

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Јелена Нијемчевић

ИЗОМЕТРИЈЕ ПОЕНКАРЕОВЕ ГОРЊЕ
ПОЛУРАВНИ У КОМПЛЕКСНИМ
КООРДИНАТАМА

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

проф. др Мирослава АНТИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Тијана ШУКИЛОВИЋ, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Иван ДИМИТРИЈЕВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 25.05.2023.

Садржај

Увод	1
Поенкареова горња полураван	2
Аксиоме хиперболичке геометрије	2
Опис Поенкареове горње полуравни	12
Изометрије горње полуравни	16
h -рефлексије	16
Метрика горње Поенкареове полуравни	28
Епицикли горње полуравни	30
Закључак	35
Литература	36

Увод

Хиперболичка геометрија је настала у 19. веку када су Јанош Бољај и Николај Лобачевски независно један од другог истраживали могућност заснивања геометрије без Петог Еуклидовог постулата. Различите претпоставке о томе колико постоји правих које садрже дату тачку и немају заједничких тачака са датом правом, у њима одређеној равни, резултирале су настанку хиперболичке геометрије. За разлику од еуклидског простора, хиперболички простор је теже замислити и за његово разумевање су потребни модели. Најпознатији модели хиперболичке равни су Клајнов модел, Поенкареов диск модел и Поенкареов полуравански модел.

Циљ овог рада је да се представи Поенкареов полуравански модел, да се изведу формуле изометрија Поенкареове полуравни у комплексним координатама и да се те изометрије класификују према одговарајућим коефицијентима, као и да се одреде еквидистанте, орицикли и кругови модела, као инваријанте translација, орицикличких ротација и ротација.

У првом поглављу су дате аксиоме хиперболичке геометрије, уведени су основни елементи Поенкареове горње полуравни и описани су праменови правих Поенкареове полуравни.

У другом поглављу су описане изометрије Поенкареове горње полуравни, као и да Поенкарева полураван задовољава све аксиоме хиперболичке геометрије, па је модел хиперболичке геометрије. Затим, показано је чиме су у Поенкареовом полураванском моделу представљени круг, орицикл и еквидистанта. Слике у раду су израђене помоћу GeoGebra програма.

Поенкареова горња полураван

Аксиоме хиперболичке геометрије

У овом поглављу представићемо укратко аксиоматско заснивање еуклидске и хиперболичке геометрије. Основни појмови ових геометрија су: непразни скуп којег називамо простором чији су елементи тачке, праве и равни који су скупови тачака и две релације дужина три и четири са ознакама $\mathcal{B}$ и $\mathcal{C}$. Аксиоме еуклидске и хиперболичке геометрије можемо поделити у пет група. У складу са идејама Јаноша Бољаја, геометрију засновану на прве четири групе аксиома називамо апсолутна геометрија. У зависности од тога коју ћемо аксиому изабрати да буде једина аксиома пете групе, Плејферову или аксиому Лобачевског, засниваћемо еуклидску или хиперболичку геометрију. Аксиоме хиперболичке геометрије су: аксиоме припадања, аксиоме распореда, аксиоме подударности, аксиоме непрекидности и аксиома Лобачевског.

I Аксиоме припадања

- I1. Свака права садржи најмање две разне тачке.
- I2. Постоји најмање једна права која садржи две тачке.
- I3. Постоји највише једна права која садржи две разне тачке.
- I4. Свака раван садржи најмање три неколинеарне тачке.
- I5. Постоји најмање једна раван која садржи три тачке.
- I6. Постоји највише једна раван која садржи три неколинеарне тачке.
- I7. Ако две разне тачке неке праве припадају једној равни, онда свака тачка те праве припада истој равни.
- I8. Ако две разне равни имају једну заједничку тачку, онда оне имају најмање још једну заједничку тачку.

И9. Постоје четири некомпланарне тачке.

На основу аксиома припадања може се показати да постоји тачно једна права која садржи две разне тачке и тачно једна раван која садржи три неколинеарне тачке. Такође, постоји тачно једна раван која садржи праву и тачку ван ње, као и тачно једна раван која садржи две праве које се секу. Може се показати и да уколико две разне равни имају бар једну заједничку тачку, онда је њихов пресек права.

II Аксиоме распореда

Аксиоме распореда описују релацију $\mathcal{B}$ дужине три. Исказ $\mathcal{B}(A, B, C)$ ћемо читати „тачка B се налази између тачака A и C ”.

II1. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, тада су A , B и C три разне колинеарне тачке.

II2. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, тада је $\mathcal{B}(C, B, A)$.

II3. Ако је $\mathcal{B}(A, B, C)$, тада није $\mathcal{B}(A, C, B)$.

II4. Ако су A и B две разне тачке, тада постоји тачка C таква да је $\mathcal{B}(A, B, C)$.

II5. Ако су A , B и C три разне колинеарне тачке, тада је $\mathcal{B}(A, B, C)$ или $\mathcal{B}(B, C, A)$ или $\mathcal{B}(C, A, B)$.

II6 (Пашова аксиома). Ако су A , B и C три неколинеарне тачке и p права која припада равни ABC , не садржи тачку A и сече праву BC у тачки P таквој да је $\mathcal{B}(B, P, C)$, тада права p сече праву CA у тачки Q таквој да је $\mathcal{B}(C, Q, A)$ или праву AB у тачки R таквој да је $\mathcal{B}(A, R, B)$.

Скуп свих тачака између две разне тачке A и B називамо (отвореном) дужи AB . Уколико овом скупу придружимо и тачке A и B онда је дуж затворена.

Ако су $A_1, \dots, A_n$ тачке, онда је унија затворених дужи $A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ полигон. Ако при том важи да је $A_1 = A_n, n \geq 3$ и никоје три узастопне тачке у низу нису колинеарне, онда је $A_1 \dots A_{n-1}$ $(n - 1)$ -тоугао.

Нека су O , C , D тачке праве l и $C, D \neq O$. Ако не важи распоред $\mathcal{B}(C, O, D)$ онда су тачке C и D са исте стране тачке O . Може се показати да је релација са исте стране тачке O релација еквиваленције на скупу $l \setminus \{O\}$ са тачно две класе еквиваленције које називамо полуправама.

Слично, нека су C, D и l две тачке и права једне равни π , такви да C, D не припадају l . Уколико права l не сече дуж CD онда су C и D са исте стране праве l . Релација са исте стране праве l је релација еквиваленције на скупу $\pi \setminus l$ са тачно две класе које називамо полуравнима, а права l је њихов руб.

Специјално, ако су A_i разне тачке једне праве, $i \geq 3$, онда можемо писати и да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ ако је $\mathcal{B}(A_i, A_j, A_k)$ увек кад је $i < j < k$.

Унија две полуправе са заједничким теменом разлаже раван на две области које називамо угловима, а одговарајуће полуправе су њихови краци.

Два угла једне равни су суседна ако имају заједнички крак и сем тога немају других заједничких тачака. Ако су незаједнички краци два суседна угла две разне полуправе једне праве онда су ти углови напоредни.

III Аксиоме подударности

Аксиоме подударности описују релацију $\mathcal{C}$ дужине четири. Релацију $\mathcal{C}(A, B, C, D)$ још записујемо $(A, B) \cong (C, D)$ и кажемо да је пар тачака (A, B) подударан пару тачака (C, D) .

- III1. Ако су A, B, C, D тачке такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и $A = B$, тада је $C = D$.
- III2. Ако су A и B било које две тачке, тада је $(A, B) \cong (B, A)$.
- III3. Ако су A, B, C, D, E, F тачке такве да је $(A, B) \cong (C, D)$ и, уз то, $(A, B) \cong (E, F)$, тада је $(C, D) \cong (E, F)$.
- III4. Ако су C и C' тачке двеју отворених дужи AB и $A'B'$, такве да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$, тада је и $(A, B) \cong (A', B')$.
- III5. Ако су A и B две разне тачке и C теме неке полуправе, тада на тој полуправој постоји тачка D таква да је $(A, B) \cong (C, D)$.
- III6. Ако су A, B и C три неколинеарне тачке, и A', B' , тачке руба неке полуравни, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$, тада у тој полуравни постоји јединствена тачка C' таква да је $(A, C) \cong (A', C')$ и $(B, C) \cong (B', C')$.
- III7. Ако су A, B, C и A', B', C' две тројке неколинеарних тачака и D и D' тачке полуправих BC и $B'C'$, такве да је $(A, B) \cong (A', B')$,

$(B, C) \cong (B', C')$, $(C, A) \cong (C', A')$ и $(B, D) \cong (B', D')$, тада је и $(A, D) \cong (A', D')$.

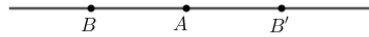
Бијекција $\mathcal{I}$ праве, равни или простора у себе за коју важи да је $(\mathcal{I}(A), \mathcal{I}(B)) \cong (A, B)$, где су A, B произвољне тачке домена назива се изометрија.

Све изометрије са истим доменом чине групу у односу на композицију пресликавања. Две фигуре (два непразна скупа тачака) су међусобно подударна уколико постоји изометрија која слика једну фигуру у другу. Може се показати да су две дужи AB и CD подударне ако и само ако су парови тачака (A, B) и (C, D) подударни.

Угао је прав, општар или туп у зависности од тога да ли је подударан, мањи или већи од свог напоредног угла. Две праве су нормалне ако садрже краке правога угла.

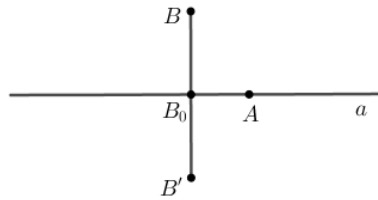
Може се показати и да постоји јединствена изометрија праве, равни односно простора такве да је скуп њихових инваријантних тачака редом, једна тачка A , тачке једне праве a , односно тачке једне равни α . Њих називамо централном рефлексijом праве $\mathcal{S}_A$, осном рефлексijом равни $\mathcal{S}_a$ и раванском рефлексijом простора $\mathcal{S}_\alpha$. Тада су A, a и α основице тих рефлексija.

За централну рефлексiju праве $\mathcal{S}_A$ и тачке B и $B' = \mathcal{S}_A(B)$ важи да је B и B' симетричне тачке у односу на тачку A и тачка A је средиште дужи BB' .



Сл. 1 Централна рефлексija $\mathcal{S}_A$

За осну рефлексiju $\mathcal{S}_a$, и тачке B и $B' = \mathcal{S}_a(B)$ важи да средиште дужи BB' , тачка B_0 , припада a , а при том је BB' нормално на a .



Сл. 2 Осна рефлексija $\mathcal{S}_a$

Изометрије једне праве, равни или простора могу се приказати редом као коначне композиције централних рефлексција те праве, осних рефлексција те равни односно раванских рефлексција простора. При том, основице тих рефлексција могу се одабрати тако да се изометрија дате праве може записати као композиција до две централне рефлексije, изометрија дате равни до три осне рефлексije и изометрија простора до четири раванске рефлексije.

Ако је изометрија композиција непарног броја рефлексija онда је она индиректна, а иначе је директна.

Максимални подскуп $\mathcal{X}$ свих правих једне равни таквих да за произвољне $a, b, c \in \mathcal{X}$ важи да је $\mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$ осна рефлексija назива се праменом правих. Ако је X тачка која не припада свим правама датог прамена онда је скуп свих тачака осносиметричних X у односу на праве тог прамена епицикл.

Може се показати да за две разне праве постоји тачно један прамен који их садржи, као и да за произвољне три тачке постоји тачно један епицикл који их садржи.

IV Аксиоме непрекидности

- IV1. Ако су AB и CD две произвољне дужи, тада на полуправој AB постоји коначан низ тачака $A_1, A_2, \dots, A_n$ таквих да је $\mathcal{B}(A_1, A_2, \dots, A_n)$, при чему је свака од дужи $AA_1, A_1A_2, \dots, A_{n-1}A_n$ подударна дужи CD и $\mathcal{B}(A, B, A_n)$.
- IV2. Ако $A_1B_1, A_2B_2, \dots, A_nB_n, \dots$ низ затворених дужи неке праве, таквих да свака од тих дужи садржи следећу, тада постоји тачка X која припада свакој дужи тог низа.

Захваљујући аксиомама непрекидности могу се увести функције мера дужи и мера угла. То су функције које дужима (угловима) додељују позитивне реалне бројеве а неопходно је да подударне дужи (углови) имају подударне мере и да је мера збира дужи (углова) једнака збиру њихових мера.

Специјално, постоји тачно једна мера углова која правом углу додељује вредност $\frac{\pi}{2}$.

V Аксиома Лобачевског

Наведимо прво Плејферову аксиому.

VP. Постоје тачка B и права a која је не садржи такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B , а са правом a нема заједничких тачака.

Као сто смо навели, геометрија која се заснива на прве четири групе аксиома и Плејферовој аксиоми је еуклидска геометрија.

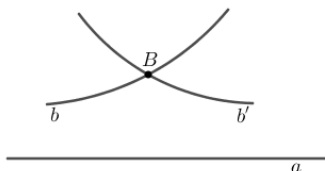
Наведимо сада аксиому Лобачевског.

VL. Постоје тачка B и права a која је не садржи такве да у њима одређеној равни постоје више од једне праве која садржи B , а са a нема заједничких тачака.

На основу прве четири групе аксиома и аксиоме VL гради се хиперболичка геометрија.

Ако би у хиперболичком простору постојале тачка B и права a која је не садржи, такве да у њима одређеној равни не постоји више од једне праве која садржи тачку B и са правом a нема заједничких тачака, односно ако би важила Плејферова аксиома, тада би свака тачка и права која је не садржи задовољавале исту аксиому, што је противречно аксиоми Лобачевског. Дакле, важи следеће тврђење:

Теорема 1. За сваку тачку B хиперболичког простора и праву a која је не садржи, у њима одређеној равни постоје бар две праве које садрже тачку B , а са правом a немају заједничких тачака.



Сл. 3 Аксиома Лобачевског

На основу претходне теореме следи да у хиперболичкој геометрији постоје бар две праве које садрже тачку B и са правом a немају заједничких тачака.

Међу свим тим правама постоје тачно две b и b' које задовољавају следећи услов. Произвољна права те равни која садржи тачку B сече праву a ако и само ако припада пару унакрсних углова које одређују b и b' којима припада и права a , видети Сliku 3.

Кажемо да су праве b и b' паралелне правој a . Ако је N подножје нормале из B на a , онда су углови између полуправе BN и правих b и b' подударни и оштри и називају се угловима паралелности.

Ако су $K \in b$ и $L \in b'$ тачке крака угла одређеног са b и b' коме припада и права a онда кажемо и да су полуправе BK и BL паралелне правој a .

Француски математичар Лежандр је у својим Елементима геометрије апсолутног простора доказао неколико важних теорема везаних за збир унутрашњих углова троугла:

1. Збир унутрашњих углова било којег троугла није већи од π .
2. Ако постоји троугао коме је збир унутрашњих углова π , онда је збир унутрашњих углова сваког троугла такође π .
3. Постоји троугао коме је збир унутрашњих углова π , ако и само ако свака права управна на једном краку било којег оштрог угла сече други крак тог угла.
4. Постоји троугао којем је збир унутрашњих углова π ако и само ако за сваку тачку B и праву a која је не садржи, у њима одређеној равни постоји јединствена права b , која садржи B и са a нема заједничких тачака.

Из ових теорема видимо да збир унутрашњих углова троугла не мора бити једнак π , али и да не може бити већи од π . Може се установити да је аксиома Лобачевског еквивалентна тврђењу да је збир унутрашњих углова било којег троугла мањи од π . Такође, права која је управна на једном краку било којег оштрог угла не мора сећи његов други крак.

Теорема 2. Следећа тврђења су еквивалентна аксиоми Лобачевског:

1. Угао паралелности је оштар.
2. Збир унутрашњих углова сваког троугла је мањи од π .

3. Збир унутрашњих углова сваког простог, равног четвороугла је мањи од 2π .
4. Постоји права у равни оштрог угла која је управна на једном краку тог угла, а не сече његов други крак.

Уколико две дисјунктне праве једне равни нису паралелне онда кажемо да су хиперпаралелне. Може се показати да две разне праве једне хиперболичке равни имају заједничку нормалу, ако и само ако су оне хиперпаралелне.

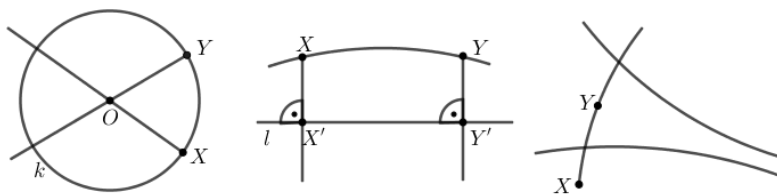
Дакле, две разне праве једне хиперболичке равни могу да се секу, да буду паралелне или хиперпаралелне.

Такође, може се показати и да постоје и три различите врсте праменова, конкурентни односно елиптички прамен (скуп свих правих које садрже дату тачку A), прамен паралелних правих односно параболички прамен (скуп свих правих паралелних датој полуправој p' укључујући и праву која садржи p') и хиперболички прамен правих, односно прамен хиперпаралелних правих (скуп свих правих нормалних на дату праву n).

Ако је $\mathcal{X}$ прамен, а A тачка хиперболичке равни, тада се скуп слика тачке A у рефлексјама у односу на све праве прамена $\mathcal{X}$ назива епициклом.

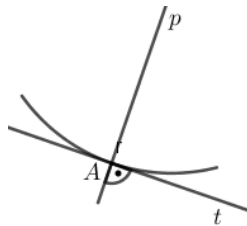
Епицикли који одговарају наведеним типовима праменова називају се, редом, круг $k(O, OX)$ (скуп свих тачака Y таквих да је $OX \cong OY$), еквилистанта са основом l (скуп свих тачака Y са исте стране праве l са које је и X таквих да је $XX' \cong YY'$, где су X' и Y' подножја нормала из X у Y на l) и орицикл.

Може се показати да постоји изометрија која слика произвољни параболички прамен у други при том сликајући дату тачку A у дату тачку B . Зато су и свака два орицикла (који редом садрже тачке A и B) међусобно подударна.



Сл. 4 Круг, еквилистанта и орицикл

Ако је A тачка епицикла и p права кроз A која припада датом прамену $\mathcal{X}$, онда је тангента на одговарајући епицикл генерисан тачком A права t , таква да је $A \in t$ и $t \perp p$.



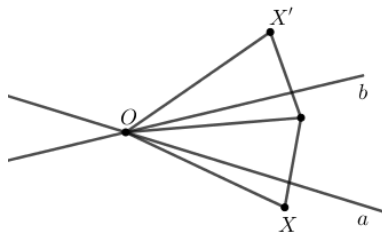
Сл. 5 Тангента на епицикл

Наведимо и класификацију изометрија хиперболичке равни.

Директне изометрије се могу представити као композиције две осне рефлексije $\mathcal{J} = \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$.

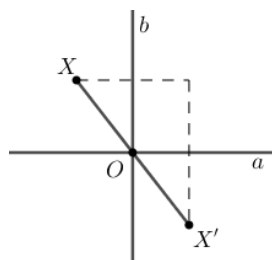
Ако је $a = b$ онда је $\mathcal{J}$ коинциденција $\mathcal{E}$, пресликавање чија је свака тачка фиксна.

Ако се праве a и b секу у тачки O онда је $\mathcal{J}$ централна ротација $\mathcal{R}_{O,\alpha}$, где је α двоструки угао између правих a и b .

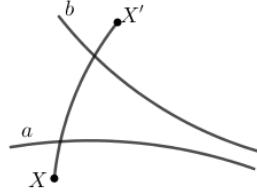

 Сл. 6 Централна ротација $\mathcal{R}_{O,\alpha}$

O је јединствена фиксна тачка ротације, а за сваку другу тачку X и њену слику $X' = \mathcal{R}_{O,\alpha}(X)$ важи $OX \cong OX'$ и $\angle XOX' = \alpha$.

Специјално, ако су a и b нормалне праве тада је $\alpha = \pi$, па је тачка O средиште XX' . Ову трансформацију тада још називамо централном симетријом $\mathcal{S}_O$.

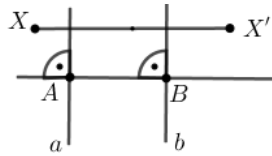

 Сл. 7 Централна симетрија $\mathcal{S}_O$

Ако су праве a и b паралелне онда је трансформација $\mathcal{J}$ орицикличка ротација $\mathcal{OR}$. Она нема фиксних тачака.



Сл. 8 Орицикличка ротација $\mathcal{OR}$

Ако су праве a и b хиперпаралелне и ако је AB , $A \in a$, $B \in b$, њихова заједничка нормала тада је трансформација $\mathcal{J}$ транслација $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$. Транслација нема фиксних тачака.

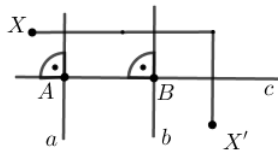


Сл. 9 Транслација $\mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$

Ако је изометрија $\mathcal{J}$ хиперболичке равни индиректна, онда је она или осна рефлексација $\mathcal{S}_a$ или композиција неке три осне рефлексације.

Ако те три осе припадају једном прамену онда је, по дефиницији, $\mathcal{J}$ такође осна рефлексација.

Ако то није случај, онда се осе могу одабрати тако да је $\mathcal{J} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{S}_b \circ \mathcal{S}_a$, где је c заједничка нормала за a и b . Ова трансформација се назива клизајућом рефлексацијом $\mathcal{G}_{c,2\overrightarrow{AB}} = \mathcal{S}_c \circ \mathcal{T}_{2\overrightarrow{AB}}$, где c сече a и b у тачкама A и B . Клизајућа рефлексација нема фиксних тачака.



Сл. 10 Клизајућа рефлексација $\mathcal{G}_{c,2\overrightarrow{AB}}$

Наведимо још једну теорему.

Теорема 3. Ако је $\mathcal{J}$ изометрија, $\mathcal{S}_p$ осна рефлексја и $\mathcal{J}(p) = q$, онда је $\mathcal{J} \circ \mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{S}_q$.

Директна последица је:

Теорема 4. Нека је $\mathcal{J}$ изометрија равни. Тада је

- а) $\mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{O,\alpha} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{R}_{\mathcal{J}(O),\alpha'}$, где је $\alpha' = \alpha$ ако је $\mathcal{J}$ директна, а иначе је $\alpha' = -\alpha$;
- б) $\mathcal{J} \circ \mathcal{T}_{\overrightarrow{2AB}} \circ \mathcal{J}^{-1} = \mathcal{T}_{\overrightarrow{2A'B'}}$, где је $\mathcal{J}(A) = A'$, $\mathcal{J}(B) = B'$;
- в) Ако је $\mathcal{OR}$ орицикличка ротација, тада је и $\mathcal{J} \circ \mathcal{OR} \circ \mathcal{J}^{-1}$ орицикличка ротација.

Опис Поенкареове горње полуравни

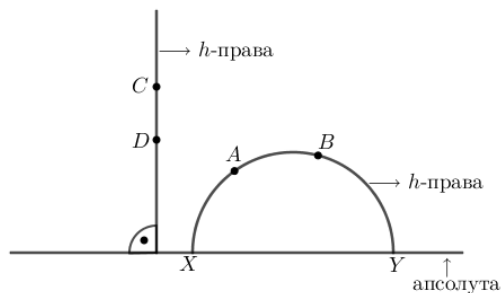
Нека је у еуклидској равни $\mathbb{E}^2$ дата права x , чија је једначина у комплексним координатама $\text{Im}z = 0$. Тачке отворене еуклидске полуравни $\text{Im}z > 0$, зваћемо **h -тачкама**, а скуп свих h -тачака **h -раван**. Руб ове полуравни, односно праву x , назовимо **апсолута**.

h -праве су отворени полукругови горње полуравни чији центри припадају апсолути и отворене полуправе горње полуравни ортогоналне на апсолуту чија темена припадају апсолути. Једначина овакве полуправе у комплексним координатама је $\text{Re}z = \text{const}$, а једначина полукруга у комплексним координатама је $|z - a| = r$, $a \in R$, $\text{Im}z > 0$. Такве кругове и праве називамо уопштени кругови.

Тачке које припадају апсолути сматраћемо **бесконачно далеки**. Можемо и еуклидској равни $\mathbb{E}^2$ придружити још једну (бесконачну) тачку X_∞ и сматрати да је свака (еуклидска) права садржи. Тачку X_∞ можемо такође сматрати и бесконачно далеком тачком модела (јер она припада и правој x).

Ако тачке A и B припадају h -правој која је еуклидски део круга, лук који одређују, а који припада горњој полуравни је **h -дуж**, као и дуж CD h -праве која је ортогонална на апсолуту (Сл. 11).

Релација h -између. h -тачка B је **h -између** h -тачака A и C ако h -тачка B припада h -дужи AC .

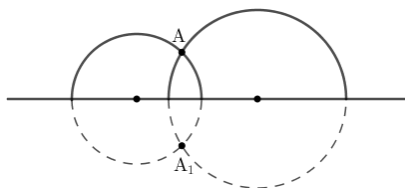


Сл. 11 Поенкареова горња полураван

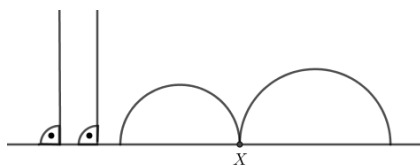
Међусобни положаји две h -праве

Два разна уопштена круга који одређују h -праве могу да имају највише две заједничке тачке, не нужно h -тачке.

h -конкурентне праве. Ако се два уопштена круга који одређују h -праве секу у две тачке од којих је онда једна уједно и h -тачка а друга јој је симетрична у односу на праву x , (Сл.12), онда кажемо да су h -праве h -конкурентне.


 Сл. 12 h -конкурентне h -праве

h -паралелне праве. Ако се два уопштена круга који одређују h -праве додирују у једној тачки (Сл. 13), та тачка припада апсолути и није h -тачка, већ тачка коју сматрамо бесконачно далеком. Тада кажемо да су h -праве h -паралелне. Такође и h -праве које су управне на апсолуту су међусобно паралелне. Заправо, оне су одређене уопштеним круговима који имају заједничку тачку X_∞ .

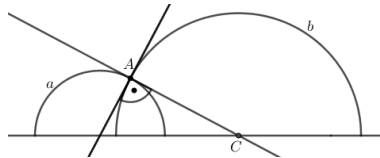

 Сл. 13 h -паралелне h -праве

h -хиперпаралелне праве. Ако уопштени кругови који одређују h -праве немају заједничких тачака (Сл. 14), тада се ни h -праве не секу и кажемо да су h -хиперпаралелне.


 Сл. 14 h -хиперпаралелне h -праве

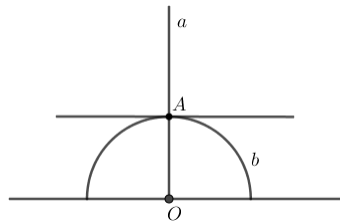
Угао. Мера угла између две h -праве је његова еуклидска мера, односно, угао између две h -праве је угао између тангенти на уопштене кругове који одређују те h -праве у пресечној тачки.

h -нормала. Нека је h -права a полукруг чији центар припада апсолути. Нека је A тачка на h -прави a . Из тачке A конструишимо произвољну тангенту на h -праву a и пресечну тачку те тангенте и апсолуте обележимо са C . Тада је h -права b са центром у тачки C и полупречником CA нормална на h -праву a (Сл. 15).



Сл. 15

Нека је h -права a полуправа ортогонална на апсолуту. Нека је пресечна тачка апсолуте и полуправе тачка O и нека је A тачка на h -прави a . h -права b са центром у тачки O и полупречником OA биће нормална на h -праву a (Сл. 16).



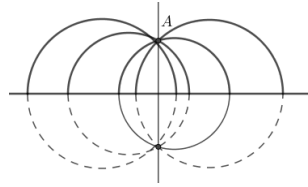
Сл. 16

Теорема 5. Постоји јединствена h -права n која садржи дату тачку A и нормална је на дату h -праву a .

Праву n називамо h -нормалом.

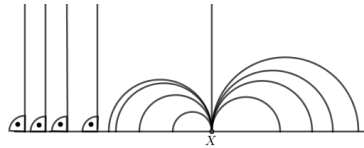
Прамен правих

Прамен h -конкурентних правих. Ако је A h -тачка, тада скуп свих h -правих које садрже тачку A називамо праменом h -конкурентних правих или елиптичким праменом, са центром у A и означавамо са $\mathcal{X}_A$.



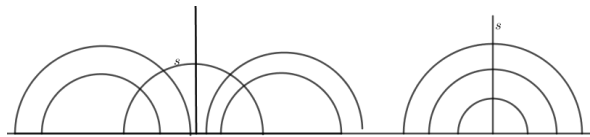
Сл. 17 Елиптички прамен

Прамен h -паралелних правих. Ако је X бесконачно далека тачка, тј. тачка апсолуте укључујући и X_∞ , сви уопштени кругови који садрже X и који одређују h -праве се додирују у тачки X . Зато све h -праве које имају заједничку бесконачно далеку тачку X називамо праменом h -паралелних правих или параболичким праменом, са центром у X и означавамо са $\mathcal{X}_X$.



Сл. 18 Параболички праменови са бесконачним тачкама X_∞ и X

Прамен h -хиперпаралелних правих. Ако је s h -права тада скуп свих h -правих нормалних на s називамо праменом h -хиперпаралелних правих, односно хиперболичким праменом и означавамо са $\mathcal{X}_s$.



Сл. 19 Хиперболички праменови

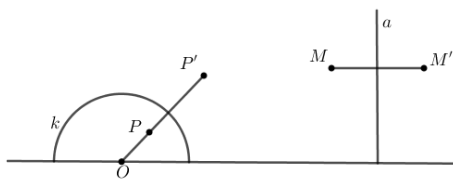
Изометрије горње полуравни

h -рефлексије

Инверзијом у односу на круг управан на апсолути или еуклидском рефлексијом у односу на праву управну на апсолути h -раван се пресликава на себе, па се **h -рефлексијом** h -равни назива пресликавање том инверзијом у односу на круг или одговарајућом еуклидском осном рефлексијом h -равни на саму себе. Осом h -рефлексије зовемо h -праву која припада одговарајућем уопштеном кругу.

Наведимо дефиницију инверзије у односу на круг.

Нека је задат круг еуклидске равни $\mathbb{E}^2$. Инверзија у односу на круг је пресликавање ψ које произвољну тачку $P \in \mathbb{E}^2 \setminus \{O\}$ слика у тачку P' полуправе OP , тако да је $OP \cdot OP' = r^2$.



Сл. 20 Инверзија у односу на круг и осна рефлексија

Инверзија слика скуп свих правих и кругова у себе.

Инверзија у односу на круг и осна рефлексија имају следећа заједничка својства:

- 1) Из дефиниција инверзије у односу на круг и осне рефлексије непосредно следи да су оне бијекције.

- 2) Ако је тачка P' инверзна тачки P , тада је тачка P инверзна тачки P' , па су стога и инверзија у односу на круг и осна рефлексција инволуције.
- 3) Све инваријантне тачке осне рефлексције су на оси те рефлексције. Инваријанте тачке инверзије у односу на круг припадају кругу инверзије.
- 4) Инверзија у односу на круг и осна рефлексција чије основице садрже уопштене кругове, пресликавају горњу полураван на себе, а уопштене кругове у уопштене кругове.
- 5) Ако су p и q два елемента скупа свих правих и кругова, а p' и q' њихове слике у инверзији у односу на круг или у осној рефлексiji, онда је угао између p и q подударан углу између p' и q' . При том, они су супротно оријентисани (свака еуклидска изометрија која слика угао између p и q у угао између p' и q' тако што слика краке у одговарајуће краке је индиректна).

Дефиниција 1. h -изометрија је коначна композиција h -рефлексција. Уколико је h -изометрија композиција парног броја h -рефлексција онда је она директна, а ако је композиција непарног броја рефлексција онда је индиректна.

Тврђење 1. Скуп свих h -изометрија је група.

Из особина уопштених инверзија важи и следеће тврђење:

Тврђење 2. Свака h -изометрија слика h -колинеарне тачке у h -колинеарне тачке и чува распоред, а слика h -праве у h -праве. При том, углови између две h -праве и њихових слика су једнаки. h -конкурентне, h -паралелне, h -хиперпаралелне h -праве се редом сликају у h -конкурентне, h -паралелне, h -хиперпаралелне h -праве.

Релација h -подударности. Пар h -тачака (A, B) је h -подударан пару тачака (C, D) ако постоји h -изометрија која пресликава један пар на други.

Може се показати да појмови h -тачке, h -праве, h -између и h -подударности парова тачака h -равни задовољавају све аксиоме хиперболичке геометрије, те да се уопштеном инверзијом h -тачке и h -праве h -равни пресликавају на

h -тачке и h -праве h -равни и да инверзија чува релације h -између и h -подударности, h -раван задовољава све аксиоме хиперболичке геометрије па је стога h -раван модел хиперболичке геометрије.

Теорема 6. h -раван је модел хиперболичке геометрије.

При том су h -изометрије управо изометрије овог модела, а h -конкурентне, h -паралелне и h -хиперпаралелне h -праве су конкурентне, паралелне односно хиперпаралелне праве модела.

Овај модел још називамо Поенкареовим полураванским моделом.

Формуле h -рефлексije

Изведимо сада формуле h -рефлексije у комплексним координатама полуравни.

Нека је h -права део еуклидског круга са центром у c и полупречником r .

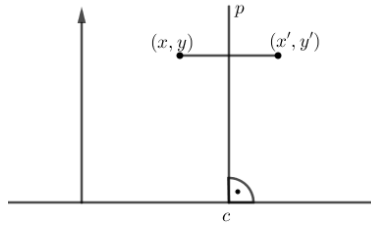
Тада је $\psi(z) = z'$, где је $z' - c = \lambda(z - c)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$.

Како је ψ инверзија у односу на круг, добија се да је $|z - c||z' - c| = r^2$, односно $\lambda|z - c|^2 = r^2$, па је $\lambda = \frac{r^2}{|z - c|^2}$.

Одатле следи да је $z' = \frac{r^2}{|z - c|^2}(z - c) + c = \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{c}} + c$, односно формула за инверзију је $\psi(z) = \frac{c\bar{z} + r^2 - |c|^2}{\bar{z} - \bar{c}}$, а самим тим и формула за h -рефлексiju:

$$\mathcal{S}_p(z) = \frac{c\bar{z} + (r^2 - c^2)}{\bar{z} - c}, c \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Нека је h -права део еуклидске праве управне на апсолуту.



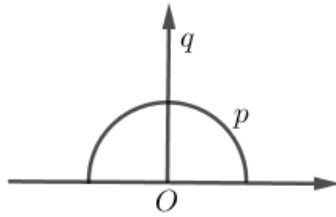
Сл. 21 h -рефлексija h -праве која је део еуклидске праве

Тада је $y' = y$, $x + x' = 2c$, $c \in \mathbb{R}$, односно $x' = 2c - x$, па је формула за

h -рефлексију дата са:

$$\mathcal{S}_p(z) = 2c - \bar{z}. \quad (2)$$

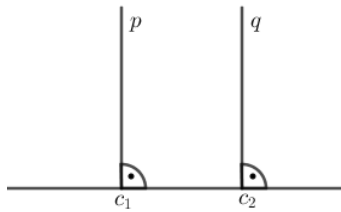
Пример 1. Нека је h -права p део еуклидског круга са центром у тачки $O(0, 0)$ и полупречником $r = 1$ и нека је h -права q еуклидска права $x = 0$ (Сл. 22). Композиција h -рефлексија $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z)$ је ротација око тачке i за угао π , односно централна симетрија.



Сл. 22

Како је $\mathcal{S}_p(z) = \frac{1}{\bar{z}}$, $\mathcal{S}_q(z) = -\bar{z}$, онда је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = -\frac{1}{z}$, формула ове централне симетрије.

Пример 2. Нека су дате паралелне h -праве p и q које су и еуклидски део правих ортогоналних на апсолуту (Сл. 23). Композиција h -рефлексија $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z)$ је орицикличка ротација или паралено померање.



Сл. 23

Нека су p и q са бесконачном тачком X_∞ .

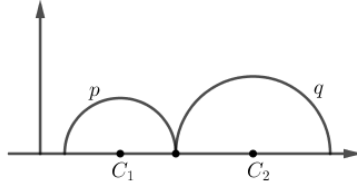
Како је $\mathcal{S}_p(z) = 2c_1 - \bar{z}$, $\mathcal{S}_q(z) = 2c_2 - \bar{z}$, тада је

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = \mathcal{S}_q(2c_1 - \bar{z}) = 2c_2 - \overline{(2c_1 - \bar{z})} = 2(c_2 - c_1) + z, \text{ односно}$$

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = a + z, \quad a \in \mathbb{R},$$

и ово је формула дате орицикличке ротације.

Пример 3. Нека су дате h -праве p и q које су делови еуклидских кругова $k(C_1, r_1)$ и $k(C_2, r_2)$ који се додирују у тачки која припада апсолути (Сл. 24). Композиција h -рефлексија $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z)$ је орицикличка ротација.



Сл. 24

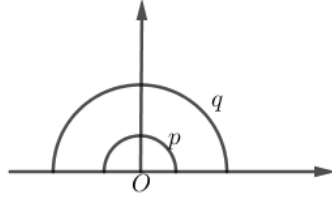
Нека је $c_2 = c_1 + r_1 + r_2$.

Како је $\mathcal{S}_p(z) = \frac{c_1 \bar{z} + (r_1^2 - c_1^2)}{\bar{z} - c_1}$ и $\mathcal{S}_q(z) = \frac{c_2 \bar{z} + (r_2^2 - c_2^2)}{\bar{z} - c_2}$, тада је

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) &= \mathcal{S}_q \left(\frac{c_1 \bar{z} + (r_1^2 - c_1^2)}{\bar{z} - c_1} \right) \\
 &= \frac{c_2 \frac{c_1 z + r_1^2 - c_1^2}{z - c_1} + r_2^2 - c_2^2}{\frac{c_1 z + r_1^2 - c_1^2}{z - c_1} - c_2} \\
 &= \frac{c_2(c_1(z - c_1) + r_1^2) + (r_2^2 - c_2^2)(z - c_1)}{(c_1(z - c_1) + r_1^2) - c_2(z - c_1)} \\
 &= \frac{(z - c_1)(c_2 c_1 + r_2^2 - c_2^2) + r_1^2 c_2}{(z - c_1)(c_1 - c_2) + r_1^2} \\
 &= \frac{(z - c_1)(c_2(c_1 - c_2) + r_2^2) + r_1^2 c_2}{(z - c_1)(c_1 - c_2) + r_1^2} \\
 &= \frac{c_2((z - c_1)(c_1 - c_2) + r_1^2) + r_2^2(z - c_1)}{(z - c_1)(c_1 - c_2) + r_1^2} \\
 &= c_2 - \frac{(c_1 - z)r_2^2}{(c_1 - z)(c_2 - c_1) + r_1^2} \\
 &= (c_1 + r_1 + r_2) - \frac{(c_1 - z)r_2^2}{(c_1 - z)(r_1 + r_2) + r_1^2},
 \end{aligned}$$

што јесте формула орицикличке ротације.

Пример 4. Нека су дате хиперпаралелне h -праве p и q , које еуклидски припадају круговима $k(O, r_1)$ и $k(O, r_2)$ (Сл. 25). Композиција h -рефлексија $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z)$ је транслација.



Сл. 25

Како је $\mathcal{S}_p(z) = \frac{r_1^2}{\bar{z}}$, $\mathcal{S}_q(z) = \frac{r_2^2}{\bar{z}}$, тада је $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = \mathcal{S}_q\left(\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right) = \frac{r_2^2}{\left(\frac{r_1^2}{\bar{z}}\right)} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \cdot z$,

односно

$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = az, \quad a \in \mathbb{R}, \quad a > 0,$$

што су формуле ове транслагације.

Ако су дате транслагација, орицикличка ротација и ротација, $\mathcal{J}_1(z) = az$, $a > 0$, $\mathcal{J}_2(z) = b + z$, $b \in \mathbb{R}$, $\mathcal{J}_3(z) = -\frac{1}{z}$, тада је $\mathcal{J}_2 \circ \mathcal{J}_1(z) = az + b$, $\mathcal{J}_3 \circ \mathcal{J}_2 \circ \mathcal{J}_1(z) = -\frac{1}{az + b}$.

Приметимо да ови примери транслагације, централне и орицикличке ротације имају облик $\frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и чувају горњу полураван. Слично, h -рефлексије, видети (1) и (2), су облика $\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$ где су $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и сликају горњу полураван у себе.

Нека је $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$ и $g(i) \in \mathbb{H}^2$, тј. важи да је $\text{Im}(g(i)) > 0$. Тада

$$\text{Im}(g(i)) = \text{Im}\left(\frac{ai + b}{ci + d}\right) = \text{Im}\left(\frac{(ai + b)(-ci + d)}{c^2 + d^2}\right) = \text{Im}\left(\frac{ac + bd + i(ad - bc)}{c^2 + d^2}\right),$$

односно $ad - bc > 0$.

При том $\frac{az + b}{cz + d} = \frac{\lambda az + \lambda b}{\lambda cz + \lambda d}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, па можемо тражити да је $ad - bc = 1$, јер постоји λ за које ово важи. Исти услов, аналогно можемо наметнути и формулама h -рефлексија и то да је $ad - bc = -1$.

Означимо

$$AM^+ = \left\{ \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}, ad - bc = -1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\},$$

$$M^+ = \left\{ \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

Трансформације скупа M^+ су Мебијусове трансформације или хомографије које још, при том, сликају горњу полураван у себе. Елементи скупа AM^+ су антихомографије које сликају горњу полураван у себе.

Директном провером се показује да важи следеће тврђење.

Тврђење 3.

- а) Нека су $g_1, g_2 \in AM^+$, $f_1, f_2 \in M^+$. Тада

$$g_2 \circ g_1, f_2 \circ f_1 \in M^+,$$

$$g_1 \circ f_1, f_1 \circ g_1 \in AM^+;$$
- б) M^+ је група;
- в) За свако $g \in AM^+$, постоји $f \in M^+$ тако да је $g = \mathcal{S}_p \circ f$, где је

$$\mathcal{S}_p(z) = \frac{1}{\bar{z}} \in AM^+.$$

С обзиром да се директне изометрије могу представити као композиције две h -рефлексије, односно два елемента скупа AM^+ , група директних h -изометрија је подгрупа групе M^+ . Покажимо да се оне поклапају.

Нека је $\frac{az + b}{cz + d} = g(z) \in M^+$. Покажимо да је она композиција транслације, ротације и орицикличке ротације.

При том транслација, ротација и орицикличка ротација из претходних примера припадају овој групи, па и њихове коначне композиције.

Ако је $c = 0$, онда је $\frac{az + b}{d} = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Како је $ad - bc = 1$, онда је $ad = 1$, па из $\frac{a}{d} > 0$ следи да је у питању композиција транслације $\mathcal{J}_1(z) = \frac{a}{d}z$ и орицикличке ротације $\mathcal{J}_2(z) = z + \frac{b}{d}$, односно $g = \mathcal{J}_2 \circ \mathcal{J}_1$.

Ако је $c \neq 0$, онда је

$$g(z) = \frac{az + b}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} = \frac{a \left(z + \frac{d}{c} \right) + b - \frac{ad}{c}}{c \left(z + \frac{d}{c} \right)} = \frac{bc - ad}{c^2} \frac{1}{z + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}.$$

Добијамо да је $g(z)$ композиција орицикличке ротације $\mathcal{J}_1(z) = z + \frac{d}{c}$, ротације $\mathcal{J}_2(z) = -\frac{1}{z}$, транслагације $\mathcal{J}_3(z) = \frac{ad - bc}{c^2} \cdot z = \frac{1}{c^2}z$ и орицикличке ротације $\mathcal{J}_4(z) = z + \frac{a}{c}$, па је $g = \mathcal{J}_4 \circ \mathcal{J}_3 \circ \mathcal{J}_2 \circ \mathcal{J}_1$.

Дакле, директне изометрије горње полуравни су облика:

$$M^+ = \left\{ \frac{az + b}{cz + d}, ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$

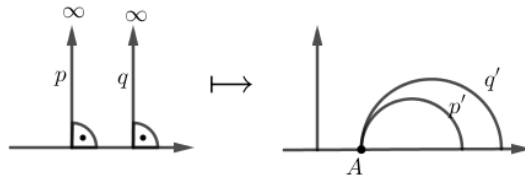
Индијектне трансформације су облика $\mathcal{S}_p \circ \mathcal{J}$, где је $\mathcal{J}$ директна изометрија а $\mathcal{S}_p$ рефлексја, односно елементи су скупа AM^+ .

Показали смо, при том, и да се свака директна трансформација може представити као композиција централних симетрија, орицикличких ротација и транслагација из Примера 1, 2 и 4.

Теорема 7. Директне h -изометрије су дате са $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, где је $ad - bc = 1$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Индијектне h -изометрије су дате са $g(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, где је $ad - bc = -1$ и $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Орицикличка ротација. Нађимо једну h -изометрију којом се паралелне h -праве p и q са бесконачном тачком X_∞ сликају у паралелне праве чија је бесконачна тачка A , тачка x -осе. Бесконачно далека тачка X_∞ се слика у бесконачно далеку тачку A (Сл. 26).



Сл. 26

Тада из $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, имамо да је $g(\infty) = \frac{a}{c} = A$, односно $a = c \cdot A$.

Можемо узети да је $d = 0$, па из $ad - bc = 1$ добијамо да је $-bc = 1$, тј. $b = -\frac{1}{c}$.

$$g(z) = \frac{c \cdot A \cdot z - \frac{1}{c}}{c \cdot z} = \frac{c^2 A z - 1}{c^2 z} = z'.$$

Инверзно пресликавање је дато са

$$\begin{aligned} c^2 \cdot A \cdot z - 1 &= c^2 \cdot z \cdot z' \\ c^2(A - z') \cdot z &= 1 \\ z &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{A - z'} \\ g^{-1}(z) &= \frac{1}{c^2} \cdot \frac{1}{A - z}. \end{aligned}$$

Ако се h -праве p и q сликају у h -праве p' и q' , тада је

$$\mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'} = g \circ \mathcal{S}_q \circ g^{-1} \circ g \circ \mathcal{S}_p \circ g^{-1} = g \circ \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p \circ g^{-1}$$

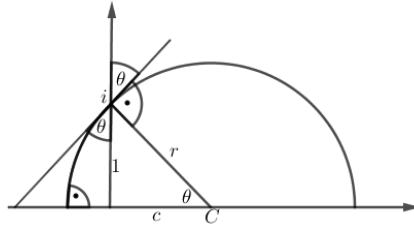
$$\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = z + l, \quad l \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_{q'} \circ \mathcal{S}_{p'}(z) &= g \circ (\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p) \left(\frac{1}{c^2(A - z)} \right) \\ &= g \left(\frac{1}{c^2(A - z)} + l \right) \\ &= \frac{c^2 A \left(\frac{1}{c^2(A - z)} + l \right) - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c(A - z)} + lc} \\ &= \frac{\frac{A}{A - z} + lc^2 A - \frac{1}{c}}{\frac{1}{c(A - z)} + lc} \\ &= \frac{cA + lc^2 A \cdot c(A - z) - (A - z)}{1 + lc \cdot c(A - z)} \\ &= \frac{(A - z)(lc^3 A - 1) + cA}{(A - z)(lc^2) + 1}. \end{aligned}$$

Ово је формула једне орицикличке ротације чији центар припада апсолути.

Ротација. Нађимо формуле ротације за произвољан угао око тачке i .

Нека је h -права p одређена еуклидским кругом са центром у тачки C и полупречником $r^2 = c^2 + 1$ (Сл. 27).



Сл. 27

Из формуле за h -рефлексију добијамо

$$\mathcal{S}_p(z) = \frac{c\bar{z} + r^2 - c^2}{\bar{z} - c} = \frac{c\bar{z} + 1}{\bar{z} - c}.$$

На основу тригонометријских функција оштрог угла правоуглог троугла добијамо да је $\frac{1}{r} = \sin \theta$, $\frac{c}{r} = \cos \theta$ и $c = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$.

Нека је h -права q дата једначином $\operatorname{Re}(z) = 0$, па имамо да је $\mathcal{S}_q(z) = -\bar{z}$.

Нађимо формуле за $\mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p = \mathcal{R}_{i,2\theta}$.

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) &= \mathcal{S}_q\left(\frac{c\bar{z} + 1}{\bar{z} - c}\right) \\ &= -\frac{cz + 1}{z - c} \\ &= -\frac{\frac{\cos \theta}{\sin \theta} z + 1}{z - \frac{\cos \theta}{\sin \theta}} \\ &= \frac{\cos \theta z + \sin \theta}{-\sin \theta z + \cos \theta}. \end{aligned}$$

Свака трансформација облика $\mathcal{J}(z) = az + b$, $a > 0$ је директна изометрија.

Нека је A произвољна h -тачка и $\mathcal{J}(i) = A$, где је $A = a i + b$.

Из $z' = az + b$ добијамо да је $z = \frac{z' - b}{a}$, односно

$$\mathcal{J}^{-1}(z) = \frac{z - b}{a}.$$

Тада је ротација око тачке A за угао 2θ :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{i,2\theta} \circ \mathcal{J}^{-1}(z) &= \mathcal{J} \circ \mathcal{R}_{i,2\theta} \left(\frac{z-b}{a} \right) = \mathcal{J} \left(\frac{\cos \theta \frac{z-b}{a} + \sin \theta}{-\sin \theta \frac{z-b}{a} + \cos \theta} \right) \\
 &= \mathcal{J} \left(\frac{\cos \theta (z-b) + \sin \theta a}{-\sin \theta (z-b) + \cos \theta a} \right) \\
 &= a \frac{\cos \theta (z-b) + \sin \theta a}{-\sin \theta (z-b) + \cos \theta a} + b \\
 &= \frac{a(\cos \theta (z-b) + \sin \theta a) + b(-\sin \theta (z-b) + \cos \theta a)}{-\sin \theta (z-b) + \cos \theta a} \\
 &= \frac{a \cos \theta z - ab \cos \theta + a^2 \sin \theta - b \sin \theta z + b^2 \sin \theta + ab \cos \theta}{-\sin \theta (z-b) + \cos \theta a} \\
 &= \frac{(a \cos \theta - b \sin \theta)z + \sin \theta (a^2 + b^2)}{-\sin \theta z + (\sin \theta b + \cos \theta a)}.
 \end{aligned}$$

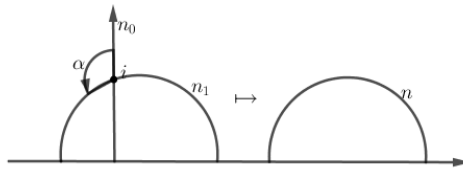
Транслација. Ако је заједничка нормала за h -праве p_0 и q_0 права $n_0 : x = 0$, онда је $\mathcal{T}_0(z) = \mathcal{S}_{q_0} \circ \mathcal{S}_{p_0}(z) = a \cdot z$, што је транслација (Пример 4).

Нека је заједничка нормала за h -праве p_0 и q_0 права $n : x = c$. Тада је $\mathcal{J}(z) = z + c$ директна трансформација која слика $n_0 \mapsto n$, $p_0, q_0 \mapsto p, q$ и $\mathcal{J}^{-1}(z) = z - c$.

Добијамо да је

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}(z) &= \mathcal{S}_q \circ \mathcal{S}_p(z) = \mathcal{J} \circ \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{J}^{-1} \\
 &= \mathcal{J} \circ \mathcal{T}_0(z - c) = \mathcal{J}(a(z - c)) \\
 &= a(z - c) + c = az - ac + c.
 \end{aligned}$$

Ако је нормала n еуклидски део круга, тада постоје ротација око тачке i и орицикличка ротација које сликају $n_0 \mapsto n$ (Сл. 28).



Сл. 28

Тада је $\mathcal{R}_{i,\alpha}(z) = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} z + \sin \frac{\alpha}{2}}{-\sin \frac{\alpha}{2} z + \cos \frac{\alpha}{2}}$, $\mathcal{J}_1(z) = z + l$,

$$\mathcal{J}(z) = \mathcal{J}_1 \circ \mathcal{R}_{i,\alpha}(z) = \frac{\cos \frac{\alpha}{2} z + \sin \frac{\alpha}{2}}{-\sin \frac{\alpha}{2} z + \cos \frac{\alpha}{2}} + l.$$

Из $(z' - l) \left(-\sin \frac{\alpha}{2} z + \cos \frac{\alpha}{2} \right) = \cos \frac{\alpha}{2} z + \sin \frac{\alpha}{2}$ добија се да је
 $(z' - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} = \left((z' - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right) z$, односно

$$\mathcal{J}^{-1}(z) = \frac{(z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}}.$$

Зато је трансформација чији вектор припада n дата са $\mathcal{J} \circ \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{J}^{-1}(z)$.

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{T}_0 \circ \mathcal{J}^{-1}(z) =$$

$$\begin{aligned} &= \mathcal{J} \circ \mathcal{T}_0 \left(\frac{(z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \mathcal{J} \left(a \frac{(z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} \right) \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} a \frac{(z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} + \sin \frac{\alpha}{2}}{-\sin \frac{\alpha}{2} a \frac{(z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2}} + \cos \frac{\alpha}{2}} + l \\ &= \frac{\cos \frac{\alpha}{2} a \left((z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \sin \frac{\alpha}{2} \left((z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)}{-\sin \frac{\alpha}{2} a \left((z - l) \cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right) + \cos \frac{\alpha}{2} \left((z - l) \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{\alpha}{2} \right)} + l \\ &= \frac{(z - l) \left(a \cos^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2} \right) - a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{(z - l) \left(-a \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \right) + \cos^2 \frac{\alpha}{2} + a \sin^2 \frac{\alpha}{2}} + l \\ &= \frac{(z - l) (a + a \cos \alpha + 1 - \cos \alpha) - a \sin \alpha + \sin \alpha}{(z - l) (-a \sin \alpha + \sin \alpha) + 1 + \cos \alpha + a - a \cos \alpha} + l \\ &= \frac{(z - l) (a + 1 + (a - 1)(\cos \alpha - l \sin \alpha)) + (1 - a)(\sin \alpha + l \cos \alpha) + l(a + 1)}{(z - l) \sin \alpha (1 - a) + a + 1 + \cos \alpha (1 - a)}. \end{aligned}$$

Метрика горње Поенкареове полуравни

Функција растојања

Дефиниција 2. Нека су A, B h -тачке и X и Y тачке апсолуте тако да је XY пречник круга на коме се налазе тачке A и B . Растојање у Поенкареовом полураванском моделу је дато са $d_{\mathbb{H}}(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AX}{AY} : \frac{BX}{BY} \right) \right|$.

Ако је h -права AB еуклидска полуправа нормална на x осу у тачки X , тачка Y је бесконачно далеко, па је растојање дато са $d_{\mathbb{H}}(A, B) = \left| \ln \left(\frac{AX}{BX} \right) \right|$.

Може се показати да је овим дата функција мере, тј. да су дужи подударне ако и само ако су исте мере, као и да је мера збира две дужи једнака збиру њихових мера.

Теорема 8. За произвољне тачке $z, w \in \mathcal{H}$ важи формула

$$\cosh d(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}. \quad (3)$$

Доказ. Покажимо да је формула инваријантна за трансформације облика $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$. Довољно је показати да је формула инваријанта у односу на трансформације облика $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto az$, $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$.

Нека је $g(z) = az$. Тада је

$$\begin{aligned} \cosh d(g(z), g(w)) &= 1 + \frac{|g(z) - g(w)|^2}{2 \operatorname{Im} g(z) \operatorname{Im} g(w)} \\ &= 1 + \frac{|az - aw|^2}{2 \operatorname{Im}(az) \operatorname{Im}(aw)} \\ &= 1 + \frac{a^2 |z - w|^2}{a^2 \cdot 2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} \\ &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} = \cosh d(z, w). \end{aligned}$$

Слично се показује да је формула инваријантна и за трансформације облике $z \mapsto \frac{1}{z}$, $z \mapsto z + a$, $a \in \mathbb{R}$ па и је инваријантна и за све директне трансформације. Зато је довољно доказати формулу за тачке $z = ia$, $w = ib$, $a > 0$, $b > 0$, праве $x = 0$, $y > 0$. На основу формуле $d_{\mathbb{H}}(z, w) = \left| \ln \left(\frac{X - z}{X - w} \right) \right|$ имамо да је

$$d_{\mathbb{H}}(z, w) = \left| \ln \left(\frac{0 - ia}{0 - ib} \right) \right| = \ln \left(\frac{a}{b} \right).$$

Одатле је

$$\begin{aligned}\cosh \ln \left(\frac{a}{b} \right) &= \frac{e^{\ln \frac{a}{b}} + e^{-\ln \frac{a}{b}}}{2} \\ &= \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{a}}{2} = \frac{a^2 + b^2}{2ab}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cosh d(z, w) &= 1 + \frac{|z - w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w} \\ &= 1 + \frac{|ia - ib|^2}{2ab} = \frac{2ab + |a - b|^2}{2ab} \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2ab}\end{aligned}$$

што је и требало доказати. □

Метрика у полураванском моделу

Нека је Δs растојање између блиских тачака z и $z + \Delta z$. Тада на основу формуле (3) важи:

$$\cosh \Delta s \approx \cosh d(z, z + \Delta z) = 1 + \frac{|z - (z + \Delta z)|^2}{2 \operatorname{Im} z \cdot \operatorname{Im}(z + \Delta z)} = 1 + \frac{|\Delta z|^2}{2(\operatorname{Im} z)^2},$$

односно $\cosh \Delta s \approx 1 + \frac{\left| \frac{\Delta z}{\operatorname{Im} z} \right|^2}{2}.$

Са друге стране на основу развоја функције $\cosh$ за блиске тачке имамо да је

$$\cosh \Delta s \approx 1 + \frac{|\Delta s|^2}{2},$$

па важи да је $\Delta s \approx \frac{\Delta z}{\operatorname{Im} z}.$

Како је $z = x + iy$ добијамо да је

$$ds^2 = \frac{dz^2}{\operatorname{Im}^2 z} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2},$$

чиме је дата метрика у полураванском моделу.

Епицикли горње полуравни

Нека је A h -тачка и $\mathcal{X}$ прамен правих. Скуп слика тачке A у рефлексјама у односу на све праве прамена $\mathcal{X}$ зове́мо **епициклом**.

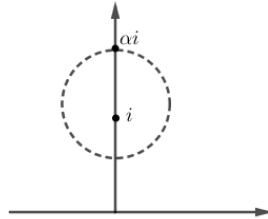
Епицикли који одговарају прамену конкурентних правих, прамену хиперпаралелних и прамену паралелних правих су редом, кругови, екви́дистанте и орицикли.

Приметимо, што ће се показати важним, да трансформације из скупова M^+ и AM^+ (генерисаних еуклидским рефлексјама и инверзијама у односу на круг) сликају скуп свих еуклидских права и кругова у себе, као и апсолуту у себе. При том се елементи скупа свих правих и кругова сликају у праве ако и само ако се нека њихова тачка слика у X_∞ , или еквивалентно сликају се у кругове ако се нити једна њихова тачка не слика у X_∞ .

h -кругови

Теорема 9. h -кругови су еуклидски кругови који припадају горњој полуравни.

Доказ. h -круг са центром i који садржи тачку $\alpha \cdot i$, $\alpha > 1$ добијамо као скуп њених слика у ротацијама $\mathcal{R}_{i,2\theta}(z) = \frac{\cos \theta \, z + \sin \theta}{-\sin \theta \, z + \cos \theta}$.



Сл. 29 h -круг

Дакле, h -круг је параметарски описан са

$$\left\{ \frac{\cos \theta \cdot i \cdot \alpha + \sin \theta}{-\sin \theta \cdot i \cdot \alpha + \cos \theta}, \theta \in [0, \pi) \right\}.$$

Нађимо експлицитну једначину h -круга. Из

$$z = \frac{\sin \theta + i \cos \theta \alpha}{\cos \theta - i \sin \theta \alpha}$$

добија се

$$z \cos \theta - i \sin \theta \alpha \cdot z = \sin \theta + i \cos \theta \cdot \alpha$$

$$\cos \theta (z - i\alpha) = \sin \theta (1 + i\alpha z).$$

За $z \neq i\alpha$ добијамо да је $\operatorname{ctg} \theta = \frac{1 + i\alpha z}{z - i\alpha} \in \mathbb{R}$. Ако је $z = w_1 + iw_2$ следи да је $\operatorname{ctg} \theta =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 + i\alpha(w_1 + iw_2)}{w_1 + iw_2 - i\alpha} = \frac{(1 - \alpha w_2) + i\alpha w_1}{w_1 + i(w_2 - \alpha)} \\ &= \frac{1}{w_1^2 + (w_2 - \alpha)^2} (((1 - \alpha w_2) + i\alpha w_1) \cdot (w_1 - i(w_2 - \alpha))) \\ &= \frac{1}{w_1^2 + (w_2 - \alpha)^2} ((1 - \alpha w_2)w_1 + \alpha w_1(w_2 - \alpha) + i(\alpha w_1^2 - (1 - \alpha w_2)(w_2 - \alpha))). \end{aligned}$$

$\operatorname{ctg} \theta$ је реалан број ако и само ако је $\alpha w_1^2 - (1 - \alpha w_2)(w_2 - \alpha) = 0$.

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha w_1^2 - (1 - \alpha w_2)(w_2 - \alpha) \\ &= \alpha w_1^2 - (w_2 - \alpha - \alpha w_2^2 + \alpha^2 w_2) \\ &= \alpha w_1^2 + \alpha w_2^2 - (\alpha^2 + 1)w_2 + \alpha. \end{aligned}$$

Ово је еквивалентно са

$$(w_1^2 + w_2^2) - \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} w_2 + 1 = 0.$$

Ако ставимо да је $w_1^2 + w_2^2 = \|z\|^2 = z \cdot \bar{z}$, $w_2 = \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, добијамо

$$\begin{aligned} &z \cdot \bar{z} + \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} i(z - \bar{z}) + \left(\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \right)^2 = \left(\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} \right)^2 - 1 \\ \Leftrightarrow &\left(z - \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} i \right) \left(\bar{z} + \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} i \right) = \frac{(\alpha^2 + 1)^2 - 4\alpha^2}{4\alpha^2} \\ \Leftrightarrow &\left\| z - \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} i \right\|^2 = \frac{(\alpha^2 - 2\alpha + 1)(\alpha^2 - 2\alpha + 1)}{4\alpha^2} = \frac{(\alpha^2 - 1)^2}{4\alpha^2} \\ \Leftrightarrow &\left\| z - \frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha} i \right\|^2 = \frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha} \quad (\text{јер је } \alpha > 1). \end{aligned}$$

Уочимо и да тачка h -круга $z = i\alpha$ такође задовољава ову једначину.

Добили смо да је тражени h -круг уједно еуклидски круг са еуклидским центром $\frac{\alpha^2 + 1}{2\alpha}$ и полупречником $\frac{\alpha^2 - 1}{2\alpha}$.

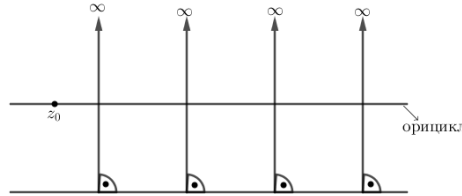
Сваки други h -круг може се добити од овог круга h -изометријама, односно елементима скупова AM^+ и M^+ који сликају горњу полураван у себе, а еуклидске кругове који јој припадају (и стога не садрже тачке које се сликају у X_∞) у еуклидске кругове горње полуравни.

Стога, сви h -кругови су уједно и еуклидски кругови који припадају h -равни. $\square$

h -орицикли

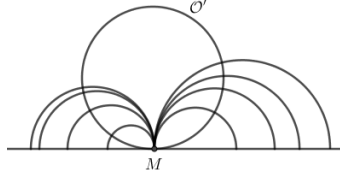
Теорема 10. h -орицикли су еуклидски кругови који додирују апсолуту или праве паралелне апсолути.

Доказ. Посматрајмо прамен паралелних правих чија је бесконачно далека тачка X_∞ уједно и бесконачно далека тачка еуклидских равни. С обзиром да h -праве садрже тачку X_∞ , оне су делови правих, па прамен $\mathcal{X}_\infty$ сачињавају све полуправе нормалне на апсолуту. Тада слике тачке z_0 припадају правој која је паралелна апсолути, чија је једначина дата са $y = y_0$, $y_0 \in \mathbb{R}$ односно у комплексним координатама $y = \text{Im } z_0$.



Сл. 30 Орицикл $\mathcal{O}$

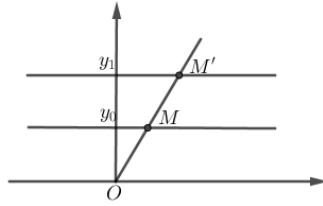
Сваки други орицикл $\mathcal{O}'$ може се добити од орицикла $\mathcal{O} : y = y_0$ h -изометријом, односно елементима скупова M^+ и AM^+ који сликају горњу полураван у себе. $\mathcal{O}$ је еуклидски права која са апсолутом има заједничку само једну тачку X_∞ . Зато се h -изометријом она слика у еуклидски круг или праву која са апсолутом има заједничку само једну тачку, слику тачке X_∞ . У случају да је X_∞ фиксна тачка, орицикл $\mathcal{O}'$ је еуклидски права паралелна апсолути. Ако се X_∞ слика у неку другу тачку апсолуте $\mathcal{O}'$ је еуклидски круг који додирује апсолуту у тој тачки. $\square$

Сл. 31 Орицикл $\mathcal{O}'$

Покажимо сада и помоћу координата да су сви орицикли подударни.

Теорема 11. Свака два орицикла су међусобно h -изометрична.

Доказ. С обзиром да смо већ показали да постоји изометрија која слика један прамен у други, довољно је доказати за орицикле истог прамена. Нека су дати орицикли $\mathcal{O} : y = y_0$ и $\mathcal{O}_1 : y = y_1$ (Сл. 32).



Сл. 32

Директне h -изометрије су дате са $z' = \frac{az + b}{cz + d}$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $ad - bc = 1$.

Хомотетија са центром у тачки O и коефицијентом $k = \frac{y_1}{y_0}$ је дата са $z' = kz$,

па је облика $z' = \frac{az + b}{cz + d}$, односно h -изометрија и слика орицикл $\mathcal{O}$ у орицикл $\mathcal{O}_1$. $\square$

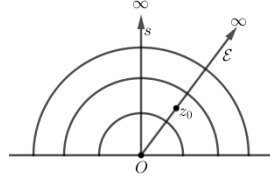
h -еквидистанте

Епицикл одређен хиперболичким праменом назива се еквидистанта. Ако је s основица тог прамена онда је s основица еквидистанте.

Теорема 12. h -еквидистанте у горњој полуравни су делови кругова који секу апсолуту у две тачке или полуправе са теменом на апсолути.

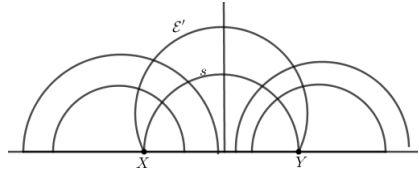
Доказ. Нека је $\mathcal{X}_s = \{x^2 + y^2 = r^2, x > 0, y > 0\}$ прамен правих нормалних на праву $s : x = 0$. Рефлексије у односу на праве прамена $\mathcal{X}_s$ су инверзије у

односу на одговарајуће кругове. Ако посматрамо слике тачке z_0 у рефлексијама у односу на праве прамена $\mathcal{X}_s$ добијамо да је еквидистанта $\mathcal{E}$ део праве кроз тачке $O(0,0)$ и z_0 . Све тачке еквидистанте могу се добити трансформацијама $\mathcal{T}(z) = az$, $a > 0$.

Сл. 33 Еквидистанта $\mathcal{E}$

Приметимо да еквидистанта и права s садрже тачке O и X_∞ . Све остале еквидистанте се од $\mathcal{E}$ добијају h -изометријама које сликају апсолуту у себе. Ако се при том једна од тачака O или X_∞ слика у X_∞ онда је слика од $\mathcal{E}$ поново део еуклидске праве.

Ако се и O и X_∞ сликају у коначне тачке X и Y апсолуте, онда слика од $\mathcal{E}$ припада еуклидском кругу који сече апсолуту у тачкама X и Y .

Сл. 34 Еквидистанта $\mathcal{E}'$

□

Закључак

Овим радом је представљен Поенкареов полуравански модел, који је од значаја приликом изучавања хиперболичке геометрије и разумевања њених законитости од стране студената као и прихватања непротивречности одговарајућег скупа аксиома. Увођењем комплексних координата у полураван омогућено је да се геометрија полуравни алгебарски опише, а посебно да се алгебарски опише одговарајућа група трансформација, њене подгрупе и одговарајући епицикли.

Описани су основни појмови и релације Поенкареовог полураванског модела. Изведене су основне формуле изометрија у комплексим координатама, формуле ротација, транслација и орицикличких ротација и као њихове инваријанте одређени су кругови, орицикли и еквилине. Приказане су и формуле за рачунање растојања међу тачкама горње полуравни.

Литература

- [1] М. Антић, *Одабрана поглавља геометрије*, материјали, Београд.
- [2] З. Лучић, *Еуклидска и хиперболичка геометрија*, Друго издање, Математички факултет, Београд, 1997.
- [3] М. Станковић, М. Златановић, *Нееуклидске геометрије*, Прво издање, Природно-математички факултет, Ниш, 2014.
- [4] М. Станковић, *Основи геометрије*, Прво издање, Природно-математички факултет, Ниш, 2006.
- [5] С. Вукмировић, *Модели геометрије Лобачевски*, материјали, Београд.
- [6] Д. Лопандић, *Геометрија*, Научна књига, Београд, 1980.