematičkih dela bila bi vrlo korisna za informacije početnicima, naročito u slučaju ako bi svaka matematička disciplina bila posebno obradjena. Isto tako, vrlo bi korisna bila kartoteka zbirki zadataka i problema, kartoteka zbirki matematičkih formula, kartoteka zbirki matematičkih tablica, itd.

Isto tako, značajno bi bilo izraditi bibliografije pojedinih matematičkih pitanja, kao na pr. bibliografije: o singularnim rešenjima diferencijalnih jednačina, o Bernoulli-evim brojevima, o metodama za numeričku integraciju diferencijalnih jednačina, o matematičkim instrumentima, itd. Solidno izradjene bibliografije dobro bi bilo i štampati, jer bi tada bile ne samo od veće koristi istraživačima, već bi ih mogli upotrebiti i inostrani naučnici.

Otsek za dokumentaciju skupljao bi i obradjivao materijale iz oblasti nastave, specijalno univerzitetske matematičke nastave. Eventualno, možda bi bilo dobro osnovati i specijalni otsek za nastavna pitanja.

Otsek za dokumentaciju imao bi da prati aktuelnu svetsku matematičku literaturu, da obradjuje taj materijal i da daje potrebne informacije našim matematičkim ustanovama i pojedincima.

Otsek bi vodio posebnu evidenciju o stavu svetske kritike prema naučnim raspravama jugoslovenskih matematičara, o citiranju i korišćenju rezultata jugoslovenskih matematičara u svetskoj matematičkoj literaturi i slično.

Zadatak otseka za istraživanje bio bi planiranje naučnog rada matematičkih ustanova u zemlji, ukazivanje na probleme koje bi prvenstveno trebalo rešavati, vodjenje evidencije o postignutim rezultatima, davanje potstreka pojedincima koji se bave nekim naučnim pitanjem i van okvira odredjenog planom. Kratko rečeno, istraživački otsek imao bi da planira, koordinira i potstiče naučna ispitivanja.

Otsek za publikovanje, u saradnji sa svima matematičkim ustanovama u zemlji, imao bi da izdaje razne matematičke publikacije. Na prvom mestu mogao bi da izdaje jedan časopis (Bilten Jugoslovenskog matematičkog centra). Taj časopis bi imao, na primer, ove odeljke: naučne rasprave, pregledi aktuelnih pitanja, matematički život u FNRJ, matematički život u inostranstvu, pregled sa kratkim sadržajem svih rasprava koje su štampane u jugoslovenskim časopisima u toku jedne godine.

Časopis bi korisno poslužio za razmenu sa inostranim časopisima, čime bi se osiguralo priticanje novih časopisa u biblioteku Matematičkog centra. Obaveštenja o matematičkom životu u FNRJ koristila bi radi upoznavanja svetske matematičke javnosti sa razvojem matematike u našoj zemlji.

Izdavanje monografija bilo originalnih bilo prevodnih korisno bi poslužilo razvoju matematike. Isto tako važno bi bilo što hitnije izdati knjigu pod naslovom „Vodja kroz matematičku literaturu“ po primeru Müller-ove[1]) ili Parke-ove[2]) knjige.

Takva knjiga olakšala bi u znatnoj meri orijentisanje u radu našim novim matematičkim naraštajima.

Izdavanje odabranih studija matematičara-klasika u prevodu popunilo bi našu oskudnu matematičku literaturu.

Odabrana dela jugoslovenskih matematičara Mihaila Petrovića, Vladimira Varićaka i Josifa Plemelja trebalo bi takodje planirati za štampanje.

Vrlo bi korisna bila jedna kolekcija koja bi donosila spise informativno-instruktivne prirode, originalne ili prevodne, s ciljem da posluži usavršavanju nastavnika srednjih škola.

Izdavanje enciklopedije elementarne matematike, na primer, po ugledu na italijansku Berzolari-evu enciklopediju elementarne matematike (u šest tomova), bio bi jedan od neophodnih, ali težih poduhvata.

Spremanje jednog matematičkog rečnika, koji bi u prvom izdanju bio i manjeg obima, trebalo bi da bude jedan od zadataka što neposredno pretstoje. U vezi s tim stoji i pitanje terminologije kao i normalizacije matematičkih simbola[3]).

U našoj matematičkoj literaturi nema knjige u kojoj je, makar i u pregledu, izneta istorija matematike uopšte, kao i istorija naše matematike posebno. Gino Loria, koji se bavi istorijom matematičkih nauka, priprema jednu veliku opštu istoriju matematike i poziva na saradnju i druge stručnjake iz svih zemalja. Da bi tu naša istorija bila pravilno pretstavljena, trebalo bi spremiti bar jedan kratak pregled istorije razvitka matematičke nastave i nauke kao i matematičkih ustanova naroda FNRJ.

Valja napomenuti da se u člancima enciklopedija u kojima se govori o matematičkom životu u raznim zemljama, naša matematička nauka i njene naučne ustanove ne pominju. To dolazi najviše zbog toga što ne postoji publikacija o kojoj je maločas bilo reči.

Da bi Matematički centar mogao u potpunosti da razvija svoju aktivnost, uz otsek za izdavanje publikacija trebalo bi osnovati specijalnu štampariju i knjigoveznicu. Štamparija, koja bi se dosta brzo mogla kompletirati specijalnim matematičkim slogom kao i grafičarima specijalistima za matematički slog, izradjivala bi knjige na većoj tehničkoj visini nego što je to sada slučaj. Brzina objavljivanja bila bi isto tako veća. Na primer, Čehoslovačko društvo matematičara i fizičara u Pragu ima preduzeće koje izdaje gotovo sve knjige matematičko-fizičke sadržine što izlaze u Čehoslovačkoj.

---

1) Felix Müller, Führer durch die mathematische Literatur, Teubner, Leipzig, 1909 (Abhandlungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften mit Einschluss ihrer Anwendungen, 27. Heft).

2) Nathan Grier Parke III, Guide to the Literature of Mathematics and Physics including related works on engineering science, Mc-Graw-Hill Book Comp., New York, 1947, XV + 205 p.

3) L'Association Française de Normalisation izdala je dosada, na primer, ove norme: Algebarski simboli, Geometrijski i vektorski simboli, Simboli racionalne mehanike, Simboli opšte termodinamike, Simboli mehanike fluida, itd. Videti o ovom detaljnije: Intermédiaire des recherches mathématiques, t. 4, fasc. 15, 1948, p. 88-89.

Za stvaranje što stručnijih novih naučnih kadrova, uporedo s osnivanjem Matematičkog centra, trebalo bi pitanju univerzitetske nastave pokloniti punu pažnju. Današnja univerzitetska matematička nastava na prirodno-matematičkim fakultetima nije dovoljno savremena, niti potpuna. Tako, na primer, moderna algebra na nekim fakultetima uopšte nije zastupljena. Sličan je slučaj sa višom geometrijom, računom verovatnoće, praktičnom analizom, itd. Izvesni kursevi ne predaju se na svima fakultetima sa modernim matematičkim aparatom. Izmedju raznih kurseva ne postoji dovoljna koordinacija. Sve to proističe delom od nedovoljnog broja nastavnika, delom zbog toga što za poslednjih trideset godina, usled neplanskog rada, nisu stvoreni pretstavnici za mnoge grane matematičkih nauka.

Dobra univerzitetska nastava još za vreme studija upućuje mlade ljude da se zainteresuju za naučni rad. Stoga, da bi se stvorili dobri novi kadrovi, potrebno je iz nastave ukloniti sve nedostatke, ukoliko je to moguće. Neke mlade ljude koji imaju smisla za nauku treba uputiti u inostranstvo radi studija naročito onih grana za koje nedostaju naučni pretstavnici u zemlji. Za period od nekoliko godina mogu se planskim radom u znatnoj meri popuniti navedene praznine.

Podizanje novih kadrova sa solidnim znanjem tesno je povezano i sa kvalitetom naših udžbenika. Ma da se budući naučni radnici moraju još na studijama naviknuti da se služe stranom naučnom literaturom, ipak je neophodno potrebno da stvaramo domaću udžbeničku literaturu. Iza oslobodjenja u tome pravcu uradjeno je mnogo. Objavljeno je dosta udžbenika, ali se svi udžbenici ne odlikuju u dovoljnoj meri potrebnim kvalitetima niti odgovaraju savremenim potrebama. Naročito treba zabeležiti nedostatak koji se sastoji u tome, što većina udžbenika tako tretira materijal kao da je nauka završena.

B u h l-ov udžbenik, o kome će kasnije opet biti reči, jeste interesantan primer, koji pokazuje kako se kroz udžbenički materijal može ukazivati i na nerešena pitanja i tako izazivati interes za naučna istraživanja.

Matematički instituti akademija nauka treba da odigraju važnu ulogu u formiranju novih kadrova. Po zakonu o sticanju naučnog stepena doktora nauka fakulteti i instituti akademija nauka dužni su da pruže kandidatu svu materijalnu i naučnu pomoć u toku njegovog rada. U ovaj mah postoji nekoliko mladih ljudi koji su u toku naučnih istraživanja ili su pred polaganjem doktorskog ispita, ali taj broj nije dovoljan.

Naši najbolji matematičari, u prvom redu akademici, trebalo bi da drže u institutima predavanja koja bi poslužila za proširivanje znanja aspiranata za doktorski ispit i davala potstrek za samostalan rad. Do sada je u tome pravcu malo učinjeno.

Za aktiviranje naučnog rada i uopšte davanje potstreka za rad veliku ulogu igraju časopisi. Danas u FNRJ ima dovoljan broj publikacija u kojima se mogu štampati matematičke rasprave. Te publikacije izdaju akademije nauka, matematička društva i pojedini fakulteti i visoke škole[1]).

---

[1]) Periodične publikacije FNRJ u kojima se danas štampaju matematičke rasprave jesu:
1° Publications de l'Institut mathématiques de l'Académie serbe des sciences (Beograd);
2° Glas Srpske akademije nauka (Beograd);

II

S obzirom na to da je referat namenjen u prvom redu onima koji tek stupaju u naučni život, korisno će biti da se navedu oni izvori koje treba konsultovati pri naučnom radu (izvori za naučnu dokumentaciju), a uporedo biće dati i neki istoriski podaci.

U XVII i XVIII veku naučna istraživanja odvijala su se uglavnom u akademijama nauka i u zatvorenim krugovima naučnika. Naučnici toga perioda nisu se starali da stvore svoje škole i često su krili svoje istraživačke metode, tako da se nauka nije mogla pravilno razvijati. Mnogi veliki matematičari toga doba, kao Descartes, Pascal, Fermat, Leibniz i drugi, nisu bili profesori i stoga širi krugovi nisu imali kontakta sa matematičarima-stvaraocima, što se štetno odražavalo na stvaranje novih naučnih radnika.

Počev od XIX veka naučnici su u većini slučajeva i profesori na univerzitetima i visokim školama. Izlažući u svojim kursevima i rezultate svojih istraživanja, i to na dosta pristupačan način, oni za nauku stvaraju interes kod mnogo šireg kruga ljudi nego što je to ranije bilo.

Nauka je, dakle, izišla iz sasvim uzanog kruga izabranih i počela da prodire u masu učenika. Kao posledica toga javlja se veći broj novih matematičara-istraživača i u vezi s tim objavljuju se u znatnom broju nove matematičke rasprave. Te rasprave odnose se vrlo često na pojedine naučne detalje, i tako se ubrzo došlo do velike specijalizacije, što je jedna od karakteristika u razvoju matematičkih nauka XIX i XX veka.

U vezi sa razvojem matematičkih nauka javlja se specijaliziranje naučnika za pojedine matematičke grane, čak i vrlo uzane. Na II internacionalnom kongresu matematičara (Pariz, od 6-VIII do 12-VIII-1900), D. Hilbert je održao i danas vrlo cenjen i sadržajan referat: Sur les problèmes futurs des mathématiques. Između ostalog, Hilbert detaljno analizira pojavu velikog broja novih rezultata i mogućnost da jedan matematičar prati razvoj svoje nauke. On je mišljenja da jedan matematičar može vladati celokupnom matematikom.

„Pravilno postavljeno uopštavanje u matematici dovodi ne do toga da se ona oteža novim komplikovanim i suviše apstraktnim teorijama, već da se ujedine i uproste stare, podvojene teo-

---

3° Rad Jugoslovenske akademije znanosti i umjetnost (Zagreb);
4° Razprave Slovenske akademije znanosti in umetnosti (Ljubljana);
5° Glasnik matematičko-fizički i astronomski (Zagreb);
6° Vesnik Društva matematičara i fizičara NR Srbije (Beograd);
7° Godišen zbornik na Filozofskiot fakultet na Univerzitetot (Skopje);
8° Bilten na Društvoto na matematičarite i fizičarite od NR Makedonija (Skopje);
9° Godišnjak Poljoprivredno-šumarskog fakulteta Univerziteta u Beogradu;
10° Godišnjak Tehničkog fakulteta u Beogradu.
Od deset navedenih poslednjih šest su publikacije koje su se prvi put pojavile iza oslobođenja.

rije" — to je zaključak koji izvlači Kolmogorov[1]) iz ovog Hilbert-ovog stava:

„Ukoliko se dalje razvija matematička teorija, utoliko skladnija i jedinstvenija postaje njena struktura, utoliko se otkriva više neočekivanih veza između ranije nepovezanih oblasti nauke. Tako se i jedinstveni karakter matematike ne gubi usled njenog porasta, već postaje jasniji i očigledniji... Svaki stvarni napredak nauke ide uporedo s otkrićem rigurozniji i prostijih metoda, koje olakšavaju shvatanje starih teorija i otstranjuju potrebu starih komplikovanih dokaza".[2])

Kolmogorov, u već navedenom članku, konstatuje dalje:

„Stvarna opasnost za dalji naučni progres postaje sve veće specijaliziranje matematičara od kojih sada svaki obično potpuno vlada samo malom oblasti matematike, vezanom sa pravcem njegovih ličnih istraživanja".

U nastavku Kolmogorov veli:

„Pojavljuje se rascep između primenjene i čiste matematike. Ovde se rascep pojačava reakcionarnim ideološkim strujama koje gaje, s jedne strane, pretstavu o čistoj matematici kao izolovanoj apstraktnoj nauci, koju umalo što ne skrnavi dodir sa praksom, a s druge strane, goli prakticizam (прикладничество) koji se tuđi širih uopštavanja i čak stroge matematičke kulture. Zaoštrava se čak suprotnost između klasičnih pravaca koji se interesuju samo rešavanjem konkretnih, davno postavljenih (klasičnih) problema i apstraktnih pravaca koji uopštavaju i koji su vezani naročito sa teorijom skupova".

„Ustvari, međutim, sve tešnje preplitanje različitih oblasti matematike čini da je više nego ikada neophodno sačuvati jedinstvo matematičke nauke. Očigledan primer o mogućnosti ovog ideala jedinstvene matematike jeste delatnost dva najveća matematičara iz kraja XIX i početka XX veka H. Poincaré-a i D. Hilbert-a".

Pojava velikog broja rasprava otežava snalaženje i iziskuje odabiranje i klasifikaciju rezultata. Radi toga, a i da bi se imao pregled postignutih novih rezultata, pokreću se referativni časopisi. Te časopise naučni radnik pažljivo i redovno prati radi orijentacije, jer se na osnovu referata koje ti časopisi donose može ne samo upoznati sa stanjem jednog problema, nego dobiti i ideja za dalja istraživanja.

Prvi referativni časopis, Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik[3]), pojavio se 1871 i on je tada doneo u prvoj knjizi

[1]) Videti njegov vrlo lep prikaz o savremenoj organizaciji matematičkih istraživanja u članku Matematika koji je objavljen u Большая Советская энцикл педия, Moskva, OGIZ, tom 38, 1938, stupci 359–402, specijalno str. 394–398.

[2]) D. Hilbert, Compte rendu du deuxième Congrès international des mathématiciens, tenu à Paris du 6 au 12 août 1900; Paris, 1902, p. 114.

[3]) Komplet ovog važnog časopisa imaju u FNRJ Mat matički instituti Filozofskog fakulteta Univerziteta u Ljubljani i u Skoplju.

referate o raspravama objavljenim u godini 1868. Taj referativni časopis registrovao je matematičku literaturu izišlu do 1942 godine zaključno. U jednoj knjizi velikog obima prikazana je svetska matematička aktivnost u jednoj kalendarskoj godini. Poslednjih dvadesetak godina Jahrbuch je za svaku godinu izlazio u dve obimne knjige[1]. Svaka knjiga podeljena je na različite matematičke grane[2]. Referenti su matematičari iz raznih zemalja i specijalisti za pitanja o kojima referišu.

Drugi referativni časopis je Revue Semestrielle des publications mathématiques. On je osnovan 1893 u Amsterdamu i izlazio je do 1935. U ovom časopisu jedan isti referent daje analize svih rasprava koje su se pojavile u jednoj matematičkoj publikaciji, što znači da referat nije prikaz užeg specijaliste za odnosno pitanje. Ovaj časopis nije pregledan kao Jahrbuch, jer nije podeljen na pojedine matematičke grane, već se nižu časopisi jedan za drugim. Treba primetiti da su rasprave koje su izlazile u časopisima slovenskih naroda prikazane ovde dosta detaljno. Prikaze rasprava slovenskih časopisa pisali su matematičari iz slovenskih zemalja. Za publikacije koje su izlazile u Srbiji i Hrvatskoj referate je pisao naš matematičar Mihailo Petrović.

Pomenuti referativni časopisi čine velike usluge matematičarima, ali im je nedostatak što se referati pojavljuju tek posle dve ili tri godine, pa čak i kasnije, od publikovanja same rasprave. Pokretanjem novih referativnih časopisa sa izlaženjem u sveskama, mesečno ili češće, to se stanje popravlja.

Tako od 1931 godine izlazi referativni časopis Zentralblatt für Mathematik und ihre Grenzgebiete čija je 32 knjiga u toku publikovanja. Taj časopis izlazi u sveskama, svaka sveska je podeljena na različite matematičke grane, referati se pišu na zapadnim jezicima, referenti su uži specijalisti za odgovarajuću oblast. Svaka peta knjiga praćena je solidno izrađenim registrima po materiji i po piscima čije su studije bile prikazane.

Godine 1940 Američko matematičko društvo (American Mathematical Society) pokrenulo je nov referativni časopis Mathema-

[1]) Jahrbuch počev od Bd. 55 (Jahrgang 1929) počeo je da izlazi u dva dela (55I, 55II). Ranije je bilo više slučajeva da se u jednoj knjizi donose referati za dve, pa čak i tri godine. Tako Bd. 25 obuhvata rasprave koje su izišle 1893—1894, Bd. 46 obuhvata rasprave za period 1916—1918, Bd. 47 za period 1919—1920, Bd. 48 za 1921—1922. Poslednja potpuna knjiga je Bd. 66 za rasprave iz godine 1940 koja ima 1541 stranu. Bd. 67/I za 1941 je potpun, ali Bd. 67/II nije potpuno izišao, tako da Bd. 67 nije završen. Bd. 68 (1942) počeo je sa izlaženjem i on je samo delimično gotov.

[2]) Prema Bd. 65 (1939), Jahrbuch ima ovu glavnu podelu:

1. Sammelwerke-Geschichte;
2. Grundlagen der Mathematik. Logik;
3. Arithmetik und Algebra;
4. Analysis;
5. Wahrscheinlichkeitsrechnung und Anwendungen;
6. Geometrie;
7. Mathematische Physik.

tical Reviews[1]). Taj časopis izlazi po sistemu Zentralblatt-a: u sveskama (11 godišnje), referati su na zapadnim jezicima, referenti su većinom matematičari iz SAD i to uži specijalisti za odnosnu granu. Jedanaesta sveska donosi svake godine dobro izrađene registre, slične onima koje ima Zentralblatt.

Od 1940 godine Centar za naučna ispitivanja u Parizu (Centre national de la recherche scientifique) izdaje referativni časopis Bulletin analytique, koji prikazuje rasprave iz svih oblasti prirodno-matematičkih nauka. Izlazi svakog meseca i podeljen je na razne oblasti prirodno-matematičkih nauka. Jedan deo u svakoj svesci posvećen je referatima o matematičkim raspravama.

Ovim referativnim časopisima treba dodati i časopis Bulletin des sciences mathématiques koji je osnovan 1870. On se sastoji iz dva dela od kojih drugi donosi takođe referate o raspravama, ali se pri tom ograničava samo na izvesne publikacije u kojima se štampaju matematičke rasprave. Ovaj časopis izlazi i danas, ali mu je referativni deo malog obima, znatno manji nego u prvim godinama izlaženja.

U navedenim referativnim časopisima, osim u poslednjem, donose se prikazi o svima raspravama i monografijama koje su se pojavile ma gde na zemljinoj kugli, ukoliko je to mogućno da se ostvari. Međutim, izvesne države (SSSR, Japan i dr.) daju preglede o svima raspravama koje su se pojavile u jednoj godini samo u časopisima tih zemalja.

Svi referativni časopisi, u većoj ili manjoj meri, imaju internacionalan karakter i oni su izraz kolektivnog rada matematičara. Oni su vrlo korisni, a zbog raznolikosti u načinu iznošenja i redigovanja, lepo se dopunjuju.

U vezi sa pojavom sve većeg i većeg broja istraživača stoji i pokretanje matematičkih časopisa i osnivanje matematičkih društava.

Važniji matematički časopisi jesu, na primer,

Journal für die reine und angewandte Mathematik,
Journal de Mathématiques pures et appliquées,
Annali di matematica pura ed applicata,
Annales de l'École normale supérieure,
Математический Сборник,
Mathematische Annalen,
Acta mathematica,
Annals of Mathematics,
Transactions of the American Mathematical Society,
Compositio Mathematica,
Mathematische Zeitschrift,
Труды Математического Института имени В. А. Стеклова,
Fundamenta Mathematicae.

Treba napomenuti da je lep ugled stekao u inostranim matematičkim krugovima n š časopis Publications mathématiques de l'Université de Belgrade od koga je pre 1941 godine izašlo 7 knjiga. Sada izlazi pod imenom Publications de l'Institut mathématique i izdaje ga Matematički institut Srpske akademije nauka. Pod novim imenom objavljeno je dosada 2 knjige.

---

[1]) Ovde je registrovana matematička literatura koja je objavljena počev od 1939 godine.

U XIX veku osnivaju se jedno za drugim matematička društva u Moskvi, Londonu, Parizu, Palermu, Harkovu, Njujorku, Lajpcigu, itd., dok je u XVII i XVIII veku bilo osnovano svega dva matematička društva i to u Hamburgu (XVII vek) i u Amsterdamu (XVIII vek).

Po završetku Prvog svetskog rata broj matematičkih društava naglo se povećava, a isti je slučaj i s pokretanjem novih matematičkih časopisa. Taj proces i danas je u toku.

Matematičke rasprave, koje donose važnije rezultate, obično se objavljuju po ovom sistemu: najpre se štampa kratak izvod u biltenima akademija nauka, a zatim se objavljuje detaljnija rasprava, s punim dokazima, u nekom od matematičkih časopisa.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, koji izlazi svake sedmice od 1835, jeste najpoznatija publikacija za objavljivanje kratkih prethodnih saopštenja koja mogu da iznose najviše 2 strane i šest redova.

Da bi se bar približno video tempo matematičkog života navešćemo ove statističke podatke[1]):

Prema podacima uzetim iz časopisa Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, Bd. 12, broj časopisa u kojima su se objavljivale rasprave iz matematike u 1880 godini iznosio je 167, od kojih su 18 bili čisto matematički. Ostalo su časopisi akademija nauka i prirodnjačkih društava koji takođe publikuju matematičke rasprave. U toj godini broj referisanih rasprava, knjiga i monografija iznosio je 1467, što su napisali 830 matematičara na svetu.

Mathematical Reviews, u knjizi 9, koja je izišla 1948, registrovao je 799 časopisa u kojima su objavljene matematičke rasprave. Od toga broja 152 su čisto matematički časopisi, 36 matematičko-fizički, 117 periodične publikacije akademija nauka, a ostalo prirodnjački časopisi i razni drugi. U godini 1948 referisano je o 4367 rasprava, knjiga i monografija koje su napisali 2833 matematičara iz celog sveta.

Poslednji podaci koji su dobijeni na osnovu registra u časopisu Mathematical Reviews mogu se smatrati, grubo uzeto, kao približna produkcija matematičke literature u jednoj godini u poslednje doba, dok je broj matematičara na svetu koji se aktivno bave matematikom svakako znatno veći od navedenog broja.

Iz poređenja navedenih podataka iz 1880 i 1948 vidi se da se broj matematičara višestruko povećao, a u vezi sa tim i broj matematičkih časopisa.

Radi sistematizovanja i obrade novih rezultata izdaju se sistematski pregledi, kolekcije monografija i enciklopedije.

Francuska kolekcija Mémorial des sciences mathématiques koju uređuje H. Villat smatra se kao najpotpunija. U njoj je izdato do sada 110 svezaka. U svakoj svesci daje se pregled jednog aktuelnog pitanja, s dobrim bibliografskim indeksom.

Istog je karaktera francuska kolekcija Actualités scientifiques et industrielles, sa internacionalnim redakcionim odborom, u kojoj je veliki broj svezaka posvećen matematičkim naukama.

---

[1]) Ove statističke podatke izradila je Kovina Milošević.

U monografijama donosi se potpuno i sistematsko izlaganje novih teorija. Francuska kolekcija monografija: Collection sur la théorie des fonctions, koju uređuje Borel, smatra se kao jedna od najboljih i najpoznatijih. Ona se sastoji od 40 knjiga.

Druge važnije kolekcije monografija jesu:

1⁰ Cahiers scientifiques, redaktor Julia, izišlo 20 knjiga;

2⁰ Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften[1]), izišlo 57 knjiga. Prvi redaktor je bio R. Courant, a sada su redaktori: W. Blaschke, R. Grammel, C. Hopf, F. K. Schmidt, B. L. van der Waerden;

3⁰ Colloquium Publications, izdaje American Mathematical Society, izišlo 31 knjiga;

4⁰ Princeton Mathematical Series, izdaje Princeton University, izišlo 11 knjiga;

5⁰ Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, izišlo 5 knjiga od kojih se svaka sastoji od više svezaka; svaka sveska obrađuje jedno posebno aktuelno pitanje.

U svim navedenim kolekcijama pisci pripadaju raznim nacionalnostima.

Sovjetski časopis Успехи математических наук vrši takođe ulogu gornjih publikacija (pregledi i monografije), jer između ostalog donosi preglede savremenog stanja najvažnijih aktuelnih pitanja matematike, bilo u originalu bilo u prevodu.

Na internacionalnim kongresima, kao i na nacionalnim, kojih je sve više u poslednje vreme, referiše se takođe o stanju aktuelnih problema. Vredno je naročito konsultovati takve referate koji su objavljeni u časopisu Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung.

U poslednje vreme objavljuju se dela enciklopedijskog karaktera koja tretiraju jednu oblast. Kao primer takvih dela koja su doživela veliki uspeh navodimo:

1⁰ E. Kamke, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen. Bd. I—II, 1942—1944, Leipzig. Prva knjiga je doživela za kratko vreme tri izdanja. Obadve knjige preštampane su u SAD (J. W. Edwards, Ann Arbor, Michigan).

2⁰ Fletcher, Miller, Rosenhead, An Index of Mathematical Tables, 1946, New-York—London.

3⁰ R. Courant—D. Hilbert, Methoden der Mathematischen Physik, Bd. 1 (1931), Bd. 2 (1937), Berlin. Ovo delo preštampano je u SAD (Interscience Publischers, 1943), a prevedeno je i na ruski jezik (1945).

Poslednjih godina izdat je veliki broj udžbenika od kojih sledeća dva zaslužuju posebnu pažnju:

---

[1]) Poslednje knjige ove kolekcije uglavnom se odnose na one matematičke oblasti koje intervenišu u teoriskoj fizici, specijalno u kvantnoj mehanici.

1° В. И. Смирнов[1]), Курс высшей математики, u pet tomova (tom V izišao 1947), Ogiz, Moskva—Lenjingrad.

2° A. Buhl[2]), Nouveaux Éléments d'Analyse. Calcul infinitesimal. Géométrie-Physique théorique: t. 1 (Variables réelles), t. 2 (Variables complexes), t. 3 (Equations différentielles), t. 4 (Equations aux dérivées partielles), 1936—1943, Gauthier-Villars, Paris.

Najpotpunija matematička enciklopedija, koju je 1895 godine pokrenuo Felix Klein u dve redakcije — francuskoj i nemačkoj, još nije završena. Ona je vrlo važna i matematičari je stalno konsultuju. Medjutim, ulogu enciklopedije za pojedina pitanja sve više zamenjuju pregledi kao što su oni objavljeni u kolekciji Mémorial des sciences mathématiques.

Od manjeg su značaja, ali su takodje od velike vrednosti, enciklopedije:

1° J. P. Hagen, Synopsis der höheren Mathematik, 4 knjige, Berlin 1890—1930.

2° A. de Monzie, Encyclopedie Française, t. 1, 3e partie, La Mathématique, Paris, 1937.

3° E. Pascal, Repertorium der höheren Mathematik, 3. Auflage, Leipzig, Teubner, tom I u 3 knjige: Analysis, 1910—1927, tom II u 2 knjige: Geometrie, 1910—1922.

4° Weber und Wellstein, Encyclopädie der elementar Mathematik, 3. Auflage, Leipzig, Teubner, 3 toma u 4 knjige (1915—1924).

Vrlo je dobra italijanska enciklopedija novijeg datuma: Enciclopedia delle matematiche elementari, 1930—1947, Milano, Hoepli (u 6 knjiga) čiji je redaktor Berzolari.

Pri studiranju često je korisno konsultovati opšte enciklopedije, koje sadrže solidne informativne članke naučnog i istoriskog karaktera što se odnose na matematičke nauke. Kao najvažnije navodimo sledeće:

1. Большая советская энциклопедия,
2. The Encyclopedia Britannica,
3. Enciclopedia italiana di scienze, lettere ed arti,
4. The Encyclopaedia Americana,
5. Larousse du 20e siècle.

---

[1]) Obimno delo В. И. Смирнова koje ima preko 3000 strana, pretstavlja udžbenik matematičke analize koja se od svih oblasti matematike najviše iskorišćava. Tridesetogodišnji rad В. И. Смирнова na izradi udžbenika matematičke analize koji se završio publikovanjem toma V, nagrađen je 1947 Staljinovom nagradom. Taj udžbenik u pogledu savremenosti i potpunosti jeste jedan od najboljih udžbenika matematičke analize u svetskoj literaturi. Već od III toma udžbenik je namenjen starijim kursevima vuza, aspirantima i naučnim radnicima.

[2]) Buhl-ov udžbenik, koji iznosi preko 800 strana, pretstavlja lepu novinu. Buhl u udžbeniku analize daje ravnopravno mesto infinitezimalnom računu, geometriji i teorijskoj fizici. To jedinstvo Buhl uspešno uspostavlja. On je napisao udžbenik polazeći s gledišta o potrebi preobražaja nastave matematičke analize, „preobražaja bez koga bi učenik bio u opasnosti da ostane zatvorenih očiju pred novim teorijama — relativističkim, kvantnim i talasnim".

Buhl-ov udžbenik nije napisan u takvoj formi da nauka izgleda završena. Naprotiv, kako sam Buhl s pravom ističe u predgovoru „originalni duhovi moći će da izvuku iz udžbenika mnogobrojne teme za doktorske teze".

Prema dosada izloženom bitne crte razvoja matematičkih nauka u XIX i XX veku možemo ovako ukratko okarakterisati:

1° profesor-istraživač svojim predavanjima i kontaktom sa slušaocima čini da katedra postaje središte za širenje naučnih rezultata i potstrek za samostalna istraživanja;

2° znatno se povećava naučni materijal, što povlači za sobom specijalizaciju i kritičku sistematizaciju novih rezultata;

3° pojavljuju se manifestacije kolektivnog rada, koje se ispoljavaju u osnivanju matematičkih društava, u pokretanju časopisa uključujući tu i referativne časopise, u izdavanju matematičkih enciklopedija, kolekcija monografija i pregleda pojedinih ograničenih pitanja, u održavanju kongresa, u povezivanju matematičara bliskih specijalnosti sa svih delova zemljine kugle što se realizuje preko korespondencije i izmene separata vlastitih radova itd.

S obzirom na značaj matematičkih nauka kao aparata kojim se služe u prvom redu tehničke nauke — bitne za socijalističku izgradnju naše zemlje, s obzirom na naše naučno nasledje i elan omladine ka naučnom stvaralaštvu, s obzirom na stvorenu povoljnu materijalnu bazu za razvoj nauke u FNRJ, možemo očekivati da će matematičari FNRJ postići u budućnosti daleko veće uspehe u poredjenju sa dosadašnjim i time opravdati nade koje se u njih polažu.

ORGANISATION DER WISSENSCHAFTLICHEN ARBEIT UND VORBEREITUNG DES WISSENSCHAFLICHEN NACHWUCHSES IM GEBIET DER MATHEMATIK

VON D. MITRINOVIĆ

In seinen Ausführungen schlägt der Autor die Gründung einer mathematischen Zentralstelle vor. Diese Zentralstelle hätte die Schaffung der möglichst günstigen Umstände für die Entwicklung, Verbreitung und Verwendung der mathematischen Wissenschaften im Lande als Aufgabe.

Diese Zentralstelle sollte hautsächlich folgende Abteilungen besitzen: die Abteilung für wissenschaftliche Dokumentation, die Abteilung für wissenschlaftliche Untersuchungen, die Abteilung für die Herausgabe von Publikationen und die Abteilung für den Austausch der mathematischen Publikationen mit auswärtigen Institutionen.

Nachdem ausführlich die Aufgaben, die in den Wirkungskreis der einzelnen Abteilungen dieser mathematischen Zentralstelle gehören, auseinandergesetzt hatte, gab der Autor eine Übersicht über die Quellen für eine wissenschaftliche Dokumentation. Eine besondere Beachtung wurde den referierenden Zeitschriften, mathematischen Enzyklopädien, wichtigeren Monographiensammlungen usw. gewidmet.

Sekcija B

PROBLEMI IZOMERIJE ATOMSKOG JEZGRA

DRAGOLJUB K. JOVANOVIĆ, BEOGRAD

1. Uvod.— Atomsko jezgro, potpuno odredjeno masom i naelektrisanjem, može pokazivati izomeriju u pogledu njegove unutrašnje strukture. Kod stabilnih jezgra nije primećen slučaj da se dva izotopa razlikuju u spinskoj vrednosti, ali kod radioaktivnih jezgra ovaj slučaj postoji: dva jezgra iste mase i naelektrisanja razlikuju se u pogledu vrednosti srednjeg života (izotopi drugoga reda). Ovakva jezgra su izomerna prema analogiji sa izomernim jedinjenjima u organskoj hemiji, gde raspored atoma u ovom slučaju odgovara rasporedu neutrona i protona, ili bi izomerija došla i od različitog stanja kretanja sastojaka jezgra koja se razlikuju u pogledu spina i prema tome sadržavala različite energije. Energija jezgra teži uvek da predje u niže stanje, što biva izračivanjem pri čemu se izračeni energiski kvant kompenzuje obrtnim impulsom jezgra.

Ideja o izomeriji jezgra potiče još od 1909 god. kada je Soddy postavio pitanje za diskusiju: da li je potrebno da postoji istovremeno samo jedan oblik nestabilnosti, tj. da li se može zamisliti proces kojim bi se spontano odabrale grupe atoma sa drugačijim raspadanjem i kako bi se u tom slučaju atom mogao definisati do momenta raspadanja? Kakvi bi različiti produkti pri tome nastali? Pet godina docnije nadjeno je da su atomi *RaC*, *ThC* i *AcC* ti koji daju odgovor na sva gornja pitanja, a zatim su Fajans (1911) Darwin i Marsden (1912) pokazali da se uzmakom mogu naći produkti račvanja sa *RaC* odnosno *ThC*, te je uspostavljena shema:

$$\begin{tikzcd} & & & ThC' \arrow[dr, "\alpha"] & \\ ThA \arrow[r, "\alpha"] & ThB \arrow[r, "\beta"] & ThC \arrow[ur, "\beta(65\%)"] \arrow[dr, "\alpha(35\%)"'] & & ThD \\ & & & ThC'' \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

ThC'' je dobijen uzmakom i izmerena mu je perioda $T = 3{,}2$ min. Docniji eksperimenti ustanovili su sledeće odnose produkata račvanja: *ThC* 33,7/66,3, *RaC* 2,07/10^4, *AcC* 10^4/27.

Kao što je poznato, prema Pauli-evoj hipotezi granična energija kontinuiranog β spektra jednaka je oslobodjenoj energiji u obliku elektrona više energija neutrina za svaku vrstu jezgra pod pretpostavkom da je početno energisko stanje za sva jezgra isto uoči raspadanja. Merenje ove granične vrednosti β spektra *ThC'* i *ThC''* ne daje sigurnu podršku tome da *ThD* ima istu energiju pa bilo da postaje iz *ThC'* ili iz *ThC''*.

Pravi primer izomerije (Hahn) odnosi se na UX_2 i UZ; oba ispuštaju β zrake. Njihovo naelektrisanje je 91, masa 234, ali srednji život 1,14 min.. odnosno 6,7 h. Oba izomera potiču iz UX_1 β raspadanjem. Katkad se dešava da izomer višeg energiskog stanja, izračivši γ kvant postepeno predje u drugi, a katkad se oba istovremeno raspadnu sa različitim periodima u naredni element.

Ako se pretpostavi da izomerna jezgra imaju različite spinove onda mora pri izračivanju sa težeg i prelazom u lakše jezgro (radi održanja obrtnog impulsa) γ kvant da izadje iz jezgra jako ekscentrično. Takvi prelazi su „zabranjeni“, a prelazi ovakve vrste odnose se na metastabilno stanje. Iz toga se može naslutiti da se izomerna jezgra razlikuju u spinovima.

Isto tako i relativno dužim trajanjem uskolebanog stanja mogla bi se objasniti „izomerija“. Prve podatke o tome nalazimo u Jakobsen-ovim eksperimentima koji je (1927 god.) pokazao da γ emisija nastaje posle emisije β za 10^{-5} sec pri raspadanju *RaC* pa je predvidjena mogućnost emisije γ zrakova i posle intervala od oko 10^{-1} sec, što je najpre pobijao Joliot a zatim se pokazalo kao tačno veštačkim pravljenjem izotopa pomoću Scilard Chalmers-ove reakcije.

Talasne dužine i energiske vrednosti nekih linija γ spektra *RaB* postuliraju seriju od sedam nivoa $A,B,C,...$ sa nekih 14 prelaza koji odgovaraju izračunatim γ kvantima (od $0{,}537 \times 10^5$ do $5{,}31 \times 10^5$ eV). Ova emisija γ biva sa *RaC* te se ovih sedam nivoa odnose na *RaC*. Stoga izgleda da γ zraci nastali prirodnom radioaktivnošću potiču iz pomenute stratifikacije nivoa u jezgru kao rezultat α ili β emisije a interval γ emisije je verovatno vrlo kratak, 10^{-12} ili 10^{-13} sec; opadanje γ aktivnosti biva istovremeno kao i α odnosno β aktivnost (brojane koincidencijom). Izomerija u ovom slučaju odnosila bi se na varijaciju emisija sa raznih energiskih nivoa.

Medjutim veštačkim putem aktivirana jezgra emituju katkad γ zrake koji nisu u vezi sa α ili β aktivnošću merljivom po vremenu, tj. kod koje se može naći perioda. U takvom slučaju gornji energiski nivo je metastabilan iako postoji vrlo malo verovatnoće za emisiju sa gornjeg višeg na donji niži nivo. Ovo se da protumačiti Wiedenbeck-ovim eksperimentima.

Zlato je „osvetljeno“ X zracima od 1,22 MeV dobijenim naponom iz Van der Graaff-Herb-ove elektrostatičke mašine. Izračunat kvant $h\nu$ za γ zrake koji opadaju sa $T = 7{,}5$ sec pomoću apsorpcije u Al i foto-emisijom elektrona imao je 0,25 MeV. Iz krive za ekscitaciju X zrakova našlo se da je nivo na 0,25 MeV metastabilan; verovatnoća prelaza sa njega na normalni nivo tako je mala da poluvreme trajanja jezgra u ovome stanju iznosi 7,5 sec. Slično je Wiedenbeck našao i za Rh (metastabilno jezgro se nalazi iznad stabilnog za 0,04 MeV).

Ako se uzme u obzir stratifikacija u jezgru onda emisija γ zrakova sa raznih nivoa ne povlači sa sobom promenu u konstituciji jezgra pošto je proces sličan atomu pri emisiji liniskog spektra sa gledišta opšte teorije u pogledu sila koje drže jezgro u celini.

Pronalazak veštačke radioaktivnosti je u mnogome proširio istraživačko polje u pogledu sastava jezgra a time je uneto više svetlosti u problem izometrije jezgra. Najpre su Scilard i Chalmers to pokazali na In^{116}, a zatim su na Br^{80} bombardovanjem sa sporim neutronima dokazana tri jezgra sa periodama: 18m, 4,4h i 34h. Pokušaji da se odredi gornje energisko stanje bili su otežani time što su oba izomerna nivoa bliska jedan drugom, ali je hemiskom metodom, odvajanjem izomera pokazano da izomer od $T = 4{,}4$h prelazi u izomer od $T = 18$ min. Prema tome jezgro sa $T = 4{,}4h$ pretstavlja metastabilno stanje koje prelazi u osnovno stanje ili zračenjem γ kvanta, ili unutrašnjim preobražajem, a oba jezgra pripadaju $_{35}Br^{80}$.

Preko 300 radova iz ove oblasti nagomilano je u toku od 15 godina te je bilo i pokušaja da se svi eksperimentom odredjeni slučajevi stilizuju teorijom koja bi imala i karakter hipoteze. Reč izomer je uzeta samo prema analogiji sa organskim jedinjenjima, kao što pomenusmo napred, ali ovde je slučaj sasvim različit.

2. Nedostatak klasične mehanike u tumačenju prilika u jezgru, stratifikacija jezgra, prema analogiji sa atomskim jezgrom. — Pre svega smatra se da su u jezgru protoni i neutroni „upakovani" blisko jedni drugima radi toga što je nadjeno da je gustina svih jezgra skoro stalna ($\rho = 2 \times 10^{-13} Z$ 1/3) te zato je jezgro po analogiji slično kapljici tečnosti gde se molekule drže kohezijom. Ranije gledište da se u jezgru nalaze slobodni elektroni otpada sa stanovišta principa neodredjenosti $\Delta p\ \Delta x \sim h$ jer bi u ovom slučaju bilo:

$$\Delta p = \frac{h}{\Delta x} = \frac{6{,}6 \times 10^{-27}}{2 \times 10^{-13}} = 3{,}3 \times 10^{-14}.$$

S obzirom na energiju primenjujući relativističko stanovište radi toga što se konstitutivni elementi jezgra kreću znatnom brzinom masa $m = \frac{W}{c^2}$, a

$$p = mv = \frac{Wv}{c^2}.$$

Pošto je

$$W = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

onda iz $p = \frac{Wv}{c^2}$ nadjena vrednost za v zamenjena u poslednjoj jednačini $\left(\beta = \frac{v^2}{c^2}\right)$ daje

$$W^2 = m_0^2\, c^4 + p^2\, c^2$$

$$W^2 = p^2 c^2 = (3{,}3 \times 10^{-14})^2\ (3 \times 10^{10})^2,$$

$$W \simeq 10^{-3} \text{ erg} = \frac{10^{-3}}{1{,}6 \times 10^{-12}}\, eV \simeq 6 \times 10^{8}\ eV.$$

Prema ovoj energiji je energija elektrona u miru $mc = \frac{0{,}9 \times 10^{-27}, 9 \times 10^{20}}{1{,}6 \times 10^{-12}}$ $= 5 \times 10^5\ eV$. Kod β radioaktivnosti jezgra primećeno je da kinetička energija elektrona ne prelazi $5 \times 10^6\ eV$, kao što smo npr. našli kod *MsTh*. Prema tome ova bi energija trebala da bude premašena skoro 40 puta.

Što se tiče stabilnosti ovakvog jezgra u obliku kapljice Flüge, Feenberg i Weizsäcker su našli da su mogući stabilni oblici sferni i elipsoidni, i to samo u slučaju za $44 \leqslant \frac{Z^2}{A} \leqslant 50$ i za ${}_{92}U^{238}$ ($Z^2/a \simeq 36$). Ovi oblici mogu biti nestabilni usled deformacije, ali ovo bi se odnosilo samo na teška jezgra.

Pošto izomerni prelazi bivaju izračivanjem γ kvanta i preuredjivanjem (konverzijom) elektrona (kada bude emitovan par elektrona ili pozitrona iz uskolebanog stanja jezgra), što povlači za sobom neku stratifikaciju u jezgru sličnu stratifikaciji elektronskih omota oko jezgra, mora se ustanoviti izvesno pravilo odabiranja za moguće prelaze izmedju raznih nivoa. Vektori ugaonih brzina dati su u $\hbar$ jedinicama, a emitovana radijacija nosi sa sobom i ugaoni moment te se u ovom principu odabiranja vodi računa o prelazima iz stanja jezgra u pogledu ugaonih momenata I i I'. Slučaj prelaza iz jednog stanja jezgra u drugo za koji bi bilo $I = I' = 0$ je striktno zabranjen sa gledišta elektromagnetskih radijacija tumačenih aktuelnim modelima. Za dva jednaka jezgra elektroni iz atoma mogu izaći u direktnom prelazu a verovatnoća prelaza bi zavisila od prodora atomskog (spoljnjeg) elektrona u jezgro. Ovaj $0 - 0$ prelaz je takodje striktno zabranjen i u slučaju dvaju nejednakih jezgra.

Što se tiče stratifikacije u jezgru ona potiče iz činjenice što se pri emisiji γ zraka odredjenog kvanta iz jezgra emituju istovremeno i grupe β zrakova koji obrazuju spektar β zrakova a koji odgovaraju emisiji sa $K, L, N, \ldots$ nivoa. Proizvodjenje sekundarnih β zrakova je unutrašnji foto-električni efekt i on je češći u K nego u L orbiti, a verovatnoća da će γ kvant pretrpeti promenu iznosi 0,001 do 0,1. Talasne dužine γ zrakova su aktuelno odredjene iz energije β linija nastalih unutrašnjim promenama pri unutrašnjem foto-efektu. Ali mnogi elektroni dolaze i iz samog jezgra.

Što se tiče samih linija γ spektra njihove se talasne dužine mogu izmeriti i eksperimentalno do izvesne granice pomoću kristalne rešetke sa malim upadnim uglom. Iz spektroskopije sa karakterističnim X zracima vidi se da su talasne dužine ovih linija kraće od najkraćih K linija (0,112 A za U) stoga i jedan deo γ zrakova mora biti emitovan iz jezgra.

Kada nastane izomerni prelaz sa nivoa 2,1 kojima odgovaraju energije E_2, E_1 pa bilo da se radi o emisiji kvanta ili elektrona, u oba slučaja je njihova energija.

$$\hbar\omega - K = E_K\,; \quad \hbar\omega = h\frac{\omega}{2\pi}\,; \text{ frekvencija } \frac{\omega}{2\pi}$$

ili

$$\hbar\omega - L = E_L$$

Odnos α_K izmedju broja izbačenih elektrona N_K i broja kvanta N_γ naziva se parcijalni unutrašnji koeficient takvog prelaza.

Kad atom izgubi $K, L, \ldots$ elektron onda biva emisija $K, L, \ldots$ serije kao i elektrona (Auger). Ovako nastali X zraci po frekvenciji odgovaraju spektrima sa atomskim brojem jezgra koje podleže izomernom prelazu. Ali kao što je primećeno u nekim slučajevima sekundarna emisija X zrakova biva posle radioaktivnog preobražaja i onda su X zraci karakteristični za rezultujući produkt izomernog preobražaja: pri hvatanju K elektrona od strane jezgra spektar X zrakova se odnosi na prethodni element periodnog sistema, a pri β emisiji na naredni element.

Odavde se vidi da se merenjem karakterističnih X zrakova može identifikovati izomerija: Ova biva na taj način što će se za apsorpciju upotrebiti karakterističan apsorbent.

Elektroni emitovani pri unutrašnjem foto-efektu nalaze se pomoću naročito podesnih brojača ili jonizacijom u komori sa tankim zidovima. Prisustvo β zrakova sa niskom energijom i sa kratkom periodom je takođe dokaz izomerizma, samo se za slučaj merenja koeficijenta unutrašnjeg foto-efekta ($\alpha_K = N_K/N_\gamma =$ pr.) mora jonizaciona komora ili brojač kalibrisati sravnjivanjem direktnih efekta radiacija poznatih energija (niskih). U istom smislu se upotrebljavaju i brojači sa koincidencijom. Ako bi izomernom prelazu prethodila ili sledovala β emisija, onda se β spektrografom može izbrojati broj elektrona pri unutrašnjem foto efektu i broj emitovanih elektrona (broj foto-elektrona + broj γ kvantala): β—β koincidencija broji slučajeve unutrašnjeg foto-efekta, a β—γ koincidencija broj prethodnih ili narednih γ kvanta. Što se tiče parcijalnih koeficienata unutrašnjeg foto efekta dolaze u obzir α_K i α_L a njihov odnos bi bio važan za teoriske tačke stanovišta.

Slučajevi koji se odnose na izomerne prelaze pri veštačkom aktiviranju jezgra u otsustvu ma kakve radijacije kao što je slučaj sa stabilnim jezgrima In^{115st}, Kr^{83st} i Sr^{87st} tumače se fiktivnim slučajevima verovatnoće prelaza β u 1 sec (λ_{β_2}) prema verovatnoći prelaza γ (λ_{γ_2}) odakle se može obrazovati odnos $p = \lambda_{\beta_2}/\lambda_{\gamma_2}$.

3. H i p o t e z a o d n o s n o i z o m e r i j e j e z g r a. — Weizsäcker je pokušao da objasni mehanizam izomernih prelaza koji nastaju kratkotrajnim izručivanjem energije jezgra u prethodno uskolebanom stanju. Ovde je u pitanju tumačenje nastalih radijacija putem zamišljenih nivoa. Uzevši u obzir srednji život (T_γ) za emisiju γ zraka od strane dipola, na osnovu elektromagnetske teorije,

$$T_\gamma = 3/4\ (\hbar c^3/\omega^3)\ 1/M^2_{nm}$$

M_{nm} element matrice za prelaze mn. Za prelaze koji se odnose na dipol $e \times 10^{-13}$ cm dobija se ω, koje odgovara 100 keV sa trajanjem emisije $T_\gamma = 4 \times 10^{-12} sec$; vreme vrlo kratko prema eksperimentalnim vrednostima nađenim u raznim slučajevima stoga se moraju uzeti u obzir pravila selekcije koja bi ograničavala prelaze izračunavanjem. Pošto su ovi dipolni momenti vrlo mali i još manji kad se uzme u obzir „tesno pakovanje“ između neutrona i protona u jezgru, to se mehanički centar jezgra poklapa sa električnim centrom, ali ni to nije dovoljno za redukciju elementa matrice kao što to zamišlja Weizsäcker, te bi razlika u ugaonom momentu između dva nivoa veća od $h/2\pi$ ukazivala na nedopušteni prelaz između radiacija dvaju dipola. Ako bi razlika u spinu bila l, prvi dopušten prelaz bio bi moguć samo od strane multipola reda 2^l.

Odnos intenzivnosti zračenja sa kvadrupola i dipola za neku frekvenciju bio bi $2\pi\, x^2/\lambda$ (x dimenzija jezgra a λ emitovana radijacija). Za odnos $2\pi\, x/\lambda \sim 0{,}003$ tj. za kvant od 100 keV intenzivnost kvadrupola je 10^5 puta slabija od radijacije sa dipola, a još slabija od viših multipola. Pretpostavivši da je promena u ugaonom momentu uslovljena prolazom dovoljno velika da bi radijacija postala od višeg multipola onda se može uzeti u obzir duža perioda tog prelaza.

Ne ulazeći u kvantitativno tumačenje koje počiva na klasičnim relacijama za skalarni i vektorski potencijal, dalju diskusiju po ovom teoriskom razmatranju s obzirom na svojstvene elemente matrice za amplitude dipolnih momenata, kvadrupolnih tenzora itd. preduzeli su Dancoff i Morrison pobliže izračunavanje kvantizovanog elektromagnetskog polja nastalog od 2^l-pola (električnog ili magnetnog) sa ugaonim momentom $l\hbar$ u odnosu na početak sa kojim je multipol u vezi. Pošto izlazna radijacija sa jezgra nosi sa sobom ugaoni moment i s obzirom na princip o održanju ugaonog momenta, selekciono pravilo je ustanovljeno na naredni način.

Ako su J i J' vektori ugaonog momenta u $\hbar$ jedinicama za dva stanja između kojih nastaje 2^l-polni prelaz onda je

$$|J - J'| \leqslant l .$$

Ako bi jezgro u uskolebanom stanju imalo ugaoni moment J' a njegovo osnovno stanje je bilo J onda bi energiski najniža relacija, tj. ona koja je najverovatnija, bila uslovljena prelazom električnih ili magnetnih multipola reda 2^l za koje je

$$l = |J - J'|, \text{ jer}$$

$$J - J' \geqslant l \geqslant |J - J'|$$

$|J - J'|$ je minimalna vrednost od l.

Drugi način ustanovljenja pravila odabiranja sastojao bi se u sličnosti svojstvenih funkcija jezgra, tj. moramo pretpostaviti da su veze među sastojcima jezgra talasno mehaničke prirode, jer bi klasična mehanika bila primenljiva onda kada bi energije sastavnih delića bile dovoljne da odgovaraju de Broglie-ovim talasnim dužinama, u sravnjenju sa dimenzijom jezgra koja je reda 10^{-13} cm.

Tako bi neutron ili proton morali imati energiju

$$\frac{1}{2} mv^2 = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{(h/\lambda)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{6{,}61 \text{ x } 10^{-27}}{10^{-13}}\right)^2}{2 \times l{,}66 \times 10^{-24}} \sim 1{,}3 \times 10^{-3} \, erg = 830 \, MeV,$$

što nije primećeno do sada stoga se mora uzeti u obzir talasna mehanika.

Uzevši u obzir jednakost svojstvenih funkcija jezgra sličnost određuje šta će biti sa svojstvenom funkcijom ako se izmeni znak svih koordinata delića tj. kada je

$$\psi\,(q_1, q_2, \ldots q_n) = \pm\, \psi\,(-q_1, -q_2, \ldots -q_n)\,.$$

Ako ova jednačina ostaje u važnosti sa $+$ znakom, svojstvena funkcija je parna, inače neparna.

Svaki element matrice

$$M_{mn} = \int \psi_m (q_1\, q_2 \ldots)\; X^r\, y^s\, Z^t \times \psi_n (q_1\, q_2 \ldots)\; dq_1\; dq_2 \ldots$$

iščezava ako su ψ_m i ψ_n jednake a $r + s + t$ neparno ili su nejednake a $r + s + t$ je parno ($X = \Sigma x_i$) što odgovara pravilima u spektroskopiji (Laporte).

Na osnovu ove teorije pokušano je da se predvidi poluvreme uskolebanog stanja kakvog jezgra. Jedni autori su uzeli u obzir, radi izračunavanja periode T ili kretanje α delića u jezgru tj. u polju jezgra (Hebb i Uhlenbeck) ili kretanje protona (Koyenuma), drugi su uzeli u obzir oblik jezgra (kapljica) te su pretpostavili da radijacija dolazi od vibracije samog jezgra (Lowen, Fierz, Berthelot) itd. Medjutim nije tako strogo opravdan ovaj model jezgra. Ali je nadjeno da je slaganje sa gornjom teorijom bolje u pogledu eksperimentalnih rezultata samo onda ako se uzme u obzir korekcija u pogledu unutrašnjeg foto-efekta u formulama izvedenim iz teorija a koje pretstavljaju T u funkciji srednjeg broja emitovanih kvanta u 1 sec od strane jezgra.

$$\lambda_\gamma = \left(\frac{\omega}{e}\right)^{2\lambda+1} \frac{e^2}{\hbar} \frac{x^2\Lambda}{\eta\,[1,3,5\ldots(2\Lambda-1)]^2}$$

Λ pretstavlja red prelaza tj. najnižu vrednost od $\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)^2$, η konstanta ($\eta^2=1$) $\times$ (poluprečnik jezgra) $= 1{,}45 \times 10^{-13}A^{1/3}$, A masa jezgra ($O^{16} = 16$), e naelektrisanje elektrona.

Gornja formula se odnosi na atom kome su oduzeti svi elektroni, a u prisustvu elektrona nastupa perturbacija koja indukuje prelaz sa ispuštanjem elektrona (unutrašnji foto-efekt), što dovodi do povećanja verovatnoće raspadanja te je

$$\lambda = \lambda_\gamma + \lambda_e\,;$$

λ_e elektronima indukovana verovatnoća prelaza, a

$$T = \frac{0{,}69}{\lambda_e + \lambda_\gamma} = \frac{0{,}69}{\lambda_\gamma\,(1+\alpha)},$$

α koeficient unutrašnjeg foto-efekta.

Medjutim slaganje sa eksperimentalnim činjenicama je otežano usled nepoznavanja α.

Ukratko rezimirano: Poluvreme izomernog prelaza zavisi od naelektrisanja jezgra, l i Λ. Ova zavisnost se teško da izračunati bez tačnog poznavanja strukture jezgra; parcijalni koeficienti unutrašnjeg foto-efekta α_K' α_L' β_K' β_L su takodje u funkciji od Z, E i l. Eksperimentalno se može meriti Z, E i T zatim N_K, N_L K i L elektrona koji učestvuju u unutrašnjem foto-procesu kao i $N_\gamma =$ broj kvanta emitovanih pri dezintegraciji. Teškoće merenja sastoje se u odredjivanju N_K i N_γ i njihovog odnosa i stoga se samo zna aproksimativno njihova vrednost. Kao posledica navedene teorije navešćemo neverovatnoću postojanja dva metastabilna stanja istoga jezgra.

Direktno merenje spina jezgra pre i posle izomernog prelaza bilo bi od velikog značaja. To merenje bi bilo ili spektroskopski pomoću hiperfine strukture ili pomoću molekulskih zrakova kao što su pokušali Mrozovski i Segrè 1940, ali neuspeh je došao usled nedostatka veće količine materijala, što je pri sadašnjem stanju tehnike već moguće otkloniti.

4. Proizvodjenje i izdvajanje izomera. — Za proizvodjenje izomera dolaze u obzir dve metode: *a)* elektromagnetskim dejstvom tj. bombardovanjem fotonima velike energije; *b)* reakcijom izmedju jezgra

izvedenim sa brzim delićima. Do sada je izvedena izomerija hvatanjem sporog neutrona od strane jezgra, neelastičnim sudarom sa brzim neutronima i foto-električnim dejstvom kao i bombardovanjem sa brzim jonima. Samo u malom broju slučajeva dobijen je direktno izomer a u većini slučajeva se izomer dobija u dve etape: 1) dobijanjem uskolebanog stanja jezgra, 2) prelazom iz ovog stanja ka metastabilnom kaskadnim procesom.

Direktna proizvodnja nije moguća pomoću fotona zato što ista pravila odabiranja kojima se tumači izomerija tj. metastabilnost jezgra sprečavaju jezgro da apsorbuje energiju radi prelaza u metastabilno stanje. Što se tiče drugog slučaja, tj. direktne apsorpcije delića od strane jezgra, ova apsorpcija podiže mu energiju od nekoliko *Mev*, što je i suviše visoka energija za izomerno stanje koje se može očekivati.

Direktno proizvodjenje izomera biva β raspadanjem što je najpre uočeno.

U slučaju indirektnog proizvodjenja, primarni proces ostavlja jezgro u jako uskolebanom stanju i postepeno jezgro prelazi do metastabilnog stanja. Da bi se došlo do razlike u spinu u raznim etapama i za vrlo kratko vreme potrebno je da bude $l = 1$ ili 2. Iz najvišeg do najnižeg stanja jezgro može da predje direktnim skokom ili intermedijarno u etapama do metastabilnog stanja, a zatim iz ovog do osnovnog vremenski dužim prelazom zbog velike razlike u spinu. Ovakav proces je uočen eksperimentalno brojanjem emitovanih kvanta, hvatanjem neutrona i emisijom γ kvanta niske energije. Dalji eksperimenti se odnose na ponašanje sporih i rezonantnih neutrona pri stvaranju izomera, pri čemu učestvuje presek dejstva dotičnih atomskih vrsta. Primajući u se spori neutron jezgro A dobija spin čime se razlikuje za $^1/_2\ \hbar$ (ugaoni moment neutrona) od početnog stanja. Iz rezultujuće izomerije i β raspadanja moguće je zaključiti koje od dva izomerna stanja B i C ima veći spin. Jezgro čiji je spin bliži spinu jezgra A ima veći presek dejstva.

Kada se atom u molekuli nadje u metastabilnom stanju pa prema tome se dogodi izomerni prelaz, onda ovaj atom može da raskine hemisku vezu koja ga drži u molekulskoj zajednici. Usled uzmaka povodom emisije γ kvanta kinetička energija E izražena u eV iznosi

$$E = \frac{\hbar^2 \omega^2}{2\,Mc^2} = 0{,}54 \times 10^{-3}\ \frac{\varepsilon^2}{M};$$

ε energija γ kvanta u keV, a M atomska težina jezgra ($O = 16$). Ako se γ kvant apsorbuje u samom atomu energija uzmaka postaje veća pošto pri ovom uzmaku dolazi u obzir emisija delića koji ima odredjenu masu u miru. Energija uzmaka je

$$E = \frac{4{,}8}{M}\ 10^{-5}\ (H\rho)^2; \quad H\rho = \text{moment elektrona u gauss.cm.}$$

Energija uzmaka može biti dovoljna da rasturi molekul ali u izvesnim slučajevima (Br^{80}) ova energija iznosi samo 0,0155 eV pri γ emisiji, odnosno 0,34 eV za unutrašnji foto-efekt, prema tome je manja od veze ovog atoma u molekulu. Ali se može pri tome desiti da čim elektron napusti svoju orbitu, usled toga što se izmeni valenca, prekine se time i hemiska veza. Tako se atom, koji je pretrpeo izomernu promenu može sada, pošto je postao jon, odvojiti hemiskim metodama slično kao u Scilard-Chalmers-ovoj reakciji pri bombardovanju neutronima. Izgleda da je unutrašnji foto-efekt od glavnog značaja za ovo hemisko odvajanje.

5. Mesothorium II i izomerizam.— Sa stanovišta teoriskog i eksperimentalnog iznesenog u prethodnim odeljcima prodiskutovaćemo verovatni slučaj izomerije jezgra $_{89}MsTh_2^{228}$ · $_{89}MsTh_2^{228}$ se može rastaviti putem frakcionog iskristalisavanja sa dvojnim solima tipa $M(NO_3)_3 2NH_4NO_3$—$4H_2O$, gde M stoji mesto retkih elemenata grupe lantanida, u frakciji sa radioaktivnim periodama koje se razlikuju međusobno do 9% [3]. Tako npr. frakcije obeležene sa brojevima I, II, III i IV gde frakcija I stoji na čelu ostalih, pokazuje ove periode:

	T =
I	6,28h
II	5,75„
III	5,80„
IV	6,20„

Vrlo je verovatno da postoji izomer sa kraćom periodom od srednje periode $T = 6{,}2$ koji se usled promene u hemiskim osobinama nastalim promenom broja elektrona pomera pri frakcionisanju ka I.

Verovatnoća izomerizma $MsTh_2$ se nalazi i u toj činjenici što je kod njega nađena [4] čitava skala malih energiskih vrednosti β zrakova od: 2,88; 3,35; 7,83; 9,72; 15,1; 21.7; 24,2; 30,6; 31,5; 34,5; 36,5; 38,1 *keV*. što bi odgovaralo mogućnosti metastabilnih stanja atoma i kaskadnom prelazu do stabilnog stanja.

$MsTh_2$ pored β emituje γ zrake pa bi se moglo uzeti u obzir par izomera povezanih genetički međusobno. Neka npr. $MsTh_2$ ima dva izomerna jezgra A i B, od kojih A prelazi u B ispuštajući β zrake dospevši u metastabilno stanje a odavde γ emisijom u osnovno stanje. Verovatnoće prelaza β odnosno γ raspadanjem jesu λ_β odnosno λ_γ. Poluvreme stabilnog stanja bilo bi

$$T = \frac{0{,}69}{\lambda_\beta + \lambda_\gamma}$$

a odnos račvanja između obe vrste

$$p = \frac{\lambda_\beta}{\lambda_\gamma}.$$

U slučajevima da je ovaj odnos mnogo veći od jedinice jezgro se ponaša u oba stanja kao dva potpuno različita jezgra emitujući β zrake koje prate γ zraci. Spektri β zrakova bi bili različiti.

Za $p \leqslant 1$ jezgro prelazi u metastabilno stanje odakle prelazi ka B emitujući β zrake; ovo bi bio slučaj genetički zavisnih jezgra.

U oba slučaja: analizom spektra i razlikovanjem oba stanja apsorpcijom može se izvesti pouzdani zaključak i u komplikovanijim slučajevima koji bi se nalazili između oba napred pomenuta.

Dalja istraživanja o izomeriji $MsTh_2$ nalaze se u toku.

(Saopšteno 8-XI-1949).

LES PROBLÈMES D'ISOMERISME NUCLÉAIRE

PAR D. K. JOVANOVITCH

D'après une discussion sur les problèmes nucléaires ratachées à l'isomerisme, l'auteur prend en considération le cas du MsThII, qui présente une variation de la période en le fractionnant avec les sels de terres rares. Les expériences sont en cours qui donneront une explication la plus proche de ce problème.

Literatura

1. N. Feather. Radioactive Branching, Phys. Soc. Reports, Vol. XI, 1946—1947.
2. E. Segrè a. A. C. Helmholz. Rev. of Mod. physics, Vol. 21, 1949.
3. D. K. Jovanovitch, Recherches sur la $MsTh_2$ (Thèses de doctorat 1925)
4. D. K. Jovanovitch et A. Proca, C. R. 183, 878, 1926.

ISTRAŽIVANJE KOZMIČKIH ZRAKA POMOĆU OSJETLJIVOG SLOJA FOTOGRAFSKE PLOČE

MARIN KATALINIĆ, SKOPLJE

Istraživanje kozmičkih zraka pomoću fotografske ploče je nova metoda' koja posljednjih godina sve to više hvata maha. Početak joj datira s god. 1937 (G Wambacher i M. Blau). Metoda je u osnovnim crtama vrlo jednostavna; ne traži nikakvih osobitih aparatura. Potrebne su specijalne fotografske ploče, fotografska komora i dobar mikroskop s uređajem za mikrofotografiju. Ta mi je okolnost dala pobudu da na ovom kongresu iznesem nešto o njoj u glavnim crtama.

Eksponiramo fotografsku ploču potpuno zaklonjenu od svjetlosti djelovanju kozmičkih zraka kroz nekoliko sedmica na ovećoj visini, pa je iza toga običnim postupkom razvijemo, fiksiramo i osušenu je promatramo pod mikroskopom. Nabijene korpuskule na svom putu kroz emulziju aktiviraju zrnca srebrnog bromida, na koja naiđu, pa takva aktivirana zrnca izluče u razvijaču zrnca srebra kao pod djelovanjem svjetlosti. Staza korpuskule će se onda pod mikroskopom opažati kao niz crnih zrnaca. Tako nalazimo u vidnom polju mikroskopa pojedinačne tragove, ili ako je korpuskula kozmičkih zraka proizvela dezintegraciju nekog atoma, onda će nabijene korpuskule, koje su izletjele iz dezintegrirane jezgre, dati tragove, koji izlaze iz iste tačke, činit će tzv. zvijezdu. Ekspozicije na balonima-sondama.

U tim dezintegracijama ima neobičnih pojava, kakvih ne poznajemo u fizici jezgre dostupnoj našim terestričkim sredstvima. Vrlo malen odlomak njih uspjelo je u posljednje 2 godine oponašati najjačim oružjem atomske fizike, ciklotronom. Mislim na proizvođenje mezona, dobiveno bombardirajući ugljen, *Cu* i dr. alfa zrakama energije iznad 300 *MeV*. Mnogi naglašuju, da se u dezintegracijama pomoću kozmičkih zraka počinju otvarati prve strane novih poglavlja fizike jezgre. Prema tome, to istraživanje ima i čar zalaženja u nepoznato. To je bio drugi povod ovom referatu.

Kod običnih fotografskih ploča uveliko smetaju po sebi razvijena zrnca srebra, koja čine tzv. mrenu. Osim toga, poveliki su razmaci aktiviranih i razvijenih zrnaca srebra. Zbog toga se staze teško raspoznavaju. Zato su napravljene specijalne emulzije, manje osjetljivosti od trgovačke fotografske ploče, ali zato gotovo slobodne od mrene; osim toga, te emulzije imaju veću koncentraciju srebrnog bromida i jodida (oko 80%). Zbog toga se u njima pojavi mnogo čišće opažaju. Najpoznatije su vrste Agfine *K*-ploče i *C*-2 ploče Ilford. Specijalno se traži od ovakvih emulzija, da su oslobođene od tragova prirodnih radioaktivnih elemenata; a to je već teži zadatak. Debljine osjetljivog sloja idu od 40 μ do 300 μ, a ponekada do 700 μ.

Na prvi bi se mah moglo činiti, da nije najsretnije rečeno, da se radi o istraživanju kozmičkih zraka. Jer emulzija registrira nabijene čestice, koje su nastale djelovanjem kozmičkih zraka, a korpuskula iz kozmičkih zraka, koja je izazvala dezintegraciju, u najvećem dijelu slučajeva ostaje nepoznata. Međutim, ne stojimo u tom pogledu bolje ni s Geiger-Müllerovim brojačem, a često ni s Wilsonovom komorom; jer i brojač registrira kozmičke zrake putem izbijenih elektrona. Čestica, koja u njemu i u Wilsonovoj komori ne izazove ionizacije, ostaje neregistrirana. Iz posljedica izazvanih kozmičkim zrakama i u elektronskom brojaču i u Wilsonovoj komori izvodimo pretpostavke i zaključke. To isto činimo i sa rezultatima registriranim u fotografskoj emulziji. Na pr., fotografska je ploča posljednjih godina omogućila važnih otkrića o mezonu, a ima izgleda, da će ona takvu ulogu igrati i u upoznovanju varitrona. U vezi s ovim potrebno je napomenuti, da i neutron katkada znade ocrtati indirektnim putem svoju stazu u emulziji.

Navedene vrsti emulzija registriraju nabijene čestice do mezona s masom oko 70 m_e; za manje mase nema dokaza. Elektrone one ne registriraju, osim možda vrlo sporih elektrona. Ove godine došle su u promet i takve emulzije, koje registriraju i staze brzih elektrona do relativističkih brzina, a staze sporih elektrona do nekih 20 *kV*, kao Kodakova emulzija *N. T. 4.* Time je omogućen dublji pogled u pojave kod zvijezda dezintegracije.

Staze različitih vrsti nabijenih čestica razlikuju se u emulziji po gustoći zrna i po debljini zrna, jer jedno i drugo zavisi u prvom redu o nabojnom broju, a u manjem iznosu i o masenom broju čestice. Pod gustoćom zrna razumijemo srednji broj razvijenih srebrnih zrnaca na 1 mikron, ili srednji razmak među razvijenim zrnima, izražen u mikronima. Ovo drugo je praktičnije, jer već nom dolaze brojevi veći od 1. S druge strane, gustoća zrna za istu vrst čestica zavisi o brzini čestice. Na pr. u Agfinim *K*-pločama kod datog načina razvijanja srednji razmaci zrna u dugim i vrlo dugim pojedinačnim protonskim tragovima leže između 2,3 μ i 2,9 μ s rasipanjima do iznad 3 μ. U tragovima sporih protona, kakve nalazimo u dezintegracijama lakih atoma, srednji razmaci zrna u istim prilikama leže između 2 i 2,3 μ. Kod alfa čestica imamo sličnih razlika; na pr. kod uranovih alfa čestica srednja vrijednost srednjeg razmaka leži oko 1,45 μ, a kod najbržih alfa čestica iz prirodno radioaktivnih elemenata, kakve emitira *ThC'*, ta srednja vrijadnost leži između 1,8 i 1,9 μ. U tragovima vrlo brzih alfa čestica, kakve nalazimo u zvijezdama (dosezi u uzdušnom ekvivalentu 30 i više *cm*) srednji razmaci leže oko 1,9 μ.

Zavisnost gustoće tragova u masi dolazi do izražaja već kod kraćih deutonskih i tritonskih tragova; jer njihove gustoće tragova leže u intervalu između 1,9 i 2,1 μ; tj. između tragova sporih protona i brzih alfa čestica. Mezonski tragovi se dosta lako dadu razlikovati od brzih protonskih, jer se s jedne strane ističu svojom malenom gustoćom zrna, a vrlo često i svojom krivudavošću; s druge strane protonski su tragovi obično popraćeni δ-izbojcima. U Agfinim *K*-pločama u tragovima mezona s masom oko 200 m_e srednji razmak zrna leži u početku staze oko 3,3 μ, a na njezinu kraju oko 2,5 μ. Upravo kod mezona jako dolazi do izražaja gustoća zrna o masi, pa se u mnogo slučajeva dala približno odrediti masa mezona s masama oko 200 m_e i 350 m_e iz gustoće traga. Nađen je jedan mezonski trag s vrlo tankim zrnom i sa srednjim razmakom zrna iznad 4 μ; iz dezintegracije proizvedene tim negativnim mezonom dala se izračunati njegova masa i rezultat je bio $m_{\mu} = 68\ m_e$; a to je u skladu s malenom gustoćom i s tankoćom zrna.

Korpuskule s nabojnim brojem 3 daju tragove s razmacima zrna između 1 i 1,3 μ. Već kod korpuskula sa $z = 4$, a pogotovo kod $z > 4$ zrna su srasla, pa se brojenje zrnaca ne da provesti. Međutim se tragovi čestica sa $z \geqq 3$ ističu prema alfa česticama većom debljinom zrna: trag je odebljan, ili čak pokazuje sitne nepravilne izbojke. To dolazi od prejake ionizacije, koju takva čestica izaziva na svom putu, a izbojci dolaze od odbačenih elektrona. Ovo napose dolazi do izražaja kod spomenutih emulzija osjetljivih za elektrone. U takvim emulzijama redovito su zrna srasla već kod protona, a često se nalazi sraslih odlomaka i u stazama π-mezona.

Gustoće zrna u tragovima istovrsnih čestica iste brzine, na pr. kod alfa čestica istog elementa, podvrgnute su kolebanjima unutar izvjesnih granica; ali su one ipak gušće poređane oko neke srednje gustoće u tom intervalu. To omogućuje prilično veliku sigurnost kod pripisivanja nekog traga ovoj ili onoj vrsti čestica. Dio tih kolebanja statističke je prirode. Jedan se dio može pripisati povremenim promjenama efektivnog naboja čestice na njezinom putu kroz emulziju. Velikog udjela ima tu i fading, o kojemu će još biti govora. Možda se jedan dio kolebanja gustoće uzduž jedne te iste dugačke protonske staze dade svesti na manjkavu homogenost emulzije.

Kako je već spomenuto, staze neutralnih čestica nevidljive su. Staze neutrona pokatkada su označene počecima kratkih protonskih tragova ili čak središtima dezintegracija, koji svi leže na istom pravcu.

Na brzim protonoma izletjelim iz jedne zvijezde opaža se, da imaju manju gustoću zrna u početku svoje staze, gde im je brzina najveća, a gustoća se traga znatno uvećava ispred kraja staze — ako trag svršava u emulziji — zbog manje brzine. Rijetko se nađu izuzeci. To se isto opaža na mezonskim tragovima. Ovo omogućuje kod pojedinačnih tragova ili kod tragova negativnih mezona, koji svršavaju u jednoj dezintegraciji, određivanje smjera gibanja čestice; a to je napose u pitanju dezingracija mezonima vrlo važno.

Naravno, numerička strana ovih podataka različita je od jedne vrsti emulzije do druge. Kod iste vrsti emulzije mnogo uplivaju i vrst razvijača i okolnosti razvijanja. Za kvantitativno izrabljivanje opažanja vrlo je važno, osobito kod debelih emulzija, da se trajanje razvijanja, a u vezi s tim i koncentracija razvijača, odaberu tako, da djelovanje razvijača dopre do najdubljih slojeva emulzije. Za ploče sa debljinom sloja iznad 200 μ izrađen je poseban, tzv. temperaturni postupak, kojemu je svrha, da bi se postiglo jednomjerno djelovanje razvijača u dubini kao i na površini. Taj se postupak zasniva na poznatom svojstvu razvijača, da ne djeluje pri niskim temperaturama. Ploču najprije stavimo u razrijeđeni hladni razvijač temperature oko 6^0 C i ostavimo je u njemu kojih 20^m, da bi razvijač difuzijom prodro do najdubljih slojeva. Onda je premjestimo u razrijeđeni razvijač temperature 18^0C, gde se obavi pravo razvijanje. Napokon, da bi se djelovanje razvijača pravodobno zaustavilo u svim slojevima, odatle premjestimo ploču u razrijeđenu ocetnu kiselinu. Sličan se temperaturni postupak primenjuje i za fiksiranje. Treba pripomenuti, da se sve ove ploče zbog svog bogatstva na srebrnim solima vrlo sporo fiksiraju.

Datu vrst ploča treba baždariti pomoću alfa zraka, a gde ima za to mogućnosti i pomoću protona poznate energije. Za baždarenje najzgodnije su alfa zrake iz radiotorija i njegovih sljednika. Nadasve je važno odrediti srednju moć kočenja emulzije u poredbi s kočenjem u vazduhu, da bi se mogle odrediti iz duljine tragova početne kinetičke energije čestica. U tu svrhu treba usporediti srednji doseg neke poznate korpuskule u emulziji s njezinim dosegom u uzduhu u jednakim prilikama. Najpraktičnije se to izvodi pomoću alfa zraka elementa *ThC'* jer se one jednoznačno ističu dugačkim tragom u nekim 5-krakim zvijezdama u emulzijama, koje su prije razvijanja bile impregnirane vrlo razrijeđenom rastopinom torijeva nitrata. Postupak je ovaj. Ploču kupamo kroz 30^m u jako razrijeđenoj rastopini torijeva nitrata, pa je čuvamo u mraku i poslije tri dana je razvijemo. Onda pod mikroskopom opažamo, osim pojedinačnih tragova staza alfa čestica i veći broj 2- do 5-krakih zvijezda, koje potječu od alfa zraka iz istih atoma, koji su se u tom vremenu jedni više, drugi manje raspadali. Treba tražiti 5-krake zvijezde, u kojima je jedan krak mnogo dulji od ostalih; jer taj odgovara alfa čestici iz *ThC'*. Kako je poznato, u torijevu nizu imamo razgranjenje raspadanja kod *ThC*:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & ThC \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr, "\alpha"] & & \\
65\% & ThC' \arrow[dr, "\alpha"'] & & ThC'' \arrow[dl, "\beta"] & 35\% \\
 & & ThD & &
\end{tikzcd}$$

Prema tome, imamo 2 vrsti 5-krakih zvijezda od alfa raspadanja radiotorija i njegovih sljednika: manji broj 5-krakih zvijezda s gotovo jednakim tragovima i veći broj 5-krakih zvijezda s jednim krakom duljim od ostalih; to je taj, koji tražimo. Podijelimo li doseg alfa zrake *ThC'* u uzduhu normalnog tlaka pri temperaturi sobe sa srednjom dužinom traga alfa čestice u emulziji, dobivamo moć kočenja emulzije (na pr. 2000: 1). Ovakvo određivanje moći kočenja je približno, jer ova polako raste s energijom čestice. Ako pomnožimo duljinu traga neke korpuskule u emulziji s moći kočenja, dobivamo vazdušni ekvivalenat tog traga. Iz tog ekvivalenta možemo izračunati početnu brzinu te korpuskule, a iz te brzine i iz mase početnu kinetičku energiju korpuskule. Za određivanje početne brzine iz dosega služe ove formule. Za protone empirička Blackettova formula:

$$v^{3,4} = 5{,}65 \cdot 10^{30}\, R$$

gđe je R doseg u uzduhu, odnosno kod nas to je uzdužni ekvivalent. Za alfa čestice služi Geigerova formula, koja je također empirička:

$$v^3 = 1{,}04 \cdot 10^{27}\, R\,.$$

Napokon za fragmente sa $z \geqq 3$ može se upotrebiti Bohrova formula, kojom se dosezi takvih fragmenata uspoređuju s dosegom R_α alfa čestica iste početne brzine:

$$\frac{R_f}{R_\alpha} = 5\,\frac{m_1}{z_1^{2/3}} \cdot \left(\frac{v_o}{v_i}\right)^2$$

gdje su m_1 masa, R_f uzdušni ekvivalent, a z nabojni broj fragmenta; v_i je početna brzina fragmenta, dok je $v_0 = 2{,}2 \cdot 10^8$ *cm/sec* brzina elektrona u vodikovu atomu u normalnom stanju. Pretpostavka je: $v_i > v_0$. Tu imamo 2 nepoznate veličine, od kojih se jedna odnosi na alfa česticu (R_α), a druga je zajednička (v_i) alfa čestici i fragmentu s poznatim dosegom R_f u uzduhu. Prema tome, imamo da riješimo sustav jednadžbi s 2 nepoznate, gdje je prva jednadžba Bohrova formula, a druga je Geigerova formula.

Iz poznatih početnih brzina i poznatih masa određujemo za pojedine vrsti korpuskula njihove početne kinetičke energije za dani doseg. Najbolje je tim načinom izraditi krivulje zavisnosti energije o dosegu u emulziji za svaku vrst korpuskula, koje dolaze običnije u obzir. Onda se kod analize zvijezda jednostavno dobivaju ukupne energije. Izvjesna nesigurnost u energijama zvijezda dolazi odatle, što kod datog nabojnog broja $z \geqq 2$ nijesmo u stanju da utvrdimo, o kojem se izotopu radi. Ali tim počinjena pogreška jedva da može premašiti tako reći prirodne granice pogrešaka ove metode; a te se mogu cijeniti prosječno na iznad $\pm$ 10%.

Dobro je usporediti vrijednost metode fotografske ploče s Wilsonovom metodom magle, odnosno s Wilsonovom komorom. Fotografska ploča ima prema Wilsonovoj komori nesumnjivu prednost u tome, što ona trajno registrira pojave, a ne na mahove ili uz izvjesne eksperimentalne uslove, kako je to kod Wilsonove komore u spoju s nizom elektronskih brojača. U tome ima fotografska ploča zajedničku crtu s elektronskim brojačem; ali ima prema ovome prednost, da svoje registrirane rezultate ostavlja trajno vidljivima i očiglednima.

S druge strane, Wilsonova komora ima prednost, da ona obuhvaća oširе snopove iz pljuska. Mogućnost primjene magnetskog polja omogućuje Wilsonovoj komori određivanje mase korpuskula s mnogo većom točnošću nego je to moguće fotografskom pločom pomoću brojenja zrnaca srebra, odnosno određivanjem gustoće zrna. Istodobno primjena magnetskog polja omogućuje i određivanje predznaka korpuskula. Fotografska ploča opet ima prednost, da registrira pojave izazvane korpuskulama, koje dolaze u mikroskopski uskim snopovima. S Wilsonovom komorom ima zajedničku crtu, da registrira pojave izazvane neutronima, a indirektno i same neutrone.

U vezi sa spomenutim registriranjem širokih snopova Wilsonovom komorom treba napomenuti ovo. Na prvi mah moglo bi se neispravno zaključiti, da Wilsonova komora ima prednost većeg volumena u svima dimenzijama. Ma koliko to na prvi pogled izgledalo paradoksnim, u stvari fotografska ploča ima prednost veće dubine, kada uzmemo u obzir veliku moć kočenja, kakvu ima emulzija; a ta iznosi okruglo 2000 : 1. To znači, da su staze u emulziji toliko puta skraćene prema stazama u Wilsonovoj komori, u kojoj je plin pri normalnom tlaku. Onda je jasno, da fotografska ploča s debljinama sloja 50 do 100 μ već izjednačuje po dubini velike Wilsonove komore, jer $2000 \cdot 100\,\mu = 20$ *cm*. Ploča s debljinom sloja 700 μ uz jednolično razvijanje po debljini pomoću temperaturnog postupka premašuje dubinom najveće Wilsonove komore, jer odgovara dubini 140 *cm*.

I z v o r i   p o g r e š a k a. Glavnim izvorom pogrešaka imamo smatrati vremensko slabljenje latentne slike. Za taj pojav upotrebljavamo naziv „fading". Sastoji se u ovome. Ako eksponiranu sliku ne razvijemo odmah, već pustimo da prođe između ekspozicije i razvijanja podulje vrijeme, 5 do

30 dana, latentna će slika oslabiti, pa će razvijena slika izgledati podeksponirana. To isto vrijedi i za latentne slike nastale korpuskulama. Zbog toga će zvijezda nastala prvih dana ekspozicije poslije razvijanja pokazati znatno manju gustoću i manju debljinu zrna nego zvijezda, koja je nastala jedan dan prije razvijanja. Specijalna istraživanja, koja su provedena u svrhu ustanovljivanja uzroka fadingu, pokazala su, da mu je glavni uzrok djelovanje kisika uz pristup vlage. Ploča čuvana mjesecima u vakuumu jedva da je pokazala nešto fadinga. A ploča eksponirana na visini gotovo je redovito izložena istodobnom djelovanju obaju uzroka. U nepovoljnim prilikama može slika posve iščeznuti.

Fading ponajprije djeluje na debljinu zrna; umanjuje i gustoću zrna, a tim načinom može i skratiti trag. Prema tome, umanjivanjem debljine i gustoće zrna fading prividno umanjuje redni broj korpuskule, pa već tim prividno umanjuje energiju korpuskule; a to pogotovo čini skraćivajući joj trag u emulziji.

Kod prosuđivanja pojava, koje opažamo u fotografskoj ploči pod mikroskopom lako možemo da upadnemo u dvije pogreške subjektivne prirode.

1). Lako naginjemo tome, da pojave koje vidimo u vidnom polju blizu jednu drugoj smatramo nastalima istodobno. Prema tome, rado ćemo ih pripisivati istovrsnim uzrocima, koji su istodobno djelovali; na pr. djelovanju uskih snopova istovrsnih ili bar konjugiranih korpuskula. U pločama dosta često nailazimo na akumulacije tragova i zvijezda. O tome nema sumnje, da su neke od tih akumulacija stvarno nastale istodobno pod djelovanjem nekih korpuskula, koje su naišle u mikroskopički uskom snopu. Takva je vrlo gusta akumulacija zvijezda s 3 do 10 krakova, koju je nedavno našao i objavio Ždanov u okolici dviju totalnih dezintegracija atoma srebra. Takve su i akumulacije 3- i 4-krakih zvijezda, koje su nađene u okolici totalnih dezintegracija olovnih atoma, a pogotovo dvojne zvijezde dezintegracije olovnog atoma. I drugi su autori došli nedavno do zaključka, da ima stvarnth akumulacija. Ali s druge strane, znatan dio manjih akumulacija od po dvije do tri zvijezde može da bude slučajan, jer su pojedine zvijezde mogle nastati u vrlo različitim vremenima, a samo su se slučajem našle jedna blizu druge. Napokon nađe se u zvijezdama takvih pojedinosti, koje nijesu mogle nastati istodobno s ostalim tragovima. Takva je na pr. T-dezintegracija tipa Be^8_4, kojom ponekada završuje jedan krak neke zvijezde.

Kako se općenito provodi analiza jedne zvijezde? Prvi je korak ustanoviti po gustoći tragova vrst nabijenih čestica, koje su izletjele u dezintegraciji. Onda zbroj nabojnih brojeva daje u slučaju totalne dezintegracije nabojni broj atoma, koji se dezintegrirao. Na prvi mah stvar izgleda jednostavnom, jer naravno dolaze u obzir samo elementi, koji se nalaze u želatinu, odnosno u emulziji. Ali tu dolazi mnogo izvora nesigurnosti. Strmina tragova, koji općenito ne leže horizontalno, prividno povećava nabojne brojeve. Gotovo redovito se dešava počevši od kisika, a pogotovo kod broma i kod srebra, da je zbroj nabojnih brojeva manji od nabojnog broja najvjerovatnijeg atoma. Tome može biti više razloga. Može biti, da je jedna ili druga nabijena korpuskula izletjela gotovo normalno prema horizontali, u pravcu vidnog polja, pa se njezin trag nije dao raspoznati; a ako ga pažljivim promatranjem ishodišta i pronađemo, on je za zbroj nabojnih brojeva izgubljen, jer mu je nabojni broj nepoznat. Vrlo se često dešava, da zvijezda sadrži jedan kratak trag, kojemu prema gustoći zrna treba pripisati nabojni broj veći od 3; a to je vrlo nesigurno zbog sraslosti zrna. Tu se neki oslonac može dobiti u debljini zrna. Konačni koraci u analizi jesu postavljanje jednadžbe dezintegracije i određivanje energije. Ovo poslednje može se odnositi samo na djelomičnu energiju, ako je određujemo iz duljine tragova i mase čestica, jer je nepoznata energija izbačenih neutrona.

2). Kod ove analize možemo lako upasti u drugu subjektivnu pogrešku, kojoj je izvor u tome, da smo lako naklonjeni tome, da svaku zvijezdu smatramo totalnom dezintegracijom. Na pr. trokrake zvijezde s 3 protonska traga ne mogu biti totalne dezintegracije, jer litija nema u želatinu. Tu ne može biti sumnje, da se radi o parcijalnoj dezintegraciji, jer je slučaj po sebi jasan. Međutim ne može biti sumnje, da ima parcijalnih dezintegracija i osrednjih atoma, kao kisikova, ili težih, kao *Br* i *Ag*. Uzmemo li takve dezintegracije totalnima, na taj način pogrešno povećavamo relativni broj dezintegracija lakih atoma iz želatina na račun težih atoma iz cijele emulzije. Prosuđivanju, da li je jedna dezintegracija totalna ili ne, u mnogo slučajeva pomaže analiza tragova po nabojnim brojevima i energijama i usporedba ukupne energije vidljivih tragova s defektom mase atoma, koji bi po zbroju nabojnih brojeva trebao odgovarati toj dezintegraciji.

Ako nam je tako uspjelo analizom ustanoviti atom, kojemu odgovara neka dezintegracija, još uvijek je teško jednoznačno ustanoviti reakciju, kojoj bi ona odgovarala. Jer u najvećem dijelu slučajeva nepoznata je vrst korpuskule, koje je izavala reakciju. Prema svima dosadašnjim rezultatima različitih autora, oko 90% svih dezintegracija kozmičkim zrakama ima se pripisati neutronima, a 10% porazdjeljuje se s jedne strane među negativne mezone, s druge strane među brze protone i alfa čestice, dok najmanji dio toga treba pripisati djelovanju vrlo energetičkih fotona. Međutim i kod dezintegracija neutronima nije sigurno, da li je neutron ostao u jezgri ili je samo proletio kroza nju. Drži se, da vrlo brzi neutron s energijom 200 *MeV* može proletjeti kroz više jezgara i izazvati njihove dezintegracije ostavljajući u svakoj dijelove svoje kinetičke energije u iznosima 30 *MeV* do 100 *MeV*. Za ovakve dezintegracije izazvane istim neutronom ima eksperimentalnih dokaza. A za jednoznačno postavljanje šeme dezintegracije neutronom svakako je potrebno znati, da li je neutron ostao u jezgri, ili se radilo o jednom od procesa, gdje je neutron samo proletio kroz jezgru.

Iz svega ovoga vidimo, da nas ne smije iznenaditi, ako u radnjama iz ovog područja na svakom koraku susrećemo pretpostavke, ako se za rezultate zadovoljavamo ogradama: „možda“, „vjerojatno je“ i tome sličnim. Međutim u tom pogledu nemamo ništa sigurnijih interpretacija ni za one dezintegracije, koje su uhvaćene Wilsonovom komorom.

Ipak se do sada moglo ustanoviti sa vrlo mnogo primjera, da načini dezintegracije jednog te istog atoma vjerojatno jednom istom vrsti čestice, na pr. neutronom iz kozmičkih zraka ili mezonom, mogu biti vrlo raznoliki. Kod lakih atoma iz emulzije dala su se ustanoviti samo dva tipa istovrsnih dezintegracija, od kojih bi jedan mogao pripadati kisiku, a drugi ugljiku. Raznolikost je veća kod atoma s većim rednim brojevima. Čini se čak, da je velika raznolikost u dezintegracijama istog atoma glavna karakteristika dezintegracija kozmičkim zrakama. Kod dezintegracija terestričkim sredstvima malo imamo primjera sličnih raznolikosti. Jedan je primjer poznati dvojni način raspadanja posredne nestabilne jezgre F_9^{18} u Rutherfordovoj dezintegraciji atoma dušika alfa zrakama; to raspadanje može ići dvojakim putem:

$$N_7^{14} + He_2^4 \longrightarrow F_9^{18} \begin{array}{l} \nearrow \; O_8^{17} + H_1^1 \\ \searrow \; F_9^{17} + n_0^1 \end{array}$$

Put reakcije uslovljen je u ovom primjeru energijom alfa čestice, koja je ušla u jezgru dušika. Vrlo je vjerojatno, da su i u dezintegracijama kozmičkim zrakama raznoliki načini dezintegracije iste jezgre istom korpuskulom također uslovljeni različitim iznosima energije, koje je ta korpuskula ostavila u jezgri.

Nešto se bolja vjerojatnost interpretacije može postići, ako atome, za koje želimo ispitati dezintegracije kozmičkim zrakama uvedemo prije ekspozicije u emulziju kupanjem ploče u rastopini jedne soli odnosnog atoma. Tako su ploče Ilford *C* 2 vrlo često impregnirane jednom solju bora; bor ujedno umanjuje fading. Druga se varijanta sastoji u tome, da ploču eksponiramo s tankom folijom ili slojem odnosnog elementa ili njegova spoja iznad sloja. Ova je druga varijanta nešto nepovoljnije od prve; jer vrlo je velika vjerojatnost, da će slika dezintegracije u emulziji biti nepotpuna, budući da će se teži fragmenti zaustaviti u samom sloju ili u zaštitnoj foliji celofana ili papira, koju umećemo iznad emulzije radi zaštite od direktnog kemijskog djelovanja.

Mnogo se radi danas ovom metodom u svim krajevima svijeta. Došlo se amo-tamo do zamjernih rezultata. Međutim se čini, da su interpretacija i kvantitativno obrađivanje rezultata još u počecima. Metoda je jednostavna; ali traži mnogo vremena i još više strpljenja. To je tipičan primjer, gdje je istraživanje upućeno na kolektivan rad ljudi oboružanih velikim strpljenjem.

(Saopšteno 8-XI-1950).

ON THE INVESTIGATION OF COSMIC RAYS BY MEANS OF SENSITIVE PLATES

by M. KATALINIĆ

The article is an explanatory report held by the author in the Congress and dealing with the method of investigating the cosmic rays by means of sensitive plates. The properties of the main types of sensitive emulsions are shortly explained and the means of discerning various nuclear fragments and allowing the observer to decide their charges and masses are expounded. The mean value of the relative stopping power of the emulsion

may be determined easily by using the tracks belonging to *ThC′* alpha-particles. The range-energy relations are then computed from the air equivalents of the tracks by means of the formulae due to Blackett, Geiger and, for heavy fragments, by using the formula due to Bohr.

A comparison with the Wilson chamber method gives in many points prevalence to the sensitive plate. By taking into account the stopping power of the emulsion, a plate with the sensitive layer 50 μ to 100 μ thick is as the depth equivalent to a normal Wilson chamber. Thus the plates having very thick emulsion, comparable with the range of the particles, exceed as the depth the largest Wilson chambers. In this manner, the advantage of the Wilson chamber to be able to registering wide showers, is in some degree compensated. But the prevailing defect of the sensitive plate method is the impossibility of determining the time sequence between the particulars seen in the visual field, rare cases excepted.

The main sources of subjective and objective errors are discussed. As the main source of subjective errors may be regarded the tendency of the observer to considering the particulars seen in the visual field as simultaneously generated. Another source of errors may lie in his propensity to rearding every nuclear disintegration as total one. As the sensibility of the method, the electron-sensitive emulsions seem to attain nearly that of the Wilson chamber.

The report was illustrated by a collection of microphotographs made by the reporter himself and by other authors.

AKTIVIRANJE PRIRODNIH RADIOAKTIVNIH VODA I GASOVA I MOGUĆNOST ODREĐIVANJA SADRŽAJA URANA U POROZNIM SLOJEVIMA TERENA

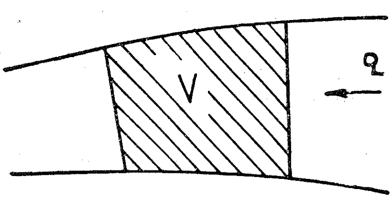
VLASTIMIR VUČIĆ, BEOGRAD

Radioktivne vode u prirodi su bezuslovno vezane sa prirodnim radioaktivnim supstancama. Pojava prirodnih radioaktivnih voda i gasova u svakom slučaju ukazuje na prisustvo prirodnih radioaktivnih materija. Spontanom i stalnom transformacijom prirodnih radioaktivnih tela stvaraju se čitavi nizovi — porodice — radioaktivnih elemenata. Ove prirodne radioaktivne supstance imaju različite fizičke i hemijske osobine i nalaze se u stalnom tekućem procesu obnavljanja i raspadanja. Podzemne vode koje prolaze kroz radioaktivni teren, putem rastvaranja, adsorpcije ili okluzije primaju u sebe neke od radioaktivnih supstanca, nose ih sobom da bi se kasnije pojavile kao prirodne radioaktivne vode. Ovde naročito važnu ulogu igraju emanacije, jer se kao gasovita tela lako izdvajaju i dospevaju do vode ili gasova. Radioaktivnost skoro svih voda u prirodi potiče poglavito od sadržaja emanacije. Razumljivo je da radioaktivnost gasova može poticati samo od sadržaja radona. Radium emanacija ili radon iz uranovog niza ima, usled svoje pogodne periode, najveću važnost i rasprostranjenost kod prirodnih radioaktivnih voda i gasova.

Postanak prirodnih radioaktivnih voda i gasova je već pomenutim činjenicama potpuno objašnjen. Poreklo radioaktivnih supstanca u prirodnim vodama je isto tako jasno i nesumnjivo.

Međutim kvantitativni odnos između radioaktivnosti terena i vode koja se u istom aktivira, je daleko manje poznat. Sam proces aktiviranja prirodnih radioaktivnih voda i gasova spada u domene koji su ostali nedovoljno ispitani. Mehanizam i tok aktiviranja je već unapred davao malo izgleda za njegovo sistematsko ispitivanje, pošto okolnosti na terenu, na prvi pogled, ne daju perspektive na njegovu određenost i pravilnost. Proces aktiviranja na terenu nameće se odmah kao jako komplikovana pojava u kojoj se ne bi moglo doći ni do kakvih određenosti ili zakona. Pored toga aktiviranje se obično dešava daleko pod zemljom i najčešće ostaje tajna dubokog podzemlja. Sem toga interes za detalje aktiviranja možda nije bio tako veliki da bi se dobilo više podataka pri tako teškim uslovima. To su svakako bili razlozi što je proces aktiviranja vode ostao nedovoljno ispitan.

U našoj zemlji postoje više radioaktivnih vrela, među ovima po količini vode naročitu pažnju privlače radioaktivna vrela Niške banje. Po svojoj količini vode, ova vrela prevazilaze sve slične izvore u Evropi. To je možda jedino radioaktivno vrelo čija voda je odmah u stanju da pokreće, ne vodenicu, već čitav mlin. Ovako velike količine radioaktivne vode privlačile su naročitu pažnju i davale više razloga za njihovo detaljno ispitivanje. Inicijativom prof. D. K. Jovanovića preduzeta su ovakva ispitivanja i merenja, koja su najvećim delom izvedena od strane pisca. Za ova ispitivanja instalirana je bila na terenu laboratorija za radioaktivno merenje. Već prva ispitivanja su pored ostalih rezultata pokazala značajnu činjenicu da aktiviranje ovih voda nije tajna dubokog podzemlja, već da se isto vrši velikim delom u plitkim često površinskim slojevima terena. Proces aktiviranja je ovde bio sasvim pristupačan posmatranju te je jedan deo ispitivanja bio u tom pravcu sproveden. Poslednjim događajima u atomistici uran je postao najdragoceniji elemenat te je i sa te strane svakako porastao interes za proces aktiviranja koji se u svakom slučaju vrši od urana i ostalih članova njegovog radioaktivnog niza. Sve su ovo bili razlozi da se ispitivanje procesa aktiviranja i dalje nastavi. Rezultati ispitivanja su pokazali da se aktiviranje vode u Niškoj banji vrši poglavito u poroznim radioaktivnim slojevima terena. Ove slojeve koji u sebi sadrže radium, formirala je voda bilo taloženjem karbonata iz slabih rastvora karsnih vrela (bigar) ili običnim nanosom reka ili bujica. Voda, koja u svom podzemnom toku lagano prožima ove podzemne slojeve, odnosi sobom jedan deo nastale emanacije i tako postaje radioaktivna. Tamo gde nema vode porozne slojeve ispunjava vazduh te se i on na sličan način aktivira. Proces aktiviranja je sa istim materijalom reprodukovan i u laboratoriji. Porozni slojevi na terenu pokazivali su dovoljnu homogenost da bi se u njima mogao posmatrati pravilan tok procesa aktiviranja. Iz ovakvih posmatranja i eksperimentalnih ispitivanja u laboratoriji mogao je biti posmatran zakon aktiviranja i najzad izvršiti njegova matematička formulacija, koja je u glavnim crtama prikazana u sledećim izlaganjima:



Sl. 1

Neka je na sl. 1 pretstavljen presek jedne strujne cevi podzemnog stacionarnog toka vode kroz porozni teren. U datoj strujnoj cevi nalazi se ograničena izvesna zapremina V poroznog radioaktivnog sloja. Sa q je označen intenzitet toka vode, koja putem laganog prožimanja teče kroz strujnu cev. Na izlasku iz zapremine V voda je primila deo emanacije, nastale u radioaktivnom poroznom materijalu. Polazeći od poznatog zakona radioaktivnog raspadanja, a prema gornjem izlaganju dobija se obrazac za proces aktiviranja, koji je detaljno iznesen u ranijem radu pisca[1]). Ako se brojne vrednosti radioaktivne konstante radiuma i emanacije sračunaju zajedno sa ostalim veličinama birajući podesne jediniee, obrazac dobija sledeći praktični oblik:

$$C = 274{,}7\ C_{Ra}\ \frac{\eta\sigma}{k}\left(1 - e^{-0{,}1258\,\frac{kV}{q}}\right) \qquad (1)$$

gde je

C — koncentracija radona u vodi na izlasku iz zapremine V, izražena u Mache-ovim jedinicama.

C_{Ra} — koncentracija radiuma u gr. 10^{-10} po 1 gr. materijala iz poroznog sloja.

---

1) Inž. V. Vučić: Radioaktivnost voda i gasova Niške banje i njihovo akiiviranje (u štampi izdanja S. A. N.).

σ — specifična težina radioaktivnog poroznog sloja u gr/cm^3.
η — koeficient prelaska emanacije.
k — koeficienat poroznosti odnosno slobodni međuprostor koji ispunjava voda u jedinici zapremine poroznog sloja.
V — zapremina radioaktivnog poroznog sloja u strujnoj cevi u m^3.
q — intenzitet toka kroz strujnu cev u lit/min.

Ovaj obrazac važi za slučaj stacionarnog toka vode kroz strujnu cev. Za slučaj da se voda ne kreće, gornji obrazac dobija oblik:

$$C = 274{,}7 \; C_{Ra} \frac{\eta\sigma}{k}\left(1 - e^{-0{,}007549\, t}\right) \tag{2}$$

gde je t vreme u časovima.

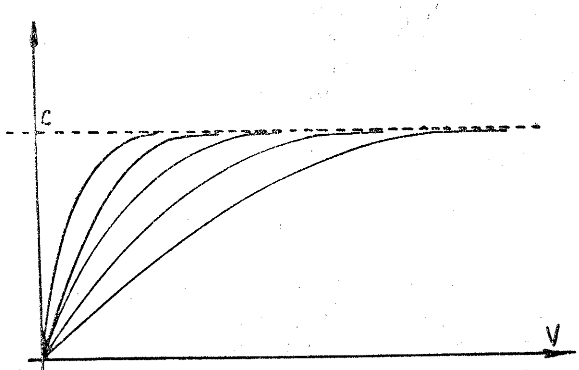
Sve veličine koje figuriraju u obrascima mogu se lako izmeriti ili odrediti sem koeficienta η koji pretstavlja odnos količine emanacije dospele u vodu prema ukupnoj nastaloj količini. Ova veličina može se iz datog obrasca odrediti empiričkim putem. Eksperimentalno određena vrednost η kreće se prema materijalu u granicama od 0,11—0,15 pri temperaturi od 18^0 C.

Obrasci mogu bez daljeg da se primene i za aktiviranje gasova odnosno vazduha. Kod aktiviranja gasova bitna je samo razlika u vrednosti za η koja se ovde kreće od 0,28—0,40, što je svakako posledica veće brzine difuzije i manje viskoznosti gasova. Iz obrasca se vidi, za terensku primenu značajna činjenica, da izlazna koncentracija emanacije ne zavisi od oblika strujne cevi već samo od zapremine poroznog sloja. Eksperimentalna proveravanja kako na terenu tako i u laboratoriji u potpunosti potvrđuju ispravnost obrasca.

Matematička analiza dobivenih obrazaca ukazuje na dalje zaključke koji su još od većeg značaja za praktičnu upotrebu obrasca na terenu. Veličine koje se javljaju u obrascima kao C_{Ra}, σ, η i K su konstante za jednu vrstu terena. Prema tome obrazac (1) pretstavlja koncentraciju radona kao funkciju od nezavisno promenljivih V i q tj.

$$C = f\,(V,q) \tag{3}$$

Ako se veličina q uzme za parametar dobija se porodica krivih pretstavljenih na sl. 2.



Sl. 2

Sve krive imaju zajedničku asimptotu. Obrazac prema tome ima zajedničku asimptotnu vrednost, koja je ujedno i maksimalna vrednost za koncentraciju emanacije. Ova asimptotna vrednost je ista čak i za drugi obrazac (2) koji važi u stacionarnom slučaju. Ova činjenica je od naročite važnosti za praktičnu upotrebu obrasca kao i za pojavu aktiviranja na terenu. Ma kakva bila zapremina poroznog sloja i pri ma kakvom intenzitetu toka, pa i u slučaju da nema kretanja fluida, uvek se postiže ista asimptotna odnosno maksimalna koncentracija emanacije. Drugim rečima maksimalna vrednost koju pri aktiviranju može postići koncentracija radona, ne zavisi ni od oblika ni od zapremine poroznih slojeva, niti pak od intenziteta i oblika toka vode ili gasa. Ovakve okolnosti omogućuju praktičnu primenu obrazaca na terenu, gde je inače skoro nemoguće odrediti intenzitet podzemnog toka, njegovu dužinu i oblik, zapreminu slojeva itd. U pogledu asimptotskih vrednosti, primena obrazaca na terenu izlazi i van okvira homogenih poroznih slojeva. Nekoliko stotina izvršenih merenja na terenu, kao i eksperimentalna proveravanja u laboratoriji, u potpunosti potvrđuju važnost obrazaca, odnosno postojanje asimptotske, maksimalne vrednosti koncentracije. Ovde treba dodati činjenicu koja isto tako ide u prilog praktičnoj vrednosti obrasca. Na terenu se, naime, može postaviti pitanje da li je voda u svom procesu aktiviranja dostigla maksimalnu vrednost koncentracije Kad se koncentracija približuje maksimalnoj vrednosti, drugi član u zagradi

$$\left(e^{-0,1258\,\frac{kV}{q}} \to 0\right)$$

teži nuli.

Smanjivanje ovog člana je eksponencijalno a njegova vrednost pada na 0,01 već pri odnosu $\frac{V}{q} = 80$, što znači da koncentracija postiže praktički maksimalnu vrednost već za $\frac{V}{q} \geqq 80$. Na terenu su zapremine V poroznih slojeva vrlo velike a intenzitet q toka srazmerno mali, te je razumljivo da će vrednost odnosa $\frac{V}{q}$ na terenu biti veliki i u većini slučajeva prelaziti 80. Može se, prema tome reći, da u većini slučajeva, radioaktivne vode na terenu, imaju koncentraciju radona, koja praktički dostiže maksimalnu odnosno asimptotsku vrednost prema obrascu. Ovo naročito važi za male izvore i podzemne vode i gasove čiji su intenziteti tokova neznatni. U svim takvim slučajevima može se upotrebiti izraz za maksimalnu vrednost koncentracije iz prethodnih obrazaca

$$C = 274,7\, C_{Ra}\, \frac{\eta\sigma}{k} \tag{4}$$

Postavljanje obrazaca (1), (2) i (4) kao i njihovo proveravanje detaljno je izvedeno na radioaktivnom terenu Niške banje. Međutim okolnosti pod kojima se javljaju radioaktivne vode u Soko banji veoma su slične onima u Niškoj banji. Izvesna zapažanja i ispitivanja na drugim radioaktivnim terenima pokazuju da dobiveni obrasci imaju i širi opšti značaj.

Obrasci (1), (2) i (4) dati su provereni u naznačenoj formi tako da daju vrednost koncentracije radona u vodama ili gasovima koji se aktiviraju u poroznim radioaktivnim slojevima terena čiji je sadržaj radiuma C_{Ra}. Međutim obrasci se u svakom slučaju mogu upotrebiti i u inversnom obliku koji će davati koncentraciju radiuma odnosno urana u terenu u kojem voda ili gas pri aktiviranju dobiju koncentraciju radona C. Obrazac (1) će u tom slučaju imati oblik

$$C_{Ra} = \frac{C.k}{274{,}7\ \eta\sigma\left(1 - e^{-0{,}1258\ \frac{kV}{q}}\right)} \tag{5}$$

Određivanje sadržaja radiuma odnosno urana u izvesnom materijalu sa terena skopčano je sa dugom i teškom procedurom. Upotrebom obrazaca može se sadržaj u poroznim terenima odrediti i posrednim putem mereći radioaktivnost voda ili gasova, koji se u njima aktiviraju. Ovde leži i druga praktična mogućnost primene obrazaca. Odnos količine radiuma u slojevima prema količini urana stoji u obrnutom odnosu njihovih radioaktivnih konstanata. Obrasci se mogu prema tome prosto preračunati na koncentraciju urana te će u tom slučaju, obrazac (5) imati oblik:

$$C_{Ur} = 1{,}005.10^{-3}\ \frac{C.k}{\eta\sigma\left(1 - e^{-0{,}1258\ \frac{kV}{q}}\right)} \tag{6}$$

Na potpuno isti način dobija se iz obrasca (2) za slučaj stacionarnog stanja fluida

$$C_{Ur} = 1{,}005.10^{-3}\ \frac{C.k}{\eta\sigma\ (1 - e^{-0{,}007549\ t})} \tag{7}$$

I maksimalna asimptotska vrednost prema izrazu (4)

$$C_{Ur} = 1{,}005.10^{-3} . \frac{C.k}{\eta\sigma} \tag{8}$$

Koncentracija urana C_{Ur} je ovde izražena u gr. po 1 kg poroznog sloja, dok je značenje svih ostalih veličina ostalo nepromenjeno.

Prema dosadašnjim izvedenim ispitivanjima, obrasci mogu imati primenu u sledećim slučajevima. Obrasci (5), (6), (7) i (8) mogu da posluže najpre za određivanje koncentracije radiuma odnosno urana u laboratoriji. Zatvaranjem materijala iz poroznog sloja u nekom sudu zajedno sa vodom ili vazduhom, može se posle odmerenog vremena odrediti sadržaj emanacije u vodi ili vazduhu, a iz ovih rezultata putem obrazaca odrediti koncentracija radiuma ili urana u poroznom materijalu. Ovde treba napomenuti da je određivanje procenta urana ili radiuma u ovakvom materijalu sa terena, skopčano sa vrlo dugom i teškom procedurom, dok se merenje radioaktivnosti vode a naročito vazduha vrši daleko lakše i brže. Upotrebom obrazaca se, prema tome, može daleko lakše i brže doći do rezultata u slučajevima kada se ne traži velika preciznost merenja. Naročito ako se radi mnogo merenja sa približno istim materijalom, ovo uprošćenje dolazi do izražaja.

Najveće mogućnosti primene na terenu daje svakako obrazac (8), koji inače ima vrlo prostu formu. Mogućnost praktične primene leži ovde u pomenutoj zajedničkoj asimptotskoj vrednosti koju ovaj obrazac daje.

I u drugim mogućnostima ovakva metoda merenja na terenu daje znatne prednosti. Tako na pr. dovoljno je da se u teren spusti mala sonda i na raznim dubinama uzme gas ili voda čija će se radioaktivnost meriti. Time se kod jedne vrste terena izbegava kopanje i uzimanje uzoraka. Pored toga, izvorska voda nekad dolazi iz većih dubina i može dati podatke o onim slojevima do kojih bi inače bilo vrlo teško doći.

Negativna strana ovakve metode leži u ograničenju merenja samo na porozne terene. Pored toga, ovakva merenja ne mogu dati veliku preciznost, što uglavnom potiče usled prisustva koeficienta η. Međutim po pitanju preciznosti treba izneti i sledeće činjenice.

Ovakvim postupkom određuje se sadržaj urana prema procesu aktiviranja, pri čemu se stvarno dešava izdvajanje emanacije iz komplikovane smese svih članova uranovog radioaktivnog niza. Većina preciznih laboratorijskih metoda merenja radioaktivnih supstanca osniva se na prethodnom izdvajanju emanacije. Merenjem količine izdvojene emanacije može se dalje, iz poznatih odnosa članova radioaktivnog niza u ravnoteži, odrediti i količine svih ostalih članova. Prethodnim izdvajanjem emanacije, merenje se svodi samo na jednu supstancu, i izbegava rad sa komplikovanom smešom članova radioaktivnog niza, što pretstavlja najvažniju prednost ovakvih najčešće primenjenih metoda merenja. Ovde iznesena metoda zasniva se na merenju količina emanacije, koja je neposredno izdvojena iz smese putem procesa aktiviranja. Ovakav način merenja uvršćuje ovu metodu u red pouzdanih i oprobanih laboratorijskih metoda. Ova povoljna okolnost svakako u velikoj meri kompenzuje nepovoljnu stranu metode usled upotrebe koeficienta prelaska emanacije (η). Tako na pr. kvantitativna približna merenja putem Geiger—Müllerovih brojača su vrlo brza i prosta ali kad se radi o čvrstim telima, pouzdanost merenja se znatno smanjuje. Brojači mere ukupni intenzitet zračenja svih članova niza, čija ravnoteža može biti poremećena pri uzimanju probe sa terena a naročito usled eventualnog gubljenja emanacije putem difuzije ili drugih uzroka. Usled toga se dobijaju samo približna merenja čija otstupanja mogu biti veća nego nepreciznost zbog primene koeficijenta.

Najzad treba napomenuti da utvrđeni način aktiviranja pokazuje da se u poroznim terenima voda ili vazduh može znatno aktivirati i kada je sadržaj radiuma odnosno urana relativno mali. Aktiviranje u poroznim terenima je vrlo efikasno usled velike aktivne dodirne površine između poroznog sloja i fluida. Navedeni obrasci, prema tome, daju srazmerno manju vrednost za koncentraciju urana (C_{Ur}) nego što bi se to na prvi pogled očekivalo. Ovo su nove činjenice koje svakako treba uzeti u obzir pri sumarnim procenama sadržaja urana na terenu.

Iz iznesenog materijala može se izvesti opšti zaključak: Pod povoljnim uslovima posmatrana pojava aktiviranja na poroznom terenu ukazala je na pravilnosti koje su bile veće nego što se to na prvi pogled moglo očekivati. Postavljanjem matematičkog obrasca aktiviranja i analizom istih, pojavile su se dalje značajne činjenice. Postignute koncentracije radona pri aktiviranju imaju u svim slučajevima zajedničku asimptotsku i maksimalnu vrednost. Ova maksimalna vrednost je nezavisna od zapremine, oblika i intenziteta toka u kome se dešava aktiviranje, što daje neobično povoljne okolnosti za praktičnu primenu obrazaca na terenu. Veliki broj izvršenih merenja na terenu i uporedna laboratorijska ispitivanja su u potpunosti potvrdili ove činjenice.

(Saopštenje 9-XI-1950)

ACTIVATION OF NATURAL RADIOACTIV WATER AND GASES AND POSSIBILITY OF DETERMINATION OF AMOUNT OF URANIUM IN THE POROUS LAYERS OF THE GROUND

by V. VUČIĆ

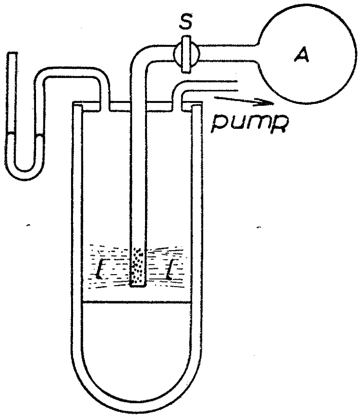
It has been determined that the activation of gases both of mineral springs and underground water on the grounds of Nischka banja generally occurs in the shallow porous layers of the ground. On account of the possibility of the observation of the natural process of activation and its reproduction in the laboratory, a mathematical equation of the process of activation has been given by which the quantitative ratio between the amount of uranium in the ground and the concentration of radon in the water or the gases within, can be determined. The mathematical equations have a maximal asympthotic value that is the same even for very different conditions under which the activation is being done and this enables a practical application even on other porous radioactive grounds. According to the conditions of activation in nature, water and gases in most instances practically attain this asympthotic value of radon concentration, so that this can be used for the determination of amount of uranium in the layers of the ground. This method offers practical advantages especially in the case of prospection by the sandage of the ground.

PRIMENA PARAVODONIKA ZA POSTIZANJE NAJNIŽIH TEMPERATURA

PAVLE SAVIĆ, BEOGRAD

Za dobijanje temperatura ispod 1^0 *K*, po metodi koja je ranije izložena [1], upotrebljen je, pored inertnih gasova i paravodonik, kao sredstvo za otklanjanje „puzanja“ *He* II filma, pošto paravodonik ima sfernu molekularnu strukturu i ponaša se kao inertan gas.

Paravodonik dobijen po metodi Bonhföfer-Harteck-a [2], uvodi se u Dewar-ov sud sa tečnim helijumom na temperaturi nešto višoj od λ-tačke. Da bi se izbeglo zaleđivanje *p*-vodonika u dovodnoj cevi, *p*-vodonik se prethodno smeša sa helijum gasom i ta smeša drži u balonu od pireksa (sl. 1, A), odakle se otvaranjem slavine (S) upušta u Dewar-ov sud sa *He* I. Pri tome je zapaženo da nastupa vrlo fino dispergovani oblik kristalića leda vodonika, koji koaguluju u krupnije komade na λ-tački [3]. Sloj kristala leda *p*-vodonika, koji se staloži na zidove suda (sl. 1 LL) sprečava puzanje filma *He* II i omogućava snižavanje temperature direktnim adijabatskim hlađenjem *He* II, kako je ranije izneseno [1]. Pokušaji, da se kristalići leda *p*-vodonika upotrebe za proučavanje Brown-ovog kretanja u *He* II prekinuto je sticajem prilika i bilo bi poželjno da ih neko preduzme u jednoj od postojećih kriogenih laboratorija. Posmatranjem Brown-ovog kretanja u *He* II mogli bi se rešiti mnogi interesantni problemi odnosa dveju komponenata *He* II fononа i rotona, kao i apsolutno merenje temperature iz srednjeg slobodnog puta rotona.



Slika 1

(Saopšteno 10-XI-1950)

LOWEST TEMPERATURES OBTAINED BY USE OF PARAHYDROGEN

by P. SAVIĆ

The parahydrogen was used, besides inert gases, for the production of temperatures below 1^0 *K* by a method previously described [1]. Owing to its spheric molecular structure and inert gas properties it prevents the creeping of *He* II film.

The parahydrogen produced by Bonhöffer-Harteck method [2] is introduced into a Dewar vessel filled with helium at a temperature slightly greater than λ-point. To prevent its solidification in the inlet tube, the parahydrogen is first mixed with the helium and the mixture kept in a pyrex vessel (fig. 1 A) from where it is introduced in the Dewar vessel by the valve (S).

Highly dispersed crystals of the parahydrogen ice are then formed, which at the λ-point coagulate into somewhat greater particles [3].

The coating of parahydrogen ice crystals precipitated on the walls of the vessel (fig. 1 LL) prevents the creeping of the film of *He* II and permits the lowering of the temperature by direct adiabatic refrigeration of *He* II [1].

The experiments were started on the use of the parahydrogen ice crystals for the study of the Brownian motion in the *He* II, but they had to be stopped, and it would be interesting if somebody would continue with them in anyone of the existing cryogenic laboratories. The study of the Brownian motion in *He* II might give the solutions of many interesting problems relating to fhe two components of *He* II - phonons and rotons, as well as the absolute measurements of temperature from the mean free path of the roton.

Literatura

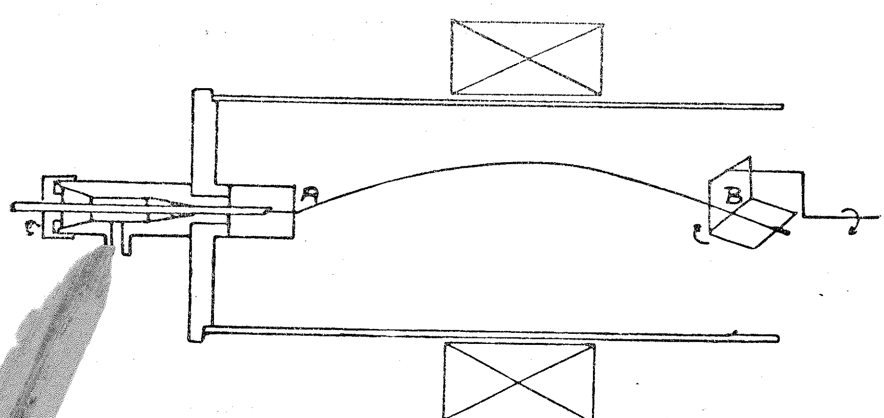
1. Savić P. Glas S. A. N; CXCII. odeljenje prirod. mat. nauka nova serija br. 1,21, (1949)
   Bulletin de l' Academie des Sciences Nat. de Serbie, serie nouvelle, № 1 (sous presse)
2. Farkas A. Orto, para and heavy Hydrogen, Cambridge U. P. 1935 p. 30
3. Savich P. and Shalnikov, Journal of Physics, 1946 Vol X № 3 p. 299

PRIMJENA HODOSKOPA NA BETA-SPEKTROGRAF

MILORAD MLAĐENOVIĆ, BEOGRAD

Primjenjujući Loeb-ov (1) hodoskop na ispitivanje optičkih osobina magnetsih leća beta-spektrografa, konstruisana su dva modela koji se razlikuju od prvobitnog Loeb-ovog modela.

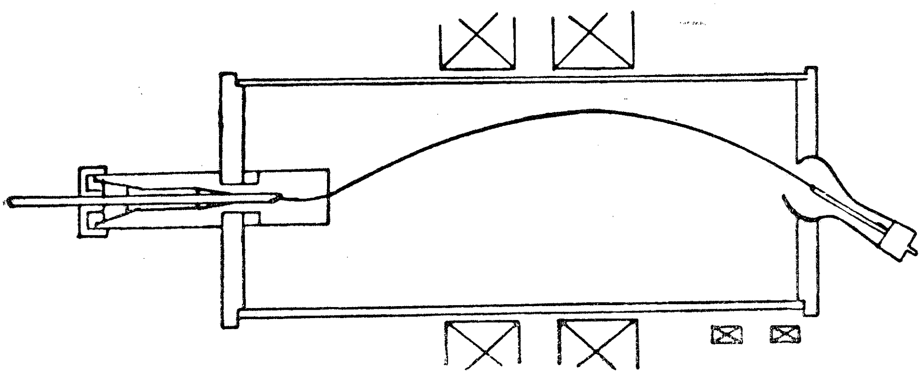
O t v o r e n i m o d e l. Dio aparata koji služi za mjerenje napetosti učinjen je pokretnim, tako da se kraj žice koji izazivamo na oscilacije nalazi u produžetku žice u polju. Namještanje je omogućeno time što je jedan kraj aparata otvoren. Rotacijom oko dvije međusobno okomite ose žica se dotjera tako, da samo dotiče tačku B a ne savija se oko nje. Time je izbjegnut uticaj elastičnosti žice i trenja u tački B na prenošenje napetosti koja iznosi nekoliko dina.



Šema 1

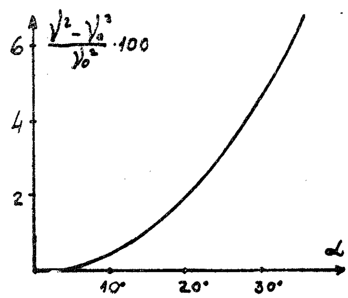
Oscilacije kraja žice koji služi za mjerenje, prenose se na žicu u polju. Ovaj efekat, ne spomenut od Loeb-a, zbog rezonansi žice u polju, ometa precizno određivanje tražene rezonanse kraja žice. Međutim, ovaj efekat se od nepoželjnog može pretvoriti u koristan ako se za mjerenje napetosti upotrebe oscilacije čitave žice u polju a ne oscilacije posebnog dijela izvan polja, kao što je to prvobitno predložio Loeb.

Z a t v o r e n i m o d e l. Oscilatornim magnetskim poljem blizu jednog od krajeva žice može se izazvati čitava žica u polju da oscilira u vidu stacionarnog talasa sa nekoliko čvorova. Staklena kruška služi istoj svrsi kao odgovarajući dio u otvorenom modelu. Model je podešen za vakuum, u kome je rezonansa oštrija a može se upotrebiti žica od wolframa i dovesti do užarenosti. Prednost užarenog wolframa je da se može fotografisati a nedostatak da je čak i užaren nepoželjno elastičan.

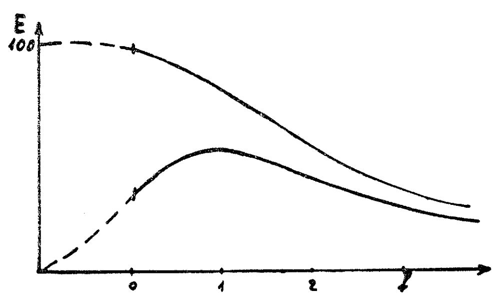


Šema 2

P r i m j e n a. Mogu se dati dvije krive. Na slici br. 3 su prikazane sferne aberacije magnetske leće. Kriva je slična krivim koje su dobili Deutsch (2) i Quade, Halliday (3) za sličan spektrograf. Kriva na slici br. 4



Slika 3



Slika 4

pretstavlja opadanje fokalizacione moći dvostruke leće pri udaljavanju kalemova. Gornja kriva za isti smjer polja u oba kalema, donja za suprotan.

(Rađen[illegible]stitutu za fiziku pri Pretsedništvu Vlade FNRJ)

(Saop[illegible]ademik P. Savić 10-XI-1949).

THE USE OF THE HODOSCOPE FOR RAY-TRACING IN β-SPECTROGRAPHS

by M. MLAĐENOVIĆ

Hodoscope, first proposed by Loeb, has been applied to the study of electron trajectories in magnetic filds of a β-spectrograph.

Two improvements have been made allowing a better determination of the wire's tension. A special device reduces the friction of wire. Alternately, the whole wire in the field can be made to oscilate.

Two curves were given to illustrate the application of the hodoscope.

Literatura

1. J. Loeb, L'onde électrique, jan. 1947, 27
2. Deutsch, Elliot, Evans, Rev. of sc. instr. 15, 1944, 178
3. Quade, Halliday, Rev. of sc. instr, 19, 1948, 234

FIZIKA VELIKIH MOLEKUL

ANTON PETERLIN, LJUBLJANA

Velike molekule so predmet proučevanja kemije, kemijske tehnologije in biologije, saj so to molekule tako važnih snovi kot kavčuk, celuloza, škrob, beljakovine, umetne smole in vlakna. Jugoslavija je zgradila veliko tovarno polivinila, ki naj oskrbuje vso državo s temi prepotrebnimi surovinami.

Lastnosti teh snovi pa zavise bistveno od velikosti in oblike molekul, to je od molekulske mase M in neke karakteristične dolžine R. Naloga fizike je, da najde pota in metode za določevanje obeh količin. Fizika velikih molekul je tedaj bistveno uporabljena fizika, ki naj s svojimi izsledki koristi drugim vedam in tehniški praksi.

Težave pri tej nalogi pridejo od tod, ker je M tako velik — v velikostni stopnji milijona — in so na drugi strani razsežnosti teh molekul vendar tako majhne, da jih ne moremo videti z mikroskopom, v splošnem tudi ne z elektronskim mikroskopom. Klasične metode za določevanje molekulske mase so po večini neuporabne, ker so efekti premajhni. Treba je najti novih poti.

Za določevanje M in R proste molekule nam morejo služiti le raziskave razredčenih raztopin, ker le tam nastopa vsaka molekula zase brez motnje od drugih. V razredčenih raztopinah imamo pričakovati tudi možnosti za raziskavo drugih lastnosti molekule, na pr. mehanske trdnosti, električne in optične polarizirnosti itd.

Molekulsko maso nam da meritev osmoznega tlaka

$$\pi = c \cdot RT/M.$$

Metoda je tem manj natančna, čim večji je M. Praktično gre še do $M \sim 500\,000$.

Prosta difuzija da difuzijsko stalnico D

$$D = kT/\Lambda$$

kjer pomeni Λ upornostni količnik molekule za translacijo v raztopini, to se pravi, pri gibanju s hitrostjo v mora delovati na molekulo sila $F = \Lambda \cdot v$.

Pri sedimentaciji deluje na molekulo sila zemeljske težnosti ali centrifugalna sila v ultracentrifugi, ki je sorazmerna masi molekule. Sedimentacijska hitrost bo tedaj sorazmerna

$$[s] \sim M/\Lambda$$

Razmerje med svojsko sedimentacijsko stalnico $[s]$ in D nam da naravnost M

$$M = [s] \cdot kT/D.$$

Pod istočasnim vplivanjem sedimentiranja in neurejenega toplotnega gibanja nastopi neka ravnotežna razdelitev, iz katere dobimo prav razmerje

$$M/kT$$

torej naravnost M. Ta metoda je tem bolj uporabna, čim večji je M.

Sipanje svetlobe nam daje novo možnost določevanja molekulske mase. Absorpcijski količnik τ zaradi sipanja je premo sorazmeren produktu iz koncentracije in molekulske mase, če so delci dovolj majhni proti valovni dolžini uporabljene svetlobe

$$\tau/c \sim M.$$

Oblike molekul pa ne moremo določiti tako splošno, kot smo dobili velikost molekule. Moramo si napraviti posebne modele za molekule. Vse velemolekule so razmeroma preprosto zgrajene iz enakih gradnikov (monomerov), ki se stokrat ali tisočkrat ali še večkrat ponavljajo. Zato pravimo velemolekulam pogosto tudi polimeri. Sestava monomerov v polimer se more izvršiti ali samo v eni smeri, monomeri so nanizani v velemolekuli kot na vrvici (linearne velemolekule: kavčuk, celuloza, polistirol), ali pa v vseh prostorskih smereh, tako da ima nastala velemolekula obliko kroglice ali palčice (bakelit, razni virusi, nekatere beljakovine). Za tako molekulo moramo tedaj določiti najprej splošno obliko, to je ali nitka, palčica ali krogla, in potem še neko značilno dolžino R, recimo razdaljo med začetkom in koncem vrvice, dolžino palčice oz. premer krogle.

Za določevanje oblike oz. dolžine R nam morejo služiti vsi tisti efekti, ki zavise od oblike molekule, to so predvsem difuzija, sedimentacijska hitrost, sipanje svetlobe. Vendar pa moramo pri znanem M vedno že v naprej vedeti kakšno obliko ima molekula, če hočemo iz meritve dobiti R sam.

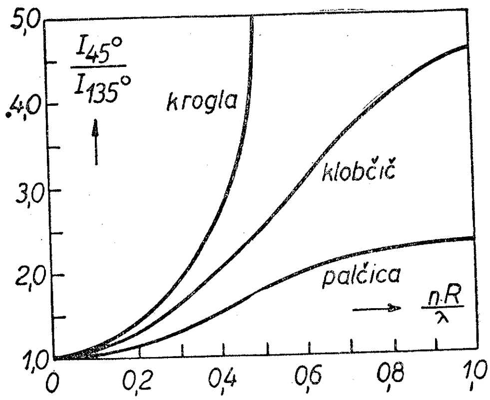
Difuzija kaže le majhno odvisnost od oblike. Pri krogli raste upornostni količnik premo sorazmerno z R, to je s tretjim korenom iz M. Pri palčici nastopi kot dodaten faktor še logaritem razmerja med dolžino in debelino palčice, pri nitki pa raste upor skoro sorazmerno z dolžino molekule, ki se je pri tej vrsti molekul izkazala za premo sorazmerno kvadratnemu korenu iz M.

Ker nastopa pri sedimentacijski hitrosti isti faktor Λ, je tudi tu odvisnost od oblike enake narave kot pri difuziji. Če si vzamemo vrsto polimerov različne molekulske mase toda z istim monomerom, tedaj moremo iz poteka D oz. $[s]$ sklepati vedno najprej na obliko samo in pri znani obliki na značilno dolžino molekul R.

Še bolj neposredno nam da obliko molekul sipanje svetlobe. Če postanejo namreč razsežnosti molekule tako velike, da jih ne moremo več popolnoma zanemariti v primeri z valovno dolžino svetlobe v raztopini, tedaj se zaradi interference jakost razsute svetlobe tem bolj zmanjša, čim večji je kot, ki ga oklepa smer opazovanja s smerjo razširjanja vpadajoče svetlobe. Take molekule sipljejo več svetlobe v smeri vpadajočega žarka kot v nasprotni smeri. Navadno opazujemo pod dvema kotoma, ki ležita somerno k pravokótni ravnini na vpadajoči žarek, to je pod kotom $90^0-\theta$ in $90^0+\theta$. Razmerje

$$I_{90-\theta}/I_{90+\theta} = q$$

imenujemo disimetrijo sipanja. Ta je direktno merilo dolžine R, vendar je nekoliko različno za zgoraj omenjene 3 glavne oblike. Torej moramo zopet najprej vedeti, kakšna je oblika, potem šele moremo iz meritve q določiti R. Potek disimetrije z velikostjo molekule za te oblike nam kaže priložena slika. Iz nje vidimo tudi sledeče: pri zelo velikih delcih



Disimetrija sipanja svetlobe pri $\theta = 45^0$ v odvisnosti od razmerja med dolžino molekule R in valovno dolžino λ v vakuumu. Lomni količnik raztopine je n.

oz. pri zelo majhni valovni dolžini se približuje disimetrija mejni vrednosti cotg $\theta/2$ pri paličasti obliki, kvadratu tega izraza pri nitkasti in četrti potenci pri kroglasti. Iz teh limitnih vrednosti moremo tedaj sklepati na obliko in potem iz ustrezne krivulje določiti iskani R. Treba je seveda povdariti, da veljajo enostavne zakonitosti slike le tedaj, če je lomni količnik naše molekule skoro enak lomnemu količniku topila, kar je izpolnjeno pri skoro vseh velemolekulah, ki nas zanimajo.

Vse tu omenjene metode zahtevajo ali zelo komplicirane aparate ali pa dajo efekte, ki so tako zelo na meji merljivosti, da jih v nekem povprečnem, recimo industrijskem laboratoriju komaj moremo s pridom uporabljati. Torej si moramo poiskati bolj preprostih, sekundarnih metod, ki jih s pravkar omenjenimi primarnimi metodami umerimo. Med te spada prav meritev viskoznosti, ki more skupaj z meritvijo osmoznega tlaka v velikem številu primerov odgovoriti na glavni vprašanji glede M in R. Prvo da osmoza. Če je sedaj tako imenovana svojska viskoznost

$$[\eta] = \left[\left(\frac{\eta}{\eta_0} - 1\right) : c\right]_{c \to 0}$$

neodvisna od M v isti polimerni vrsti, potem so molekule kroglice. Pri palčicah raste svojska židkost kot kvadrat razmerja med dolžino in debelino, to je v splošnem s kvadratom molekulske mase M. Pri nitkasti molekuli pa raste v polimerni vrsti viskoznost nekoliko počasneje kot M in se bliža pri zelo velikem M sorazmernosti s kvadratnim korenom. Torej moremo iz raziskavanja take polimerne vrste določiti najprej obliko in potem še značilno dolžino R. Toda metoda ni sama po sebi absolutna, treba jo je umeriti z drugimi, zgoraj omenjenimi metodami. To se pravi, z zgoraj omenjenimi metodami moramo določiti obliko molekule in R, potem pa izmeriti svojsko židkost, da dobimo tiste koeficiente, ki vežejo svojsko židkost z R molekule.

Seveda nas zanima o molekuli še marsikaj drugega razen velikosti in oblike. Vedeti hočemo, kakšna je trdnost in gibljivost molekule, prožnost, električna in optična polarizirnost. Za slednje nam služijo razne vrste umetnega dvojnega loma, na pr. strujni dvojni lom (Maxwellov efekt) in v majšni meri električni in magnetni dvojni lom (električni Kerrov efekt in Cotton-Moutonov efekt). Merjenje v hitro spreminjajočem polju na pr. v akustičnem polju nam pove nekaj o togosti in prožnosti molekule (akustični dvojni lom ali Lucasov efekt).

Za razumevanje vseh tu omenjenih efektov in njihovo uporabo za določevanje M, R in drugih lastnosti molekule je bilo seveda treba v mnogih ozirih razširiti naše poznavanje kontinuumske fizike v molekulskih razsežnostih. Zahteve prakse so prisilile teorijo, da se razvije preko prvotnih, zelo shematskih nastavkov. Praksa je prinesla tako teoriji novih pobud in jo prisilila do novih izsledkov, ki morejo sedaj zopet bolje izpolniti potrebe praktične uporabe. Imamo tako v velemolekulski fiziki nov zgled tesne povezave in medsebojnega podpiranja praktične uporabe in teorije, ki je tako značilno za ves razvoj fizike in prirodoslovnih ved sploh.

Na področju fizike velikih molekul je še veliko nerešenih vprašanj. Še več, raziskave zadnjih let so pokazale, da je v osnovnih merskih metodah še toliko negotovosti čisto eksperimentne narave, da so potrebne koordinirane meritve enakih preparatov z enakimi merskimi metodami po najrazličnejših laboratorijih, da se vendar enkrat definitivno standardizirajo te metode in se more potem pristopiti k sistematičnim meritvam na tako dobro definiranem materijalu, da se bodo mogli na njem res nedvoumno preskusiti posamezni modeli, ki so bili konstruirani v zadnjih letih za popis velikih molekul. Saj stroge rešitve so praktično nemogoče in sedaj mora pokus odločiti, katere zanemaritve so dopustne in katere ne, ko hočemo s kontinuumsko fiziko, hidrodinamiko in optiko, popisati razmere na molekulah samih.

(Saopšteno 10-XI-1950)

PHYSICS OF MACROMOLECULES

by A. PETERLIN

The properties of high polimers — plastics, resins, natural and synthetic fibers — depend essentially on the size and form of the single macromolecules of which the bulk polymer is built up. In general there are two characteristic constants, the molecular mass M and the effective radius R, which determine the behaviour of such molecules. Further we want to know whether the molecule is sphere or rod like—all the intermediate forms are possible, — how is the rigidity — the rod can be as soft as the molecule is like a flexible thread with a statistically coiled form- and finally what the electric, magnetic, optic properties are like which all influence the bulk polymer, its technical properties and practicability.

Most of the important macromolecular properties can be determined by several physical methods. In very dilute solutions the osmotic pressure, the sedimentation equilibrium, the sedimentation velocity together with the free diffusion, the turbidity (with some restrictions) yield the molecular mass. The effective radius can then be found by measuring the intrinsic viscosity, the sedimentation velocity or the free diffusion constant, the dissymmetry of the scattered light. While the mass determination is independent on our ideas about the form of the macromolecule, the radius R is not, and changes in a noticeable manner by changing the model. For the right one the R's determined by all the above mentioned methods should agree among themselves within the limits of experimental errors.

Further properties of the macromolecule can be found by measuring the accidental birefringence in applied fields, the relaxation times in varying fields, the absorption and propagation velocity of sound waves and so on.

The measurements and determinations of molecular properties are troubled by the polydispersity of all high polymers and by the unusually high interaction of the non-spherical macromolecules even in the most dilute solutions that can be dealt with. New methods and new technics have been invented to meet the requirements of high molecular physics which in turn is indispensable for the technical progress in natural and synthetic high polymers. As this country is developing into a progressive, industrialised territory producing as many of the manifold technical tools and raw materials as possible, we must know also the scientific foundations of modern technology. As the high polimers are of steadily increasing importance in modern life, it is our duty to plan research also in this field where physics and chemistry meet and help one another in solving problems the solution of which is required by the industry and other applied sciences.

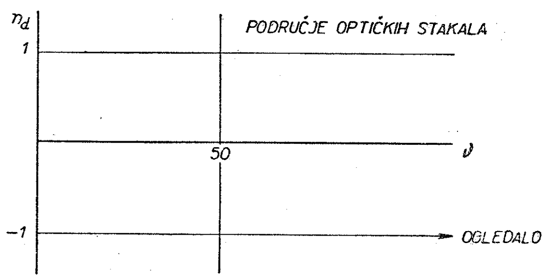
O PRINCIPIMA GRADNJE FOTOOBJEKTIVA

FRANJO I. HAVLIČEK, ZAGREB

Realizaciju preslikavanja vršimo pomoću sustava centriranih debelih leća i ogledala i za praktičke mogućnosti odlučuju svojstva optičnih stakala. Stakla karakteriziramo pomoću indeksa loma n_d i pomoću Abbeovog broja

$$\frac{1}{\nu} = \frac{n_{ljubl\check{c}asto} - n_{crveno}}{n_{\check{z}uto}}$$

Spektralne linije koje odgovaraju pojedinim brojevima izaberemo prema području u kojem kanimo ahromatisirati sustav. Obično su to linije *C, F, d.* U slici 1 prikazano je područje optičkih stakala, koje pokriva



Sl. 1 — Područje optičkih stakala

samo mali dio dijagrama i time stvara veliki dio poteškoća kod optičkih projekata.

U centriranom sustavu upotrebljujemo obično oznake prema slici 2.

Temeljni uvjeti su slijedeći:

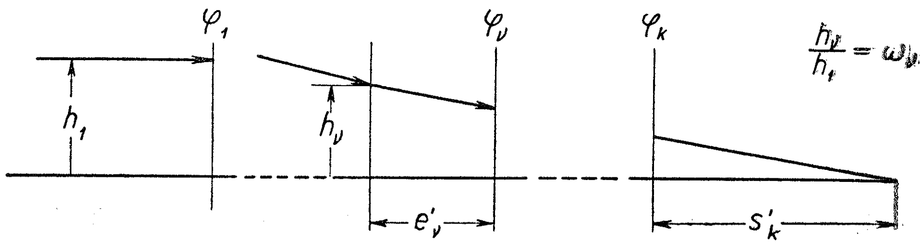
Žarišnu daljinu uzmimo uvijek 1, te vrijedi

$$\sum^{\nu} w_\nu \varphi_\nu = 1 = f$$

Petzvalov uvjet

$$\sum^{\nu} \frac{\varphi_\nu}{n_\nu} = \frac{1}{\rho}.$$

Ova suma mora biti malena, jer u slučaju korigiranog astigmatizma je ρ zakrivljenost plohe preslikavanja u blizini osovine.



Sl. 2 — Oznake kod centriranih sustava

Uvjet za aksijalnu ahromaziju

$$\sum^{\nu} w_\nu{}^2 \frac{\varphi\nu}{\nu_\nu} = \frac{1}{\nu}$$

ν je ovđe koeficient koji nam je poznat iz iskustva i koji prima vrijednosti između 100 do 2000.

Transversalni ahromatizam daje komplicirane uvjete koji zavise od položaja diafragme. Kod simpleta i dupleta moramo obično korigirati pojedine grupe lepljenih leća. U slučaju tripleta vrijedi

$$w_3 = \frac{\nu_3}{\nu_1}$$

ako diafragma stoji u neposrednoj blizini srednje leće.

Distorzija se najbolje izbjegava simetrijom gradnje sustava. U slučaju tripleta vrijedi

$$\varphi_1 e'_1 = \varphi_3 e'_2$$

opet pod pretpostavkom da se diafragma nalazi u neposrednoj blizini druge leće.

Pomoću ovih gornjih uvjeta činimo opću dispoziciju svakog sastava prema svrsi koji treba da ispunjuje.

Zakrivljenost ploha pojedinih leća povuče sa sobom griješke kod preslikavanja, ali zgodan izbor radiusa zakrivljenosti dozvoljava obično izjednačivanje griješaka pojedinih leća tako, da se u dovoljnoj mjeri približujemo idealnom preslikavanju, koje daje na primjer kamera sa rupicom. (Ova ima, kako je poznato, uslijed jakih efekata ogiba inače vrlo loša svojstva).

Prema Seidelovom ili Abbeovom postupku razvijamo griješke kose zrake, to su njezine aberacije od idealnog preslikavanja u red potencija i zgodne transformacije dozvoljavaju da se u koeficientima zbrajaju uplivi pojedinih leća. Za analitičke projekte dovoljno je kad uzmemo u obzir samo prvi član u redu potencija.

Aberacije trećeg reda su slijedeće:

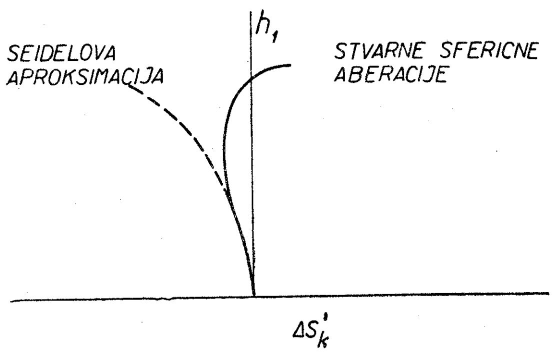
1) Takozvana sferna aberacija $\triangle s'_k$ vanjskih zona sustava na osovini sustava u blizini žarišta.

2) Koma, tojest asimetrija aberacija oko kose zrake koja prelazi kroz središte diafragme.

3) Zakrivljenost meridijonalne plohe slike, to jest kosih zraka koje leže u ravnini osovine.

4) Zakrivljenost sagitalne plohe slike u kojoj se preslikavaju kose zrake, koje leže u ravnini koja je okomito na meridijonalnoj ravnini. Sječište obih ravnina prolazi kroz središte diafragme. Razliku u zakrivljenosti obih ploha zovemo astigmatizam.

5) Distorzija, to jest promjena kuta kosih zraka koje prolaze kroz središte diafragme.



Sl. 3 — Diagram aksijalnih sfernih aberacija

Kako se radi o gruboj aproksimaciji, otsjekli smo sve više potencije u redu, vrijede rezultati računa samo u blizini osovine, što je ali uz konačnu trigonometričku kontrolu dovoljno kod projektiranja.

Kao primjer uzmimo slučaj sfernih aberacija na osovini za koje vrijedi

$$\triangle s_k' = -\frac{h_1^2 \; s_k'^{\,2}}{2} \sum A$$

Σ_A je suma koeficienta sa kojim sudjeluju pojedine plohe kod stvaranja konačnih aberacija.

Slika 3 predočuje diagram aksijalnih sfernih aberacija i njihovu aproksimaciju pomoću gornje formule.

Triplet sastoji se od tri leća, jedne negativne u sredini i dvije pozitivne.

Slijedeća tabela daje koeficiente A za pojedine plohe

	Zeiss	*H 5 M*	*Argentieri*
	$f: 4{,}5$	$f: 2{,}5$	$f: 2{,}3$
Dužina	$L = 0{,}22$	$L = 0{,}44$	$L = 0{,}55$
$\triangle s_{k\,max}'$	$= 0{,}45\%$	$1{,}2\%$	$0{,}75\%$
	A	A	A
	18,9	3,2	2,2
	11	0,3	0,5
	—21,9	—4,8	—3,5
	—10,1	—7,3	—2,2
	0,0	3,2	0,4
	4,5	7,4	2,7
	$\Sigma_A = 2{,}5$	$\Sigma_A = 2{,}1$	$\Sigma_A = 0{,}4$

U slučaju tripleta Argentieria lepljene su vanjske pozitivne leće. On se sastoji dakle od pet leća (Isti indeks loma razne vrijednosti ν zbog postizanja ahromazije i male Petzvalove sume kod ovog vrlo dugačkog sustava).

Iz gornje tabele vidimo da kratki sustavi koji su ugodni za gradnju daju velike koeficiente, što ima svoj razlog u velikim vrijednostima φ, koje prouzrokuju jake zakrivljenosti. Razvučemo li sustav, onda slijede manji koeficienti koji opet dozvoljavaju veće relativne otvore, jer se neće stanje korekcije tako brzo pokvariti kad se udaljujemo od centralnih zraka ako su koeficienti dovoljno maleni. Razmjerno veliki $\triangle s'_{k\,max}$ u slučaju H 5 M služi za povećanje dubine preslikavanja objekta i manji je od 1,6% koji se pojavljuje kod industrijskih objekata.

Velike dužine sustava omogućuju tek dispoziciju velikih leća, koje onda daju velike relativne otvore. Ali raste li dužina, onda raste i Petzvalova suma i korekcija astigmatizma čini sve veće teškoće. Moramo zato graditi pojedine leće od više lepljenih i na taj način stvarati odgovarajuće vrijednosti n_{ν}. U slučaju Argentierievog tripleta lepljene su pozitivne leće. U slučaju Plasmata (Mayer), f: 2, je osim toga još razdjeljena i srednja negativna leća u dvije posebne. U slučaju Xenona (Schneider), f: 1,4, je srednja negativna leća razdjeljena u dvije i svaka je posebno lepljena. Gradnja i konstrukcija ovakvih objektiva je vrlo komplicirana. Najjednostavnije raširimo mogućnosti tripleta time, da ga nešto asimetrički gradimo i pozitivnu leću sa većim φ djelimo u dvije. Na ovaj način dobijemo relativne otvore f: 2,8 sa $\triangle s'_{k\,max} = 0{,}7\%$.

Konačno kontroliramo stanje korekcije našeg sustava na taj način da ga preračunamo na traženu žarišnu daljinu. Zrake pojedinih zona sjeku sa raznim kutevima i sa raznim aberacijama osovinu sustava. Kako su prije incidencije na sustav stvarali jednu frontu to će biti valovi u fazi na svakoj ortotomnoj plohi na zrake prije upada na osovinu. Nađemo li za ovu ortotomnu plohu jednu sferu (odnosno dio sfere) koja se obzirom na put zraka razlikuje samo za $\lambda/4$, onda znamo da ne može doći do interferencija u središtu aproksimirajuće sfere. Sustav koji odgovara ovom zahtevu možemo smatrati praktički idealnim i dade se relativno velikim otvorom samo realizirati u slučaju malih žarišnih daljina sustava.

Ako ne možemo naći ovakvu aproksimirajuću sferu onda možemo prema Kirchoffovoj teoriji izračunati osvetljenje u blizini žarišta, što čini matematički tako velike poteškoće da se ovo sredstvo praktički upotrebljuje samo u izuzetnim slučajevima, premda daje vanredno interesantne rezultate.

(Saopšteno 11-XI-1949)

ÜBER MODERNE FOTOOBJEKTIVE

von F. I. HAVLIČEK, ZAGREB

In einer allgemein gehaltenen Einführung, wird über die Konstruktionsgrundsätze und Korrektionsmöglichkeiten informiert. Berücksichtigt werden neben der grundsätzlichen Gauss'schen Auslegung, Bedingungen für longitudinale und transversale Achromasie, die Fehler dritter Ordnung nach der Seidelschen Theorie und zum Schluss die praktische Anwendung der

Wellentheorie gestreift. Der Korrektionszustand einer extremalen, unten angegebenen Konstruktion wird mit dem Korrektionszustand anderer Industrieobjektive verglichen.

Triplett-Anastigmat H 5 m F : 2,5 (F = 1)

r	e'	n'	A	B	Γ	P	$\square$	h/h_1
0,4190	0,12	1,6192	3,2118	1,3456	0,5637	0,9128	0,6186	1
1,9788	0,1024	1	0,3179	−0,4499	0,6368	−0,1933	−0,6277	0,8905
−0,6269	0,04	1,6711	−4,8019	1,4610	−0,4445	−0,6409	0,3302	0,7676
0,3801	0,0529	1	−7,2812	−5,2419	−3,7738	−1,0566	−3,4774	0,7586
0,7261	0,12	1,6551	3,1728	2.9661	2,7728	0,5451	3,1017	0,8095
−0,4395		1	7,4348	0,3616	0,0176	0,9007	0,0447	0,8263
			2,0542	0,4424	−0,8273	0,4679	−0,0099	

$z_1(\mathrm{II}=0) = 0{,}2154$
III $= -0{,}5002$ ($w_{III} = 28^0$) III + IV/2 $= -0{,}1774$
IV $= 0{,}1452$ III − IV/2 $= -0{,}3226$ ($w = 27^0$)
V $= 0{,}0772$

Maximale sphärische Aberration — 0,01220 (h=0,18) Bezeichnungen der Tabelle nach Berek.

O RELATIVISTIČKOJ TERMODINAMICI

DANILO BLANUŠA, ZAGREB

(Osnovne misli ovog saopćenja prvi puta su iznesene 17-XII-1947 u kolokviju matematičko-fizičke sekcije Hrvatskog prirodoslovnog društva u Zagrebu. Vidi Glasnik matematičko-fizički i astronomski, T. 2., 1947., br. 4—5, str. 249, „Sur les paradoxes de la notion d'énergie".)

Kad se god. 1905 pojavila specijalna teorija relativnosti, trebalo je razne oblasti teoretske fizike tako poopćiti, da budu u skladu s osnovnim principima te teorije. Za fenomenološku termodinamiku je to proveo M. Planck [1] god. 1908. On dolazi do osnovnih transformacija za količinu topline Q i za apsolutnu temperaturu T, koje glase

$$Q = Q_0 \alpha; \quad T = T_0 \alpha \quad \left(\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right), \tag{1}$$

gdje indeks 0 označuje veličinu u sustavu mirovanja. Veličine Q i T transformiraju se jednako zbog relacije $dS = dQ/T$, ako se još uzme u obzir, da je entropija invarijanta Lorentzove transformacije, kako je to već Planck dokazao, a lako se uviđa i na temelju statističke mehanike.

Nasuprot tome smatramo, da bi te transformacije trebale glasiti

$$Q = Q_0/\alpha; \quad T = T_0/\alpha. \tag{2}$$

Razmatranje, koje dovodi do transformacija (1), može se najjednostavnije provesti ovako.

Promatrajmo prijelaz količine topline Q_0 iz nekog tijela A na neko tijelo B, koje stoje jedno do drugoga. Neka se, recimo, tijelo A nalazi lijevo, a tijelo B desno. Energija „desnoga" tijela B povećala se dakle kod toga prijelaza topline za iznos Q_0, a njegova masa za $\frac{Q_0}{c^2}$. Promatramo li ovaj prijelaz u nekom koordinatnom sustavu, u kojem se ta dva tijela gibaju brzinom v prema naprijed, to se sada energija desnoga tijela povećala sa $\frac{Q_0}{\alpha}$, prema zakonu transformacije energije. No time mu se masa povećala za $\frac{Q_0}{\alpha c^2}$, dakle je impuls (uz istu brzinu v) porastao za $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$. Taj impuls je dakle tijelu trebalo dovesti. Ako je lijevo tijelo na desno djelovalo silom F u smjeru gibanja, onda je preneseni impuls jednak Ft, gdje je t vrijeme trajanja prijelaza topline, koje možemo zamišljati vrlo veliko, da proces bude reverzibilan. Mora dakle vrijediti

$$\frac{Q_0 v}{\alpha c^2} = Ft. \tag{3}$$

U drugu ruku je sila obavila radnju Fvt, jer se tijelo B, na koje sila djeluje, u smjeru sile pomaknulo za put vt. Jedan dio energije, koja je prešla, mora dakle biti mehanička radnja, a ostatak je prešao kao toplina Q. Treba stoga staviti

$$\frac{Q_0}{\alpha} = Fvt + Q. \tag{4}$$

Iz (3) i (4) dobivamo eliminacijom Planckovu relaciju

$$Q = Q_0 \alpha. \tag{5}$$

Prenesena mehanička radnja izlazi, da je

$$\frac{Q_0}{\alpha} - Q_0 = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha}, \text{ gdje je } \beta = \frac{v}{c}. \tag{6}$$

Prema našem shvaćanju se naprotiv impuls $\frac{Q_0 v}{\alpha c^2}$ prenosi konvektivno s energijom $\frac{Q_0}{\alpha}$, koja prelazi s tijela A na tijelo B, i koja taj impuls ima i prije i poslije prijelaza. Ne treba dakle sile F i nema mehaničke radnje. Sva energija $\frac{Q_0}{\alpha}$, koja prelazi, bit će dakle toplina, i dobivamo našu transformaciju

$$Q = \frac{Q_0}{\alpha}. \tag{7}$$

Za Planckovo shvaćanje je dakle karakteristično, da toplina ne nosi sa sobom svoj impuls, kao što to čini, recimo, energija neke čestice, kad se ta čestica giba. Posljedica je toga shvaćanja, da između dvaju tijela A i B treba pretpostaviti djelovanje neke sile, koja djeluje u smjeru gibanja. Ako je dodirna ploha paralelna sa smjerom gibanja, onda se dakle radi o naponu posmika, koji postoji, makar dodirne plohe bile savršeno glatke. Isto tako se pojavljuje taj napon posmika, ako se radi o lijevom i desnom dijelu plina u nekoj posudi.

Osim toga transformacija (5) znači, da dio prešle energije, koji smijemo nazivati toplinom, konvergira prema nuli, kada v konvergira prema brzini svjetlosti. U drugu ruku prirast kinetičke energije molekula odgovara cijeloj prešloj energiji i konvergira prema neizmjerno. Povećanje kinetičke energije molekula samo bi dakle djelomično odgovaralo dovedenoj toplini, i to tim manje, čim je brzina bliža brzini svjetlosti.

Konačno je mehanička radnja sile F jedna vrsta radnje, koja se ne da upotrebiti za dizanje utega, što je inače tipično za makroskopsku mehaničku radnju u okviru fenomenološke termodinamike. Sam Planck je definirao perpetuum mobile 2. vrste kao stroj koji radi periodički i ništa drugo ne učini, nego da ohladi neko spremište topline i digne neki uteg. On je dakle dizanje utega uzeo kao prototip mehaničke radnje. Da se zaista radnja sile F ne može upotrebiti za dizanje utega, pokazat ćemo na temelju termodinamičkog razmatranja.

Treba najprije ustanoviti, pod kojim uvjetima toplina prelazi s jednog tijela na drugo, ako ta tijela jedno za drugom klize bez trenja. Zamislimo dva jednaka štapa, koja jedna na drugom klize, a imaju iste temperature mirovanja. Zbog ravnopravnosti njihovih koordinatnih sustava nema razloga, da toplina prelazi u jednom smjeru, a ne u drugom. Neće dakle biti prijelaza topline. Ako su temperature mirovanja različite, jasno je, da će toplina prelaziti u smjeru od više k nižoj temperaturi mirovanja. Ovaj je uvjet očito nezavisan od zakona transformacije temperature.

Neka sada neko tijelo sa masom M miruje u našem koordinatnom sustavu, a temperatura neka mu je $T_0 - \triangle T_0$. Privedimo mu iz spremišta topline s temperaturom T_0, koje također miruje, toplinu Q_0, čime neka se tijelo ugrijalo na temperaturu T_0. Njegova se energija povećala od $M_0 c^2$ na $M_0 c^2 + Q_0 = M_0' c^2$. (Vanjska radnja nije obavljena). Ubrzajmo tijelo adijabatski na brzinu v. Kod toga treba privesti radnju

$$A_1 = \frac{M_0' c^2}{\alpha} - M_0' c^2 = M_0' c^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) =$$

$$= M_0 c^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + Q_0 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right). \tag{8}$$

Temperatura tijela je sada (po Plancku) $T = T_0 \alpha$, dok se temperatura mirovanja nije promijenila. Prijelaz topline na neko drugo tijelo brzine v bio bi praćen vršenjem mehaničke radnje, t. j. prešla bi, recimo, toplina $Q_0 \alpha$ (bez impulsa) i mehanička radnja

$$A_2 = Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha}. \tag{9}$$

Zamislit ćemo sada, da umjesto toga toplina $Q_0 \alpha$ prijeđe na neko spremište topline, koje miruje i ima temperaturu $T_0 - T_0$. S obzirom na razliku temperatura mirovanja tijela u gibanju i spremišta topline, koje miruje, ovaj je prijelaz moguć. Impuls ne treba prijeći, jer spremište miruje, i impuls mu je prije i poslije prijelaza jednak nuli. Mehaničku radnju A_2 iskoristimo za dizanje utega. Gledajući tijelo u njegovu sustavu mirovanja, vidimo, da je izgubilo toplinu Q_0 i da mu se stoga temperatura mirovanja opet snizila na $T_0 - \triangle T_0$. Sada to tijelo adijabatski zaustavimo, pri čemu dobijemo radnju

$$A_3 = M_0 c^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right). \tag{10}$$

Konačno ga bez utroška energije vratimo na njegovo staro mjesto. Svega smo dakle dobili radnju

$$- A_1 + A_2 + A_3 = - M_0 c^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) - Q_0 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) + Q_0 \frac{\beta^2}{\alpha} +$$

$$+ M_0 c^2 \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right) = Q_0 (1 - \alpha). \tag{11}$$

Osim toga je toplina Q_0 oduzeta spremištu topline s temperaturom T_0, a spremište s temperaturom $T_0 - \triangle T_0$ dobilo je toplinu $Q_0 \alpha$. Sada ćemo pomoću običnog Carnotova procesa iz hladnijeg spremišta crpeti toplinu

$$Q_0 \frac{T_0 - \triangle T_0}{T_0}$$

i dodavši joj mehaničku radnju $Q_0 \frac{\triangle T_0}{T_0}$, tu svu energiju kao toplinu privesti toplijem spremištu (princip toplinske pumpe). Konačno dobivena mehanička radnja je dakle

$$A_5 = - A_1 + A_2 + A_3 - A_4 = Q_0(1 - \alpha) - Q_0 \frac{\triangle T_0}{T_0}. \quad (12)$$

Ako je tijelo vrlo veliko, razlika temperature $\triangle T_0$ bit će vrlo mala (tijelo se dovođenjem topline Q_0 vrlo malo ugrije), tako da je A_5 sigurno pozitivan. Ostvaren je dakle perpetuum mobile 2. vrste, jer je dignut uteg i crpljena toplina iz hladnijeg spremišta, a da se ništa drugo nije promijenilo.

Vidi se iz ovoga, da se mehanička radnja Fvt zaista ne može upotrebiti za dizanje utega.

Napomenut ćemo još vezu ovih razmatranja s elektrodinamikom. Ako primjerice nekom žicom teče struja, pa se u žici razvija Jouleova toplina, onda se vidi transformacijom elektromagnetskog polja na koordinatni sustav, spram kojega se žica giba, da u tom sustavu polje na žicu djeluje nekom silom, koja žici privodi mehaničku radnju, a povrh toga se u žici razvija toplina. Za ovu toplinu vrijedi Planckova transformacija. Po našem shvaćanju se i ta dovedena radnja pretvara u toplinu, tako da je ukupno stvorena toplina jednaka zbroju te radnje i „Jouleove topline", koja se javlja u formulama. Da je to tako, lako se uvida, ako zamislimo, da žicu hladimo hladnjakom, koji putuje s njom, i koji oduzima toliko topline, da stanje žice ostane stacionarno. Taj hladnjak onda dakako mora odvesti svu energiju, koja je žici dovedena. Po našem shvaćanju je to sve toplina. Po Planckovu shvaćanju, naprotiv, žica djeluje na hladnjak silom, koja vrši radnju, tako da jedan dio energije prelazi kao mehanička radnja na hladnjak, i to upravo onaj dio, koji je od polja na žicu prenesen kao mehanička radnja.

Zamisao, koju zastupamo, da se radnja polja pretvorila u toplinu, može se poduprijeti i napomenom, da se u sustavu mirovanja svakako radi o ireverzibilnom procesu stvaranju Jouleove topline, a taj proces je dakako ireverzibilan i u svakom drugom sustavu. No da se ireverzibilno dovedena mehanička radnja pretvara u toplinu, sasvim je prirodno i događa se primjerice kod svakog trenja. I s mikroskopskog gledišta stvar je dosljedna. Mehanička radnja polja služi za ubrzavanje provodnih elektrona, koji svoje povećanje energije predaju jezgrama i povećavaju njihovo toplinsko titranje.

U jednoj pismenoj izmjeni misli autora s W. Paulijem u Zürichu i njegovim učenikom R. Schafrothom (u prvoj polovici god. 1948) svi su stručnjaci zastupali gledište, da su obje izložene koncepcije relativističke termodinamike moguće i u sebi dosljedne, i da se između njih ne može odlučiti, već je stvar definicije, koja se od njih prihvaća. Ovo svoje mišljenje oni su obrazložili time, da je nemoguće definirati termodinamičku ravnotežu između tjelesa u relativnom gibanju. Mojoj definiciji ravnoteže kod jednakih temperatura mirovanja prigovorili su, da ta ravnoteža nije stabilna, jer bi prijelaz topline uzrokovan malim fluktuacijama temperature djelovao u smislu kočenja relativne brzine, što se lako uviđa iz bilance impulsa. Stoga, oni kažu, ne mogu se provesti termodinamička razmatranja poput gore izloženoga. Smatraju dalje, da je Planckova koncepcija prikladnija, jer se u njoj osnovne termodinamičke i mehaničke jednadžbe daju izvesti iz principa varijacija, što u našoj koncepciji nije moguće, te da neke relacije u statističkoj mehanici, u kojima se pojavljuje temperatura, postaju nešto jednostavnije.

Po našem mišljenju, naprotiv, nestabilnost termodinamičke ravnoteže ne obara ispravnost izloženog termodinamičkog razmatranja, te smatramo, da uvođenje sila, koja ne uzrokuje deformacije i uvođenje mehaničke radnje, koja se ne da upotrebiti za dizanje utega, znači pojmovnu poteškoću, koja se ne može zanemariti radi formalno-računskih prednosti u Planckovoj koncepciji.

Konačno napominjemo dodirnu točku s modernim istraživanjima atomske fizike. L. de Broglie u svojoj radnji [2] pokušava dati bazu za valno-mehaničku teoriju termodinamike, polazeci od Planckovih transformacija. Ospori li se opravdanost tih transformacija, mora to utjecati i na ovakva razmatranja.

(Saopšteno 11-XI-1949).

ÜBER DIE RELATIVISTISCHE THERMODYNAMIK

von D. BLANUŠA, ZAGREB

(Die Grundgedanken dieser Mitteilung wurden zum ersten Male am 17-XII-1947 im Kolloquium der mathematisch-physikalischen Abteilung der Kroatischen naturwissenschaftlichen Gesellschaft vorgebracht. S. „Glasnik matematičko-fizički i astronomski“ T. 2, 1947, No. 4—5, S. 249 „Sur les paradoxes de la notion d'énergie“.)

Der bekannten Planckschen Transformationsformeln [1].

$$Q = Q_0\alpha; \quad T = T_0\alpha \qquad \left(\alpha = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\right) \tag{1}$$

für Wärmemenge und absolute Temperatur (wobei sich der Index Null auf das Ruhsystem bezieht) werden die Formeln

$$Q = Q_0/\alpha; \quad T = T_0/\alpha \tag{2}$$

gegenübergestellt.

Findet zwischen zwei ruhenden Körpern ein Wärmeübergang statt und wird dabei die Wärmemenge Q_0 übertragen, so muss bei Betrachtung dieses Vorgangs von einem anderen Koordinatensystem aus nach der Planckschen Auffassung zwischen diesen Körpern eine Kraft wirken. Der sich erwärmende Körper vergrössert nämlich seine Energie und folglich seine Masse, ohne dass sich seine Geschwindigkeit ändert. Es muss sich also auch sein Impuls vergrössern. Dieser Impulszuwachs wird ihm durch die erwähnte Kraft zugeführt, die gleichzeitig auch mechanische Arbeit leistet. Von der gesamten übertragenen Energie, die natürlich gleich Q_0/α ist, wird also ein Teil als mechanische Arbeit zu bezeichnen sein, der Rest $Q_0\alpha$ ist dann die übertragene Wärmenge.

Dagegen vertreten wir die Auffassung, dass die übertretende Energie ihren Impuls, den sie ja vor und nach dem Übertritt besitzt, konvektiv mitbringt, so dass man keine Kraft zur Impulsübertragung braucht. Es wird daher auch keine mechanische Arbeit geleistet und die ganze übertragene Energiemenge Q/α ist als Wärme zu bezeichnen. Man kommt so auf die Tranformationsformeln (2).

Als ernstete Schwierigkeit der Planckschen Auffassung betrachten wir den Umstand, dass die mechanische Arbeit der erwähnten Kraft eine mechanische Arbeit ist, die nicht zur Hebung eines Gewichts verwendet werden kann. In Planck's Definition des Perpetuum mobile 2. Art ist hingegen die Hebung einer Last als Prototypus einer mechanischen Arbeitsleistung benützt.

Es wird ferner die Transformation der Jouleschen Wärme besprochen.

In einem schriftlichen Gedankenaustausch mit den Herren W. Pauli und R. Schafroth in Zürich vertraten diese den Standpunkt, dass beide Auffassungen der relativistischen Thermodynamik möglich seien, und dass es Definitionssache sei, welche man akzeptiert. Demgegenüber betrachten wir — neben dem Auftreten von Schubkräften an glatten Flächen sowie im Ihneren von Gasen und Flüssigkeiten — die Einführung des Begriffs einer nicht zur Hebung einer Last verwendbaren mechanischen Arbeit als einen schwerwiegenden begrifflichen Mangel der Theorie.

Schliesslich wird auf eine Arbeit von L. de Broglie [2] hingewiesen wo die Planckschen Transformationen als Ausgangspunkt für eine wellenmechanische Thermodynamik benützt werden. Die Abänderung dieser Transformationsformeln müsste auch solche Betrachtungen beeinflussen.

Literatura

1. Planck M. Zur Dynamik bewegter Systeme. Ann., d. Physik 26 (1908).
2. de Broglie L. Sur la variance relativiste de la température. Cahiers de Physique, nos 31—32, 1—11, 1948.

GENERALISANI HAMILTONOV PRINCIP ZA NEHOLONOMNE SISTEME

TATOMIR P. ANĐELIĆ, BEOGRAD

Neka bude dat neki materijalni sistem određen sa $s = n + k$ generalisanih koordinata q_s, tj.

(1) $$q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots, q_{n+k}.$$

Neka T bude živa sila (kinetička energija) tog sistema, a Q_s generalisana sila koja odgovara koordinati q_s. Neka je, osim toga, kretanja neholonomno i podložno vezama

(2) $$q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, q'_i + a_\nu, \quad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

gde su $a_{\nu i}$ i a_ν, u opštem slučaju, funkcije generalisanih koordinata i vremena t, a crta označava izvod po vremenu.

Živa sila T biće funkcija od vremena t, generalisanih koordinata q_s i generalisanih brzina q'_s $(s = 1, 2, \ldots, n + k)$, tj.

(3) $$T = T\,(t;\ q_s\,;\ q'_s\,),$$

ali se zavisne generalisane brzine $q'_{n+\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, k)$ mogu pomoću jednačina (2) eliminisati iz T. Isto tako se ove zavisne generalisane brzine mogu eliminisati i iz generalisanih impulsa $\dfrac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}$ $(\nu = 1, 2 \ldots k)$ koji odgovaraju zavisnim brzinama.

Varijacije $\delta q_{n+\nu}$ zavisnih generalisanih koordinata određene su, prema (2), jednačinama

(4) $$\delta q_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

Hamiltonov princip za neki uočeni materijalni sistem, kako znamo, glasi

(5) $$\int_{t_0}^{t_1} (\delta T + \delta A)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} T dt + \int_{t_0}^{t_1} \delta A dt = 0,$$

gde je δT varijacija žive sile uočenog sistema, a δA virtualni rad svih sila koje dejstvuju na sistem. Ako sile imaju potencijal može se staviti $A = - U$, pa se onda Hamiltonov princip izražava u obliku

(6) $$\delta \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = \delta \int_{t_0}^{t_1} L\, dt = 0$$

gde je $L = T - U$ tzv. Lagranževa funkcija ili slobodna energija sistema. U tom slučaju — slučaju konzervativnog sistema — Hamiltonov princip pokazuje da akcija (dejstvo) u Hamiltonovom smislu, tj. $\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$, treba da bude stacionarna na direktnom putu.

Hamiltonov princip, postavljen prvobitno samo za konzervativne materijalne sisteme, odavno je generalisan i za nekonzervativne holonomne sisteme. Stoga smatramo da je poznato, kako se izraz za Hamiltonov princip transformiše u slučaju ma kog holonomnog sistema određenog generalisanim koordinatama q_s $(s = 1, 2, \ldots, n, \ldots, n+k)$. On se u tom slučaju posle transformacije varijacije T i virtualnog rada δA, može najzad napisati u obliku

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{s=1}^{n+k} \left[Q_s + \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)\right] \delta q_s \right\} dt = 0. \tag{7}$$

Naredni korak, generalizacija Hamiltonovog principa za neholonomne sisteme može se izvesti na ovaj poznati način. Uzmimo da je neholonomni sistem u pitanju dat podacima koje smo naveli u početku. U tom slučaju u izrazu (7) za Hamiltonov princip nisu više sve varijacije δq_s proizvoljne, već ih ima k zavisnih; i to su one date jednačinama (4). Ako te nehonolomne veze napišemo u obliku

$$\delta q_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, \delta q_i = 0, \tag{8}$$

svaku od ovih jednačina pomnožimo sa proizvoljnim (Lagranževim) multiplikatorom λ_ν i dodamo ih pod integralnim znakom u izrazu (7) za Hamiltonov princip, dobićemo izraz

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{s=1}^{n+k} \left[Q_s + \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right)\right] \delta q_s + \right. \tag{9}$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu \delta q_{n+\nu} - \sum_{i=1}^{n} \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu a_{\nu i}\, \delta q_i \right\} dt = 0$$

što se može i ovako napisati

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \left[Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \sum_{\nu=1}^{k} \lambda_\nu a_{\nu i} \right] \delta q_i + \right. \tag{10}$$
$$\left. + \sum_{\nu=1}^{k} \left[Q_{n+\nu} + \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}\right) + \lambda_\nu \right] \delta q_{n+\nu} \right\} dt = 0.$$

No, pošto su multiplikatori potpuno proizvoljni, oni nam mogu poslužiti da eliminišemo varijacije zavisnih generalisanih koordinata iz izraza za Hamiltonov princip, jer oni se mogu izabrati tako da izrazl koji odgovaraju drugoj zagradi budu jednaki nuli, tj. da bude

$$\text{(11)} \qquad Q_{n+\nu} + \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}\right) + \lambda_\nu = 0. \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k)$$

Posle ove eliminacije u izrazu za Hamiltonov princip ostaće samo varijacije nezavisnih generalisanih koordinata i on dobija izgled

$$\text{(12)} \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left(\sum_{i=1}^{n}\left\{Q_i + \frac{\partial T}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{\nu=i}^{k} a_{\nu i}\left[Q_{n+\nu} + \frac{dT}{\partial q_{n+\nu}} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}\right)\right]\right\} \delta q_i\right) dt = 0$$

Od ovog oblika lako je preći na tzv. Voronecov princip koji je takođe jedan oblik generalisanog Hamiltonovog principa za neholonomne sisteme, a izneo ga je P. Voronec [2]. Taj oblik generalisanog Hamiltonovog principa je Hamel nazvao Voronecov princip i on glasi

$$\text{(13)} \qquad \int_{t_0}^{t_1}\left[\delta\Theta + \sum_{s=1}^{n+k} Q_s\,\delta q_s + \sum_{\nu=1}^{k} K_\nu\left(\frac{d}{dt}\,\delta q_{n+\nu} - \delta q'_{n+\nu}\right)\right]dt = 0$$

gde Θ označava izraz za živu silu iz koga su već eliminisane zavisne generalisane brzine, a K_ν označava generalisane impulse po zavisnim brzinama, tj. $\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}$, iz kojih su takođe eliminisane zavisne brzine. Kako se najlakše prelazi od oblika (12) na oblik (13) može se videti kod Bilimovića [3].

Ja ću, međutim, ovde sad pokazati kako se Hamiltonov princip za neholonomne sisteme može izraziti i pomoću Apelove energije akceleracije S [1] koja je za materijalni sistem od N tačaka u Dekartovim pravouglim koordinatama data izrazom

$$\text{(14)} \qquad 2S = \sum_{j=1}^{N} m_j\,(x''^2_j + y''^2_j + z''^2_j)\,. \qquad (j = 1, 2, \ldots N)$$

Radi toga, pođimo od izraza T za kinetičku energiju uočenog materijalnog sistema u obliku

$$\text{(15)} \qquad 2T = \sum_{j=1}^{N} m_j\,(x'^2_j + y'^2_j + z'^2_j),$$

i pretpostavimo da smo uveli nove generalisane koordinate q_s, koje potpuno određuju sistem, jednačinama

$$(16)\quad x_j = x_j\,(q_s, t);\; y_j = y_i\,(q_s, t);\; z_j = z_i\,(q_s, t).\; (j = 1, 2, .. N;\; s = 1, 2, .. n+k)$$

koje sa svoje strane zadovoljavaju jednačine (2).

Sada se kinetička energija T može smatrati kao funkcija od generalisanih brzina q'_s preko x'_j, y'_j, z'_j pa se može napisati

$$(17)\quad \frac{\partial T}{\partial q'_s} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[\left(x'_j \frac{\partial x'_j}{\partial q'_s} + \ldots . \right) + \ldots \right] \cdot \quad (s = 1, 2, .., n+k)$$

Ako ovo diferenciramo još po vremenu dobićemo

$$(18)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x''_j \frac{\partial x'_j}{\partial q'_s} + \ldots \right) + \\ + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x'_j \frac{d}{dt} \frac{\partial x'_j}{\partial q'_s} + \ldots \right).$$

No iz (16) sledi da je

$$(19)\quad x'_j = \sum_{s=1}^{n+k} \frac{\partial x_j}{\partial q_s} q'_s + \frac{\partial x_j}{\partial t} \qquad (j = 1, 2, .., N)$$

i posle drugog diferenciranja po vremenu

$$(20)\quad x''_j = \sum_{s=1}^{n+k} \frac{\partial x_j}{\partial q_s} q''_s + \sum_{s=1}^{n+k} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_j}{\partial q_s}\right) q'_s + \ldots .,$$

pa je prema tome

$$(21)\quad \frac{\partial x''_j}{\partial q'_s} = \frac{\partial x'_j}{\partial q'_s} = \frac{\partial x_j}{\partial q_s}.$$

Stoga je

$$(22)\quad \frac{d}{dt} \frac{\partial x'_j}{\partial q'_s} = \frac{d}{dt} \frac{\partial x_j}{\partial q_s} = \frac{\partial x'_j}{\partial q_s},$$

jer se red diferenciranja može razmeniti.

Ako ove vrednosti unesemo u izraz (18) dobićemo

$$(23)\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x''_j \frac{\partial x''_j}{\partial q''_s} + \ldots \right) + \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x'_j \frac{\partial x'_j}{\partial q_s} + \ldots . \right).$$

Međutim diferenciranjem izraza (15) za kinetičku energiju po generalisanim koordinatama q_s dobićemo

$$\text{(24)} \qquad \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x'_j \frac{\partial x'_j}{\partial q_s} + \ldots \right),$$

pa je stoga

$$\text{(25)} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_s}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left(x''_j \frac{\partial x''_j}{\partial q''_s} + \ldots \right) = \frac{\partial S}{\partial q''_s}.$$

Međutim, ako potražimo izvode od energije akceleracije samo po nezavisnim generalisanim koordinatama q_i $(i = 1,2,\ldots,n)$, tj. hoćemo da izračunamo

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i},$$

to se može napisati u obliku

$$\text{(26)} \qquad \frac{\partial S}{\partial q''_i} = \sum_{i=1}^{N} m_j \left[x''_j \left(\frac{\partial x''_j}{\partial q''_i} + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial x''_j}{\partial q''_{n+\nu}} \, \frac{\partial q''^{n+\nu}}{\partial q''_i} + \ldots \right] \right.$$

Kako se iz (2) diferenciranjem po t dobija

$$q''_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i} \, q''_i + \ldots\ldots, \qquad (\nu = 1,2,\ldots,k)$$

biće

$$\frac{\partial q''_{n+\nu}}{\partial q''_i} = a_{\nu i}.$$

dakle,

$$\frac{\partial S}{\partial q''_i} = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[x''_j \left(\frac{\partial x''_j}{\partial q''_i} + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \frac{\partial x''_j}{\partial q''_{n+\nu}} + \ldots \right] \right. =$$

$$\text{(27)} \qquad = \sum_{j=1}^{N} m_j \left[x''_j \left(\frac{\partial x''_j}{\partial q''_i} + \ldots \right] \right. + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \sum_{j=1}^{N} \left[x''_j \left(\frac{\partial x''_j}{\partial q''_{n+\nu}} + \ldots \right] \right. =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_{n+\nu}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_{n+\nu}} \right].$$

Prema tome se Hamiltonov princip (12) može napisati u obliku

$$\text{(28)} \qquad \int_{t_0}^{t_1} \sum_{i=1}^{n} \left(Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i} \, Q_{n+\nu} - \frac{\partial S}{\partial q''_i} \right) \delta q_i \, dt = 0$$

što smo i hteli da izvedemo.

Iz ovog oblika se vidi da je za njegovo korišćenje potrebno znati:

1) generalisane sile Q_s za sve generalisane koordinate q_s;

2) izraz za energiju akceleracije S (iz koga su eliminisane zavisne generalisane brzine i zavisna generalisana ubrzanja);

3) koeficiente $a_{\nu i}$ i a_ν diferencijalnih veza u rešenom obliku.

(Saopšteno 11-XI-1949).

PRINCIPE D'HAMILTON GÉNÉRALISÉ POUR LES SYSTÈMES NON HOLONOMES

par T. ANGELITCH.

Un système materiel defini par les paramètres indépendants q_s $(s=1,\ldots, n,\ldots, n+k)$, dont l'énergie d'accélération d'Appell [1] est S et Q les forces généralisées, soit assujetti aux liaisons

$$q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, q'_i + a_\nu. \qquad (\nu=1,\ldots,k)$$

Pour un tel système le principe d'Hamilton sous sa forme coutumière n'est pas applicable, mais il existe une généralisation du principe due à P. Woronetz [2]. Dans cette communication on montre une nouvelle forme du principe d'Hamilton convenant aux systèmes non holonomes exprimée par l'energie d'accélération d'Appell sous forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial q_i''} - (Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i}\, Q_{n+\nu}) \right] \delta q_i \right\} dt = 0. \qquad (i=1,\ldots,n)$$

Literatura

1. Appell P. Forme générale des équations du mouvement convenant à tous les systemes holonomes et non holonomes (Comptes Rendus, 1899)

2. Woronetz P.: Über die Bewegung eines starren Körpers der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. Math. Annalen, Bd LXX, 1911.

3. A. Bilimović: O jednačinama kretanja neholonomnog sistema — Glas S. A. N. knj. CXXVIII, 1927.

Iz ovog oblika se vidi da je za njegovo korišćenje potrebno znati:

1) generalisane sile Q_s za sve generalisane koordinate q_s ;

2) izraz za energiju akceleracije S (iz koga su eliminisane zavisne generalisane brzine i zavisna generalisana ubrzanja);

3) koeficiente $a_{\nu i}$ i a_{ν} diferencijalnih veza u rešenom obliku.

(Saopšteno 11-XI-1949).

PRINCIPE D'HAMILTON GÉNÉRALISÉ POUR LES SYSTÈMES NON HOLONOMES

par T. ANGELITCH

Un système materiel defini par les paramètres indépendants q_s $(s=1,\dots, n,\dots, n+k)$, dont l'énergie d'accélération d'Appell [1] est S et Q les forces généralisées, soit assujetti aux liaisons

$$q'_{n+\nu} = \sum_{i=1}^{n} a_{\nu i}\, q'_i + a_{\nu}. \qquad (\nu=1,\dots,k)$$

Pour un tel système le principe d'Hamilton sous sa forme coutumière n'est pas applicable, mais il existe une généralisation du principe due à P. Woronetz [2]. Dans cette communication on montre une nouvelle forme du principe d'Hamilton convenant aux systèmes non holonomes exprimée par l'energie d'accélération d'Appell sous forme

$$\int_{t_0}^{t_1} \left\{ \left[\frac{\partial S}{\partial q_i''} - \left(Q_i + \sum_{\nu=1}^{k} a_{\nu i}\, Q_{n+\nu}\right) \right] \delta q_i \right\} dt = 0. \qquad (i = 1,\dots, n)$$

Literatura

1. A p p e l l P. Forme générale des équations du mouvement convenant à tous les systemes holonomes et non holonomes (Comptes Rendus, 1899)

2. W o r o n e t z P.: Über die Bewegung eines starren Körpers der ohne Gleitung auf einer beliebigen Fläche rollt. Math. Annalen, Bd LXX, 1911.

3. A. B i l i m o v i ć : O jednačinama kretanja neholonomnog sistema — Glas S. A. N. knj. CXXVIII, 1927.