УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Мирјана В. Стефановић

СУПЕРПЕРМУТАЦИЈЕ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

проф. др Миодраг Живковић, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Филип Марић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Весна Маринковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: септембар 2023

Породици

Наслов мастер рада: Суперпермутације

Резиме: Суперпермутација је ниска формирана на основу скупа од n елемената, таква да бар једном садржи све могуће пермутације елемената тог скупа као непрекидни блок карактера. Тривијалне суперпермутације се могу добити надовезивањем сваке појединачне пермутације елемената, једне за другом без преклапања, али је од важности проблем проналажења што краћих суперпермутација. Рекурзивним алгоритмом могуће је формирати суперпермутацију дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$. Претпостављало се да је тако формирана суперпермутација минимална, што је и доказано за $n \leq 5$. Међутим, 2014. године за $n = 6$ пронађена је суперпермутација дужине $L(n) - 1$, а временом се граница дужине суперпермутације померала. У раду је приказан ток проналажења суперпермутација ближих доњој граници дужине свођењем на познате проблеме. Наведен је и доказ о нејединствености минималне суперпермутације за $n \geq 5$. Неколико познатих конструкција имплементирано је у програмском језику *Python* и наведено у Глави 5. Најкраће суперпермутације за $n = 6$ и $n = 7$ пронађене су 2019. године и њихова дужина је $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 4$. Још увек није доказано да наведена дужина може бити постигнута за произвољно n.

Кључне речи: суперпермутација, пермутација, комбинаторика, комбинаторна оптимизација

Садржај

1 Увод **1**

Примери . . . 2

2 Минимална суперпермутација **3**

2.1 Рекурзивна конструкција . . . 3

Примери . . . 4

2.2 Потпуна претрага за мало n . . . 5

2.3 Тежински граф свих пермутација . . . 6

2.4 Доња граница дужине најкраће суперпермутације . . . 10

2.5 Нејединственост минималне суперпермутације . . . 12

Различите суперпермутације за $n = 5$ . . . 17

3 Суперпермутација као пут кроз граф **20**

3.1 Проблем трговачког путника . . . 20

3.2 Хјустонова конструкција . . . 21

3.3 Хамилтонов пут у Кејлијевом графу симетричне групе S_n . . . 22

3.4 Адаптације Вилијамсове конструкције . . . 25

3.5 Краће суперпермутације за $n = 7$ . . . 31

4 Програмска реализација алгоритама **34**

4.1 Рекурзивни алгоритам . . . 34

4.2 Адаптација Вилијамсове конструкције помоћу локалних правила 37

5 Закључак **38**

6 Прилози **39**

Библиографија **58**

Глава 1

Увод

Комбинаторни проблеми јављају се у многим областима математике и рачунарства: теорији вероватноће, топологији, геометрији, теорији графова, математичкој оптимизацији, биоинформатици, вештачкој интелигенцији итд. Комбинаторна оптимизација се превасходно бави проблемима у којима наступа комбинаторна експлозија, односно постоји огроман број могућности које треба испитати на неки начин. Неки од познатијих проблема комбинаторне оптимизације су: проблем путујућег трговца, проблем транспортне мреже, минимално повезујуће стабло, проблем ранца итд. Значај ове математичке дисциплине потиче из чињенице да се велики број реалних проблема може апстраховати у облику проблема комбинаторне оптимизације. Користећи технике комбинаторике и теорије алгоритама решавају се сложени проблеми. У случају да за дати проблем не постоји ефикасна егзактна метода, приступа се приближном решавању.

Различите верзије питања „који је најкраћи објекат који садржи све пермутације дате дужине n?" биле су изнова постављане у протеклих педесет година. У зависности од тачне дефиниције и коришћених термина, постоји више оваквих објеката који се заједничким именом називају проблеми универзалне пермутације (енг. *universal permutation problems*), а неки од њих су: де Брујинов низ, суперпатерн и суперпермутација [2]. Проблем минималне суперпермутације у протеклој деценији привукао је велику пажњу, укључујући чланак на веб-сајту *The Verge*[1] и два чланка у он-лајн магазину *Quanta*

[1]`https://www.theverge.com/2018/10/24/18019464/4chan-anon-anime-haruhi-math-mystery`

Magazine[2,3] , а истраживања су и даље у току.

Дефиниција 1. *Суперпермутација је ниска формирана на основу скупа од n симбола, таква да бар једном садржи све могуће пермутације елемената тог скупа као непрекидни блок карактера.*

Другим речима, то је низ $S = a_1a_2 \dots a_m$ елемената скупа $[n] = \{1, \dots, n\}$ такав да сваку пермутацију скупа $[n]$ садржи бар једном као непрекидни $n-$блок $a_i a_{i+1} \dots a_{i+n-1}$. Тривијална суперпермутација добија се надовезивањем сваке појединачне пермутације елемената, једне за другом, без преклапања.

Пример 1. *За* $n = 1$ *тривијална суперпермутација је 1.*

Пример 2. *За* $n = 2$ *тривијална суперпермутација је 1221, али се обе пермутације садрже и у ниски 121 дужине 3, као и у ниски 212 исте дужине.*

Пример 3. *За* $n = 3$ *надовезивањем пермутација без преклапања добија се 123132213231312321, али се свих 3! пермутација садржи и у ниски 123121321 дужине 9. Овде је већина карактера део две или три пермутације, нпр. трећи члан низа је део 123, 231, 312 итд. У наведеној суперпермутацији дужине 9, садржано је 7 3-блокова. Како је 3! = 6, види се да један блок не представља пермутацију, блок 121.*

Пример 4. *За* $n = 4$ *суперпрермтација је 123412314231243121342132413214321 дужине 33.*

Пример 5. *За* $n = 5$ *постоји суперпермутација дужине 153:*
123451234152341253412354123145231425314235142315423
124531243512431524312543121345213425134215342135421
32451324153241352413254132145321435214325143215432

[2]`https://www.quantamagazine.org/unscrambling-the-hidden-secrets-of-superpermutations-20190116/`
[3]`https://www.quantamagazine.org/sci-fi-writer-greg-egan-and-anonymous-math-whiz-advance-permuta`

Глава 2

Минимална суперпермутација

2.1 Рекурзивна конструкција

У претходном поглављу наведени су примери суперпермутација за $n = 1, 2, 3, 4, 5$, а њихове дужине су:

$$L(1) = 1$$
$$L(2) = 3$$
$$L(3) = 9$$
$$L(4) = 33$$
$$L(5) = 153$$

Уочава се законитост: $L(n) = L(n-1) + n!$. Решење ове рекурентне релације је:

$$L(n) = \sum_{k=1}^{n} k! = 1! + 2! + \cdots + n! \tag{2.1}$$

Нека је дата супермермутација $n-1$ елемената дужине m. Суперпермутација n елемената дужине $m+n!$ може се рекурзивно формирати се на следећи начин:

1. Исписати све пермутације редом којим се појављују у датој суперпермутацији $n-1$ елемената.

2. Сваку од њих копирати, додајући нови симбол n између копија.

3. Спојити резултат поново користећи сва претходно позната преклапања.

Пример 6. *Претпоставка је да је позната суперпермутација за* $n = 2$ *дужине 3. Формирање суперпермутације за* $n = 3$ *дужине* $3 + 3! = 9$*:*

$$\begin{gathered}121\\ 12 \mid 21\\ 12\ \ 3\ \ 12 \mid 21\ \ 3\ \ 21\\ 123121321\end{gathered}$$

Пример 7. *Претпоставка је да је позната суперпермутација за* $n = 3$ *дужине 9. Формирање суперпермутације за* $n = 4$ *дужине* $9 + 4! = 33$*:*

$$\begin{gathered}123121321\\ 123 \mid 231 \mid 312 \mid 213 \mid 132 \mid 321\\ 123\ \ 4\ \ 123 \mid 231\ \ 4\ \ 231 \mid 312\ \ 4\ \ 312 \mid 213\ \ 4\ \ 213 \mid 132\ \ 4\ \ 132 \mid 321\ \ 4\ \ 321\\ 123412314231243121342132413214321\end{gathered}$$

Чињеница да новоформирана суперпермутација заиста садржи све пермутације следи из следећег разматрања. Посматрајући било коју пермутацију n елемената и читајући све елементе иза n, цикличним редоследом, добија се краћа пермутација $n-1$ елемената. На пример, посматрајући 15423 и читајући елементе иза 5, добија се 4231. Постоји тачно n различитих дужих пермутација које дају сваку одређену краћу - што су само ротације истог низа: 15423, 54231, 42315, 23154 и 31542. Обратно, узимањем две копије краће пермутације и додавањем n између њих, добија се n узастопних n-блокова почевши од првог, који садржи све дуже пермутације повезане са краћом. На пример, 4231 5 4231 садржи 42315, 23154 итд. Како описани алгоритам овај поступак примењује на листу свих краћих пермутација, на крају ће нужно генерисати све дуже пермутације. У наставку је показано да овај процес увек повећава дужину низа за тачно $n!$. Примећује се да колико год се карактера добија „распакивањем" m елемената оригиналне суперпермутације у $(n-1)(n-1)!$ елемената који експлицитно наводе све појединачне пермутације, поново се губи потпуно исти број када се на крају поново споје суседне копије тих пермутација. Дакле, увећање долази од дуплирања карактера и копирања новог елемента n. Према томе, нова суперпермутација је од старе дужа за:

$$(n-1) \cdot (n-1)! + (n-1)! = n!$$

Став 1. *Дужина минималне суперпермутације n елемената је $L(n) \geq n! + n - 1$.*

Доказ. Посматра се поступак формирања суперпермутације додавањем пермутација и коришћењем доступних преклапања[1]. Уводе се следеће ознаке

- L је текућа дужина ниске.
- N је број додатих пермутација.
- $X = L - N$

За почетак, формирана ниска је једнака првој додатој пермутацији и важи $L = n$, $N = 1$ и $X = n-1$. Након додавања друге пермутације, дужина ниске се мора повећати за бар 1, одакле се закључује да се X никада не смањује. На крају поступка, када су додате све пермутације важи $N = n!$, одакле следи $L = N + X \geq n - 1 + n!$. □

2.2 Потпуна претрага за мало n

Описани рекурзивни алгоритам гарантује суперпермутацију n елемената дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$. Природно се намеће питање: да се може добити боље решење тј. краћа суперпермутација? Потпуном претрагом могуће је проверити да се за $n = 1$, 2, 3 и 4 рекурзивним алгоритмом заиста добија суперпермутација минималне дужине, јединствена до на ренумерацију елемената. Претрага је имплементирана у поглављу 5. Домети овог програма нису велики, али је укључен као згодан начин увођења у проблем. Исти резултат следи из доказа доње границе дужине минималне суперпермутације у поглављу 2.4. Формирају се све могуће суперпермутације (њих $(n!)!$) надовезивањем свих пермутација, користећи могућа преклапања. На пример, за $n = 3$, једна од оваквих суперпермутација добија се редом надовезивањем пермутација 123, 132, 213, 231, 312 и 321. На пермутацију 123 надовезује се 132. Како нема преклапања, добија се ниска 123132. На ниску 123132 надовезује се пермутација 213, када долази до преклапања у виду карактера 2,

[1] део доказа `https://warosu.org/sci/thread/S3751105#p3751197`

чијим коришћењем се добија ниска 12313213. Понављањем поступка добија се ниска 12313213231312321, која заиста јесте суперпермутација реда n, али је дужине 17. Све формиране суперпермутације чија је дужина мања или једнака $\sum_{k=1}^{n} k!$ додају се у низ, а онда се одређују оне са минималном дужином. Међутим, испоставља се да су све оне дужине $\sum_{k=1}^{n} k!$ и да су (до на ренумерацију елемената) једнаке суперпермутацији добијеној рекурзивним алгоритмом. На пример, за $n = 3$ суперпермутација добијена рекурзивним алгоритмом је 123121321. Суперпермутације добијене потпуном претрагом су:

123121321
132131231
213212312
231232132
312313213
321323123

2.3 Тежински граф свих пермутација

Алгоритми за конструкцију минималних суперпермутација представљени у наредним поглављима користе тежински граф свих пермутација n елемената, стога је потребно претходно дефинисати неколико појмова. *Граф* $G = (V, E)$ састоји се од скупа V чворова и скупа E грана. Свака *грана* одговара пару различитих чворова (понекад су дозвољене гране које воде од чвора ка њему самом; али ће се у наставку рада сматрати да оне нису дозвољене). Граф може бити *усмерен* или *неусмерен*. Гране усмереног графа су уређени парови чворова, који се називају крајеви гране. Гране усмереног графа цртају се као стрелице усмерене од једног чвора (почетка) ка другом чвору (крају). Гране неусмереног графа су неуређени парови оне се цртају као обичне дужи (линије). *Степен* $d(v)$ чвора v је број грана суседних чвору v (односно број грана које v повезују са неким другим чвором). У усмереном графу разликује се *улазни степен*, број грана за које је чвор v крај, и *излазни степен*, број грана за које је чвор v почетак. *Пут* од v_1 до v_k је низ чворова $v_1, v_2, \ldots, v_k$ повезаних гранама (v_1, v_2), $(v_2, v_3), \ldots, (v_{k-1}, v_k)$; ове гране се обично такође сматрају делом пута. Пут је *прост*, ако се сваки чвор у њему појављује само једном. За чвор u се каже да је *достижан* из чвора v ако постоји пут (усмерен, односно неусмерен, зависно од графа) од v до

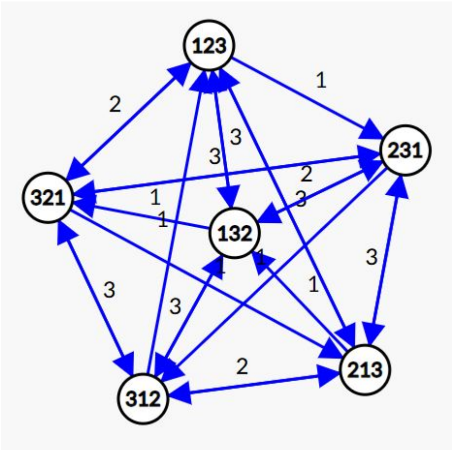
u. По дефиницији је чвор v достижан из v. *Циклус* је пут чији се први и последњи чвор поклапају. Циклус је прост ако се, осим првог и последњег чвора, ни један други чвор у њему не појављује два пута. Неусмерени облик усмереног графа $G = (V, E)$ је исти граф, без смерова на гранама [8]. *Циклусно покривање* у усмереном графу је скуп грана таквих да сваки чвор има улазни и излазни степен једнак један. *Величина циклусног покривања* је број међусобно дисјунктних циклуса које оно садржи [7]. За граф се каже да је *повезан* ако (у његовом неусмереном облику) постоји пут између произвољна два чвора. *Тежински граф* је граф чијим су гранама придружени реални бројеви: тежине, цене, дужине (енг. *weight, cost, length*). *Хамилтонов циклус* у графу је прост циклус који садржи сваки чвор графа тачно једном.

За азбуку од n симбола, може се конструисати потпуни усмерени граф са $n!$ чворова, где сваки чвор представља једну пермутацију n симбола. Тежина гране између чворова π и σ, у ознаци $\mathrm{wt}(\pi, \sigma)$, дефинише се као најмањи број k, $0 \le k \le n$, такав да је $(n-k)$-суфикс чвора π једнак $(n-k)$-префиксу чвора σ. Дакле, уклања се k елемената са почетка пермутације π и додаје на крај произвољним редоследом тако да се добије пермутација σ. Додатно, потребно је елиминисати такозване *неправилне гране*: грана је неправилна ако се може заменити са две или више надовезаних грана. На пример, грана тежине 2 од 12345 до 34512 је неправилна, јер се може заменити са гранама (12345, 23451) и (23451, 34512) тежине 1. Разлог за уклањање неправилних грана је то што се у процесу додавања два или више елемената на крај прве пермутације, добија трећа пермутација (у примеру је то 23451), а у циљу формирања минималне суперпермутације нема смисла заобићи је. У наставку ће важити претпоставка да су неправилне гране графа већ уклоњене.

Тежина пута $\pi_1, \ldots, \pi_m$ кроз граф дефинише се изразом:

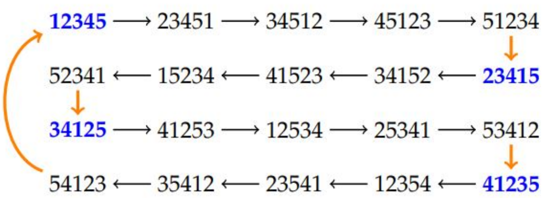
$$\mathrm{wt}(\pi_1, \ldots, \pi_m) = \textstyle\sum_{i=1}^{m-1} \mathrm{wt}(\pi_i, \pi_{i+1})$$

Сваки чвор графа има тачно једну грану тежине 1 која излази из њега. Ова грана води од пермутације π до њене цикличне ротације $\pi(2) \cdots \pi(n)\pi(1)$. Праћењем $n-1$ узастопних грана тежине 1, обилази се цикличка класа пермутације π, која се дефинише као скуп свих цикличних ротација π. Скуп свих пермутација дужине n је природно подељен на $(n-1)!$ овакви цикличких



Слика 2.1: Тежински граф свих пермутација за $n = 3$

класа. Сваки пут кроз граф који посећује сваку пермутацију, очигледно посећује сваку од ових класа. Сваки чвор графа такође има тачно једну грану тежине 2 која излази из њега (зато што су уклоњене неправилне гране). Ова грана води од пермутације π до пермутације $\pi(3)\cdots\pi(n)\pi(2)\pi(1)$. *2-циклус* који генерише пермутација π је скуп чворова које посећује пут који почиње са π, прати $n-1$ узастопних грана тежине 1, затим прати грану тежине 2, а онда понавља ове кораке $n-2$ пута. На пример, у графу пермутација дужине 5, 2-циклус који генерише пермутација 12345 је приказан је на слици 2.2. Гране тежине 1 су представљене црним стрелицама, а гране тежине 2 наранџастим.



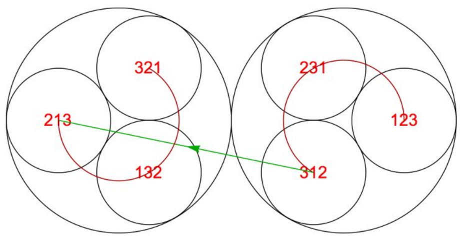
Слика 2.2: Пример 2-циклуса за $n = 5$

У овом примеру, може се уочити да је 2-циклус генерисан пермутацијом 12345 такође генерисан и пермутацијама 23415, 34125 и 41235. Наиме, важи следеће тврђење:

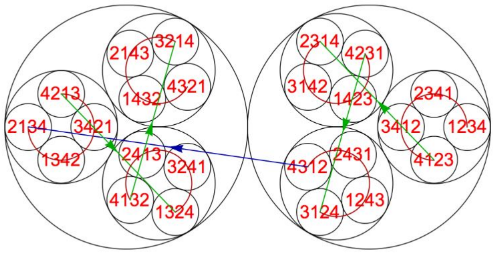
Тврђење 1. *([1] Тврђење 1) Ако је 2-циклус генерисан пермутацијом π, онда је генерисан и са свих $n-1$ пермутација добијених фиксирањем последњег елемента пермутације π и цикличном ротацијом преосталих елемената:*
$\pi(2)\cdots\pi(n-1)\pi(1)\pi(n)$
$\pi(3)\cdots\pi(n-1)\pi(1)\pi(2)\pi(n)$
$\dots$
$\pi(n-1)\pi(1)\cdots\pi(n-2)\pi(n)$.

Сваки 2-циклус састоји од дисјунктне уније цикличких класа сваког од његових генератора, одакле се закључује да сваки 2-циклус садржи $n(n-1)$ пермутација. Постоји $n(n-2)!$ различитих 2-циклуса (свака пермутација генерише 2-циклус, а сваки 2-циклус је генерисан од стране $n-1$ пермутације). Како сваки 2-циклус садржи само $n(n-1)$ пермутација, пут кроз граф који посећује сваку пермутацију мора ући у најмање $(n-2)!$ различитих 2-циклуса.

Посматрајући пермутације редом којим се појављују као подниске суперпермутације добијене рекурзивним алгоритмом, уочава се одређена законитост у низу тежина грана између суседних пермутација, приказана на сликама 2.3 и 2.4. Гране тежине 1 приказане су црвеном бојом, гране тежине 2 зеленом, а гране тежине 3 плавом бојом. Низ тежине грана за $n=3$ је 11211, а за $n=4$ је 11121112111311121112111 и може се добити покретањем програма у поглављу 5.



Слика 2.3: 2-циклус у графу за $n = 3$



Слика 2.4: 3-циклус у графу за $n = 4$

2.4 Доња граница дужине најкраће суперпермутације

У септембру 2011. године, један љубитељ *Anime* серија је на теми *Science&Math* форума *4chan*[2] поставио математичко питање у вези са култном телевизијском серијом „Меланхолија Харухи Судзумије". Прва сезона серије, која укључује путовање кроз време, првобитно је емитована у нехронолошком редоследу, а поновно приказивање и DVD верзија су додатно променили редослед епизода. Љубитељи серије су он-лајн дискутовали о томе који је најбољи редослед гледања епизода, а један од корисника је запитао: ако гледаоци желе да одгледају серију у сваком могућем редоследу, колико најмање епизода морају погледати? У року од сат времена, анонимни аутор је дао одговор - не потпуно решење, већ доњу границу броја епизода. Показао је да би гледаоци требало да одгледају бар 93,884,313,611 епизода како би видели све могуће редоследе. Наведени доказ[3] је у том тренутку промакао математичкој заједници и у јавност је доспео у октобру 2018. године, када је математичар Р. Хјустон (енг. *R. Houston*) ту чињеницу објавио на Твитеру. У октобру 2018. године Р. Хјустон, Џ. Пантоне и В. Ватер (енг. *R. Houston, J. Pantone, V. Vatter*) објавили су измењену верзију овог доказа у „Он-лајн Енциклопедији Целих Низова" (енг. *On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, OEIS*) [1]. Објављена верзија доказа приписана је анонимном кориснику сајта *4chan*. Случај за $n = 14$, назван је „Харухијев проблем" по ТВ серији „Меланхолија Харухи Судзумије" која има 14 епизода. Тренутне доња и горња граница износе 93.884.313.611 и 93.924.230.411, респективно. То значи да би

[2]познати анонимни форум основан 2003. године, са разноликим темама
[3]`https://warosu.org/sci/thread/S3751105#p3751197`

гледање серије у сваком могућем редоследу захтевало отприлике 4 милиона година.

Теорема 1. *([1] Теорема 2) Суперпермутација n елемената има дужину најмање:*

$$L(n) \geq n! + (n-1)! + (n-2)! + n - 3 \tag{2.2}$$

Доказ. За пут $\pi_1, \dots, \pi_m$ у описаном графу, уводе се следеће ознаке:
$p(\pi_1, \dots, \pi_m)$ = број различитих посећених пермутација,
$c(\pi_1, \dots, \pi_m)$ = број комлетираних цикличких класа у путу $\pi_1, \dots, \pi_{m-1}$, и
$v(\pi_1, \dots, \pi_m)$ = број посећених 2-циклуса.

Пут $\pi_1, \dots, \pi_m$ комплетира цикличку класу ако је посетио све чворове те класе. Пут је посетио 2-циклус ако је ушао у тај 2-циклус бар једном.

Циљ је показати да важи:

$$\mathrm{wt}(\pi_1, \dots, \pi_m) \geq p(\pi_1, \dots, \pi_m) + c(\pi_1, \dots, \pi_m) + v(\pi_1, \dots, \pi_m) - 2 \tag{2.3}$$

Ово тврђење доказује се индукцијом. Тврђење (2.3) важи у базном случају за $m = 1$, јер је $wt(\pi_1) = 0$, $p(\pi_1) = 1$, $c(\pi_1) = 1$, и $v(\pi_1) = 0$. Нека важи претпоставка да је неједнакост тачна за све путеве дужине m. Потребно је показати да тврђење важи за пут $\pi_1, \dots, \pi_m, \pi_{m+1}$. Доказ зависи од тежине гране од π_m до π_{m+1}.

- Ако је $wt(\pi_m, \pi_{m+1}) = 1$, онда π_m и π_{m+1} припадају истој цикличкој класи, тако да се вредност v не може повећати. Ако је π_{m+1} већ посећена, онда се вредност p не повећава, и то је крај доказа у овом случају. Уколико π_{m+1} није већ посећена, цикличка класа π_m није комплетирана, тако да се вредност c не повећава.

- Ако је $wt(\pi_m, \pi_{m+1}) = 2$, тада $\pi_{m+1} = \pi_m(3) \cdots \pi_m(n)\pi_m(2)\pi_m(1)$. Тврдимо да ако се вредност c повећава, онда се вредност v не може променити.

  Уколико важи препоставка да се вредност c повећава, тада важи

  $$c(\pi_1, \dots, \pi_m, \pi_{m+1}) = c(\pi_1, \dots, \pi_m) + 1$$

Ово имплицира да π_m комплетира своју цикличну класу, тако да претходно није била посећена. Како π_m комплетира своју цикличну класу, већ је морала бити посећена пермутација $\sigma = \pi_m(2)\pi_m(3)\dots\pi_m(n)\pi_m$ до које се долази граном тежине 1 из π_m. Међутим, σ није посећена из π_m зато што π_m није раније посећена и зато се до ње морало доћи граном тежине барем 2. Одатле следи да је 2-циклус који генерише σ већ посећен. На крају, тврђење 1 показује да σ и π_{m+1} генеришу исти 2-циклус. Стога посета π_{m+1} не води до новог 2-циклуса, тако да се вредност v не повећава. Показано је да се највише један од бројача c или v може повећати прелазећи преко гране тежине 2, па је у овом случају неједнакост (2.3) доказана.

- Ако је $wt(\pi_m, \pi_{m+1}) \geq 3$, онда пошто се десна страна неједнакости (2.3) може повећати највише за 3 прелазећи преко једне гране графа, неједнакости (2.3) важи.

Из доказаног тврђења непосредно следи трвђење теореме. Ако пут $\pi_1, \dots, \pi_m$ посећује сваку пермутацију, онда је $p(\pi_1, \dots, \pi_m) \geq n!$. Такође, пут мора комплетирати све $(n-1)!$ цикличке класе, тако да мора бити $c(\pi_1, \dots, \pi_m) \geq (n-1)! - 1$, и мора се ући у бар $(n-2)!$ 2-циклуса. Ово показује да је $wt(\pi_1, \dots, \pi_m) \geq n! + (n-1)! + (n-2)! - 3$. На крају, суперпермутација која одговара овом путу има дужину $n + wt(\pi_1, \dots, \pi_m)$, тако да је дужина ове суперпермутације најмање $n! + (n-1)! + (n-2)! + n - 3$, што је и требало доказати. □

2.5 Нејединственост минималне суперпермутације

Све до 2013. године, сматрано да је да дужина минималне суперпермутације $\sum_{k=1}^{n} k!$ и да је добијена суперпермутација јединствена до на ренумерацију симбола. Тада је Н. Џонсон (*N. Johnston*) [4] изнео конструкцију којом је показао да, ако је наведена дужина тачна, за $n \geq 5$ добијене суперпермутације једнаке дужине нису јединствене. Открио је могућност да се на велики број начина елементи преместе, а да добијена суперпермутација има исту дужину.

Рачунање минималне суперпермутације за $n \geq 5$ није погодно вршити грубом силом, али позната решења за $n \leq 4$ дају структуру која се може уопштити.

У доказима Џонсон је користио *циклички запис пермутације* који се дефинише на следећи начин. Нека је $p_k \in S_n$ пермутација која циклично повећава првих k позитивних целих бројева за један и делује као идентитет иначе: $p_k(i) = i+1$ ако је $1 \leq i < k$, $p_k(i) = i$ ако је $k < i \leq n$, и $p_k(k) = 1$. На пример, $p_3 : 12345 \to 23145$. Пермутација p_k^j циклично повећава првих k позитивних бројева за j, а делује као идентитет иначе. На пример, $p_4^2 : 23145 \to 14235$. За сваку пермутацију $\sigma \in S_n$, постоји јединствена $(n-1)$-торка експонената $(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ са $0 \leq j_i < i$ за све i, тако да је $\sigma = p_{j_2}^2 \circ p_{j_3}^3 \circ \ldots \circ p_{j_n}^n$. Да би σ била записана на овај начин, прво се бира j_n тако да се исправан елемент преслика у n, затим се бира j_{n-1} тако да се исправан елемент преслика у $n-1$, итд. Постоји тачно $n!$ $(n-1)$-торки $(j_2, j_3, \ldots, j_n)$ које задовољавају $0 \leq j_i < i$ за све i, што је једнако кардиналности скупа S_n. Уместо експлицитног писања пермутације у облику $p_{j_2}^2 \circ p_{j_3}^3 \circ \ldots \circ p_{j_n}^n$, записују се експоненти редом унутар угластих заграда са индексом c, као на пример $[j_2 j_3 \ldots j_n]_c$. На пример, $13425 = [1010]_c$. Интуитивнији начин трансформације цикличког записа пермутације у њен стандардни једнолинијски запис почиње пермутацијом $12 \ldots n$. Прва 2 елемента ротирају се улево онолико пута колико је назначено са j_2, затим се прва 3 елемента ротирају улево онолико пута колико је назначено са j_3, итд. На пример, како би се добио једнолинијски запис пермутације $[0121]_c$ почиње се пермутацијом 12345 и врши се следећа трансформација:

$$12345 \underset{0}{\to} 12345 \underset{1}{\to} 23145 \underset{2}{\to} 14235 \underset{1}{\to} 42351$$

У одељку 2.1 описана је рекурзивна конструкција суперпермутације дужине $\sum_{k=1}^{n} k!$ која се састоји из следећих корака. Уводе се следеће ознаке:

- M_n је суперпермутација n елемената добијена рекурзивним алгоритмом, чија је дужина $\sum_{k=1}^{n} k!$.
- P_j је j-та пермутација n елемената као подниска M_n.
- Q_j је ниска дужине $2n+1$ добијена надовезивањем редом ниске P_j , карактера $n+1$ и поново ниске P_j.

Џонсон је уочио законитост у низу цикличких записа пермутација у редоследу којим се појављују као подниске у M_n. На пример, за $n = 3$, пермутације које се појављују у $M_3 = 123121321$ су редом: 123, 231, 312, 213, 132, 321. Њихови циклички записи су [00]c, [01]c, [02]c, [10]c, [11]c и [12]c, редом. Другим речима, редослед пермутација у M_3 је исти као редослед који се добија „бројањем" у цикличком запису.

Тврђење 2. *([4] Тврђење 3) Нека су n и j позитивни цели бројеви такви да је $0 \leq j < n!$. Ако важи*

$$j = \sum_{i=2}^{n} j_i \cdot \frac{n!}{i!}$$

при услову $0 \leq j_i < i$ за свако i, онда ће $(j+1)$-ва пермутација која се појављује у M_n као непрекидна подниска бити $[j_2 j_3 ... j_n]c$.

Доказ. Тврђење се доказује индукцијом по n. Показано је да је резултат тачан када је $n = 3$, и такође се лако проверава у случајевима $n = 1$ или $n = 2$. Претпоставимо да тврђење важи за неко n. Тада, у конструкцији M_{n+1} рекурзивним алгоритмом, P_j је $(j+1)$-а пермутација n симбола која се појављује у M_n, па је $P_j = [j_2 j_3 ... j_n]c$ према индуктивној хипотези. Онда Q_j садржи $n+1$ пермутација од $[n+1]$ као подниз, прву од којих чини $[j_2 j_3 ... j_n 0]c$. Друга пермутација која се појављује као подниска у Q_j је само циклична пермутација прве: $[j_2 j_3 ... j_n 0]c \circ p_{n+1} = [j_2 j_3 ... j_n 1]c$. Слично, трећа пермутација која се појављује као подниска у Q_j је $[j_2 j_3 ... j_n 1]c \circ p_{n+1} = [j_2 j_3 ... j_n 2]c$, и тако даље до $[j_2 j_3 ... j_n n]c$. Резултат следи. □

Посматрајући суперпермутацију M_5, може се уочити да су првих 60 пермутација које се појављују као подниске облика $[0xyz]_c$ за неке $0 \leq x < 3$, $0 \leq y < 4$, и $0 \leq z < 5$, док је последњих 60 пермутација које се појављују као подниске M_5 облика $[1xyz]_c$. Другим речима, првих 60 пермутација су оне у којима елементи 1 и 2 нису замењени. Ако се пермутације запишу у свом стандардном једнолинијском запису и 4 и 5 се уклоне, остаје 123, 231, или 312. Слично, последњих 60 пермутација које се појављују у M_5 су оне које резултују у 213, 132, или 321 када се 4 и 5 уклоне. Будући да ова особина нема везе са редоследом 4 и 5 у једнолинијском запису пермутације, закључује се да је пермутација једна од првих (последњих) 60 пермутација које се појављују као подниске у M_5 ако и само ако се заменом улога 4 и 5 поново добија једна од првих (последњих) 60 пермутација које се појављују у M_5. Овај закључак води до кључне идеје: могуће је заменити све 4 са 5 (и обрнуто) у другој половини M_5 како би се генерисала нова ниска M_5' која је исте дужине и и даље је суперпермутација. Помоћу програма могуће је проверити да су заиста различите суперпермутације дужине $\sum_{k=1}^{5} k! = 153$.

M_5:
123451234152341253412354123145231425314235142315423124531243512431524312543121345213425134215342135421324513241532413524132541321453214352143251432154321
M_5':
123451234152341253412354123145231425314235142315423124531243512431524312543121354213524135214352134521325413251432513425132451321543215342153241532145321

Лема 1. *([4] Лема 5) Нека су $2 \leq k < n$ цели бројеви. За свако $0 \leq j < k!$, нека је $T_{j,k}$ најкраћа подниска M_n која садржи сваку пермутацију од $(j \cdot n!/k! + 1)$-е до $((j+1) \cdot n!/k!)$-е које се налазе у M_n као подниске. Тада за свако j:*

1. *Постоји $1 \leq \ell < k$ такво да је бар ℓ елемената $T_{j,k}$ редом једнако са првих ℓ елемената $T_{j+1,k}$.*
2. *Првих и последњих $k+1$ елемената $T_{j,k}$ су $1, 2, \ldots, k$, и $k+1$ (не нужно тим редом).*
3. *Скуп пермутација које су подниске $T_{j,k}$ остаје непромењен при свим променама елемената $k+2, k+3, \ldots, n$ у оквиру $T_{j,k}$.*

Доказ. Својства 1. и 2. доказују се индукцијом. Јасно је да су оба својства тачна за случај $n = 3$. Претпоставимо да тврђење важи за неко M_n. За фиксирано k, својства 1. и 2. још увек важе за M_{n+1}. Како би се доказало да својства 1. и 2. такође важе за M_{n+1} када је $k = n$, довољно је уочити да је у овом случају $T_{j,k} = Q_j$, а Q_j задовољава оба својства.

Својство 3. се доказује директно. Директна последица тврђења 2. је да постоје фиксни бројеви $j_2, j_3, \ldots, j_k$ такви да $T_{j,k}$ садржи тачно пермутације чији циклички записи имају облик $[j_2 j_3 \ldots j_n]c$, где j_i варира од 0 до $i-1$ када је $k+1 \leq i \leq n$. Одатле следи да постоји фиксна пермутација τ_j на $[k+1]$ таква да је $\sigma \in S_n$ подниска ниске $T_{j,k}$ ако и само ако уклањање елемената $k+2, k+$

$3, \ldots, n$ из њеног једнолинијског записа резултује цикличном пермутацијом τ_j. Како овај критеријум подниске $T_{j,k}$ не зависи од позиције елемената $k+2, k+3, \ldots, n$ у σ, доказано је својство 3. □

Теорема 2. *([4] Теорема 4) Постоји бар*

$$\prod_{k=1}^{n-4}(n-k-2)^{k \cdot k!} \tag{2.4}$$

јединствених (до на ренумерацију елемената) суперпермутација дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$.

Доказ. Доказ се заснива на рекурзивној конструкцији наведеног броја суперпермутација полазећи од познате суперпермутације M_n.

1. Нека је $k = n-3$ и скуп $SP := \{M_n\}$ скуп свих суперпермутација наведене дужине које су до сада конструисане.

2. За свако $T \in SP$ и свако $0 \leq j < k!$, нека је $T_{j,k}$ дефинисано као у леми 1. Како је показано у леми 1., могуће је заменити улоге $k+2$, $k+3$, ..., n унутар дела T који одговара $T_{j,k}$ без утицаја на то да ли је T суперпермутација или није. Ово је могуће урадити за сваку вредност j од 0 до $k!-1$; међутим, у обзир се узима само $k!-k$ вредности j које нису дељиве се $(k-1)!$. Додати све суперпермутације које су тако конструисане у SP. Кардиналност SP је стога током овог корака помножена са $(n-k-1)!^{k!-k}$.

3. Умањити k за 1.

4. Ако је $k = 1$, зауставити процес. Иначе, вратити се на корак 2.

У кораку 2. користе се само вредности j које нису дељиве са $(k-1)!$. Разлог за избегавање $j = 0$ је једноставан: циљ је да све суперпермутације почну подниском $12\ldots n$. Разлог за неразматрање свих осталих вредности j дељивих са $(k-1)!$ је избегавање дуплог бројања неких суперпермутација. Ако би $k+2, k+3, \ldots, n$ заменили улоге на исти начин за свако j од $i \cdot (k-1)!$ до $(i+1) \cdot (k-1)! - 1$ за неко i, била би формирана суперпермутација која је иста као она која се добија у следећој итерацији алгоритма (након смањења k за 1). То би значило да би се неке суперпермутације бројале двапут. Како се у свакој итерацији алгоритма мења део сваке ниске T који раније није мењан, сваки корак у поступку заиста производи суперпермутације које нису већ у скупу SP. Како би се израчунала кардиналност скупа SP након завршетка алгоритма, односно број различитих суперпермутација које су конструисане, треба се подсетити да кардиналност увећава фактором $(n-k-1)!k!-k$ за сваку вредност k од $n-3$ до 2. То значи да је број различитих суперпермутација које су конструисане:

$$\prod_{k=2}^{n-3}(n-k-1)^{k!-k}$$

□

Након интензивног истраживања, Б. Чафин (*B. Chaffin*) је 2014. године за $n=5$ пронашао осам различитих суперпермутација исте дужине. Рекурзивни алгоритам из одељка 2.1 увек генерише суперпермутације у којима се елементи који се бришу налазе на одређеним позицијама, међутим шест од осам Чафинових суперпермутација одступају од тог шаблона, док је дужина иста [4]. За $n=3$ минималну суперпермутацију 123121321 могуће је генерисати применом похлепног алгоритма: почети пермутацијом 123, надовезати елемент 1 чиме се додаје пермутација 231, а онда надовезати елемент 2 чиме се додаје пермутација 312. Међутим, тренутна ниска је 12312 и није могуће надовезати само један елемент тако да се у низ дода нова пермутација. Потребно је додати два елемента 13 да би била додата нова пермутација 213. У свим до тада познатим малим суперпермутацијама са n елемената, увек је постојала тачка (отприлике на средини суперпермутације) на којој је $n-2$ карактера *„изгубљено”*: они нису додавали нове пермутације сами по себи, већ само „припремали” могућност да следећи елемент да дода нову пермутацију. Међутим, ниједна од Чафинових шест нових минималних суперпермутација нема ово својство: све оне нигде немају више од 2 „изгубљена” елемента. Дакле, свих шест нових суперпермутација заиста су различите од свих до тада познатих суперпермутација. Чафинова идеја је да се обави претрага у дубину у односу на позицију „изгубљеног” елемента. Како најкраћа позната суперпермутација за $n=5$ има дужину 153, а постоји 120 пермутација 5 елемената и првих $n-1=4$ карактера суперпермутације морају бити „изгубљени”, остаје проблем где поставити 29 „изгубљених” елемената. Уколико је могуће пронаћи суперпермутацију са само 28 „изгубљених” елемената (осим првих 4), то би била суперпермутација дужине 152. У супротном, ако је заиста потребно свих

[4] `http://www.njohnston.ca/2014/08/all-minimal-superpermutations-on-five-symbols-have-been-found/`

29 „изгубљених” елемената, онда минималне суперпермутације имају дужину 153.

Претрага у дубину састоји се од следећих корака:

1. Грубом силом пронаћи максималан број пермутација које се могу надовезати уколико је дозвољен само један „изгубљени” елемент. Одговор је 10 пермутација (на пример, низ 123451234152341).

2. Пронаћи максималан број пермутација које је могуће додати у ниску уколико су дозвољена два „изгубљена” елемента. Ради убрзања претраге, једном када је пронађена ниска који садржи p пермутација, све друге ниске које користе „изгубљени” елемент пре него што имају $p - 10$ пермутација, могу се занемарити. Из претходне тачке познато је да други „изгубљени” елемент може додати највише још 10 пермутација, што чини укупно $(p - 10) + 10 = p$ пермутација.

3. Понављати процес за све веће бројеве дозвољених „изгубљених” елемената користећи претходно добијене резултате.

Закључује се да није могуће додати свих 120 пермутација у низ са 28 или мање „изгубљених” карактера, што показује да за $n = 5$ не постоји суперпермутација дужине 152. Резултати овог израчунавања могу се резимирати табелом 2.1

број изгубљених елемената	максимални број пермутација
0	5
1	10
2	15
3	20
4	23
5	28
6	33
7	36
8	41
9	46
10	49
11	53
12	58
13	62
14	66
15	70
16	74
17	79
18	83
19	87
20	92
21	96
22	99
23	103
24	107
25	111
26	114
27	116
28	118
29	120

Табела 2.1: Максимални број пермутација које се могу додати за различите бројеве изгубљених елемената

Глава 3

Суперпермутација као пут кроз граф

До 2014. године знало се да је за $n \leq 5$ дужина минималне суперпермутације $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$ и претпостављало се да је ова једнакост тачна за све вредности n. Међутим, Р. Хјустон (*R. Houston*) [3] је показао да тврђење не важи за $n = 6$, пошто је пронашао суперпермутацију дужине 872, што је за један мање од $L(6) = 873$. Применом рекурзије на Хјустонову краћу суперпермутацију за $n = 6$, могуће је генерисати суперпермутације за $n \geq 6$, које су такође за један карактер краће од $L(n)$. Хјустон је проблем проналажења минималне суперпермутације посматрао као инстанцу проблема трговачког путника.

3.1 Проблем трговачког путника

Хамилтонов циклус у графу је прост циклус који садржи сваки чвор графа тачно једном. Установити да ли задати граф садржи Хамилтонов циклус је NP комплетан и за неусмерене и за усмерене графове.

Проблем трговачког путника (енг. *Traveling Salesman Problem, TSP*) гласи: у потпуном тежинском графу G пронаћи Хамилтонов циклус са најмањим збиром тежина грана. У симетричном случају проблема трговачког путника, дат је потпуни неусмерени граф са тежинама грана које одговарају растојањима између чворова. У асиметричном случају, дат је потпуни усмерени граф и тежине грана између чворова могу бити различите у два смера, што значи да постоји двосмерни проблем трговачког путника. Алтернативна варијанта проблема трговачког путника подразумева проналажење Хамилтоновог пута најмање тежине у тежинском графу.

3.2 Хјустонова конструкција

У одељку 2.3 уведен је тежински граф свих пермутација n елемената. Хамилтонов пут најмање тежине у овом графу одговара минималној суперпермутацији n елемената. Дужина одговарајуће суперпермутације је $n + w - 1$, где је w тежина минималног Хамилтоновог пута. Ово није стандардна истанца проблема TSP, јер је циљ наћи Хамилтонов пут уместо Хамилтоновог циклуса. Да би се описани проблем повезао са проблемом TSP, довољно је променити тежине одређених грана у 0. Нека је o идентичка пермутација $12...n$ и нека је тежина сваке гране $s - o$ једнака нули. Тежина минималног Хамилтоновог циклуса на резултујућем графу једнака је тежини минималног Хамилтоновог пута који почиње у o.

Проблем трговачког путника је интензивно истраживан; иако је NP тежак, постоје решавачи који у пракси раде веома добро. Хјустон је у ту сврху користио *Concorde*[1], који налази доказано минимално решење, и *LKH*, који је брз, рандомизован, приближни решавач. Како *Concorde* решава само симетрични TSP, било је неопходно користити Џонкер-Волгенант (*Jonker-Volgenant*) трансформацију [6], којом је од асиметричног TSP са $n!$ чворова, добијен симетрични са $2(n)!$ чворова. Коришћењем *Concorde* решавача Хјустон је решио случај $n = 5$ за 1929.02 секунди на Amazon EC2 'm3.medium' инстанци која ради на линуксу, потврђујући Чафинов ранији резултат. Није пронашао тачно решење за $n = 6$, јер је *Concorde* прекинуо рад са интерном грешком након неколико дана. Ипак, успео је да оповргне претпоставку о минималној суперпермутацији за $n = 6$ без потпуног решавања проблема користећи решавач *LKH* и поновљено тражење приближног решења. Пронашао је Хамилтонов циклус тежине 866, коме одговара суперпермутација дужине 872, што је за један мање од претходно познате дужине 873:

[1] `https://www.math.uwaterloo.ca/tsp/concorde.html`

1234561234516234512634512364513264513624513642513645213645123465123415
6234152634152364152346152341652341256341253641253461253416253412653412
3564123546123541623541263541236541326543126453162435162431562431652431
6254316245316425314625314265314256314253614253164523146523145623145263
1452361452316453216453126435126431526431256432156423154623154263154236
1542316542315642135642153624153621453621543621534621354621345621346521
3462513462153642156342165342163542163452163425163421564325164325614325
6413256431265432165432615342613542613452613425613426513426153246513246
5312463512463152463125463215463251463254163254613254631245632145632415
6324516324561324563124653214653241653246153264153261453261543265143625
1436521435621435261435216435214635214365124361524361254361245361243561
2436514235614235164235146235142635142365143265413625413652413562413526
41352461352416352413654213654123

Ова суперпермутација израчуната је из 9228. покушаја, а сваки покушај трајао је око 2 до 4 секунде, на 2010 MacBook Pro, са 2.66 GHz Intel Core 2 Duo процесором.

3.3 Хамилтонов пут у Кејлијевом графу симетричне групе S_n

У наставку су представљени најважнији појмови у вези са Хамилтоновим путем у Кејлијевом графу симетричне групе S_n, као и конструкција А. Вилијамса (*A. Williams*), коју је Г. Еган (*G. Egan*) касније прилагодио и искористио за формирање суперпермутације. Вилијамс је доказао да у Кејлијевом графу симетричне групе S_n постоји Хамилтонов циклус $C_1(n)$ за непарно n, циклусно покривање $C_2(n)$ величине два за свако n, као и Хамилтонов пут $P(n)$ за свако n. Докази се могу се наћи у раду [7].

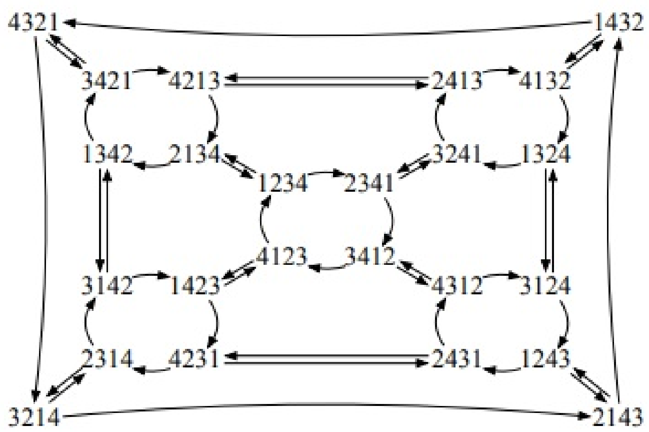
Кејлијев граф (*Кејлијев обојени граф, Кејлијев дијаграм, дијаграм групе*) је граф који представља апстрактну структуру групе.

Дефиниција 2. *Нека је G коначна група и S симетрични скуп генератора групе G, тј. $S = S^{-1}$. Кејлијев граф $\Gamma = \Gamma(G, S)$ је граф са чворовима $g \in G$ и гранама (g, gs), (g, gs^{-1}), где је $s \in S$ [5].*

Нека је $G(n) = \Gamma(S_n, \{\sigma, \tau\})$ усмерени граф на симетричној групи S_n са генераторима $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ и $\tau = (1\ 2)$ (пермутација која замењује елементе 1 и 2) и гранама $E_\sigma \cup E_\tau$. Пример графа за $n = 4$ приказан је на слици 3.1. Гране са правом стрелицом су τ-гране, а остале гране су σ-гране.

Вилијамс је доказао да:

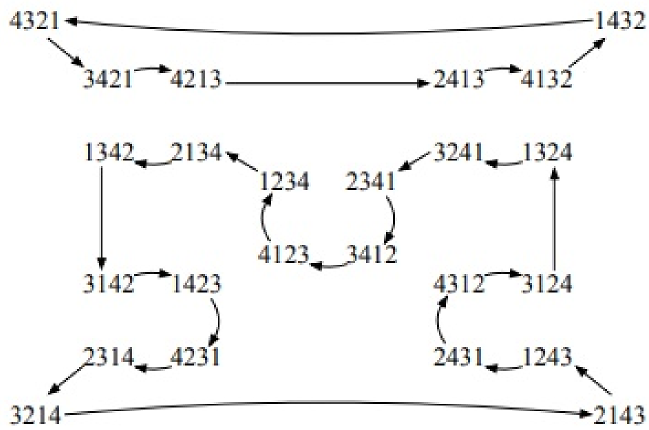
1. $G(n)$ за непарно n садржи Хамилтонов циклус $C_1(n)$.
2. $G(n)$ за свако n садржи Хамилтонов пут $P(n)$.
3. $G(n)$ за свако n садржи циклусно покривање $C_2(n)$ величине 2 ().



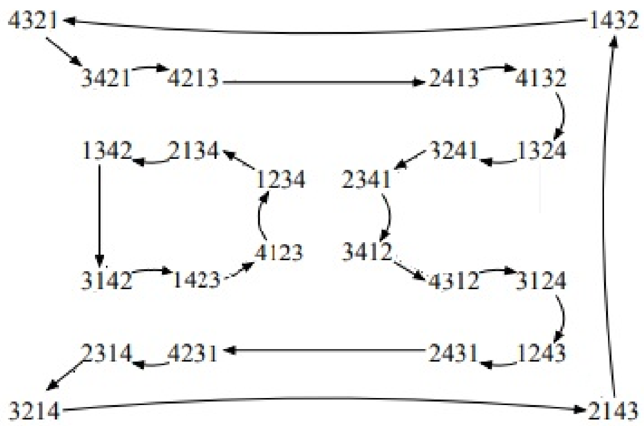
Слика 3.1: Кејлијев граф $G(4)$

Дефиниција 3. *([7] Дефиниција 1) Нека је* $p = p_0 \dots p_{n-1}$, $p_i = n$, *и* $r = p_{(i \bmod n-1)+1}$. *Тада* $(p\tau, p) \in C_1(n)$ *ако:*
(a) $r < n-1$ *и* $r = p_0 - 1$, *или*
(b) $r = n-1$ *и* $p_0 = 2$, *или*
(c) $p_1 p_2 \dots p_{n-1}$ *је ротација пермутације* $12 \dots n-1$*;*
У противном, $(p\sigma^{-1}, p) \in C_1(n)$.

Дефиниција 4. *([7] Дефиниција 2) Нека је* $p = p_0 \dots p_{n-1}$, $p_i = n$, *и* $r = p_{(i \bmod n-1)+1}$. *Тада* $(p\tau, p) \in C_2(n)$ *ако:*
(a) $r < n-1$ *и* $r = p_0 - 1$, *или*
(b) $r = n-1$ *и* $p_0 = 1$*;*
У противном, $(p\sigma^{-1}, p) \in C_2(n)$.



Слика 3.2: Циклусно покривање $C_2(4)$ у Кејлијевом графу $G(4)$



Слика 3.3: Циклусно покривање $C_1(4)$ у Кејлијевом графу $G(4)$

У ове две дефиниције елемент n је на i-тој позицији у пермутацији p, а r означава елемент са десне стране n, осим у случају $i = n-1$, када је $r = p_1$. На пример, ако је $p = p_0p_1p_2p_3 = 4231$, онда је $i = 0$ и $r = 2$ (јер је елемент $p_0 = 4$ праћен елементом $p_1 = 2$). Ако је $p = 1234$, онда је $i = 3$ и $r = 2$. τ-грана улази у чвор p када је први елемент пермутације $p_0 = (r \mod n-1) + 1$. Чворови у које улази τ-грана у $C_2(4)$ су $24\underline{1}3$, $234\underline{1}$, $2\underline{1}34$, $34\underline{2}1$, $314\underline{2}$, $3\underline{2}14$, $14\underline{3}2$, $124\underline{3}$ и $1\underline{3}24$, где је r подвучено. Све наведене вредности налазе се у табели 3.1.

$p_0p_1p_2p_3$	i	r	грана у C_1	грана у C_2
1234	3	2	(4123,1234)	(4123,1234)
1243	2	3	(3124,1243)	(2143,1243)
1324	3	3	(4132,1324)	(3124,1324)
1342	2	2	(2134,1342)	(2134,1342)
1423	1	2	(3142,1423)	(3142,1423)
1432	1	3	(2143,1432)	(4132,1432)
2134	3	1	(1234,2134)	(1234,2134)
2143	2	3	(3214,2143)	(3214,2143)
2314	3	3	(4231,2314)	(4231,2314)
2341	2	1	(3241,2341)	(3241,2341)
2413	1	1	(4213,2413)	(4213,2413)
2431	1	3	(1243,2431)	(1243,2431)
3124	3	1	(4312,3124)	(4312,3124)
3142	2	2	(1342,3142)	(1342,3142)
3214	3	2	(2314,3214)	(2314,3214)
3241	2	1	(1324,3241)	(1324,3241)
3412	1	1	(2341,3412)	(2341,3412)
3421	1	2	(4321,3421)	(4321,3421)
4123	0	1	(1423,4123)	(3412,4123)
4132	0	1	(2413,4132)	(2413,4132)
4213	0	2	(3421,4213)	(3421,4213)
4231	0	2	(2431,4231)	(1423,4231)
4312	0	3	(3412,4312)	(2431,4312)
4321	0	3	(1432,4321)	(1432,4321)

Табела 3.1: Циклусна покривања $C_1(4)$ и $C_2(4)$

3.4 Адаптације Вилијамсове конструкције

Конструкција помоћу алтернирајућих циклуса

Г. Еган[2] је адаптирао конструкцију А. Вилијамса тако да може се да искористи за проналажење суперпермутација. Претпоставља да све суперпермутације почињу идентичном пермутацијом, да би се избегле њој еквивалентне суперпермутације које се од ње добијају ренумерацијом елемената. Када се са пермутације s прелази на њеног суседа t по грани тежине 1, врши се циклична ротација за једно место улево, што је одговара множењу премутације s пермутацијом $\sigma = 2345...n1$. При преласку са пермутације s на њеног суседа по грани тежине 2, оригинална пермутација се множи пермутацијом δ

[2] `http://gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html`

$= 345...n21$, која врши цикличну ротацију за два места улево, а затим мења редослед два елемента који су премештени са почетка на крај. Испоставља се да су пермутације σ и δ довољне за генеришу целу групу S_n. Дакле, могуће је добити сваку пермутацију, полазећи од идентичне пермутације, користећи само гране тежине 1 и 2.

Како би конструисао Хамилтонов пут кроз симетричну групу, Вилијамс је најпре доказао да је могуће изградити циклусно покривање групе које се састоји од два циклуса, од којих се затим може формирати пут који сваки чвор посећује тачно једном. Једноставан пример циклусног покривања графа је оно које садржи све гране тежине 1. Како сваки чвор има једну улазну и једну излазну грану тежине 1, могу се следити ове гране у циклусима. Сваки овакав циклус садржи n чворова, а граф укупно има $(n-1)!$ таквих циклуса. Како би конструисао своје циклусно покривање, Вилијамс почиње структуром коју назива *алтернирајући циклус*. У наставку се разматра модификација Вилијамсовог алтернирајућег циклуса конструисана на следећи начин[3]:

1. Узети произвољни чвор као почетак.
2. Наизменично понављати множење пермутацијама δ и σ^{-1}, све до повратка у почетни чвор.

Наведени кораци одговарају поступку: пратити грану тежине 2, а затим грану тежине 1 уназад, све до повратка у почетни чвор. Комбинована пермутација $\delta\sigma^{-1} = 1345...n2$ врши леву цикличну ротацију последњих $n-1$ елемената, остављајући први елемент фиксиран. На пример, почевши од чвора 12345, добија се следећи алтернирајући циклус:

$$12345 \times \delta \Rightarrow 34521 \times \sigma^{-1} \leftarrow$$
$$13452 \times \delta \Rightarrow 45231 \times \sigma^{-1} \leftarrow$$
$$14523 \times \delta \Rightarrow 52341 \times \sigma^{-1} \leftarrow$$
$$15234 \times \delta \Rightarrow 23451 \times \sigma^{-1} \leftarrow \text{повратак на почетак}$$

Први елемент почетног чвора, 1, у сваком кораку мења своју позицију: прво и последње место. Преостали елементи, 2345, су увек у истом цикличном редоследу. Закључује се да је за било какав дати избор од $n-1$ елемената

[3] `http://gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html`

у одређеном цикличном редоследу, могуће конструисати алтернирајући циклус постављањем недостајућег елемента на почетак и затим наизменичним множењем са δ и σ^{-1}. Добијени конкретни алтернирајући циклус не зависи од тачног цикличког редоследа којим је наведено $n-1$ симбола, јер је свих $n-1$ ротација присутно у истом циклусу.

Вилијамс је доказао да се свако циклусно покривање овог графа може конструисати на следећи начин: изабрати произвољно скуп (могуће и празан скуп) алтернирајућих циклуса са дисјунктним гранама. Затим, узети све гране графа тежине 1 и одбацити оне које се налазе у изабраним скупу алтернирајућих циклуса. Уместо њих убацити гране тежине 2 из истих алтернирајућих циклуса.

Када се крене само са гранама са тежином 1, јасно је да оне формирају циклусно покривање, састојећи се од свих 1-циклуса. За сваку грану тежине 1 која се одбацује, јер се налази у алтернирајућем циклусу, постоје два чвора која се мењају: један на почетку гране и један на крају. Чвор на почетку, када изгуби грану тежине 1, добија грану тежине 2 из алтернирајућег циклуса која долази до истог чвора. Такође, чвор на крају, када изгуби грану тежине 1 која улази у њега, добија грану тежине 2 из истог алтернирајућег циклуса која такође улази у исти чвор.

Еган је модификовао Вилијамсову конструкцију циклусног покривања од два циклуса на следећи начин[4]:

1. Узети $n-1$ пар циклично узастопних елемената: $(1,2),(2,3),(3,4),\ldots,(n-2,n-1),(n-1,1)$
2. За сваки пар (r,m) узети $(n-3)!$ пермутација елемената од 1 до $n-1$ које не садрже елементе (r,m). Ових $(n-1)(n-3)!$ пермутација-ниски означимо заједничком ознаком q.
3. За сваку од $(n-1)(n-3)!$ могућности, формирати алтернирајући циклус, полазећи од пермутације $mnrq$.

[4] `http://gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/Superpermutations.html`

Овако формирани алтернирајући циклуси су дисјунктни. Када су m и r исти, nrq су различити у модулу ротација због различитих q-ова. Када су m и r различити, не може важити једнакост облика $m_1 rot(nr_1q_1) = rot(nr_2q2_)m_2$, јер би ротације које доводе n на исто место на обе стране неизбежно на иста места ставиле неједнаке r_1 и r_2.

Ови циклуси садрже:

- $(n-1)^2(n-3)!$ грана тежине 1
- $(n-1)^2(n-3)!$ грана тежине 2

Узимајући $n!$ грана тежине 1 у графу и одбацујући оне из алтернирајућих циклуса, остаје циклично покривање које се састоји од:

- $n! - (n-1)^2(n-3)!$ грана тежине 1
- $(n-1)^2(n-3)!$ грана тежине 2

Због тога је укупна тежина грана у циклусном покривању једнака:

$$\begin{aligned} n! + (n-1)(n-2)! &= n! + [(n-1)(n-2) + (n-2) + 1](n-2)! \\ &= n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! \end{aligned}$$

Вилијамс је показао да се овако формирано циклусно покривање заиста састоји из тачно два циклуса. Конструкција Хамилтоновог пута од наведених циклуса састоји се од следећих корака:

- Узети чвор v који има излазну грану тежине 2, у циклусном покривању, такав да његова излазна грана тежине 1 води у други циклус.
- Нека је s чвор до кога води грана тежине 2 из чвора v. Чвор s узети као почетак Хамилтоновог пута.
- Пратити гране циклусног покривања из s, све до повратка у v.
- Пратити јединствену излазну грану тежине 1 из чвора v у чвор u, који припада другом циклусу.
- Пратити гране циклусног покривања из u, све до повратка у u.

Колика је дужина суперпермутације добијене на овај начин? Раздвајање и спајање циклуса одбацује две узастопне гране тежине 2 и додаје једну грану тежине 1, што смањује укупну тежину за 3. Поред тежина грана, потребно је укључити дужину почетне пермутације. Дакле, укупна дужина овако конструисане суперпермутације је:

$$L_2(n) = n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 3$$

Конструкција помоћу локалних правила

Поред конструкције помоћу алтернирајућих циклуса, Вилијамс такође наводи неколико једноставних локалних правила за одређивање грана у циклусним покривањима. Еган је правила модификовао и конструисао следећи поступак:

1. Узети произвољну пермутацију као почетну и њен први елемент означити са f.
2. Ако је елемент f различит од n и елемент $1 + ((f-2) \mod (n-1))$ се налази на првој позицији циклично здесна у односу на n у блоку који искључује f, изабрати грану тежине 2. Иначе, изабрати грану тежине 1.

Наведени поступак, покренут од било које пермутације, обилази или мањи циклус дужине $(n-1)(n-2)$ или велики циклус који садржи све остале пермутације. У мањем циклусу важе одређена правила:

1. Први елемент f је различит од n.
2. Последњи елемент је $1 + (f \mod (n-1))$, који никад није једнак n.
3. Брисањем n из пермутације добија се нека од цикличних ротација $n - 1, n-2, \dots 3, 2, 1$.

Како је f различит од n, за елемент на првој позицији постоји $n-1$ могућности. За позицију елемента n, постоји $n-2$, јер су прва и последња позиција искључене. Добија се укупни број могућности $(n-1)(n-2)$. Посматрањем редом тежина грана у мањем циклусу, уочава се одређени шаблон. Првих $n-3$ грана су тежине 1, након чега се узима једна грана тежине 2. Ови кораци понављају се $n-1$ пута. На пример, за $n=4$ мали циклус се састоји од 12 пермутација:

$$
\begin{aligned}
&14352 \rightarrow\\
&43521 \rightarrow\\
&35214 \Rightarrow\\
&21453 \rightarrow\\
&14532 \rightarrow\\
&45321 \Rightarrow\\
&32154 \rightarrow\\
&21543 \rightarrow\\
&15432 \Rightarrow\\
&43251 \rightarrow\\
&32514 \rightarrow\\
&25143
\end{aligned}
$$

Свака грана тежине 1 помера елемент n за једну позицију улево, у оквиру дозвољених $n-1$ позиција, а онда се n граном тежине 2 враћа на крај пермутације. Заменом било које гране тежине 2 у малом циклусу граном тежине 1, елемент n са друге позиције прелази на прву, чиме се прелази у велики циклус. Коначно, суперпермутација се добија на следећи начин:

1. Пермутацију $p = n-1, n-2, \ldots, 3, 2, n, 1$ узети као почетак.
2. Пратити правила за кретање у малом циклусу све до доласка у пермутацију $q = 1, n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2$.
3. Узети грану (q, r) тежине 1 за $r = n, n-1, n-2, \ldots, 3, 2, 1$.
4. Наставити кретање поштујући правила у великом циклусу све док се не обиђе свих $n!$ пермутација.

На пример, за $n=4$ у табели 3.2 приказана је конструкција суперпермутације 324134214321423142134123413243124. Описани алгоритам имплементиран је у поглављу 4.2.

	пермутација	грана	тежина гране	$1 + ((f-2) \mod (n-1))$
p	3241	(3241,2413)	1	1
	2413	(2413,1342)	2	3
	1342	(1342,3421)	1	2
	3421	(3421,2143)	2	1
	2143	(2143,1432)	1	3
q	1432	(1432,4321)	1	3
r	4321	(4321,3214)	1	2
	3214	(3214,1423)	2	3
	1423	(1423,4231)	1	3
	4231	(4231,2314)	1	1
	2314	(2314,3142)	1	2
	3142	(3142,4213)	2	3
	4213	(4213,2134)	1	1
	2134	(2134,3412)	2	2
	3412	(3412,4123)	1	3
	4123	(4123,1234)	1	3
	1234	(1234,2341)	1	1
	2341	(2341,4132)	2	3
	4132	(4132,1324)	1	3
	1324	(1324,2431)	2	1
	2431	(2431,4312)	1	3
	4312	(4312,3124)	1	2
	3124	(3124,1243)	1	3

Табела 3.2: Конструкција суперпермутације за $n = 4$

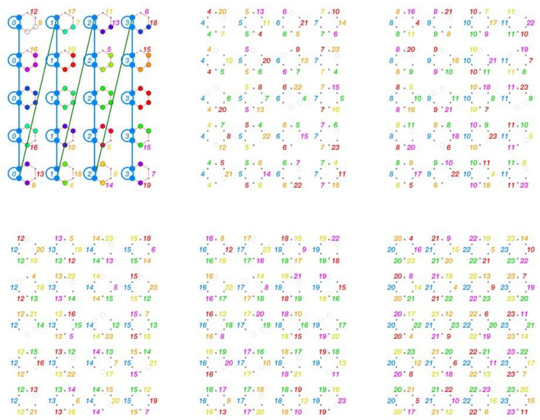
3.5 Краће суперпермутације за $n = 7$

У фебруару 2019. године, Б. Коанда (*B. Coanda*) развио је алгоритам којим је за $n = 7$ добио неколико суперпермутација дужине 5907. Објавио их је као коментар на видео на каналу *StandUpMaths* [5] под именом *charlievane*. Коанда је алгоритам[6] описао на примеру $n = 6$ и увео појмове језгра и екстензија. *Језгро* је пут у графу којим се алгоритам започиње. На слици су гране тежине 1 приказане црвеном бојом, тежине 2 плавом, а тежине 3 зеленом бојом. *Екстензије* се додају на језгро, а формирају се на следећи начин: грану тежине 1 која спаја чвор π са σ заменити путем који почиње граном тежине различите од 1 која излази из чвора π, затим повезује претходно непосећене

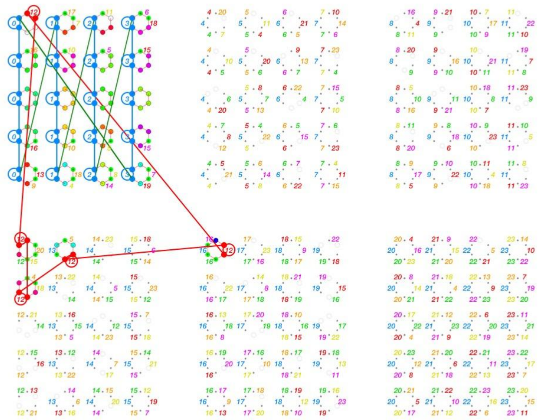
[5] `https://www.youtube.com/watch?v=OZzIvl1tbPo&lc=UgzxhVwUBG9EyyldHGd4AaABAg.8qeg_FoKqzY8qmPR3OErzH`

[6] https://groups.google.com/d/msg/superpermutators/KNhmzQy99ic/obl6pCt5HwAJ

чворове и долази до чвора σ граном тежине различите од 1.



Слика 3.4: Језгро



Слика 3.5: Екстензије

Недуго затим, 27. фебруара 2019. године, Р. Хјустон и Г. Еган су оборили претходни рекорд. Користећи комбиновани приступ пронашли су суперпермутацију за $n = 7$ дужине 5906[7]. Пошто је Хјустон помоћу TSP решавача пронашао најкраћу суперпермутацију за $n = 6$, заједно са сарадницима покушавао је да добијену структуру уопшти. Почиње са делом суперпермутације добијене рекурзивним алгоритмом за исто n, који се састоји од неколико 3-циклуса. Сваки 3-циклус је низ од $(n-2)$ 2-циклуса повезаних гранама тежине 3, док се узастопни 3-циклуси спајају гранама тежине 4. Узимајући овај део као почетно језгро и потом га спајајући са низом 2-циклуса, испоставља се да је могуће посетити сваку пермутацију, бар за $n = 6$ и $n = 7$, са укупном дужином од:

$$L(n) = n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 4$$

Резултат је за један бољи од суперпермутација коју је Еган пронашао користећи адаптацију Вилијамсове конструкције, али за сада је само емпиријски резултат који се односи на специфичне вредности n. Још увек није доказано да наведена дужина може бити постигнута за произвољно n.

[7] `https://www.gregegan.net/SCIENCE/Superpermutations/7_5906_nsk666646664466646666_2SYMM_FS.txt`

Глава 4

Програмска реализација алгоритама

У овој глави наведени су резултати покретања програма. У програмима су реализовани неки од алгоритама описаних у раду и њихов кôд се може наћи у прилозима.

4.1 Рекурзивни алгоритам

У прилогу 1 је реализација рекурзивног алгоритма за конструкцију суперпермутације дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$, као и потпуна претрага којом се одређују минималне суперпермутације за мале вредности n. Доказује се да се за $n \leq 4$ рекурзивним алгоритмом заиста добија суперпермутација минималне дужине, јединствена до на ренумерацију елемената.

Пример 1. *Покретање програма за* $n = 1$*:*

Rekurzivna superpermutacija:
1 Duzina: 1
Ostale superpermutacije:
1 Duzina: 1

Пример 2. *Покретање програма за* $n = 2$*:*

Rekurzivna superpermutacija:

121 Duzina: 3
Ostale superpermutacije:
121 Duzina: 3
212 Duzina: 3

Пример 3. *Покретање програма за* $n = 3$*:*

Rekurzivna superpermutacija:
123121321 Duzina: 9
Ostale superpermutacije:
123121321 Duzina: 9
132131231 Duzina: 9
213212312 Duzina: 9
231232132 Duzina: 9
312313213 Duzina: 9
321323123 Duzina: 9

Пример 4. *Покретање програма за* $n = 4$*:*

Rekurzivna superpermutacija:
123412314231243121342132413214321 Duzina: 33

Пример 5. *Покретање програма за* $n = 5$*:*

Rekurzivna superpermutacija:
12345123415234125341235412314523142531423514231542З
124531243512431524312543121345213425134215342135421
324513241532413524132541321453214352143251432154321
Duzina: 153

Пример 6. *Покретање програма за* $n = 6$*:*

Суперпермутација је због дужине додата као прилог 1.1.
Duzina: 873

Пример 7. *Покретање програма за* $n = 7$*:*

Суперпермутација је због дужине додата као прилог 1.2.
Duzina: 5913

У прилогу 2 је програм који на примеру суперпермутације

$$s = 123412314231243121342132413214321$$

добијене рекурзивним алгоритмом за $n = 4$ показује законитост у низу тежина грана између суседних пермутација, редом којим се појављују као подниске ниске s. Уочава се да је у питању 3-циклус.

Пример 8. *Покретање програма за* $s = 123412314231243121342132413214321$*:*

1234 2341 1
2341 3412 1
3412 4123 1
4123 2314 2
2314 3142 1
3142 1423 1
1423 4231 1
4231 3124 2
3124 1243 1
1243 2431 1
2431 4312 1
4312 2134 3
2134 1342 1
1342 3421 1
3421 4213 1
4213 1324 2
1324 3241 1
3241 2413 1
2413 4132 1
4132 3214 2
3214 2143 1
2143 1432 1
1432 4321 1
Tezine grana: 11121112111311121112111

4.2 Адаптација Вилијамсове конструкције помоћу локалних правила

У прилогу 3 је реализација алгоритма за формирање суперпермутације n елемената дужине $L(n) = n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 3$, који је конструисао Г. Еган, као модификацију конструкције А. Вилијамса, користећи локална правила за кретање у малом и великом циклусу описана у одељку 3.4, стр. 29.

Пример 9. *Покретање програма за $n = 3$:*

2313213123
Duzina: 10

Пример 10. *Покретање програма за $n = 4$:*

3241342143214231421341234132431243
Duzina: 34

Пример 11. *Покретање програма за $n = 5$:*

4325143521453215432153421532415234152431524135241532145231452134512345132451342513452143512435142354123542135423154235143254132543125341253142531245312543
Duzina: 154

Пример 12. *Покретање програма за $n = 6$:*

Суперпермутација је због дужине додата као прилог 3.1.
Duzina: 873

Пример 13. *Покретање програма за $n = 7$:*

Суперпермутација је због дужине додата као прилог 3.2.
Duzina: 5908

Глава 5

Закључак

У раду је формално дефинисан појам суперпермутације, а затим и приближен кроз низ примера. Описан је и имплементиран рекурзивни алгоритам за конструкцију суперпермутације дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$. Његов значај је у томе што за $n \leq 4$ заиста даје минималну суперпермутацију (јединствену до на ренумерацију елемената), а и у томе што се тако формирана суперпермутација користи у каснијим конструкцијама за веће вредности n. Уведен је појам тежинског графа свих пермутација који се користи у касније наведеним алгоритмима за формирање суперпермутација. Наведен је доказ за доњу границу дужине суперпермутације, који је оригинално објављен 2011. године од стране анонимног корисника сајта $4chan$, а онда и 2018. године у измењеној верзији у „Он-лајн Енциклопедији целих низова”. Наведен је и доказ о нејединствености минималне суперпермутације за $n \geq 5$, као и поступак који је коришћен за конструкцију различитих суперпермутација за $n = 5$. Представљени су различити алгоритми за формирање суперпермутација који су временом померали доњу границу дужине минималне суперпермутације. Примећује се да је увек корисно покушати са свођењем проблема на већ познате проблеме, као што су у овом случају TSP и Хамилтонов пут у Кејлијевом графу симетричне групе S_n. Најкраће суперпермутације за $n = 6$ и $n = 7$ пронађене су 2019. године и њихова дужина је $n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 4$. Још увек није доказано да наведена дужина може бити постигнута за произвољно n. Закључује се да је проблем минималне суперпермутације у протеклој деценији привукао пажњу математичке јавности и да је дошло до значајног напретка у померању доње границе дужине, али да и даље има простора за оптимизацију.

Глава 6

Прилози

Прилог 1

Програм 6.1: Рекурзивни алгоритам за конструкцију суперпермутације дужине $L(n) = \sum_{k=1}^{n} k!$ и потпуна претрага за мало n

```

from itertools import permutations
from math import factorial

'''  Program implementira rekurzivni algoritam za formiranje superpermutacije n elemenata duzine L(n) = 1! + 2! + 3! + ... + n!, kao i dokaz grubom silom da se za n <= 4 rekurzivnim algoritmom zaista dobija superpermutacija minimalne duzine, jedinstvena do na renumeraciju elemenata.
    Rekurzivni algoritam:
    1. Poznata je superpermutacija n-1 elementa.
    2. Ispisati redom permutacije kako se pojavljuju u superpermutaciji n-1 elementa.
    3. Svaku od permutacija kopirati i dodati element n izmedju kopija.
    4. Spojiti koristeci dostupna preklapanja. '''

''' Ulaz: n
    Izlaz: 1! + 2! + 3! + ... + n! '''
def L_n(n):

```

```python
    result = 0

    for i in range(1, n+1):
        result += factorial(i)

    return result

''' Ulaz: n
    Izlaz: superperm_strings, niz trivijalnih superpermutacija duzine <= L(n) nastalih nadovezivanjem svih permutacija n elemenata
    koristeci dostupna preklapanja. '''

def superperm_strings(n):
    ''' Formiranje svih permutacija skupa {1, 2, ... , n } '''
    perm_list = list(permutations(list(range(1, n+1))))
    all_superperms_list = list(permutations(perm_list))

    superperm_strings = []

    for superperm in all_superperms_list:

        perms = []

        for perm in superperm:
            perms.append(''.join(str(num) for num in perm))

        superperm_string = merge_overlapping_strings(perms)
        ''' Dodaju se samo one superpermutacije duzine <= L_n, jer se traze samo potencijalno krace superpermutacije u odnosu na onu dobijenu rekurzivnim algoritmom.'''
        if len(superperm_string) <= L_n(n):
            superperm_strings.append(superperm_string)

    return superperm_strings

```

```
''' Ulaz: niz stringova strings
    Izlaz: niz stringova minimalne duzine min_length_strings '''

def min_length_strings(strings):

    if not strings:
        return []

    min_length = min(len(s) for s in strings)
    min_length_strings = [s for s in strings if len(s) ==
       min_length]

    return min_length_strings


''' Funkcija spaja redom stringove datog niza strings,
   koristeci dostupna preklapanja.
    Primer: spajanjem stingova "23541" i "41352", koristi se
       preklapanje "41" i dobija se string "23541352".
    Ulaz: niz stringova strings
    Izlaz: string merged_string nastao nadovezivanjem redom
       stringova niza strings, koristeci dostupna preklapanja
       '''

def merge_overlapping_strings(strings):

    if not strings:
        return ""

    merged_string = strings[0]

    for s in strings[1:]:
        i = 0
        while i < len(merged_string):
            if merged_string[i:] == s[:len(merged_string) - i]:
                merged_string += s[len(merged_string) - i:]
                break
```

```
                i += 1
            else:
                merged_string += s

    return merged_string

''' Ulaz: string perm, broj elemenata n
    Izlaz: True, u slucaju da string perm predstavalja permutaciju skupa {1, 2, ... , n }, inace False. '''

def is_permutation(perm, n):
    if len(perm) != n:
        return False

    numbers = set(str(i) for i in range(1, n+1))

    for num in perm:
        if num not in numbers:
            return False
        numbers.remove(num)

    return len(numbers) == 0

''' Funkcija formira superpermutaciju n elemenata duzine L(n) = 1! + 2! + 3! + ... + n! koristeci rekurzivni algoritam.
    Ulaz: broj n
    Izlaz: string result '''

def recursive_superpermutation(n):
    ''' Izlaz iz rekurzije. Superpermutacija za  n = 1 je string '1'. '''
    if n == 1:
        return '1'
    ''' Formira se superpermutacja n-1 elemenata. '''
    sub_superperm = recursive_superpermutation(n - 1)
    m = len(sub_superperm)
    perm_strings = []
```

```

    ''' Prolazi se redom kroz permutacije u superpermutaciji
       n-1 elemenata sub_superperm.'''
    for i in range(0, m - n + 2):
        if is_permutation(sub_superperm[i : i + n - 1], n - 1):
            ''' Svaka permutacija se kopira, a izmedju kopija
               se dodaje i element n. '''
            s = sub_superperm[i : i + n - 1] + str(n) +
               sub_superperm[i : i + n - 1]
            perm_strings.append(s)
    ''' Koristi se pomocna funkcija za spajanje stringova
       koristeci poznata preklapanja. '''
    result = merge_overlapping_strings(perm_strings)
    return result

''' Test: '''

n = int((input("Unesite n:")))
recursive_superperm = recursive_superpermutation(n)
print("Rekurzivna superpermutacija: " + recursive_superperm  +
   " Duzina: " + str(len(recursive_superperm)))

if 1 <= n <= 5:
    superperms = superperm_strings(n)
    min_superperms = min_length_strings(superperms)
    print("Ostale superpermutacije:")
    for superperm in min_superperms:
        print(superperm + " Duzina: " + str(len(superperm)))
```

Прилог 1.1: Суперпермутација за $n = 6$ дужине 873 добијена рекурзивним алгоритмом
123456123451623451263451236451234651234156234152634152364152346152341 6
523412563412536412534612534162534126534123564123546123541623541263541 2
3654123145623145263145236145231645231465231425631425361425316425314625
3142653142356142351642351462351426351423651423156423154623154263154236
1542316542312456312453612453162453126453124653124356124351624351264351
2463512436512431562431526431524631524361524316524312564312546312543612
5431625431265431213456213452613452163452136452134652134256134251634251
3642513462513426513421563421536421534621534261534216534213564213546213
5426135421635421365421324561324516324513624513264513246513241563241536
2415326415324615324165324135624135264135246135241635241365241325641325
4613254163254136254132654132145632145362145326145321645321465321435621
4352614352164352146352143652143256143251643251463251436251432651432156
43215463215436215432615432165432 1

Прилог 1.2: Суперпермутација за $n = 7$ дужине 5913 добијена рекурзивним алгоритмом
1234567123456172345612734561237456123475612345761234516723451627345162 3
745162347516234571623451762345126734512637451263475126345712634517263 45
1276345123674512364751236457123645172364512736451237645123467512346571 2
3465172346512734651237465123476512341567234156273415623741562347156234 1
7562341576234152673415263741526347152634175263415726341527634152367415 2
3647152364175236415723641527364152376415234671523461752346157234615273 4
6152374615234761523416752341657234165273416523741652347165234176523412 5
6734125637412563471256341725634127563412576341253674125364712536417253 6
4127536412573641253764125346712534617253461275346125734612537461253476 1
2534167253416275341625734162537416253471625341762534126753412657341265 3
7412653471265341726534127653412356741235647123564172356412735641237564 1
2357641235467123546172354612735461237546123574612354761235416723541627 3
5416237541623574162354716235417623541267354126375412635741263547126354 1
7263541276354123675412365741236547123654172365412736541237654123145672 3
1456273145623714562317456231475623145762314526731452637145263174526314 7
5263145726314527631452367145236174523614752361457236145273614523761452 3
1674523164752316457231645273164523716452317645231467523146572314652731 4
6523714652317465231476523142567314256371425631742563147256314275631425 7

631425367142536174253614725361427536142573614253761425316742531647253164
2753164257316425371642531764253146725314627531462573146253714625317462
5314762531426753142657314265371426531742653147265314276531423567142356174235614723561427356142375614235761423516742351647235164273516423751642
35716423517642351467235146273514623751462357146235174623514762351426735
14263751426357142635174263514726351427635142367514236571423651742365147
23651427365142376514231567423156472315642731564237156423175642315764231
54672315462731546237154623175462315746231547623154267315426371542631754
26315742631547263154276315423671542361754236157423615472361542736154237
61542316754231657423165472316542731654237165423176542312456731245637124
56317245631274563124756312457631245367124536172453612745361247536124573
61245376124531672453162745316247531624573162453716245317624531267453126
47531264573126453712645317264531276453124675312465731246537124653172465
31274653124765312435671243561724356127435612473561243756124357612435167
24351627435162473516243751624357162435176243512674351264735126437512643
57126435172643512764351246735124637512463571246351724635127463512476351
24367512436571243651724365127436512473651243765124315672431562743156247
31562437156243175624315762431526743152647315264371526431752643157264315
27643152467315246371524631752463157246315274631524763152436715243617524
36157243615274361524736152437615243167524316572431652743165247316524371
65243176524312567431256473125643712564317256431275643125764312546731254
63712546317254631275463125746312547631254367125436172543612754361257436
12547361254376125431672543162754316257431625473162543716254317625431267
54312657431265473126543712654317265431276543121345672134562713456217345
62137456213475621345762134526713452617345261374526134752613457261345276
13452167345216374521634752163457216345271634521763452136745213647521364
57213645271364521736452137645213467521346572134652713465217346521374652
13476521342567134256173425613742561347256134275613425761342516734251637
42516347251634275163425716342517634251367425136472513642751364257136425
17364251376425134672513462751346257134625173462513746251347625134267513
42657134265173426513742651347265134276513421567342156374215634721563427
15634217563421576342153674215364721536427153642175364215736421537642153
46721534627153462175346215734621537462153476215342671534261753426157342
61537426153472615342761534216753421657342165374216534721653427165342176
53421356742135647213564271356421735642137564213576421354672135462713546

2173546213754621357462135476213542671354261735426137542613574261354726135427613542167354216375421635742163547216354271635421763542136754213657
42136547213654271365421736542137654213245671324561732456137245613274561
32475613245761324516732451637245163274516324751632457163245176324513672
45136274513624751362457136245173624513762451326745132647513264571326451
73264513726451327645132467513246571324651732465137246513274651324765132
41567324156372415632741563247156324175632415763241536724153627415362471
53624175362415736241537624153267415326471532641753264157326415372641532
76415324671532461753246157324615372461532746153247615324167532416573241
65372416532741653247165324176532413567241356274135624713562417356241375
62413576241352674135264713526417352641375264135726413527641352467135246
17352461375246135724613527461352476135241673524163752416357241635274163
52471635241763524136752413657241365274136524713652417365241376524132567
41325647132564173256413725641327564132576413254671325461732546137254613
27546132574613254761325416732541637254163275416325741632547163254176325
41367254136275413625741362547136254173625413762541326754132657413265471
32654173265413726541327654132145673214563721456327145632174563214756321
45763214536721453627145362174536214753621457362145376214532671453261745
32614753261457326145372614532761453216745321647532164573216453721645327
16453217645321467532146573214653721465327146532174653214765321435672143
56271435621743562147356214375621435762143526714352617435261473526143752
61435726143527614352167435216473521643752164357216435271643521764352146
73521463752146357214635271463521746352147635214367521436572143652714365
21743652147365214376521432567143256174325614732561437256143275614325761
43251674325164732516437251643275164325716432517643251467325146372514632
75146325714632517463251476325143672514362751436257143625174362514736251
43762514326751432657143265174326514732651437265143276514321567432156473
21564372156432715643217564321576432154673215463721546327154632175463215
74632154763215436721543627154362175436215743621547362154376215432671543
26175432615743261547326154372615432761543216754321657432165473216543721
65432716543217654321

Прилог 2

Програм 6.2: Циклуси у суперпермутацији добијеној рекурзивним алгоритмом

```

from itertools import permutations
from math import factorial

''' Program na primeru superpermutacije s = 
  123412314231243121342132413214321
    dobijene rekurzivnim algoritmom pokazuje zakonitost u nizu 
      tezina grana
    izmedju susednih permutacija, redom kojim se pojavljuju kao 
      podsniske s. Uocava se da je u pitanju 3-ciklus.'''


''' Ulaz: string perm, broj elemenata n
    Izlaz: True, u slucaju da string perm predstavalja 
      permutaciju skupa {1, 2, ... , n }, inace False. '''

def is_permutation(perm, n):
    if len(perm) != n:
        return False

    numbers = set(str(i) for i in range(1, n+1))

    for num in perm:
        if num not in numbers:
            return False
        numbers.remove(num)

    return len(numbers) == 0

''' Ulaz: string s, broj n
    Izlaz: niz permutacija perm_strings redom kojim se 
      pojavljuju kao podniske u s'''

```

```python
def get_perms(s, n):

    m = len(s)
    perm_strings = []

    for i in range(0, m - n + 1):
        current_string = s[i : i + n]
        if is_permutation(current_string, n):
            perm_strings.append(current_string)

    return perm_strings

''' Ulaz: permutacije pi i sigma
    Izlaz: tezina grane (pi, sigma) '''

def weight(pi, sigma):

    m = len(pi)
    max = 0

    for i in range(0, m):
        if pi[-i:] == sigma[:i]:
            max = i

    return m - max

# Test
n = 4
s = "123412314231243121342132413214321 "

perms=get_perms(s,n)
print(get_perms(s,n))
print(len(get_perms(s,n)))

weight_pattern=""

for i in range(0, len(perms) - 1):
```

```
    print(perms[i], perms[i+1],
       str(weight(perms[i],perms[i+1])))
    weight_pattern += str(weight(perms[i],perms[i+1]))

print(weight_pattern)
```

Прилог 3

Програм 6.3: Алгоритам за формирање суперпермутације дужине $L(n) = n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n - 3$

```
import array
import math
from itertools import permutations

class Superpermutation:

    ''' Program implementira algoritam za formiranje superpermutacije n elemenata duzine L(n) = n! + (n-1)! + (n-2)! + (n-3)! + n-3, koji je opisao Greg Egan, kao modifikaciju konstrukcije Arona Williamsa, koristeci lokalna pravila za kretanje u malom i velikom ciklusu.
        1. Permutaciju p = n-1, n-2, ..., 3, 2, n, 1 uzeti kao pocetak.
        2. Pratiti pravila za kretanje u malom ciklusu, sve do dolaska u permutaciju q = 1, n, n-1, n-2, ..., 3, 2.
        3. Uzeti granu (q, r) tezine 1, gde je r = n, n-1, n-2, ..., 3, 2, 1.
        4. Nastaviti kretanje postujuci pravila u velikom ciklusu, sve dok se ne obidje svih n! permutacija.'''

    def __init__(self, n):
        self.n = n
        self.r = array.array('i', [0] * n)
        self.q = array.array('i', [0] * n)
        self.current_perm = array.array('i', [0] * n)
        self.fn = math.factorial(n)
        self.available = self.fn

        for i in range(n):
            self.r[i] = n - i                # r = n, n-1, n-2 .... 1
            self.q[i] = 1 + (n - i) % n      # q = 1, n, n-1, ... 2
```

```

    ''' Ulaz: permutacija q
        Izlaz: permutacija s takva da je grana (q, s) tezine 1.
            '''

    def successor1(self, q):
        n = len(q)
        s = array.array('i', [0] * n)
        for i in range(n):
            s[i] = q[(i + 1) % n]
        return s

    ''' Ulaz: permutacija q
        Izlaz: permutacija s takva da je grana (q, s) tezine 2.
            '''

    def successor2(self, q):
        n = len(q)
        s = array.array('i', [0] * n)
        for i in range(n):
            s[i] = q[(i + 2) % n]
        tmp = s[n - 1]
        s[n - 1] = s[n - 2]
        s[n - 2] = tmp
        return s

    ''' Pravila kretanja u velikom ciklusu:
        Ako je prva cifra f u permutaciji razlicita od n
        i cifra koja se nalazi ciklicno u odnosu na n u
            permutaciji gde je element f odbacen jednaka je
            1+((f-2) mod (n-1)),
        uzeti granu tezine 2. Inace uzeti granu tezine 1.

        Ulaz: permutacija p
        Izlaz: True, ako je prva cifra f u permutaciji p
            razlicita od n
        i cifra koja se nalazi ciklicno u odnosu na n u
```

```
            permutaciji gde je element f odbacen jednaka je
            1+((f-2) mod (n-1)).
        False, inace '''

    def weight2edge(self, p):
        n = len(p)
        f = p[0]
        n_pos = p.index(self.n)

        if n_pos == 0:
            return False
        r_pos = 1 + (n_pos % (n - 1))
        return p[r_pos] == 1 + ((f - 2) % (n - 1))

    ''' Ulaz: Permutacija p
        Izlaz: Superpermutacija result duzine n! + (n-1)! +
            (n-2)! + (n-3)! + n-3'''

    def get(self, p):

        ''' Pocetak je u permutaciji p '''

        current_perm = p
        self.available -= 1
        result = ''.join(str(num) for num in current_perm)
        result_array = [current_perm]

        ''' Pravila kretanja u malom ciklusu sve do dolaska u q.
        Uzima se n-3 grane tezine 1, nakon cega se uzima jedna
            grana tezine 2.
        Ovi koraci se ponavljaju n-1 put. '''

        for _ in range(self.n - 1):
            for _ in range(self.n - 3):
                suc1 = self.successor1(current_perm)
                result += str(suc1[-1])
                result_array.append(suc1)
```

```
                current_perm = suc1
                self.available -= 1
                if current_perm == self.q:
                    break

            if current_perm != self.q:
                suc2 = self.successor2(current_perm)
                last_two = ''.join(str(num) for num in
                   suc2[-2:])
                result += last_two
                result_array.append(suc2)
                self.available -= 1
                current_perm = suc2

        ''' Uzima se grana tezine 1 od q do r. '''

        current_perm = self.r
        self.available -= 1
        result_array.append(self.r)
        result += (str(current_perm[-1]))

        ''' Primenjuju se pravila za kretanje u velikom ciklusu
           sve dok ima neiskoriscenih permutacija.'''

        while True:

            if self.weight2edge(current_perm):
                suc2 = self.successor2(current_perm)
                last_two = ''.join(str(num) for num in
                   suc2[-2:])
                result += last_two
                result_array.append(suc2)
                current_perm = suc2
                self.available -= 1
            else:
                suc1 = self.successor1(current_perm)
                result += str(suc1[-1])
```

```
                result_array.append(suc1)
                current_perm = suc1
                self.available -= 1

            if self.available == 0:
                break

        return result

''' Test: '''

n = int(input("Unesite n:"))
s = Superpermutation(n)

if n < 1:
    p = []

else:
    p = list(range(n-1, 1, -1)) + [n, 1]

superpermutation = s.get(p)
print(superpermutation)
print("L(" + str(n) +  ")=" + str(len(superpermutation)))

''' Provera da li dobijena superpermutacija sadrzi sve
   permutacije skupa {1, 2, ..., n}'''

numbers = [str(i) for i in range(1, n + 1)]
permutations_list = [''.join(perm) for perm in
   permutations(numbers, n)]
contains = True

for perm in permutations_list:
    if perm not in superpermutation:
        contains = False

print(contains)
```

Прилог 3.1: Суперпермутација за $n = 6$ дужине 873 добијена адаптацијом Вилијамсове конструкције помоћу локалних правила
5432615436215463215643216543216453216435216345216354216352416352146352
1643251634251632451623451624351624531624513624516325416235416253416254
3162541362541632514623514625314625134625143625146325164321563421563241
5623415624315624135624153624156321456231456213456123456132456134256134
5261345621435612435614235614325614352614356214536124536142536145236145
3261453621456321546231546213546123546132546135246135426135462153461253
4615234651234652134652314652341652346153246513246531246532146532416532
4615342651342653142653412653421653426153462154361254361524365124365214
3652413652431652436154236514236541236451236415236412536412356412365421
3645213642513642153642135642136542316452316425316423516423156423165423
6154326514326541326451326415326413526413256413265431264531264351263451
2635412635142635124635126431526341526314526315426315246315264312563412
563142563124563125463125643126543

Прилог 3.2: Суперпермутација за $n = 7$ дужине 5908 добијена адаптацијом Вилијамсове конструкције помоћу локалних правила
6543271654372165473216574321675432176543217564321754632174563217465321
7463521746325174632157463217543621745362174356217345621735462173564217
3562417356214735621743652173465217364521736542173652417365214736521743
6251734625173642517362451736254173625147362517436215734621573642157362
4157362145736215473621574362175432617453261743526173452617354261735246
1735264173526147352617432561734256173245617234561724356172453617245631
7245613724561732546172354617253461725436172546317254613725461732564172
3564172536417256341725643172564137256417325614723561472536147256314725
6134725614372561473256174326517342651732465172346517243651724635172465
3172465137246517326451723645172634517264351726453172645137264517326541
7236541726354172653417265431726541372654173265147236514726351472653147
2651347265143726514732651743261573426157324615723461572436157246315724
6135724615372461573264157236415726341572643157264135726415372641573261
4572361457263145726134572614357261453726145732615472361547263154726135
4726153472615437261547326157432617543216745321674352167345216735421673
5241673521467352164735216743251673425167324516723451672435167245316724
5136724516372451673254167235416725341672543167254136725416372541673251
4672351467253146725134672514367251463725146732516472351647253164725136

4725163472516437251647325167432156734215673241567234156724315672413567
2415367241563724156732145672314567213456712345671324567134256713452671
3456271345672143567124356714235671432567143526714356271435672145367124
5367142536714523671453267145362714536721456371245637142563714526371456
2371456327145637214567321546723154672135467123546713254671352467135426
7135462713546721534671253467152346715324671534267153462715346721543671
2543671524367154236715432671543627154367215463712546371524637154263715
4623715463271546372154673215647231564721356471235647132564713526471356
2471356427135647215364712536471523647153264715362471536427153647215634
7125634715263471562347156324715634271563472156437125643715264371562437
1564237156432715643721564732156743216573421657324165723416572431657241
3657241635724165372416573214657231465721346571234657132465713426571346
2571346527134657214365712436571423657143265714362571436527143657214635
7124635714263571462357146325714635271463572146537124653714265371462537
1465237146532714653721465732164572316457213645712364571326457136245713
6425713645271364572163457126345716234576123457621345762314576234157623
4517623457163245761324576312457632145763241576324517632457163425761342
5763142576341257634215763425176342571634527613452763145276341527634512
7634521763452716345721643571264357162435761243576214357624135762431576
2435176243571642357614235764123576421357642315764235176423571643257614
3257641325764312576432157643251764325716435276143527641352764315276435
1276435217643527164357216453712645371624537612453762145376241537624513
7624531762453716425376142537641253764215376425137642531764253716452376
1452376415237645123764521376452317645237164532761453276415327645132764
5312764532176453271645372164573216547231654721365471236547132654713625
4713652471365427136547216354712635471623547612354762135476231547623514
7623541762354716325476132547631254763215476325147632541763254716352476
1352476315247635124763521476352417635247163542761354276315427635142763
5412763542176354271635472165347126534716253476125347621534762513476253
1476253417625347165234761523476512347561234751623475126347512364751234
6751234765213475621347526134752163475213647521346752134765231475623147
5263147523614752316475231467523147652341756234175263417523641752346175
2341675234176523471653247615324765132475613247516324751362475132647513
2467513247653124756312475361247531624753126475312467531247653214756321
4753621475326147532164753214675321476532417563241753624175326417532461

7532416753241765324716534276153427651342756134275163427513642751346275
1342675134276531427563142753614275316427531462753142675314276534127563
4127536412753461275341627534126753412765342175634217536421753462175342
6175342167534217653427165347216543712654371625437612543762154376251437
6254137625431762543716524376152437651243756124375162437512643751246375
1243675124376521437562143752614375216437521463752143675214376524137562
4137526413752461375241637524136752413765243175624317526431752463175243
6175243167524317652437165423761542376514237561423751642375146237514263
7514236751423765412375641237546123745612374651237461523746125374612357
4612375416237451623741562374165237416253741623574162375412637451263741
5263741256374126537412635741263754123674512367415236741253674123567412
3657412367541237654213756421375462137456213746521374625137462153746213
5746213754261374526137425613742651374261537426135742613754216374521637
4251637421563742165374216357421637542136745213674251367421536742135674
2136574213675421376542317564231754623174562317465231746253174623517462
3157462317542631745263174256317426531742635174263157426317542361745236
1742536174235617423651742361574236175423167452316742531674235167423156
7423165742316754231765423716543276154327651432756143275164327514632751
4362751432675143276541327564132754613274561327465132746153274613527461
3257461327541632745163274156327416532741635274163257416327541362745136
2741536274135627413652741362574136275413267451326741532674135267413256
7413265741326754132765431275643127546312745631274653127463512746315274
6312574631275436127453612743561273456127354612735641273561427356124735
6127436512734651273645127365412736514273651247365127436152734615273641
5273614527361542736152473615274361257346125736412573614257361245736125
4736125743612754316274531627435162734516273541627351462735164273516247
3516274315627341562731456273154627315642731562473156274316527341652731
4652731645273165427316524731652743162573416257314625731642573162457316
2547316257431627543126745312674351267345126735412673514267351246735126
4735126743152673415267314526731542673152467315264731526743125673412567
3142567312456731254673125647312567431265734126573142657312465731264573
12654731265743126754312765

Библиографија

[1] OEIS Foundation Inc 2023. The on-line encyclopedia of integer sequences. `https://oeis.org/A180632`.

[2] M. Engen and V. Vatter. Containing all permutations. *arXiv:1810.08252v4 [math.CO]*, 2020.

[3] R. Houston. Tackling the minimal superpermutation problem. *arXiv:1408.5108 [math.CO]*, 2014.

[4] N. Johnston. Non-uniqueness of minimal superpermutations. *Discrete Mathematics*, (313):1553–1557, 2013.

[5] I. Pak and R. Radoicic. Hamiltonian paths in cayley graphs. *Discrete Mathematics*, 309(17):5501–5508, 2009.

[6] T. Volgenant and R. Jonker. On some generalizations of the travelling-salesman problem. *The Journal of the Operational Research Society*, 38(11):1073–1079, 1987.

[7] A. Williams. Hamiltonicity of the cayley digraph on the symmetric group generated by $\sigma = (1\ 2\ \dots\ n)$ and $\tau = (1\ 2)$. *arXiv:1307.2549v3 [math.CO]*, 2017.

[8] М. Живковић. Алгоритми.