

Партиције скупова и природних бројева

Мастер рад
Математички факултет

Јелена Станковић
jelenaciric995@gmail.com

20. август 2023.

Сажетак

У овом раду су представљени Стирлингови и Белови бројеви, као и партиције природних бројева. Иако ове теме припадају елементарној комбинаторици, мало или готово ништа о њима није могуће наћи на српском језику. Одговор на питање, зашто ове области припадају елементарној комбинаторици је зато што нећемо много одмаћи од основних идеја комбинаторике, чије је добро познавање неопходна основа за проучавање сложенијих комбинаторних теорија. Рад је писан тако да за његово читање и разумевање није потребно никакво предзнање из комбинаторике. Такође, оно што је најзначајније у уводном поглављу, представљен је конвенционални начин како се уводе основни објекти из комбинаторике (*пермутације, комбинације...*), и њихово пребројавање, у средњим школама, у којима се наставним планом и програмом обрађују. Сви примери у уводном делу, уз мале модификације, преузети су из школских уџбеника. Значајно је, јер након упознавања са Стирлинговим, Беловим бројевима и партицијама природних бројева можемо компаративно да сагледамо начин на који су дефинисани исти комбинаторни објекти у средњошколској литератури (*уводно поглавље рада*) и у овом раду (*почевши од другог поглавља*). Начин на који је тема изложена у раду може представљати садржај за додатну наставу или алтернативни начин обраде наставних јединица, који је погодан због интуитивности примера који би неким ученицима били природнији и мање апстрактни од стандардних примера у школској литератури.

Садржај

1	Увод	4
1.1	Пермутације и комбинације	4
1.1.1	Број k -пермутација од n различитих објеката . . .	5
1.1.2	Број k -пермутација од n објеката међу којима има истих	5
1.1.3	Биномни коефицијент.	6
1.1.4	Особине биномног коефицијента.	6
1.1.5	Број k -комбинација од n различитих објеката . .	7
1.1.6	Број k -комбинација са понављањем објеката . . .	8
2	Композиције	10
3	Скуп партиција	17
4	Стирлингови бројеви друге врсте	20
5	Белови бројеви	23
6	Партиције целих бројева	27
6.1	Нерастући коначни низови целих бројева	27
7	Ферерсови дијаграми	29
8	Ојлерова теорема о петоугаоним бројевима	32
	Литература	39

1 Увод

У овом поглављу биће дате оперативне дефиниције пермутација и комбинација, као и теореме које одређују број пермутација и комбинација са и без понављања. Такође, биће изложени примери.

1.1 Пермутације и комбинације

Пре свега, дефинишимо појам “реч”, подразумевајући да је “реч” сваки коначни низ карактера неке азбуке написаних једно уз друго без обзира да ли та “реч” има семантику у српском или било ком другом језику (уместо термина “реч” у програмирању се често користи термин ниска карактера, *eng. string*). Тако је нпр. АБЦ “реч”, иако нема никакво значење. Ради увођења појмова пермутација и комбинација размотримо два наредна примера.

Пример 1.1 *Колико “речи” од 3 слова можемо сачинити помоћу четири слова A, B, C, D узимајући да ниједно слово не може да се појави више од једанпут?*

Пример 1.2 *У равни су дате четири тачке A, B, C, D такве да никоје три нису колинеарне. Колико различитих троуглова образују ове четири тачке?*

На први поглед може се учинити да су ова два питања идентична и да одговори на њих морају бити исти. То није тачно, јер програмерским речником ради се о различитим структурама. У првом примеру “речи”: АБС и СВА су различите, док су троуглови АБС и СВА истоветни. Приступимо решавању ова два примера с претпоставком да читалац нема никакво предзнање из комбинаторике.

Први проблем решићемо правећи све “речи” од три слова, користећи само четири наведена слова. У прву колону ставићемо “речи” које не садрже D, у другу “речи” које не садрже C, у трећу “речи” које не садрже B, коначно у четврту колону сврстаћемо “речи” које не садрже A. Добићемо следећу таблицу:

“речи” без D	“речи” без C	“речи” без B	“речи” без A
ABC	ABD	ACD	BCD
ACB	ADB	ADC	BDC
BAC	BAD	CAD	CBD
BCA	BDA	CDA	CDB
CAB	DAB	DAC	DBC
CBA	DBA	DCA	DCB

Дакле, одговор на питање из првог примера је 24 “речи”. Сада, да одговоримо и на друго питање, очигледно је да све речи из прве колоне представљају један троугао, што такође важи за сваку од преосталих колона. Дакле, одговор на друго питање је 4 троугла.

Уопштено, објекти које смо тражили у првом примеру називају се **пермутације**, а објекти које смо бројали у другом примеру називају се **комбинације**.

Дефиниција 1.1 *Нека су $n, k \in \mathbb{N}$, при чему важи, $k \leq n$. Тада је k -пермутација од n објеката без понављања сваки избор k објеката од њих n , колико их је на располагању, такав да је поредак појављивања објеката битан.*

Пример 1.3 Ево свих 2-пермутација од 4 (узмимо да је основни скуп A, B, C, D): $AB, AC, AD, BA, BC, BD, CA, CB, CD, DA, DB, DC$.

Дефиниција 1.2 Нека су $n, k \in \mathbb{N}$, при чему важи, $k \leq n$. Тада је k -комбинација од n објеката сваки избор, колико их је на располагању, такав да поредак појављивања објеката није битан.

Пример 1.4 Ево свих 2-комбинација од 4 (узмимо да је основни скуп A, B, C, D): AB, AC, AD, BC, BD, CD .

1.1.1 Број k -пермутација од n различитих објеката

Број k -пермутација од n различитих објеката означимо са $P(n, k)$.

Теорема 1.1 $P(n, k) = n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Доказ: Пошто има n различитих објеката, први члан k -пермутације може се изабрати на n начина. Пошто је он изабран остаје $n-1$ објекат за избор на друго место у пермутацији. Трећи се може изабрати на $n-2$ итд. Последњи k -ти члан, може бити изабран на $(n-(k-1)) = (n-k+1)$ начина. На основу принципа производа закључујемо да је укупан број начина за образовање једне k -пермутације производ $n(n-1)\dots(n-k+1)$.

Пример 1.5 У скупу природних бројева решити једначину: $P(2x+4, 3) : P(x+4, 4) = 2 : 3$

Решење:

$$\begin{aligned} P(2x+4, 3) : P(x+4, 4) &= 2 : 3 \\ 3 \cdot P(2x+4, 3) &= 2 \cdot P(x+4, 4) \\ 3 \cdot (2x+4) \cdot (2x+3) \cdot (2x+2) &= 2 \cdot (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \\ 3 \cdot 2 \cdot (x+2) \cdot (2x+3) \cdot 2 \cdot (x+1) &= 2 \cdot (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \\ 12 \cdot (x+2) \cdot (2x+3) \cdot (x+1) &= 2 \cdot (x+4) \cdot (x+3) \cdot (x+2) \cdot (x+1) \\ 6 \cdot (2x+3) &= (x+4) \cdot (x+3) \\ 12x+18 &= x^2+3x+4x+12 \\ 0 &= x^2+3x+4x+12-12x-18 \\ x^2-5x-6 &= 0 \end{aligned}$$

Решења ове квадратне једначине су: $x_1 = 6 \wedge x_2 = -1$.

С обзиром да у овом задатку у пропорцији учествују пермутације, јасно је да ћемо сва решења ове квадратне једначине која нису природни бројеви одбацити. Решење x_1 је адекватно, док решење x_2 одбацујемо.

1.1.2 Број k -пермутација од n објеката међу којима има истих

Пример 1.6 Колико различитих речи можемо добити регруписавањем слова речи “запара”? [3]

Решење: Подсетимо се да “реч” у значењу у којем се овде употребљава не мора имати смисла у обичном језику, битно је да на неки начин буде поређано 6 слова (од којих су три иста): З, А, П, А, Р, А. Означимо са x тражени број пермутација. Уочимо једну посебну пермутацију на пример АААЗПР. Претпоставимо да су слова А различита, односно да уместо А, А, А у овој пермутацији стоји A_1, A_2, A_3 . Тада би од ове једне посебне пермутације добили $3!=6$ нових пермутација. Па ће укупан број пермутација бити $\frac{6!}{3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!} = 120$.

1.1.3 Биномни коефицијент.

Са биномним коефицијентом сретаћемо се у даљем току рада. Неопходно је за даље читање да дефинишемо биномни коефицијент и познавање његових својстава.

Дефиниција 1.3 $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$, $k \in [0, n]$; $\binom{n}{k} = 0$, $k \notin [0, n]$.

Следећи пример илуструје примену формуле за конкретне вредности параметара n и k .

Пример 1.7 $\binom{5}{3} = \frac{5!}{(5-3)! \cdot 3!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{2! \cdot 3!} = 10$.

1.1.4 Особине биномног коефицијента.

Навешћемо пар важних особина биномног коефицијента.

1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$.

Доказ:

$$\begin{aligned}\binom{n}{0} &= \frac{n!}{(n-0)! \cdot 0!} = \frac{n!}{n! \cdot 1} = 1. \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{(n-n)! \cdot n!} = \frac{n!}{1 \cdot n!} = 1.\end{aligned}$$

2) $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Доказ:

$$\begin{aligned}\binom{n}{1} &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)! \cdot 1!} = n. \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n \cdot (n-1)!}{[n-(n-1)]! \cdot (n-1)!} = \frac{n \cdot (n-1)!}{1! \cdot (n-1)!} = n.\end{aligned}$$

3) Симетричност. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Доказ:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n!}{[n-(n-k)]! \cdot (n-k)!} = \binom{n}{n-k}.$$

4) Паскалова формула. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

Доказ:

$$\begin{aligned}\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{[(n-1)-(k-1)]! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot k!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot k!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot (k-1)!} + \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot k \cdot (k-1)!} = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot (k-1)!} \cdot \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \\ &= \frac{(n-1)!}{(n-k-1)! \cdot (k-1)!} \cdot \frac{k+n-k}{k \cdot (n-k)} = \\ &= \frac{n \cdot (n-1)!}{(n-k) \cdot (n-k-1)! \cdot k \cdot (k-1)!} = \\ &= \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \\ &= \binom{n}{k}.\end{aligned}$$

1.1.5 Број k -комбинација од n различитих објеката

Теорема 1.2 Број свих k -комбинација од n различитих објеката, које ћемо означавати са $C(n, k)$ је:

$$C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

Доказ: Свака k -комбинација од n различитих објеката може се уредити на $k!$ различитих начина, и при сваком од тих уређења добија се по једна k -пермутација од n различитих објеката. Ако означимо са $C(n, k)$ број тих комбинација, из овога што је речено и из обрасца за број свих k -пермутација од n различитих објеката следи:

$$k! \cdot C(n, k) = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1) \Rightarrow C(n, k) = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Наведићемо два нестандартна примера, који се могу применити у настави ових области.

Пример 1.8 Решити једначину: $3 \cdot C(n+2, 3) = 10 \cdot C(n, 2)$.

Решење:

$$\begin{aligned} 3 \cdot C(n+2, 3) &= 10 \cdot C(n, 2) \\ 3 \cdot \frac{(n+2) \cdot (n+1) \cdot n}{3 \cdot 2 \cdot 1} &= 10 \cdot \frac{n \cdot (n-1)}{2 \cdot 1} \\ (n+2) \cdot (n+1) &= 10 \cdot (n-1) \\ n^2 + n + 2n + 2 &= 10n - 10 \\ n^2 + 3n + 2 - 10n + 10 &= 0 \\ n^2 - 7n + 12 &= 0 \end{aligned}$$

С обзиром да је n природан број, узећемо само позитивна решења квадратне једначине.

$$\begin{aligned} n_1 &= 3 \\ n_2 &= 4. \end{aligned}$$

Оба решења су природни бројеви, према томе, оба су решења дате једначине.

Пример 1.9 Решити неједначину: $C(n, 5) < C(n, 3)$.

Решење:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} &< \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} &< 0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \left(\frac{(n-3) \cdot (n-4)}{5 \cdot 4} - 1 \right) &< 0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot \left(\frac{n^2 - 7n + 12}{20} - 1 \right) &< 0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot \left(\frac{n^2 - 7n + 12 - 20}{20} \right) &< 0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot \left(\frac{n^2 - 7n - 8}{20} \right) &< 0 \end{aligned}$$

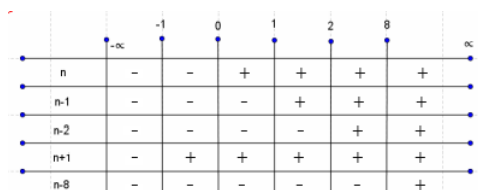
Сада ћемо раставити квадратни трином на чиниоце.

$$\begin{aligned} n^2 - 7n - 8 &= 0 \\ n_1 &= -1 \wedge n_2 = 8 \\ n^2 - 7n - 8 = 0 &\Rightarrow (n+1) \cdot (n-8) = 0 \end{aligned}$$

Вратимо се сада на задатак:

$$\begin{aligned} \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6} \cdot \left(\frac{n^2 - 7n + 12 - 20}{20} \right) &< 0 \\ \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+1) \cdot (n-8)}{120} &< 0 \end{aligned}$$

С обзиром да је именилац позитиван број, знак разломка одредиће бројилац, односно његов знак.



Слика 1: Одређивање знака бројиноца

$$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n+1) \cdot (n-8) < 0$$

У томе ће нам помоћи **слика 1**.

Нама треба тамо где је знак негативан, и бирамо само природне бројеве, $n \in (2, 8) \Rightarrow n \in \{3, 4, 5, 6, 7\}$.

Вратимо се на почетни услов задатка: $C(n, 5) < C(n, 3)$. Он говори да је n које тражимо веће или једнако 5.

Дакле тражена решења су: $n \in \{5, 6, 7\}$.

1.1.6 Број k -комбинација са понављањем објеката

Овом комбинаторном проблему посветићемо више пажње, јер је комплекснији од претходних, и методе расуђивања које ћемо изложити примењиваће се и у главној теми рада.

Када смо до сад говорили о k -комбинацијама од n објеката елемената скупа S подразумевали смо да су сви објекти скупа S различити. Сада ћемо изложити примере када међу изабраним објектима има једнаких, и кроз те примере изложићемо теорему која говори о броју комбинација са понављањем.

Пример 1.10 *Пица мајстор продаје 5 врста пице. На колико начина гост може поручити 3 пице, које не морају бити различите?*

Решење: Означимо редом тих 5 различитих врста пице неким бројевима 1, 2, 3, 4, 5. Тада купац може наручити 3 пице прве врсте, или 2 пице четврте врсте и једну пицу друге врсте итд. Две наведене комбинације обележавамо са 111 и 244. Као што се одмах уочава, ред писања бројева није битан (иначе бисмо другу наруџбину обележили са 442), већ је само битно који бројеви учествују у комбинацији и колико се пута понављају. Према томе следеће комбинације су истоветне: 115, 511, 151. С обзиром на ову истоветност, за представника ових трију комбинација узећемо 115. Како је $1 \leq a_1 \leq 5$, може се рећи да се тражи број свих неоппадајућих трочланих низова $a_1 a_2 a_3$, где је $a_1 \leq a_2 \leq a_3$, чији чланови могу бити цифре од 1 до 5. Да бисмо решили задатак придружићемо сваком трочланом низу $a_1 a_2 a_3$ или свакој трочланој комбинацији горњих 5 цифара јединствену трочлану комбинацију $b_1 b_2 b_3$ дефинисану са: $b_1 = a_1, b_2 = a_2 + 1, b_3 = a_3 + 2$. На тај начин, низовима 112 и 235 придружују се редом низови 124 и 247. Обрнуто, ако су дати низови облика $b_1 b_2 b_3$, увек на јединствен начин можемо одредити низове облика $a_1 a_2 a_3$, стављајући $a_1 = b_1, a_2 = b_2 - 1, a_3 = b_3 - 2$. Проблем се своди на одређивање броја растућих трочланих низова $b_1 b_2 b_3$ састављених од бројева 1, ..., 7. Предност ове нове формулације је у томе што нове комбинације које образујемо имају све елементе различите, односно проблем смо свели на пребројавање комбинација

различитих елемената, а тај проблем је већ решен. Дакле решење је $C(7, 3)$. У општем случају метод расуђивања је сличан овом којим смо се служили у решавању претходног примера.

Теорема 1.3 *Број k -комбинација од n различитих врста објеката (узимајући да у свакој врсти има објеката у неограниченом броју) је:*

$$C(n + k - 1, k).$$

Доказ: Не губећи на општости можемо узети да су тих n различитих објеката обележени бројевима $1, 2, \dots, n$, или, што је исто, да су то бројеви $1, 2, \dots, n$. Нека је $a_1 a_2 \dots a_k$ једна k -комбинација тих бројева, где су бројеви $a_1, a_2, \dots, a_n$ одређени тако да чине неоппадајући низ, тј. $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_k$. Придружимо свакој од k -комбинација овог типа на јединствен начин одређену k -комбинацију $b_1, b_2, \dots, b_k$, где су бројеви $b_1, b_2, \dots, b_k$ дефинисани на следећи начин:

$$\begin{aligned} b_1 &= a_1; \\ b_2 &= a_2 + 1; \\ &\dots \\ b_i &= a_i + i - 1; \\ &\dots \\ b_k &= a_k + k - 1. \end{aligned}$$

Приметимо да без обзира какви су a -ови, b -ови се међусобно разликују. Поред тога, b -ови на јединствен начин одређују a -ове и a -ови на јединствен начин одређују b -ове. Свакој комбинацији a -ова одговара јединствена комбинација b -ова и обрнуто. Другим речима, између скупа свих k -комбинација a -ова и скупа свих k -комбинација b -ова постоји бијекција. Према томе, израчунати број једних исто је што и израчунати број других. Број k -комбинација b -ова је, у ствари, избор k бројева између бројева $1, 2, \dots, n + k - 1$, и знамо да износи $C(n + k - 1, k)$.

У **примеру 1.6** проблем комбинација с понављањем свели смо на проблем комбинација без понављања. Сада ћемо навести пример којим ћемо уочити да исти проблем можемо решити помоћу пермутација са понављањем.

Напомена: У исказу теореме говори се да у свакој врсти има објеката у неограниченом броју. Заправо довољан број објеката у свакој врсти је k , јер се сваки објекат може појавити у некој одређеној комбинацији $0, 1, \dots, k$ пута, па је нужно да буде бар k објеката у врсти. С друге стране вишак преко k остаје нераспоређен.

Пример 1.11 *У кутији се налазе беле, плаве и црвене куглице у (практично) неограниченој количини (чим је куглица одређене боје извучена, аутомат убацује куглицу исте боје). На колико различитих начина можемо извући 7 различитих куглица? [4]*

Решење: Запишимо свако од обављених избора помоћу нула и јединица.

Напишимо најпре онолико јединица колико је извучено белих куглица, затим ставимо нулу па запишемо онолико јединица колико је извучено плавих куглица. После тога запишемо нулу и запишемо онолико јединица колико је извучено црвених куглица. Нулама смо на тај начин раздвојили број извучених плавих куглица од одговарајућег броја белих куглица, а такође, број извучених црвених куглица од одговарајућег броја плавих куглица. На пример, комбинацију: 3 беле, 2 плаве, 2 црвене куглице записујемо са 111011011, а комбинацију 5

белих, 2 црвене са 111110011. Појава двеју нула у запису ове комбинације означава да није узет ни један објекат из друге врсте објеката, тј. нема плавих куглица. Комбинација 7 црвених куглица записује се са 001111111. Примећујемо да овако можемо на јединствен начин да запишемо било коју комбинацију коју тражимо у задатку, односно можемо да успоставимо бијекцију између скупа k -комбинација избора куглица и скупа низа нула и јединица формираних на горе објашњен начин. Овај скуп нула и јединица очигледно представља скуп свих пермутација с понављањем од 7 јединица и 2 нуле. Као што је познато број оваквих пермутација је:

$$\frac{9!}{7!2!} = 36 = \binom{3+7-1}{7}.$$

2 Композиције

Пре него што дефинишемо шта је композиција, размотримо наредни пример који ће нам у томе помоћи.

Пример 2.1 Четворочлана породица, Ана, Бен, Чарлс и Денис, седили су у својој дневној соби да гледају филм. Телефон је зазвонио 10 пута током филма. Даље, телефонска секретарица је била неистоварна, а породица је очекивала важан позив, па су се сваки пут јављали на телефон. Како би себи поправили расположење, породица се сложила да ће на крају филма свака особа добити куглу сладоледа за сваки пут када се та особа јави на телефон. Десет куглица сладоледа сигурно ће се потрошити чим се филм заврши, али на колико начина је могуће поделити тих 10 куглица? [2]

Решење 1: За почетак да уведемо нотацију:

- A- јавила се Ана.
- B- јавио се Бен.
- C- јавио се Чарлс.
- D- јавио се Денис.

Приметимо да је један од могућих исхода ABABBBCCDD, овај исход је еквивалентан исходу AABBBBCCDD. Еквивалентни су јер распоред елемената није важан већ нам је од важности само њихов број појављивања, јер се кугле сладоледа добијају на основу броја јављања, а не на основу редоследа. Успоставимо сада бијекцију између скупова $\{A, B, C, D\}$, $\{1, 2, 3, 4\}$ тако да:

$$1 \leftrightarrow A \quad 2 \leftrightarrow B \quad 3 \leftrightarrow C \quad 4 \leftrightarrow D$$

Тада ће се исход ABABBBCCDD сликати у 1212223344, односно AABBBBCCDD у 1122223344. За представнике исхода узећемо исходе код којих се цифре нижу у непадајућем поредку. У овом конкретном примеру уместо 1212223344 користићемо 1122223344 јер су еквивалентни.

Сада ћемо сваком исходу облика $a_0a_1\dots a_9$, код којих важи $a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_9$, доделити $b_0b_1\dots b_9$, тако да важи:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 &= a_1 + 1, \\ &\dots \\ b_9 &= a_9 + 9. \end{aligned}$$

Овако дефинисано пресликавање $a_0a_1\dots a_9$ у $b_0b_1\dots b_9$ је бијективно, сад ћемо то и показати. Означимо пресликавање словом f .

Претпоставимо супротно, пресликавање f није бијекција. Тада постоје $a = a_0a_1\dots a_9, c = c_0c_1\dots c_9$ такви да важи:

Тада важи на основу дефиниције пресликавања да је:

$$\begin{aligned} f(a) &= b_0b_1\dots b_9 \text{ где је,} \\ b_0 &= a_0 \\ b_1 &= a_1 + 1 \\ &\dots \\ b_9 &= a_9 + 9 \text{ и} \\ f(c) &= b_0b_1\dots b_9 \text{ где је,} \\ b_0 &= c_0 \\ b_1 &= c_1 + 1 \\ &\dots \\ b_9 &= c_9 + 9 \end{aligned}$$

Из ових веза следи да је:

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0 = c_0 \\ b_1 &= a_1 + 1 = c_1 + 1 \\ &\dots \\ b_9 &= a_9 + 9 = c_9 + 9. \end{aligned}$$

Односно:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0 \\ a_1 &= c_1 \\ &\dots \\ a_9 &= c_9. \\ \Rightarrow a &= c. \end{aligned}$$

Што је у контрадикцији са почетном претпоставком. Закључак је да је пресликавање f бијекција.

На тај начин сваки исход $b_0b_1\dots b_9$ јединствено одређује исход $a_0a_1\dots a_9$ и обратно, с тим да је елегантнији и погоднији за коришћење исход $b_0b_1\dots b_9$ зато што се елементи(бројеви) не понављају, дати су у строго растућем распореду и лакше их је пребројати јер се заправо ради о бројању комбинација без понављања дужине 10 над скупом $0,1,\dots,12$, јер је b_i у том распону за свако: $i = 0, 1, \dots, 9$. Знамо да таквих комбинација има $\binom{13}{10}$.

Приметимо да смо претходни проблем решили позивајући се на **теорему 1.3**. У комбинаторици често нов поступак за решење већ решеног проблема може послужити као изванредно средство за решавање проблема који ће тек бити постављени. Изложићемо сада другачију идеју решавања претходног примера у којем се крије концепт који ћемо детаљније изложити.

Решење 2: Искористићемо исту нотацију као у **решењу 1**, дакле важи:

$$\begin{aligned} 1 &\Leftarrow A \\ 2 &\Leftarrow B \\ 3 &\Leftarrow C \\ 4 &\Leftarrow D \end{aligned}$$

Запажања која смо констатовали у **решењу 1** су нам и даље од значаја, дакле редослед којим се четири особе јављају није битан, битно је колико се пута свако од њих јавио. Ово нам одмах сугерише да пермутације искључујемо као потенцијално решење јер је код њих

редослед појављивања елемената битан. Такође, не можемо решење тражити ни као поступак одређивања подскупова, јер ни један од подскупова скупа $S = \{A, B, C, D\}$ нема 10 елемената, па морамо користити други модел.

Тражимо колекције слова A, B, C и D које се састоје од укупно десет слова, попут $ABABBBCCDD$. Таква колекција, односно колекција у којој сваки елемент мора да потиче из одређеног скупа S , дозвољена су понављања елемената, а редослед елемената није битан, назива се мултисет над скупом S . У овој терминологији, наш задатак је пребројати све мултисетове од десет елемената преко скупа од четири елемента $S = \{A, B, C, D\}$.

Мултисет је у потпуности одређен ако знамо колико пута се који елемент скупа S појавио у мултисету. Односно, ако знамо да мултисет садржи две копије елемента A , једну копију B , три копије C и четири копије D , онда је тај мултисет на јединствен начин одређен, јер редослед елемената није битан већ само број њихових појављивања.

То нас наводи да претходно решење примера можемо посматрати као пребројавање ненегативних решења једначине $a + b + c + d = 10$ при чему је редослед сабирака битан. Заправо, решење $2 + 3 + 1 + 4 = 10$ одговара мултисету који садржи две копије слова A , три копије слова B , једну слова C и четири слова D . Док, решење $1 + 2 + 4 + 3 = 10$ одговара мултисету који садржи једну копију слова A , две слова B , четири слова C и три слова D .

Овакво разматрање решења примера наводи нас на концепт идентификовања мултисетова дужине n над k -точланим скупом S и добијања n као суме ненегативних k -ова.

Приметимо да започети пример није решен у потпуности. Решење ће уследити у даљем току текста.

Дефиниција 2.1 Нека су $a_1, a_2, \dots, a_k$ ненегативни цели бројеви такви да:

$$\sum_{i=1}^k a_i = n.$$

Тада се уређена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ назива **слаба композиција** n на k делова. [2]

Закључак је да између скупа свих мултисетова дужине n над скупом S и скупа свих слабих композиција од $[n]$ постоји бијекција и да ћемо пребројавањем скупа свих слабих композиција од $[n]$ пребројати скуп свих мултисетова дужине n над скупом S , јер су исте кардиналности. Следећа теорема даће нам одговор на питање колико елемената броји скуп свих слабих композиција од $[n]$.

Теорема 2.1 Број слабих композиција n од k делова је:

$$\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}.$$

Доказ: Узмите у обзир n идентичних куглица које се морају распоредити у k кутија које су нумерисане од 1 до k . Свака таква расподела еквивалентна је слабом саставу од n на k делова, при чему је број куглица у кутији i број појављивања i -ова у слабом саставу. Сада бројимо све могуће различите расподеле n куглица у k кутија, тако што ћемо распоредити k кутија у линију тако да бројеви на кутијама буду у строго растућем поретку и да зид одваја i -ту и $i + 1$ -у кутију.

Приметите да свака расподела одговара јединственом распореду од n куглица и $k - 1$ зидова у линији. Заиста, можемо размишљати

<i>Box 1</i>	<i>Box 2</i>		<i>Box k</i>
--------------	--------------	-------	--------------

Слика 2: Кутије

о зидовима (осим за леви зид крајње леве кутије, а десни зид крајње десне кутије) као предметима који су убачени у линију куглица на разним тачкама како би се неке куглице одвојиле од других. Супротно томе, сваки аранжман одговара јединственој расподели куглица у кутијама. Заиста, ако су i и $i+1$ зид уметнути тако да између њих има t куглица, тада ће у i -том пољу бити t куглица. Број начина за уређење n куглица и $k-1$ зидова у линији, смо свели на проблем пермутација са понављањем који смо изложили у **теорему 1.3**. Према томе, број слабих композиција од n у k делова је $\binom{n+k-1}{n}$. Због симетричности биномног коефицијента важи $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$.

Напомена 2.1: Због симетричности биномног коефицијента еквивалентно је да ли ћемо посматрати распоред n куглица или распоред $k-1$ преградних зидова на $n+k-1$ -ој позицији.

Сада када смо избројали број слабих композиција n од k делова, вратимо се на **решење 2 примера 2.1**. Пошто постоји бијекција између скупа свих мултисетова дужине n над скупом S и скупа свих слабих композиција n од k делова, тада ће кардиналност скупа свих таквих мултисетова такође бити $\binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$. Стога четворочлана породица коју смо поменули почетком овог поглавља може да дистрибуира 10 куглица сладоледа на $\binom{10+4-1}{4-1} = \binom{13}{3} = 286$ начина.

Напомена 2.2: У дефиницији 2.1 напоменуто је да су a_i -ови ненегативни цели бројеви што значи да 0 може бити елемент слабе композиције, односно може постојати мултисет над скупом S у којем нису заступљени сви елементи из S .

Управо је у **напомени 2.2** апострофирано да је нула легитимни члан слабе композиције или у контексту **примера 2.1** могуће је да постоји члан породице који се неће ни једном јавити на телефон. Сада ћемо навести дефиницију **композиције** где ћемо изузети такве могућности.

Дефиниција 2.2 Нека су $a_1, a_2, \dots, a_k$ позитивни цели бројеви такви да:

$$\sum_{i=1}^k a_i = n$$

Тада се уређена k -торка $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ назива композиција n на k делова. Број композиција n на k делова је у директној вези са бројем слабих композиција n на k делова. Следећа теорема говори о томе. [2]

Теорема 2.2 Број композиција броја n на k делова је:

$$\binom{n-1}{k-1}.$$

Доказ: Посматрајмо функцију f из скупа W свих слабих композиција броја $n-k$ у скуп C , где је C скуп свих композиција броја n на k делова. Функција f је дефинисана тако да за свако a из W , где је $a = (a_1, a_2, \dots, a_k)$ слаба композиција од $n-k$ на k делова, тако да важи:

$$f(a) = (a_1 + 1, a_2 + 1, \dots, a_i + 1, \dots, a_k + 1).$$

Идеја зашто смо овако дефинисали пресликавање је очигледна, заправо ми додајемо k јединица на збир a_i -ова који је $n-k$. С обзиром на то да они чине елементе слабе композиције броја $n-k$ на k делова, увећавамо за k , па ће овако увећани збир бити n , и притом ни један од a_i -ова неће бити једнак нули након увећања, а нама управо то треба. Илустрације ради ако је $a = (3, 0, 2)$ онда је $f(a) = (4, 1, 3)$.

Прво, приметимо да је овако задато пресликавање бијективно. Наиме, ако важи да је:

$$\begin{aligned} f(a) = f(b) &\Rightarrow \\ (a_1 + 1, \dots, a_k + 1) &= (b_1 + 1, \dots, b_k + 1) \Rightarrow \\ a_1 = b_1, \dots, a_k &= b_k \Rightarrow \\ a &= b. \end{aligned}$$

Такође и супротан смер релације еквиваленције је очигледан. Дакле, пресликавање f је бијекција. Односно, скупови W и C су скупови исте кардиналности. Пошто смо у **теорему 2.1** доказали формулу за број слабих композиција n од k делова, остаје само да је применимо. Односно, важи следеће:

$$|C| = |W| = \binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Пример 2.2 Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Колико решења има једначина $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$

a) У скупу $\mathbb{N}$?

b) У скупу $\mathbb{N}_0$? [5]

Решење: Посматраћемо еквивалентан проблем: низ од n нула треба да разбијемо на k делова постављањем $k-1$ јединица између њих.

Примери:

$$00100010 \Leftrightarrow 2 + 3 + 1 = 6$$

$$01000010 \Leftrightarrow 1 + 4 + 1 = 6$$

С обзиром на то да има $n-1$ место на која постављамо $k-1$ јединица, то можемо учинити на $\binom{n-1}{k-1}$ начина.

Случај под b), свешћемо проблем на претходни, $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n; x_j \geq 0$

$$(x_1 + 1) + (x_2 + 1) + \dots + (x_k + 1) = n + k; x_j + 1 \geq 1.$$

Решење је $\binom{n+k-1}{k-1}$.

Пример 2.3 Нека $n, k \in \mathbb{N}$. Одредити колико решења има неједначина $x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$ у скупу $\mathbb{N}_0$? [5]

Решење: Сводимо задатак на претходни убацивањем још једне променљиве x_{k+1} .

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k + x_{k+1} = n.$$

Решење је $\binom{n+k+1-1}{k+1-1} = \binom{n+k}{k}$.

Пример 2.4 Нека су $n, k \in \mathbb{N}$ и нека су $c_1, c_2, \dots, c_k$ цели бројеви. Одредити колико решења у скупу целих бројева има једначина $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, тако да је $x_1 \geq c_1, x_2 \geq c_2, \dots, x_k \geq c_k$? [5]

Решење:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \dots + x_k &= n; x_j \geq c_j \\ (x_1 - c_1) + (x_2 - c_2) + \dots + (x_k - c_k) &= n - (c_1 + \dots + c_k) \\ \text{За } n < c_1 + \dots + c_k &\text{ нема решења.} \\ \text{За } n \geq c_1 + \dots + c_k &\text{ број решења је } \binom{n - (c_1 + \dots + c_k) + k - 1}{k-1}. \end{aligned}$$

Пример 2.5 Нека су $n, k \in \mathbb{N}$ и нека за целе бројеве r, s важи $0 \leq r \leq s$. Колико решења $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ има једначина $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, таквих да за сваки број $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $r \leq x_j \leq s$, где је $x_j \in \mathbb{N}_0$ [5]

Решење:

$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$, за $n < kr$ или $n > ks$ нема решења. За $kr \leq n \leq ks$ посматраћемо решења за које је $x_j \geq r$. $(x_1 - r) + (x_2 - r) + \dots + (x_k - r) = n - kr$. Број решења је $\binom{n - kr + k - 1}{k-1}$. Посматраћемо сада колико је решења где је бар један од $x_j \geq s + 1$. Користићемо формулу укључивања и искључивања. Ако је првих l сабирака већих од $s + 1$, онда је то број решења једначине у $\mathbb{N}_0$

$$(x_1 - s - 1) + \dots + (x_l - s - 1) + (x_{l+1} - r) + \dots + (x_k - r) = n - (k - l)r - l(s + 1),$$

а то је $\binom{n - (k-l)r - l(s+1) + k - 1}{k-1}$, па је решење $\binom{n - kr + k - 1}{k-1} - \sum_{l=1}^k \binom{k}{l} \cdot \binom{n - (k-l)r - l(s+1) + l - 1}{k-1}$.

Пример 2.6 Нека су $n, k \in \mathbb{N}$ и нека је $k \geq 2$. Колико има решења $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ једначине $x_1 + x_2 + \dots + x_k = 2n$ у скупу $\mathbb{N}_0$, таквих да је $x_1 > x_k$? [5]

Решење: Постоје 3 могућности:

- 1) $x_1 > x_k$
- 2) $x_1 = x_k$
- 3) $x_1 < x_k$

Нама треба само број решења када је $x_1 > x_k$. Означимо то са S_1 , другу могућност са S_2 , трећу S_3 .

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 + S_3 &= \binom{2n+k-1}{k-1} \\ \Rightarrow S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\binom{2n+k-1}{k-1} - S_2 \right) \\ S_1 &= S_3 \end{aligned}$$

Треба још израчунати S_2 . Ако је $x_1 = x_k = l$, онда је број решења исти као број решења једначине $x_2 + x_3 + \dots + x_{k-1} = 2n - 2l$ а то је $\binom{2n-2l+k-3}{k-3}$ за $k \geq 3$. Укупно је $S_1 = \frac{1}{2} \left(\binom{2n+l-1}{k-1} - \sum_{l=0}^n \binom{2n-2l+k-3}{k-3} \right)$. За $k = 2$ је укупно n решења, јер $x_k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$.

Пример 2.7 Колико има n -тоцифрених природних бројева чији је збир цифара једнак 11? [5]

Решење: Ако су $x_1, x_2, \dots, x_n$ цифре, то је $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 11$. Како је $x_1 \geq 1$ то је $(x_1 - 1) + x_2 + \dots + x_n = 10$. Укупан број решења је $\binom{n+9}{10}$. Међутим, могуће је да је једно решење 10, што није цифра. Исто, $x_1 - 1$ не може бити 9. Ако је $x_j = 10$ или је $x_1 - 1 = 10$ то је n случајева јер сви остали морају бити 0. Ако је $x_1 - 1 = 9$, онда је бар један од цифара решења 1, и то је $n - 1$ могућност. Дакле укупно је:

$$\binom{n+9}{10} - n - (n - 1) = \binom{n+9}{10} - 2n + 1.$$

Пример 2.8 На колико начина се могу $12n+5$ куглица, које се међусобно разликују, разместити у 4 кутије, које се међусобно разликују, тако да у свакој кутији буде бар једна и не више од $6n+2$ куглице? [5]

Решење: Без другог услова је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12n + 5$, укупно $\binom{12n+4}{3}$ могућности. Од тог треба да одузмемо случај када је у некој кутији више од $6n+2$ куглице. То може бити само једна кутија, јер кад би биле две, укупан број би био већи од $12n+5$. У тој једној кутији може бити $k \in \{6n+3, \dots, 12n+2\}$ куглице (мора остати бар по једна за остале кутије). Дакле укупно је:

$$\begin{aligned}
 & \binom{12n+4}{3} - 4 \cdot \sum_{k=6n+3}^{12n+2} \binom{12n+5-k-1}{2} \\
 \text{смeна: } j &= k - 6n - 2 \\
 &= \binom{12n+4}{3} - 4 \cdot \sum_{j=1}^{6n} \frac{(6n+2-j)(6n+1-j)}{2} \\
 \text{смeна: } i &= 6n+1-j \\
 &= \binom{12n+4}{3} - 4 \cdot \sum_{i=1}^{6n} \frac{i(i+1)}{2} = \\
 &= \binom{12n+4}{3} - 2 \cdot \sum_{i=1}^{6n} i^2 + i = \\
 &= \frac{(12n+4)(12n+3)(12n+2)}{6} - 2 \cdot \frac{6n(6n+1)(12n+1)}{6} - 6n(6n+1).
 \end{aligned}$$

3 Скуп партиција

Као и у претходном поглављу, зарад интуитивности, прво ћемо размотрити један пример који и не звучи тако нереално да га је тешко замислити и у стварном животу, а онда и формалније увести нове појмове.

Пример 3.1 *Једног дана позвали смо своје пријатеље с децом. Укупно је било петоро деце и сво петоро се играло. Испоставило се да ни једна соба није довољно велика за све њих, па су се деца поделила у три расположиве собе, користећи све три. На колико различитих начина то могу деца да учине?*

Ако покушате да одговорите на ово питање, убрзо препознајете да питање није прецизно формулисано. За почетак уведимо следећу нотацију: Прво дете обележићемо словом А, друго словом В, треће С, четврто D и коначно пето дете словом Е. Оно што није прецизно одређено у овом примеру је дефиниција различитог, наиме да ли разликујемо следећа два могућа исхода дечије расподеле. 1) А и В се играју у првој соби, С и D у другој соби, Е у преосталој соби. 2) Е се игра у првој соби, А и В у другој соби, С и D у преосталој соби.

Зависно од тога да ли ћемо претходне поставке сматрати различитим или истим добијамо различите комбинаторне проблеме. Међутим на основу претходног знања лако можемо да закључимо да у случају да собе сматрамо различитим, број поставки ће бити 3! пута већи него у случају да собе сматрамо истоветним. Дакле, од важности нам је једино ко су партнери у игри, а не обележавање соба.

Дефиниција 3.1 *Нека је n позитиван цео број, и нека је $k < n$ позитиван цео број. Нека је $B = \{B_1, B_2, \dots, B_k\}$ где је $B_i \subset [n]$, за свако $i \in [k]$, где су B_i непразни и дисјунктни скупови такви да важи да је $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_k = [n]$. Тада кажемо да је B партиција од $[n]$ у k блокова. [2]*

Пример 3.2 *Приказ свих партиција од $[4]$ у три блока.*

Решење:

- $\{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$
- $\{\{3,1\},\{2\},\{4\}\}$
- $\{\{1,4\},\{2\},\{3\}\}$
- $\{\{2,3\},\{1\},\{4\}\}$
- $\{\{2,4\},\{1\},\{3\}\}$
- $\{\{3,4\},\{1\},\{2\}\}$

Оно што је на овом месту битно истаћи, мада је јасно дефинисано, то је да су блокови скупови. Као што знамо распоред елемената унутар скупа није битан, за разлику од нпр. слабе композиције. Такође, јасно је дефинисано да је и само B из дефиниције 3.1 скуп па није ни битан сам распоред блокова.

Оно што је заједничко за примере, у другом и трећем поглављу, да уопштено гледајући можемо их свести на проблеме поделе истоветних предмета. Као могуће решење ових проблема навели смо поделу

целог броја на сабирке и то је идеја која је круцијална и за слабе композиције, композиције, као и скупове партиција. На овај начин смо комбинаторне проблеме расподеле свели на проблеме теорије бројева.

Наводимо још један пример за конкретне n и k у којем ће бити изложена идеја како пребројати партиције.

Пример 3.3 Показати да је број партиција од $[5]$ у три блока једнак 25.

Решење: Имамо два случаја када су блокови величине 3,1,1 што ћемо назвати првим случајем, и други када су блокови величине 2,2,1 што ће бити други случај.

1) Ово је случај када су блокови величине 3,1,1 односно радићемо са трочланим и два једночлана скупа. Од пет елемената трочлани скуп можемо изабрати на 10 начина, док једночлане блокове чине преостали елементи који нису ушли у избор трочланог блока.

2) Случај када су блокови величине 2,2,1. Да бисмо их лакше пребројали сада ћемо кренути прво од избора једночланог блока, дакле имамо 5 могућности да изаберемо једночлани блок. Од преосталих четири елемената треба изабрати први двочлани блок, а то можемо урадити на $\binom{4}{2} = 6$ начина. Сада треба бити опрезан јер овде не примењујемо принцип производа тј. $5 \cdot 6$ није тачно решење, јер ако смо на пример изабрали за једночлани блок $\{1\}$ затим $\{2, 3\}$ за први двочлани блок, за други двочлани блок нам преостаје $\{4, 5\}$, односно наша партиција изабрана на овај начин је $\{\{1\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}\}$. Исту ову партицију смо могли добити и да смо за први блок изабрали $\{4, 5\}$, а да нам је за други двочлани блок преостало $\{2, 3\}$. Очигледно, ако бисмо применили принцип множења исте партиције бисмо бројали два пута, па је решење заправо $\frac{5 \cdot 6}{2} = 15$.

Коначно, укупан број партиција од $[5]$ у три блока је збир начина у случајевима 1) и 2) односно $10 + 15 = 25$.

Напомена: Иста идеја је примењена за решавање **примера 3.2** и **3.3.** Сада када ово знамо, можемо се вратити на почетни пример поглавља. Као што смо напоменули петоро деце које треба распоредити у три собе обележили смо редом словима А, В, С, D, Е. Ако успоставимо пресликавање на следећи начин:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow 1 \\ B &\rightarrow 2 \\ C &\rightarrow 3 \\ D &\rightarrow 4 \\ E &\rightarrow 5 \end{aligned}$$

Примећујемо да је број могућих распореда петоро деце једнак броју партиција од $[5]$ на три блока, где блокови апстрахују собе. Из решења **примера 3.2** знамо да таквих партиција има 25, односно постоји 25 начина како можемо распоредити децу у три собе. У случају да собе сматрамо различитим као што смо већ напоменули то ће увећати број могућих распореда за $3!$ пута, односно за број пермутација 3 различите собе.

При решавању **примера 3.3** одређени број решења смо одбацили јер смо их претходно већ бројали. Ово се врло често среће при решавању комбинаторних проблема. Следећи пример наводимо да бисмо ову идеју приближили читаоцима, иако пример излази из области теме.

Пример 3.4 *Колико бројева између 1 и 5100 није дељиво ни са 5 ни са 3?*

Решење: Да бисмо решили овај задатак прво ћемо одговорити на питање колико има бројева између 1 и 5100 који су дељиви са 5. Наиме, тих бројева има $5100 : 5 = 1020$. Одузимањем $5100 - 1020$ добијамо колико бројева између 1 и 5100 није дељиво са 5, а то је $5100 - 1020 = 4080$. Затим, уочавамо колико бројева између 1 и 5100 није дељиво ни са 5 ни са 3. Нашли смо да 4080 није дељиво са 5. На исти начин налазимо да $5100 - (5100 : 3) = 5100 - 1700 = 3400$ бројева није дељиво са 3. Изгледало би да укупно бројева измеђи 1 и 5100 који нису дељиви ни са 5 ни са 3 има $5100 - 1020 - 1700$, што није тачно. Одузимајући број бројева дељивих са 3 ми још по једанпут одузимамо бројеве које смо већ искључили као дељиве са 5. Такви су, на пример 15, 30, 45, ... Пошто смо те бројеве два пута одузели да бисмо добили тачан број бројева између 1 и 5100 који нису дељиви ни са 5 ни са 3, морамо додати број таквих бројева. То су бројеви који су дељиви ни са 5 ни са 3, односно дељиви су са 15 и њих има $5100 : 15 = 340$. Коначно решење је $5100 - 1020 - 1700 + 340 = 2720$.

4 Стирлингови бројеви друге врсте

Дефиниција 4.1 Нека су n и k позитивни цели бројеви. Број партиција од $[n]$ у k блокова обележаваћемо са $S(n, k)$ и тај број се назива **Стирлингов број друге врсте**. [2]

Напомена: Из дефиниције 4.1 следи $S(n, k) = 0$ када је $k > n$. Такође $S(n, 0) = 0$ ако је $n > 0$ (јер ако има неких елемената за поделу на блокове, тада ће постојати најмање један блок) и $S(0, 0) = 1$.

Природно се намеће питање колика је вредност броја $S(n, k)$, а то није тривијално питање. Оно што смо до сада приметили је да број партиција $[n]$ у k блокова брзо расте како расте $[n]$. Следећа рекурентна релација појачаће нам интуитивно разумевање броја $S(n, k)$.

Теорема 4.1 За све позитивне целе бројеве n и k такве да је $n \geq k$ важи:

$$S(n, k) = S(n-1, k-1) + k \cdot S(n-1, k).$$

Доказ: Лева страна једнакости једнака је броју партиција од $[n]$ у k блокова. Разложићемо тај број на два сабирака и то на следећи начин: Раздвајамо све партиције у којима је n у једночланим блоковима, што ће бити први сабирак, и оне партиције где n улази у вишечлане блокове, што ће бити други сабирак. На овај начин први сабирак ће бити број свих партиција од $[n]$ у k блокова облика $\{\{n\}, \dots\}$, односно после блока $\{n\}$ иде $k-1$ блокова у које треба распоредити $n-1$ елемент, а то је управо $S(n-1, k-1)$. Други сабирак броји све партиције од $[n]$ у k блокова у којима се n не налази у једночланим блоковима. Број ових партиција добићемо тако што ћемо $n-1$ елемент распоредити у k блокова, а то је $S(n-1, k)$. Сада елемент n можемо убацити у било који од ових k блокова, тако да таквих партиција има $S(n-1, k) \cdot k$.

Последица: $S(n, 1) = S(n, n) = 1$.

Доказ: (*) $S(n, n) = S(n-1, n-1) + n \cdot S(n-1, n)$, на основу теореме 4.1.

$$n \cdot S(n-1, n) = 0 \text{ јер } n-1 < n,$$

за сваки природан број n , па на основу дефиниције 4.1 $S(n-1, n) = 0$, односно читав производ ($n \cdot S(n-1, n) = 0$) па ће овај сабирак у свакој итерацији бити нула. Након првог итеративног корака (*) изгледа овако:

$$S(n, n) = S(n-1, n-1)$$

Ако изведемо овај итеративни поступак n -пута,

$$S(n-1, n-1) = S(n-2, n-2) = \dots = S(0, 0).$$

у последњем кораку први сабирак у (*) биће $S(0, 0)$, други је све време једнак нули, а знамо да је,

$$S(0, 0) = 1 \rightarrow S(n, n) = 1.$$

$$(**) S(n, 1) = S(n-1, 0) + 1 \cdot S(n-1, 1)$$

а) $n = 1$

Онда (**) изгледа овако: $S(1, 1) = S(0, 0) + 1 \cdot S(0, 1)$, што је једнако 1 јер $S(0, 0) = 1$ и $S(0, 1) = 0$.

б) $n > 1$

Онда $(**)$ изгледа овако: $S(n, 1) = S(n-1, 0) + 1 \cdot S(n-1, 1)$, тада $S(n-1, 0) = 0$ јер $n-1 > 0$, за свако $n > 1$, следи $S(n, 1) = S(n-1, 1)$, следи, $S(n-1, 1) = S(n-2, 1) = \dots = S(1, 1) = 1$ из дела а).

$n=0$					1									
$n=1$				0		1								
$n=2$				0		1		1						
$n=3$				0		1		3		1				
$n=4$				0		1		7		6		1		
$n=5$				0		1		15		25		10		1

Слика 3: Стирлингови бројеви друге врсте за n од 1 до 5.[2]

Сада смо спремни да решимо следећи проблем, који изгледа неповезано на први поглед, али заправо нас опет доводи до $S(n, k)$. Формулација проблема није најједноставнија али је свакако пример да се са Стирлинговим бројевима друге врсте можемо срести на наизглед неочекиваним местима.

Нека су n, k природни бројеви и нека важи $1 \leq k \leq n$. Такође нека је $h(n, k)$ збир свих $\binom{n-1}{k-1}$ производа који се састоје од $n-k$ чинилаца, тако да сви ови чиниоци су елементи $[k]$. Понављање чинилаца је дозвољено, али чиниоци сваког производа треба да буду написани у растућем поретку. Дигресија, из дефиниције $h(n, k)$ значи да је $h(n, n)$ производ без чинилаца, за који ћемо по договору подразумевати да је једнак 1.

Теорема 4.2 $h(n, k) = S(n, k)$.

С обзиром да дефиниција $h(n, k)$ није једноставна, пре самог доказа теореме размотрићемо два примера, чије решавање ће нам помоћи за разумевање доказа теореме.

Пример 4.1 Нека је $n = 4$, и $k = 2$.

Решење: $h(4, 2) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 7 = S(4, 2)$.

Пример 4.2 Нека је $n = 4$, и $k = 3$.

Решење: $h(4, 3) = 1 + 2 + 3 = 6 = S(4, 3)$.

Резултат **теореме 4.2** је прилично изненађујући, иако на први поглед веза између $h(n, k)$ и $S(n, k)$ није очигледна, следећа теорема ће додатно разјаснити ту везу.

Теорема 4.3 За све природне бројеве n, k такве да $k \leq n$ важи:

$$h(n, k) = h(n-1, k-1) + k \cdot h(n-1, k).$$

Доказ: По дефиницији, лева страна је збир свих производа $(n-k)$ чинилаца који долазе из скупа $[k]$. Ови производи се могу поделити у две класе: оне који садрже k , и оне које не садрже. Производи који садрже k су производи k и $(n-k-1)$ -чинилаца из скупа $[k]$. Сабирањем свих производа ове класе добијамо $k \cdot h(n-1, k)$. Они производи који не садрже k су заправо производи елемента из скупа $[k-1]$, тако да је њихов збир $h(n-1, k-1)$. Када саберемо обе ове класе добијамо управо оно што је требало доказати.

Пример 4.3 Нека је $n = 4$ и $k = 2$. Као што смо видели у претходном примеру, три производа која се појављују у $h(4, 2)$ су $1 \cdot 1, 2 \cdot 1, 2 \cdot 2$, од свих два садрже 2. Њихова сума је:

$$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot (1 + 2) = 2 \cdot h(3, 2)$$

Преостали производ $1 \cdot 1$ не садржи 2, тако да је заправо то скуп $[1]$, и једнак је $h(3, 1)$. Заиста, $h(3, 1)$ се дефинише као збир свих производа са два чиниоца преко скупа $[1]$.

Сада, коначно, можемо се вратити на доказ **теореме 4.2**.

Доказ: Доказ ћемо извести математичком индукцијом по $n + k$.

База индукције: Нека је $n + k = 0$. То ћемо записати као $h(0, 0) = S(0, 0) = 1$, што је очигледно тачно.

Индуктивна хипотеза: Претпоставимо да важи $h(n, k) = S(n, k)$ за свако $n + k \leq m$. Сада желимо да докажемо да тврђење важи и када је $n + k = m + 1$. Тада важи:

$$\begin{aligned} S(n, k) &= S(n - 1, k - 1) + k \cdot S(n - 1, k) \\ h(n - 1, k - 1) + k \cdot h(n - 1, k) &= h(n, k) \end{aligned}$$

Горе наведене једнакости следе редом из теореме 4.1, индуктивне хипотезе, **теореме 4.3**.

Теорема 4.4 За све природне бројеве n, k такве да $n \geq k$ важи:

$$S(n + 1, k) = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} S(n - i, k - 1).$$

Предност ове теореме у односу на **теорему 4.1** је та што су све вредности које су нам потребне облика $S(n - i, k - 1)$, односно њихов други аргумент је увек $k - 1$. Ово је згодно зато што ученици лако могу ову теорему да испрограмирају и да добију вредности $S(m, k - 1)$ за унос неког фиксног k и било које m . Такође, није немогуће испрограмирати и **теорему 4.1** али би у том случају ученици морали да покажу већу програмерску технику.

Доказ: Показаћемо да обе стране броје поделе $[n + 1]$ у k блокова. За леву страну, ово следи из дефиниције Стирлингових бројева друге врсте. Са десне стране, израз $\binom{n}{i} S(n - i, k - 1)$ броји партиције $[n + 1]$ у k блокова такве да елемент $n + 1$ је у блоку величине $i + 1$. Заиста, постоји $\binom{n}{i}$ начина да изаберемо i елемената који ће делити блок са елементом $n + 1$, тада постоји $S(n - i, k - 1)$ начина преграде преосталих $k - 1$ блокова. На крају саберемо све ове начине, и то је крај доказа.

5 Белови бројеви

До сада смо писали о броју партиција природног броја у неком фиксираним броју блокова, сада ћемо се коначно, али мало, бавити бројем свих партиција.

Дефиниција 5.1 Разбијање скупа S на k блокова је колекција скупова $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$, таква да важи:

- 1.) $S_j \neq \emptyset$, за сваки број $j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 2.) $S_i \cap S_j = \emptyset$, за све $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, k\}$;
- 3.) $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$.

Сваком разбијању $\pi = \{S_1, S_2, \dots, S_k\}$ скупа S на k блокова одговара $k!$ уређених разбијања скупа S на k блокова. То су све пермутације блокова разбијања π . Сваком разбијању $\pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ n -скупа S на k блокова одговара разбијање броја n на k делова, при чему су делови тог разбијања једнаки $|S_1|, |S_2|, \dots, |S_k|$.

Нека су $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ природни бројеви чији је збир једнак n и нека је: $B_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k)$ - број уређених разбијања $(S_1, S_2, S_3, \dots, S_k)$ n -скупа S на k блокова, таквих да за сваки број $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ важи $|S_j| = \alpha_j$.

Дефиниција 5.2 Број свих партиција $[n]$ обележава се са $B(n)$, и назива се Белов број. [2]

n	$B(n)$
1	1
2	2
3	5
4	15
5	52
6	203
7	877
8	4140

Слика 4: Првих неколико Белових бројева. [2]

Као и код Стирлингових бројева, постоје неколико формула које говоре о броју Белових бројева, али оне превазилазе ниво наставе средње школе. Међутим навешћемо следећу везу између Белових бројева, коју ученици лако могу да тестирају за неке конкретне вредности n или још боље да напишу програм за различити унос броја n . Ову везу дајемо без доказа.

Пример 5.1 Одредимо B_n и сва разбијања n -скупа за $n = 1, 2, 3$

Решење: за $n = 1$: $S = \{1\}, B_1 = 1 : \pi_1 = \{\{1\}\}$.

За $n = 2$: $S = \{1, 2\}, B_2 = 2 : \pi_1 = \{\{1, 2\}\}, \pi_2 = \{\{1\}, \{2\}\}$

За $n = 3$: $S = \{1, 2, 3\}, B_3 = 5 : \pi_1 = \{\{1, 2, 3\}\}, \pi_2 = \{\{1, 2\}, \{3\}\}, \pi_3 = \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \pi_4 = \{\{2, 3\}, \{1\}\}, \pi_5 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$.

Теорема 5.1 Нека су $n, k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ природни бројеви такви да важи $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = n$. Тада важи следећа једнакост:

$$B_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \frac{n!}{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_k!}.$$

Доказ: Из скупа S можемо на $\binom{n}{\alpha_1}$ начина изабрати елементе блока S_1 , затим на $\binom{n-\alpha_1}{\alpha_2}$ можемо изабрати елементе другог блока итд. Према томе добијамо:

$$B_n(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k) = \binom{n}{\alpha_1} \binom{n-\alpha_1}{\alpha_2} \dots \binom{n-\sum_{j=1}^{k-1} \alpha_j}{\alpha_k}.$$

Теорема 5.2 Нека је $B(0) = 1$, тада за све природне бројеве n важи:

$$B(n+1) = \sum_{k=0}^n B(k) \binom{n}{k}.$$

Доказ: Нека је R колекција свих разбијања скупа $S = 1, 2, \dots, n+1$. Тада је $R = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_n$, где је R_k колекција оних разбијања скупа S , код којих елемент $n+1$, припада блоку који садржи $k+1$ елемената, где је $0 \leq k \leq n$. Блок (означимо га са S_0) који садржи укупно $k+1$ елемената скупа S и међу њима и елемент $n+1$ може бити одређен на $\binom{n}{k}$ начина. Скуп $S \setminus S_0$ садржи $n-k$ елемената, па може бити разбијен на B_{n-k} начина. Према томе важи једнакост:

$$|R_k| = \binom{n}{k} B_{n-k}, \text{ па на основу тога добијамо,} \\ B_{n+1} = |R| = \sum_{k=0}^n |R_k| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k.$$

За решавање примера који следе неопходне су нам следеће теореме, које наводимо без доказа.

Теорема 5.3 Нека су $n_1, n_2, \dots, n_k$ различити природни бројеви. Означимо са $G(n_1, n_2, \dots, n_k; n)$ број разбијања природног броја n , код којих је сваки од делова једнак неком од бројева $n_1, n_2, \dots, n_k$. Тада важи једнакост:

$$G(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k; n) = G(n_1, \dots, n_{k-1}, n_k; n - n_k) + G(n_1, \dots, n_{k-1}; n), \\ \text{при чему је:} \\ G(n_1, \dots, n_j; m) = 0, \text{ ако је } m < 0 \text{ или } G(n_1, \dots, n_j; m) = 1, \text{ за } m = 0.$$

Теорема 5.4 Нека су $n_1, n_2, \dots, n_k$ различити природни бројеви. Означимо са $H(n_1, n_2, \dots, n_k; n)$ број уређених разбијања природног броја n , код којих је сваки од делова једнак неком од бројева $n_1, n_2, \dots, n_k$. Тада важи једнакост:

$$H(n_1, n_2, \dots, n_k; n) = \sum_{j=1}^k H(n_1, n_2, \dots, n_k; n - n_j),$$

где је по дефиницији $H(n_1, n_2, \dots, n_k; m) = 0$, ако је $m < 0$ или $H(n_1, n_2, \dots, n_k; m) = 1$, ако је $m = 0$.

Пример 5.2 На колико начина се на коверту могу залепити у низу марке у укупној вредности од 40 динара, ако су на располагању (у довољном броју) марке од 5, 10, 15 и 20 динара? (Два низа се разликују, ако садрже исте марке у различитом редоследу.) [5]

Решење: Задатак је еквивалентан уређеном разбијању броја 40 на делове који су у скупу $\{5, 10, 15, 20\}$, а тај број разбијања је

$H(5, 10, 15, 20; 40) = H(1, 2, 3, 4; 8)$, што је $H(8)$. Из пример 4.5 [5] из теореме 4.5 [5] је:

$$\begin{aligned} H(8) &= H(7) + H(6) + H(5) + H(4) = H(6) + H(5) + H(4) + H(3) + \\ &+ 2H(5) + H(4) + H(3) + H(2) + H(4) = H(6) + 3H(5) + 3H(4) + 2H(3) + \\ &+ H(2) = H(5) + H(4) + H(3) + H(2) + 3H(5) + 3H(4) + 2H(3) + H(2) = \\ &= 4H(5) + 4H(4) + 3H(3) + 2H(2) = 8H(4) + 7H(3) + 6H(2) + 4H(1). \end{aligned}$$

Очигледно је $H(1) = 1$

$$H(2) = 2 \text{ (1 и 1 или само 2)}$$

$$H(3) = 4 \text{ (1 + 1 + 1, 1 + 2, 2 + 1, 3)}$$

$$H(4) = 8 \text{ (1 + 1 + 1 + 1, 2 + 1 + 1, 1 + 2 + 1, 1 + 1 + 2, 2 + 2, 1 + 3, 3 + 1, 4)}$$

$$\text{Укупно је онда } 64 + 28 + 12 + 4 = 108.$$

Пример 5.3 На колико начина се сума од 27 динара може платити новчаницама од:

а) 1 и 2 динара?

б) 2 и 5 динара?

в) 1, 2 и 5 динара? [5]

Решење: За разлику од претходног примера, овде разбијамо број на делове, где редослед није битан.

$$\text{а) } G(1, 2; 27) = G(1, 2; 25) + G(1; 27) = G(1, 2; 23) + 2 = \dots = G(1, 2; 1) + 13 = 14$$

$$\text{б) } G(2, 5; 27) = G(2, 5; 22) + G(2; 27) = G(2, 5; 17) + G(2; 22) = G(2, 5; 12) + G(2; 17) + 1 = G(2, 5; 7) + G(2; 12) + 1 = G(2, 5; 2) + G(2; 7) + 2 = 3$$

$$\text{в) } G(1, 2, 5; 27) = G(1, 2, 5; 22) + G(1, 2; 27) = G(1, 2, 5; 17) + G(1, 2; 22) + 14$$

Слично као у првом случају $G(1, 2; 22) = 12$ (можемо узети од 0 до 11 новчаница од 2 динара).

$$\begin{aligned} G(1, 2, 5; 27) &= G(1, 2, 5; 17) + 26 = G(1, 2, 5; 12) + G(1, 2; 17) + 26 = \\ &= G(1, 2, 5; 12) + 9 + 26 = G(1, 2, 5; 7) + G(1, 2; 12) + 35 = G(1, 2, 5; 2) + \\ &+ G(1, 2; 7) + 7 + 35 = 2 + 4 + 7 + 35 = 48. \end{aligned}$$

Пример 5.4 На колико начина се сума од 100 динара може платити новчаницама од 1, 2, 5 и 10 динара? [5]

Решење: $G(1, 2, 5, 10; 100) = G(1, 2, 5, 10; 90) + G(1, 2, 5; 100) = G(1, 2, 5, 10; 80) + G(1, 2, 5; 90) + G(1, 2, 5; 95) + G(1, 2; 100) = G(1, 2, 5, 10; 80) + G(1, 2, 5; 90) + G(1, 2, 5; 90) + G(1, 2; 95) + 51 = G(1, 2, 5, 10; 70) + 2G(1, 2, 5; 90) + 48 + 51 + G(1, 2, 5; 80)$ за $G(1, 2, 5; 10k)$

$A(k) = G(1, 2, 5; 10k) = G(1, 2, 5; 10k-5) + G(1, 2; 10k) = G(1, 2, 5; 10(k-1)) + G(1, 2; 10k-5) + 5k + 1 = A(k-1) + 5k - 2 + 5k + 1$

$$A(k) = A(k-1) + 10k - 1$$

$$A(1) = A(0) + 9 = 10$$

$$A(2) = A(1) + 19 = 29$$

$$A(3) = A(2) + 29 = 58$$

$$A(4) = A(3) + 39 = 97$$

$$A(5) = A(4) + 49 = 146$$

$$A(6) = A(5) + 59 = 205$$

$$A(7) = A(6) + 69 = 274$$

$$A(8) = A(7) + 79 = 353$$

$$A(9) = A(8) + 89 = 442$$

$$\begin{aligned} G(1, 2, 5, 10; 100) &= G(1, 2, 5, 10; 70) + 2 \cdot 442 + 99 + 353 = G(1, 2, 5, 10; 70) + \\ &1336 = G(1, 2, 5, 10; 60) + 274 + 1336 = G(1, 2, 5, 10; 50) + 205 + 1610 = \\ &G(1, 2, 5, 10; 40) + 146 + 1815 = G(1, 2, 5, 10; 30) + 97 + 1961 = G(1, 2, 5, 10; 20) + \\ &58 + 2058 = G(1, 2, 5, 10; 10) + 29 + 2116 = G(1, 2, 5, 10; 0) + 10 + 2145 = \\ &1 + 2155 = 21546 \end{aligned}$$

Напомена: Дефиниције функција, као и формуле које се користе у примерима 5.2, 5.3 и 5.4 преузети су из уџбеника професора Павла Младеновића. Комбинаторика, у издаваштву ДМС. Такође се могу наћи докази теорема 5.3 и 5.4. [5]

6 Партиције целих бројева

6.1 Нерастући коначни низови целих бројева

На почетку поглавља размотримо један врло илустративан проблем.

Услед селидбе породица Станковић морала је да превезе двадесет идентичних кутија. Господин Станковић хтео је да брзо пренесе све кутије, па је посегао да носи по неколико кутија истовремено. Међутим, после неколико времена постајао је све уморнији, па је био срећан ако је могао носити исти број кутија као на претходном путовању из камиона до куће. Од тежине посла није ни могао да помисли да ће повећавати број кутија које може да носи у једној тури. На колико различитих начина господин Станковић може да унесе 20 кутија у кућу?

Овај проблем може личити на композиције, али заправо проблем је комплекснији. Наиме, кутије јесу међусобно идентичне што додатно асоцира на композиције, знамо да их има двадесет и желимо да видимо на колико начина двадесет можемо да разложимо на збир природних бројева, међутим, за разлику од композиција, величина сабирака не сме да се повећава, због умора господина Станковића. Илустрације ради $12 + 8$ је прихватљиво али $3 + 4 + 1 + 10$ није.

Ово показује да имамо посла са другачијим (и видећемо, много тежим) проблемом него у претходном одељку. Следећа дефиниција почиње да поставља оквир за руковање овом новом врстом проблема набрајања.

Дефиниција 6.1 *Ако је коначан низ $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ природних бројева који задовољавају неједнакости $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_k$ као и да важи $a_1 + a_2 + \dots + a_k = n$, где је $n \in \mathbb{N}$, онда такав низ зовемо партицијом природног броја n . Број оваквих партиција обележаваћемо са $p(n)$.*

Као што видимо, поново се користи термин *партиција* као и у претходним поглављима, али читаоцу ће из контекста бити јасно у ком значењу је употребљен термин *партиција*.

Следећи пример служи као илустрација горе наведене дефиниције.

Пример 6.1 *Позитиван број 4 има 5 партиција:*

$(4), (3, 1), (2, 1, 1), (2, 2), (1, 1, 1, 1)$.

Пример 6.2 *Позитиван број 6 има 11 партиција:*

$(6), (5, 1), (4, 1, 1), (4, 2), (3, 3), (3, 2, 1), (3, 1, 1, 1), (2, 2, 2), (2, 2, 1, 1), (2, 1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1, 1)$.

Пример 6.3 *Одредити број подскупова скупа $\{1, 2, \dots, 2n\}$ у којима једначина $x + y = 2n + 1$ нема решење.*

Решење: Посматрајмо парове $(1, 2n), (2, 2n-1), \dots, (n, n+1)$. При формирању ових скупова из сваког пара можемо изабрати највише по један број. Идући по паровима, можемо изабрати, први, други или ни један од бројева (тј. имамо три могућности). Према томе има укупно 3^n начина.

Пример 6.4 На колико начина можемо изабрати два дисјунктна подскупа из скупа са n елемената?

Решење: Сваки од n елемената може да бира: хоће ли да буде у првом, другом или ниједном од скупова. Број избора је 3^n . Пошто не рачунамо избор у коме су оба скупа празна, број дозвољених избора је, $3^n - 1$, а пошто нас не занима који је скуп први а који други, решење је $\frac{3^n - 1}{2}$.

Пример 6.5 Доказати да је број партиција броја n без сабирака једнаких 1 једнак: $p(n) - p(n - 1)$.

Решење: Имамо једноставну бијекцију између партиција броја n у којима се појављује сабирак 1 и свих партиција броја $n - 1$ (брисање сабирка 1). Дакле, међу $p(n)$ партиција броја n у тачно $p(n - 1)$ њих се појављује јединица.

Следећа слика представља вредности $p(n)$ за првих неколико природних бројева.

n	$p(n)$
1	1
2	2
3	3
4	5
5	7
6	11
7	15
8	22

Слика 5: Вредности $p(n)$ за првих неколико n

Одређивање опште формуле за израчунавање вредности $p(n)$, за било који природан број n , била је област истраживања, у историји, значајних математичара попут Раманудана, Хардија, Радемахера.

Када упоредимо вредности $B(n)$ и $p(n)$ за исте промене параметра n , уочавамо да вредност $B(n)$ брже расте у односу на $p(n)$. У претходним проблемима и формулама пребројавања са којима смо се срели у ранијим поглављима, биле су, програмерским речником, експоненцијалне временске сложености, $n!$, $2^{(n-1)}$, n^k , $\dots$ Функција $p(n)$ брже расте од полиномијалне функције, а спорије од експоненцијалне, и ово наводимо без доказа, с обзиром на то да превазилази ниво наставе који може да се спроведе у средњој школи. Следећа теорема, коју

такође наводимо без доказа из горе наведених разлога, даће оцену раста функције $p(n)$, која је другачија од свих претходних функција с којима смо се срили у претходним поглављима.

Теорема 6.1 $p(n) \approx \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi \cdot \sqrt{\frac{2n}{3}})$, када $n \rightarrow \infty$.

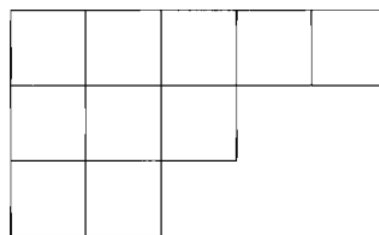
Можда се ученицима на први поглед учини да ипак $p(n)$ расте експоненцијалним растом, пошто као што је наведено у теореми, експоненцијална функција фигурише у изразу. Међутим, треба обратити пажњу да није експоненцијална функција од n , већ од $\sqrt{n}$. Наравно, мултипликативни коефицијент $\frac{2}{3}$ неће битно утицати на сложеност израза када $n \rightarrow \infty$. Као што је познато, колико год да је мала константа a , функција $\exp ax$ брже ће расти него десна страна исказа у *теорему 6.1* и самим тим брже ће расти од вредности $p(n)$. Доказ *теореме 6.1* наведен је у [1].

У наредном одељку биће представљен занимљив алат за визуализацију партиције природних бројева, назван у част америчког математичара Нормана Ферерса, Ферерсов дијаграм. Наиме, он је један од првих математичара који се бавио овом проблематиком.

7 Ферерсови дијаграми

Ферерсов дијаграм визуализује једну партицију $(a_1, \dots, a_k)$ помоћу квадрата који чине правоугаону мрежу. Први ред састоји се од a_1 квадрата, други ред од a_2 квадрата и тако даље редом, коначно k -ти ред чиниће a_k квадрата.

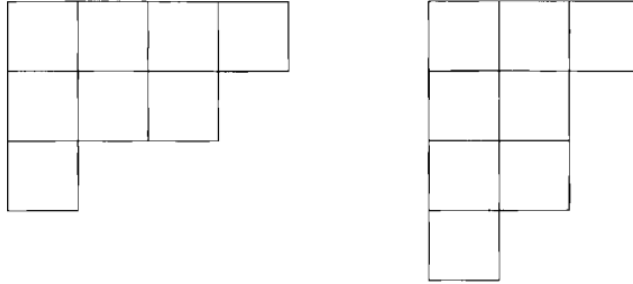
Следећа слика представља Ферерсов дијаграм који визуализује партицију $(5, 3, 2)$.



Слика 6: Ферерсов дијаграм

Посматрајмо сад две наредне слике. Додатно ће на значају добити Ферерсови дијаграми.

Као што видимо, дијаграм лево представља визуализацију партиције $(4, 3, 1)$, док дијаграм десно представља партицију $(3, 2, 2, 1)$. Лако је уочљиво да ова два дијаграма личе, наиме ако бисмо на десном дијаграму бројали квадратиће по колонама, у првој имамо 4 квадратића, у другој колони 3, док у трећој 1. Односно, управо бисмо добили $(4, 3, 1)$,



Слика 7: Ферерсови дијаграми

а та партиција је представљена левим дијаграмом. На овај начин долазимо до појма *конјуговане партиције*. Управо партиције $(4, 3, 1)$ и $(3, 2, 2, 1)$ су међусобно конјуговане. Значај Ферерсових дијаграма је у томе што са слике јасно уочавамо које су две партиције конјуговане без икакве строге дефиниције.

Ако то мало формалније искажемо доћи ћемо до следеће формулације: *За природне бројеве n, k , такве да је $k \leq n$, број партиција од n које имају најмање k делова једнак је броју партиција од n у којима је највећи део најмање k .*

Следећи пример ће послужити да додатно појасни формулацију.

Пример 7.1 Нека је $n = 5, k = 3$. Број партиција од n који имају најмање k делова је 4. То су редом $(3, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 1, 1)$. Док је број партиција од n у којима је највећи део најмање k такође 4. И то су редом $(5), (4, 1), (3, 2), (3, 1, 1)$.

Партиција p од n која има најмање k делова одговара Фереровом дијаграму од n квадрата који има најмање k редова. Конјугована партиција партицији p у ознаци p' , чији је највећи део најмање n има најмање k колона (јер је први ред најмање дужине k). Дакле, између партиције p и p' можемо успоставити бијекцију, што ћемо доказати у даљем току рада.

Теорема 7.1 За сваки природан број n , број партиција од n у којима су прва два дела једнака, једнак је броју партиција од n у којима је сваки део најмање два.

Доказ: Прва два дела партиције од n су једнака ако су прва два реда Ферерсовог дијаграма, који репрезентује ову партицију, једнака. Сваки део партиције од n најмање је 2, ако су прве две колоне његовог Ферерсовог дијаграма једнаке. Дакле, партиција и њој конјугована партиција имају исти број елемената.

Теорема 7.2 Нека је $m > k \geq 1$. Два скупа партиција од n имају исти број елемената:

- i) Скуп партиција S од n на m делова од којих је најмањи величине k .
- ii) Скуп партиција T од n на $m - 1$ делова у којима је k -ти део већи од $(k + 1)$ -ог дела и најмањи део је најмање величине k .

Пре него што буде изложен доказ теореме, наводимо један пример, ради додатног појашњења.

Пример 7.2 Нека је $n = 10, m = 4$ и $k = 2$. Тада се скуп S из горње теореме састоји од $(4, 2, 2, 2)$ и $(3, 3, 2, 2)$, док се скуп T из горе наведене теореме састоји од партиција $(5, 3, 2)$ и $(4, 4, 2)$.

Сада ћемо изложити доказ **Теореме 7.2**.

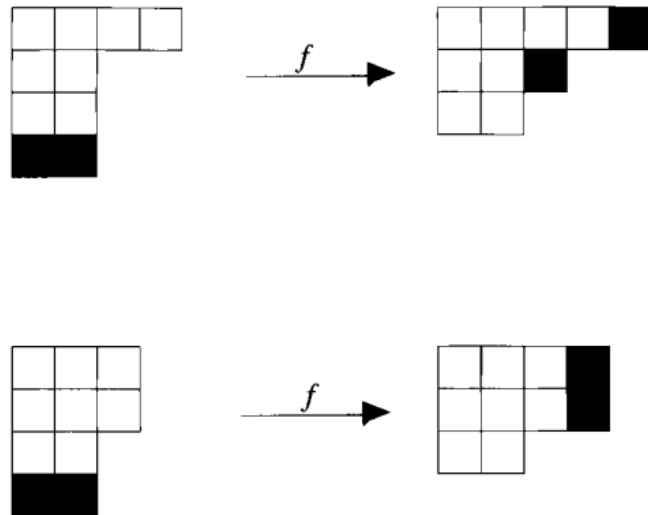
Доказ: Нека је f пресликавање такво да $f : S \rightarrow T$. Нека је $s \in S$. Уклонимо последњи ред из Ферерсовог дијаграма сачињен од k квадрата, и распоредимо равномерно k квадрата на крајеве првих k редова преосталог облика. Тако добијени Ферерсов дијаграм и даље ће имати n квадрата, и важиће да је k -ти ред већи од $(k + 1)$ -ог реда, пошто му је додељен нови квадрат за разлику од $(k + 1)$ -ог реда коме ништа нисмо доделили. Код овако добијеног Ферерсовог дијаграма последњи ред има најмање k квадрата, пошто није могао бити краћи од уклоњеног реда. Нека овај нови Ферерсов дијаграм назовемо, дијаграм $f(s)$.

Узмимо произвољно $t \in T$. Уклонимо квадрате са краја сваког од првих k редова. Можемо ово да урадимо зато што је $t \in T$. Затим, формирамо нови ред од ових k квадрата и додамо на дно дијаграма од t . Ако овако новодобијени дијаграм обележимо са s , тада $f(s) = t$. Даље, за било који облик s' , дијаграми $f(s)$ и $f(s')$ не могу бити идентични зато што ако се i -ти ред од s разликује од i -тог реда од s' , тада ће се разликовати и i -ти ред од $f(s)$ од i -тог реда од $f(s')$.

Нека је $g : T \rightarrow S$ пресликавање које дијаграму из T придружује дијаграм из S на следећи начин. Из сваког од k првих врста узимамо по један квадратић и смештамо у m -ти ред. Пресликавање је добро дефинисано јер дијаграм из T , будући да је најмањи део величине веће или једнако од k и има $m - 1 \geq k$ делова, има бар по k квадратића у свакој врсти, па новодобијени дијаграм има $m - 1 + 1 = m$ делова од којих је најмањи величине k .

Доказ инјективности g је аналоган одговарајућем доказу за инјективност f .

Следећа слика илуструје доказ **теореме 7.2**



Слика 8: Теорема 7.2

8 Ојлерова теорема о петугаоним бројевима

У овом поглављу биће изложена теорема која има толики значај да је завредила да добије назив по презимену једног од најдаровитијих математичара у историји човечанства Леонарду Ојлеру.

С обзиром на комплексност исказа као и доказа теореме, биће јој посвећено читаво поглавље, и биће уведена нотација која ће се користити у доказу.

Дефиниција 8.1 Број $p_{d, \text{непарних}}(n)$ означава број свих различитих партиција броја n на непаран број делова, при чему су сви делови међусобно различити.

Дефиниција 8.2 Број $p_{d, \text{парних}}(n)$ означава број свих различитих партиција броја n на паран број делова, при чему су сви делови међусобно различити.

Упоредимо вредности броја $p_{d, \text{непарних}}(n)$ и броја $p_{d, \text{парних}}(n)$. Ако је $n = 3$, оба ова броја узеће вредност 1. Исто важи и ако је $n = 4$. Међутим, за $n = 5$ имамо следеће:

$$\begin{aligned} p_{d, \text{непарних}}(5) &= 1 ((5)), \text{ док је,} \\ p_{d, \text{парних}}(5) &= 2 ((4,1), (3,2)). \end{aligned}$$

За $n = 6$, налазимо да је $p_{d, \text{непарних}}(6) = 2$, и то су партиције $((6), (3,2,1))$. Такође $p_{d, \text{парних}}(6) = 2$, и то су следеће партиције: $((5,1), (4,2))$.

За $n = 7$ имамо следећи случај: $p_{d, \text{непарних}}(7) = 2$, и то су партиције $((7), (4, 2, 1))$. Док је $p_{d, \text{парних}}(7) = 3$, и то су партиције $((6, 1), (5, 2), (4, 3))$.

Примећујемо из ових примера да су вредности бројева $p_{d, \text{непарних}}(n)$ и $p_{d, \text{парних}}(n)$ или једнаки или је $p_{d, \text{парних}}(n)$ већи за 1 од $p_{d, \text{непарних}}(n)$. Желимо да установимо када ће $p_{d, \text{непарних}}(n)$ и $p_{d, \text{парних}}(n)$ имати једнаку вредност, а када ће се разликовати за 1. Међутим, најпре ћемо приметити постојање још једног случаја. То је случај када је број $p_{d, \text{непарних}}(n)$ већи за 1 од броја $p_{d, \text{парних}}(n)$.

Приметимо, за $n = 1$ и $n = 2$ важиће следеће: $p_{d, \text{непарних}}(n) = 1$ док је $p_{d, \text{парних}}(n) = 0$. Овај случај ће се поновити и за $n = 12$, наима, важиће:

$p_{d, \text{непарних}}(12) = 8$, то су партиције:
 $((12), (9, 2, 1), (8, 3, 1), (7, 4, 1), (6, 5, 1), (7, 3, 2), (6, 4, 2), (5, 4, 3))$.
 $p_{d, \text{парних}}(12) = 7$, то су партиције:
 $((11, 1), (10, 2), (9, 3), (8, 4), (7, 5), (6, 3, 2, 1), (5, 4, 2, 1))$

За прва 34 природна броја важиће следеће:

$p_{d, \text{парних}}(n) - p_{d, \text{непарних}}(n) = -1$, за $n = 1, 2, 12, 15$.
 $p_{d, \text{парних}}(n) - p_{d, \text{непарних}}(n) = 1$, за $n = 5, 7, 22, 26$.
 $p_{d, \text{парних}}(n) - p_{d, \text{непарних}}(n) = 0$, у осталим случајевима.

Сада када смо направили адекватан увод и изложили проблем, Ојлерова теорема ће дати одговоре, о разлици вредности $p_{d, \text{парних}}(n)$ и $p_{d, \text{непарних}}(n)$.

Остало је још само да дефинишемо петоугаоне бројеве и можемо изложити исказ теореме.

Приметимо да бројеве 1, 2, 5, 7, 12, 15, 22, 26... можемо записати у облику $\frac{3j^2 - j}{2}$, где је j цео број.

Наима, ако је $j = 1$ имамо следеће: $\frac{3 \cdot 1^2 - 1}{2} = 1$.

Док за $j = -1$ имамо следеће: $\frac{3 \cdot (-1)^2 - (-1)}{2} = 2$.

И тако редом за различите целобројне вредности променљиве j добићемо остале бројеве.

Дефиниција 8.3 Природни бројеви n такви да испуњавају једнакост: $n = (3j^2 - j)/2$, за неко $j \in \mathbb{Z}$ називају се петоугаони бројеви.

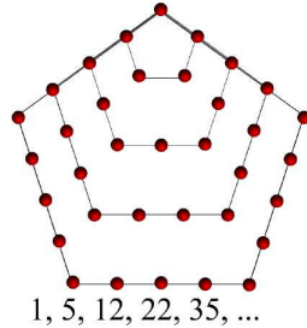
Аналогија између ових бројева и петогла постаје очигледна када видимо наредну слику на којој су наведени неки петоугаони бројеви за различите вредности j , стога и овакав њихов назив.

Теорема 8.1 (Теорема о петоугаоним бројевима)

Нека је $n \in \mathbb{N}$, тада важи:

$p_{d, \text{парних}}(n) - p_{d, \text{непарних}}(n) = 0$, ако n није петоугаони број.

$p_{d, \text{парних}}(n) - p_{d, \text{непарних}}(n) = (-1)^j$, ако $n = (3j^2 - j)/2$, где је $j \in \mathbb{Z}$.



Слика 9: Петоугаони бројеви

Пре него што пређемо на доказ теореме, уводимо ознаке. Нека је T скуп свих партиција које бројимо са $p_{d,parnih}(n)$, док је скуп S скуп свих партиција које бројимо са $p_{d,neparnih}(n)$.

Доказ (теорема о петоугаоним бројевима):

Нека је $s \in S$, и нека са $poslednji(s)$ обележавамо последњи број у партицији s . Нека је $s = (s_1, \dots, s_t)$, где су $s_1, \dots, s_t$ редом природни бројеви. Односно, $poslednji(s)$ представља број квадрата у последњој врсти Ферерсовог дијаграма, којим је представљена партиција s . Пошто важи поредак такав да $s_1 > s_2 > \dots > s_t$, од интереса је да знамо да ли су ови бројеви $s_1, \dots, s_t$ узастопни природни бројеви, почевши од највећег ка најмањем. Обележимо са $uzastopni(s)$ број чланова низа који испуњавају овај услов.

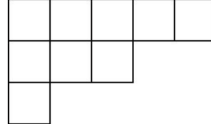
У англосаксонској литератури користи се термин *stair (eng.)* који у преводу на српски значи степенице. Аналогија је јасна јер управо Ферерсов дијаграм узастопних природних бројева изгледа као степениште.

Посматрајмо пример: ако је $s = (5, 3, 1)$, тада ће $uzastopni(s)$ бити 1, зато што се већ други број у партицији разликује за више од један од претходног, што важи и за последњи и претпоследњи број у партицији.

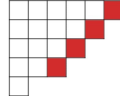
Ферерсов дијаграм који представља партицију $s = (5, 3, 1)$ приказан је на следећој слици.

Ако је $s = (4, 3, 1)$, тада ће $uzastopni(s)$ бити 2, док ће у примеру $s = (6, 5, 4, 3, 1)$, $uzastopni(s)$ бити 4.

Ферерсов дијаграм који представља партицију $s = (6, 5, 4, 3, 1)$ приказан је на следећој слици.



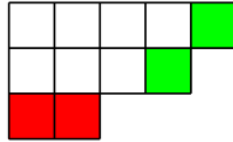
Слика 10: партиција $s = (5, 3, 1)$



Слика 11: партиција $s = (6, 5, 4, 3, 1)$ и $uzastopni(s) = 4$

Након увођења бројева $poslednji(s)$ и $uzastopni(s)$ размотримо следеће.

Нека је n природан број, нека је дата партиција s броја n састављена од k различитих делова и нека је s представљена Ферерсовим дијаграмом. Као што смо навели $poslednji(s)$ је најмањи део партиције (број квадратића последње врсте дијаграма), док је $uzastopni(s)$ број првих елемената партиције који су узастопни бројеви. На следећој слици $poslednji(s)$ обојени су црвеном бојом док су $uzastopni(s)$ обојени зеленом бојом.



Слика 12: партиција $poslednji(s)$ и $uzastopni(s)$

Посматрајмо два случаја:

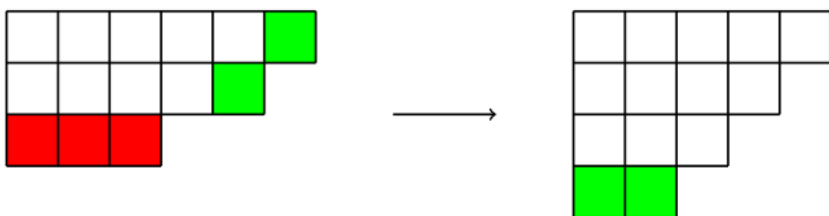
1. $poslednji(s) \leq uzastopni(s)$
2. $poslednji(s) > uzastopni(s)$

У случају када важи $poslednji(s) \leq uzastopni(s)$ може се последња врста премести на начин као што је представљено на следећој слици.



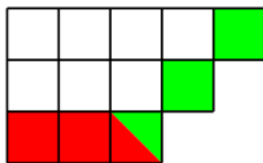
Слика 13: $(5, 4, 2)$, $poslednji(s) = 2$, $uzastopni(s) = 2$, $k = 3$. Одговарајућа партиција партицији $(5, 4, 2)$ је $(6, 5)$.

У случају када важи $poslednji(s) > uzastopni(s)$ последња поља првих $uzastopni(s)$ редова могу се преместити на дно дијаграма, као што је приказано на следећој слици.



Слика 14: $(6, 5, 3)$, $poslednji(s) = 3$, $uzastopni(s) = 2$, $k = 3$. Одговарајућа партиција партицији $(6, 5, 3)$ је $(5, 4, 3, 2)$.

Изузетак је када важи $poslednji(s) = uzastopni(s) = k$, где је k број врста дијаграма. Овај случај биће представљен на следећој слици.



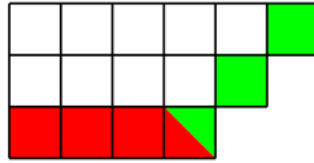
Слика 15: $(5, 4, 3)$, $poslednji(s) = 3$, $uzastopni(s) = 3$, $k = 3$.

У овом случају, као што илуструје слика, не можемо преместити последњу врсту дијаграма, једно поље би остало на свом месту, односно остало би нераспоређено. На овај начин у новодобијеној партицији важило би $poslednji(s) = 1 \leq uzastopni(s)$, те ћемо се на овај случај вратити накнадно.

Сада размотримо случајеве у којима важи $poslednji(s) > uzastopni(s)$.

Као што смо претходно напоменули овде можемо да распоредимо последња поља првих $uzastopni(s)$ врста на дно дијаграма. У овом случају у добијеној партицији вредност $uzastopni(s)$ се не може смањити док вредност $poslednji(s)$ у новодобијеној партицији има вредност $uzastopni(s)$ из старе партиције. Тако да важи $poslednji(s) \leq uzastopni(s)$ као у првом случају.

И овде имамо један специјални случај када важи $poslednji(s) = uzastopni(s) + 1$, и $uzastopni(s) = k$, где је k број врста Ферерсовог дијаграма. Такође, овај случај биће приказан на следећој слици.



Слика 16: $(6, 5, 4)$, $poslednji(s) = 4$, $uzastopni(s) = 3$, $k = 3$.

Као што се види са слике, када би последње делове из првих $uzastopni(s)$ редова распоредили на дно дијаграма, добили би последња два реда која би била са истим бројем делова. У конкретном примеру са слике када би из прва три реда (јер је број $uzastopni(s) = 3$) распоредили на дно дијаграма добили би две исте врсте са по три квадрата.

Дакле, осим у два наведена специјална случаја, партиције које испуњавају случајеве 1 и 2 се могу упарити - трансформација је бијективна. Односно сваку партицију са парним бројем делова можемо пресликати у партицију са непарним бројем делова, и обрнуто. Односно број $p_{d,parnih}(n)$ биће једнак $p_{d,neparnih}(n)$. Притом се број делова нове партиције у случају 1 смањује за један, а у случају 2 повећава за један.

У оба случаја, парност броја делова упарених партиција се разликује, што значи да је $p_{d,parnih}(n) - p_{d,neparnih}(n) = 0$.

Сада остаје размотрити два наведена специјална случаја. У случају када је $poslednji(s) = uzastopni(s) = k$, где је k број врста Ферерсовог дијаграма којим је представљена партиција s . Приметимо следеће, нека је $p = poslednji(s)$, због једноставнијег записа, тада важи:

$$\begin{aligned} n &= p + (p + 1) + \dots + (p + k - 1) = \\ &= k \cdot \frac{p + p + k - 1}{2}, \text{ како је } p = k \text{ у овом случају, тада је,} \\ &= k \cdot \frac{3k - 1}{2} = \frac{3k^2 - k}{2}. \end{aligned}$$

Односно, n је петоугаони број.

И у другом специјалном случају када важи да је $poslednji(s) = uzastopni(s) + 1$, и $uzastopni(s) = k$, где је k број врста Ферерсовог дијаграма. Поновићемо ознаку због једноставнијег записа $poslednji(s) = p$, односно $p = k + 1$.

$$\begin{aligned} n &= p + (p + 1) + \dots + (p + k - 1) = \\ &= k \cdot \frac{p + p + k - 1}{2} = \\ &= k \cdot \frac{k + 1 + k + 1 + k - 1}{2} = \end{aligned}$$

$$= k \cdot \frac{3k+1}{2}.$$

Такође, закључујемо да је n петоугаони број, односно оба специјална случаја се јављају само у случају када је n петоугаони број. И тада ће бити $p_{d,parnih}(n) - p_{d,neparnih}(n) = 1$ када је k парно и ово је уочљиво из дефиниције петоганог броја. Док ће $p_{d,parnih}(n) - p_{d,neparnih}(n) = -1$ за непарно k .

Литература

- [1] G. Andrews. *The Theory of Partitions*. Addison-Wesley, 1976.
- [2] Miklos Bona. *Introduction to Enumerative Combinatorics*. Mc GRAW hill, 2007.
- [3] Срђан Огњановић Живорад Ивановић. *Збирка задатака и тестова за IV разред гимназија и техничких школа*. Завод за уџбенике и наставна средства, 2005.
- [4] Душан Георгијевић Милутин Обрадовић. *Математика са збирком задатака за 4. разред средње школе (гимназије природно-математичког смера)*. Завод за уџбенике и наставна средства, 2011.
- [5] Павле Младеновић. *Комбинаторика*. Друштво матемематичара Србије, 2001.