UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Vjera Savović

KOMPARATIVNA ANALIZA ZNANJA UČENIKA IZ KOMBINATORIKE NA POČETKU I KRAJU PREDMETNE NASTAVE

master rad

Beograd, 2023.

Mentor:

dr Tanja Stojadinović, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

prof dr Aleksandar Lipkovski, redovni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Slavko Moconja, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Goranu, Ognjenu i Teodori. Aksiom

Naslov master rada: Komparativna analiza znanja učenika iz kombinatorike na početku i kraju predmetne nastave

Rezime: Kombinatorika je matematička disciplina koja se proučava kako u akademskim krugovima tako i u osnovnim i srednjim školama. Cilj ovog rada je da se uporede učeničko razumevanje i (možda intuitivno) znanje kombinatorike na početku i kraju predmetne nastave - odnosno pre i posle nastave matematike sa diplomiranim matematičarima. Proučavanje ove teme ima važnost u razumevanju kako učenici razvijaju i stiču veštine u kombinatorici tokom obrazovnog procesa. Ovo istraživanje će pružiti uvid u efektivnost nastave kombinatorike i identifikovati oblasti u kojima učenici mogu imati poteškoća. Navodi se predlog za dalje poboljšanje nastavnog plana i programa u oblasti kombinatorike, sa ciljem da se učenicima pruži čvrsto znanje i veštine za primenu u matematičkim i realnim situacijama.
Ključne reči: kombinatorika, nastava, komparacija

Sadržaj

Glava 1

Uvod

1.1 Malo o kombinatorici

Kombinatorika je deo matematičke nauke koji se bavi prebrojavanjem kao sredstvom u rešavanju zadataka, kao i samim ciljem da se dobiju rezultati; takođe izučava kombinovanje elemenata prema zadatim uslovima radi formiranja novih aranžmana.

Kako se kombinatorika prožima sa ostalim oblastima matematike, teško je izdvojiti jedinstvenu definiciju, ali za sada su definisane sledeće grane kombinatorike:

- enumerativna, koja se bavi prebrojavanjima specifičnih struktura, odnosno aranžmanima ili konfiguracijama, povezano sa diskretnim skupovima,
- egzistencija, koja se bavi postojanjem specifičnih struktura koje zadovoljavaju izvesne zadate kriterijume
- konstrukcija i formiranje ovakvih struktura, skupova i formacija
- optimizacija odnosno nalaženje najbolje strukture koja će zadovoljiti naše kriterijume.

Ova raznovrsnost omogućava korišćenje kombinatorike da se reše problemi u mnogim oblastima matematike, pogotovo u teoriji verovatnoće (u prebrojavanju mogućih ishoda, ali i u nediskretnoj verovatnoći), u algebri (gde se pomažemo kombinatoričkim aparatom da bismo razvrstali svojstva nekih određenih struktura), geometriji i topologiji; kao i mnogim ne-matematičkim naukama, kao npr. u evolutivnoj biologiji i kompjuterskim naukama radi analize algoritama. U kasnom dvadesetom veku razijaju se teorijske metode koje ovu granu matematike izdvajaju kao samostalnu.

Iz ovih razloga, definicije kombinatorike su mnoge i raznovrsne. Leon Mirsky[1] je o kombinatorici rekao:

> "Combinatorics is a range of linked studies which have something in common and yet diverge widely in their objectives, their methods and the degree of coherence they have widely attained."

1.2 Istorija kombinatorike

U ovom odeljku biće predstavljen kratak pregled kombinatorike kroz istoriju, sa malim osvrtom i na civilizacije nastale van evropskog kontinenta.

Jedan od prvih pomena kombinatorike jeste legenda o kineskom caru Yu (koji je vladao oko 2200 p. n. e.) koja je govorila o magičnom kvadratu na leđima nebeske kornjače, čiji brojevi su prikazani na slici sa desne strane.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Slika 1.1: magični kvadrat

Magični kvadrat je matematička konstrukcija u kojoj se brojevi raspoređuju u matricu tako da suma svih brojeva u svakom redu, koloni i dijagonalama bude ista. Magični kvadrati su bili predmet interesovanja mnogih kineskih matematičara i filozofa tokom vekova koji su razvili različite tehnike za konstrukciju magičnih kvadrata i proučavali njihove osobine.

U Indiji, Sušruta[2] je u svojoj knjizi "Sushruta Samhita" naveo zadatak o permutacijama, na veoma indijski način, začinjeno: ako imamo šest začina koliko kombinacija začina možemo napraviti, pri čemu možemo birati koliko se začina uključuje.

U Evropi, Grčki matematičari poput Euklida, Arhimeda i Eratostena bavili su se problemima kombinatorike. Na primer, Eratosten je proučavao različite načine na koje se mogu rasporediti osnovne boje na kocki.

U doba renesanse, Leonardo Fibonači i Đordano Nemore, upoznaju javnost Evrope sa matematikom istočnjačkog sveta u svom delu "Knjiga proračuna" [3]. Ovo delo bilo je revolucionarno obzirom da je bilo prvo koje je koristilo sistem nalik arapskim brojevima; takođe ovde možemo naći prvu pojavu Fibonačijevih brojeva u zapadnjačkoj literaturi. Na istoku je ovaj niz bio poznat od ranije. Indijski matematičar

[1](1918-1983), rusko-britanski matematičar koji se posebno bavio teorijom brojeva, linearnom algebrom i kombinatorikom

[2]Maharishi Sushruta, indijski hirurg i lekar, živeo u šestom veku p. n. e.

[3]originalni naziv - "Liber Abaci"

Pingala [4] opisao je sličan niz brojeva koji opisuje ritmičke oblike poznate kao ”Pingala meter”. Naziv ”Pingala meter” na indijskom se odnosi na ritmički oblik koji je opisan u staroj indijskoj poemi ”Pingala Chandahshastra” dok je u samom delu naveden sličan niz brojeva koji je opisivao ritmičku strukturu pesme. Slični nizovi brojeva bili su takođe poznati i u srednjovekovnoj arapskoj matematici - Al-Karadži[5] je bio jedan od pionira u proučavanju algebre i teorije brojeva. On je opisao niz brojeva koji se danas naziva ”Karadžijev niz” ili ”Al-Karadžijev niz”. Ovaj niz funkcioniše na sličan način kao Fibonačijev niz, gde se svaki broj u nizu dobija zbirom prethodna dva broja. Al-Karadži je opisao ove brojeve u svom delu ”Pohvala” (u originalnom nazivu - ”Al-Fakhri”; prevod zavisi od konteksta te je dosta ”slobodan”), gde je izneo nekoliko svojstava i primena ovog niza.

Nemore [6] je bio prvi matematičar koji je binomne koeficiente prikazao u obliku trougla u svom delu ”O aritmetici”[7]. Binomne koeficiente je u Persiji uveo već pomenuti Al-Karadži krajem desetog veka, na Srednjem istoku u poznat od 1266. godine a u Kini se pominje nešto kasnije početkom četrnaestog veka. Ovaj trougao sada nosi naziv po Blejzu Paskalu, koji je u svom (posthumno objavljenom) delu ”Zakoni o aritmetičkom trouglu” [8] prikupio do tada poznata znanja o ovom trouglu i pokušao te zakonitosti da primeni na rešavanje problema u teoriji verovatnoće. U svom delu ”Razmišljanja” [9] koristio je elemente teorije igara kako bi dokazao da je racionalno verovati u boga. Ovaj misaoni argument nazvan je ”Paskalova opklada”, ali nije jedini primer primene kominatorike u njegovim delima: kako je došlo do toga da Paskal ima snažnu potrebu da objasni i razreši misterije igara na sreću, može se samo nagađati, ali njegov i Lajbnicov rad se može pronaći u ”Umetnost kombinatorike” [10] objavljenom 1666. godine. Ovo delo je zaslužno za njihovu titulu ”očeva moderne kombinatorike”.

U 18. veku, švajcarski matematičar Leonard Ojler ostvario je značajan napredak u kombinatorici. Ojler je proučavao probleme kao što su putevi u grafu i poliedri, postavljajući temelje za modernu teoriju grafova.

U 19. veku, kombinatorika je postala značajna grana matematike. Matematičari

[4] Acharya Pingala, 3 vek p. n. e. , autor i ”Chandaḥśāstra”, u kome je između ostalog prvi put naveden binarni brojevni sistem u odnosu sa poezijom na sanskritu

[5] Abu Bakr Muhamed ibn al Hasan al-Karaji, 11 vek p. n. e., persisjski matematičar

[6] Jordanus de Nemore, 13 vek, italijanski matematičar

[7] u originalu - ”De Arithmetica”

[8] u originalu - ”Traité du triangle arithmétique”

[9] u originalnom - ”Pensées”, napisanom 1657-58

[10] u originalu - ”De Arte Combinatoria”

poput Augustusa de Morgana, Džordža Kantora i Henrija Poincaréa doprineli su razvoju kombinatorike kroz svoje radove na teoriji skupova, kombinatornim strukturama i topologiji.

U 20. veku, kombinatorika je postala samostalna disciplina sa svojim specifičnim konceptima i tehnikama. Brojni matematičari, poput Paula Erdősa, Richarda R. Radoa i R. C. Bosea, dali su značajan doprinos razvoju kombinatorike, uključujući teoriju grafova, dizajniranje eksperimenata, teoriju kodiranja i druge oblasti.

Glava 2

Kurikulum matematike i kombinatorika

Postoje brojni matematički klubovi i organizacije koje organizuju takmičenja i seminare, kao što su ”Kengur bez granica”, ”Klub matematičara Srbije”, ”Matematičko društvo Arhimed”, ”Matematičko društvo Srbije” itd. Održavaju se i brojna takmičenja na nacionalnom i međunarodnom nivou, kao što su Balkanska matematička olimpijada, Međunarodna matematička olimpijada, Centralnoevropska matematička olimpijada, Međunarodna olimpijada iz informatike itd.

Kroz proučavanje kombinatorike, učenici stiču sposobnost analitičkog razmišljanja, problem-solving veštine i razvijaju matematičku intuiciju.

Na početku predmetne nastave, učenici često imaju osnovno razumevanje kombinatoričkih problema, ali im nedostaje sistematsko znanje i pristup u rešavanju tih problema. Kroz nastavni plan i program, učenici se postepeno uvode u osnovne koncepte kombinatorike, kao što su permutacije, kombinacije i princip množenja. Ovi koncepti omogućavaju učenicima da razumeju osnovna pravila brojanja i da počnu rešavati jednostavnije kombinatoričke probleme.

Kako se predmetna nastava kombinatorike bliži kraju, učenici stiču dublje razumevanje i veštine u rešavanju složenijih kombinatoričkih problema. Oni se upoznaju sa naprednijim konceptima kao što su binomni koeficijenti, varijacije, kombinacije i rekurzivne relacije. Ova složenija znanja omogućavaju učenicima da rešavaju kompleksnije kombinatoričke probleme i primene kombinatoričke tehnike na različite oblasti.

2.1 Razredna nastava - prvi susret sa matematikom

U razrednoj nastavi za osnovnoškolce, učitelj je odgovoran za predavanje i vođenje nastave u svim predmetima za jedno odeljenje određenog razreda.

Da bi postao učitelj u razrednoj nastavi u Srbiji, potrebno je zadovoljiti određene obrazovne kriterijume. Uopšteno govoreći, učitelj mora imati završen fakultet u oblasti pedagogije ili odgovarajućem predmetu koji se predaje u osnovnoj školi. Konkretno, učitelji u razrednoj nastavi često završavaju fakultet ili visoku školu pedagoškog profila, kao što je Fakultet pedagoških nauka, Fakultet za učiteljsko obrazovanje ili sličan program. Nakon završenog osnovnog obrazovanja, učitelji prolaze kroz pripravnički staž i polažu stručni ispit kako bi dobili licencu za rad.

Na samom Učiteljskom fakultetu Univerziteta u Beogradu, po osnovnom programu iz 2022. godine, postoje ukupno dva predmeta "čiste" matematike, *Matematika 1* na prvoj godini studija i *Matematika 2* na drugoj godini studija, oba kao jednosemestralni predmeti i oba kao obavezni predmeti. Osim ova dva obavezna predmeta, postoje i *Metodika nastave 1* na trećoj godini, *Metodika nastave matematike 2*, *Ocenjivanje u nastavi matematike*, *Udžbenik matematike - osnovna knjiga za učenje* na četvrtoj godini. (planovi preuzeti sa sajta učiteljskog fakulteta).

Na nedeljnom nivou, đaci u nižim razredima osnovne škole imaju pet časova matematike nedeljno. Na godišnjem nivou, ukupan broj časova matematike varira u zavisnosti od rasporeda časova i dužine školske godine. Uobičajeno, školska godina u Srbiji traje 36 nedelja tako da je planirano da se održi 180 časova matematike.

Plan i program matematike u prva četiri razreda uključuje nastavne teme:

Prvi razred:

- Geometrija (podeljena na tri podoblasti - predmeti u prostoru i odnosi među njima; linija i oblast; klasifikacija predmeta prema svojstvima)
- Prirodni brojevi do 100 (deo koji je za kombinatoriku "zanimljiv" je 1MA. 2.1.1. - ume da primeni svojstva prirodnih brojeva (paran/neparan, najveći-/najmanji, prethodni, sledeći broj) i razume dekadni brojevni sistem,
- Merenje i mere

Drugi razred:

- Brojevi do 100 (obrazovni standardi koji su nam od interesa: 1MA.1.1.1. - zna da pročita i zapiše dati broj, ume da uporedi brojeve po veličini i prikaže broj na datoj polupravoj 1MA.2.1.5. - ume da rešava zadatke sa nepoznatim činiocem, deljenikom ili deliocem, 1MA. 1.3.1. - ume da pročita i formalno zapiše razlomak $\frac{1}{n}, (n \leq 10)$), 1MA.1.3.2. - ume da izračuna n-ti deo neke celine (gde je $0 < n \leq 10$)
- Geometrija
- Merenje i mere

Treći razred:

- Brojevi do hiljadu, računske operacije
- Geometrija - prave i uglovi, geometrijske figure,
- Merenje i mere - poređenje mera uglova, upoređivanje razlomaka

U ovom razredu se naglasak daje na rešavanju zadataka koji su postavljeni tekstualno. U trećem razredu počinju takmičenja iz matematike; ove školske godine su bili ponuđeni sledeći zadaci na opštinskom takmičenju:

1. U voćnjaku je 27 stabla šljiva i 19 stabla kajsija, a stabla jabuka je 11 manje nego šljiva i kajsija ukupno. Koliko je ukupno stabala šljiva, kajsija i jabuka u voćnjaku?

2. Ako broj dedinih godina smanjiš 9 puta i dobijeni broj smanjiš za 6, dobićeš broj 3. Koliko godina ima deda?

3. Zapiši rimskim ciframa X, C i D brojeve koji nisu manji od 190, a koji su manji od 600. U zapisu jednog broja ne moraš da koristiš sve rimske cifre a istu cifru možeš najviše dva puta da ponoviš.

4. Koliko puta se upotrebi cifra 6 u zapisima brojeva pete stotine?

5. Broj a je najveći neparan broj šeste stotine. Broj b je najmanji paran broj druge stotine koji nastaje izostavljanjem sedam cifara u nizu cifara 2501687943, bez menjanja njihovog redosleda. Odredi razliku a-b.

U trećem zadatku već vidimo osnovnu ideju kombinacija, za koju nisu formalno obučavani. U daljem tekstu ovog rada biće dalje objašnjeno šta su kombinacije kao i kako bi mogle da se predstavljaju odnosno predaju đacima.

Četvrti razred

- Brojevi - aritmetičke operacije i izrazi brojeva do 1000
- Geometrija
- Merenja i mere - metarski sistem mera za dužinu i površinu

Zadaci koji su bili ove školske godine na opštinskom takmičenju:

1. Sada je 20 časova i 12 minuta. Prikazivanje filma je počelo pre 24 minuta a završava se u 21 čas i 49 minuta. Koliko traje film, ako se za vreme prikazivanja filma emituju 3 reklamna bloka od po 7 minuta?

2. U zoološkom vrtu u tri kaveza smešteni su zečevi, zmije i ptice. Deca su ukupno u sva tri kaveza prebrojala 24 glave, 14 krila i 62 noge. Koliko je zečeva, zmija i ptica u tim kavezima?

3. Napiši sve četvorocifrene brojeve čiji je zbir cifara 7 i čija je cifra stotina manja od 2, a cifra desetica veća od 4.

4. Patike su za 260 dinara skuplje od ranca. Nakon povećanja njihovih cena, patike su za 290 dinara skuplje od ranca. Za koliko dinara je povećana cena ranca, ako je cena patika povećana za 80 dinara?

5. Pravougaonik se sastoji iz 5 jednakih kvadrata. Izračunaj obim jednog od tih kvadrata ako je obim pravougaonika jednak 84 cm.

Među ovim zadacima, u petom zadatku vidimo začetke tesalacije. U radu će biti kasnije objašnjeno i pojam teselacije kao i samo učenje iste kroz razrede.

Ono što se može uočiti u ovim planovima (preuzeti sa sajta Zelena učionica kao izvedeni planovi koje je ponudila izdavačka kuća Logos), glavne oblasti u nastavi matematike u razrednom periodu školovanja se svodi na podučavanje đaka osnovnim pravilnostima među brojevima, geometrijom i merenjima.

2.2 Predmetna nastava u osnovnoj školi

Nakon razredne nastave, na polovini osnovnoškolskog obrazovanja, prelazi se na model predmetne nastave. Ovo je obrazovni proces u kojem se specifični predmeti ili discipline podučavaju na detaljnijem i dubljem nivou. Svaki predmet se tretira kao zasebna disciplina, a učenici se fokusiraju na duboko razumevanje i proučavanje tog predmeta. Ova vrsta nastave takođe pomaže učenicima da se specijalizuju za određene predmete, razviju analitičke veštine, kritičko razmišljanje i sposobnost rešavanja problema u okviru svojih specifičnih oblasti interesovanja.

Nastavnici matematike u osnovnoj školi trebaju da imaju odgovarajuće kvalifikacije i obrazovanje koje ih priprema za predavanje matematike: potrebno je završiti fakultet sa diplomom iz matematike ili srodnog matematičkog područja, kao i završiti program za obrazovanje nastavnika koji pruža pedagošku pripremu za rad u školama. Malo konkretnije, pedagošku pripremu za rad u školama budući nastavnik dobije u sklopu predmeta poput ''*Metodika nastave*", *"Psihologija"*, *"Pedagogija"*, i podrebno je položiti ove predmete u vrednosti od 35 EPSB. Pored njih, jedan od obaveznih je i *"Praksa nastave"*, koji se na Matematičkom fakultetu nalazio na osnovnim studijama do akreditacije 2008. godine, ali sada je među predmetima na master studijama.

Iskustvo je pokazalo da nema mnogo kandidata koji ispunjavaju sve ove zahteve i žele da se bave nastavom, pogotovo u školi. The show must go on, tako se i nastava matematike mora održati. To za posledicu ima da pojedini delovi gradiva učenicima ne budu dovoljno jasno predstavljeni kao ni da se učenici ne motivišu na ispravne načine da nastavu usvoje. Ovo nije svojstveno samo u osnovnoj školi, ali prvo se ovde uočava.

Peti razred:

Nastavne teme koje se uče u petom razredu:

- Skupovi
- Osnovni geometrijski objekti
- Ugao
- Deljivost brojeva
- Razlomci

- Osna simetrija

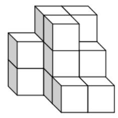
Zadaci koji su bili na školskom takmičenju ove godine:

1. U petom razredu jedne škole ima 60 učenika od kojih 39 za užinu kupuje kifle, 28 kupuje perece, a 16 učenika i kifle i perece. Koliko učenika ne kupuje ni kifle ni perece?

2. Zapiši sve podskupove skupa $\{\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{4}{9}, \frac{5}{9}\}$ tako da je zbir svih elemenata tog podskupa manji od $\frac{7}{9}$.

3 Odredi sve šestocifrene brojeve oblika $202a2b$ koji su deljivi i sa 3 i sa 4.

4. Dat je pravougaonik $ABCD$ i tačke E i F takve da je E između A i B, a tačka F između Ci D. Zapiši sve trouglove čija temena pripadaju skupu $\{A, B, C, D, E, F\}$.



5. Mila je napravila telo od 15 jednakih kocki prikazano na slici. Izračunaj površinu i zapreminu ovog tela ako je površina strane koja je na tlu jednaka 112cm2.

Među ovim zadacima primećujemo sledće: u zadatku 1 primenjuje se princip uključivanja i isključivanja; u zadatku 2 uočavamo konstruisanje podskupova, mada se ne traži prebrojavanje, obzirom da je zahtev zadatka da se ispišu svi, usput se i prebroje; u zadatku 3 primenjuju se pravila deljivosti - iako nisu složeni brojevi traži se istovremeno deljivost sa dva broja.

Šesti razred:

- Celi brojevi
- Trougao
- Racionalni brojevi
- Četvorougao
- Jednačine i nejednačine
- Površina trougla i četvorougla

Zadaci koji su bili na opštinskom takmičenju ove godine:

1. Dati su razlomci $\frac{43}{337}$ i $\frac{6}{47}$. Koji broj treba oduzeti i od brojioca i od imenioca manjeg razlomka da bi dobijeni razlomak bio jednak većem od njih.

2. Tri vrste žetona: beli, crni i crveni, poređani su u jedan niz. Prvo su beli žetoni poređani u jedan niz, zatim je između svaka dva bela žetona stavljen po jedan crni žeton. Na kraju je između svaka dva žetona u nizu stavljen po jedan crveni žeton. Koliko je bilo belih žetona ako je ukupno postavljeno u niz 397 žetona?

3. Za oštrougli tougao ABC važi da je razlika unutrašnjih uglova kod temena A i C jednaka $50°$ i da se normale iz temena A i C seku u tački H tako da je $\angle AHC = 110°$. Izračunaj mere unutrašnjiih uglova tog trougla.

4. Dat je broj 123456789. Koliko najmanje cifara treba precrtati da bi preostali broj bio deljiv sa 36?

5. U pravouglom trouglu ABC sa pravim uglom u temenu C simetrale oštrih uglova seku naspramne katete u tačkama A_1 i B_1 na hipotenuzi. Tačka M je podnožje normale iz tačke A_1 na hipotenuzu, a tačka N podnožje normale iz tačke B_1 na hipotenuzu. Odredi meru ugla MCN.

Među ovim zadacima možemo primetiti sledeće: u zadatku broj 2, đacima se traži da neformalno prebroje količinu elemenata u kombinaciji; u zadatku broj 4 primenjuju se pravila deljivosti složenim brojevima.

Sedmi razred:

- Realni brojevi
- Pitagorina teorema
- Celi i racionalni algebarski izrazi
- Mnogouglovi
- Polinomi
- Pravougli koordinatni sistem
- Razmera i proporcije
- Sličnost

Sledeći zadaci su bili ove godine postavljeni na opštinskom takmičenju iz matematike:

1. Odredi složen prirodan broj s i prost broj p, takve da je

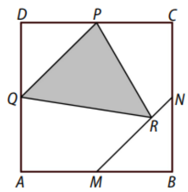
$$\frac{32^5 \cdot 16^4 \cdot 8^3}{64^2} = s^p$$

2. Romb $ABCD$ ima stranicu $6cm$ i ugao od 60° kod temena A. Iz temena B konstruisane su visine romba BE i BF. Izračunaj obim i površinu trougla BEF.

3. Odredi prost broj p i različite cele brojeve a i b, takve da je

$$p + |a \cdot b| = 10$$

Koliko rešenja postoji (smatramo da je rešenje isto ako brojevi a i b zamene vrednosti)?



4. Izračunaj površinu trougla PQR sa slike ako je stranica kvadrata jednaka $12cm$. Tačke M, N, P i Q su središta stranica kvadrata, a tačka R proizvoljna tačka duži MN.

5. Nata je redom zapisivala brojeve: $1, -3, 5, -7, 9, -11 \cdots$ (naizmenično menja znak brojeva koji po apsolutnoj vrednosti formiraju niz neparnih prirodnih brojeva). Koliko brojeva Nata može zapisati tako da zbir svih brojeva bude delilac broja 2023?

U zadatku broj 5 prisutni su pravila deljivosti i rekurzije.

Osmi razred:

- Sličnost trouglova
- Tačka, prava i ravan
- Linearne jednačine sa jedenom nepoznatom
- Prizma
- Linearne nejednačine sa jednom nepoznatom
- Piramida
- Linearna funkcija
- Grafičko predstavljanje statističkih podataka
- Sistem linearnih jednačina sa dve nepoznate

- Obrtna tela - valjak, kupa, lopta

Slede zadaci sa opštinskog takmičenja ove godine:

1. Na svakoj stranici kvadrata dato je 5 tačaka. Nijedna od ovih tačaka nije teme kvadrata. Koliko ima trouglova sa temenima u ovim tačkama?

2. Neka je dat pravilan osmougao $ABCDEFGH$. Simetrale ugla ABC i duž AD seku se u tački S. Odrediti meru ugla ASB.

3. Na kocku čija je ivica dužine $10cm$ postavljena je pravilna četvorostrana prizma tako da su temena njene osnove središta ivice jedne strane kocke. Izračunaj zapreminu tog tela ako je visina prizme jednaka ivici kocke.

4. Svaka od tri sestre: Jaca, Cica i Mica kupila je sebi materijal za šivenje haljine. Jaca je kupila za trećinu više od Cice, a Mica je za 1.6 metara manje od Jace. Ako bi Jaca dala četvrtinu svog materijala Mici, a Cica trećinu svog materijala opet Mici, onda bi Mica imala materijala koliko ukupno Jaca i Cica. Koliko metara za šivenje haljina kupila svaka od sestara?

5. Data je jednačina $8x + 3y = 2022$. Neka su $(x1, y1), (x2, y2), ..., (xn, yn)$ svi parovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju datu jednačinu. Izračunati zbir $x1 + x2 + ... + xn$

U zadatku broj 1 i u zadatku broj 5 primenjuju se principi množenja u svrsi prebrojavanja.

Iz ovih kurikuluma, možemo da zaključimo da, iako nije formalno, kombinatorika je prisutna kroz jednostavne koncepte i primene. Nekoliko primera kombinatorike koji se mogu pronaći među zadacima u zbirkama matematike za osnovnu školu su:

Permutacije: učenici se mogu upoznati s pojmom permutacija kroz jednostavne primere, kao što su permutacije slova u imenima ili boja u nizu. Na primer, koliko je mogućih načina da se slova u reči "TRSKA" poređaju? (Odgovor: 120).

Kombinacije: kombinacije predstavljaju načine na koje se mogu birati elementi iz skupa bez obzira na redosled. Na primer, koliko je mogućih načina da se iz skupa od 10 brojeva izaberu 3? (Odgovor: 120).

Brojanje na osnovu principa množenja: učenici se mogu upoznati s pravilom množenja kroz jednostavne primere. Na primer, ako postoji 3 boje i 2 oblika, koliko je mogućih kombinacija boje i oblika? (Odgovor: 6).

Razlaganje na slučajeve: učenici se mogu upoznati s razlaganjem problema na manje delove radi lakšeg rešavanja. Na primer, koliko je mogućih načina da se na tabli za iks oks od 3x3 polja obeleže 2 polja, ako se razmotre različiti slučajevi (polja u istom redu, polja u istoj koloni, polja na istoj dijagonali)?

Kroz ove primere i druge jednostavnije koncepte, učenici osnovne škole mogu stvoriti temelj za kasnije učenje i razumevanje složenijih kombinatornih problema.

2.3 Srednja škola - gimnazija

Tokom srednje škole, već se odvajaju grane matematike na sličan način na koji ih prepoznajemo i na fakultetu. Planovi se menjaju u zavisnosti od obrazovnog profila - razlikovaće se plan matematičke gimnazije (koja će imati posebne predmete za različite oblasti, pre nego objedinjeni predmet matematike - svake godine predmet *"Analiza sa algebrom"*, prve dve godine predmet *"Geometrija"*, tokom treće godine - *"Linearna algebra i analiička geometrija"*, a tokom četvrte *"Verovatnoća i matematička statistika"* kao i *"Numerička matematika"*) - od planova srednjih stručnih škola koje mogu matematiku imati i samo dve godine sa vrlo malim brojem časova (čak i jedan čas nedeljno). U daljem tekstu, planovi koje razmatramo su u sklopu plana i programa gimnazije. Specifične razlike u smerovima biće istaknute.

Prvi razred:

Obrađuju se sledeće teme:

- Logika i skupovi - unutar koje imamo specifično naglašen deo Elementi kombinatorike (prebrojavanje konačnih skupova; pravilo zbira i pravilo proizvoda);
- Celi brojevi,
- Realni brojevi,
- Proporcionalnost,
- Uvod u geometriju,
- Podudarnost,
- Racionalni algebarski izrazi,
- Linearne jednačine, nejednačine i sistemi,
- Sličnost i trigonometrija pravouglog trougla.

Slede zadaci sa opštinskog takmičenja ove godine u kategoriji A:

1. Dat je skup $X = \{aca, konac, lopte, loto, prst\}$ i na tom skupu dve relacije, ρ i τ, koje su definisane zahtevom:

$x\rho y \Leftrightarrow$ reči x i y su iste dužine

$x\tau y \Leftrightarrow$ reči x i y se završavaju istim slovom.

(a) Da li su date relacije refleksne, simetrične, antisimetrične i tranzitivne? (b) Za svaku od relacija ρ i τ ispitati da li je relacija ekvivalencije, odnosno da li je ista relacija poretka. U slučaju da je neka od njih relacija ekvivalencije, naći sve klase ekvivalencije.

2. Dat je polinom P sa celobrojnim koeficientima za koji važi $P(P(2023) + 2023) = 1$. Koje sve vrednosti može uzeti broj $P(2023)$?

3. Dat je trougao ABC. Tangente na opisanu kružnicu tog trougla, konstruisane u tačkama B i C, seku se u tački X. Neka kružnica opisana oko trougla ABX seče pravu BC u tački P i neka kružnica opisana oko trougla ACX seče pravu BC u tački Q. Dokazati da su tangente konstruisane u tačkama P i Q na opisanu kružnicu trougla XPQ seku na pravoj AX

4. Naći sve prirodne brojeve n takve da je broj $n^2 + 7n + 2$ proizvod nekoliko (barem dva) uzastopnih prirodnih brojeva.

5. Za tablu dimenzija $m \times n$ (m i n su prirodni brojevi) njenim skeletom ćemo zvati skup svih duži koje su ivice barem jednog od mn jediničnih kvadrata od kojih se ista sastoji. Odrediti sve uređene parove prirodnih brojeva (m, n), takve da se skelet table $m \times n$ može popločati figurom koja se sastoji od dve normalne jedinične duži koje imaju zajedničko teme.

U ovim zadacima, može se uočiti primena teselacije u zadatku broj 5. Zadatak broj 4 se rešava razlaganjem polinoma na proizvode, ali može se primeniti i nešto kombinatornog alata radi lakšeg nalaženja tih parova - konkretno binomne formule.

Drugi razred:

Na svim smerovima se rade sledeće teme, sa većim fondom časova na prirodnom-matematičkom smeru:

- Stepenovanje i korenovanje,
- Kvadratna jednačina i kvadratna funkcija,

- Eksponencionalna i logaritamska funkcija,
- Trigonometrijske funkcije.

Slede zadaci sa opštinskog takmičenja ove godine u kategoriji A:

1. Naći sva realna rešenja jednačine $x = 506 - (506 - x^2)^2$.

2. Odrediti sve moguće vrednosti realnog parametra a ako se zna da za svako $x \in \mathbb{R}$ postoji barem jedan $y \in \mathbb{R}$ sa svojstvom da je $ax^2 + y^2 + 4xy + 2x + 2y = 0$.

3. Koliko ima prirodnih brojeva koji u dekadnom zapisu imaju 2023 cifre, pri čemu se, prilikom brisanja proizvoljne njegove cifre uvek dobija broj deljiv sa 7?

4. Dobrica i Milica žele da posete 2202 parka i u svakom od njih zasade izvestan broj drveća. U svakom parku se na početku nalazi po X drveća. Plan je da svaki od parkova oboje posete tačno jedanput. U k-tom danu svako od njih će ujutru obići tačno jedan od parkova, ne nužno isti, i u njemu zasaditi tačno k drveća. Međutim, svake večeri lokalni huligani u svakom parku, u kojem postoji barem jedno drvo, seku po jedno drvo. Zbog svoje bezbednosti, Dobrica i Milica ne žele da idu u parkove u kojima u trenutku dolaska nekog od njih nema niti jedno drvo. Odrediti minimalnu vrednost za X, takvu da Dobrica i Milica mogu da posete sve parkove i posade svo drveće kao što žele, uprkos ometanjima huligana.

5. Neka je tačka I središte upisane kružnice trougla ABC. Označimo sa D tačku preseka simetrale unutrašnjeg ugla u temenu A i stranice BC tog trougla. Ako važi $BD = 3$, $CD = 4$ i $AD = 6$, naći dužinu duži AI.

Unutar zadatka 3, primenjuju se složenija pravila deljivosti zbirova cifara, kao i kongruencije (po ostacima) da bi se uočila tražena cifra. Nakon toga se koriste kombinacije da bi se uočio konačan rezultat. U zadatku četiri se koriste permutacije da bi se odredio kojim danom je Milica obilazila proizvoljni park, odakle se traži minimalna vrednost početnog broja drveća po svim permutacijama dolazaka u park.

Treći razred:

Postoji značajna razlika u broju časova (5 časova nedeljno na Prirodno-matematičkom smeru i 3 na Društveno jezičkom) vidimo i razlike u temama:

- Poliedri,
- Obrtna tela,

- Sistemi linearnih jednačina,
- Vektori,
- Analitička geometrija u ravni,
- Matematička indukcija,
- Kompleksni brojevi i polinomi (postoji samo na Prirodno-matematičkom smeru),
- Nizovi(tema je spojena sa matematičkom indukcijom na Društveno-jezičkom smeru).

Slede zadaci koje su učenici rešavali na opštinskom takmičenju ove školske godine.

1. Data je matrica $A = \begin{bmatrix} 1 & a \\ 3 & b \end{bmatrix}$. Odrediti sve vrednosti parametara ai b tako da važi matrična jednakost

$$A^2 - 5A = 2I$$

pri čemu je sa I označena odgovarajuća jedinična matrica.

2. Uroš i Veljko igraju igru na tabli na kojoj su na početku napisani redom brojevi $n, n-1, n-2, ..., 1,$, pri čemu je $n > 2$ dati prirodan broj. U svakom potezu Uroš ima pravo da najviše k puta izabere po dva susedna broja sa table i da im zameni mesta. Veljko u svakom potezu bira jedan broj i premešta ga na proizvoljnu poziciju na tabli (može ga ostaviti i na istom mestu). Urošev cilj je da na tabli budu rastuće zapisani brojevi $1, 2, ..., n$, dok je Veljkov cilj da ga spreči u tome. Koliko najmanje mora biti k da Uroš ima pobedničku stragetiju?

3. Ispitati da li postoji prost broj p kao i prirodni brojevi a i b takvi da važi $a^p + b^p = (2p-1)!$

4. U oštrouglom trouglu ABC, $AB < AC$, tačke D, E i F su, redom, podnožja normala iz temena A, B i C na odgovarajuće stranice BC, AC i AB tog trougla. Označimo sa K presek pravih EF i BC, a sa X tačku na duži BC takvu da je $CX - BX = 2(CD - BD)$. Dokazati da kružnica opisana oko trougla AKX sadrži središte duži EF.

5. Ako nenegativni realni brojevi a, b i c zadovoljavaju uslov $a + b + c = 3$, naći maksimalnu moguću vrednost izraza:

(a)$a + ab + bc + ca$

(b)$a + ab + bc$

Prilikom rešavanja drugog zadatka, koriste se inverzije permutacija brojeva od 1 do n definisane kao par $(i,j), 1 \leq i < j \leq n$ takav da $\pi(i) > \pi(j)$. Povoljno rešenje po Uroša je da bira poteze koji smanjuju broj inverzija što će uraditi u svom potezu više nego što ih Veljko povećava. Nakon toga se primenjuje matematička indukcija da bi se došlo do rešenja $k = n$ U trećem zadatku, koristi se Fermaova teorema o ostacima, uz primenu matematičke indukcije u osnovi rešavanja ovog zadatka.

Četvrti razred:

Razlikujemo Prirodno-matematički smer sa 5 časova nedeljno, Opšti sa 4 časa nedeljno i Društveno-jezički sa 3 časa nedeljno. Teme koje se obrađuju su sledeće:

- Granična vrednost niza, (nije prisutna na Društveno-jezičkom smeru)
- Funkcije,
- Izvod funkcije,
- Integral,
- Kombinatorika (specifično: osnovna pravila, Varijacije, Permutacije, Kombinacije (bez ponavljanja), Binomni obrazac),
- Verovatnoća i statistika.

Slede zadaci koje su učenici rešavali na opštinskom takmičenju ove školske godine.

1. Da li postoji kolekcija $\{A_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, podskupova skupa prirodnih brojeva takvih da bilo koja konačna podkolekcija ima neprazan presek, ali da važi

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} = \emptyset$$

2. Dat je trougao ABC. Neka upisana kružnica unutar trougla ABC dodiruje stranice AB, BC i CA, redom, u tačkama F, D i E, a spolja pripisana kružnica, koja odgovara stranici BC, neka dodiruje prave AB i AC u tačkama u G i H, redom. Označimo sa X drugu tačku preseka kružnica opisanih oko trouglova ABC i AEF, a sa Y drugu tačku preseka kružnica opisanih oko trouglova ABC i AGH. Dokazati da je $BX = CY$.

3. U gradu G postoji $n > 8$ disko-klubova, $n \in \mathbb{N}$, od kojih svaki koristi svetla u tačno jednoj od dve boje, crvenoj ili plavoj. Pritom, između određenih klubova

postoje direktne autobuske linije, kako bi građani ovog grada mogli s lakoćom da menjaju mesta noćnog provoda, a uz eventualno presedanje, može se stići iz proizvoljnog kluba do proizvoljnog drugog kluba. Ako je poznato da je svaki disko-klub povezan direktnom autobuskom linijom sa tačno tri druga disko-kluba, među kojima barem dva koriste svetla crvene boje, koliko najviše može biti klubova sa plavim svetlima u tom gradu?

4. Neka su $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ dužine stranica trougla ABC i neka je h_a dužina visine koja odgovara stranici BC. Nađi najveću moguću vrednost izraza

$$\frac{a + h_a}{b + c}$$

5. Odrediti sve prirodne brojeve k, takve da postoji beskonačno prirodnih brojeva n takvih da važi $\phi(n) = \frac{n}{k}$, gde je $\phi(n), n \in \mathbb{N}$ ukupan broj prirodnih brojeva ne većih od n, koji su uzajamno prosti sa n.

Moguće je da je zadatak 3 bio inspirisan Ojlerovim razmišljanjima o mostovima grada Konisberga; ovaj grad G se predstavlja kao 3-regularni graf $G = (V, E)$, odakle se dalje prebrajaju brojevi čvorova koji zadovoljavaju navedene uslove. U rešavanju ovog zadatka koriste se i ciklusi plavih odnosno crvenih čvoreva (disko-klubova). Peti zadatak se rešava matematičkom logikom, koristeći se metoda "pretpostavimo suprotno" da bi se dokazalo da nema drugih poželjnih k, osim za vrednosti $k = 2$ odnosno $k = 3$

U nastavnom planu srednje škole kombinatorika se može podeliti u dve osnovne oblasti: teorija brojeva i kombinatorna analiza.

Teorija brojeva: Ova oblast se bavi matematičkim proučavanjem celobrojnih brojeva. U ovoj oblasti se mogu proučavati teme kao što su deljivost, modularna aritmetika, multiplikativne funkcije, kao i nizovi i matrice nad celobrojnim skupom. Ove teme su bitne za proučavanje kombinatorike, jer se kombinatorni problemi često mogu svesti na problem iz oblasti teorije brojeva.

Kombinatorna analiza: Kombinatorna analiza se bavi proučavanjem različitih kombinatornih struktura i njihovih svojstava. Teme sa kojima se učenici susreću u ovoj oblasti su permutacije, kombinacije, varijacije, generisanje funkcija i teorija broja. Učenici srednje škole mogu naučiti kako primeniti ove koncepte u različitim kombinatornim problemima, kao što su raspoređivanje osoba u autobusu, kombinacije karata u pokeru, i mnoge druge. Ovako "preciznija" obrada kombinatorike se pojavljuje u planu i programu za sam kraj četvrtog razreda, mada se učenici i ranije upoznaju s njom u prvom razredu.

Glava 3

Izbor zadataka i radovi učenika

Pri izboru zadataka, vodilo se računa o dva kriterijuma: prvo da se pokriju gradivo kombinatorike, drugo da bi zadaci mogli da budu rešeni i na početku i na kraju predmetnog obrazovanja, na bilo koji način. Grane kombinatorike koje se uopšte primenjuju (doduše neformalno) kroz nastavu, a to su:

- Prebrojavanje
- Kombinovanje
- Uključivanje/isključivanje
- Teselacija - popločavanje
- Dirihleov princip
- Binomna teorema

Unutar nekih od ovih mogu postojati zasebne podkategorije. Zadaci su birani iz matematičkih zbirki ("Zbirka zadataka iz matematike za peti razred osnovne škole" u izdanju Kleta 2019. godine, "Zbirka zadataka iz matematike za četvrti razred gimnazije" u izdanju Kruga 2020. godine, kao i iz zbirke "Zadaci za pripremu završnog ispita na kraju osnovnoškolskog obrazovanja" u izdanju Zavoda za udžbenike i nastavna sredstva za školsku 2020/2021 godinu) i nakon prikupljanja i prebiranja zadataka, sledeći zadaci su izabrani:

1. Od 32 učenika u nekom odeljenju, njih 7 nije ni u jednoj sekciji. Ako je u sportskoj sekciji njih 15, a u matematičkoj 20; koliko njih je u obe?

2. Registarske tablice na automobilu se sastoje od 2 slova azbuke koja ima 30 slova nakon kojih dolaze 4 cifre. Koliko ima različitih tablica?

3. Koje sve cifre u broju $215*$ mogu zameniti * tako da se dobije četvorocifreni broj deljiv sa 3?

4. Koliko najmanje stanovnika treba da ima neko mesto da bismo bili sigurni da tu žive bar dve osobe sa istim inicijalima? a) ako je svejedno da li je AB ili BA b) ako nije svejedno

5. Poslastičar je napravio između 140 i 200 mafina koje treba da zapakuje u kutije. Na raspolaganju ima kutije u koje staje 6, 9, ili 15 mafina. Ako ih zapakuje u kutije u koje staje 6 mafina, neće ostati nijedan mafin, a isto važi i za kutije u koje staje 15 mafina. Ukoliko ih spakuje u kutije u koje staje 9 mafina, jedna kutija neće biti puna. Koliko mafina je napraivo?

6. Četiri kuglice se ubacuju u tri kutije, tako da neka kutija može biti i prazna. Koliko ima različitih rasporeda?

7. Pod hodnika je oblika pravougaonika dimenzija 6m*2m. Ako su pločice oblika kvadrata stranice 15cm, koliko je pločica potrebno da bi se popločao pod hodnika?

8. Pomoću cifara iz skupa $\{3, 7, 5, 0, 1, 8\}$ napiši najveći i najmanji četvorocifren broj koji je deljiv i sa 3 i sa 5. Dodatno: koliko ima takvih brojeva?

9. Četiri dečaka i četiri devojčice sede u bioskopu. U redu je 8 sedišta. Na koliko načina se mogu rasporediti ako dve od devojaka ne žele da sede na krajevima reda?

10. Na koliko se načina može rasporediti 5 dečaka i 5 devojčica na deset stolica, tako da dve osobe istog pola ne sede jedna pored druge?

Kako su maturanti bili upoznati sa binomnom teoremom, izabrani su i zadaci koji se mogu postaviti kao takmičarski zadaci za učenike petog razreda (sa binomnom teoremom).

3.1 Prvi zadatak

Prvi zadatak se oslanja na princip uključenja i isključenja. Kao što je poznato, ovaj koncept se koristi da bi se prebrojali elementi koji pripadaju određenim skupovima, uzimajući u obzir preklapanja između tih skupova. Posebno je koristan za rešavanje problema u kojima je potrebno izračunati broj elemenata koji ispunjavaju određene uslove.

Kako se pojam elemenata i skupova prvi put pojavljuje u petom razredu (sa izuzecima nekih veštijih učiteljica koje pojam broja definišu preko kardinalnosti skupova), ovaj princip se tada prvi put i predstavlja, nastavljajući "tradiciju" sažimanja kombinatorike u drugim oblastima matematike. Osnovna ideja ovog principa je da se koristi skupovne operacije "uključi - isključi" kako bi se pravilno izračunao broj elemenata koji se traži.

Naravno, rešenje ovog zadatka je poznato čitaocima, ali će i ovde biti predstavljeno. Prema datim informacijama, ukupno 7 učenika nije ni u jednoj sekciji, pa je broj učenika koji su bar u jednoj sekciji $32 - 7 = 25$. Da bismo videli koliko od njih ide na obe, prvo ćemo sabrati koliko učenika ide na jednu sekciju i dobijamo $15 + 20 = 35$ što je nemoguće pošto imamo 25. Razlika između ova dva broja nam daje rešenje.

Učenici petog razreda su rešavali ovaj zadatak u junu ove školske godine, dok se skupovi (pa samim tim i princip uključivanja i isključivanja) obrađuju početkom školske godine, tako da je u zavisnosti od nastavnice do nastavnice, ova tema "na rasporedu" u oktrobru. Uvažila sam i ispravno razmišljanje kao polovično tačno, ako se neko od učenika ispisao pravilno razmišljanje a pogrešno prepisao brojeve. Slično, tako sam ubrajala i polovično netačno ukoliko su đaci negde usput "zagubili put" ali jesu postavili tačno.

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
41.7%	8.4%	16.7%	24.9%	8.4%

U jednom radu primećeno je da je "rešenje" skicirano koristeći tri kruga u preseku; neki đaci su pisali i razmišljanja o ovom rešenju tako da je u jednom priložen i sledeći komentar: "Prvo sabrati one koji idu na sekcije pa oduzeti one koji ne idu na sekcije pa je to 28 učenika koji idu na sekciju" (ovo je jedan od radova koji su klasifikovani kao "delimično tačne"), jedan rad u krugovima Venovog diagrama sa jedne strane ima

12, s druge 17 a u preseku 3, kako bi se ”ukombinovalo” sa brojevima (ali očigledno nisu uračunali 7 koji ne idu ni na jednu sekciju).

U srednjoj školi, kod maturanata, stanje je malo drugačije; kao što je i prikazano u sledećoj tabeli:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
57.1%	28.5%	0%	0%	14.4%

Kako je ovo gradivo koje nisu radili iste školske godine, manje učenika je umelo da sroči kako su došli do rešenja i koji princip su primenili. Jedna od zanimljivih razmena među učenicima koja ovo potvrđuje glasi:
-Ovo je tačno.
-Kako znaš da je tačno?
-Proverio sam.
-Gde si proverio?
-Proverio sam u svojoj glavi.

U zadacima se vidi manjak računice, ali takođe su svi učenici koji su radili zaključili da mora biti 25 učenika koji idu bar na jednu sekciju. Nakon ovog koraka vide se ili isprobavanja (u jednom zadatku je učenik ”isprobavao” koji broj može da zadovolji postavku zadatka počevši unazad od broja 15), ili nabrajanja: dva rada prikazuju nacrtane krugove koji su predstavljali učenike pa precrtavane kružiće koji pripadaju sekciji, i rešenje je bilo u broju dvostruko precrtanih krugova; u jednom radu je potpuno objašnjen princip i rešen zadatak. Učenici su većinski uradili zadatak.

3.2 Drugi zadatak

Ovaj zadatak se ubraja u jedne od onih koji se u nižim razredima osnovne škole rešavaju ”intuitivno”. Ovakvo prebrajanje neki đaci uvide i samostalno, dok se autorka susretala i sa učiteljicama koje su ove kombinacije predstavljale uz objašnjavanje množenja.

Da bismo rešili ovaj zadatak, možemo primeniti princip množenja. Ovaj princip se koristi za određivanje ukupnog broja načina na koje se može izvršiti serija nezavisnih izbora ili događaja. Najbolje se primenjuje kada se niz nekoliko različitih odluka ili događaja može doneti, i svaki od tih događaja ima nekoliko opcija. Princip množenja omogućava kombinovanje tih opcija kako bi se odredio ukupan broj mogućih rezultata.

Osnovna ideja je da ako postoji n načina da obavite prvi korak i m načina da obavite drugi korak, ukupan broj mogućih kombinacija za oba koraka je $n * m$.

Princip množenja se često koristi u kombinatorici za rešavanje problema raspoređivanja, izbora i raznih kombinatoričkih konfiguracija. Osim toga, ovaj princip je osnova za mnoge druge matematičke koncepte i tehnike, uključujući permutacije, kombinacije, verovatnoću i druge oblasti matematike.

Imamo 30 slova u azbuci i 10 cifara koje se mogu koristiti na četiri mesta nakon prvog dela tablice. Prvo ćemo izračunati koliko različitih kombinacija slova možemo dobiti, a zatim ćemo to pomnožiti sa brojem mogućih kombinacija cifara.

Broj različitih kombinacija slova je $30*30$ (jer imamo dva mesta za koja možemo odabrati bilo koja dva od trideset slova). Broj različitih kombinacija cifara je $10 * 10 * 10 * 10$ (jer imamo četiri mesta za koje možemo odabrati bilo koju od deset cifara).

Sada ćemo pomnožiti ova dva broja da bismo dobili ukupan broj mogućih tablica:

$$Broj.tablica = (30 * 30) * (10 * 10 * 10 * 10)$$

Dakle, ima ukupno 9,000,000 različitih mogućih registarskih tablica.

U osnovnoj školi stanje je sledeće:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
4.5%	22.7%	22.7%	9%	41.1%

Učenici su razumeli kako da preračunaju koliko će biti mogućih kombinacija slova, i stoga su svi pomnožili $30 * 30 = 900$, ali nakon toga nisu uzeli u obzir i kombinacije brojeva. Ovakva rešenja su ubrajana u polovično tačno, obzirom da je prikazano razumevanje osnove principa množenja, ali nije primenjeno do kraja. Neki od komentara uključuju i pogrešnu računicu: $30/2 = 15 * 4 = 60$ koja verovatno ukazuje na 30 slova i dva mesta koja ona treba da popune. Jedini rad sa tačno urađenim zadatkom ima i puno objašnjenje rešenja.

U srednjoj školi imamo ovakvu tabelu:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
50%	0%	0%	35.7%	14.3%

Učenici su ovde ili u potpunosti uradili tačno zadatak (u jednom radu je čak primenjen i binomni koeficient pri računanju), ili potpuno pogrešno množili. Nisu komentarisali zadatak, niti se predugo zadržavali na njemu.

3.3 Treći zadatak

Brzo nakon pojma skupova, uvodi se i pojam deljivosti broja. Zavisno od personalnog plana i programa, ovaj deo gradiva može i da se uvede pre ili posle teme skupova. Svakako se prvi put obrađuje u petom razredu, kada učenici i uče konkretna pravila.

Deljivost je osnovni matematički pojam koji prikazuje odnos između dva broja, gde jedan broj može biti ravnomerno podeljen ili sadržan u drugom broju. Da bi se rešio ovaj zadatak, koristi se princip deljivosti sa 3. Prvo se saberu cifre broja 215, koji je $2 + 1 + 5 = 8$.

Zatim se uoče cifre koje mogu zameniti simbol * kako bi zbir cifara postao deljiv sa 3. To može biti postignuto ako dodamo cifru 1, 4 ili 7, jer svaka od ovih cifara, kada se doda na zbir 8, rezultira brojem koji je deljiv sa 3.

Osnovci koji su ovaj zadatak rešili sa sledećom raspodelom:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
41%	18.1%	22.7%	13.6%	4.6%

Učenici su bili podeljeni u tome da li su zapamtili pravilo deljivosti brojem 3. Par đaka je testiralo koje cifre mogu staviti pa su onda probali da podele tako dobijeni broj i odbacili bi "isprobanu" cifru ako bi dala ostatak. Ovakvim principom rada, jedan rad je prikazao za rešenje samo cifru 1, pošto je već prvom iteracijom našao cifru koja bi mogla zameniti simbol zvezdice. U jednom radu su navedeni brojevi 4 i 8, bez objašnjenja; dok je bilo i nekoliko radova koji su naveli 2, 5 i 8 kao rešenja, što je autor razumela kao grešku u sabiranju cifara datih u zadatku.

Srednjoškolci su imali ovakav uspeh:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
21.4%	28.6%	7.1%	14.2%	28.5%

Đaci su postali nevoljniji za rad od ovog trenutka. Počinje da se uočava veći broj radova gde zadatak nije ni započet.U ostalim radovima, nisu svi primenili pravilo deljivosti, a nažalost, bilo je i onih koji su ga primenili ali ne pravilno. Poražavajuća je činjenica da su ovo radovi đaka nakon osam godina nastave matematike, ali možda je i otrežnjavajuće. Bio je i jedan zanimljiv komentar "Trebalo mi je mnogo vremena da shvatim, a nisam ni sigurna. Puko mi je mozak".

3.4 Četvrti zadatak

Zadatak koji se rešava Dirihleovim principom se vrlo često, u nekom obliku, "provlači" kroz takmičarske zadatke, ili zadatke koji se uključuju u testove inteligencije.

Dirihletov princip jedno je od osnovnih matematičkih pravila u oblasti kombinatorike i teorije skupova. Ovaj princip je formulisao nemački matematičar Peter Gustav Lejeune Dirichlet i često se koristi za dokazivanje različitih kombinatoričkih rezultata.

Osnovni oblik principa glasi: "Ako se n lopti raspoređuje u više od n kutija, barem jedna kutija mora sadržavati najmanje jednu lopticu."

Svrha ovog principa najbolje se vidi u dokazivanju postojanosti nekog poželjnog ishoda; da li je u pitanju navedena loptica u kutiji ili broj ljudi sa istim inicijalima, već je pitanje zadatka.

Ovaj princip se primenjuje na probleme raspoređivanja elemenata, dokazivanje postojanja određenih kombinatoričkih konfiguracija i rešavanje problema parova i uparivanja.

Dirihletov princip je važan alat u kombinatorici i ima široku primenu u različitim matematičkim i računarskim disciplinama. Pomaže u identifikaciji i rešavanju problema gde je potrebno dokazati postojanje određenih kombinatoričkih konfiguracija ili svojstava.

Sam zadatak je ovde prikazan u dva oblika, u zavisnosti od toga da li je bitan raspored elemenata.

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
0	0	0	27.3%	72.7%

Neki đaci su imali vrlo "duhovite" komentare - "Ne mora da znači da dvoje ljudi imaju ista imena, ne znam ja kako se ljudi zovu", dok su drugi učenici pokušavali da aritmetičkim računicama ($30/2 = 15 * 4 = 60$) dođu do rešenja, ukazujući na tendenciju da se matematika "bavi samo brojevima". Drugi učenici su samo ispisali brojeve (4 i 10, redom) bez objašnjenja. Ovde vidimo da je Dirihleov princip potpuno prošao "preko glave" kao ideja učenicima. Ovakavi radovi ukazuju na fokusiranje na brojeve pre nego na njihovu svrhu, 30 kao 30 slova, 2 kao 2 potrebna slova, ime i prezime. Interesantno je da su u drugom zadatku učenici uvideli da mora postojati 900 kombinacija sa dva slova, ali da taj podatak nije iskorišćen u ovom zadatku.

U srednjoj školi stanje je sledeće:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
28.7%	7.1%	7.1%	14.2%	42.9%

Nekoliko đaka je uočilo da bi trebalo da prebroje koliko može biti kombinacija, dok su drugi đaci probali da razmišljaju koliko imena može biti. Uočeno je da nisu povezali sličnosti sa drugim zadatkom, koji su u mnogo većem broju uradili. Ovaj zadatak je bio više "tekstualan" (jedan od komentara učenika) pa je zato bio teži. Nekoliko đaka se vraćalo komentaru da treba da se "tekst zadatka prevede na matematički jezik kako bi znali koju formulu da iskoriste".

3.5 Peti zadatak

Ovim zadatkom nastavljamo ispitivanje razumevanja osobina deljivosti kao i pravila deljenja složenim brojevima. Ovaj zadatak je preuzet iz zbirke zadataka za pripremu završnog ispita na kraju osnovnoškolskog obrazovanja. Jedan od lakših načina da se reši zadatak jeste primena kineske teorije; koju su neki đaci primenjivali manje ili više uspešno, potpuno bez formalne predstave o istoj. Kineska teorema o ostacima jedna je od osnovnih teorema u teoriji brojeva i algebri. Vuče korene iz kineske matematike i drevne indijske matematike, ali je formalno formulisao kineski matematičar Sunzi Suanjing tokom 3. veka.

Kineska teorema o ostacima se bavi rastavljanjem velikih brojeva na manje komponente, tzv. ostatke, i omogućava da se rešavaju problemi modularne aritmetike. Osnovna ideja teoreme je da ako imate sistem kongruencija (kako se jedan broj podudara sa drugim kroz neki ostatak), onda možete rešiti taj sistem tako da se svi ostaci podudaraju nezavisno jedni od drugih. To znači da možete rešavati jedan deo problema, a zatim te rešenja kombinovati kako biste dobili konačno rešenje.

Kineska teorema o ostacima ima mnoge primene u kriptografiji, kodiranju podataka, računarskoj nauki, teoriji brojeva i drugim oblastima. Omogućava efikasno rešavanje sistema linearnih kongruencija i razlaganje velikih brojeva na manje delove kako bi se pojednostavila računarska obrada.

Matematički izraženo, Kineska teorema o ostacima tvrdi da ako imate n parova brojeva

$$(a_1, m_1), (a_2, m_2), ..., (a_n, m_n)$$

gde su svi m_i uzajamno prosti (nemaju zajedničke faktore), onda postoji jedinstveni broj x koji je rešenje sistema kongruencija:

$x \equiv a_1 \pmod{m_1}$

$x \equiv a_2 \pmod{m_2}$

...

$x \equiv a_n \pmod{m_n}$

Gde $\equiv$ označava kongruenciju.

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
13.6%	9%	4.5%	9%	63.6%

Radovi su se koncentrisali na aritmetičke operacije sa brojevima koji se pominju u samom tekstu zadatka. Ovde se vidi da su sama pravila deljivosti osnova ovog zadatka pošto vidimo veliki broj učenika koji nisu ni radili ovaj zadatak, obzirom da je ni trećina učenika tačno primenila pravilo deljivosti brojem tri (ako računamo i one učenike koji su pogrešno sabrali cifre).

Kod srednjoškolaca je stanje sledeće:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
35.7%	14.3%	21.4%	0%	28.6%

Učenici su primetili da treba pratiti pravila deljivosti, ali neki od njih su "isprobavali" brojeve koji bi mogli da zadovolje rešenje. Dovoljno učenika je razumelo da treba da se zadovolje pravila deljivosti tri prosta broja ali i da konačni izbor treba da bude broj koji nije deljiv sa 9.

3.6 Šesti zadatak

Ovaj zadatak je preuzet iz "Zbirke zadataka iz matematike za četvrti razred" koju je izdala izdavačka kuća Krug. Nalazi se u odeljku permutacija te se na taj način i rešava, uz pomoć malo "prevoda" na matematički jezik.

Permutacija je osnovni pojam u kombinatorici i matematici koji se odnosi na različite rasporede elemenata u skupu. Ključna karakteristika permutacije je da se svi elementi početnog skupa koriste i da su svi različiti (odnosno nema ponavljanja elemenata). Ovo je posebno korisno ako hoćemo da različite predmete ili osobe rasporedimo na podjednak broj mesta. U opštem slučaju, za skup od n elemenata, postoji $n!$ različitih permutacija.

Permutacije se često koriste u kombinatorici, statistici, teoriji grafova i drugim granama matematike i nauke kako bi se analizirali različiti rasporedi ili redosledi elemenata. Permutacije su ključne za razumevanje različitih kombinatoričkih problema, uključujući raspoređivanje, uparivanje i razne druge kombinatoričke konfiguracije.

U ovom zadatku se permutacije primenjuju nakon što se zadatak drugačije postavi. Ako se kuglice predstave kružićima (kao što su neki učenici radili) onda možemo nacrtati uspravne linije među njima koje će predstavljati zidove razdvojenih kutija - njih će biti dve. Ove linije mogu biti i jedna pored druge, na primer, predstavljajući da je srednja kutija prazna. Na ovaj način, dobija se prilika da rasporedimo četiri kuglice (predstavljene npr. nulama) i dve linije (predstavljene npr. jedinicama) kako god želimo u nizu od šest mesta (tj. broj šestocifrenih binarnih brojeva gde može biti i nula na prvom mestu). Rezultat je 15 mogućih rasporeda.

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
13.6%	13.6%	9%	9%	54.8%

Pošto su u pitanju mali brojevi, učenici su doslovno crtali njihova rešenja. Iako se ovo razlikuje od predloženog rešenja iz zbirke po "računici", njihova metoda je zapravo mnogo bliža ideji rešenja nešto što se u početku misli. Jedan od radova je dao odgovor 9, obzirom da je rađeno tako da jedna kutija mora biti prazna, što, iako tekst zadatka nije u potpunosti shvaćen, jeste validno razmišljanje (ukoliko bi bio takav tekst zadatka). Par radova učenika je sadržalo sledeću računicu $4 * 3 = 12 : 1 = 12$ odakle su izvezli da je to i odgovor. Ovaj zadatak su đaci procenili preteškim, pa su neki radovi sa njegovim brojem na kraju papira, ali ipak praznim.

Ovako su ga srednjoškolci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
0%	21.4%	0%	14.3%	64.3%

Kod srednjoškolaca, stanje je značajno drugačije. Primećeno je više radova koji su ostali prazni, i nije uočeno ni jedno tačno rešenje. Kako su učenici malo upoznatiji sa osnovnim pojmovima u kombinatorici, nisu ni pokušali da crtaju kuglice. Radovi koji su klasifikovani kao delimično tačni, bili su koristili sličnu logiku ali nisu dobili isti rezultat - nacrtali su krugove ali je bilo previše linija, tj kutija.

3.7 Sedmi zadatak

Ovaj zadatak inspirisala je teselacija, ali i računanje površina i njihovo upoređivanje. Teselacija je matematički koncept koji se odnosi na pokrivanje ravni ili površine bez praznina ili preklapanja pomoću jednog ili više geometrijskih oblika. Ovi geometrijski oblici nazivaju se "teselacionim elementima" i često se sastoje od osnovnih figura poput kvadrata, trouglova ili šestouglova.

Mada ovaj zadatak koristi osnovni oblik pravilnog teselacije (kvadratima), primenjuje se osnovno pravilo teselacije da se ne ostavlja praznina, uz to primenjuje se i računanje površine kvadrata i pravougaonika. Ove računice su učenicima poznate iz geometrije četvrtog razreda osnovne škole kada se i prvi put u geometriji susreću sa površinom kvadrata i četvorougaonika.

Teselacija ima široku primenu u matematici, umetnosti i inženjerstvu. Na primer, možete je videti u keramičkim pločicama na podovima (kao što je ovde i postavljena) ili zidovima, u dizajnu mozaika, u arhitekturi i mnogim drugim oblastima.

U nastavi geometrije, učenici često rade vežbe gde se traži da stvore teselaciju određenim oblicima ili da prepoznaju teselaciju u različitim slikama ili uzorcima. Teselacija takođe igra ulogu u razumevanju koncepta površine i simetrije.

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
27.3%	9%	18.2%	9%	36.4%

Nekoliko učenika je bilo nevoljno da razume zadatak, i jedan od njihovih komentara bio je "nisam svemoguća da znam koliko treba". Nažalost, nije bilo malo radova gde su zamenjene formule za površinu i obim odgovarajućih oblika, mada je sa tako dobijenim brojevima pokušano da se dalje reši zadatak. Osnovna ideja da treba podeliti jedan broj sa drugim je prisutna ali ako dobijeni rezultat nije ceo broj, ne zaokrugljuju na veći (kao što bi moralo sa pločicama).

Ovako su ga srednjoškolci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
28.5%	14.3%	21.4%	14.3%	21.4%

Čak se i kod srednjoškolaca pojavila netačna formula za površinu. Neki đaci su "lomili" pločice pa su imali malo duže računice gde se ubrajalo da mogu ceo poslednji red da popune pločicama koje su podeljene na trećine. Nažalost, ovaj izuzetno praktični (bar u broju pločica) način je doveo do velike zabune sa računicom. Bilo je učenika koji nisu računali površinu već su merili po visini, odnosno širini i koliko redova odnosno kolona pločica pokriva hodnik. Na ovaj način izbegnuta je "zamka" da rešenje bude broj pločica koji nije ceo broj, obzirom da su izračunali da treba 40 kolona i 13.3 odnosno 14 redova pločica, što ceo rezultat postavlja na malo veći broj pločica, mada, ko je radio sa majstorima, zna da je ovaj način najbezbedniji da ne morate juriti po novi paket pločica. Ovakvo rešenje je bilo očekivano i kod učenika osnovne škole, kao elegantnije i sa manje računice. Ovaj zadatak je izronio najviše validnih rešenja kod učenika.

3.8 Osmi zadatak

Ovaj zadatak je preuzet iz "Zbirke zadataka matematike za pripremu završnog ispita na kraju osnovnoškolskog obrazovanja", uz dodatno potpitanje o tome koliko tavih brojeva postoji (ukoliko je učenik tačno odgovorio na osnovno pitanje a nije dodatno, klasifikovano je kao tačno).

U procesu rešavanja ovog zadatka koriste se principi deljivosti i varijacija bez ponavljanja. Prvi korak je uočiti zahteve potrebne za deljivost brojevima 3 i 5; od ovakvih kombinacija cifara, konstruiše se najmanji odnosno najveći četvorocifreni broj, što ograničava upotrebu cifre nula na mestu hiljada. Cifru 0 ili 5 mora biti na mestu jedinice kako bi broj bio deljiv sa 5.

Najmanji četvorocifren broj:

U interesu da što manje cifre budu na mestima veće vrednosti, cifra 5 je na mestu jedinice. Da bi se konstruisao najmanji broj, koriste se cifre 0, 1, i 3 na preostalim mestima, jer je njihov zbir 4, što je najmanji mogući zbir koji je deljiv sa 3. Dakle, najmanji broj koji ispunjava ove uslove je 1035.

Najveći četvorocifren broj:

U interesu da što veće cifre budu na mestima veće vrednosti, cifra 0 je na mestu jedinice. Da bi se konstruisao najveći broj, koriste se cifre 7, 8, i 5 na preostalim mestima, jer je njihov zbir 20, što je najveći mogući zbir koji je deljiv sa 3. Dakle, najveći broj koji ispunjava ove uslove je 8750.

Kao dodatni deo zadatka, treba razmotriti sve moguće permutacije ovih cifara i proveriti da li svaka od njih ispunjava uslove. To su sve permutacije cifara između 1035 i 8750 koje ispunjavaju uslove.

Brojevi koji se završavaju sa 0 ili 5 i čiji zbir cifara daje broj deljiv sa 3 su: 1035, 1053, 1350, 1530, 3015, 3150, 3510, 5013, 5130, 5310, 7015, 7150, 7510, 8013, 8130, 8310, 5013, 5130, 5310, 7015, 7150, 7510, 8013, 8130, 8310. Dakle, ima 25 četvorocifrenih brojeva koji ispunjavaju uslove da budu deljivi i sa 3 i sa 5.

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
22.7%	13.6%	9%	31.8%	22.9%

Pravila deljivosti su bila još jednom zahtevan zadatak. Neki od radova su sadržali ispisanu veliku količinu četvorocifrenih brojeva poslednje cifre 0 ili 5. Jedan rad sadrži trocifren broj (kao odgovor za najmanji mogući broj - pretpostavljeno je da je 0 ”postavljena” na mesto hiljada). U jednom radu je čak uključen i decimalni broj. Ovako su ga srednjoškolci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
14.3%	21.4%	0%	0%	64.3%

Srećom, pravila deljivosti, nisu predstavljala takav problem kod srednjoškolaca. Nažalost, učenici su mahom ostali bez vremena jer su neke od prethodnih zadataka predugo rešavali, te nisu ni uradili zadatak. Oni koji su ga uradili, uradili su ga uglavnom tačno; ovde su ipak predate radove bez pokušaja da se uradi dodatni deo zadatka klasifikovani kao polovično tačni.

3.9 Deveti zadatak

Osnovni oblik ovog zadatka je da od 4 devojke, dve ne žele da sede na krajevima reda, a dve nemaju preference. Ovako postavljen zadatak se rešava tako što prvo ”zauzmemo” mesta na kraju reda, preostalih 6 osoba (koje nisu raspoređene na prvo i na poslednje mesto) moguće je na preostala mesta rasporediti na 6! načina (permutacije od 6 elemenata), što daje konačan rezultat $6 * 5 * 6!$. Ovde se lako može pogrešiti i dobiti manji rezultat ako umesto varijacija za mesta na kraju reda koristimo kombinacije - tako dobijajući veći rezultat.

Drugi način rešavanja, možda komplikovaniji u ideji od gorenavedenog ali prostiji u računici, jeste da se prebroje svi rasporedi i od tog rezultata da se oduzmu nepovoljni rasporedi gde devojke koje ne žele da sede na krajevima reda baš tu sede. Imenujmo devojke kao D1 i D2. Nepovoljni su svi rasporedi oblika D1xxxxxxD2 odnosno oblika D1xxxxxxD2 (ista greška dakle može i da se u ovom rešeavanju napravi pri ignorisanju permutacija unutar dva mesta na "krajevima" reda). Svaki od ovih rasporeda očigledno postoji u 6! mogućnosti. Druga greška koja je moguća napraviti jeste da se ne ubrajaju rasporedi gde je D1 npr na "krajnom" mestu a D2 u sredini odnosno sve četiri varijacije takvog rasporeda gde je samo jedna devojka na "nepovoljnom" mestu. Za svaki od tih rasporeda ima $6\dot{6}!$ mogućnosti (pošto na drugom "krajnom" mestu može biti neko od 6 osoba ali ne i D1 tj D2). Kako je ukupan broj rasporeda 8!, dobija se sledeći rezultat:

$$8! - 2 * 6! - 4 * 6 * 6! = 56 * 6! - 26 * 6! = 30 * 6!$$

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
0%	36.4%	0%	22.7%	40.9%

Osnovci su rešavali malo drugačiji zadatak - razumeli su da je zahtev zadatka bio da nijedna devojka ne sedi na kraju reda. Neki od đaka su imali skice kako bi osobe sedele na ovim mestima, neki su ponudili približno tačan odgovor (kao proizvod, ne rezultat) ali bez objašnjenja. Suštine rešavanja ovog zadatka se svodila na prebrojavanje mogućnosti nacrtanih rasporeda. Ovaj zadatak prezentovan je učenicima osnovne škole kao uvod u mogućnosti rešavanja. Osnovne premise u nekim radovima su bile validne, ali je nedostajao matematički aparat i zrelost u rešavanju zadataka da se finalizuju.

Ovako su ga srednjoškolci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
14.3%	7.1%	0%	0%	78.6%

Srednjoškolci su malo jasnije razumeli tekst zadatka, bar oni koji su se njime bavili. Polovično tačno rešenje je dobijeno zbog gore navedene greške - gde se nije gledalo da ko će od dve osobe sedeti "levo" a ko "desno" pa je rezultat upola manji broj. Imamo veliki broj radova gde ovaj zadatak nije ni urađen.

3.10 Deseti zadatak

Ovaj problem inspirisan je i problemom braćnih parova u kombinatorici. Traži se broj različitih načina na koje je moguće smestiti grupu muško-ženskih parova za okrugli trpezarijski sto tako da se muškarci i žene smenjuju i da niko ne sedi pored sopstvenog partnera. Ovaj problem je 1891. formulisao Eduard Lukas i nezavisno, nekoliko godina ranije, Peter Guthrie Tait u vezi sa teorijom čvorova. Za broj parova jednak 5, broj rasporeda sedenja je 3120. A kako se dolazi do ovog rešenja? Treba uočiti da su nam mesta "zabranjena" za neke određene elemente našeg skupa. Osim prebrojavanjem, što je u daljem tekstu navedeno, ovaj zadatak se u opštem slučaju rešava korišćenjem deranžmana, odnosno permutacijama sa zabranjenim pozicijama. Ukoliko se za dati konačni skup konstruiše "osnovna" permutacija (to može biti sortiranje po veličini npr), svaka permutacija gde se parovi $(i, \pi(i))$ ne podudaraju sa osnovnom permutacijom naziva deranžman datog skupa. Pošto je "osnovna" permutacija mogla biti izabrana slučajno, broj ovih deranžmana neće zavisiti od toga. Taj broj moguće je izračunati pomoću principa uključenja i isključenja, ili pomoću rekurzije. Koristeći deranžmane, originalno je i bio rešen problem bračnih parova, što će biti ovde preneto (sa prilagođenim brojevima).

Žene mogu biti smeštene na $2\dot{1}0!$ načina - da li sede na "parnim" ili "neparnim" stolicama i potom se raspoređuju na 10! načina. Ukoliko je svejedno koje je početno mesto, imamo ukupno 9! načina (nakon što prva žena sedne, ostale se "moraju tako rasporediti). Ukoliko broj mogućih rasporeda sedenja muškaraca označimo sa M, a slobodna mesta brojevima, uočava se da je za problem bračnih parova potreban deranžman - da M1 ne sedi na sedištu 1 (gde je pored Ž1) itd. Za naš problem međutim, bitno je samo da su preostalih deset muškaraca rasporedeđeni na preostalih deset mesta.

U originalnom obliku, bez uslova i zabranjenih pozicija, ovaj zadatak glasi: "Neka imamo n muškaraca i n žena. Koliko različitih načina postoji za raspoređivanje muškaraca i žena oko okruglog stola tako da nijedna dva muškarca i nijedne dve žene ne sede jedna pored druge?" Osnovna ideja rešavanja ovog zadatka fiksirati jednu osobu, potpom posmatrati kako će se permutovati raspored preostale 4 osobe istog odnosno 5 osoba suprotnog pola oko prvog fiksnog mesta. Ukoliko stolice nisu "numerisane" ovde je kraj zadatka, u suprotnom, svaki od ovih rasporeda se javlja u 10 oblika, u zavisnosti gde je prva osoba fiksirana (kako je zarotiran sto).

Ovako su ga osnovci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
0%	22.8%	13.6%	16.6%	50%

Učenici su probali da zadatak reše prebrojavanjem. Osnovna ideja je bila vrlo blizu početnom koraku u radovima koji su priznati kao polovično tačni, ali postupak nije priveden kraju. U zadacima koji su uvaženi kao polovično netačni, postojalo je razumevanje rasporeda ali je nedostajalo mogućnosti različitih dečaka odnosno devojčica. U radovima koji su uvaženi kao netačno urađeni, ponuđen odgovor je bio 2 - MFMFMFMFMF ili FMFMFMFMFM gde su slovom M predstavljane osobe muškog pola a slovom F predstavljene osobe ženskog pola.

Ovako su ga srednjoškolci rešili:

tačno	polovično tačno	polovično netačno	netačno	nisu radili
0%	14.3%	0%	0%	85.7%

Kod srednjoškolaca je kriterijum uvažavanja zadataka bio jednak kao i kod osnovaca. Jedan učenik je postavio zadatak i ispisao ispod skiciranih stolica brojeve koje bi odgovarali količini ljudi koja bi tu mogla da sedne ali bez preciznijeg objašnjenja, dok je drugi rad sadržao nekoliko ideja, koje su počinjale na validnom prvom koraku ali nisu dalje realizovane validno.

3.11 Predlog

Nakon pregledanja učeničkih radova, formirali su se predlozi vezani za gradivo koje je bilo potrebno da bi se zadaci rešili. Šredlozi su osmišljeni da bi moglo da se unapredi razumevanje kombinatorike već u razrednoj nastavi.

Princip deljivosti definitivno treba uvesti uz tablicu množenja. Ne u vidu pravila deljivosti konkretnim brojevima, već kao definiciju i osobinu. Poželjno je da sami učenici uoče pravilo, ali neophodno je da razumeju reč i ideju. Ako se već radi deljenje sa ostatkom i bez, tu je savršeno mesto.

Princip množenja treba upoznati već u trećem razredu. Po trenutnom planu i programu, tema "brojevi do 1000" je odlična osnova. To će biti mali proizvodi, ograničeni na 2-3 činioca, ali će pomoći prebrojavanju svih mogućnosti. Učenicima se mogu predstaviti zadaci sa pravljenjem robota od lego kockica različitih boja, na koliko različitih načina mogu napraviti itd.

Dirihleov princip može da se demonstrira pri temi merenje unutar četvrtog razreda.

Na ovaj način, kada se u petom razredu učenicima postavljaju pravila za deljenje raznim brojevima, oni su već upoznati sa samim nazivom, razumeju kada je nešto deljivo jedno sa drugim i tada mogu da to produbljuju i ispituju.

Princip uključivanja i isključivanja je u kurikulumu na savršenom mestu, uz skupove i njihove kardinalnosti.

Sedmi zadatak je demonstirao kako se kombinatorika pojavljuje i u merenju. Teselaciju i pronalazak najboljeg puta može da se uvodi u šestom razredu, kada je kurikulum otvoreniji geometriji likova.

Sedmi razred je i preopterećen. Pitagora je tu zauzeo mesta, i nakon algebarskih izraza nema gde da se dublje prodire, dok je osmi razred već uveo osnovne pojmove statistike i obrade podataka.

Formalna imena termina ne treba izbegavati, ali nisu nešto što treba forsirati. Tome je ipak mesto u srednjoj školi, sa ozbiljnijom klasifikacijom u prvom razredu. I u kurikulumu tu je pauza. Moralo je da se dozvoli algebri i računu da dostigne Paskalov trougao, da se razume faktorijel, binomni koeficient. Kombinatorika na kraju četvrtog razreda se predaje kao poslednje gradivo.

Glava 4

Zaključak

Ovaj rad se ne bavi dokazivanjima teorema, postavljanjem hipoteza niti uredno klasifikovanim definicijama. Predmet ovog rada bio je komparativne prirode, upoređivanje učeničkog znanja radi boljeg razumevanja njihovog razvijanja u matematičkom pogledu. Identični zadaci su postavljeni pred učenike petog razreda i učenike četvrtog razreda gimnazije, i prirodno matematičkog i društvenog smera. U radu su zatim predstavljeni pojedinačni zadaci, uz obrazloženje zašto su izabrani, koje kombinatorne tehnike koriste; kao i uspešnost rešavanja kod učenika petog razreda OŠ, odnosno, maturanata gimnazije. Nakon ovih analiza, možemo izvesti sledeću tabelu koja prikazuje uspešnost "prosečnog učenika":

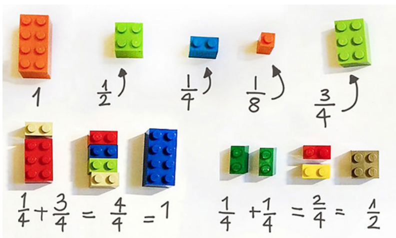
zadatak	OŠ - rešen	OŠ - neurađen	SŠ - rešen	SŠ - neurađen
uključivanje-isključivanje	50.1%	8.4%	85.6%	14.4%
princip množenja	27.2%	41%	50%	14.3%
deljivost brojem 3	59.1%	4.6%	50%	28.5%
Dirihleov princip	0%	72.7%	35.1%	42.8%
kongruencija	22.6%	63.6%	50%	28.6%
permutacije - tekstualni	27.2%	50%	21.4%	64.3%
popločavanje	36.3%	36.4%	42.8%	21.4%
deljivost br. 3 i 5	36.3%	22.7%	35.7%	64.3%
varijacije	36.4%	40.9%	21.4%	78.6%
deranžmani	22.8%	50 %	14.3%	85.7%

Ostaje jedan poražavajući podatak; đaci ne žele da rade matematičke zadatke. U pregledanju, uočena je alarmantna količina zadataka koji nisu ni pokušani da se urade, stoga je i uvedena kolona "nisu radili" u tabelama sa zadacima, kao i kolona

”neuređen” u gorenavedenoj tabeli. Toliko osoba koje su digle ruke, koje neće otkriti ushićenje rešenog zadatka, kada se okrene zbirka na poslednje strane i vidi isto rešenje. Đaci nakon 8 godina učenja matematike imaju još manju želju da uopšte probaju da reše zadatak, ali ni na početku predmetne nastave nisu izgarali od želje za time. Gubi se želja za rešavanjem problema, nalaženjem novih solucija, puteva, gubi se radoznalost i intuicija, gubi se način učenja, što mehaničkog što opšteg.

Ovaj rad je ispitivao subjektivni osećaj; deca nauče da ne vole matematiku. Nauče da je to nešto čega se treba plašiti, jer po njoj se meri koliko si inteligentan, a u ovom svetu, ta osobina se najviše vrednuje. Najčešće ispitivana vrsta inteligencije je upravo logičko-matematička, a kako god da se okrene, i dalje ima matematike (čak najviše kombinatorike u njoj). Jedna od prvih stvari koje deca uče da govore je nabrajanje brojeva. Da li je u tom trenutku moguće razumevanje značaja i smisla broja? U jednom udžbeniku, osnovnoškolskom, broj 2 definisan je kao kardinalnost skupa sa dva elemenata. Reč kardinalnost je navedena u napomeni, umesto nje, govorilo se o zajedničkoj osobini skupova koji imaju dva elementa. Šta je zajedničko kad kažemo dve mačke, dva psa, dve lopte?

U svom udžbeniku u izdanju BIGZ-a, Ivan Anić predlaže uvođenje celih brojeva uz pomoć nadmorske visine i dubine. Predajući šestom razredu, uvidela sam da je trenutno bolje objašnjenje podrum - pošto današnja deca ne rone, ali idu u tržne centre gde ima više nivoa podzemnog parkinga, odakle liftom dolaze na željeni sprat. Već je poznata slika lego kockica kojim je jedna učiteljica poredstavila razlomke, toliko da ne znamo odakle je potekla.



Da je ranije nastala, ne bi se iz Amerike povukli burgeri od trećine funte jer su mušterije bile ubeđene da je to manje od četvrtine funte.

Matematika se prožima kroz naš život u neočekivanim oblicima, od toga da deca žele čašu manje zapremine ali veće visine (jer je onda veća), do toga da se računaju popusti u radnjama, do toga da kamatne stope i njihovo razumevanje otvaraju radna mesta u merama koje stari Grci ne bi razumeli. Zašto baš stari Grci? Možda zato što od njih sve počinje. Možda zato što je njihovo razumevanje značaja matematike začelo to principijalno uverenje civilizacije da čovek vredi ako zna matematiku.

Možda zato što su matematiku doživljavali kao živu stvar. Kako i ne bi, kada je rasla pred njihovim očima, kao malo dete? Možda zato što se većina gradiva koja se uči u osnovnom i srednjem školovanju potiče upravo odatle. Tek se u trećoj godini srednje škole vidi pomak od antičke matematike. Kako i ne? Koliko milenijuma treba da se smesti u 12 godina, od kojih 4 ni ne predaju matematičari? Kako da onda očekujemo da ova beba matematike zvana kombinatorika bude u prvom planu, odvojena disciplina za sebe, kad su i sami Njutn i Lajbnic jedva "upali"?

Bibliografija

[1] Matematička takmičenja, 2023. dostupno on-line na https://dms.rs/matematika-osnovne-skole/ i https://dms.rs/matematika-srednje-skole/.

[2] Grupa autora. Zbirka zadataka iz matematike za završni ispit u osnovnom obrazovanju i vaspitanju. *Prosvetni pregled*, 2020.

[3] Duško Jojić. Elementi enumerativne kombinatorike. *Nova knjiga*, 2011.

[4] Leon Mirsky. Book review. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 1979. on-line dostupno: https://www.ams.org/journals/bull/1979-01-02/S0273-0979-1979-14606-8/S0273-0979-1979-14606-8.pdf.

[5] Slađana Dimitrijević Nebojša Ikodinović. Udžbenik za peti razred osnovne škole. *Klett*, 2019.

[6] Branko Grünbaum Raj C. Bose. Encyclopedia britannica, 2023. on-line dostupno: https://zelenaucionica.com/category/za-ucitelje/planovi.

[7] Helaine Selin. Mathematics across cultures : the history of non-western mathematics. *Netherlands: Kluwer Academic Publishers*, 2001. on-line dostupno: https://books.google.rs/books?id=2hTyfurOH8AC&printsec=frontcover&hl=sr#v=onepage&q&f=false.

[8] Zelena učionica urednik Aleksandra Cvjetić. Planovi, 2023. on-line dostupno: https://zelenaucionica.com/category/za-ucitelje/planovi.

[9] S. Ognjanović Ž. Ivanović. Zbirka zadataka i testova za četvrti razred gimnazija i tehničkih škola. *Krug*, 2010.

[3] [9] [5] [2] [4] [8] [7] [1] [6]

Biografija autora

Vjera Savović (*Beograd, 28. novembar 1989.*) U Beogradu završila osnovnu školu i V beogradsku gimnaziju. Pohađala Astronomske seminare u Istraživačkoj stanici Petnica od 2007.g do 2008.g. Tokom studiranja radila za lanac knjižara "Delfi" na poziciji knjižar. Radi usavršavanja znanja engleskog jezika putovala po Evropi (Nemačka, Francuska, Švajcarska, Grčka, Danska, Italija). Bavila se kreativnim pisanjem i objavila je priču za portal Beleg 2015.g potpisana devojačkim prezimenom Mašović. Diplomirala na matematičkom Fakultetu u Beogradu 2016. godine. Zaposlila se u septembru 2019. godine u privatnoj OŠ "Kreativno Pero" do januara 2021. godine. Nakon toga se zapošljava u V beogradskoj gimnaziji kao nastavnik informatike i računarstva, gde i dalje radi. Udata, majka dva deteta i mezimac jedne mačke i jednog psa.