



UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Master rad

Matematičko modeliranje romantičnih odnosa

Mentor:

prof. dr Milan Dražić

Članovi komisije:

dr Aleksandra Delić (predsednik komisije)

dr Marija Mikić

Student:

Spomenka Milić

1035/2021

Jul, 2023.

Sadržaj

0.1	Uvod	4
1	Matematički pogled	5
1.1	ODJ Model	8
1.2	Karakteristike pojedinca	10
2	Linearni model	14
2.1	Strogacov model	15
3	Ljubavni ciklusi	24
3.1	Nema pristrasnosti $\implies$ nema ciklusa	24
3.2	Nema nesigurnosti $\implies$ nema ciklusa	25
3.3	Primer	28
4	Stresori iz spoljnog sveta	32
4.1	Kanonski odgovor na stres	34
5	Dodatne emocionalne dimenzije	40
5.1	Primer	42
5.2	Brze i spore varijable	45
6	Uža porodica	47
7	Uticaj roditelja na romantičnu vezu	49
8	Ljubavni trougao	53

8.1	Katalog trouglova	54
8.2	Nepredvidivost	56
8.3	Kejt, Džuls, Džim	58
8.4	Analiza rezultata	62

0.1 Uvod

Romantični odnosi su složeni i intrigantni fenomeni koji su bili predmet velikog interesovanja u različitim disciplinama, uključujući psihologiju, sociologiju i antropologiju. U poslednjim decenijama, sve veće korišćenje matematičkih modela u razumevanju društvenih interakcija omogućilo je i pristup proučavanju romantike na nov i sistematičan način.

Cilj ovog rada je da se primeni matematički model na analizu romantičnih odnosa i da se ispita kako se različiti faktori mogu formalno opisati i predvideti kroz matematičke jednačine. Matematički modeli mogu pružiti kvantitativni okvir za analizu dinamike odnosa, kao i za testiranje različitih scenarija i hipoteza. Model će uzeti u obzir faktore kao što su emocionalna povezanost, promene u percepciji privlačnosti i faktori spoljašnjeg uticaja koji mogu uticati na stabilnost i trajanje veze. Kroz ovaj model, želja je da se pruži uvid u različite aspekte romantike, uključujući razvoj odnosa, faktore koji utiču na održivost veze i predviđanje budućih ishoda.

Istraživanja na ovu temu imaju potencijal da doprinesu razumevanju romantičnih odnosa na nov način i da pruže teorijski okvir koji može biti koristan za praktične primene, kao što su savetovanje parova i razvoj tehnologija za uparivanje.

Nadam se da će ovaj rad dati uvide i podstaknuti dalja istraživanja u ovoj uzbudljivoj oblasti proučavanja ljudskih odnosa.

Matematički pogled

Proučavanje romantičnih veza zahteva razumevanje dinamike i promena koje se dešavaju u njima. U poslednjim decenijama, koncept dinamičkih sistema sve više se primenjuje u istraživanju romantičnih veza, pružajući novu perspektivu za analizu i modeliranje njihove prirode. Jedan od ključnih koncepata u proučavanju dinamičkih sistema je fazni portret. Fazni portret predstavlja vizuelnu reprezentaciju promene stanja sistema tokom vremena. U kontekstu romantičnih veza, fazni portret može prikazati različite aspekte veze, kao što su emocionalna povezanost, komunikacija ili bliskost, i kako se oni menjaju tokom vremena. Fazni portret može biti predstavljen grafikom ili dijagramom koji prikazuje različita stanja ili varijable veze. Trajektorija je putanja koju sistem sledi u faznom prostoru, pod dejstvom zakonitosti i dinamike tog sistema. Trajektorije u dinamičkim sistemima često se opisuju pomoću diferencijalnih jednačina koje predstavljaju promene položaja ili stanja sistema u vremenu. Ove diferencijalne jednačine zavise od različitih faktora. U kontekstu romantičnih veza, trajektorija može predstavljati putanju kojom se veza kretala tokom vremena. Analiza trajektorija može otkriti obrasce, prelaze ili cikluse koji se javljaju u vezi i pomoći u razumevanju promena i razvoja veze.

Pristup modeliranju romantičnih veza pomoću dinamičkih sistema pruža mogućnost za dublje razumevanje faktora koji utiču na stabilnost, promene i kvalitet veze. Kroz analizu faznih portreta i trajektorija, mogu se identifikovati ključne tačke ili prelazi u vezi, a može se i razumeti dinamika interakcije između partnera.

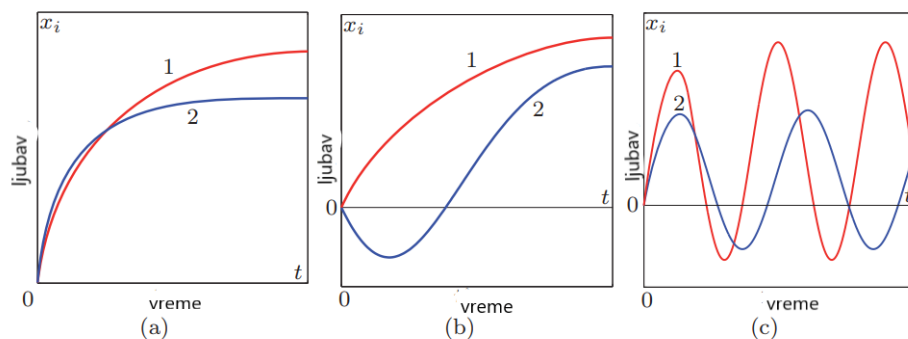
Ukoliko važi pretpostavka da se ljubav jedne osobe prema drugoj može meriti realnim brojem, dinamika ljubavi može biti predstavljena pomoću dva grafika koji prikazuju dinamiku odnosa kroz vreme. Jedan grafik bi prikazivao intenzitet osećanja obe osobe tokom vremena,

a drugi fazni portret. Recimo da imamo osobu ženskog i osobu muškog pola i da želimo da posmatramo dinamiku njihove veze kroz vreme od trenutka početka iste. Označimo sa $x_1(t)$ i $x_2(t)$ intenzitet osećanja osobe i , pri čemu t predstavlja vremenski trenutak u kom se meri intenzitet osećanja. Neka $t = 0$ predstavlja trenutak u kome započinje ljubavna priča između dve pomenute osobe. Tako da, ukoliko su dve osobe na početku potpuno ravnodušne jedna prema drugoj, npr. prilikom upoznavanja, važiće $x_1(0) = x_2(0) = 0$ i u tom trenutku oba grafika počinju iz koordinatnog početka u (t, x) prostoru.

Na slici ispod vidimo 3 različite ljubavne priče. Na prvoj slici vidimo da intenzitet osećanja obe osobe raste kako vreme teče i i teži ka tački $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ u kojoj će ostati dugo vremena (idealno bi bilo zauvek).

Druga slika prikazuje situaciju sličnu prvoj, ali samo na duge staze, ne i u početku jer su u početku osećanja muškarca negativna. Pojam "negativna osećanja" se u ovom radu odnosi na mržnju (pozitivna se odnose na ljubav).

Treći deo slike prikazuje neobičnu situaciju u kojoj osećanja obe osobe imaju periodične uspone i padove, dok osećanja osobe ženskog pola imaju veću amplitudu, tj. u pozitivnom delu su veća, a u negativnom manja od osećanja muškarca.



Slika 1.1: Plavom bojom prikazana su osećanja muškarca, a crvenom osećanja žene

Svaka ljubavna priča može biti predstavljena i na bolji način, preko jednog grafika na kom je istovremeno prikazana evolucija osećanja obe osobe. Ti grafici predstavljaju fazni portret dinamičkog sistema i oni samo kompaktnije prikazuju gore pomenute situacije. Takav prikaz može se videti na slici 1.2.

Pomenuta tačka $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ kojoj teže osećanja obe osobe na prvoj slici ima ime i naziva se **ek-**

Ekvilibrijum. To je tačka faznog prostora u kojoj se dinamički sistem stabilizuje i ostaje nepromenjen tokom vremena. Prostije rečeno, to je stanje ravnoteže u kom se promene sistema zaustavljaju. Ekvilibrijum u faznom prostoru može biti **stabilan**, **asimptotski stabilan** i **nestabilan**. Radi preciznosti, ovde će biti data matematička definicija ovih tipova ekvilibrijuma, i to samo za slučaj da je ekvilibrijum koordinatni početak. Više o tipovima ekvilibrijuma se može naći u [1].

Definicija 1. Ekvilibrijum $X^* = 0$ sistema $\dot{X}(t) = F(X)$ je **stabilan** po Ljapunovu kada $t \rightarrow \infty$, ako za svako $\epsilon > 0$, postoji $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, takvo da za svaku trajektoriju $X = X(t)$, $X(t_0) = X_0$, pomenutog sistema, iz $\|X_0\| < \delta$ sledi

$$\|X(t)\| < \epsilon$$

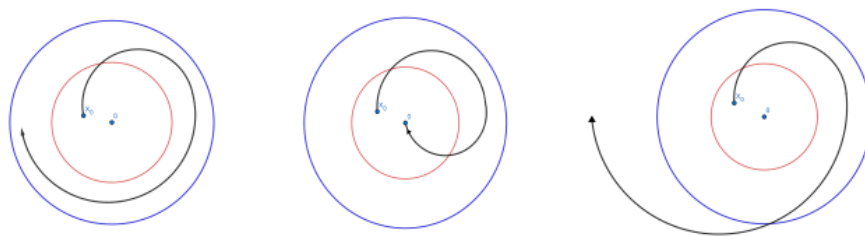
za svako $t \geq 0$.

Ekvilibrijum koji nije stabilan nazivamo **nestabilnim**.

Definicija 2. Ekvilibrijum $X^* = 0$ sistema $\dot{X}(t) = F(X)$ je **asimptotski stabilan** po Ljapunovu kada $t \rightarrow \infty$, ako je stabilan i ako postoji $\delta_1 > 0$, takvo da za svaku trajektoriju $X = X(t)$, $X(t_0) = X_0$, pomenutog sistema, iz $\|X_0\| < \delta_1$ sledi

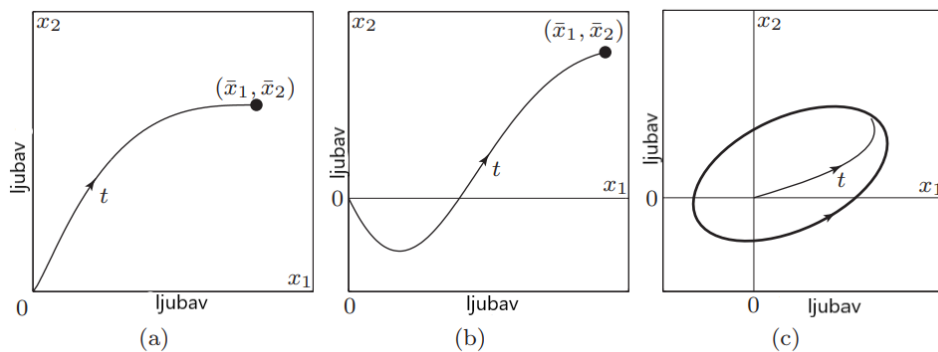
$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|X(t)\| = 0.$$

Na slici ispod je data geometrijska interpretacija ovih tipova ekvilibrijuma.



Slika 1.2: Redom prikazani slučajevi kada je $X^* = 0$ stabilan, asimptotski stabilan i nestabilan ekvilibrijum dinamičkog sistema

Takođe je bitno naglasiti da brzina kretanja tačke $(x_1(t), x_2(t))$ duž trajektorije, očekivano, nije konstantna jer ni sama ljubavna veza ne napreduje uvek istom brzinom. Na brzinu kretanja



Slika 1.3: Prostor osećanja (x_1, x_2)

utiču različiti faktori kao što su početne brzine, ubrzanja, sile itd.

Ponekad je od interesa i opisivanje osećanja u zavisnosti od bilo kog početnog uslova. To najviše doprinosi razumevanju ponašanja sistema da bi se videlo kako sistem reaguje na promene početnih uslova i da bi se identifikovali mogući scenariji. Takođe, to je dobra praksa i za predviđanje budućeg ponašanja, kao i za identifikaciju osetljivosti sistema (ako male promene u početnim uslovima značajno utiču na ponašanje sistema, to ukazuje na osetljivost sistema na početne uslove).

Sada je samo predstavljen slučaj u kom osobe kreću u vezu od potpune ravnodušnosti. Zna se da to nije uvek slučaj i često je u interesu opisivanje evolucije osećanja polazeći iz bilo koje početne tačke. Na taj način se dobija fazni portret.

1.1 ODJ Model

ODJ (obične diferencijalne jednačine, engl. ordinary differential equations - ODE) modeli su matematički modeli koji opisuju realne probleme pomoću običnih diferencijalnih jednačina prvog reda. Ovi modeli vuku korene iz 17. veka i do njihovog izučavanja je došlo prilikom opisivanja običnih diferencijalnih jednačina, a time se bavio Isak Njutn. On je koristio ODJ modele za opisivanje kretanja tela pod dejstvom sila i postavio osnove klasične mehanike. Kasnije, u 18. i 19. veku mnogi matematičari i fizičari, poput Ojlera, Lagranža i Puasona, doprineli su razvoju teorije diferencijalnih jednačina i njihove primene u različitim oblastima fizike i inženjerstva. Razvoj računara i kompjuterske tehnologije omogućio je efikasnije reša-

vanje ODJ modela numeričkim metodama, što je dovelo do široke primene u mnogim naučnim i tehničkim oblastima. Danas se ODJ modeli primenjuju u raznim disciplinama, uključujući fiziku, hemiju, biologiju, ekonomiju, inženjerstvo, medicinu i mnoge druge.

Ovi modeli se sastoje od konačnog broja običnih diferencijalnih jednačina koje opisuju odnos između promenljivih sistema, kao i njihove promene kroz vreme. Te jednačine imaju sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1(t)}{dt} &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ \frac{dx_2(t)}{dt} &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{dx_n(t)}{dt} &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)),\end{aligned}$$

pri čemu $x_i(t)$ predstavljaju zavisne promenljive (funkcije koje treba odrediti), $\frac{dx_i(t)}{dt}$, $i = 1, 2, \dots, n$ njihove izvode, t je nezavisna promenljiva (u ovom radu uvek vreme, a i najčešće je to slučaj), dok funkcije f_i opisuje odnos između nezavisne promenljive t , zavisnih promenljivih $x_1, x_2, \dots, x_n$ i njihovih izvoda. Model se skraćeno označava sa

$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

gde je $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, a $f(x(t)) = (f_1(x(t)), f_2(x(t)), \dots, f_n(x(t)))$.

Ukoliko je zadat početni uslov $x(0)$, date jednačine se mogu koristiti da prikažu evoluciju promenljive $x(t)$.

Tačka u kojoj je $f(x) = 0$ predstavlja ekvilibrijum (položaj ravnoteže, tačka mirovanja).

Kao što je rečeno, ovi modeli se koriste u različitim oblastima, pa će tako ovde biti korišćeni za opisivanje dinamike ljubavnih odnosa.

Bitno je naglasiti da ovaj pristup nije pogodan ukoliko je cilj modelovanje specifičnih ljubavnih priča. Najjednostavniji modeli, nekad nazivani i minimalni, su oni kod kojih je $n = 2$, pri čemu će $x_1(t)$ i $x_2(t)$ u ovom radu predstavljati zaljubljenost pojedinca i u partnera j . Modeli kod kojih je $n > 2$ nazivaju se kompleksnim. Ovi modeli u obzir uzimaju i ostale emocionalne dimenzije, kao i mogućnost postojanja treće osobe u vezi i nekoliko takvih modela će biti predstavljeno u nastavku rada (nakon razmatranja jednostavnih modela).

Dakle, jednostavniji modeli će biti sastavljeni od dve obične diferencijalne jednačine, pri čemu će jedna opisivati osećanja osobe ženskog pola, a druga osećanja osobe muškog pola.

$$\dot{x}_1(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)),$$

$$\dot{x}_2(t) = f_2(x_1(t), x_2(t)),$$

pri čemu je $x_i(t)$, $i = 1, 2$ mera ljubavi (mržnje) pojedinca i prema partneru j , $i \neq j$. $x_i(t)$ će se nazivati i učešćem osobe i ili osećanjima osobe i prema osobi j .

Ovi jednostavni modeli su pojednostavljene slike realnosti, prvenstveno jer je ljubav kompleksan miks različitih osećanja, kao što su: poštovanje, prijateljstvo, seksualno zadovoljstvo, itd. i na nju ne utiču samo uzajamna osećanja dve osobe. Drugim rečima, jednostavni modeli uzimaju u obzir jedino osećanja između dva pojedinca, kompletno izostavljajući ostatak sveta.

1.2 Karakteristike pojedinca

Kako se radi o opisivanju dinamike ljubavnih odnosa pomoću ODJ modela, funkcija f_i dobija sledeći oblik:

$$f_i = R_i^A + R_i^L - O_i,$$

tj. ova funkcija će predstavljati količinu ljubavi koja se "proizvede" i količine ljubavi koja se "potroši". Faktori R_i^A , R_i^L i O_i predstavljaju funkcije koje, između ostalog, mogu zavisiti od osećanja pojedinaca. Faktor R_i^A (A u ovoj notaciji označava privlačnost osobe j , skraćeno od engleskog "appeal") predstavlja reakciju osobe i na privlačnost osobe j i ona ne zavisi od osećanja osobe j . Jednostavnije rečeno, ovaj deo opisuje kako osoba i reaguje kada voli osobu j . R_i^L (L u ovoj notaciji označava ljubav osobe j , skraćeno od engleskog "love") je reakcija osobe i na ljubav osobe j i ona zavisi od osećanja osobe j . Jednostavnije, ovaj deo opisuje kako osoba i reaguje kada je voljena. Tj. ova dva faktora karakterišu kako osoba reaguje u situaciji kada voli (R_i^A) i kako reaguje kada je voljena (R_i^L). Poslednji faktor, O_i , predstavlja "hlađenje" osobe i (potrošenu ljubav).

Dakle, funkcija f_i predstavlja razliku između ljubavi (zaljubljenosti) i hlađenja pojedinca.

Slučaj $R_i^A = R_i^L = 0$ je specijalan i predstavlja situaciju u kojoj je osoba j napuštena ili

razdvojena od partnera. Ukoliko u tom slučaju pretpostavimo da osećanja $x_i(t)$ osobe i prema osobi j nestaju eksponencijalno, brzinom α_i , pri čemu je α_i koeficijent "hlađenja" osobe i , imamo sledeću jednačinu

$$\dot{x}_i(t) = -\alpha_i x_i(t).$$

Odnosno, dobija se linearna zavisnost od x_i tj. $O_i = \alpha_i x_i$.

Rešenje prethodne diferencijalne jednačine je

$$x_i(t) = x_i(0)e^{-\alpha_i t}.$$

Ovo rešenje diferencijalne jednačine se često zapisuje i u obliku

$$x_i(t) = x_i(0)e^{-\frac{t}{T_i}},$$

gde je $T_i = \frac{1}{\alpha_i}$ vremenska konstanta i ona je dobar indikator vremena potrebnog da se partner zaboravi (tj. da osećanja budu umanjena $e=2.71828$ puta). Praksa je pokazala da vreme potrebno da se partner zaboravi varira od nekoliko nedelja do nekoliko godina. To znači da ovaj jednostavni model ne može da opiše veoma kratke ljubavne priče koje traju jednu nedelju, kao ni one veoma dugačke koje traju ceo život.

Sada treba reći par stvari i o privlačnosti. Privlačnost osobe j uočena od partnera i , biće označena sa $A_{j/i}$.

$A_{j/i}$ se sastoji od velikog broja različitih komponenti kao što su fizički izgled, inteligencija, obrazovanje, godine, bogatstvo i druge. Te komponente će biti označene sa $A_{j/i}^h$ i one su nezavisne od osećanja x_j osobe j . Neka je sa $\lambda_{j/i}^h$ označena težina h -te komponente privlačnosti osobe j po mišljenju osobe i . Tada se dobija sledeća definicija

$$A_{j/i} = \sum_h \lambda_{j/i}^h A_{j/i}^h.$$

Bitno je naglasiti da privlačnost koja je ovako definisana nije stvarna, tj. nije apsolutna, nego je ona onakva kakvom je partner vidi, ona je takva samo u partnerovim očima. Uбудućе će se $A_{j/i}$ kraće označavati sa A_j .

Nameće se nova definicija

$$R_i^A = \gamma_i A_j = \gamma_i \sum_h \lambda_{j/i}^h A_{j/i}^h,$$

pri čemu koeficijent γ_i karakteriše reakciju osobe i na zaljubljenost.

Pomenute karakteristike su u mnogim modelima vremenski nepromenljive, tj. ne variraju mnogo u vremenu (kao što je slučaj i u realnom životu), tako da je faktor R_i^A konstantan. U suprotnom bi vremenski interval morao biti podeljen u više segmenata, pri čemu bi svaki segment karakterisala različita vrednost faktora R_i^A .

Sa stanovišta psihologije ljubavi, osobe možemo podeliti u dve grupe:

- Sigurne - imaju visok stepen samopoštovanja i samopouzdanja. One su obično emocionalno stabilne, otvorene i spremne za intimnost. Komunikativne su i sposobne izražavati svoja osećanja na jasan način. Osećaju se sigurno u svojim odnosima i veruju u sebe i svoje partnere. Imaju tendenciju da se osećaju sigurno i smireno čak i kada su u vezi sa izazovima ili promenama.
- Nesigurne - mogu iskusiti emocionalnu nestabilnost i nedostatak samopouzdanja. Mogu biti sklone osećanju ljubomore ili straha od napuštanja. One mogu imati poteškoće u izražavanju svojih potreba i osećanja, kao i u postavljanju granica u vezi. Ponekad mogu iskusiti preteranu potrebu za potvrdom i stalno tražiti sigurnost i potvrdu od svog partnera.

Dakle, sigurne osobe reaguju pozitivno na partnerovu ljubav prema njima i ne plaše se vezi-
vanja i bliskosti partnera. Stoga, sigurne osobe karakteriše rastuća funkcija R_i^L , tj. njihova
ljubav prema partneru raste sa porastom osećanja njihovog partnera

$$\frac{dR_i^L(x_j)}{dx_j} > 0.$$

U ekstremnim slučajevima R_i^L može biti linearno zavisna od x_j (linearno rastuća), ali je realističnije da funkcija R_i^L bude pozitivna (negativna), rastuća (opadajuća), konkavna (konveksna) i ograničena za sve pozitivne (negativne) vrednosti x_j . Ta ograničenost predstavlja psihofizički mehanizam koji teži da sačuva individuu od velikog stresa.

S druge strane, nesigurne osobe karakteriše opadajuća funkcija R_i^L za vrednosti x_j koje su iznad određene granice. Dakle, nesigurne osobe „dramatično“ reaguju na ljubav jer za njih nije prijatno da zavise od partnerove ljubavi i da budu bliske sa partnerom.

Emocije pojedinaca takođe mogu da utiču i na neka njegova viđenja, delovanja itd. Tj. reakcije

pojedince mogu da budu pod uticajem ljubavi ili emocija. Npr, majke su često pristrasne kada je u pitanju lepota njihovog deteta i vide svoje dete lepšim nego što ono zaista jeste. Ta pojava se naziva subjektivnost. Dakle, može biti slučaj da faktor R_i^L bude povećan usled uticaja ljubavi, ali nije retkost ni da bude oslabljen istom ili nekom drugom emocijom. Npr. kod platonskih ljubavi je slučaj da je fizička privlačnost pojačana izostankom fizičkog kontakta među partnerima.

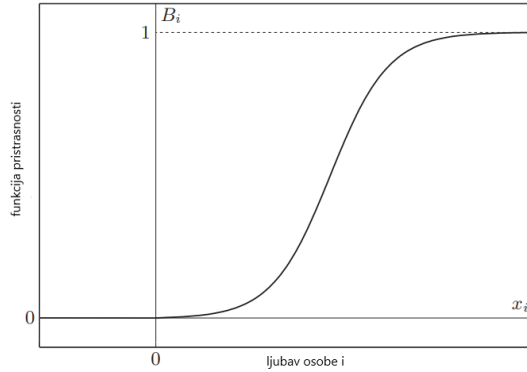
Takve pojedince, bilo da je reč o onima koji naginju ka subjektivnosti ili platonskoj ljubavi, ćemo jednom rečju zvati pristrasnim. Sada R_i^A i R_i^L možemo zapisati kao

$$R_i^A(x_i) = (1 + b_i^A B_i^A(x_i)) \gamma_i A_j,$$

$$R_i^L(x_i, x_j) = (1 + b_i^L B_i^L(x_i)) R_i^L(0, x_j),$$

pri čemu $R_i^L(0, x_j)$ predstavlja reakciju na ljubav potpuno ravnodušne osobe.

Funkcije $B_i^A(x_i)$ i $B_i^L(x_i)$ su jednake nuli za $x_i \leq 0$ i rastuće na intervalu $(0,1)$. Takođe, prvo su konveksne, a potom konkavne za $x_i > 0$.



Slika 1.4: Grafik tipične funkcije pristrasnosti $B_i(x_i)$

Konstante b_i^A i b_i^L su koeficijenti pristrasnosti i jednaki su nuli za nepristrasne osobe, dok su za pristrasne osobe ovi koeficijenti različiti od nule, i to za subjektivne osobe su pozitivni ($b_i^A > 0$), a za platoničare negativni ($b_i^A < 0$).

Dakle, postoje sigurni, nesigurni, pristrasni i nepristrasni partneri. Ukoliko bi se razmatrale sve opcije, to bi bilo ukupno 16 mogućnosti, a to je veliki broj. Iz tog razloga će ovaj rad biti fokusiran samo na partnere iste vrste, što je i najčešći slučaj u stvarnom životu. Takvi parovi nazivaju se **homogeni**. Za više detalja pogledati [2].

Linearni model

Kako je rečeno u prethodnom odeljku, u ovom radu će uglavnom biti razmatrani samo homogeni parovi. Tako će u ovom odeljku biti razmatran model iz prethodne sekcije i to za tzv. standardni par. Standardni parovi su oni koji su sastavljeni od sigurnih i nepristrasnih pojedinaca.

Dakle, u prethodnom odeljku je viđeno da važi

$$\dot{x}_i = R_i^A + R_i^L - O_i.$$

Kako će u obzir ući nepristrasne osobe, faktori R_i^A i R_i^L zavisice samo od A_j i x_j . Takođe, ovde će važiti pretpostavka da su sva tri dela prethodne jednačine linearna, tj. da važi

$$\begin{aligned} O_i(x_i) &= \alpha_i x_i, \\ R_i^L(x_i, x_j) &= \beta_i x_j, \\ R_i^A(A_j, x_i) &= \gamma_i A_j, \end{aligned}$$

pri čemu je α_i koeficijent zaborava, dok β_i i γ_i karakterišu kako pojedinac reaguje na ljubav koju pruža i dobija.

Pretpostavka je i da su koeficijenti $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ i A_j pozitivni. Samim tim je $\frac{dR_i^L}{dx_j} > 0$, tj. pojedinci su sigurni i imaju neograničene funkcije reakcije.

Model sada dobija sledeći oblik

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 A_2, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1, \end{aligned}$$

gde parametri $(\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, A_i)$ karakterišu osobu i. Model kod koga je $A_i = 0$ je prvi razmatrani model u kontekstu ljubavne dinamike. Prvi pokušaj izučavanja ovakvog modela vuče korene

još iz 1975. godine i vezan je za termodinamiku, ali je taj rad ostao neobjavljen. Autori tog rada bili su Ilya Prigogine i Etienne Guyon. Drugi pokušaj se desio 1978. godine na Princetonu kada je mladi student Steven Strogatz je za svoj ispit iz sociologije napisao rad pod imenom "Diferencijalne jednačine i progres romantične veze". Rad je inspirisan romantičnom vezom u kojoj je i sam student učestvovao. Deset godina nakon toga (1988. godine), objavio je rad koji se sastojao od jedne stranice (pogledati [3] i [4]). Upravo taj rad bio je preteča u istraživanju matematičkih modela romantične veze.

2.1 Strogacov model

Pretpostavimo da imamo ljubavnu vezu između mladića zvanog Romeo i devojke pod imenom Julija. Označimo sa $R(t)$ Romeovu ljubav (mržnju) prema Juliji u trenutku t , a sa $J(t)$ Julijinu ljubav (mržnju) prema Romeu u trenutku t . Sada model ljubavi između pomenutih partnera može biti opisan pomoću dve linearne diferencijalne jednačine

$$\begin{aligned}\frac{dR}{dt} &= aR + bJ, \\ \frac{dJ}{dt} &= cR + dJ.\end{aligned}$$

Parametri a i b karakterišu Romea i njegove osobine u ljubavnom odnosu, tj. pokazuju kakav je on prilikom romantične veze (kako reaguje na ljubav i zaljubljenost), dok se parametri c i d odnose na Juliju. Parametar a govori kako Romeovi osećaji utiču na njega, dok parametar b govori kako Julijina osećanja prema Romeu utiču na njega. Parametri c i d definišu se na sličan način za Juliju.

Ukoliko posmatramo parametre koji karakterišu Romea (tj. Romeov emocionalni stil), imaćemo 4 slučaja:

- 1) $a \geq 0, b \geq 0$ - na Romeovu ljubav prema Juliji pozitivno utiču i njegova osećanja, kao i Julijina osećanja prema njemu, tj. on je ohrabren i svojim, a i Julijinim osećanjima. Tada kažemo da je Romeo **emotivni ljubavnik**.
- 2) $a \geq 0, b < 0$ - na Romea pozitivno utiču sopstvena osećanja, a negativno Julijina (Julijina ljubav negativno utiče na Romeova osećanja, a mržnja pozitivno). Tada kažemo da je Romeo **narcisoidni ljubavnik**.

3) $a < 0, b \geq 0$ - na Romea negativno utiču sopstvena osećanja, a pozitivno Julijina. On beži od svojih osećanja. Tada kažemo da je Romeo **oprezni ljubavnik**.

4) $a < 0, b < 0$ - na Romea negativno utiču i sopstvena, kao i Julijina osećanja. On beži od osećanja. Tada kažemo da je Romeo **samotnjak**.

Na isti način se karakteriše Julijin emocionalni stil.

Sada će biti ispitivana dinamika ljubavnih odnosa za različite tipove parova.

Primer1: Posmatramo sledeći sistem diferencijalnih jednačina

$$R'(t) = -R(t) + 2J(t),$$

$$J'(t) = -3J(t).$$

Dalje, matrica koja odgovara gornjem sistemu je:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

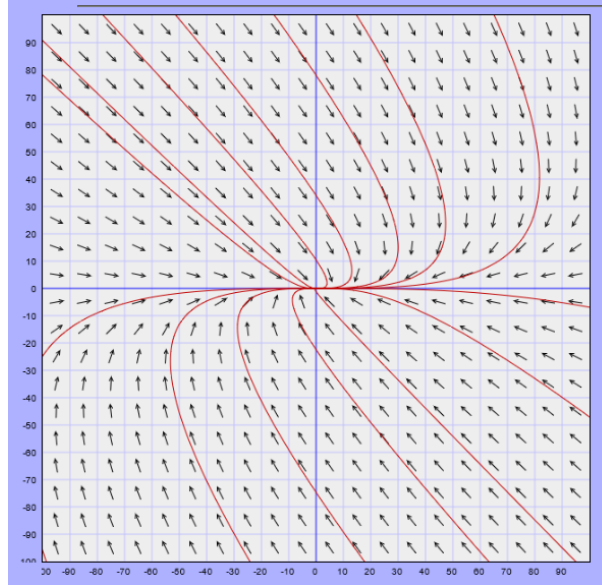
Na osnovu parametara a, b, c, d se vidi da je u ovom slučaju Romeo oprezni ljubavnik, dok je Julija narcisoidni ljubavnik. Dalje, sopstvene vrednosti matrice sistema su $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = -3$, dok se ekvilibrijum dobija rešavanjem sledećeg sistema:

$$-R + 2J = 0,$$

$$-3J = 0.$$

Iz ovoga sledi da je ekvilibrijum tačka (0,0). Takođe, radi lakoće zapisa $J(t)$ će skraćeno biti zapisano kao J , a $R(t)$ kao R i u svim primerima će se prva vrsta matrice odnositi na Romea, dok će se druga odnositi na Juliju.

Fazni portret (sa nekoliko trajektorija) za ovaj sistem prikazan je na slici 2.1 (za crtanje faznog portreta pogledati [5]). Vidi se da ovde sve trajektorije uviru u ekvilibrijum (tačku (0,0)) i za ovakav ekvilibrijum kažemo da je **stabilni čvor**. Na osnovu ovoga se vidi da će, bez obzira na intenzitet osećanja u početnom trenutku, osećanja obe osobe težiti ka stabilnom ekvilibrijumu (ravnodušnosti). Drugim rečima, bez obzira na početni uslov, intenzitet osećanja obe osobe će težiti ka nuli, tj. ka ravnodušnosti. Tako da, ukoliko su se partneri na početku jako voleli (njihova osećanja su bila pozitivna, mnogo iznad nule), ona će vremenom opadati ka nuli, dok



Slika 2.1: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

ukoliko su se partneri na početku mrzeli, njihova osećanja će rasti do ravnodušnosti.

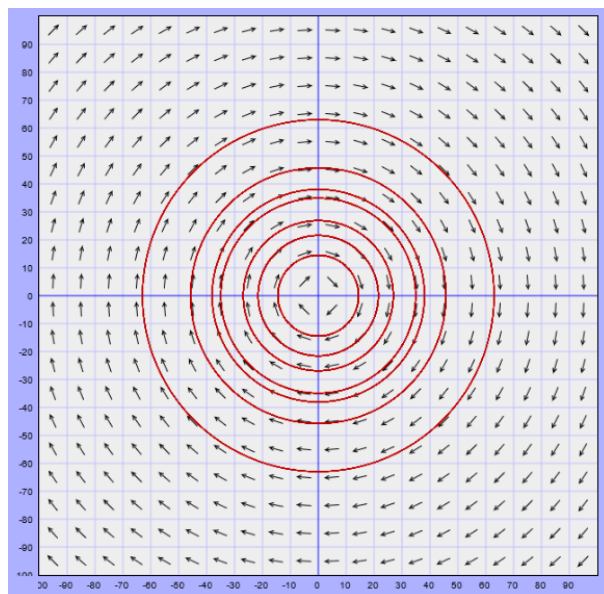
Primer2: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru je Julija oprezni ljubavnik, dok je Romeo emotivni ljubavnik.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$, tj. konjugovano kompleksni brojevi, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka (0,0). Fazni portret koji odgovara ovoj situaciji, prikazan je na slici 2.2.

Vidi se da su sada trajektorije koncentrične kružnice pa se ekvilibrijum naziva **centar**. U ovom slučaju se primećuje da će se osećanja oba partnera periodično kretati između ljubavi i mržnje. Nezavisno od početnog uslova, osećanja oba partnera će ovom prilikom dostići svaku tačku sa odgovarajuće kružnice (samo je pitanje u kom trenutku) - postojaće periodi i kada samo jedan partner voli (dok drugi mrzi), kao i periodi u kome se oba partnera vole (mrže) i sva ova stanja će se periodično smenjivati.



Slika 2.2: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

Primer3: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

U ovom slučaju, Romeo je samotnjak, a Julija emotivni ljubavnik. Sopstvene vrednosti odgovarajuće matrice su $\lambda_1 \approx -2.45i$ i $\lambda_2 \approx 2.45i$, tj. one su konjugovano kompleksni brojevi. Fazni portret koji odgovara ovom primeru je prikazan na slici 2.3 levo.

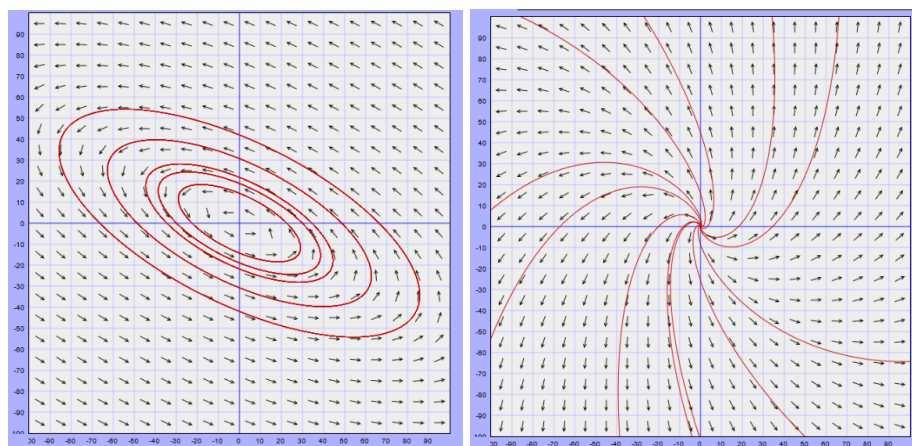
Vidi se da je ekvilibrijum ponovo tipa centar, samo su sada trajektorije oblika koncentričnih elipsi. Situacija je sada slična onoj iz prethodnog primera - ponovo će se periodično smenjivati periodi ljubavi i mržnje između ljubavnika. Jedina je razlika što će sada različite udaljenosti od centra na različitim delovima elipse dovesti do većih varijacija u vrednostima koje se mere na putanji. Na mestima gde elipsa ima duži poluprečnik (veću udaljenost od centra), vrednosti će biti veće, dok će na mestima gde elipsa ima kraći poluprečnik (manju udaljenost od centra), vrednosti biti manje.

Primer4: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru su oba ljubavnika emotivni ljubavnici.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 4$, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka (0,0). Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.3 desno.



Slika 2.3: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

Primećuje se sada da sve trajektorije izviru iz ekvilibrijuma i u tom slučaju kažemo da je to **nestabilni ekvilibrijum**. Ovde u zavisnosti od početnog uslova zavisi u kom smeru će ići dinamika veze. Tako da, u zavisnosti od početnih uslova su mogući razni ishodi - od ljubavi do mržnje i obrnuto, kao i ljubav (mržnja) koja postaje sve veća.

Primer5: Matrica sistema je sledeća:

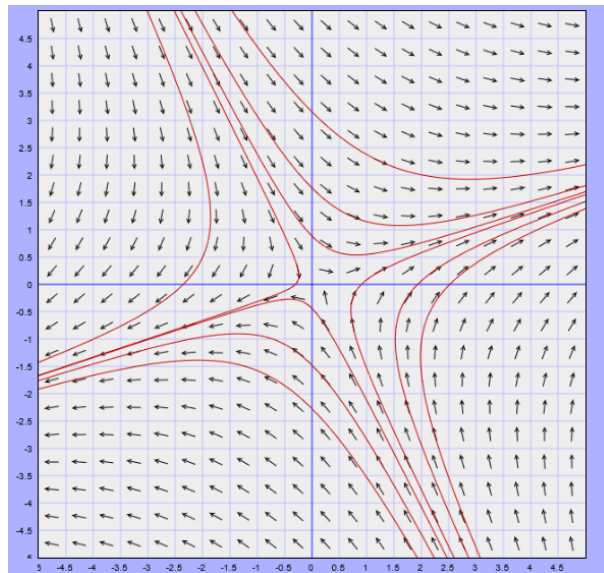
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru je Romeo emotivni ljubavnik, a Julija narcisoidni ljubavnik.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 = -4$, $\lambda_2 = 3$, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka (0,0). Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.4.

Primećuje se da se sada trajektorije skupljaju oko koordinatnog početka (ekvilibrijuma), a potom se udaljavaju. Ovakav ekvilibrijum nazivamo **sedlom**. Ovde je, u zavisnosti od početnog uslova moguće da dođe do situacije u kojoj nezainteresovana osoba postaje zainteresovana i njena ljubav krene da raste, kao i da zainteresovana osoba postane nezainteresovana i njena

ljubav krene da opada pretvarajući se u mržnju.



Slika 2.4: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

Primer6: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru su oba ljubavnika narcisoidni ljubavnici.

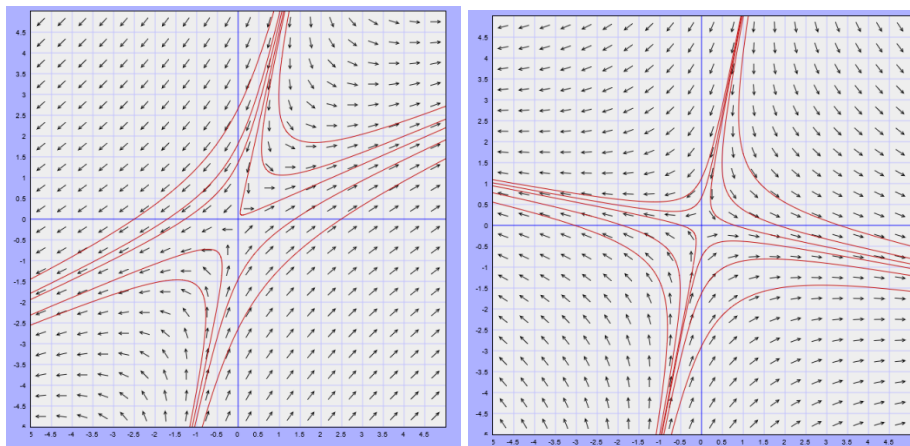
Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 \approx -1.56$, $\lambda_2 \approx 2.56$, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka (0,0) i tip ekvilibrijuma ponovo je sedlo. Ogovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.5 levo.

Ovde, kao i u prethodnom primeru tok veze zavisi od početnih uslova - tako da je moguće da osobe iz ljubavi prelaze u sve veću mržnju, kao i da iz mržnje prelaze u sve veću ljubav.

Primer7: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru je Romeo narcisoidni ljubavnik, dok je Julija samotnjak.



Slika 2.5: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 \approx -2.19$, $\lambda_2 \approx 3.19$, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka $(0,0)$ i tip ekvilibrijuma ponovo je sedlo. Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.5 desno.

Tok veze ponovo zavisi od početnih uslova, a kao što se može primetiti, tok veze ide u tom smeru da osobe imaju različita osećanja iako postoje periodi u kom one imaju ista osećanja.

Primer8: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

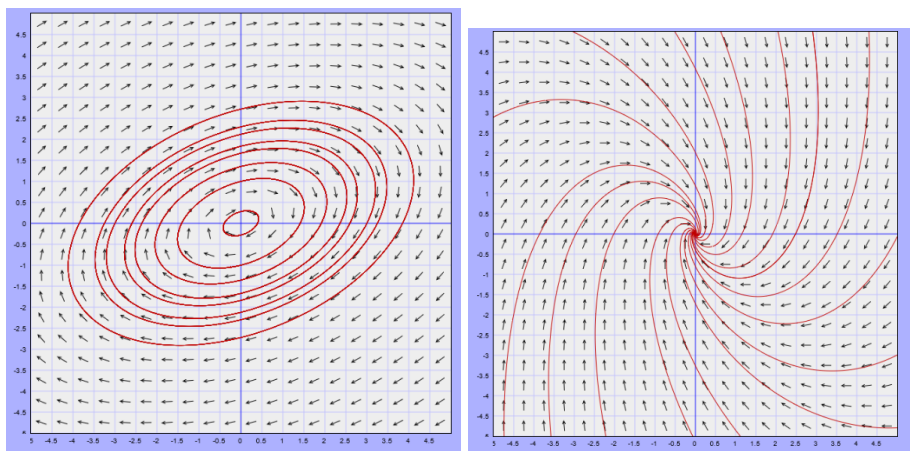
U ovom primeru su oba ljubavnika oprezni ljubavnici.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 \approx 2.65i$, $\lambda_2 \approx -2.65i$, tj. konjugovano kompleksni brojevi, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka $(0,0)$ i tip ekvilibrijuma je centar (sa trajektorijama koje imaju oblik koncentričnih elipsi). Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.6 levo.

Ovde je situacija slična onoj iz trećeg primera - naizmenično se smenjuju periodi ljubavi i mržnje.

Primer9: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}.$$



Slika 2.6: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

U ovom primeru je Romeo oprezni ljubavnik, dok je Julija samotnjak.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 \approx -1.5 + 1.32i$, $\lambda_2 \approx -1.5 - 1.32i$ (konjugovano kompleksni brojevi), dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak, tj. tačka (0,0) u koju uviru sve trajektorije, pa je tip ekvilibrijuma stabilni čvor. Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.6 desno.

U ovom slučaju, nezavisno od početnog uslova, oba pojedinca teže ka ravnodušnosti.

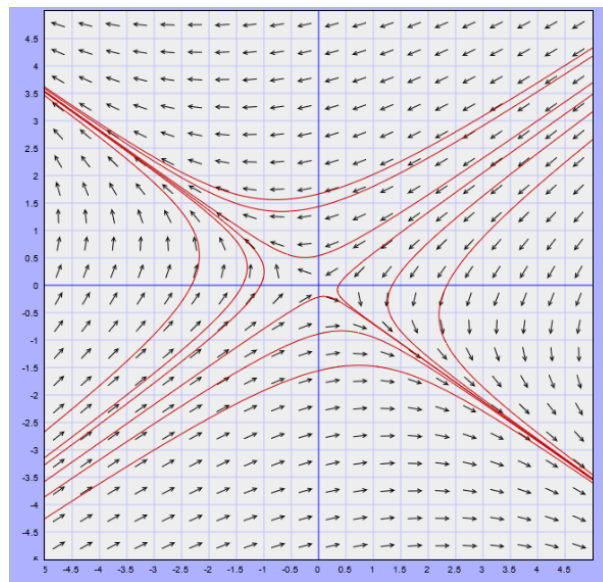
Primer10: Matrica sistema je sledeća:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -2 \\ -1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

U ovom primeru su oba ljubavnika samotnjaci.

Sopstvene vrednosti su sada $\lambda_1 \approx -1.91$, $\lambda_2 \approx 0.91$, dok je jedini ekvilibrijum ponovo koordinatni početak i tipa je sedlo. Odgovarajući fazni portret je prikazan na slici 2.7.

Kao i u prethodno opisanim primerima kod kojih je ekvilibrijum tipa sedlo, i ovde tok veze zavisi od početnih uslova i mogući su prelasci iz ljubavi u mržnju i obrnuto.



Slika 2.7: x-osa prikazuje Romeova osećanja, a y-osa Julijina osećanja

Ljubavni ciklusi

U ovom odeljku će biti reči o periodičnim naletima ljubavi između partnera. Ponašanje ljubavnika ponekad je apsolutno nepredvidivo, ono čak može biti promenljivo kao vreme. Dakle, već je poznato da ljubav može da varira, a i osciluje. Te oscilacije mogu biti na dnevnoj bazi, npr. ukoliko jedan od partnera ima izražene dnevne varijacije krvnog pritiska. Vikend oscilacije su takođe učestale i javljaju se kod partnera koji su zaposleni, npr. oseti se razlika između partnerskih odnosa tokom radnih dana i vikenda. Mesečne oscilacije su primećene kod mladih parova jer faktor ljubavi jeste seksualna zadovoljenost, ali seksualna aktivnost biva smanjena tokom menstrualnih dana žene. Sve ove oscilacije su visokofrekventne i uslovljene spoljnim faktorima. U ovom delu će ipak biti opisivane niskofrekventne oscilacije koje su uzrokovane endogenim faktorima, pri čemu će periodi varirati od nekoliko meseci do nekoliko godina.

3.1 Nema pristrasnosti $\implies$ nema ciklusa

U ovom delu će biti ispitivana mogućnost pojave ljubavnih ciklusa između dve nepristrasne osobe. Model koji opisuje vezu između dve nepristrasne osobe ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + \gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + \gamma_2 A_1.$$

U svrhu dokazivanja (ne)postojanja ciklusa, biće korišćen **Bendiksonov kriterijum** (pogledati i [6]). Ovaj kriterijum zapravo služi da se ustanovi odsustvo zatvorenih trajektorija dinamičkog sistema.

On kaže da ukoliko imamo dinamički sistem definisan jednačinama

$$x' = P(x, y) \quad \text{i} \quad y' = Q(x, y)$$

i ukoliko je izraz

$$I(x, y) = P'_x + Q'_y$$

u prosto povezanoj oblasti G konstantno pozitivan (ili bar nenegativan, ali ne konstantno jednak nuli) ili konstantno negativan (ili bar nepozitivan, ali takav da nije konstantno jednak nuli), onda dinamički sistem neće imati zatvorenih trajektorija u oblasti G .

Dakle, da bi bilo dokazano odsustvo zatvorenih trajektorija, dovoljno je pokazati da divergencija sistema jednačina ne menja znak, tj. da je konstantnog znaka.

Divergencija gore pomenutog sistema je

$$\text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\alpha_1 - \alpha_2.$$

Kako je na početku rada rečeno da su koeficijenti α_i pozitivni, to znači da divergencija ne menja znak (konstantno je negativna), što po Bendiksonovom kriterijumu isključuje prisustvo ciklusa (oscilacija). Drugim rečima, malo pristrasnosti može biti prisutno među parovima koje karakterišu periodični romantični režimi (jer kod nepristrasnih pojedinaca to nije slučaj).

3.2 Nema nesigurnosti $\implies$ nema ciklusa

U delu "Karakteristike pojedinca", ovog rada, su pomenute i sigurne osobe (pored nepristrasnih) i videlo se da među sigurnim i nepristrasnim osobama nije bilo prisutnosti romantičnih ciklusa. U delu iznad (3.1) je dokazano da takvi ciklusi ne postoje među nepristrasnim parovima (parovima sastavljenim od dve nepristrasne osobe), a u ovom delu će biti ispitivano prisustvo (odsustvo) takvih ciklusa među sigurnim parovima (parovima sastavljenim od dve sigurne osobe). Znači, sledeći zadatak je ispitati prisustvo ciklusa među sigurnim pojedincima. Za početak, posmatrajmo opšti model:

$$\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_1, x_2) + R_1^A(x_1, A_2),$$

$$\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1, x_2) + R_2^A(x_2, A_1).$$

Rečeno je da se osoba i karakteriše kao subjektivna ako važi

$$\frac{\partial R_i^L}{\partial x_i} \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial R_i^A}{\partial x_i} \geq 0$$

i ako je bar jedna od ove dve nejednakosti stroga, dok obrnuta nejednakost važi za platoničare.

Divergencija gornjeg opšteg sistema je

$$\operatorname{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\alpha_1 - \alpha_2 + \frac{\partial R_1^L}{\partial x_1} + \frac{\partial R_1^A}{\partial x_1} + \frac{\partial R_2^L}{\partial x_2} + \frac{\partial R_2^A}{\partial x_2},$$

tako da je znak divergencije sigurno konstantno negativan u slučaju da su obe osobe platoničari ($\alpha_i > 0$). Zaključak je da je u odnosu između dve osobe koje se karakterišu kao platoničari, znak divergencije konstantno negativan, pa na onovu gore pomenutog Bendiksonovog kriterijuma, zaključujemo da ne postoje granični ciklusi (zatvorene trajektorije). To znači da neprestani usponi i padovi osećanja nisu mogući u vezi između dve osobe koje karakteriše uzajamna platonska ljubav.

U svim ostalim slučajevima, znak divergencije ne možemo odmah odrediti, te se ne možemo pozvati na Bendiksonov kriterijum.

Ukoliko se sada uzmu u obzir dve sigurne osobe, odnosno takve da važi:

$$\frac{\partial R_1^L}{\partial x_2} \geq 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial R_2^L}{\partial x_1} \geq 0,$$

može biti dokazano da ciklično ponašanje dinamičkog sistema ne može proizaći iz Hopfovih bifurkacija.

Radi razumevanja teoreme, potrebno je definisati pojam bifurkacije, kao i pojam Hopfove bifurkacije. Za više detalja o ovim pojmovima pogledati [7], [8] i [9]. **Bifurkacija** je ključni trenutak u dinamičkim sistemima kada menjanjem parametara ili uslova sistema dolazi do značajne promene u njegovom ponašanju. To je tačka preokreta koja vodi ka novim stabilnim stanjima, periodičnim oscilacijama ili haosu, otvarajući vrata ka novim oblicima i dinamičkim sistemima. **Hopfova ili periodička bifurkacija** je poseban tip bifurkacije koji se javlja kada sistem pređe iz stabilnog stanja u periodičko oscilatorno kretanje.

Sada se dokaz teoreme izvodi kontradikcijom, tj. pretpostavi se da postoji Hopfova bifurkacija, a onda se pokaže da to nije moguće. U tu svrhu će biti posmatrana Jakobijeva matrica.

Jakobijeva matrica (u tački ekvilibrizacije) ima oblik:

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Hopfove bifurkacije se javljaju kada su sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice konjugovano kompleksne i one pređu iz poluprave kompleksne ravni sa negativnim realnim delom u polupravu kompleksne ravni sa pozitivnim realnim delom. Tako da, ukoliko postoji Hopfova bifurkacija, moraju biti zadovoljeni neophodni uslovi za postojanje Hopfove bifurkacije, a to su:

$$\text{tr} J = 0,$$

$$\det J > 0,$$

tj.

$$J_{11} + J_{22} = 0,$$

što znači

$$J_{11}J_{22} \leq 0,$$

tj. J_{11} i J_{22} moraju biti nula ili različitog znaka.

Determinanta matrice jednaka je

$$\det J = J_{11}J_{22} - J_{12}J_{21},$$

gde je

$$J_{12} = \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = \frac{\partial R_1^L}{\partial x_2} \quad J_{21} = \frac{\partial f_2}{\partial x_1} = \frac{\partial R_2^L}{\partial x_1}.$$

Kako su ove dve vrednosti pozitivne (osobe se karakterišu kao sigurne), determinanta će uvek biti negativna, a ne pozitivna i tu dolazi do kontradikcije. Stoga, ciklično ponašanje dve sigurne osobe ne može proizaći iz Hopfove bifurkacije (u slučaju veze između dve sigurne osobe ne može doći do pojave Hopfovih bifurkacija, pa ne mogu nastati ni ciklusi iz istih).

Na ovaj način dokazano je samo da ciklično ponašanje ne može nastati iz Hopfovih bifurkacija. Da bi se pokazalo odsustvo cikličnog ponašanja sistema, potrebno je ispitati i prisustvo (odsustvo) i drugih vrsta bifurkacija koje mogu dovesti do ovakvog ponašanja (to su npr. period-doubling i torus bifurkacije), kao i drugih faktora koji mogu dovesti do takvog ponašanja. U ovom radu neće biti detaljnijih reči o tome, tako da će ovo ispitivanje biti završeno ovde (nakon ispitivanja postojanja Hopfovih bifurkacija).

Kao zaključak, može se reći da bar malo nesigurnosti može biti prisutno u parovima sa periodičnim romantičnim režimima.

3.3 Primer

Da bi se pokazalo da može doći do pojave cikličnog ponašanja u gore pomenutom opštem modelu, biće razmatran odnos između dve nesigune i pristrasne osobe koje su subjektivne u reakciji na privlačnost. Model sada dobija sledeći oblik:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1,$$

pri čemu su funkcije R_1^L i R_2^L prvo rastuće, pa onda opadajuće, a koeficijenti pristrasnosti b_1^A i b_2^A pozitivni. Pitanje sada je: da li može doći do pojave graničnog ciklusa za pogodno izabrane parametre ovog modela?

Definišimo funkcije R_i^L i B_i^A na sledeći način

$$R_i^L(x_j) = \beta_i k_i x_j e^{-(k_i x_j)^{n_i}},$$

$$B_i^A(x_i) = \frac{x_i^{2m_i}}{x_i^{2m_i} + \sigma_i^{2m_i}}.$$

Kako reakcija na ljubav R_i^L dostiže vrhunac za

$$x_j = \frac{1}{k_i} \sqrt[n_i]{\frac{1}{n_i}},$$

parametar k_i predstavlja meru nesigurnosti osobe i .

Sada će biti ispitivana egzistencija graničnih ciklusa u zavisnosti od koeficijenata pristrasnosti.

Neka su sledeći parametri fiksirani

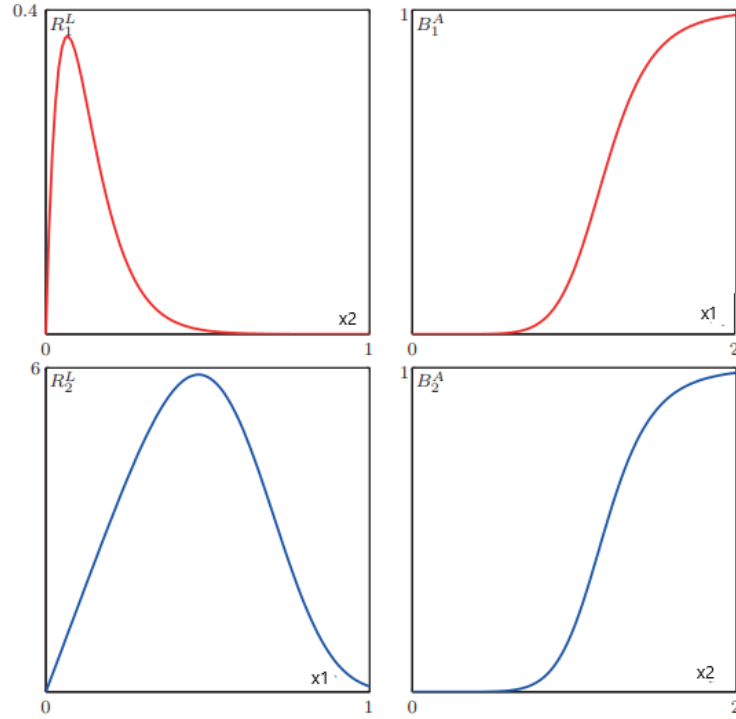
$$\alpha_1 = 0.36, \quad k_1 = 0.08, \quad n_1 = 1, \quad \beta_1 = 0.75,$$

$$A_1 = 0.1, \quad \sigma_1 = 1, \quad m_1 = 4, \quad \gamma_1 = 1,$$

$$\alpha_2 = 0.2, \quad k_2 = 1.5, \quad n_2 = 4, \quad \beta_2 = 10.66,$$

$$A_2 = 0.1, \quad \sigma_2 = 1, \quad m_2 = 4, \quad \gamma_2 = 1,$$

dok su parametri b_1^A i b_2^A nefiksirani (slobodni) u ovom trenutku. Funkcije reakcije i pristrasnosti prikazane su na grafiku 3.1.



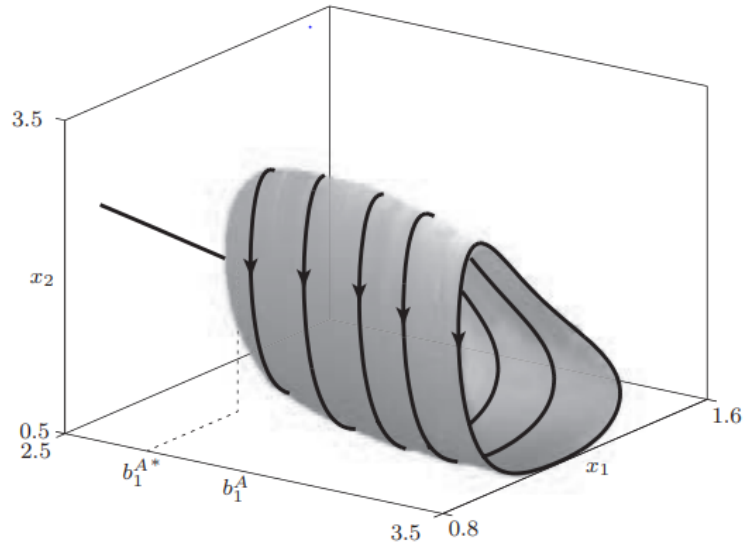
Slika 3.1: Funkcije R_i^L i B_i^A

Već je viđeno da u slučaju nepristrasnih parova ne dolazi do pojave graničnih ciklusa, tj. u slučaju $b_1^A = 0$ i $b_2^A = 0$. Potom se vrše simulacije, takve da se u svakom koraku postepeno povećava jedan od dva koeficijenta pristrasnosti u nadi da će se detektovati granični ciklus. Ovo je malo opipljiv teren jer sudeći po gornjim razmatranjima, ne postoji garancija da će se takav granični ciklus zapravo i pojaviti. U ovom slučaju, povećanjem koeficijenta b_2^A ne dolazi do pojave graničnog ciklusa, dok se isti pojavljuju za

$$b_1^A = b_1^{A*} = 2.93 \quad i \quad b_2^A = 0.$$

Dakle, 2.93 je u ovom slučaju kritična vrednost i za vrednost koeficijenta b_1^A koja je blago iznad ove vrednosti, granični ciklusi su veoma mali, ali ubrzo potom postaju sve veći. Adekvatna situacija je predstavljena grafikom 3.2.

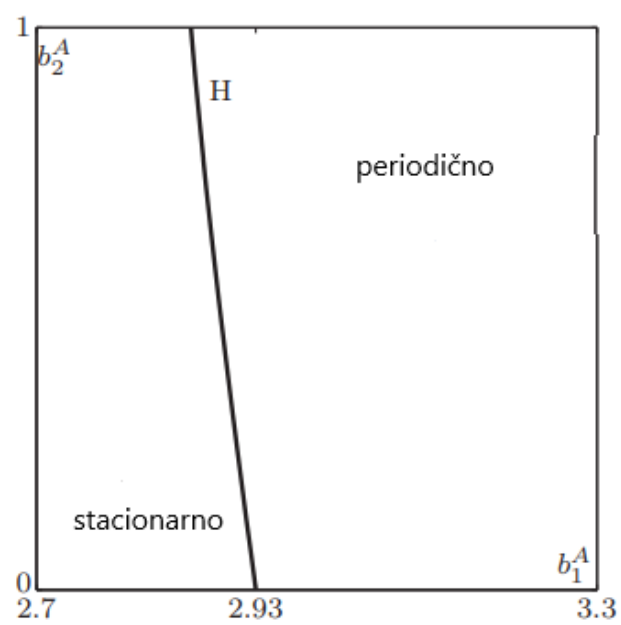
Na grafiku 3.2 se vidi da stabilni ekvilibrijum postaje nestabilan u kritičnoj vrednosti parametra b_1^{A*} (2.93), nakon čega se pojavljuju granični ciklusi. Kako za $b_1^A = b_1^{A*}$ ekvilibrijum gubi stabilnost, sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice računate u tački ekvilibrijuma su potpuno



Slika 3.2: Atraktor model za različite vrednosti koeficijenta pristrasnosti b_1^A

imaginarne ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$). Poznato je da se Hopfova bifurkacija odnosi na pojavu u teoriji dinamičkih sistema kada se menja broj stabilnih ravnotežnih stanja sistema s obzirom na promenu parametara. Dalje, ako postoje sopstvene vrednosti kompleksnog oblika s nenultom imaginarnom komponentom, to ukazuje na postojanje Hopfove bifurkacije, što ovde i jeste slučaj.

Kako je pronađena Hopfova bifurkacija varirajući koeficijent b_1^A , dok je $b_2^A = 0$, ista stvar se može uraditi i ponavljajući ista računanja za seriju pozitivnih vrednosti koeficijenta b_2^A . Kao rezultat, dobija se kriva u dvodimenzionalnom prostoru parametara (b_1^A, b_2^A) koja razdvaja deo u kom parovi teže ka stacionarnim stanjima od dela u kom teže ka periodičnim režimima. Ta kriva je prikazana na slici 3.3.



Slika 3.3: Kriva koja razdvaja periodična od stacionarnih stanja

Ova kriva, označena sa H na grafiku, naziva se **Hopfova bifurkacijska kriva**.

Stresori iz spoljnog sveta

U ovom odeljku će biti otklonjena jedna od najvažnijih pretpostavki koja je važila do sada, a to je pretpostavka o nepostojanju spoljašnjih uticaja na ljubavnu romansu. Svi ti spoljašnji faktori će nadalje biti nazivani **spoljašnjim stresom**.

Neki stresovi su jaki ali kratkotrajni (tzv. šokovi), dok ima i onih koji punu snagu dostižu tek nakon određenog vremena ili se periodično pojavljuju. U modelu, takvi stresovi se mogu predstaviti pomoću impulsa, step funkcije ili sinusoidne funkcije. Dakle, pitanje je da li i na koji način spoljašnji stres utiče na ljubavne odnose. Iako su u većini slučajeva takve vrste stresova nepredvidive i ne tako lake za modelovanje, na trenutak može biti zamišljeno da osećanja između dve osobe mogu biti opisana dosadašnjim modelom. Naravno, u tom modelu će biti dodato ono o čemu je sada bilo reči, a to je jedna dodatna varijabla $w(t)$ koja će predstavljati ukupan spoljašnji stres.

Dalje, umesto dosadašnjeg modela oblika

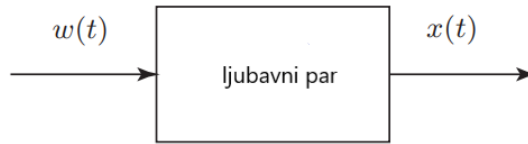
$$\dot{x}(t) = f(x(t)),$$

model dobija sledeći oblik:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), w(t)).$$

Postoje različiti načini odabira funkcije $w(t)$. Jedan od njih je biranje funkcije $w(t)$ tako da se postigne željeni cilj (npr. da oba partnera dođu u stacionarni položaj), dok $w(t)$ može biti i zadata funkcija vremena koja prikazuje kako spoljašnji stres utiče na ljubavnike.

Efekat šoka spoljašnje sredine koji kratko traje, ali je važan jer iznenada menja osećanja



Slika 4.1: Spoljašnji stres

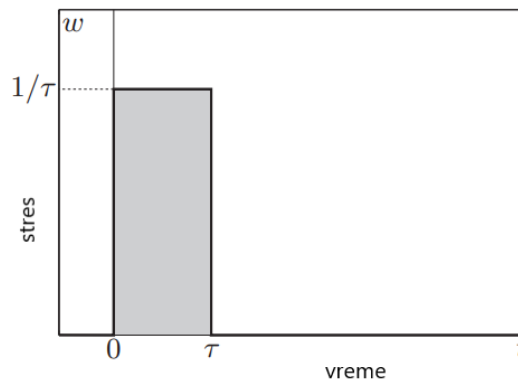
pojedinaca može biti opisan na sledeći način:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)) + cw(t),$$

gde je

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

dvodimenzionalni vektor, dok $w(t)$ predstavlja impuls. Funkcija $w(t)$ naziva se **impuls** i jednaka je vrednosti $\frac{1}{\tau}$ na kratkom vremenskom intervalu $[0, \tau]$, a ima vrednost nula na ostatku. Matematički govoreći, ovaj impuls će postojati samo na kratkom vremenskom intervalu $[0, \tau]$, pri čemu $\tau \rightarrow 0$.



Slika 4.2: Impuls dužine τ , pri čemu $\tau \rightarrow 0$

Drugi stresovi su manje intenzivni od impulsa, ali i dugotrajniji. Npr. psihički poremećaj ili estetska operacija mogu veoma dugo, ako ne i zauvek, da promene privlačnost osobe (pozitivno ili negativno). Uticaji ovakvih stresova se mogu opisati korišćenjem step funkcije, odnosno

funkcije oblika:

$$w(t) = \begin{cases} 0, & \text{za } t < t_0, t_0 \geq 0 \\ 1, & \text{za } t > t_0 \end{cases}.$$

Takođe, interesantni su i stresovi koji se periodično pojavljuju u vezi, tj. koji periodično utiču na kvalitet ljubavnih odnosa. Mnogo je takvih stresova i njihove frekvencije su obično dan, sedmica, mesec ili godina. U takvim slučajevima, funkcija $w(t)$ imaće oblik sinusoidne amplitude W i frekvencije ω (sa periodom jednakim $T = \frac{2\pi}{\omega}$), tj.

$$w(t) = W \sin(\omega t)$$

ili čak oblik Furijeovog reda.

Konačno, najkompleksniji slučaj koji može biti razmatran u modelu je da funkcija $w(t)$ bude zapravo realizacija nekog pogodnog stohastičkog procesa. Najčešće razmatrani proces je **beli šum**. Po definiciji, to je jedan ekstremno apstraktan proces koji se sastoji od sinusoida svih frekvencija sa jednakim i beskonačno malim amplitudama. Dakle, sastoji se od sinusoida svih mogućih frekvencija pri čemu nijedna frekvencija nije više privilegovana od ostalih. Stoga, ako je funkcija $S(\omega)$, nazvana spektar šuma, mera (beskonačno male) amplitude sinusoidne funkcije frekvencije ω , beli šum ima jedinstveni spektar $S(\omega) = 1$. Ostali šumovi, nazivani i obojeni, imaju nekonstantan spektar $S(\omega)$ koji je zapravo različit od nule samo na malom segmentu.

4.1 Kanonski odgovor na stres

Stresovi $w(t)$ razmatrani u delu iznad, bilo da su impulsi, step funkcije, sinusoidne ili beli i obojeni šumovi, često se nazivaju **kanonskim**. Stoga, odgovarajuća osećanja dobijena rešavanjem sistema jednačina se nazivaju **kanonskim odgovorom na stres**. Model, dakle, ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_2 + \gamma_1 A_2 + c_1 w,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + \gamma_2 A_1 + c_2 w,$$

ili sažetije zapisan kao

$$\dot{x} = Ax + b + cw,$$

gde je A matrica dimenzije 2×2

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha_1 & \beta_1 \\ \beta_2 & -\alpha_2 \end{pmatrix},$$

dok su b i c dvodimenzioni vektori

$$b = \begin{pmatrix} \gamma_1 A_2 \\ \gamma_2 A_1 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Ukoliko $\dot{x}$ zamenimo sa sx , pri čemu s predstavlja operator diferenciranja

$$s = \frac{d}{dt},$$

dobija se

$$sx = Ax + b + cw.$$

Rešenje prethodne jednačine po x je

$$x = (sI - A)^{-1}b + (sI - A)^{-1}cw, \quad (4.1)$$

gde je I jedinična matrica imenzije 2×2

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Prvi deo jednačine (4.1) opisuje efekat zaljubljenosti na šta nam ukazuje pojavljivanje koeficijenta b , dok drugi deo predstavlja uticaj spoljašnjeg stresa. Kako je cilj izučavanje uticaja stresa na ljubavni par, ubuduće će biti posmatrana samo jednačina (samo drugi deo jednačine)

$$x = (sI - A)^{-1}cw.$$

Kako je inverzna matrica $(sI - A)^{-1}$ jednaka

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \text{adj}(sI - A),$$

potrebno je naći determinantu i adjungovanu matricu matrice $sI - A$.

Matrica $sI - A$ ima oblik

$$\begin{pmatrix} s + \alpha_1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & s + \alpha_2 \end{pmatrix}.$$

S obzirom na njen oblik, dobija se da je

$$\det(sI - A) = (s + \alpha_1)(s + \alpha_2) - \beta_1\beta_2 = s^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)s + \alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2,$$

kraće označeno sa $d(s)$, dok je adjungovana matrica matrice $sI - A$ jednaka

$$\begin{pmatrix} s + \alpha_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & s + \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

Konačno se dobija da je

$$(sI - A)^{-1} = (d(s))^{-1} \begin{pmatrix} s + \alpha_2 & \beta_1 \\ \beta_2 & s + \alpha_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d(s))^{-1}(s + \alpha_2) & (d(s))^{-1}\beta_1 \\ (d(s))^{-1}\beta_2 & (d(s))^{-1}(s + \alpha_1) \end{pmatrix}.$$

Sada se dobija da je

$$\begin{aligned} (sI - A)^{-1}c &= \begin{pmatrix} s + \alpha_1 & -\beta_1 \\ -\beta_2 & s + \alpha_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (d(s))^{-1}(s + \alpha_2) & (d(s))^{-1}\beta_1 \\ (d(s))^{-1}\beta_2 & (d(s))^{-1}(s + \alpha_1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} (d(s))^{-1}(c_1s + c_1\alpha_2 + c_2\beta_1) \\ (d(s))^{-1}(c_2s + c_2\alpha_1 + c_1\beta_2) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ukoliko se uvedu sledeće oznake

$$n_1(s) = c_1s + c_1\alpha_2 + c_2\beta_1,$$

$$n_2(s) = c_2s + c_2\alpha_1 + c_1\beta_2,$$

dobija se da je

$$(sI - A)^{-1}c = \begin{pmatrix} (d(s))^{-1}n_1(s) \\ (d(s))^{-1}n_2(s) \end{pmatrix}.$$

Iz toga se dobija da važi sledeće:

$$x_1 = (d(s))^{-1}n_1(s)w \quad \text{ i } \quad x_2 = (d(s))^{-1}n_2(s)w$$

ili

$$d(s)x_1 = n_1(s)w,$$

$$d(s)x_2 = n_2(s)w.$$

Uzimajući u obzir da je s operator diferenciranja, dobija se da x_1 i x_2 zadovoljavaju sledeću diferencijalnu jednačinu drugog reda (jer je $d(s)$ polinom drugog reda):

$$\ddot{x}_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{x}_1 + (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)x_1 = c_1\dot{w} + (c_1\alpha_2 + c_2\beta_1)w, ,$$

$$\ddot{x}_2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\dot{x}_2 + (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2)x_2 = c_2\dot{w} + (c_2\alpha_1 + c_1\beta_2)w.$$

Stoga, uticaj spoljašnjeg stresa na svakog pojedinca je rešenje datih diferencijalnih jednačina drugog reda jedinstveno određenih parom polinoma $(n_i(s), d(s))$.

Odnos ova dva polinoma je

$$G_1(s) = (d(s))^{-1}n_1(s) \quad \text{i} \quad G_2(s) = (d(s))^{-1}n_2(s).$$

Ove dve funkcije su poznate pod nazivom **funkcije transfera (prenosa)** i one su najčešće korišćeni alat za opisivanje linearnih sistema (pogledati [10]). Zapravo, dugoročno ponašanje kanonskog odgovora može biti izvedeno iz funkcija transfera.

Npr. step odgovor se dobija rešavanjem prethodne dve diferencijalne jednačine za $w = 1$ i $\dot{w} = 0$, odakle se dobija

$$x_1(\infty) = \frac{c_1\alpha_2 + c_2\beta_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2} = G_1(0),$$

$$x_2(\infty) = \frac{c_2\alpha_1 + c_1\beta_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2} = G_2(0).$$

Dakle, dugoročno osećanja repliciraju stres dok ne postanu konstantna zauvek i uticaj stresa (posmatran je samo drugi deo jednačine, kako je rečeno) postane jednak funkciji transfera računatoj za $s = 0$.

Odgovor na sinusoidalni stres

$$w(t) = W \sin(\omega t)$$

može takođe biti jednostavno određen iz funkcije transfera. Dokazuje se (pogledati [11]) da emocije oba pojedinca teže sinusoidnoj funkciji iste frekvencije stresa ω

$$x_1 = X_1(\omega)\sin(\omega t + \phi_1(\omega)), \quad x_2 = X_2(\omega)\sin(\omega t + \phi_2(\omega)) ,$$

pri čemu je $X_i(\omega)$ amplituda, dok se faza $\phi_i(\omega)$ naziva frekvencijski odziv i ove dve veličine mogu biti direktno izračunate iz funkcije transfera $G_i(s)$ za $s = i\omega$, tj.

$$X_1(\omega) = |G_1(i\omega)|W, \quad X_2(\omega) = |G_2(i\omega)|W,$$

$$\phi_1(\omega) = \arg G_1(i\omega), \quad \phi_2(\omega) = \arg G_2(i\omega).$$

Primećuje se da osećanja savršeno repliciraju (sa izvesnim zakašnjenjem) sinusoidni obrazac stresa.

Amplituda sinusoidnog odgovora zavisi od ω i zapravo teži ka nuli kada $\omega \rightarrow \infty$ jer $|n_i(i\omega)|$ teži ka beskonačnosti kao ω , dok $|d(i\omega)|$ teži ka beskonačnosti kao ω^2 . To znači da efekat spoljašnjeg stresa niskih frekvencija može biti detektovan u osećanjima, dok su oni sa visokim frekvencijama oslabljeni do te mere da ne mogu biti detektovani. Drugim rečima, par deluje kao niskopropusni filter.

Da bi se ilustrovalo značenje i korisnost frekvencijskog odziva, posmatraće se sledeći par koji za vremensku jedinicu ima mesec:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0.3 \\ 0.5 & -0.5 \end{pmatrix} \quad c = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Na osnovu gornjih formula, dobija se:

$$G_1(s) = (d(s))^{-1}n_1(s) = (s^2 + 1.5s + 0.35)^{-1}(s + 0.8),$$

$$G_2(s) = (d(s))^{-1}n_2(s) = (s^2 + 1.5s + 0.35)^{-1}(s + 1.5)$$

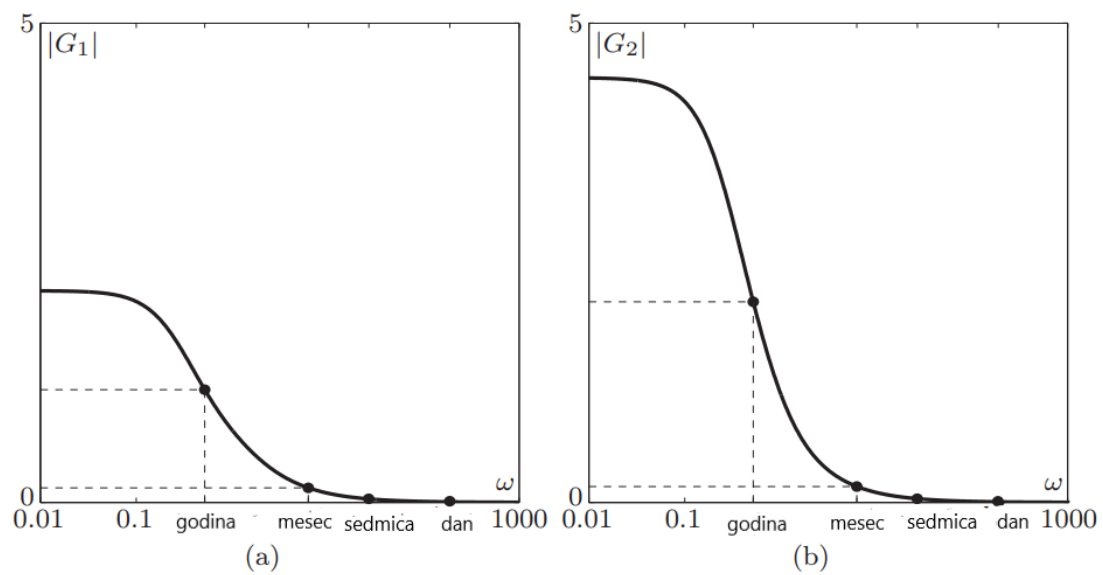
i

$$X_1(\omega) = |G_1(i\omega)|W = \sqrt{\frac{\omega^2 + 0.64}{\omega^4 + 1.55\omega^2 + 0.1225}}W,$$

$$X_2(\omega) = |G_2(i\omega)|W = \sqrt{\frac{\omega^2 + 2.25}{\omega^4 + 1.55\omega^2 + 0.1225}}W.$$

Na slici 4.3 su grafički predstavljeni frekvencijski odzivi $X_i(\omega)$.

Primećuje se da ukoliko se za period uzme dan ili sedmica (što odgovara $\omega = \frac{2\pi}{1} = 188.5$ i $\omega = \frac{2\pi}{7} = 26.93$), ovi frekvencijski odzivi postaju zanemarljivi do te mere da ne mogu biti detektovani, dok mesečni i godišnji periodi (koji odgovaraju $\omega = 2\pi = 6.28$ i $\omega = 2\pi 12 = 0.52$) moraju biti uzeti u obzir jer oni utiču na osećanja.



Slika 4.3: Frekvencijski odzivi za: (a) prvu osobu; (b) drugu osobu

Dodatne emocionalne dimenzije

Svi parovi posmatrani do sada imali su samo ljubavnu dimenziju uzetu u obzir prilikom pravljenja modela iako ljubav nije jedina emocija koja može uticati na vezu i na njen kvalitet. U realnosti, skoro sve osobe imaju dodatne emocionalne dimenzije od kojih neke utiču na ljubavni odnos, npr. posao može veoma da utiče na razvoj odnosa (bilo pozitivno ili negativno), dok na neke dodatne emocionalne dimenzije može da utiče ljubavna sfera (npr. na inspiraciju).

Dakle, u većini slučajeva na vezu ne utiče samo ono što osećamo prema partneru nego tu postoje i dodatni faktori. Ukoliko dodatna emocionalna dimenzija nije pod uticajem ljubavne sfere, onda se ovaj slučaj svodi na prethodni jer je onda dodatna emocionalna dimenzija ekvivalentna izvoru spoljašnjeg stresa. S druge strane, ako ti dodatni faktori utiču na ljubavni faktor, dok i na njih utiče faktor ljubavi, ponašanje ljubavnog para može biti daleko kompleksnije. Ovakvi modeli zahtevaju upotrebu tri (ili više) obične diferencijalne jednačine. Kod nekih parova ove vrste dodatne dimenzije imaju destabilišući faktor i kod njih može doći do pojave haosa, dok efekat spoljašnjeg faktora može biti i stabilišući. Tipičan primer takvih parova jesu ljubavne veze između pesnika. Oni (pesnici, umetnici) su odličan primer osoba sa više emocionalnih dimenzija. Nije redak slučaj da oni inspiraciju dobijaju iz ljubavi ili zaljubljenosti, a ni da postanu manje zainteresovani za partnera kada su inspirisani.

Naravno, pesnici nisu jedine individue sa takvim ljubavnim ponašanjem. Njima mogu da se pridruže i ostali umetnici, kao i naučnici, političari i svi ostali koji se bave kreativnim profesijama.

Dosadašnji model se sastojao od dve obične diferencijalne jednačine i imao je sledeći oblik:

$$\dot{x} = f(x),$$

pri čemu $x = (x_1, x_2)$ predstavljaju osećanja pojedinaca, odnosno njihovu ljubavnu dimenziju.

Svaka osoba može imati nekoliko dodatnih dimenzija označenih varijablama $z_i^{(1)}, z_i^{(2)}, z_i^{(3)} \dots$, pri čemu $i = 1$ označava prvog, a $i = 2$ drugog partnera, dok (j) predstavlja j -tu dodatnu dimenziju. Radi jednostavnosti i lepše notacije, nadalje će biti pretpostavljeno da svaka osoba ima samo jednu dodatnu emocionalnu dimenziju, označenu sa z_i . U tom slučaju će svaku osobu karakterisati ne samo ljubav prema partneru, nego i dodatna dimenzija, tj. par (x_i, z_i) . Ukoliko sve emocije međusobno interaguju (na osećanja utiče dodatna dimenzija, ali i na dodatnu dimenziju utiču osećanja), model ima sledeću formu:

$$\dot{x} = f(x, z),$$

$$\dot{z} = g(x, z),$$

dok model u kome dodatna dimenzija ne zavisi od ljubavnog faktora ima sledeći oblik:

$$\dot{x} = f(x, z),$$

$$\dot{z} = g(z)$$

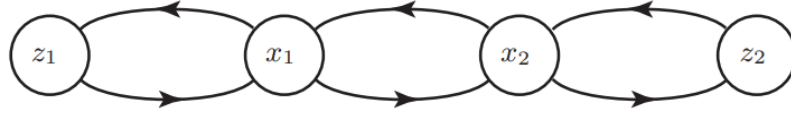
i on predstavlja samo specijalni slučaj modela razmatranog u prethodnom odeljku (stresori iz spoljnog sveta). Iz tog razloga će se nadalje razmatrati samo prvi model, tj. onaj kod koga je dodatna dimenzija pod uticajem ljubavnog faktora.

Ipak, radi izbegavanja kompleksnosti, razmatraće se samo specijalan slučaj u kom dodatna emocionalna dimenzija utiče na ljubavni faktor i na nju utiče ljubavni faktor samo iste osobe. Stoga, model ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, z_i), \quad i = 1, 2,$$

$$\dot{z}_i = g_i(x_i, z_i), \quad i = 1, 2.$$

Ovo i nije toliko restriktivna pretpostavka jer su međusobna interagovanja između dodatnih emocionalnih dimenzija različitih osoba veoma retka.



Slika 5.1: Graf uticaja prikazan na paru, pri čemu svaki pojedinac ima jednu dodatnu emocionalnu dimenziju

5.1 Primer

Sada će biti posmatrana veza između dve nesigurne i subjektivne umetničke duše koje postaju manje zainteresovane za partnera u naletima inspiracije, toliko da čak postanu platoničari. Takođe, njihova inspiracija težiće ka nuli ako nema ljubavi. Model sada ima sledeći oblik

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + (R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2) \frac{1}{1 + \delta_1 z_1}, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + (R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1) \frac{1}{1 + \delta_2 z_2}, \\ \dot{z}_1 &= \epsilon_1 (\mu_1 x_1 - z_1), \\ \dot{z}_2 &= \epsilon_2 (\mu_2 x_2 - z_2),\end{aligned}$$

pri čemu su $R_i^L(x_j)$ prvo rastuće, a potom opadajuće funkcije, a koeficijenti pristrasnosti b_i^A pozitivni jer su naši umetnici nesigurni i subjektivni u svojoj ljubavi. Parametar δ_i pokazuje u kojoj meri inspiracija z_i oslabljuje ljubavne faktore osobe i , dok parametri ϵ_i i μ_i karakterišu dinamiku inspiracije.

Zapravo, inverzna vrednost parametra ϵ_i je vremenska konstanta T_i koja označava vremenski interval za koji eksponencijalno opadajuća inspiracija opadne tačno $e = 2.71828$ puta ukoliko nije podržana ljubavlju. Dakle, ako je $x_i = 0$, dobija se $\dot{z}_i = -\epsilon_i z_i$, odakle sledi da je $z_i(t) = z_i(0)e^{-\frac{t}{T_i}}$, dok parametar μ_i predstavlja faktor konverzije ljubavi u inspiraciju.

Ukoliko nema oslabljenja ljubavnih faktora usled naleta inspiracije, tj. ukoliko je $\delta_1 = \delta_2 = 0$, prve dve jednačine se poklapaju sa već razmatranim modelom. U tom slučaju je poznato da će zaljubljeni umetnici imati uspone i padove u njihovoj ljubavi.

Empirijskim posmatranjem se došlo do sledeće konkretizacije modela:

$$R_1^L(x_2) = \beta_1 k_1 x_2 e^{-(k_1 x_2)^{n_1}}, \quad R_2^L(x_1) = \beta_2 k_2 x_1 e^{-(k_2 x_1)^{n_2}},$$

$$B_1^A(x_1) = \frac{x_1^{2m_1}}{x_1^{2m_1} + \sigma_1^{2m_1}}, \quad B_2^A(x_2) = \frac{x_2^{2m_2}}{x_2^{2m_2} + \sigma_2^{2m_2}}$$

i fiksiraju se parametri:

$$\alpha_1 = 0.36, \quad k_1 = 0.08, \quad n_1 = 1, \quad \beta_1 = 0.75, \quad A_1 = 0.1, \quad \sigma_1 = 1, \quad m_1 = 4, \quad \gamma_1 = 1,$$

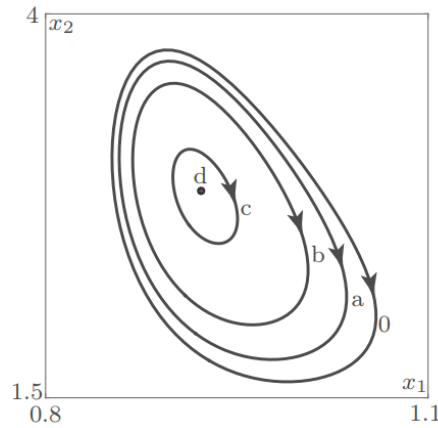
$$b_1^A = 2.9, \quad \mu_1 = 0.1, \quad \epsilon_1 = 0.1,$$

$$\alpha_2 = 0.2, \quad k_2 = 1.5, \quad n_2 = 4, \quad \beta_2 = 10.66, \quad A_2 = 0.1, \quad \sigma_2 = 1, \quad m_2 = 4, \quad \gamma_2 = 1,$$

$$b_2^A = 1, \quad \mu_2 = 0.1, \quad \epsilon_2 = 0.1.$$

Parametri δ_1 i δ_2 nisu fiksirani u ovom trenutku. Već je viđeno da ukoliko se uzme $\delta_1 = \delta_2 = 0$, ovaj model ima granične cikluse u prostoru (x_1, x_2, z_1, z_2) . Stoga, pogodnim algoritmom, ovi granični ciklusi mogu biti nastavljeni duž bilo koje prave iz centra parametarskog prostora (δ_1, δ_2) , npr. duž prave $\delta_1 = \delta_2$.

Tačnije, krenuvši od bilo koje početne tačke $(x_1(0), x_2(0), z_1(0), z_2(0))$ ciklusa za kog važi $\delta_1 = \delta_2 = 0$, može se izvesti simulacija za model u slučaju $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, pri čemu δ uzima male vrednosti. Rezultat ove simulacije je malo drugačiji granični ciklus u četvorodimenzionom prostoru koji može poslužiti za nove početne uslove $(x_1(0), x_2(0), z_1(0), z_2(0))$ za novu simulaciju, samo za malo veću vrednost parametra δ . Tako se ove simulacije mogu ponavljati, pri čemu se u svakom koraku pomalo uvećava vrednost parametra δ . Rezultat je niz zatvorenih trajektorija, čije su projekcije u dvodimenzionalnom prostoru (x_1, x_2) prikazane na slici 5.2.



Slika 5.2: Projekcija zatvorenih trajektorija za različite vrednosti parametra δ_i

Činjenica da se ovi granični ciklusi potpuno skupljaju za $\delta = 0.157$, ukazuje na postojanje

Hopfove bifurkacije za tu vrednost parametra δ .

Takva Hopfova bifurkacija formalnije može biti detektovana računanjem sopstvenih vrednosti Jakobijeve matrice u tački ekvilibrijuma za $\delta_1 = \delta_2 = \delta$. Nakon malo sređivanja, dobija se da je Jakobijeva matrica početnog sistema diferencijalnih jednačina sledećeg oblika:

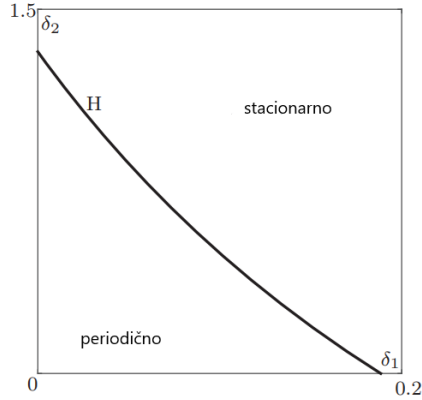
$$J = \begin{pmatrix} -\alpha_1 + \frac{\gamma_1 A_2}{1+\delta z_1} \frac{dB_1^A}{dx_1} & \frac{dR_1^L}{dx_2} \frac{1}{1+\delta z_1} & \frac{\alpha_1 \delta x_1}{1+\delta z_1} & 0 \\ \frac{dR_2^L}{dx_1} \frac{1}{1+\delta z_2} & -\alpha_2 + \frac{\gamma_2 A_1}{1+\delta z_2} \frac{dB_2^A}{dx_2} & 0 & \frac{\alpha_2 \delta x_2}{1+\delta z_2} \\ \epsilon_1 \mu_1 & 0 & -\epsilon_1 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 \mu_2 & 0 & -\epsilon_2 \end{pmatrix}.$$

Kako dve dominantne sopstvene vrednosti matrice J variraju u zavisnosti od parametra δ ?

Ispostavlja se da za $\delta = 0$, ekvilibrijum postaje nestabilan jer za tako izabranu vrednost parametra δ , Jakobijeva matrica ima dve sopstvene vrednosti sa pozitivnim realnim delom i ekvilibrijum ostaje nestabilan do vrednosti $\delta = 0.157$ kada dve kompleksne sopstvene vrednosti presecaju imaginarnu osu. Za $\delta > 0.157$ svi realni delovi sopstvenih vrednosti Jakobijeve matrice postaju negativni pa je ekvilibrijum jedinstveni atraktor sistema. Dakle, za $\delta_1 = \delta_2 = 0.157$, u sistemu se javlja Hopfova bifurkacija (već je rečeno da se Hopfove bifurkacije javljaju kada su sopstvene vrednosti Jakobijeve matrice konjugovano kompleksne i one pređu iz poluprave kompleksne ravni sa negativnim realnim delom u polupravu kompleksne ravni sa pozitivnim realnim delom). Nakon što je to ustanovljeno, može se koristiti algoritam kontinuirane da se dobije Hopfova bifurkacijska kriva u prostoru (δ_1, δ_2) . Rezultat se može videti na slici 5.3.

Parovi čije vrednosti parametara δ_1 i δ_2 odgovaraju vrednostima ispod krive, imaju periodične uspone i padove u ljubavi, dok je za one čije su vrednosti odgovarajućih parametara iznad krive, jedini mogući ishod stacionaran režim.

Ova slika pokazuje da povećanjem parametara δ_1 i δ_2 (a oni su definisani kao mere oslabljenja ljubavi usled naleta inspiracije), turbulencija prisutna u ljubavnom odnosu posmatranog para postepeno slabi dok u potpunosti ne nestane. Drugim rečima, u ovom slučaju, inspiracija (dodatna dimenzija) ima stabilizujući faktor na vezu.



Slika 5.3: Hopfova bifurkacijska kriva koja razdvaja stacionarno ponašanje od periodičnog u prostoru (δ_1, δ_2)

5.2 Brze i spore varijable

Da bi se dobili isti rezultati kao iz prethodnog dela, ne postoji jednostavniji pristup osim ako neki specijalni uslovi ne sugerišu korišćenje aproksimativnih modela. Interesan je slučaj u kom varijable modela mogu biti podeljene u dve grupe: **brze i spore varijable**. U ovom slučaju, postoje dve mogućnosti: da inspiracija varira brže od osećanja ili pak da osećanja brže variraju. Nadalje će biti razmatran slučaj u kom inspiracija brže varira, odnosno onaj u kome je inspiracija brža varijabla. U tom slučaju apsolutna vrednost izvoda inspiracije $|\dot{z}_i|$ mora biti značajno veća od izvoda funkcije koja karakteriše osećanja. To se dešava ukoliko su parametri ϵ_i veliki. U tom slučaju inspiracija z_i brže teži ka $\mu_i x_i$ i model dobija sledeći oblik:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha_1 x_1 + (R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2) \frac{1}{1 + \delta_1 \mu_1 x_1}, \\ \dot{x}_2 &= -\alpha_2 x_2 + (R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1) \frac{1}{1 + \delta_2 \mu_2 x_2}.\end{aligned}$$

Ovaj model sastoji se od manjeg broja jednačina (manji red sistema) i on je dobra aproksimacija modela iz prethodnog dela u slučaju da su parametri ϵ_i dovoljno veliki. Opravdanje za ovakav pristup rešavanju zahteva primenu **teorije perturbacija** koja radi kompleksnosti ovde neće biti razmatrana. Kako je model sada postao dvodimenzioni, može se iskoristiti već poznati Bendiksonov kriterijum za ispitivanje prisutnosti (odsutnosti) graničnih ciklusa, od-

nosno periodičnih uspona i padova zaljubljenog para.

Divergencija ovog sistema je sledeća:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} f = & -\alpha_1 - \alpha_2 - (R_1^L(x_2) + (1 + b_1^A B_1^A(x_1))\gamma_1 A_2) \frac{\delta_1 \mu_1}{(1 + \delta_1 \mu_1 x_1)^2} - \\ & -(R_2^L(x_1) + (1 + b_2^A B_2^A(x_2))\gamma_2 A_1) \frac{\delta_2 \mu_2}{(1 + \delta_2 \mu_2 x_2)^2} + \\ & + \gamma_1 A_2 b_1^A \frac{dB_1^A}{dx_1} + \gamma_2 A_1 b_2^A \frac{dB_2^A}{dx_2}. \end{aligned}$$

Prva četiri dela (sabirka) formule su negativna, dok su poslednja dva pozitivna pa ništa ne može biti rečeno o znaku divergencije. Za velike vrednosti parametara μ_i , tj. za zaljubljene umetnike koje ljubav izuzetno inspiriše, treći i četvrti sabirci formule su zanemarljivi. U tom slučaju, znak divergencije se određuje analizirajući koeficijente zaborava α_i i delove $\gamma_i A_j b_i^A \frac{dB_i^A}{dx_i}$. Ukoliko su još i privlačnosti A_i obe osobe veoma niske (visoke), divergencija postaje negativna (pozitivna), pa na osnovu Bendiksonovog kriterijuma se zaključuje da ne postoje granični ciklusi u ovakvim parovima. Zaključak je, dakle, da u parovima kod kojih su parametri ϵ_i i μ_i visoki, tj. u parovima između umetnika koje ljubav inspiriše brzo i jako, ne postoje periodični usponi i padovi. U ovom delu neće biti opisivan dualni slučaj, odnosno slučaj u kom osećanja variraju brže od inspiracije. Dovoljno je reći da će u tom slučaju inspiracija predstavljati destabilizujući faktor.

Uža porodica

Izraz "uža porodica" koristi se za opisivanje osnovnog oblika porodice. Ovakva vrsta porodice obično se sastoji od supružnika (muža i žene) i njihove biološke ili usvojene dece. Ovaj koncept porodice razvio se kao dominantan model porodičnih odnosa u mnogim društvima, posebno u zapadnom svetu. Termin "uža porodica" prvi put se počeo koristiti tokom 1940-ih i 1950-ih godina u Sjedinjenim Američkim Državama.

U ovom delu će biti prikazan model jedne takve porodice (pogledati i [12]). Posmatra se porodica koja se sastoji od tri člana - majke, oca i jednog deteta. Ukoliko se uvedu sledeće oznake

- $B(t)$ ljubav koju dete oseća prema ocu,
- $F(t)$ ljubav koju otac oseća prema detetu i ženi,
- $M(t)$ ljubav koju majka oseća prema detetu i mužu,
- $B_1(t)$ ljubav koju dete oseća prema majci,

model ima oblik:

$$\frac{dB}{dt} = aB + b(F - M)(c - (F - M)) + \gamma_1,$$

$$\frac{dF}{dt} = eF + gB(h - B) + jM + \gamma_2,$$

$$\frac{dM}{dt} = kM + mB_1(n - B_1) + pF + \gamma_3,$$

$$\frac{dB_1}{dt} = aB_1 + b(M - F)(d - (M - F)) + \gamma_4.$$

pri čemu

a, b, c, d karakterišu detetov emocionalni stil,

e, g, h, j karakterišu očev emocionalni stil,

k, m, n, p karakterišu majčin emocionalni stil,

$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ predstavljaju konstante privlačnosti.

Za rešavanje sistema potrebno je još zadati i početne uslove.

Ukoliko se, sa željom modeliranja neke realne situacije, fiksiraju sledeći koeficijenti

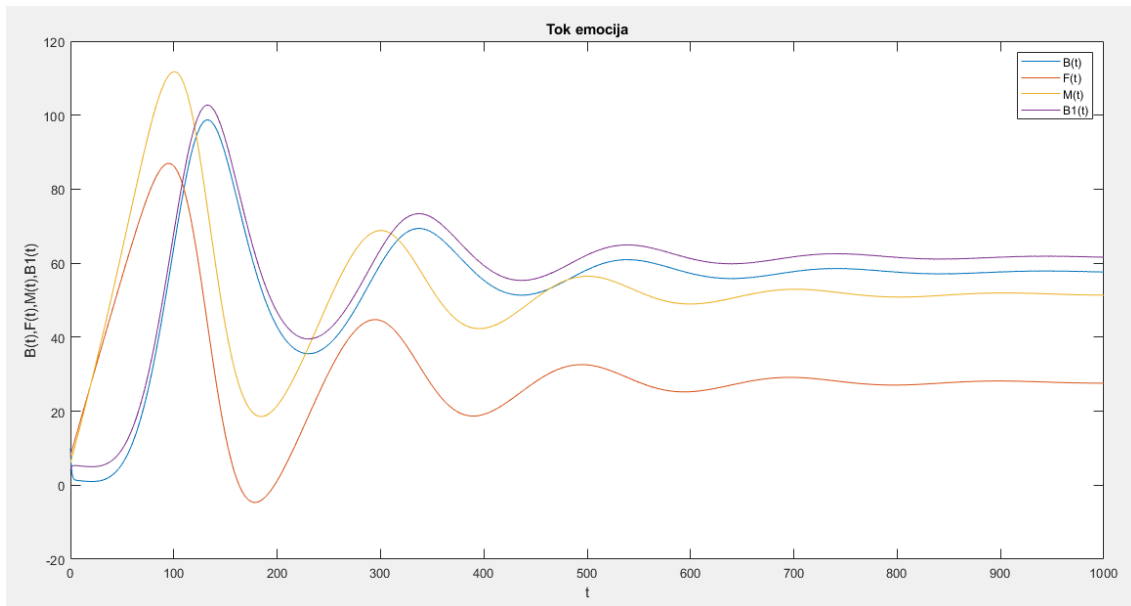
$$a = -1, \quad b = -0.1, \quad c = 0.0025, \quad d = 0, \quad e = -0.002, \quad g = 0.0003, \quad h = 0.002, \quad j = 0.001,$$

$$k = 0, \quad m = 0.0003, \quad n = 0.001, \quad p = 0.005, \quad \gamma_1 = 1, \quad \gamma_2 = 1, \quad \gamma_3 = 1, \quad \gamma_4 = 5$$

i postave početni uslovi:

$$B(0) = 10, F(0) = 8, M(0) = 6, B_1(0) = 4,$$

dobija se da tok emocija ima sledeći oblik:



Slika 6.1: Tok emocija $B(t), F(t), M(t), B_1(t)$

Primećuje se da sve emocije na početku osciluju i to tako da su pozitivne, izuzev jednog trenutka u kom očeve emocije nakratko padaju ispod nule. Nakon toga, emocije postaju konstantne i to takve da je najveća ljubav ona koju dete oseća prema majci.

Uticaj roditelja na romantičnu vezu

Porodične, prijateljske i ljubavne veze su najbliže i najbitnije stvari u životu skoro svakog pojedinca. Nije redak slučaj da na romantičnu vezu dva pojedinca utiču prijatelji ili roditelji koji predstavljaju bitan faktor u njihovim životima. Cilj ovog dela rada jeste ispitivanje roditeljskog uticaja na romantičnu vezu deteta, kao što se po naslovu da naslutiti. Pretpostavimo da imamo romantičnu vezu između muškarca čije su emocije označene sa R (Romea) i žene čije su emocije označene sa J (Julija) (pogledati i [13]). Model ljubavi koja je pod uticajem roditelja pomenutih aktera (Romea i Julije) ima sledeći oblik:

$$\frac{dR}{dt} = aR + bJ + F_R + M_R,$$

$$\frac{dJ}{dt} = cR + dJ + F_J + M_J,$$

$$\frac{dF_R}{dt} = eR,$$

$$\frac{dM_R}{dt} = fR,$$

$$\frac{dF_J}{dt} = gJ,$$

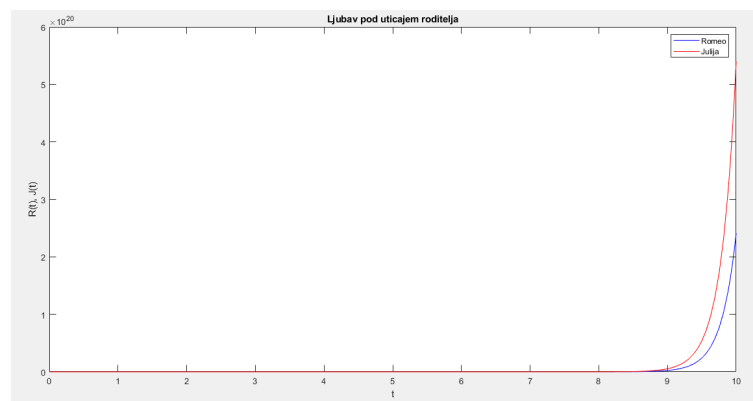
$$\frac{dM_J}{dt} = hJ.$$

Kao što se može videti, model se sastoji iz 6 promenljivih i 8 parametara, pri čemu je:

- R Romeova ljubav prema Juliji,
- J Julijina ljubav prema Romeu,

- F_R pozitivna ili negativna osećanja Romeovog oca u vezi sa Romeovom ljubavlju prema Juliji,
- M_R pozitivna ili negativna osećanja Romeove majke u vezi sa Romeovom ljubavlju prema Juliji,
- F_J i M_J se analogno definišu,
- Koeficijenti a, b, c, d karakterišu Romeove i Julijine osobine u ljubavnom odnosu (kao što je definisano u Strogacovom modelu),
- Parametar e predstavlja stepen (ne)zadovoljstva Romeovog oca Romeovom ljubavlju prema Juliji,
- Parametar f predstavlja stepen (ne)zadovoljstva Romeove majke Romeovom ljubavlju prema Juliji.
- Parametri g i h se analogno definišu za Julijine roditelje.

Ukoliko su Romeovi roditelji protivnici njegove veze sa Julijom, tj. ukoliko su koeficijent e i f negativni, evolucija njihove ljubavi je sledeća:

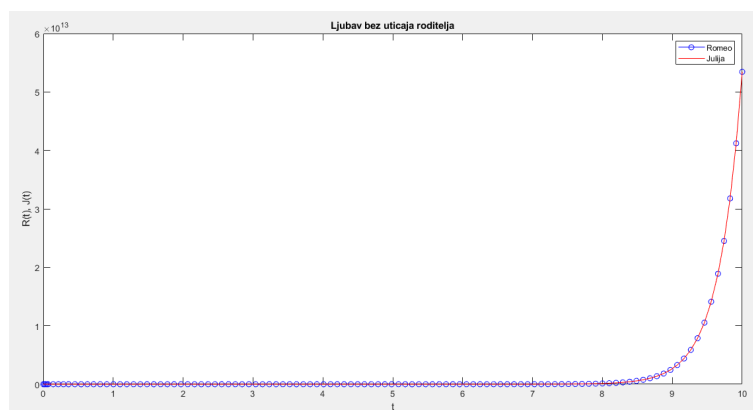


Slika 7.1: Situacija u kojoj su Romeovi roditelji protivnici veze

Uzeti su parametri $a=1, b=2, c=1, d=2, e=-2, f=-2, g=5, h=5$, dok vremenska osa predstavlja raspon u godinama. Na osnovu vrednosti koeficijenata a, b, c i d , zaključuje se da su i Romeo i Julija emotivni ljubavnici i tip ljubavnika će ostati nepromenjen do kraja ove sekcije. Kao

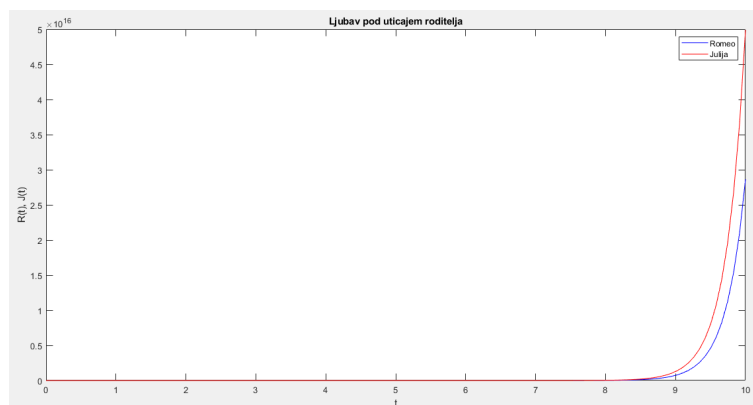
što se može primetiti, ljubav oba pojedinca eksponencijalno raste, dok Julijina ljubav prema Romeu u ovom slučaju raste brže.

Slučaj u kome se roditelji ne bi mešili u ljubavni odnos Romea i Julije, prikazan je na slici 7.2. Primećuje se da bi u ovom slučaju ljubav i Romea i Julije eksponencijalno rasla istom brzinom.



Slika 7.2: Situacija u kojoj roditelji nisu protivnici veze

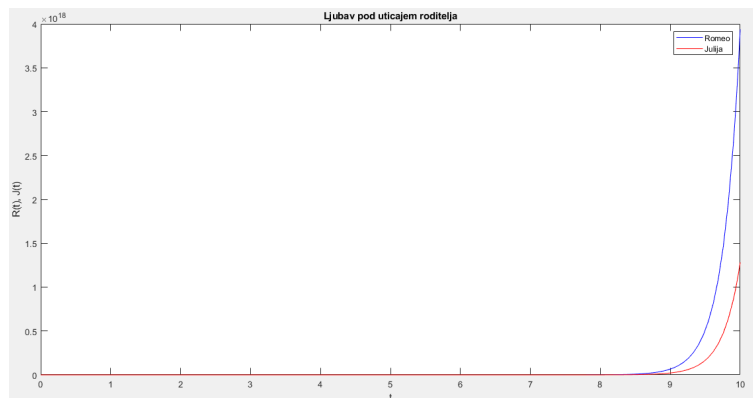
U slučaju da se samo Romeov otac protivi njegovoj ljubavi prema Juliji, evolucija ljubavi je sledeća:



Slika 7.3: Situacija u kojoj se samo Romeov otac protivi vezi

Vidi se da emocije ponovo eksponencijalno rastu i ponovo Romeove emocije sporije rastu, samo sada sa manjim zakašnjenjem jer sada postoji samo jedan protivnik ljubavi dvoje mladih (dok je u prethodnom slučaju broj protivnika bio jednak 2). Uzeti su parametri $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=2$, $e=-5$, $f=2$, $g=2$, $h=2$.

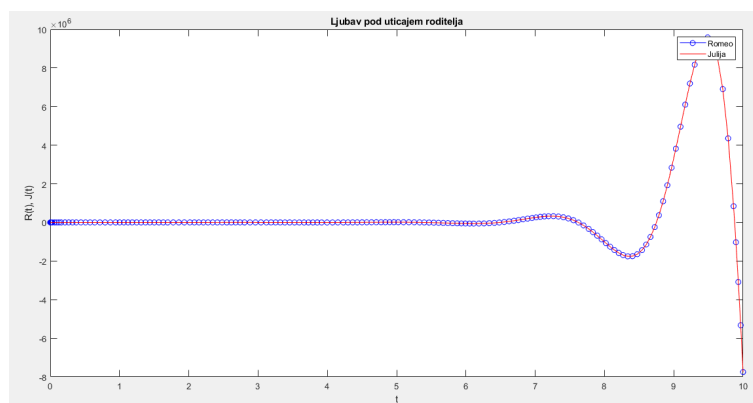
Ukoliko se sada pretpostavi da su Julijini roditelji oni koji se bune protiv ljubavne veze, evolucija ljubavi ima sledeći oblik:



Slika 7.4: Situacija u kojoj su Julijini roditelji protivnici veze

Vrednosti parametara su sada $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=2$, $e=5$, $f=5$, $g=-2$, $h=-2$. Ljubav Romea i Julije ponovo eksponencijalno raste, dok u ovom slučaju Romeova ljubav prema Juliji brže raste.

Sledeći slučaj je onaj u kome se roditelji oba pojedinca protive njihovoj ljubavi. Evolucija je sada sledeća:



Slika 7.5: Situacija u kojoj se roditelji oba pojedinca protive vezi

Vrednosti parametara su sada $a=1$, $b=2$, $c=1$, $d=2$, $e=-5$, $f=-5$, $g=-5$, $h=-5$. Primećuje se da u ovom slučaju ljubav oba pojedinca osciluje između ljubavi i mržnje a to je posledica jakog neslaganja roditelja obe strane sa ljubavnim životom (izborom) njihovog deteta.

Ljubavni trougao

U ovom delu rada, akcenat će biti na ispitivanju međusobnih odnosa osoba uključenih u ljubavni trougao. Termin **ljubavni trougao** potiče iz psihologije i odnosi se na situaciju u kojoj jedna osoba ima romantičnu ili emotivnu vezu sa druge dve osobe, dok te dve "druge" osobe mogu i ne moraju biti u međusobnoj emocionalnoj ili romantičnoj vezi. Ovakve vrste odnosa mogu biti vrlo složene i emocionalno izazovne jer se u njima mogu javiti različiti osećaji, rivalstva i konflikti. Često se u takvim vrstama veze javlja ljubomora i napetost među pojedincima uključenim u odnos.

Statistički podaci o ljubavnim trouglovima mogu biti izazovni za prikupljanje jer su ti odnosi često skriveni, tajni ili složeni za kvantifikaciju. Ipak, neki istraživači su se bavili temom i pružili neke uvide. Na primer, istraživanje provedeno u Sjedinjenim Američkim Državama pokazalo je da oko 20% ljudi priznaje da su barem jednom bili uključeni u ljubavni trougao ili da su bili deo takve situacije. Drugo istraživanje, sprovedeno u Velikoj Britaniji otkrilo je da oko 25% ljudi priznaje da su bili uključeni u ljubavni trougao ili su se susreli s takvom situacijom (pogledati i [14]).

Što se tiče sklonosti polova ka varanju, studije pokazuju da su zapravo i muškarci i žene podjednako skloni aferama, dok ima i onih koji veruju da su muškarci skloniji neverstvu.

Teme ljubavnog trougla su često zastupljene u različitim kontekstima, uključujući književnost, film, televiziju, pozorište i druge umetničke forme. Ova tema često privlači pažnju jer donosi složene emocionalne dinamike i dramatične situacije. Najpoznatiji filmovi u kojima je ljubavni trougao osnovni motiv su: *Titanic*(1997), *Gone with the Wind*(1939), *Casablanca*(1942), *The Notebook*(2004), *Twilight saga* (2008-2012), kao i mnogi drugi.

Najpoznatiji književni komadi u kojima je ljubavni trougao osnovni motiv su: *Romeo i Julija*

(Vilijem Šekspir), Ana Karenjina (Lav Nikolajevič Tolstoj), Sto godina samoće (Gabrijel Garsija Marquez), Razum i osećajnost (Dejn Ostin) i mnogi drugi, dok su najpoznatije opere sa ovakvim motivom Karmen (Žorž Bize), Evgenije Onjegin (Petar Ilić Čajkovski), Toska (Đakomo Pučini), Boem (Đakomo Pučini) i mnoge druge. Dakle, može se primetiti da je ova tema inspirisala mnoge umetnike stolicima unazad, kao i to da ova tema i do dan danas privlači pažnju velikog broja ljudi širom sveta.

8.1 Katalog trouglova

Postoje različite vrste trouglova, od ekstremnog Edipovog trougla do tzv. *ménages à trois*. Edipov trougao je tip trougla koji se odnosi na sukob koji se javlja kod dečaka u ranom detinjstvu, u kojem osećaju seksualnu privlačnost prema vlastitoj majci i osećaju rivalstvo prema svom ocu, dok je *ménages à trois* intimni odnos u kojem su prisutne tri osobe koje se međusobno emocionalno i seksualno povezuju. Takođe u klasičnim ljubavnim trouglovima postoje različite opcije kao što su: (ne)svestnost dve sporedne osobe o postojanju trougla, ljubomora i uticaj sporedne dve osobe na centralnu osobu itd. Sve u svemu, mnogo je mogućnosti i trebalo bi mnogo vremena i resursa da se svaka od njih opiše.

U ovom delu će biti razmatrane one vrste veza u kojima samo jedna osoba, npr. osoba 1, ima dva ljubavnika. Ta osoba se naziva **centralna**. Najjednostavniji je slučaj u kome nijedan od dva ljubavnika osobe 1 nije svestan postojanja drugog, tj. kada nijedan ljubavnik nije ugrožen postojanjem onog drugog. Kako osoba 1 u ovom slučaju ima osećanja prema oba ljubavnika, uvodimo promenljive x_{12} i x_{13} koje predstavljaju osećanja osobe 1 prema osobama 2 i 3 respektivno, dok osobe 2 i 3 imaju samo osećanja prema osobi 1, označena sa x_{21} , x_{31} . Stoga, ukoliko osoba 1 (ona sa dva ljubavnika) ni na koji način nije ugrožena njihovim postojanjem, model ima sledeći oblik:

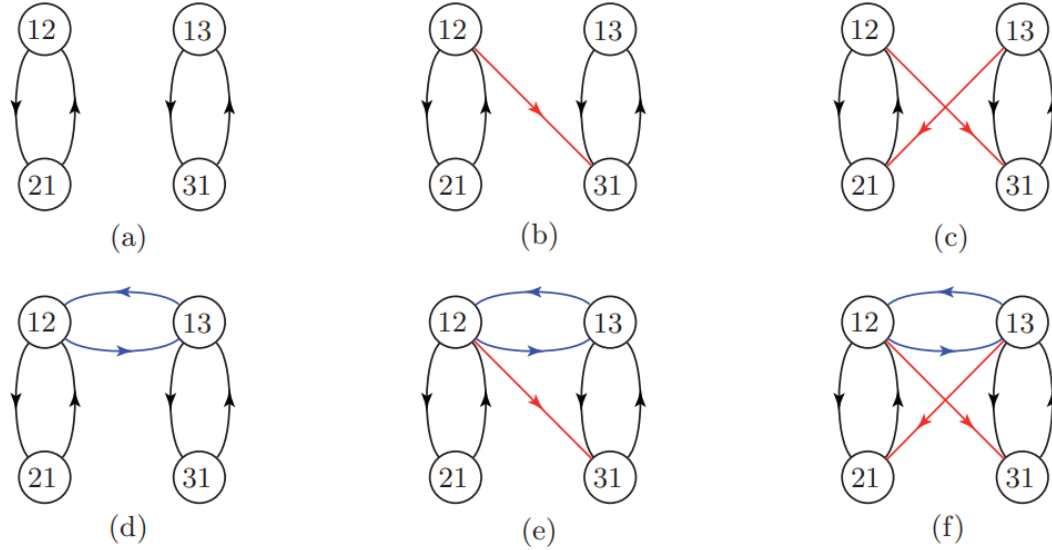
$$\dot{x}_{12} = f_{12}(x_{12}, x_{21}),$$

$$\dot{x}_{21} = f_{21}(x_{21}, x_{12}),$$

$$\dot{x}_{13} = f_{13}(x_{13}, x_{31}),$$

$$\dot{x}_{31} = f_{31}(x_{31}, x_{13}).$$

Prve dve jednačine su nepovezane sa druge dve i one opisuju vezu između osoba 1 i 2, dok druge dve jednačine opisuju vezu između osoba 1 i 3, tj. formirala su se dva para od kojih se svaki može opisati prethodno razmatranim modelima.

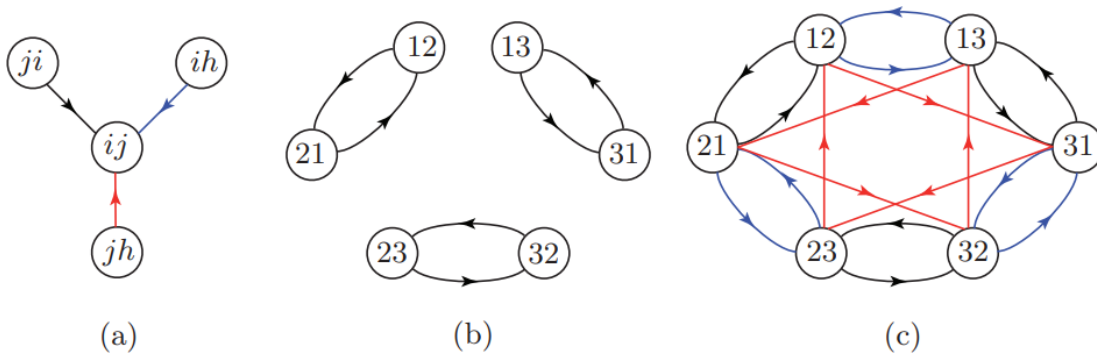


Slika 8.1: Graf koji predstavlja ljubavni trougao u kom samo jedna osoba (osoba 1) ima dva ljubavnika. Čvor (ij) predstavlja interesovanje x_{ij} osobe i za osobu j . Prisustvo luka iz čvora (hk) do čvora (ij) označava da su osećanja x_{ij} pod direktnim uticajem osećanja x_{hk} . Crni lukovi predstavljaju reakcije na ljubav, plavi predstavljaju unutrašnji sukob pojedinca 1, a crveni ljubomoru. Iz tog razloga, ovi grafici se tumače kao (a) nema konflikta, nema ljubomore; (b) nema konflikta, osoba 3 je ljubomorna; (c) nema konflikta, osobe 2 i 3 su ljubomorne; (d) konflikt, nema ljubomore; (e) konflikt, osoba 3 je ljubomorna; (f) konflikt, osobe 2 i 3 su ljubomorne

Dalje, ukoliko je npr. osoba 3 svesna postojanja ljubavnog trougla i oseća ljubomoru zbog postojanja takve vrste veze, osećanja x_{31} postaju zavisna i od x_{12} , tj. od osećanja centralne osobe (osobe 1) prema osobi 2 (drugom ljubavniku). To znači da je u prethodnom modelu potrebno modifikovati poslednju jednačinu dodavanjem argumenta x_{12} funkciji f_{31} . Takva situacija odgovara onoj sa grafa 8.1(b), dok je situacija u kojoj su oba ljubavnika svesna prisustva onog drugog i osećaju ljubomoru predstavljena na grafu 8.1(c). Zapravo, u većini slučajeva centralna osoba ne uspeva da održi ove dve veze izolovanim i onda dolazi do ljubomore među

ljubavnicima.

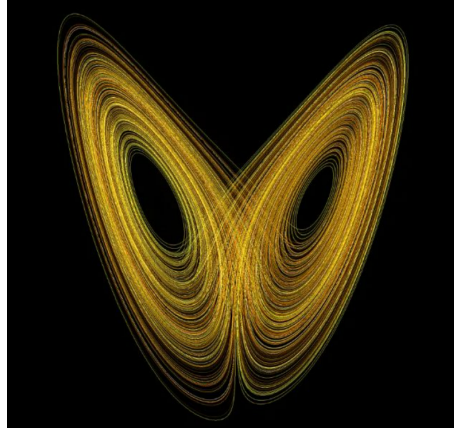
Najkomplikovaniji slučaj od predstavljenih je onaj koji odgovara grafu 8.1(f). Tada ljubavni trougao utiče i na centralnu osobu (ona oseća unutrašnji sukob), kao i na obe sporedne osobe (oni osećaju ljubomoru). Još je komplikovaniji slučaj već pomenute veze *ménages à trois*. U takvoj vrsti ljubavnog trougla je svaka od tri osobe uključena u romantične (seksualne) odnose sa preostale dve. U tom slučaju svaka osoba i ima osećanja prema osobi j (označena sa x_{ij}) i prema osobi h (označena sa x_{ih}), što je ukupno 6 različitih varijabli koje opisuju osećanja. To znači da se graf koji opisuje takvu vrstu veze sastoji od 6 čvorova.



Slika 8.2: Grafovi koji prikazuju slučaj ljubavnog trougla u kom svaki pojedinac ima dva ljubavnika (*ménages à trois*). Čvor (ij) predstavlja interesovanje x_{ij} osobe i za osobu j . Prisustvo luka od čvora (hk) do čvora (ij) označava da su osećanja x_{ij} pod direktnim uticajem osećanja x_{hk} . Crni, plavi i crveni lukovi označavaju reakciju na ljubav, konflikt i ljubomoru, respektivno. Iz tog razloga: (a) sva tri luka uviru u isti čvor; (b) ekstremni slučaj - nema konflikta, a ni ljubomore; (c) svaka osoba je u konfliktu i oseća ljubomoru

8.2 Nepredvidivost

Nepredvidivost je svojstvo prisutno u haotičnim sistemima. Haotični sistemi su osetljivi na početne uslove, što znači da iako se mogu činiti vrlo sličnima na početku, male promene u početnim uslovima mogu rezultirati velikim razlikama u konačnom ishodu ili ponašanju sistema. Ovo se naziva efekat leptira, gde mala promena na jednom mestu može imati ogroman uticaj na rezultate na drugom mjestu.



Slika 8.3: Efekat leptira

Nepredvidivost u haotičnim sistemima proizlazi iz njihove kompleksne dinamike, gde se čak i manje promene u ulaznim podacima ili parametrima sistema mogu eksponencijalno povećavati tokom vremena i dovesti do potpuno različitih ishoda. Zbog toga je teško unapred predvideti buduće stanje ili ponašanje haotičnog sistema čak i sa iole upotrebljivom tačnošću (a kamoli visokom).

Stoga, da bi se pokazalo da je sistem nepredvidiv, treba pokazati da je haotičan. Za te potrebe je dovoljno ispitati pozitivnost **najvećeg Ljapunovljevog eksponenta (Largest Lyapunov Exponent - LLE)**. Ljapunovljev eksponent je koncept iz teorije haosa koji se koristi za kvantitativnu karakterizaciju osetljivosti haotičnih sistema na početne uslove. Ovaj eksponent pruža meru brzine divergencije ili konvergencije susednih putanja u faznom prostoru haotičnog sistema. Ljapunovljev eksponent može biti pozitivan, negativan ili nula. **Pozitivan Ljapunovljev eksponent** ukazuje na eksponencijalnu divergenciju susednih putanja, što znači da je sistem osetljiv na početne uslove i da će male promene u početnim uslovima rezultirati značajnim promenama u budućem ponašanju sistema. **Negativan Ljapunovljev eksponent** ukazuje na eksponencijalnu konvergenciju susednih putanja, što znači da se susedne putanje približavaju jedna drugoj tokom vremena. **Nula Ljapunovljev eksponent** ukazuje na neutralnost i odsutnost velike osetljivosti na početne uslove. Detaljnije o teoriji haosa, kao i Ljapunovljevom eksponentu videti u [7] i [8].

Dinamički sistem modeliran pomoću n običnih diferencijalnih jednačina ima n Ljapunovljevih eksponenata i da bi se ispitala osetljivost sistema na početne uslove, razmatra se najveći od

njih.

8.3 Kejt, Džuls, Džim

U ovom delu će biti predstavljen model koji opisuje vezu nalik onoj iz romantične Roché-ove (Henri-Pierre Roché) drame pod imenom "Jules et Jim" po kojoj je snimljen i istoimeni film (François Truffaut). Film prati ljubavni trougao između devojke po imenu Kejt i momaka Džulsa i Džima. Ovaj Roché-ov roman je interesantan zbog dve stvari. Prva stvar je da je ovaj model zapravo autobiografski, a druga stvar je ta što ovaj model prenosi i Roché-ovu centralnu filozofsku ideju koja kaže da ne treba da pokušavamo da posedujemo ljude koje volimo, nego da im damo slobodu da se uključe i u druge odnose. Ova ideja poznata je pod nazivom hipoteza o **slobodnoj ljubavi**. Verovatno je ova ideja i razlog velikog uspeha pomenutog romana, kao i istoimenog filma.

Pretpostavka je, dakle, da postoji osoba ženskog pola pod imenom Kejt i dva prijatelja Džim i Džuls koji u isto vreme upoznaju Kejt. Taj susret desio se u Parizu par godina pre Prvog svetskog rata. Svi se upoznaju u isto vreme i sva početna osećanja imaju vrednost jednaku nuli. Postoji nekoliko kvalitativnih odlika pomenutog romana koje u velikoj meri oslikavaju pomenutu ideju o slobodnoj ljubavi:

- U prvih par godina je Kejt više zainteresovana za Džulsa (čak se i udaje za njega). Ukoliko se devojci (Kejt) pridruži broj 1, Džulsu broj 2, a Džimu broj 3, na osnovu rečenog se dobija $x_{12} > x_{13}$.
- Na samom početku priče Kejt je ipak bila više zainteresovana za Džima, ali je na dalji razvoj uticalo Džimovo propuštanje prvog zajedničkog sastanka sa Kejt. Ipak, može se reći da je Džulsova privlačnost tada bila slabija od Džimove ($A_2 < A_3$). Dakle, u prvih nekoliko dana, devojka je gajila više osećanja prema Džimu nego prema Džulsu, ali nakon samo nekoliko nedelja se to okrenulo i ona se više zainteresovala za Džulsa (toliko da se čak i udala za njega).
- Padovi osećanja devojke prema Džulsu, donosili su i padove interesovanja Džulsa prema devojci (Kejt).

- Pad interesovanja Džima za Kejt donosio je pad interesovanja Kejt za Džima.
- Džimovi usponi i padovi osećanja bili su češći nego kod suparnika.

Za ovakav ljubavni trougao, tj. onaj koji bi se temeljio na hipotezi o slobodnoj ljubavi, model bi imao pojednostavljen oblik (pogledati [2] i [15]). Ako se sa x_1 označi intenzitet Kejtinih osećanja, a sa x_2 Džulsovih, model između Kejt i Džulsa bio bi sledeći:

$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + R^L(x_2) + (1 + S(x_1))\gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha_2 x_2 + \beta_2 x_1 + (1 - P(x_2))\gamma_2 A_1.$$

Sada, ako se sa x_3 označi intenzitet Džimovih osećanja, model između Kejt i Džima bio bi sledeći:

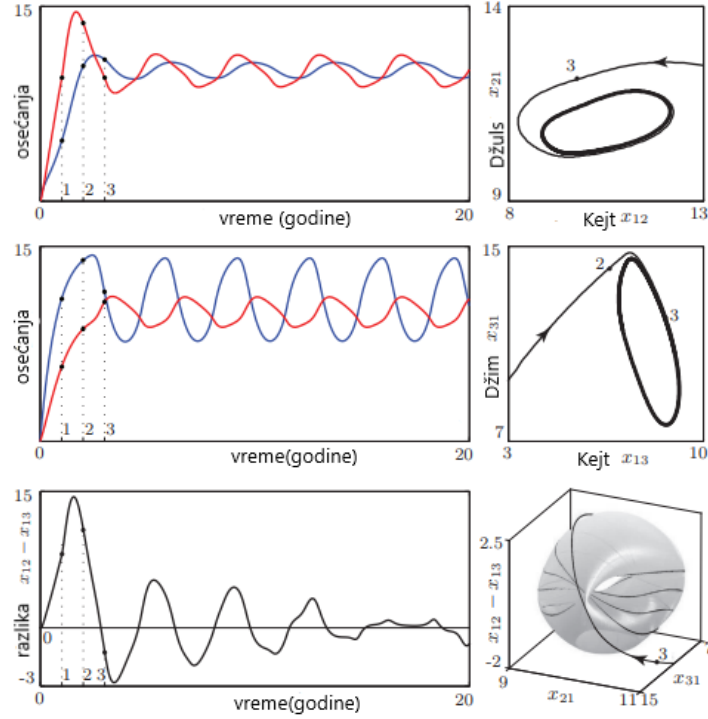
$$\dot{x}_1 = -\alpha_1 x_1 + \beta_1 x_3 + (1 + S(x_1))\gamma_1 A_3,$$

$$\dot{x}_3 = -\alpha_3 x_3 + R^L(x_1) + \gamma_3 A_1.$$

Primećuje se da u ovom slučaju dolazi do formiranja dva para - Kejt i Džuls (par 1) i Kejt i Džim (par 2), tako da se ova dva para mogu ispitivati zasebno. Ono što se takođe može primetiti je da su faktori R^L i R^A u ovom slučaju različito modelirani za Džulsa i Džima, a prilikom modeliranja Kejtinih osećanja prema Džulsu i Džimu se razlikuje faktor R^L . Razlog je taj što je Džuls siguran ljubavnik i platoničar, pa je iz tog razloga njegova reakcija na ljubav (R^L) linearna, tj. $R^L(x_1) = \beta_2 x_1$, a kako je on platoničar, njegov faktor R^A ima odgovarajući oblik. S druge strane, Džim je nesiguran i nepristrasan ljubavnik, pa njemu odgovarajući faktori R^L i R^A imaju dati oblik ($R^L(x_1)$ će biti nelinearna funkcija, a R^A ne zavisi od osećanja). Razlog razlike u modeliranju Kejtinih osećanja je taj što je ona nesigurna u odnosu sa Džulsom, a sigurna u odnosu sa Džimom.

U ovom radu će biti prikazani samo rezultati za model koji se temelji na hipotezi o slobodnoj ljubavi, bez neke detaljnije analize samog modela. Opis odgovarajućih koeficijenata i funkcija biće prikazan u nastavku. Grafički prikaz (za pogodno izabrane koeficijente i funkcije) koji odgovara ovakvom modelu se može videti na slici 8.4.

Pored gore pobrojanih kvalitativnih osobina, postoje i dve kvantitativne osobine koje se ne poklapaju sa hipotezom o slobodnoj ljubavi:



Slika 8.4: Ljubavni trougao zasnovan na hipotezi o slobodnoj ljubavi

- U drami je Kejt za 20 godina trajanja ovog ljubavnog trougla partnera promenila 7 puta, dok je u modelu slobodne ljubavi to učinila 9 puta.
- Hronologija promene partnera iz romana se ne poklapa sa onom koja bi odgovarala hipotezi o slobodnoj ljubavi,

kao i jedna kvalitativna:

- Ovaj ljubavni trougao je turbulentan i nepredvidiv.

Da bi se zadovoljile poslednje tri osobine, potrebno je olabaviti ideju o slobodnoj ljubavi. Tako se dobija model ljubavnog trougla (K-Dž-Dž) u kom su dozvoljene slabe smetnje između dva prvobitna para koja bi postojala ako bi važila ideja o slobodnoj ljubavi.

U ovom slučaju, model ima sledeći oblik:

$$\dot{x}_{12} = -\alpha_1 e^{\epsilon(x_{13}-x_{12})} x_{12} + R_{12}^L(x_{21}) + (1 + S(x_{12})) \gamma_1 A_2,$$

$$\dot{x}_{13} = -\alpha_1 e^{\epsilon(x_{12}-x_{13})} x_{13} + \beta_{13} x_{31} + (1 + S(x_{13})) \gamma_1 A_3,$$

$$\dot{x}_{21} = -\alpha_2 x_{21} + \beta_2 x_{12} e^{\delta(x_{13}-x_{12})} + (1 - P(x_{21}))\gamma_2 A_1,$$

$$\dot{x}_{31} = -\alpha_3 x_{31} + R_{31}^L(x_{13})e^{\delta(x_{13}-x_{12})} + \gamma_3 A_1.$$

Menjajući na ovaj način hipotezu o slobodnoj ljubavi, može se očekivati da će ovakav model dovesti do nepredvidivosti.

Pretpostavka je da se u svakom trenutku Kejt sporije „hladi“ od osobe prema kojoj gaji više osećanja. U modelu se to postiže množeći njen koeficijent zaborava (u odnosu na model slobodne ljubavi) α_1 faktorom manjim od 1 u jednačini za partnera za kog je više zagrejana, a većim od 1 u suprotnom. Takođe, da se model ne bi previše razlikovao od modela slobodne ljubavi, parametar konflikta ϵ uzimaće male i pozitivne vrednosti. Još jedna pretpostavka je i da je Džuls popustljiv prema Džimu - on je srećan kada je Kejt sa Džimom jer je shvatio da to i nju čini srećnom. U modelu se to postiže množenjem njegove reakcije na Kejtinu ljubav faktorom većim od 1 kada je ona više zainteresovana za Džima, tj kada je $x_{13} > x_{12}$.

Još treba dodati da iako je ljubomora u suprotnosti sa idejom o slobodnoj ljubavi, Džim je blago ljubomoran na Džulsa (još jedno odstupanje od prvobitnog modela). U modelu se to postiže tako što se Džimova reakcija na Kejtinu ljubav množi faktorom manjim od 1 kada je ona više zainteresovana za Džulsa, tj kada je $x_{12} > x_{13}$.

Radi jednostavnosti, Džulsova popustljivost i Džimova ljubomora mere se istim pozitivnim parametrom δ koji se postavlja na malu vrednost da bi se izbegla velika odstupanja od modela slobodne ljubavi. Dakle, pomoću parametara ϵ i δ se podešava u kojoj meri model odstupa od modela slobodne ljubavi.

Na slikama 8.5 i 8.6 mogu se videti odgovarajuće funkcije i vrednosti parametara.

Kejt	$R_{12}^L(x_{21}) = \beta_{12} \frac{x_{21}}{1 + x_{21}/\sigma_{12}^L} \cdot \begin{cases} \frac{1 - ((x_{21} - \tau_{12}^I)/\sigma_{12}^I)^2}{1 + ((x_{21} - \tau_{12}^I)/\sigma_{12}^I)^2} & \text{if } x_{21} \geq \tau_{12}^I \\ 1 & \text{if } x_{21} < \tau_{12}^I \end{cases}$ $S(x_{1j}) = \begin{cases} s \frac{((x_{1j} - \tau^S)/\sigma^S)^2}{1 + ((x_{1j} - \tau^S)/\sigma^S)^2} & \text{if } x_{1j} \geq \tau^S \\ 0 & \text{if } x_{1j} < \tau^S \end{cases} \quad j = 2, 3$
Džuls	$P(x_{21}) = \begin{cases} p \frac{((x_{21} - \tau^P)/\sigma^P)^2}{1 + ((x_{21} - \tau^P)/\sigma^P)^2} & \text{if } x_{21} \geq \tau^P \\ 0 & \text{if } x_{21} < \tau^P \end{cases}$
Džim	$R_{31}^L(x_{13}) = \beta_3 \frac{x_{13}}{1 + x_{13}/\sigma_{31}^L} \cdot \begin{cases} \frac{1 - ((x_{13} - \tau_{31}^I)/\sigma_{31}^I)^2}{1 + ((x_{13} - \tau_{31}^I)/\sigma_{31}^I)^2} & \text{if } x_{13} \geq \tau_{31}^I \\ 1 & \text{if } x_{13} < \tau_{31}^I \end{cases}$

Slika 8.5: Odgovarajuće funkcije

Kejt	zaborav	$\alpha_1 = 2 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	koeficijent zaborava
	reakcija na Džulsovu ljubav	$\beta_{12} = 8 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	koeficijent reakcije na ljubav
		$\sigma_{12}^I = 10$	osetljivost reakcije na ljubav
		$\tau_{12}^I = 2.5$	prag nesigurnosti
		$\sigma_{12}^I = 10.5$	osetljivost nesigurnosti
	reakcija na Džimovu ljubav	$\beta_{13} = 1 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	koeficijent reakcije na ljubav
	reakcija na zaljubljenost	$\gamma_1 = 1 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	koeficijent reakcije na zaljubljenost
	subjektivnost	$s = 2$	maksimalna subjektivnost
$\tau^S = 9$		prag subjektivnosti	
$\sigma^S = 1$		osetljivost subjektivnosti	
privlačnost		$A_1 = 20$	privlačnost
Džuls	zaborav	$\alpha_2 = 1 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
	reakcija na ljubav	$\beta_2 = 1 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
	reakcija na zaljubljenost	$\gamma_2 = 0.5 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
	platonizam	$p = 1$	maksimalni platonizam
		$\tau^P = 0$	prag platonizma
		$\sigma^P = 1$	osetljivost platonizma
privlačnost	$A_2 = 4$		
Džim	zaborav	$\alpha_3 = 2 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
	reakcija na ljubav	$\beta_3 = 2 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
		$\sigma_{31}^L = 10$	
		$\tau_{31}^L = 9$	
		$\sigma_{31}^L = 1$	
	reakcija na zaljubljenost	$\gamma_3 = 1 \text{ [yrs}^{-1}\text{]}$	
privlačnost	$A_3 = 5$		

Slika 8.6: Odgovarajući parametri

8.4 Analiza rezultata

Svi parametri osim parametara ϵ i δ biće fiksirani i jednaki vrednostima iz tabele parametara. Nadalje, gledaće se svi parovi parametara (ϵ, δ) tako što će se napraviti gusta mreža u (ϵ, δ) ravni i simulirati model za svaku tačku te ravni (za svaki par (ϵ, δ)). Početni uslov će uvek biti da su u početku svi ravnodušni jedni prema drugima, tj. $(x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{31}) = (0, 0, 0, 0)$ i simulacije će se zaustavljati nakon 20 godina (koliko je prema romanu i trajao ljubavni trougao). Kao što je već rečeno, pretpostavka je i da Kejt menja partnere, npr. menja Džulsa za Džima (ili obrnuto) čim njene preferencije ka Džulsu (Džimu) $x_{12} - x_{13}$ iz pozitivnosti pređu u negativnost (ili iz negativnosti u pozitivnost). Kao rezultat se dobija da u periodu od 20 godina vrednost $x_{12} - x_{13}$ menja znak sedam puta. Za vrednosti parametara ϵ i δ koji odgovaraju beloj tački sa slike 8.7, rezultati su predstavljeni na slici 8.8.

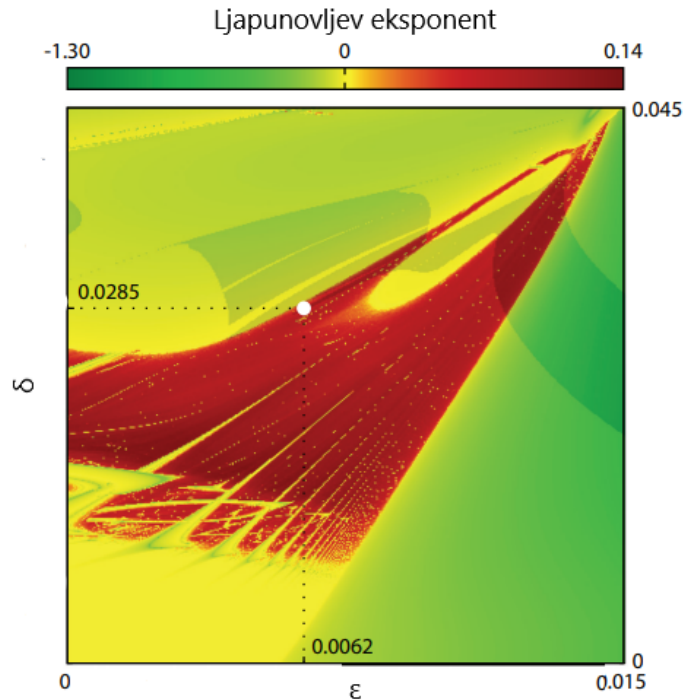
Osobine 6 i 7 su prisutne za sve vrednosti parova (ϵ, δ) . Za sve takve parove, proveravane su i osobine 1-5 i one su takođe prisutne u predstavljenom modelu. Ovo je i bilo očekivano jer su parametri ϵ i δ mali tako da model ne odstupa puno od modela slobodne ljubavi.

Dakle, sve osobine (onih prvih pet) se dobro poklapaju sa onima iz modela slobodne ljubavi,

dok su ovakvim modelom pokrivena i dodatne dve kvantitativne osobine (6 i 7).

Poslednja osobina (osma) treba biti dokazana, tj. treba pokazati da je i ona prisutna u ovakvom modelu. Za to je potrebno pokazati da u periodu od 20 godina trajektorije koje počinju iz sličnih stanja imaju vremena da priđu blizu atraktora, a potom i da se potpuno razdvoje. Samo u tom slučaju pomenute tri osobe mogu osetiti nepredvidivost u njihovom ljubavnom trouglu pre nego što se on završi.

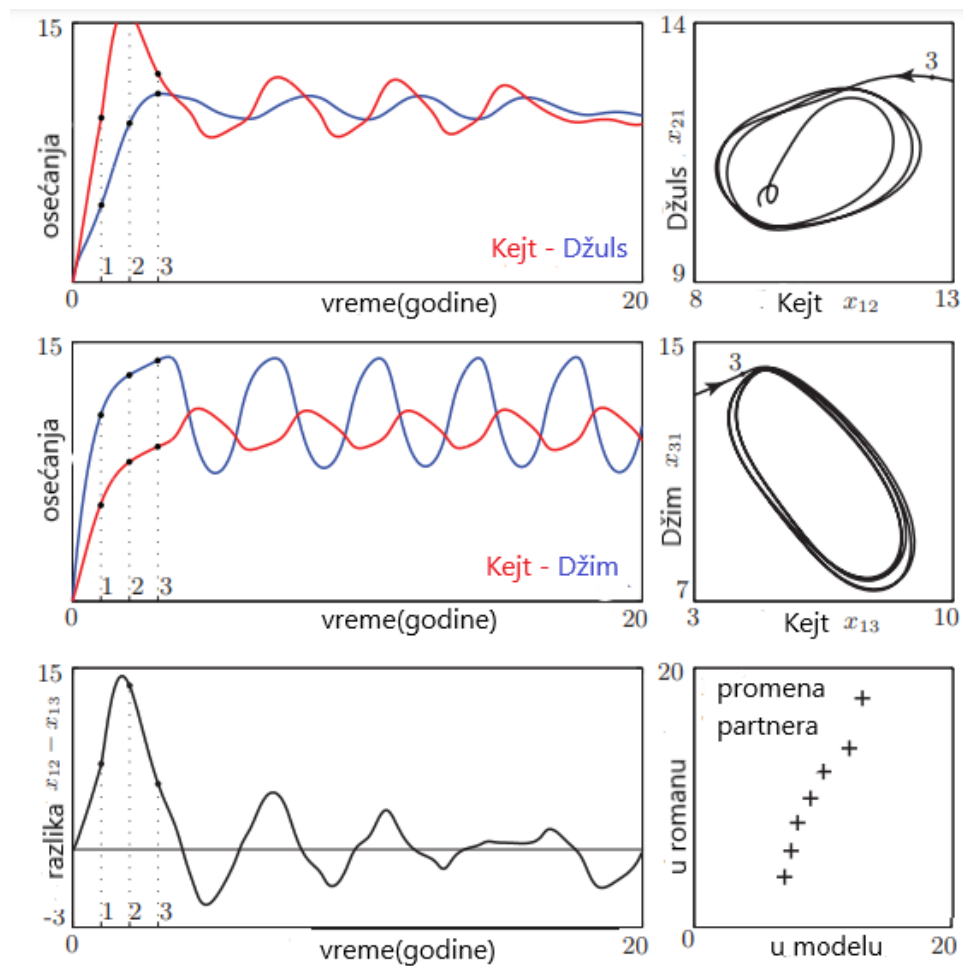
Sa slike 8.8 se vidi da su tri godine dovoljne da bi trajektorije prišle blizu atraktora.



Slika 8.7: Ponašanje K-Dž-Dž modela u zavisnosti od parametara ϵ i δ . Najveći Ljapunovljev eksponent je pozitivan (crvene boje) za haotične atraktore, nula (žut) za kvazi-periodične atraktore i bifurkacione cikluse, dok je negativan (zelen) za stabilne cikluse.

S druge strane, vreme divergenije bliskih trajektorija je reda L^{-1} , gde je L najveći Ljapunovljev eksponent. Za vrednosti ϵ i δ koji odgovaraju beloј tački, najveći Ljapunovljev eksponent haotičnog atraktora je $L = 0.07 \text{ god}^{-1}$, tako da je vreme potrebno za divergenciju bliskih trajektorija oko 15 godina. Sudeći po tome, nepredvisivost je definitivno prisutna u ljubavnoj priči između Kejt, Džulsa i Džima. Najveći Ljapunovljev ekpsonent, računat za sve parove parametara (ϵ, δ) prikazan je na slici 15.3 i rezultat je tipičan bifurkacijski dijagram.

Dakle, ovim je pokriven i poslednji deo drame - nepredvidivost koja je i dovela do smrti Kejt i Džima. Za više detalja o modelu pogledati i [2].



Slika 8.8: Ljubavni trougao za vrednosti parametara ϵ i δ koji odgovaraju vrednostima bele tačke sa slike 8.7

Zaključak

Tema ovog rada bila je matematičko modeliranje romantičnih odnosa. Uvođenjem linearnog modela kao najosnovnije varijante, proučavana je dinamika ove svakako kompleksne interakcije. U tom delu, predstavljen je i prvi model ovakvog tipa - Strogacov model i dato je nekoliko varijacija ovog modela.

Nakon toga, istraživanje je obuhvatilo i uvođenje dodatnih faktora koji mogu uticati na tu vezu, kao što su dodatne emocionalne dimenzije, spoljašnji stres, uticaj roditelja na vezu itd. Cilj tog dela bio je uzimanje u obzir i drugih faktora koji utiču na kvalitet veze, a ne samo ljubavnih. Razumevanje tih dodatnih faktora je ključno za dublje razumevanje složenih interakcija koje se javljaju unutar veze.

Na kraju, kao kruna svega, ispitan je i uticaj treće osobe na romantičnu vezu, tj. ispitan je model ljubavnog trougla. Rezultati su pokazali da prisustvo treće osobe može značajno uticati na kvalitet i stabilnost veze.

Ova tema ima važnost ne samo u kontekstu romantike, već i u širem smislu primene matematičkog modeliranja na društvene interakcije. Dalje istraživanje i razvoj ovog polja mogli bi nam omogućiti bolje razumevanje i upravljanje složenim odnosima među ljudima.

Reference

- [1] Dr. Philip Holmes, Dr. Eric T. Shea-Brown (2006). Scholarpedia. Stability.
- [2] Sergio Rinaldi, Fabio Della Rossa, Fabio Dercole, Alessandra Gragnani and Pietro Landi (2016) *Modeling Love Dynamics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. Series A, Vol. 89.
- [3] Steven Strogatz (26.05.2009.). Opinionator, The Opinion Pages. Guest Column: Loves Me, Loves Me Not (Do the Math).
- [4] Steven H. Strogatz (1988) *Love affairs and differential equations*. Mathematical Association of America. Vol. 61.
- [5] Phase plane plotter. Poslednji put posećeno 20.8.2023.
- [6] X. Lui, University of Waterloo. Introduction to Dynamical Systems Course Notes for AM 451. Bendixon criterion.
- [7] Steven H. Strogatz (1994) *Nonlinear Dynamics and Chaos*. CRC Press, published 2018.
- [8] Dragoslav Kuzmanović, Nebojša Vasović, Srđan Kostić, Srboľjub Simić, Igor Franović, Ines Grozdanović, Kristina Todorović-Vasović, Biljana Ranković Plaznić (2013) *Uvod u teoriju haosa*. Beograd: Saobraćajni fakultet, Rudarsko - geološki fakultet.
- [9] Milan Dražić (2017) *Osnove matematičkog modeliranja*. Matematički fakultet, Beograd.
- [10] Ljiljana Milić, Zoran Dobrosavljević, Jelena Čertić (2015) *Uvod u digitalnu obradu signala*. Beograd: Akademska misao.
- [11] LibreTexts. Sinusoidal response of a system. Poslednji put posećeno 20.8.2023.

- [12] Ilknur Koca (2014) *Mathematical Modeling of Nuclear Family and Stability Analysis*. Applied Mathematical Sciences. Vol 8.
- [13] Krishnamurthy Kamalanand, Ponnuswamy Mannar Jawahar (2013) *Mathematical modelling of parental influence on human romantic relationships*. Int. J. of Happiness and Development. Vol 1.
- [14] Gabrielle Applebury, LMFT (6.5.2020.). *Infidelity Statistics on Men, Women, and Relationships*.
- [15] Fabio Dercole and Sergio Rinaldi (2014) *Love stories can be unpredictable: Jules et Jim in the vortex of life*. Chaos (Woodbury, N.Y.). Vol. 24.