УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Јована Ненадовић
1016/2019

ЕЛЕМЕНТИ КОМБИНАТОРИКЕ У НАСТАВИ У СРЕДЊОЈ ШКОЛИ

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

проф. др Александар Липковски, редовни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Маја Рославцев, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 29.06.2023.

Садржај

Слике

Глава 1

Увод

Теме из комбинаторике се у средњошколској настави скоро по правилу занемарују или потпуно избегавају, и од стране ученика и од стране наставника, јер се перципирају као ,,тешке”. Са друге стране, комбинаторни начин размишљања је од великог значаја у скоро свим каснијим нетривијалним математичким аргументима, а представља и основу за разумевање многих концепата у рачунарству.

У овом раду размотрићемо неке особине коначних скупова у вези са издвајањем одређених подскупова тих скупова и распоредом елемената у њима, као и са бројем таквих издвајања, односно распореда. Проблеми такве врсте су од интереса у разним областима математике (на пример у теорији вероватноће), а њима се бави посебна грана математике, **комбинаторика**. Са основним елементима комбинаторике ученици се сусрећу у првом разреду средње школе, а затим ове теме поново обрађују и проширују у четвртом разреду.

Циљ овог рада је да се изврши анализа наставе комбинаторике у настави математике у средњој школи и да се дају предлози за њено побољшање. Рад садржи методичку обраду основних тема везаних за варијације, пермутације, пермутације и комбинације, као и варијације и комбинације са понављањем. Такође се обрађује тема биномног коефицијента и биномног обрасца, Лајбницова формула и Фермаова теорема као и примери у вези са тим темама.

,,Ви који учите, учите математику. Не градите без темеља.”

Леонардо Да Винчи

Глава 2

Елементи комбинаторике

Природни бројеви представљају најстарије математичке појмове са којима се деца сусрећу још у најранијем детињству и природно их усвајају као резултате бројања. Сваки скуп чије елементе можемо пребројати и резултате тог бројања изразити природним бројем називамо **коначним** скупом. Број елемената коначног скупа A означавамо са $|A|$. Празан скуп је такође коначан скуп при чему је $|\emptyset| = 0$.

Комбинаторика је математичка област која се бави одређивањем броја елемената коначних скупова без набрајања свих елемената. Постоји велики број идеја и метода за решавање разноврсних типова проблема пребројавања. Ово су нека од основних тврђења која представљају елементарне комбинаторне принципе.

Тврђење 2.1 ***(Принцип збира)*** *Ако су A и B дисјунктни коначни скупови, онда је*

$$|A \cup B| = |A| + |B|. \tag{2.1}$$

Аналогно тврђење важи и за више скупова. Ако су A, B и C међусобно дисјунктни коначни скупови ($A \cap B = \emptyset, B \cap C = \emptyset$ и $C \cap A = \emptyset$), онда је

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C|. \tag{2.2}$$

Тврђење 2.2 ***(Принцип укључења-искључења за два, односно три скупа)***

1. *Ако су A и B коначни скупови, онда је*

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{2.3}$$

2. *Ако су A, B и C коначни скупови, онда је*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C| \\ + |A \cap B \cap C|. \tag{2.4}$$

Доказ:

1. Једнакост је последица принципа збира и скуповних идентитета: $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ и $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$. Како је

   $$(A \setminus B) \cap B = \emptyset \text{ и } (A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$$

   имамо да је

   $$|A \cup B| = |A \setminus B| + |B| \text{ и } |A| = |A \setminus B| + |A \cap B|.$$

   Дакле,

   $$|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|, \text{ па је } |A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B|.$$

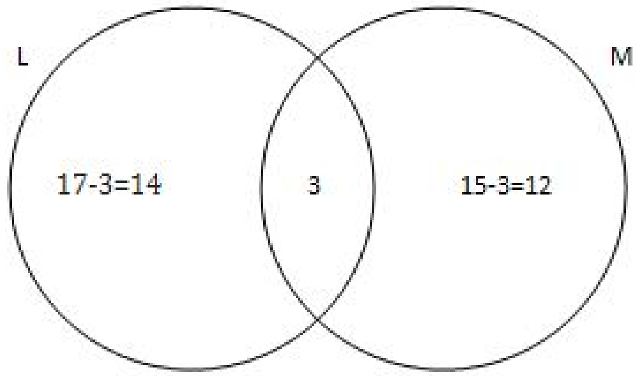
2. Применићемо једнакост доказану под 1. и познате скуповне идентитете:
   $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ и $(A \cap C) \cap (B \cap C) = A \cap B \cap C$.

   $$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= |(A \cup B) \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)| \\ &= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|. \end{aligned}$$

■

Пример 2.1 *У једном одељењу сваки ученик иде на музичку или ликовну секцију. Њих 17 иде на ликовну секцију, њих 15 иде на музичку секцију, а троје ученика иде на обе секције. Колико ученика има у том одељењу?*

Решење: Из датих података закључујемо да 14 ученика иде само на ликовну секцију, $17-3=14$, а 12 ученика иде само на музичку секцију, $15-3=12$. У одељењу има $14+12+3=29$ ученика (Слика 2.1).
□



Слика 2.1

Пример 2.2 *У једној туристичкој агенцији раде водичи који знају енглески, француски или руски језик. Енглески зна* 15 *водича, француски* 11 *и руски* 13*. Енглески и француски зна* 5 *водича, француски и руски* 4 *водича, а руски и енглески* 6 *водича. Сва три језика знају* 3 *водича. Колико водича ради у тој агенцији?*

Решење: Нека E, F, R означавају скупове водича који редом знају енглески, француски и руски језик. Знамо да је $|E| = 15,\ |F| = 11,$ $|R| = 13,\ |E \cap F| = 5,\ |F \cap R| = 4,\ |R \cap E| = 6,\ |E \cap F \cap R| = 3.$

Применом формуле укључења-искључења рачунамо укупан број водича:

$$\begin{aligned}|E \cup F \cup R| &= |E| + |F| + |R| - |E \cap F| - |F \cap R| - |R \cap E| \\ &\quad + |E \cap F \cap R| = 15 + 11 + 13 - 5 - 4 - 6 + 3 = 27.\end{aligned}$$

□

Тврђење 2.3 ***(Принцип производа)*** *Ако су A и B коначни скупови, онда је*

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|. \tag{2.5}$$

Ако су A, B и C коначни скупови, онда је

$$|A \times B \times C| = |A| \cdot |B| \cdot |C|. \tag{2.6}$$

Пример 2.3 *Након изласка из авиона, путник треба да се спусти два спрата ниже да би преузео пртљаг. На један спрат ниже воде* *три (једносмерна) покретна степеништа, а одатле на спрат испод два (такође једносмерна) покретна степеништа. На колико начина путник може стићи до места за преузимање пртљага?*

Решење: Након изласка из авиона, путник прво треба да изабере једно од три степеништа која воде на међуспрат, а затим на међуспрату да изабере једно од два степеништа до циља. Могући избори степеништа су заправо уређени парови чија је прва координата једно од степеништа које води од излаза на међуспрат, а друга координата је степениште које води са међуспрата до пртљага. Дакле, постоји укупно $3 \cdot 2 = 6$ могућности (Слика 2.2).

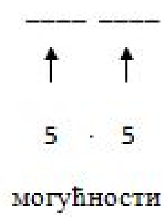
Слика 2.2

□

Пример 2.4 *Колико има двоцифрених бројева записаних помоћу непарних цифара* $1, 3, 5, 7$ *и* 9*?*

Решење: Сваки двоцифрен број је одређен уређеним паром цифара, што значи да двоцифрених бројева записаних непарним цифрама има исто колико и уређених парова у $\{1, 3, 5, 7, 9\} \times \{1, 3, 5, 7, 9\}$, тј. $5 \cdot 5 = 25$.

Примену принципа производа можемо објаснити и на следећи начин: двоцифрен број чије су цифре непарне добијамо уписивањем непарне цифре на сваку од две празне цртице. Постоји пет могућности да се на прво место упише непарна цифра. За сваки избор непарне цифре за прво место, постоји по пет могућности да се на друго место упише непарна цифра. Дакле, постоји $5 \cdot 5 = 25$ двоцифрених бројева записаних непарним цифрама (Слика 2.3).



Слика 2.3

□

Објашњење којим је завршен претходни пример једноставно се уопштава на случајеве када треба формирати коначне низове чији се чланови бирају из датих коначних скупова.

Пример 2.5 *Посматрајмо низове одређене дужине који се могу формирати од самогласника српског језика а,е,и,о,у.*

Решење: Сваки самогласник можемо сматрати коначним низом дужине 1. Дакле, једночланих низова самогласника има укупно 5.

Сваки уређени пар самогласника можемо посматрати као коначан низ дужине 2. Двочланих низова самогласника има укупно $5^2 = 25$.

Свака уређена тројка одређује коначан низ дужине 3. Трочланих низова самогласника има $5^3 = 125$.

Четворочланих низова самогласника има $5^4 = 625$ итд. □

Пример 2.6 *Колико има четвороцифрених парних бројева записаних цифрама* $0, 1, 2, 3, 4$*?*

Решење: Постоје четири могућности да се на прво место упише једна од цифара: $1, 2, 3$ или 4, јер цифра 0 не може бити прва цифра.

За сваки избор цифре за прво место постоји по пет могућности да се на друго место упише цифра $0, 1, 2, 3$ или 4.

За сваки избор цифара за прва два места постоји по пет могућности да се на треће место упише цифра $0, 1, 2, 3$ или 4.

За сваки избор цифре за прва три места постоји по три могућности да се на четврто место упише цифра $0, 2$ или 4, јер добијени четвороцифрени број мора бити паран.

Дакле, постоји $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 = 300$ четвороцифрених парних бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4$. $\square$

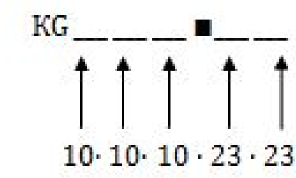
Пример 2.7 *Колико има четвороцифрених бројева записаних цифрама* $0, 1, 2, 3, 4$ *у којима се цифре не понављају?*

Решење: Постоје четири могућности да се на прво место упише цифра: $1, 2, 3$ или 4, јер цифра 0 не може бити прва цифра. Након избора цифре за прво место, преостају четири могућноти да се на друго место упише цифра, јер сада 0 може бити уписана, али се не може поновити цифра уписана на првом месту. Након избора цифара за прва два места, преостају три могућности да се на треће место упише цифра, јер се не смеју поновити претходно две уписане цифре. Након избора цифара за прва три места, преостају две могућности да се на четврто место упише цифра, јер се не смеју поновити претходно уписане цифре. Дакле, постоји $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ четвороцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4$ у којима се цифре не понављају. $\square$

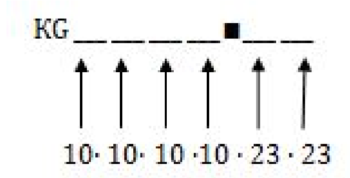
Пример 2.8 *Према правилнику о регистарским таблицама који се у Србији примењује од* 2017. *године, иза ознаке града, односно општине, стоје три или четири цифре и два латинична слова изабрана од укупно* 23 *слова. Користе се латинична слова српског језика, осим слова* $\{č, ć, Dž, đ, Lj, Nj, š, ž\}$, *као и латинично слово* X. *Колико укупно регистарских ознака наведеног облика може бити издато у једном граду, односно општини?*

Решење: Одредимо број троцифрених регистарских ознака, тј. оних који се састоје од три цифре и два латинична слова. На сваком од прва три места могу да стоје било које од десет цифара, што значи да постоји 10^3 могућности. На сваком од два места предвиђена за слова може да стоји било које од 23 слова, што значи да постоји укупно $23^2 = 529$ могућности. Према принципу производа, број троцифрених регистарских ознака је једнак $529\,000$.

Слично се рачуна број четвороцифрених регистарских ознака које се састоје од четири цифре и два латинична слова. Тако добијемо $5\,290\,000$ регистарских ознака. Према принципу збира, укупан број могућности је једнак $529\,000 + 5\,290\,000 = 5\,819\,000$ (Слика 2.4, Слика 2.5).



Слика 2.4



Слика 2.5

□

Задаци

1. У летњи камп су дошла 73 ученика, од којих 38 говори немачки језик, 25 ученика говори француски језик, а 12 ученика говори оба језика. Колико ученика не говори ниједан од ова два језика?

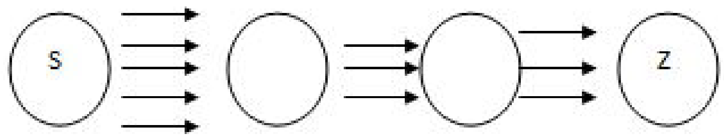
Решење: Нека N и F означавају скупове ученика који редом знају немачки и француски језик. Знамо да је $|N| = 38$, $|F| = 25$, $|N \cap F| = 12$.

Применом формуле укључења-искључења рачунамо укупан број ученика који говоре немачки или француски:

$$|N \cup F| = |N| + |F| - |N \cap F| = 38 + 25 - 12 = 51.$$

Сада нам преостаје да од укупног броја ученика одузмемо оне ученике који говоре немачки или француски. На тај начин добијамо да је број ученика који не говоре ниједан од ова два језика $73 - 51 = 22$ ученика. □

2. Фигура се са једног кружног поља може померити само на поља у која воде стрелице из полазног поља (Слика 2.6). На колико различитих начина се фигура може преместити са поља S на поље Z?



Слика 2.6

Решење: Из полазног поља на друго поље фигура се може померити на један од 5 начина, на треће поље на један од 3 начина и на завршно поље на један од 3 начина. Дакле, постоји укупно $5 \cdot 3 \cdot 3 = 45$ могућности. □

3. Колико има троцифрених бројева записаних помоћу непарних цифара $1, 3, 5, 7$ и 9?

Решење: Постоји 5 могућности да се на прво место упише непарна цифра. За сваки избор непарне цифре за прво место, постоји по 5 могућности да се на друго место упише непарна цифра. Такође, за сваки избор прве и друге цифре, постоји по 5 могућности да се на треће место упише непарна цифра. Дакле, постоји $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ троцифрених бројева записаних непарним цифрама. □

4. Колико има петоцифрених непарних бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4$?

Решење: Постоје четири могућности да се на прво место упише цифра: $1, 2, 3$ или 4 (јер цифра 0 не може бити прва цифра). За сваки избор цифре за прво место постоји по 5 могућности да се на друго место упише цифра $0, 1, 2, 3$ или 4. За сваки избор цифре за прва два места, постоји по 5 могућности да се на треће место упише цифра $0, 1, 2, 3, 4$. За сваки избор цифре за прва три места постоји по 5 могућности да се на четврто место упише цифра $0, 1, 2, 3, 4$. За сваки избор цифара за прва четири места постоје две могућности да се на пето место упише цифра 1 или 3 (јер добијени број мора бити непаран). Дакле, постоји $4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 1000$ петоцифрених непарних бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3$ и 4. □

5.

а) Колико има петоцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

б) Колико има петоцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ у којима се цифре не понављају?

в) Колико има петоцифрених парних бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ у којима се цифре не понављају?

Решење:

а) Постоји 6 могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 5$ или 6, јер 0 не може бити прва цифра, а за сваки избор прве цифре имамо 7 могућности за избор друге цифре. Исто важи и за избор треће, четврте и пете. Дакле, постоји укупно $6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 = 12\,005$ петоцифрених бројева који се могу записати цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

б) Постоји 6 могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 5$ или 6, јер 0 не може бити прва цифра. Након избора цифре за прво место, преостаје 6 могућности да се на друго место упише цифра, јер сада 0 може бити уписана, али се не може поновити цифра уписана на првом месту. Након избора цифре за прва два места, преостају 5 могућности да се на треће место упише цифра, јер се не могу поновити две претходно уписане цифре. Након избора цифара за прва три места, постоје 4 могућности за упис цифре на четврто место, јер се не смеју поновити прве 3 цифре. На крају, након избора цифара за прва четири места преостаје још 3 могућности за избор цифре на последњем месту. Дакле, постоји $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 2\,160$ петоцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ у којима се цифре не понављају.

в) Број ће бити паран ако се завршава на парну цифру $0, 2, 4$ или 6. Ако фиксирамо 0 на последњем месту петоцифреног броја, онда постоји 6 могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 5$ или 6. Након избора цифре за прво место, преостаје 5 могућности да се на друго место упише цифра, јер се не може поновити цифра уписана на првом месту, преостаје 4 могућности да се на треће место упише цифра и 3 могућности за четврто место, а на петом је већ уписана 0.

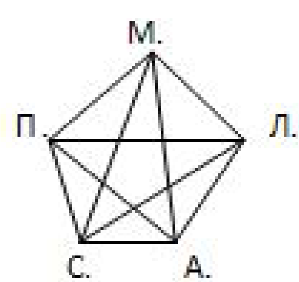
Уколико на последњем месту фиксирамо неку од цифара $2, 4$ или 6 онда нам за прво место преостаје 5 могућности, јер 0 не може бити на првом месту, за друго место такође 5 могућности, јер се ту може уписати и 0, на треће место имамо 4 могућности, на четврто три могућности. Ово важи за било коју од цифара $2, 4$ или 6, па ћемо овај број петоцифрених бројева помножити са 3. Укупан број парних петоцифрених бројева код којих се цифре не понављају ће бити $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360 + 900 = 1\,260$ (Слика 2.7).

Слика 2.7

□

6. На шаховском турниру је учествовало пет шахиста: Пера, Мика, Лаза, Сима и Аца. Колико укупно партија је одиграно ако се играло по систему ,,свако са сваким"?

Решење: Свих пет шахиста је одиграло по једну партију са преостала четири. Ако помножимо $5 \cdot 4$, овај производ је два пута већи од укупног броја одиграних партија, јер је сваки шахиста убројан два пута. Дакле, 5 шахиста је одиграло $\dfrac{5 \cdot 4}{2} = 10$ партија шаха (Слика 2.8).



Слика 2.8

□

7.

а) Колико дужи образује седам тачака?

б) На колико начина се од двадесет ученика једног одељења може изабрати двочлана делегација?

в) Колико има двочланих подскупова скупа који има 100 елемената?

Решење:

а) Свака од 7 тачака образује по једну дуж са преосталих 6 тачака. Самим тим свака од 7 тачака је крајња тачка 6 дужи. Када помножимо број тачака са бројем дужи чији је један крај једна дата тачка, добијемо производ $7 \cdot 6$. Овај производ је два пута већи од укупног броја свих дужи, јер је свака дуж убројана два пута, будући да садржи два темена.

Дакле, 7 тачака образује $\dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$ дужи.

б) Аналогно примеру под *а)*, $\dfrac{20 \cdot 19}{2} = 190$ начина.

в) Аналогно примеру под *а)*, $\dfrac{100 \cdot 99}{2} = 4\,950$ подскупова.

□

8. Ако је $|A| = 378$, $|B| = 253$ и $|A \cup B| = 457$, одреди $|A \cap B|$, $|A \setminus B|$, $|B \setminus A|$.

Решење: На основу Принципа укључења-искључења за два скупа 2.2 добијамо да је

$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$ тј.
$|A \cap B| = 378 + 253 - 457$, односно
$|A \cap B| = 174$.

На основу скуповних идентитета и Принципа збира 2.3

$|A| = |A \setminus B| + |A \cap B|$ па је
$|A \setminus B| = 378 - 174$ тј. $|A \setminus B| = 204$,
$|B \setminus A| = 253 - 174$ тј. $|B \setminus A| = 79$.

□

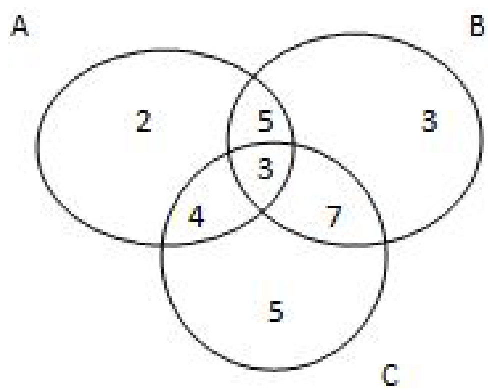
9. Ако је $|A| = 14$, $|B| = 18$, $|C| = 19$, $|A \cap B| = 8$, $|B \cap C| = 10$, $|C \cap A| = 7$ и $|A \cap B \cap C| = 3$. Одреди: $|(A \cup B) \cap C|$, $|(A \cup B) \setminus C|$, $|C \setminus (A \cap B)|$, $|(A \setminus B) \setminus C|$ и $|A \setminus (B \setminus C)|$.

Решење: На основу Принципа укључења-искључења за три скупа 2.2

$|A \cup B \cup C| = 14 + 18 + 19 - 8 - 10 - 7 + 3 = 29$

На основу скуповних идентитета и Принципа збира 2.3

$|A \cup B \cup C| = |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ тј.
$|(A \cup B) \cup C| = |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ тј.
$|(A \cup B) \cap C| = 14 + 18 - 8 + 19 - 29$ тј. $|(A \cup B) \cap C| = 14$
$|(A \cup B) \setminus C| = |A| + |B| - |A \cap B| - |(A \cup B) \cap C| = 14 + 18 - 8 - 14 = 10$
$|C \setminus (A \cap B)| = |C| - |C \cap (A \cap B)| = 19 - 3 = 16$
$|(A \setminus B) \setminus C| = |A| - |A \cap B| - |A \cap C| + |A \cap B \cap C| = 14 - 8 - 7 + 3 = 2$
$|A \setminus (B \setminus C)| = |A| - |A \cap B| + |A \cap B \cap C| = 14 - 8 + 3 = 9.$



Слика 2.9

□

10. Од 100 учесника једног међународног такмичења, њих 27 не зна ни немачки ни руски језик. Ако 38 учесника зна немачки, а 45 зна руски, одреди колико учесника зна и немачки и руски језик.

Решење: Ако су N и R скупови који означавају број учесника који говори немачки односно руски језик, тада је

$$|N| = 38,\ |R| = 45,\ |N \cup R| = 100 - 27 = 73,$$

на основу Принципа укључења-искључења (2.2)

$$|N \cap R| = 38 + 45 - 73 = 10.$$

□

11. Сви ученици једног одељења чланови су бар једне од секција: шаховске, информатичке или математичке. Дванаесторо ученика посећује више од једне секције, при чему све три секције посећује троје ученика. Шесторо ученика су чланови информатичке и математичке секције, седморо ученика су чланови шаховске и математичке секције. Колико ученика посећује шаховску и информатичку, али не и математичку секцију?

Решење: Ако са Š, I, M означимо скупове ученика који су редом чланови шаховске, информатичке и математичке секције, тада је

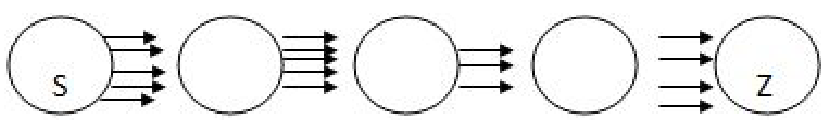
$$|I \cap M| = 6 \;\; |\check{S} \cap M| = 7, \;\; |\check{S} \cap I \cap M| = 3.$$

На основу формуле укључења-искључења (2.4)

$$|\check{S} \cap I| = 12 - 6 - 7 + 3 = 2.$$

□

12. Фигура се са једног кружног поља може померити само на поље у које воде стрелице из полазног поља (Слика 2.10). На колико различитих начина се фигура може преместити са поља S на поље Z?



Слика 2.10

Решење: Са поља S на друго поље имамо 5 могућности, такође 5 могућности са другог на треће поље, са трећег на четврто поље имамо 3 могућности и са четвртог на последње Z поље имамо 4 могућности. Дакле, то је укупно $5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 4 = 300$ могућности. □

13. Колико има шестоцифрених бројева формираних од цифара $0, 1, 2, 3, 4, 5$?

    а) тако да су све цифре различите;

    б) ако се цифре могу понављати?

Решење:

а) Постоји 5 могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 5$, јер 0 не може бити прва цифра. Након избора цифре за прво место преостаје 5 могућности да се на друго место упише цифра, јер сада 0 може бити уписана, али се не може поновити цифра уписана на првом месту. Након избора цифара за прва два места, преостају 4 цифре за треће место, 3 цифре за четврто место, 2 цифре за пето место и једна за последње, шесто место.
Дакле, постоји $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 600$ шестоцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5$ у којима се цифре не понављају.

б) Постоји 5 могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 5$, јер 0 не може бити прва цифра. Након избора цифре за прво место преостаје 6 могућности за свако следеће место, јер се цифре $0, 1, 2, 3, 4, 5$ могу понављати. Постоји тада $5 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 38\,880$ шестоцифрених бројева записаних цифрама $0, 1, 2, 3, 4, 5$ у којима се цифре могу понављати.

$\square$

14. Колико има петоцифрених бројева формираних од цифара $0, 1, 2, 3, 4, 6$ таквих да се нула не налази ни на првом ни на последњем месту и да се ниједна цифра не понавља?

Решење: Постоји пет могућности да се на прво место упише цифра $1, 2, 3, 4, 6$, јер 0 не може бити на првом месту; након избора цифре за прво место има још пет могућности да се на друго место упише цифра, јер се сад 0 може уписати, али не може цифра са првог места. За треће место имамо још 4 могућности, за четврто 3 могућности, а за пето 2 могућности. Тако смо добили укупан број петоцифрених бројева код којих 0 није на првом месту и код којих се цифре не понављају. Од укупног броја петоцифрених бројева код којих се цифре $0, 1, 2, 3, 4$ и

6 не понављају, треба да одузмемо петоцифрене бројеве код којих се цифре не понављају и код којих је 0 на последњем месту. Њих има укупно $5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 - 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 600 - 120 = 480$. $\square$

15. Колико има троцифрених бројева који не садрже цифру 2?

Решење: Троцифрени бројеви који не садрже цифру 2 су троцифрени бројеви који садрже $0, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Постоји 8 могућности да се на прво место упише цифра $1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, јер 0 не може бити на првом месту. Након избора цифре за прво место, има још 9 могућности да се на друго и треће место упише цифра, јер се сада и 0 може уписати. Дакле, постоји $8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ троцифрених бројева који не садрже цифру 2. $\square$

16. Колико има четвороцифрених бројева који не садрже ни цифру 1 ни цифру 2?

Решење: Четвороцифрени бројеви који не садрже цифре 1 и 2 су бројеви који садрже $0, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$. Постоји 7 могућности да се на прво место упише цифра $3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, јер 0 не може бити на првом месту. За друго, треће и четврто место имамо по 8 могућности, јер сада и 0 може да се упише. Постоји $7 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8 = 3\,584$ четвороцифрених бројева који не садрже цифре 1 и 2. $\square$

17. Колико има четвороцифрених бројева који садрже бар једном цифру 1?

Решење: Један од начина да се реши овај задатак је да од укупног броја четвороцифрених бројева одузмемо број оних који не садрже 1 у свом запису. Дакле, постоји $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 - 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9\,000–5\,832 = 3\,168$ четвороцифрених бројева који бар једном садрже цифру 1. $\square$

18.

а) На колико начина се може изабрати шифра (password) од пет знакова коју чине само мала слова енглеске абецеде (њих 26) и цифре декадног система (њих 10)? При томе се шифре могу састојати само од слова или само од бројева, а знаци унутар шифре се могу понављати.

б) На колико начина се може изабрати шифра од пет знакова тако да сви знаци буду међусобно различити?

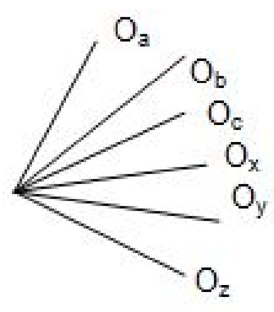
Решење:

а) Постоји 36 могућности да се на прво место шифре упишу или неко од 26 малих абецедних слова или нека од 10 цифара. За преосталих четири места такође постоји 36 могућности, јер се цифре или слова могу понављати унутар шифре. Дакле, укупно постоји $36^5 = 60\,466\,176$ начина да се изабере шифра, а да се знаци унутар шифре могу понављати.

б) Уколико су сви знаци међусобно различити, онда за прво место постоји 36 могућности, за друго место 35, за треће, 34, за четврто 33 и за пето 32. То је укупно $36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 \cdot 32 = 45\,239\,040$ могућности за избор шифре.

□

19. На слици 2.11 је приказано шест полуправих са заједничким почетком. Колико конвексних углова одређују ове полуправе?



Слика 2.11

Решење: Свака од 6 полуправих образује по један угао са преосталих 5 полуправих. Да бисмо добили укупан број углова треба да помножимо $6 \cdot 5$, али то морамо поделити са 2, јер је сваки угао убројан два пута будући да се састоји од две полуправе. Шест полуправих са заједничким почетком образује $\dfrac{6 \cdot 5}{2} = 15$ конвексних углова. □

20. У групи од 10 особа налазе се Нина и Аца. На колико начина се могу изабрати четири особе, под условом да ако је изабрана Нина, мора бити изабран и Аца?

Решење: У овом задатку морамо разликовати два случаја.

1. случај: Изабрана је Нина, самим тим мора бити изабран и Аца. Да бисмо формирали четворочлану групу треба од преосталих осам изабрати још две. То се може учинити на $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ начина.

2. случај: Није изабрана Нина. Овога пута можемо и не морамо изабрати Ацу. Да бисмо формирали четворочлану екипу од девет особа (јер Нина није изабрана) бирамо четири особе на $\frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$ начина. Под датим условима, четири особе од њих 10 можемо изабрати на укупно $28 + 126 = 154$ начина.

□

Глава 3

Варијације, пермутације и комбинације

Дефиниција 3.1 *Нека је дат скуп A од n елемената, тј. нека је $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Под низом елемената скупа A од k ($k \geq 1$) чланова подразумеваћемо свако пресликавање скупа $N_k = \{1, 2, \dots, k\}$ у скуп A. Уместо да за такав низ пишемо $\binom{1\ \ 2 \dots k}{x_1\ \ x_2 \dots x_k}$, где $x_i \in A$ ($i = 1, 2, \dots, k$), обично пишемо $x_1, x_2, \dots, x_k$ и то називамо низом.*

Обично се изоставља писање зареза у последњем запису и употребљава се $x_1 x_2 \dots x_k$ ознака за низ од k чланова. На основу дефиниције (3.1), два низа су једнака ако и само ако су једнаки њихови чланови на одговарајућим (истим) местима. Ако је $1 \leq k \leq n$, тада је могуће да су сви чланови низа међусобно различити, док у случају $k > n$ увек имамо и чланове низа који су међусобно једнаки, тј. који се понављају.

3.1 Појам варијације, пермутације, комбинације

Пример 3.1 *Дат је скуп $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Написати:*

а) све двоцифрене бројеве са различитим цифрама које припадају скупу A;

б) све троцифрене бројеве са различитим цифрама које припадају скупу A.

Решење:

а) Двоцифрени бројеви са различитим цифрама које припадају скупу A су: 12 13 14 21 23 24 31 32 34 41 42 43.

Таквих бројева има укупно 12. Прва цифра може бити било која од датих $1, 2, 3$ или 4, тј. за прву цифру имамо 4 могућности, а за сваки такав избор прве цифре имамо 3 могућности за другу цифру, јер не можемо поново искористити ону коју смо написали на првом месту. Број тражених двоцифрених бројева је тада $4 \cdot 3 = 12$.

б) Троцифрени бројеви са различитим цифрама које припадају скупу A су: 123 124 132 134 142 143 213 214 231 234 241 243 312 314 321 324 341 342 412 413 421 423 431 432.
Као и у случају под *а)* закључујемо да прву цифру можемо изабрати на 4 начина. За изабрану прву цифру имамо 3 могућности за избор друге цифре, а за изабрану прву и другу цифру имамо 2 могућности за избор треће цифре. Укупан број тражених троцифрених бројева је једнак $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$.

$\square$

Изражено термином низа, у овом примеру је требало формирати све низове облика x_1x_2 (односно $x_1x_2x_3$) чији су чланови различити и који припадају скупу $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

Пример 3.2 *Осам кандидата полаже усмени (тј. један по један) испит из математике. Првог дана полаже пет кандидата. На колико различитих начина се може направити распоред полагања испита првог дана?*

Решење: Означимо са A скуп кандидата, а саме кандидате са a_i, тј. a_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, односно нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_8\}$. За први дан је потребно изабрати 5 кандидата и одредити распоред полагања испита. Потребно је одредити број низова облика $x_1x_2x_3x_4x_5$ са различитим члановима који су елементи скупа A. Кандидата који ће први полагати можемо изабрати на 8 начина, другог по реду можемо изабрати од преосталих 7, трећег по реду од преосталих 6, четвртог од преосталих 5 и петог од преосталих 4. Пет кандидата се може изабрати и распоредити на $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$ начина. $\square$

Пример 3.3 *На команду „збор”,* 10 *ученика се постројава у једну врсту. На колико начина то могу учинити?*

Решење: Ако са $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{10}\}$ означимо скуп ученика, тада је потребно одредити број низова $x_1x_2\ldots x_{10}$ чији су чланови различити елементи скупа A. Ако поступимо као у претходним примерима, закључујемо да је број таквих низова $10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 3\,628\,800$ што је укупан број начина за постројавање ученика у једну врсту. □

Исписати све могућноти из претходног примера је прилично напорно, али у случају да скуп A има 3 елемента (ученика), тј. да је скуп $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, имали бисмо следеће могућности

$$a_1a_2a_3,\ a_1a_3a_2,\ a_2a_1a_3,\ a_2a_3a_1,\ a_3a_1a_2,\ a_3a_2a_1.$$

У овом случају укупан број начина постројавања у једну врсту је једнак $3\cdot2\cdot1 = 6$.

Уведимо следећу ознаку за производ првих n узастопних природних бројева:

$$n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n.$$

Ову ознаку $n!$ читамо „n факторијел”. Тако је:

$1! = 1$, $2! = 2{\cdot}1$, $3! = 3{\cdot}2{\cdot}1 = 6$, $4! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4 = 24$, $5! = 1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}4{\cdot}5 = 120$ итд.

По дефиницији узимамо да је $0! = 1$.

Пример 3.4 *За шаховску екипу школе пријавило се* 5 *ученика. Формирајмо све могуће трочлане екипе од пријављених ученика.*

Решење: Нека скуп A представља пријављене ученике, па тада имамо да је $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. У овом случају не можемо поступити као у претходним примерима. Ако бисмо уочили све низове од три члана који су међусобно различити елементи скупа A, тада би на пример следећи низови $a_1a_2a_3$, $a_1a_3a_2$, $a_2a_1a_3$, $a_2a_3a_1$, $a_3a_1a_2$, $a_3a_2a_1$ били различити, али би у нашем случају представљали једну исту екипу. Због тога је потребно формирати све трочлане подскупове скупа A. Уместо ознаке за подскуп $\{a_1, a_2, a_3\}$ писаћемо само $a_1a_2a_3$ и имамо у виду да су два трочлана низа са различити члановима једнака ако и само ако су једнаки скупови формирани од њихових чланова. Тада имамо следеће могућности за формирање екипе:

$a_1a_2a_3$ $a_1a_3a_4$ $a_2a_3a_4$ $a_3a_4a_5$

$a_1a_2a_4$ $a_1a_3a_5$ $a_2a_3a_5$

$a_1a_2a_5$ $a_1a_4a_5$ $a_2a_4a_5$.

Дакле, укупно имамо 10 начина за формирање екипе. Напомињемо да код овако формираних низова редослед елемената није битан. □

У претходним примерима имамо два различита начина издвајања k $(1 \leq k \leq n)$ различитих елемената скупа A који садржи n елемената. У прва три примера код издвајања водимо рачуна о поретку изабраних елемената, док у четвртом примеру поредак изабраних елемената није битан.

Дефиниција 3.2 *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ од n елемената. Низ од k $(1 \leq k \leq n)$ различитих чланова који су елементи скупа A називамо* ***варијацијом скупа*** *A (од n елемената) класе k (k-те класе). У случају $\boldsymbol{k = n}$ варијацију класе n скупа A називамо* ***пермутацијом скупа*** *A.*

Дефиниција 3.3 *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ од n елемената. Подскуп од k $(1 \leq k \leq n)$ елемената скупа A називамо* ***комбинацијом класе $\boldsymbol{k}$ од $\boldsymbol{n}$ елемената*** *скупа A.*

3.2 Пребројавање варијација, пермутација и комбинација

Теорема 3.4 *Нека је дат скуп A од n елемената, тј. нека је $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Нека V_k^n означава број свих варијација класе k од n елемената, нека P_n буде ознака за број свих пермутација скупа A, а нека C_k^n означава број свих комбинација класе k од n елемената (у свим случајевима $1 \leq k \leq n$). Тада је:*

$$\text{а)}\ V_k^n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1); \tag{3.1}$$

$$\text{б)}\ P_n = n!; \tag{3.2}$$

$$\text{в)}\ C_k^n = \frac{V_k^n}{k!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}. \tag{3.3}$$

Доказ:

а) Нека $x_1, x_2, \ldots, x_n$ означава произвољну варијацију класе k скупа $A = \{a_1, a_2. \ldots, a_n\}$. На првом месту у низу $x_1, x_2, \ldots, x_n$ први члан низа може бити било који од n елемената скупа A. Са сваким од n елемената као првим чланом низа имамо да други члан низа може бити било који од $n-1$ преосталих елемената скупа A, тј. први и други члан низа можемо изабрати на $n\cdot(n-1)$ начина. За све такве изборе прва два члана имамо $n-2$ могућности за избор трећег члана, па се прва три члана могу изабрати на $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)$ начина. Сличним поступком закључујемо да се k чланова низа могу изабрати на

$$\begin{aligned} V_k^n &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big[n-(k-2)\big]\cdot\big[n-(k-1)\big] = \\ &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1) \end{aligned} \tag{3.4}$$

начина.

б) Пошто је по Дефиницији 3.2 пермутација скупа A од n елемената једнака варијацији класе n скупа A, то је према резултату под *а)* једнако

$$\begin{aligned} P_n = V_n^n &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot\big[n-(n-1)+1\big]\cdot[n-n+1] = \\ &= n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n! \end{aligned} \tag{3.5}$$

в) Од једне комбинације класе k, рецимо $x_1, x_2, \ldots, x_k$ могли бисмо променом поретка чланова добити према *б)* $P_k = k!$ пермутација скупа $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ тј. $k!$ варијација класе k полазног скупа A од n елемената. Ако је C_k^n укупан број комбинација класе k од n елемената тада је

$$C_k^n \cdot k! = V_k^n,$$

одакле добијамо

$$C_k^n = \frac{V_k^n}{k!}. \tag{3.6}$$

■

Да бисмо лакше запамтили формулу за V_k^n, приметимо да у производу $n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+2)\cdot(n-k+1)$ имамо k множилаца који су узастопни природни бројеви и код којих је n највећи број. Тако је

$$V_2^5 = 5\cdot 4,\ V_3^5 = 5\cdot 4\cdot 3,\ V_5^7 = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3.$$

Напоменимо да по дефиницији узимамо да је

$V_0^n = 1,$
$P_0 = 0! = 1,$
$C_0^n = 1.$

Пример 3.5 *Колико има троцифрених бројева са различитим цифрама који се могу образовати од цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5$*?*

Решење: Овде се ради о варијацијама треће класе од 6 елемената. Њихов број је $V_3^6 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Међутим, варијацију типа 012 не сматрамо троцифреним бројем, па од укупног броја варијација треће класе треба одузети број оних варијација треће класе који почињу са нулом. Број таквих варијација ће бити једнак броју варијација друге класе од елемената $1, 2, 3, 4, 5$ (јер је први члан низа 0 фиксиран), тј. $V_2^5 = 5 \cdot 4 = 20$. Укупан број троцифрених бројева је $V_3^6 - V_2^5 = 120 - 20 = 100$. □

Пример 3.6 *Дат је скуп* $A = \{a, b, c, d, e\}$*. У лексикографском поретку је рецимо* abc *прва варијација треће класе од свих елемената скупа* A*, а* edc *последња. Слично је* $abcde$ *прва пермутација скупа* A*, а* $edcba$ *последња. Према Теореми 3.4, варијација треће класе од пет елемената има укупно* $V_3^5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$*, док је број пермутација скупа* A *једнак* $P_5 = 5! = 120$.

а) Како гласи у лексикографском поретку 45. *варијација треће класе скупа* A*?*

б) Како гласи у лексикографком поретку 88. *пермутација скупа* A*?*

Решење:

а) Број варијација облика ax_2x_3, где су x_2, x_3 различити и припадају скупу $\{b, c, d, e\}$, једнак је броју варијација друге класе од 4 елемента, тј. једнак је $V_2^4 = 4 \cdot 3 = 12$. Слично са b почиње 12 варијација и са c такође 12 варијација. То је укупно 36 варијација. Ако бисмо узели у обзир и све варијације које почињу словом d то је укупно $12 \cdot 4 = 48$ варијација, што је више од 45. Варијација које почињу са dax_3 има укупно 3, јер толико има могућности за избор трећег члана од преостала три слова. Са dbx_3 почињу 3 варијације, са dcx_3 такође 3. Сада је укупан број варијација $36 + 3 \cdot 3 = 45$, па је 45-та варијација у ствари последња варијација која почиње са dc, а то је dce.

б) Пермутације које почињу елементом a, тј. $ax_1x_2x_3x_4$ има онолико колико има пермутација од преостала 4 елемента, тј. има их $4! = 24$. Толико пермутација почиње и елементима b и c. Укупно пермутација које почињу словима a, b или c има $24 \cdot 3 = 72$. Са da почиње $3! = 6$ пермутација, а са db такође 6. До сада бисмо укупно имали 84 пермутације. Следеће четири пермутације се могу непосредно исписати:

$dcabe$ (85)
$dcaeb$ (86)
$dcbae$ (87)
$dcbea$ (88).

Дакле тражена пермутација је $dcbea$.

□

Пример 3.7 *У кутији се налази* 10 *куглица нумерисаних бројевима* $1, 2, 3, \ldots, 9, 10$. *Истовремено извлачимо* 3 *куглице. Колико различитих извлачења можемо добити?*

Решење: Овде се очигледно ради о комбинацији треће класе од 10 елемената. Њихов укупан број је према Теореми 3.4 једнак:

$$C_3^{10} = \frac{V_3^{10}}{3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{720}{6} = 120.$$

□

Пример 3.8 *Одредимо у лексикографском поретку* 52. *комбинацију треће класе од следећих* 9 *елемената:* $1, 2, \ldots, 9$.

Решење: Укупан број комбинација је

$$C_3^9 = \frac{V_3^9}{3!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{504}{6} = 84.$$

Елементом 1 почиње укупно

$$C_2^8 = \frac{V_2^8}{2!} = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2} = \frac{56}{2} = 28.$$

комбинација, јер толико има могућности за преостала два члана комбинације. Бројем 2 почиње

$$C_2^7 = \frac{V_2^7}{2!} = \frac{7 \cdot 6}{1 \cdot 2} = \frac{42}{2} = 21$$

комбинација (с обзиром да код комбинација није битан поредак, не узимамо више у обзир елемент 1). Са 1 и 2 укупно има $28 + 21 = 49$ комбинација.

Наредне комбинације (у њима се не појављују више елементи 1 и 2) биће следеће:

345 (50)

346 (51)

347 (52).

□

Глава 4

Варијације и пермутације са понављањем

Можемо посматрати и низове код којих има и чланова који не морају обавезно бити различити, већ се неки чланови могу и понављати у низу. Тада се ради о варијацијама и пермутацијама са понављањем. Овде може бити и $k > n$.

Пример 4.1 *Дат је скуп* $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

а) Образујмо све двоцифрене бројеве чије цифре припадају скупу A*;*

б) Образујмо све троцифрене бројеве чије цифре припадају скупу A.

Решење:

а) Од елемената скупа A можемо формирати следеће двоцифрене бројеве:

11 21 31 41
12 22 32 42
13 23 33 43
14 24 34 44.

Укупан број двоцифрених бројева је $4^2 = 16$.

б) Неколико првих троцифрених бројева ће имати облик:

111 131 211 231
112 132 212 232
113 133 213 233

114 134 214 234

121 141 221 ...

122 142 222

123 143 223

124 144 224.

Према примеру под *а)* таквих двоцифрених бројева има 4^2, па и троцифрених бројева који почињу цифром 1 има 4^2. Како прву цифру можемо изабрати на 4 начина, то ће укупан број троцифрених бројева бити $4 \cdot 4^2 = 4^3 = 64$.

□

Пример 4.2 *У кутији се налазе* 4 *различито обојене куглице. Означимо их са* a, b, c, d. *Из кутије извлачимо једну по једну куглицу, са враћањем у кутију после сваког извлачења. Приликом сваког извлачења региструјемо број куглице и поредак извлачења. Ако смо из кутије извукли три куглице, одредимо број свих могућих резултата таквог извлачења.*

Решење: За свако извлачење имамо по 4 могућности, па је укупан број могућности као и у претходном примеру под *б)* $4^3 = 64$. □

Пример 4.3 *Дат је скуп* $A = \{1, 2, 3\}$. *Одредимо број свих шестоцифрених бројева у чијем се запису цифра* 1 *појављује два пута, цифра* 2 *три пута, а цифра* 3 *једанпут.*

Решење: Потребно је одредити све низове $x_1x_2x_3x_4x_5x_6$ од 6 чланова, код којих су два члана једнака 1, три члана једнака 2, један члан једнак 3. Првих неколико низова има следећи облик:

112223 122123

112232 122132

112322 122213

113222 122231

121223 122312

121232 122321

121322 ...

Овакве низове где се сваки елемент скупа A појављује тачно одређен број пута, називамо **пермутацијама са понављањем**. У овом примеру означимо са $P^3_{2,3,1}$ број пермутација са понављањем, где нам горњи индекс означава број елемената, а доњи индекси означавају број појављивања сваког елемента у низу. Када би сви елементи у низу били међусобно различити, а има их 6, тада би укупан број пермутација био 6!. Међутим, код произвољне пермутације са понављањем можемо мењати места једнаким члановима у низу, а да се пермутација (низ) не промени. Тако чланови који су једнаки 1 могу мењати места тј. пермутовати се на 2! начина. Чланови који су једнаки 2 (има их 3) могу мењати места на 3! начина, а елемент 3 на 1! начин. Једнаки чланови могу укупно мењати места на 2!3!1! начина, а да се пермутација не промени. Дакле, за сваку пермутацију са понављањем имали бисмо 2!3!1! пермутација (без понављања) у којима се не мења распоред различитих елемената. Тада је

$$2!3!1! \cdot P^3_{2,3,1} = 6!,$$

одакле је

$$P^3_{2,3,1} = \frac{6!}{2!3!1!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1} = \frac{720}{12} = 60.$$

□

Дефиниција 4.1 *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Низ $x_1 x_2 \ldots x_k$ $(k \geq 1)$ код кога неки чланови низа могу бити међусобно једнаки назива се* ***варијацијом са понављањем класе k****.*

Уколико се у низу $x_1 x_2 \ldots x_k$ понављају сви елементи скупа A, и то a_1 тачно k_1 пута, a_2 тачно k_2 пута,$\ldots$, a_n тачно k_n пута (тада је $k_1 + k_2 + \ldots + k_n = k$), такав низ се назива ***пермутацијом са понављањем*** *скупа A (од n елемената)* ***класе k****.*

Према Дефиницији 4.1 код пермутација са понављањем мора бити $k > n$ и мора се знати колико пута се сваки елемент понавља.

Теорема 4.2 *Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$.*

a) Ако са $\overline{V}^n_k$ означимо број варијација са понављањем класе k $(k \geq 1)$, тада је

$$\overline{V}^n_k = n^k. \tag{4.1}$$

б) Ако $P^n_{k_1,k_2,\ldots,k_n}$ *означава број свих пермутација са понављањем скупа* A *код којих се елемент* a_1 *понавља* k_1*, елемент* a_2 *понавља* k_2 *пута,...,елемент* a_n *понавља* k_n *пута, тада је*

$$P^n_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}. \tag{4.2}$$

Доказ:

а) На првом месту у низу (тј. први члан низа) $x_1x_2\ldots x_k$ може се налазити било који од n елемената, независно од осталих чланова низа. Исто важи и за остала места у низу (за све остале чланове низа). Зато ће укупан број варијација таквог типа бити једнак

$$\underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k} = n^k.$$

б) Уколико за моменат претпоставимо да су сви чланови у пермутацији са понављањем различити, тада бисмо имали пермутацију без понављања од $k_1 + k_2 + \ldots + k_n$ елемената, те је укупан број пермутација једнак $(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!$.

Код сваке пермутације са понављањем можемо мењати места члановима који су једнаки a_1, а да се пермутација не промени. Таквих размештања има $k_1!$. Слично можемо учинити са члановима који су једнаки a_2. Такви чланови могу мењати места на $k_2!$ начина итд. За сваку пермутацију са понављањем имамо $k_1!k_2!\ldots k_n!$ пермутација (без понављања) у којима се не мења међусобни распоред различитих чланова скупа A. Мењајући такве распореде добили бисмо укупан број пермутација (без понављања) од $k_1+k_2+\ldots+k_n$ елемената.

Зато важи

$$k_1!k_2!\ldots k_n! \cdot P^n_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = (k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!$$

одакле је, коначно доказан израз (4.2)

$$P^n_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_n)!}{k_1!k_2!\ldots k_n!}.$$

■

На пример, $\overline{V}_3^4 = 4^3 = 64$,

$$P^4_{2,2,3,1} = \frac{(2+2+3+1)!}{2!2!3!1!} = \frac{8!}{2!2!3!1!} = \frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 1680.$$

По дефиницији узимамо да је $\overline{V}_0^n = 1$.

Пример 4.4 *Колико има троцифрених бројева који се могу образовати од цифара* $0, 1, 2, 3, 4, 5$*?*

Решење: Овде се ради о варијацијама са понављањем треће класе од 6 елемената. Њихов број је $\overline{V}_3^6 = 6^3 = 216$. Варијацију која почиње цифром 0 не сматрамо троцифреним бројем. Број таквих варијација је једнак броју варијација друге класе од 6 елемената, први члан је фиксиран. $\overline{V}_2^6 = 6^2 = 36$. Укупно има $216 - 36 = 180$ тражених бројева.

Упоредимо резултат овог примера и примера 3.5 из претходног поглавља. Видимо да је за 80 више троцифрених бројева уколико цифре могу да се понављају.

□

Пример 4.5 *Објаснимо разлику између игара на срећу. Посматраћемо спортску прогнозу и лото. Одредимо број свих могућих комбинација које се могу испунити у оба случаја.*

Решење: На листићу спортске прогнозе имамо 13 парова фудбалских тимова, а резултате њихових утакмица записујемо са $0, 1$ или 2 у зависности од тога да ли је резултат утакмице нерешен (0), победа домаћина (1) или победа гостујуће екипе (2). Сви парови на листићу су дати у одређеном поретку, а једна комбинација је представљена колоном са 13 места (поља) где уписујемо један од бројева $0, 1$ или 2. Овде се очигледно ради о варијацијама са понављањем тринаесте класе од 3 елемента, па је њихов број

$$\overline{V}_{13}^3 = 3^{13} = 1\,594\,323.$$

На пример, једна варијација има облик 1110021111000.

Код лотоа имамо 39 бројева, а потребно је изабрати 7 бројева.

При извлачењу нумерисаних куглица редослед извлачења није битан (извлачи се једна по једна куглица без враћања), па се овде ради о комбинацијама седме класе од 39 бројева. Њих укупно има

$$C_7^{39} = \frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7!} = 15\,380\,937.$$

□

Пример 4.6 *На колико начина можемо распоредити* 3 *речника енглеског,* 2 *речника француског и* 5 *речника немачког језика ако се налазе на полици један до другог?*

Решење: У овом случају имали бисмо низ од 10 чланова у коме су три члана од једне врсте, два члана од друге врсте и 5 чланова од треће врсте. Речено језиком комбинаторике имамо 3 елемента од којих се један понавља 3 пута, други 2 пута и трећи 5 пута. У овом случају се ради о пермутацијама са понављањем од 3 елемената 10. класе, где се тачно зна број појављивања сваког елемента. Према Теореми 4.2 под *б)* њихов број је једнак

$$P^3_{3!2!5!} = \frac{(3+2+5)!}{3!2!5!} = \frac{10!}{3!2!5!} = 2\,520.$$

□

Глава 5

Биномни коефицијенти и биномни образац

Дефиниција 5.1 *Биономним коефицијентом, у ознаци* $\binom{n}{k}$ *читамо ,,n над k", где* $k, n \in \mathbb{N}$, $1 \leq k \leq n$, *називамо број* $\dfrac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}$, *тј.*

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}. \tag{5.1}$$

По дефиницији узимамо да је $\binom{n}{0} = 1$.

Упоређујући ову формулу са формулом за број свих комбинација класе k од n елемената закључујемо да је

$$C_k^n = \binom{n}{k}. \tag{5.2}$$

Основне особине биномних коефицијената дате су следећом теоремом.

Теорема 5.2 *За биномне коефицијенте важи:*

$$a) \quad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}; \tag{5.3}$$

$$б) \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}; \tag{5.4}$$

$$\textit{в)} \quad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{5.5}$$

Доказ:

а) За $k = 0$ и $k = n$ једнакост је тачна, јер је по дефиницији $\binom{n}{0} = 1$ и $0! = 1$, док је

$$\binom{n}{n} = \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} = \frac{n!}{n!} = 1.$$

Нека је $1 \leq k < n$. Тада је према Дефиницији 5.1

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \cdot \frac{(n-k)!}{(n-k)!}$$
$$= \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)(n-k)(n-k-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

б) Коришћењем својства *а)* добијамо да је

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)![n-(n-k)]!} = \frac{n!}{(n-k)!k!},$$

па је заиста $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Ово својство је **својство симетричности** код биномних коефицијената.

в) Применом једнакости под *а)* и чињенице да је $k! = k \cdot (k-1)!$, имамо да је

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \cdot \left[\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k+1}\right] =$$
$$= \frac{n!}{k!(n-k-1)!} \frac{n+1}{(k+1)(n-k)} = \frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!} =$$
$$= \frac{(n+1)!}{(k+1)![(n+1)-(k+1)]!} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Овим смо доказали **правило сабирања** биномних коефицијената. ■

Пример 5.1 *Непосредно израчунавамо да је*

$$\binom{8}{3} = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{3!} = 56, \quad \binom{n}{1} = \frac{n}{1!} = n, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}, \quad \textit{итд.}$$

Применом једнакости под б) у Теореми 5.2 можемо израчунавање неких биномних коефицијената знатно упростити. Тако је на пример

$$\binom{8}{6} = \binom{8}{8-6} = \binom{8}{2} = \frac{8\cdot 7}{2!} = 28,$$
$$\binom{n}{n-2} = \binom{n}{n-(n-2)} = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2},$$
$$\binom{n}{n-1} = \binom{n}{n-(n-1)} = \binom{n}{1} = n, \ldots$$

Назив „биномни коефицијент" је у вези са развојем бинома $(a+b)^n$. За $n=2$ и $n=3$ имамо следеће идентитете

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

које можемо писати у облику

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2,$$
$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3.$$

Поставља се питање развоја бинома $(a+b)^4$, $(a+b)^5, \ldots$ Одговор на такво питање даје следећа теорема.

Теорема 5.3

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

или краће записано

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

Ова формула се назива ***биномни образац*** *или* ***Њутнова***[1] ***биномна формула.***

Доказ: Доказ изводимо методом математичке индукције. За $n = 1$ формула (5.6) има облик $(a+b)^1 = \binom{1}{0}a^1 + \binom{1}{1}b^1$, што је очигледно тачно. Из претходних записа за $(a+b)^2$ и $(a+b)^3$ уверавамо се у тачност формуле за $n = 2$ и $n = 3$ (за сам доказ то није неопходно).

Претпоставимо да је формула тачна за n. Тада је

$$\begin{aligned}
&(a+b)^{n+1} = (a+b)^n(a+b) = \\
&= \left[\binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \dots \right.\\
&\left. + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n\right](a+b) = \\
&= \binom{n}{0}a^{n+1} + \left[\binom{n}{0} + \binom{n}{1}\right] a^n b + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{2}\right] a^{n-1}b + \dots \\
&+ \left[\binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}\right] ab^n + \binom{n}{n}b^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0}a^{n+1} + \binom{n+1}{1}a^n b + \binom{n+1}{2}a^{n-1}b^2 + \dots \\
&+ \binom{n+1}{n}ab^n + \binom{n+1}{n+1}b^{n+1}
\end{aligned}$$

што значи да је формула тачна и за $n+1$. Напоменимо да смо у последњем кораку применили правило о сабирању биномних коефицијената и једнакости

$$\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0} = \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1.$$

[1] *Isaac Newton* (1643-1727) био је енглески математичар, физичар, астроном, филозоф и алхемичар који се сматра једним од највећих научника у историји науке. У математици Њутн дели заслуге са Лајбницом за откриће инфинитензималног рачуна. Изложио је и уопштену биномску теорему, развијајући на тај начин тзв. „Њутнов метод” за апроксимације нула функције. Извршио је и апроксимацију парцијалних сума низова помоћу логаритама. У физици је поставио темеље класичне механике са своја три закона и законом гравитације.

$\blacksquare$

Пример 5.2 *Захваљујући биномном обрасцу сада добијамо да је*

$$(a+b)^4 = \binom{4}{0}a^4 + \binom{4}{1}a^3b + \binom{4}{2}a^2b^2 + \binom{4}{3}ab^3 + \binom{4}{4}b^4$$
$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4,$$
$$(a+b)^5 = \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5$$

$$= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5, \ldots$$

Уочавамо да је код развоја бинома главни проблем израчунавање вредности биномних коефицијената. За лако израчунавање биномних коефицијената може нам послужити тзв. ***Паскалов***[2] ***троугао***

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
...

Слика 5.1

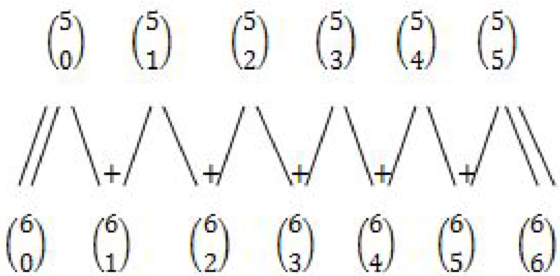
у коме је сваки број, сем крајњих у врсти (који су једнаки 1*), једнак збиру два суседна броја који су лево и десно од њега у претходној врсти. Бројеви у левој колони представљају степен бинома, а бројеви у врсти која одговара том степену, су биномни коефицијенти који*

[2]*Blaise Pascal* (1623 -1662) био је француски математичар, физичар и филозоф. У свом делу ,,Тезе о аритметичком троуглу” изнео је опис табеларног приказа за биномне коефицијенте који је данас познат као Паскалов троугао, бесконачни низ природних бројева поређаних у облику пирамидалне схеме. Сваки број у једном реду представља збир бројева који су изнад њега.
Сарађујући са Фермаом створио је темеље теорији вероватноће. У својим радовима проучавао је аксиоматски метод геометрије. Рад у физици Паскал је посветио изучавању флуида, посебно проучавању хидрауличних флуида, па је тако открио хидрауличну пресу. Веровао је у постојање вакуума, па је и експериментисао је и са вакуумом и ваздухом. Тиме је дошао у сукоб са другим научицима.

се појављују тим редом у развоју бинома. Ово правило се заснива на правилу о сабирању биномних коефицијената (5.5)*:*

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}.$$

На пример, за $n = 1, 2, 3, 4, 5$ смо проверили тачност бројева у одговарајућим врстама Паскаловог троугла (погледати Пример 5.2). Проверимо тачност за $n = 6$. У том циљу запишимо врсту за $n = 5$ помоћу биномних коефицијената, а затим применимо правило о формирању Паскаловог троугла. Имаћемо



Слика 5.2

што заиста даје биномне коефицијенте у развоју $(a+b)^6$, према датој Теореми 5.3. Из Паскаловог троугла је јасна особина симетричности биномних коефицијената. Такође запажамо да се највећи коефицијенти (један или два) налазе у средини врсте.

Пример 5.3 *Докажимо да важи:*

$$a)\quad \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

$$б)\quad \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \ldots + (-1)^{n-1}\binom{n}{n-1} + (-1)^n\binom{n}{n} = 0.$$

Доказ:

а) Ако у биномну формулу ставимо $a = b = 1$, добићемо да је

$$(1+1)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}1^{n-1}\cdot 1 + \binom{n}{2}1^{n-2}\cdot 1^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}1\cdot 1^{n-1} + \binom{n}{n}1^n,$$

тј.

$$2^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}.$$

б) Замењујући у биномној формули $a = 1, b = -1$, добићемо да је

$$\big(1 + (-1)\big)^n = \binom{n}{0}1^n - \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot (-1) + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}1 \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n,$$

тј.

$$0 = 1^n - \binom{n}{1}1^{n-1} \cdot (-1) + \binom{n}{2}1^{n-2} \cdot (-1)^2 + \ldots$$
$$+ \binom{n}{n-1}1 \cdot (-1)^{n-1} + \binom{n}{n}(-1)^n.$$

■

Имајући у виду да је $\binom{n}{k} = C_k^n$, а C_k^n број свих подскупова од k елемената који се могу формирати од скупа који садржи n елемената, (из претходног Примера 5.3 под *а)*) можемо закључити да свих подскупова (рачунајући и празан скуп) скупа од n елемената има 2^n, тј. партитивни скуп скупа од n елемената има 2^n елемената.

Пример 5.4 *Сума биномних коефицијената разлагања бинома* $\left(2nx + \dfrac{1}{2nx^2}\right)^{3n}$ *једнака је* 64*. Одредимо члан таквог развоја који не садржи* x*.*

Решење: Према Примеру 5.3 под *а)* сума биномних коефицијената је $2^{3n} = 64$ тј. $2^{3n} = 2^6$. Одавде је $n = 2$. Дакле, имамо

$$\left(4x + \frac{1}{4x^2}\right)^6 = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} (4x)^{6-k} \left(\frac{1}{4x^2}\right)^k = \sum_{k=0}^{6} \binom{6}{k} 4^{6-2k} x^{6-3k}.$$

Члан претходног развоја који не садржи x се добија за $6 - 3k = 0 \iff k = 2$ и једнак је

$$\binom{6}{2}4^2 = 15 \cdot 16 = 240.$$

□

Глава 6

Лајбницова формула и Фермаова теорема

Лајбницова формула

Ако су f и g функције које су n пута диференцијабилне функције, тада је

$$\big(f+g\big)' = f' + g', \qquad \big(f+g\big)'' = f'' + g'', \ldots$$

Индукцијом се доказује да је

$$\big(f+g\big)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)},\ (n = 1, 2, \ldots).$$

Одговарајуће формуле за производ су сложеније. Наиме, имамо

$$(fg)' = f'g + fg', \tag{6.1}$$

одакле, после диференцирања, добијамо

$$\big(fg\big)'' = \big(f'g + fg'\big)' = f''g + f'g' + f'g' + fg'',$$

тј.

$$\big(fg\big)'' = f''g + 2f'g' + fg''. \tag{6.2}$$

Затим

$$\big(fg\big)^{(3)} = \big(f''g + 2f'g' + fg''\big)' = f^{(3)}g + f''g' + 2f''g' + 2f'g'' + f'g'' + fg^{(3)},$$

тј.

$$\big(fg\big)^{(3)} = f^{(3)}g + 3f''g' + 3f'g'' + fg^{(3)} \tag{6.3}$$

итд.

На десној страни формуле (6.1) су коефицијенти $1, 1$; на десној страни формуле (6.2) су коефицијенти $1, 2, 1$; на десној страни формуле (6.3) су коефицијенти $1, 3, 3, 1$ итд. То су, као што знамо, биномни коефицијенти.

Формуле (6.1), (6.2), (6.3) указују на то да би општа формула за n-ти извод производа две функције f и g могла да гласи

$$\begin{aligned}\big(fg\big)^{(n)} = f^{(n)}g + \binom{n}{1}f^{n-1}g' + \ldots + \binom{n}{k}f^{(n-k)}g^{(k)} + \ldots \\ + \binom{n}{n-1}f'g^{(n-1)} + fg^{(n)}.\end{aligned} \tag{6.4}$$

Формула (6.4) заиста је тачна за свако $n \in \mathbb{N}$, а доказ изводимо математичком индукцијом. Он је потпуно аналоган доказу биномне формуле.

За $n = 1$ једнакост (6.4) је тачна, јер се своди на (6.1).

Претпоставимо да је (6.4) тачна за свако $n \in \mathbb{N}$. Тада из (6.4), после диференцирања, добијамо

$$\begin{aligned}\big(fg\big)^{(n+1)} = & \\ &= f^{(n+1)}g + f^{(n)}g' + \binom{n}{1}\big(f^{(n)}g' + f^{n-1)}g''\big) + \ldots \\ &+ \binom{n}{k}\big(f^{(n-k+1)}g^{(k)} + f^{(n-k)}g^{(k+1)}\big) + \ldots \\ &+ \binom{n}{n-1}\big(f^{(2)}g^{(n-1)} + f'g^{(n)}\big) + f'g^{(n)} + fg^{(n+1)} \\ &= f^{(n+1)}g + \left(1 + \binom{n}{1}\right)f^{(n)}g' + \ldots \\ &+ \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right)f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \ldots \\ &+ \left(\binom{n}{n-1} + 1\right)f'g^{(n)} + fg^{(n+1)}\end{aligned}$$

тј.

$$\begin{aligned}(fg)^{(n+1)} &= \\ &= f^{(n+1)}g + \binom{n+1}{1} f^{(n)}g' + \ldots + \binom{n+1}{k} f^{(n-k+1)}g^{(k)} + \ldots \\ &+ \binom{n+1}{n} f'g^{(n)} + fg^{(n+1)},\end{aligned}$$

а то је тачно формула (6.4) где је n замењено са $n+1$. Стога на основу принципа математичке индукције закључујемо да је (6.4) тачна за свако $n \in \mathbb{N}$.

Формула (6.4) се назива **Лајбницова**[1] **формула** за n-ти извод производа. Она се може написати у облику

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}g^{(k)}, \tag{6.5}$$

при чему се сматра да је $f^{(0)} = f$, тј. да је нулти извод функције једнак самој функцији, као што је и $g^{(0)} = g$.

Пример 6.1 *Ако је функција* $F(x) = x \log x$, *наћи њен шести извод.*

Решење: За шести извод функције F дефинисане са $F(x) = x \log x$ добијамо:

$$F^{(6)}(x) = (x \log x)^{(6)} = x(\log x)^{(6)} + \binom{6}{1}(\log x)^{(5)}.$$

Обзиром да је

$$(\log x)^{(n)} = (-1)^{n-1}\,\frac{(n-1)!}{x^n},$$

добијамо да је

$$(x \log x)^{(6)} = -\frac{5!}{x^5} + \frac{6 \cdot 4!}{x^5} = \frac{24}{x^5}.$$

□

[1] *Gottfried Wilhelm Leibniz* (1646-1716) био је немачки математичар, филозоф, физичар, проналазач, историчар, правник и дипломата. Рођен је у лужичкосрпској породици. Негде у исто време, а независно од Њутна, открио је инфинитензимални рачун, а открио је и бинарни систем који представља основу модерне рачунске технологије. Био је први председник Берлинске академије наука. Један је од представника филозофије рационализма. Дао је значајан допринос у оптици и механици. Писао је на латинском, француском и немачком језику. Сматра се једним од последњих људи западне цивилизације са енциклопедијским знањем.

Пример 6.2 *Ако је* $F(x) = x^2 f(x)$, *при чему функција* f *има* n-*ти извод, директном применом Лајбницове формуле* (6.4) *налазимо*

$$F^{(n)}(x) = x^2 f^{(n)}(x) + 2xnf^{(n-1)} + n(n-1)f^{(n-2)}(x).$$

Пример 6.3 *Ако је* $f(x) = \mathrm{arctg}x$, *израчунајмо* $f^{(n)}(0)$.

Решење: Из једнакости $f(x) = \mathrm{arctg}x$ излази

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Из тога добијамо да је $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$.

С друге стране из формуле за први извод функције добијамо да је

$$(1+x^2) \cdot f'(x) = 1$$

Примењујући Лајбницову формулу (6.4) добијамо да је

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + 2xnf^{(n)}(x) + 2\binom{n}{2}f^{(n-1)}(x) = 0.$$

Одавде излази да је

$$f^{(n+1)}(0) + n(n-1)f^{(n-1)}(0) = 0.$$

Стога је $f^{(3)}(0) = -2f'(0) = -2, \quad f^{(5)}(0) = -4 \cdot 3 \cdot f^{(3)}(0) = 4! \ldots$
Једноставно се утврђује да је

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k (2k)! \ (k = 1, 2, \ldots).$$

Такође имамо

$$f^{(4)}(0) = -3 \cdot 2 \cdot f''(0) = 0, \quad f^{(6)}(0) = -5 \cdot 4 \cdot f^{(4)}(0) = 0,$$

и уопште

$$f^{(2k)}(0) = 0, \ (k = 1, 2, \ldots).$$

□

Фермаова теорема

Теорема 6.1 ***Фермаова***[2] ***теорема.*** *Ако је* p *прост број који се не садржи у природном броју* n*, тада је*

$$n^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\ p). \tag{6.6}$$

Доказ: У доказу Фермаове теореме користи се биномна формула (5.3). Доказује се следеће општије тврђење:

Тврђење 6.2 *Ако је* p *прост број и* n *природан број, тада је*

$$n^p \equiv n (\mathrm{mod}\ p). \tag{6.7}$$

За $n = 1$ конгруенција (6.7) је тачна. Претпоставимо да је она тачна за неко фиксирано, али произвољно $n \in \mathbb{N}$. Имамо

$$(n+1)^p = n^p + \binom{p}{1} n^{p-1} + \ldots + \binom{p}{p-1} n + 1. \tag{6.8}$$

Биномни коефицијенти $\binom{p}{k}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$ су цели бројеви и ако је p прост број, они су сви дељиви са p, па из (6.8) излази

$$(n+1)^p \equiv n^p + 1 (\mathrm{mod}\ p).$$

Добијамо да је

$$(n+1)^p - (n+1) \equiv n^p - n (\mathrm{mod}\ p). \tag{6.9}$$

Према томе, ако је (6.7) тачна, из (6.9) излази

$$(n+1)^p \equiv n + 1 (\mathrm{mod}\ p),$$

па је на основу принципа математичке индукције, формула (6.7) тачна за свако $n \in \mathbb{N}$.

Ако још претпоставимо да се прост број p не садржи у природном броју n, тада конгруенцију (6.7) можемо да скратимо са n и добијамо (6.6). ■

[2] *Pierre de Fermat* (1601-1665) био је француски математичар и правник. Уз Декарта један је од најзначајнијих математичара Француске 17. века. Био је један од зачетника диференцијалног рачуна са својом методом проналажења највећих и најмањих ордината кривих линија. Такође је радио на пољу теорије бројева, аналитичке геометрије и вероватноће. Најпознатији је по свом Фермаовом принципу за ширење светлости као и по Великој Фермаовој теореми која није могла дуго да се докаже, тачије све до 1995. када ју је британски математичар Ендру Вајлс коначно доказао.

Глава 7

Предлози за побољшање наставе комбинаторике и анализа уџбеника

7.1 Да ли је са наставом кобинаторике у школи све у реду? Шта би требало поправити?

Ово питање је од велике важности, јер лично сматрам да настава математике мора бити више усмерена на развој комбинаторног мишљења. То је и за децу и за предавача изазов и дуготрајан процес.

У основној школи у којој радим, први примери ове области су у петом разреду при обради основних појмова геометрије. Долазак до обрасца колико дужи може образовати n неколинеарних тачака или колико партија шаха ће одиграти неколико играча ако игра свако са сваким, јесу примери задатака из комбинаторике који се обрађује у петом разреду. На овоме се у седмом разреду заснива пребројавање дијагонала код многоугла, као и извођење обрасца за збир унутрашњих углова где је битна подела на троуглове.

На додатној настави у петом разреду се обрађује Дирихлеов принцип. Обими и површине фигура у задацима где се фигура треба поделити на мање или где треба уочити да је нека дуж збир других дужи, јесте такође комбинаторика. У дељивости са 3 и 9, такође у петом разреду, требало би урадити задатак код кога имамо да када се цифре у неком броју пермутују, тај број не промени остатак при дељењу са 3 или 9, као и задатке где треба да се примене два критеријума код дељивости са 12, на пример. Међутим, прелазак са конкретног пребројавања многоугла на уопштење променљиве (фактички појам функције) је изазов за седмака.

У разговору са колегама из основних школа при Математичкој гимназији ово је и за већину најбољих ученика тешко. Један од начина да се ученицима приближи ова тема јесте да се још у нижим разредима раде задаци са бојењем коцки и тетраедара на нивоу експеримента, а онда да се у осмом разреду понови приликом обраде стереометрије, неком од метода пребројавања. То би затим могло бити поново обрађено у средњој школи пре проширивања знања из ове области. Битно је да ученици имају основе комбинаторике још у основној школи како би у средњој могли да надовезују и развијају своје комбинаторно размишљање.

Последњих година је дошло до измена у наставном плану и програму, па се ученици са комбинаториком срећу већ у првој години средње школе. До сада је за ову област била резервисана четврта година и то сам крај када су ученици усресређени на пријемне и матурске испите. Такође из разговора са колегама који предају машинским и електротехничким смеровима сазнала сам да је број часова математике четвртом степену смањен на 3 часа недељно, док је у четвртом разреду потпуно избачена вероватноћа и математичка статистика. Учи се једино у оквиру изборног предмета Изабрана поглавља математике по 2 часа недељно.

Колеге које предају у средњим стручним школама, смеровима као што су техничари за хемијску и фармацеутску технологију или техничари за заштиту животне средине, немају одговарајућу литературу која прати њихове планове, па се предавачи сами сналазе и прилагођавају градиво. Како је крај четврте године период за обраду ове теме, ученици су већ претпоставили које ће оцене добити, па градиво пређу површно и не остаје упамћено. Требало би променити план и програм наставе математике да се ова тема обрађује почетком друге године како би ученици имали довољно времена да савладају оно што су започели у првој години. Извршити само обнављање у четвртој години пре увођења вероватноће и статистике.

7.2 Да ли уџбеници добро обрађују ове теме?

Од велике је важности ученицима на што бољи начин приближити комбинаторику. То се најбоље врши обрадом што већег броја примера, а тек касније извођењем одређене формуле. У већини уџбеника је прво дата теорема или формула и оскудан број примера. Потребно је написати уџбеник са различитим нивоима задатака који би могли да испрате рад како у средњим стручним школама, тако и у гимназијама.

Комбинаторика није баук, баук је страх од незнања. За почетак треба ученицима навести да они већ користе комбнаторику у свакодневном животу, а да тога нису ни свесни.

7.3 Кратка анализа уџбеничке литературе

Математика са збирком задатака за 4. разред гимназије; аутор Јован Д. Кечкић

У овом уџбенику је комбинаторика обимно и детаљно обрађена као посебна целина. Полази се од чињенице да је предмет комбинаторике распоређивање елемената у коначним скуповима и одређивање колико има таквих распореда. Број елемената скупа може бити велики, па се самим тим јавља потреба за овладавањем општим методама таквог пребројавања.

Детаљно су обрађене пермутације (са и без понављања, лексикографски уређене као пресликавање скупа у себе самог) са доста урађених примера и понуђених задатака за самосталан рад. Мислим да би ту само требало додати коначна решења понуђених задатака како би ученици могли да провере да ли су савладали обрађено градиво. Исто тако су обрађене варијације (са и без понављања) са солидним избором примера и задатака.

Уџбеник такође обрађује Биномну и Лајбницову формулу са одличним избором одабраних задатака.

Како је уџбеник намењен ученицима природно-математичког смера, обрада ове теме је комплетна. Нарочито уколико су се ученици са овом материјом сусрели у првом разреду. Ипак, могле би се упутити неке сугестије, као на пример, да би елементарни примери могли бити више обрађени, као и да би задаци могли бити обележени по тежини (основни, средњи и напредни ниво), јер се ради о збирци задатака.

Елементарни примери:

Шифра која се састоји од три цифре од 0 до 9 која отвара браву на торби;

Шифра бројева која отвара сеф;

Универзални код производа;

ЈМБГ;

Регистарске таблице на аутомобилима;

Шах.

Математика са збирком задатака за 4. разред средњег образовања и васпитања;
аутори Милутин Обрадовић и Душан Глигоријевић

У овом уџбенику је комбинаторика обрађена детаљно и обимно као посебна целина. Такође се детаљно обрађују варијације, пермутације (са и без понављања) као и комбинације, биномни коефицијенти и биномни образац. Градиво је представљено на сличан начин као у претходно поменутом уџбенику за природно-математички смер гимназије, па би и сугестије биле исте.

Математика са збирком задатака за први разред гимназије;
аутор Небојша Икодиновић

Ово је уџбеник најновије генерације написан по новом наставном плану и програму математике за први разред гимназије онако како је прилагођен и програмима математике у средњим стручним школама. Иако постоје разлике у свим наставним јединицама, па тако и у настави комбинаторике, много је више поклапања. Сви програми обухватају исте наставне целине различитог обима које се надовезују и проширују теме обрађене у основој школи.

Узимајући у обзир поменуте разлике у садржајима поменутих програма, наставне теме комбинаторике су подељене у три нивоа. Ова област изучава се у оквиру поглавља Логика и скупови. Комбинаторика је представљена као одређивање броја елемената коначних скупова без набрајања свих елемената, односно непосредног пребројавања. Дати су основни принципи комбинаторике као Принцип збира, Принцип укључења-искључења (за два, односно три скупа) као и Принцип производа. Дат је велики број елементарних примера као и одличан избор задатака за самосталан рад. Сви задаци су решени тако да ученици могу проверити свој ниво савладаног градива. Уџбеник одлично уводи ученике у основне појмове комбинаторике.

Сматрам да је макар у првом разреду (уколико није могуће у четвртом) када то програм наставе комбинаторике допушта, потребно понудити свим ученицима заједничку књигу за све средњошколце. То је корисно због усвајања истих појмова и тенденције да се ученицима пруже подједнаке шансе за наставак образовања из основне школе. На тај начин се може доћи до подизања нивоа знања из области комбинаторике, али би се ово могло применити на наставу математике у средњој школи уопште.

7.4 Предлози

У првом разреду треба садржаје комбинаторике уводити преко већег броја елементарних задатака (из свакодневног живота), пре свега Принципом збира и производа. Садржаје из комбинаторике планирати након наставе из логике и теорије скупова (након упознавања са основним логичким и скуповним операцијама). Како се ради о пребројавању елемената неког скупа или делова скупа и како је некад битан, а некад не редослед набрајања, могао би се прихватити критеријум:

- Цео скуп, битан редослед – пермутације;
- Део скупа, битан редослед – варијације;
- Део скупа, небитан редослед – комбинације.

У четвртом разреду може се применити нешто строжији приступ као што је у већини уџбеника за овај разред и уз принципе написане на почетку овог рада. Задатке давати по нивоима. Тиме се поштује педагошки принцип од лакшег ка тежем, а такође се ученику пружа информација о томе колико је савладао наставни садржај.

Потребно је „провлачити” комбинаторне садржаје кад год се укаже прилика и кроз остале наставне области, пре свега у теорији бројева, математичкој логици, геометрији, стереометрији, итд. Такође је битно обезбедити повезивање садржаја математичке логике и теорије скупова (супротан исказ, комплемент скупа, операције, ...) посебно у вишим разредима.

Потребна је посебна припрема наставника и реализација ових садржаја што подразумева избор начина презентације, избор примера који су пре свега поучни, занимљиви, животни и који доприносе правилном формирању комбинаторних појмова, мотивацији и буђењу ученичке заинтересованости. Илустрација појма примером је кључна у реализацији комбинаторних садржаја. Од великог је значаја и уједначити ознаке за основне појмове комбинаторике по уџбеницима и збиркама задатака.

Друштво математичара Србије би могло организовати вишедневни семинар са темом „Комбинаторика у средњој школи”, уз учешће наставника средњих и високих школа и факултета, а којим би понудио нека конкретна решења и допринео размени искустава и наставних поступака.

Глава 8

Закључак

Рене Декарт[1] је рекао:,, Ми никада не постанемо математичари, чак и ако научимо туђе доказе, ако наш ум није оспособљен да самостално решава постављене проблеме.”

У овом раду су детаљно објашњени и доказани проблеми комбинаторике у настави математике у средњој школи. На самом почетку дати су основни принципи комбинаторике као што су Принцип збира 2.1, Принцип производа 2.3, Принцип укључивања-искључивања за два или више скупова 2.2. Затим су приказане варијације, пермутације и комбинације, њихове сличности и разлике као и везе са Биномним обрасцем (5.3) и Фермаова теорема 6.1. У свакој теми су дати разноврсни задаци који осликавају примену ових комбинаторних елемената.

Описно речено предмет комбинаторике јесте распоређивање елемената у коначним скуповима. У комбинаторици се ређе проучавају и бесконачни скупови, али се том проблематиком не бавимо у настави математике у средњој школи. Основни проблем који је разматран јесте да ако је прописан неки распоред онда треба одредити број свих таквих распореда. Рад садржи методичку обраду основних тема везаних за комбинаторику у настави математике у средњим школама, уопштења и разноврсне примере у нестандардним задацима.

[1] *Renatus des Cartes* (1596-1650) био је француски математичар, филозоф и научник чије је дело ,,Геометрија” поставило основе данашњој аналитичкој геометрији. Зачетник је филозофског рационализма, а његова крилатица ,,*Cogito ergo sum* - Мислим, дакле постојим” је у основи његовог филозофског учења.

Референце

[1] Н. Икодиновић: Математика, уџбеник са збирком задатака за први разред гимназије, Клет, Београд, 2022.

[2] Ј. Д. Кечкић: Математика са збирком задатака за четврти разред гимназије, Наука, Београд, 1995.

[3] М. Обрадовић, Д. Георгијевић: Математика са збирком задатака за четврти разред средњег образовања и васпитања, Завод за издавање уџбеника, Нови Сад, 1990.

Кратка биографија

Јована Ненадовић, дипломирани математичар

Датум и место рођења: 07.04.1994. Ваљево

Место становања: Уб

Образовање: Основну школу ,,Милан Муњас" у Убу завршила сам 2009. године као носилац дипломе ,,Вук Караџић". Затим сам уписала Гимназију ,,Бранислав Петронијевић", општи смер, где сам матурирала 2013. године.

Школске 2013/2014. године уписала сам Математички факултет Универзитета у Београду, смер професор математике и информатике. Дипломирала сам на Математичком факултету Универзитета у Београду 10. јула 2019. године, смер професор математике и информатике. Исте школске 2019/2020. године уписујем мастер студије.

Радно искуство у струци: Наставник математике и разредни старешина у Основној школи ,,Милан Муњас" од 2017. године.

Страни језик: Енглески

Брачно стање: Удата, мајка двоје деце.