Univerzitet u Beogradu
Matematički fakultet

Nemonotono rezonovanje u veštačkoj inteligenciji

– Master rad –

Mentor: dr Aleksandar Perović

Student: Staša Rašić

Beograd
2013

Sadržaj

1. Uvod

1.1 Cilj i plan rada

Cilj ovog rada je da se u kompaktnoj formi prikaže uvod u matematičku teoriju nemonotonog rezonovanja koju su Sarit Kraus, Daniel Leman i Menahem Magidor pre nešto više od dve decenije zasnovali u radu *Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics*. Ovaj rad poslužo mi je kao centralna referencia prilikom izrade rada. Zbog obima materije, glavni objekti razmatranja u radu će biti formalni sistemi koje su obradili Kraus, Leman i Magidor. U pitanju su sistemi C, CL, P, CM i M.

Poznato je da su mnogi sistemi koji pokazuju nemonotono ponašanje već opisivani i proučavani u literaturi. Opšti pojam nemonotonog rezonovanja je skoro uvek bio opisivan samo negativno ali u stvari to nije slučaj. Ovde su proučavani opšti obrasci nemonotonog rezonovanja i izdvojena su svojstva koja bi pomogla da se izdvoje polja nemonotonog rezonovanja sa pozitivnim osobinama. Detaljno je razmotreno više familija nemonotonih relacija posledice. Pet takvih familija su definisane i karakterizovane reprezentacionim teoremama. Osnovni jezik korišćen u ovom radu je jezik iskazne logike.

Ovaj rad u drugom poglavlju govori o opštem pojmu nemonotonog rezonovanja i nemonotone relacije posledice. U trećem poglavlju opisuje sintaksu. Zatim su detaljno prezentovani pet logičkih sistema i familija modela. Prvi je sistem C opisan u četvrtom poglavlju. U petom poglavlju je opisan drugi, jači sistem CL. U šestom poglavlju je opisan treći još jači sistem P koji je centralni sistem ovog rada i koji je prihvaćen kao minimalni sistem nemonotonog zaključivanja. U sedmom poglavlju je opisan četvrti sistem CM, koji je jači od CL ali ne može da se poredi sa P. On obezbedjuje primer monotonog sistema koji je slabiji od klasične logike. U osmom poglavlju je opisan poslednji od ovih sistema, M koji je jači od svih prethodnih sistema i ekvivalentan je klasičnoj iskaznoj logici. U ovom radu je takodje dato poredjenje navedenih sistema, koncentrišući se na osobine koje su podržane ili treba da budu podržane bar od važnih familija sistema nemonotonog rezonovanja. Opisana su i logička pravila koja mogu biti izvedena iz navedenih sistema kao i neka bitna pravila koja ne mogu biti izvedena iz tih sistema. Detaljno je objašnjeno, korak po korak, izvodjenja svakog pravila a zatim je i grafički prikazano izvodjenje svakog pravila.

1.2 Opšte o veštačkoj inteligenciji

Izraz "veštačka inteligencija" se koristi od sredine pedesetih godina. Za uvođenje ovog izraza smatra se da je najzaslužniji Dž. Mekarti. Prvi put izraz veštačka inteligencija se čuo u leto 1956. godine na sastanku tadašnjih pet vodećih naučnika iz oblasti računarskih nauka. Sasatanak je održan na *Dartmouth Collegu*, u Hanoveru, Novi Hemšir. Sasatanku su prisustovali: K. Šenon, M. Minski, K. Mekarti, A. Novel i H. Sajmon. Sam izraz je uveden da bi se što više naglasile i što lakše objasnile, mogućnosti budućih računara i računarskih programa.

Potreban je bio duži vremenski period da se pojam veštačke inteligecije (VI) *[Artifical Intelligence (AI)]* počne da koristi. Velika je vorovatnoća da će primena metoda VI, imati značajnu ulogu u budućnosti, a najviše u cilju pripremanja odluka u procesu upravljanja. Veštačka inteligencija je naučno područje, koje ima cilj da mašine, kao što je računar, imaju sposobnost inteligentnog ponašanja. Softverske kompanije i uopšte savremene organizacije koje uspešno koriste oblast veštacke inteligencije značajno su povećale svoju produktivnost, odnosno obezbedile su prednost na tržištima u budućnosti. Postoji više definicija veštačke inteligencije neke od njih su :

(1) Veštačka inteligencija je nauka koja čini da mašine obavljaju stvari koje bi zahtevale inteligenciju kada bi ih obavljao čovek *(M. Minski, 1968.).*

(2) klasicna definicija VI: ako su u odvojene dve prostorije smestene jedna ljudska osoba i neka naprava i ako na identične probleme one pružaju odgovore na osnovu kojih se ne može pogoditi u kojoj sobi je čovek, a u kojoj naprava, onda možemo smatrati da ta naprava ima atribute VI.

(3) Veštačka inteligencija je deo nauke o računarima usmeren na stvaranje i proučavanje računarskih programa koji ispoljavaju svojstva koja se identifikuju kao inteligentna u ljudskom ponašanju: znanje, zaključivanje, učenje, rešavanje problema, razumevanje jezika i dr. *(A. Bar, 1983.).*

(4) Veštačka inteligencija je disciplina kreiranja mašina koje podražavaju ljudsko ponašanje ili inteligenciju; mašine koje su senzitivne i misle *(M. Kariko, Ž. Žirar, Dž. Džons, 1989.).*

Danas se primenjuje čitav niz različitih klasifikacija Veštačke inteligencije. Najznačajnije oblasti Veštačke inteligencije su :

- obrada i razumevanje prirodnih jezika,
- interpretacija i računarska obrada video oblika,
- robotika,
- sistemi zasnovani na znanju, u prvom redu sistemi za podršku odlučivanju *(Decision Support Systems)* i ekspertski sistemi,
- softverski agenti,
- otkrivanje znanja u BP (*Knowledge Discovery in Databases*, KDD), i
- Veštačka inteligencija na Internetu.

2 Nemonotono rezonovanje

2.1 Opšte o nemonotonom rezonovanju

Kada baza znanja nije potpuna ili kada nije konzistentna, postupci zaključivanja zasnovani na klasičnoj logici mogu da budu nedovoljno fleksibilni da bi odgovorili na zahteve koji se javljaju u stvarnosti.

Od savremenih inteligentnih sistema se zahteva da se u situacijama u kojima poseduju nepotpune ili protivrečne informacije ne blokiraju, već da za dato stanje pruže neki prihvatljiv zaključak. U slučaju kada pristgnu novi podaci, prethodni zaključci se mogu odbaciti ili zadržati, u čemu se ogleda nemonotonost zaključivanja. U monotonom zaključivanju pristizanje novih informacija ne utiče na već formirane zaključke tj. oni se ne mogu nikako odbaciti. Klasična logika je primer monotone logike.

Kada se prilikom pristizanja novih informacija ponište neki zaključci skup zaključaka se smanjuje.

U slučaju nemonotonog rezonovanja zaključak može da ne bude tačan iako su se premise realizovale.

Kod nemonotonog rezonovanja se razmatraju metodi dedukcije u kojima dodavanje formule skupu pretpostavki utiče na zaključak. Kod monotonog rezonovanja to nije slučaj i zato se zove monotono rezonovanje. Nemonotono zaključivanje može zavisiti i od celog skupa pretpostavki a ne od njegovog podskupa, ili od formula koje ne pripradaju skupu pretpostavki. Ovakvo proširenje zaključivanja može biti od značaja za sistem koji na primer treba da se prilagodi nepotpunoj bazi znanja.

Nemonotona logika je studija onih načina koji izvode dodatne informacije iz datih informacija koje ne zadovoljavaju monotonost osobina zadovoljenih od strane svih metoda baziranih na klasičnoj (matematičkoj) logici. U matematici, ako je zaključak donešen na bazi odredjenih premisa, nikakve dodatne premise neće nikada poništiti zaključak.
U svakodnevnom životu, kako god, izgleda jasno da mi, ljudska bića, izvlačimo razumne zaključke iz onoga što znamo i da na osnovu nove informacije, mi često moramo povući prethodni zaključak tj poništiti ga. Na primer, mi možemo pretpostavljati da većina ptica leti, ali da su pingvini ptice koje ne lete, i učeći da je Tviti ptica, zaključujemo da ona leti. Učeći da je Tviti pingvin, nikako nas neće naterati da promenimo mišljenje o činjenici da većina ptica leti i da su pingvini ptice koje ne lete, ili o činjenici da je Tviti ptica. To treba da nas navede da odbacimo naše zaključke o njihovim letećim mogućnostima. Najverovatnije će inteligentni automatizovan sistem morati da radi istim načinom (nemonotonog) zaključivanja. Postoje mnogi naučni radovi u kojima su proučavani sistemi koji izvršavaju takve nemonotone zaključke. Najpoznatiji sistemi su verovatno: negacija kao nedostatak , cirkumskripcija, modalni sistem, standardna logika, autoepistemna logika i nasledni sistemi.

2.2 Nemonotona relacija posledice

U proučavanju nemonotonog rezonovanja i logičkih sistema važnu ulogu ima nemonotona relacija posledice. Nemonotona relacija posledice se označava sa $\mid\!\sim$ i čita se *normalno, uobičajeno, najčešće.* Koristi se u uslovnim tvrdnjama koje su oblika $\alpha \mid\!\sim \beta$ gde su α i β formule. Formula α je prethodnik tvrdnje, β je njena posledica. Uslovna tvrdnja $\alpha \mid\!\sim \beta$ čita se: *ako α normalno β* i interpretira na sledeće načine:

- *Ako je α tačna normalno tačna je i β.*
- *β je normalna – uobičajena posledica od* α .
- *Ako je formula sa leve strane nemonotone relacija posledice* $\mid\!\sim$ *tačna, tada je sa velikom verovatnoćom tj skoro uvek osim u izuzetnim slučajevima tačna i formula sa njene desne strane.*

Na to *normalno* se gleda kao na neki binarni pojam. Jasno je da trud da se shvati *normalno* kao neki unarni pojam npr. ako *ako α normalno β* označimo sa $N(\alpha \rightarrow \beta)$ ili sa $\alpha \rightarrow N\beta$ za neke unarne modalne operatore ne može biti iskazan dovoljno. Relacije posledice su skupovi uslovnih tvrdnji.

Objašnjenje relacija izmedju dokaza i modela koji je prikazan u ovom radu će omogućiti projektovanje postupaka odluke pogodne različitim ograničenjima na iskaznom jeziku ili bazi znanja. Takav postupak odluke (ili heuristika) može biti jezgro automatizovanih mašina koje mogu razumno da zaključuju. U ovom radu, aksiomatski sistemi se smatraju kao glavni objekat interesa.

3 Notacija

3.1 Jezik

U radu se koristi standardna logička notacija.
Sa *L* je označen skup svih iskaznih formula nad datim skupom izkaznih slova.
$\mathcal{U}$ označava skup svih svetova koje treba da smatramo mogućim.
$\mathcal{U}$ je podskup skupa svih valuacija istinitih vrednosti iskaznih slova.
Logički veznici su standardno označeni sa $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$.
Iskazne formule su označene sa malim grčkim slovima.

Ako je $u \in \mathcal{U}$ i $\alpha, \beta \in L$ piše se $u \models \alpha$ ako u zadovoljava α i pretpostavimo:

1) $u \models \neg\alpha$ akko $u \not\models \alpha$.
2) $u \models \alpha \vee \beta$ akko $u \models \alpha$ ili $u \models \beta$.

Relacija zadovoljenja označava se sa $\models$. Pojam zadovoljenja skupa formula i validnosti formula su definisani kao i obično. Piše se $\models \alpha$ ako je α tautologija, tj. Ako i samo ako $\forall u \in \mathcal{U}$, $u \models \alpha$, i piše se $\alpha \models \beta$ za $\models \alpha \rightarrow \beta$.

Ako je Γ skup formula tada je podskup od skupa $\mathcal{U}$ koji sadrži samo svetove koji zadovoljavaju sve formule iz Γ pogodan univerzum i označavamo ga sa $\mathcal{U}_\Gamma$.

3.2 Tipovi informacija

Sada će biti objašnjeno kako će raditi proces zaključivanja i kako će studija nemonotone relacije posledice biti veoma korisna za automatizovano nemonotono rezonovanje. Pitanja koja se postavljaju automatizovanoj bazi znanja su formule iz skupa L i pitanje β treba da bude interpretirano kao: dali se očekuje da formula β bude istinita? (eng. is β expected to be true?) Da bi se odgovorilo na takvo pitanje baza znanja će primeniti neke procedure zaključivanja na informacije koje ima. Baza znanja ima nekoliko različitih tipova informacija.

Prvi tip informacija su stabilne informacije koje se sporije menjaju. One opisuju jaka ograničenja kao na primer: lavovi su sisari ili dete je ekvivalent ne odraslom.

Drugi tip informacija se sastoji od skupa uslovnih tvrdnji i opisuje slaba ograničenja kao na primer: ptice normalno lete. Ovaj skup opisuje šta mi znamo o načinu po kojem se svet obično ponaša. Ovaj skup kondicionala tj. uslovnih tvrdnji (eng: conditional assertions) biće nazvan baza znanja i označen sa K.

Treći tip informacija opisuje naše informacije u konkretnoj situaciji. Na primer: to je ptica.

Prvi tip informacija se razmatra kao odvojen tip informacija, mada se može ekvivalentno, tretirati formula α prvog tipa kao uslovna tvrdnja $\neg\alpha \mid\!\sim \perp$. Proces zaključivanja će raditi na sledeći način, da bi odgovorio na pitanje β pokušaće da izvede kondicionalnu tvrdnju $\alpha \mid\!\sim \beta$ iz baze znanja K. Postupak zaključivanja izvodi kondicionalne tvrdnje iz skupova kondicionalnih tvrdnji. Dakle može se gledati na cirkumskripciju, standardnu logiku i druge sisteme kao na mehanizme za izvodjenje uslovnih tvrdnji iz skupa uslovnih tvrdnji.

4 Kumulativno rezonovanje

4.1. Kumulativna relacija posledice

Prvo će biti proučen sistem C najslabiji od logičkih sistema. Prezantovanje sistema, od slabijih ka jačim sistemima, je zbog toga da se minimizuju ponavljanja jer pravila koja mogu biti izvedena u slabijim sistemima mogu takodje da budu izvedena i u jačim sistemima. Sistem je nazvan C, kumulativni sistem od engleske reči cumulative. Sistem C se sastoji od više pravila zaključivanja i šeme aksioma.

Definicija: Za relaciju posledice $\mid\!\sim$ se kaže da je kumulativna ako sadrži sve instance aksioma Refleksivnosti i zatvorena je pod pravilima zaključivanja Leva Logička Ekvivalencija, Desno Slabljenje, Sečenje, i Oprezna Monotonost koja će biti opisana u daljem tekstu.

Sada će biti opisana i detaljno razmotrena pravila i neka izvedena pravila i neke važne aksiome. Pravila sistema C će biti opisana na dva načina prvi način je kao u radu *Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics* a drugi način je kao u radu *From Statistical Knowledge Bases to Degrees of Belief*. Cilj je da se izvaga značenje aksioma i pravila kada je relacija . . . $\mid\!\sim$ . . . interpretirana kao ako . . . , normalno . . . . .

Prvo pravilo je Refleksivnost. Sledeća definicija refleksivnosti je kao u radu *Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics.* Neka je α formula.

$$\alpha \mid\!\sim \alpha \qquad \text{(Refleksivnost)} \qquad (1)$$

Refleksivnost je zadovoljena univerzalno bilo kojim rezonovanjem baziranim na nekom pojmu posledice. Ono odgovara aksiomu ID (identitet) kondicionalne logike.

U radu *From Statistical Knowledge Bases to Degrees of Belief* pravilo Refleksivnost se definiše na sledeći način. Pretpostavimo da imamo neku Bazu Znanja i označimo je sa BZ.

$$BZ \mid\!\sim BZ$$

Sledeće pravilo se zove Leva Logička Ekvivalencija.

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \;\;,\;\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Leva Logička Ekvivalencija)} \qquad (2)$$

Leva Logička Ekvivalencija iskazuje zahtev da logički ekvivalentne formule imaju tačno iste posledice i odgovaraju pravilu RCEA kondicionalne logike. Posledice formula treba da zavise od njihovog značenja, a ne od njihove forme. U prisustvu drugih pravila C - a, može se oslabiti do: iz $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$ zaključuje se $\beta \wedge \alpha \mid\!\sim \gamma$.
Takodje i Levu logička ekvivalenciju možemo zapisati pomoću BZ u obliku:

Ako BZ <=> BZ' u logičkom smislu tada $BZ \mid\!\sim \alpha$ ako i samo ako $BZ' \mid\!\sim \alpha$

Aku su Baze znanja logički ekvivalentne tada iz njih mogu da se izvedu isti zaključci.

Sledeće pravilo se zove Desno Slabljenje.

$$\frac{\models \alpha \to \beta \;\;,\;\; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta} \qquad \text{(Desno Slabljenje)} \qquad (3)$$

Desno Slabljenje govori o tome da se mogu zameniti logički ekvivalentne formule jedna sa drugom na desnoj strani simbola $\mid\!\sim$. Refleksivnost i Desno Slabljenje ukazuju na to da $\alpha \mid\!\sim \beta$ ako $\alpha \models \beta$. Svi nemonotoni sistemi zadovoljavaju Refleksivnost, Levu logičku Ekvivalenciju i Desno Slabljenje. Desno Slabljenje možemo zapisati u sledećem obliku:

Ako $\alpha \Rightarrow \beta$ i BZ $\mid\!\sim \alpha$ tada BZ $\mid\!\sim \beta$.

Sledeće pravilo je nazvano Sečenje.

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \,,\; \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Sečenje)} \qquad (4)$$

Ono iskazuje činjenicu da se može, na putu ka verodostojnom zaključku, prvo dodati hipoteza činjenici za koju se zna da je istinita i dokazati verodostojnost tog zaključka iz ovog proširenog skupa činjenica i tada izbaciti tu dodatu hipotezu iz skupa činjenica. Njegovo značenje je, da je verodostojan zaključak siguran kao i pretpostavka na kojoj je baziran. Stoga može da se doda (ovo je poreklo termina kumulativna) u pretpostavke. Postoji mnogo nemonotonih sistema koji zadovoljavaju Sečenje.

Pretpostavimo da kažemo: *mi očekujemo da će biti kišovito večeras i ako bude kišovito večeras, normalno fudbalski klub Crvena Zvezda treba da pobedi na fudbalskoj utakmici sutra.* Lako je zaključiti onda da mi mislimo da *normalno, fudbalski klub Crvena Zvezda treba da pobedi na fudbalskoj utakmici sutra.*

Sečenje možemo zapisati i u obliku: BZ $\wedge\, \alpha \mid\!\sim \beta$ i BZ $\mid\!\sim \alpha$ tada BZ $\mid\!\sim \beta$

Ako iz Baze Znanja i α možemo izvesti zaključak β i iz Baze Znanja možemo izvesti zaključak α tada iz Baze Znanja možemo izvesti zaključak β .

Poslednje pravilo, nazvano Oprezna Monotonost je preuzeto od D. Gabaja [2]. Ono odgovara aksiomu A3 Burgesovog sistema *S* u [1]. Ista osobina je nazvana triangulacija u [10].

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Oprezna Monotonost)} \qquad (5)$$

Opreznu Monotonost slično kao prethodna pravila, možemo zapisati, koristeći Bazu Znanja

Ako BZ $\mid\!\sim \alpha$ i BZ $\mid\!\sim \beta$ tada BZ $\wedge\, \alpha \mid\!\sim \beta$

Oprezna Monotonost izražava činjenicu da učenje nove činjenice, ne treba da poništiti prethodne zaključke. To je centralna osobina svih sistema razmatranih ovde.

Argumentacija da prihvatimo Opreznu Monotonost može se opisati na sledeći način: ako je α razlog da verujemo u β i takodje α je razlog da verujemo u γ , onda α i β treba da budu dovoljni da mi poverujemo u γ, pošto je α i onako dovoljna i na ovoj bazi, β je očekivana. Oprezna Monotonost je veoma važna pošto mi tipično učimo nove činjenice i mi bismo želeli da nam

Oprezna Monotonost i Sečenje zajedno govore da ukoliko je za nove naučene činjenice očekivano da budu istinite, ništa ne menja naša verovanja. Sa semantičke tačke gledišta, mi želimo da razmotrimo slučaj za Opreznu Monotonost na sledećem primeru. Pretpostavimo da kažemo *mi očekujemo da će biti kišovito večeras i normalno, fudbalski klub Crvena Zvezda treba da pobedi na fudbalskoj utakmici sutra.* Logično je da bi ste vi zaključili da mi mislimo da *čak i ako bude kišovito večeras, normalno fudbalski klub Crvena Zvezda treba da pobedi na fudbalskoj utakmici sutra?* Pravila Sečenje i Oprezna Monotonost mogu se izraziti zajedno sledećim principom: ako je $\alpha \mid\!\sim \beta$, onda se verodostojne posledice od α i $\alpha \wedge \beta$ podudaraju.

Sistem C

$\alpha \mid\!\sim \alpha$ (Refleksivnost)

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \ , \ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$$ (Leva Logička Ekvivalencija)

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \ , \ \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$$ (Desno Slabljenje)

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \ , \ \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$$ (Sečenje)

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \ , \ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$$ (Oprezna Monotonost)

Slika 1. Sistem C

4.2 Pravila koja su izvedena iz sistema C

Sledeća četiri pravila koja se zovu Ekvivalentnost, And, MPC i pravilo broj 9 su izvedena iz sistema C.

Prvo pravilo koje se zove Ekvivalentnost izražava činjenicu da dva iskaza koja su verodostojne posledice jedan drugom, imaju tačno istu verodostojnu posledicu.

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \ , \ \beta \mid\!\sim \alpha , \ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma} \quad \text{(Ekvivalentnost)} \qquad (6)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila Ekvivalentnost $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta \ ,\ \beta \mid\sim \alpha ,\ \alpha \mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma}$ iz sistema C

potrebno je iz hipoteza pravila Ekvivalentnost $\alpha \mid\sim \beta$, $\beta \mid\sim \alpha$, $\alpha \mid\sim \gamma$ koristeći pravila iz sistema C zaključiti $\beta \mid\sim \gamma$. Prvo se u pravilo Oprezna Monotonost ubace hipoteze $\alpha \mid\sim \beta$ i $\alpha \mid\sim \gamma$ i zaključuje se da važi $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$,

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ ,\ \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Oprezna Monotonost)}$$

Sada se na $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ i tautologiju $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha$ (komutativnost konjukcije) primeni pravilo Leva Logička Ekvivalencija.

$$\frac{\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \beta \wedge \alpha \ ,\ \alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\beta \wedge \alpha \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Leva Logička Ekvivalencija)}$$

Zatim se na $\beta \wedge \alpha \mid\sim \gamma$ i drugu hipotezu pravila Ekvivalentnost $\beta \mid\sim \alpha$ primeni pravilo Sečenje.

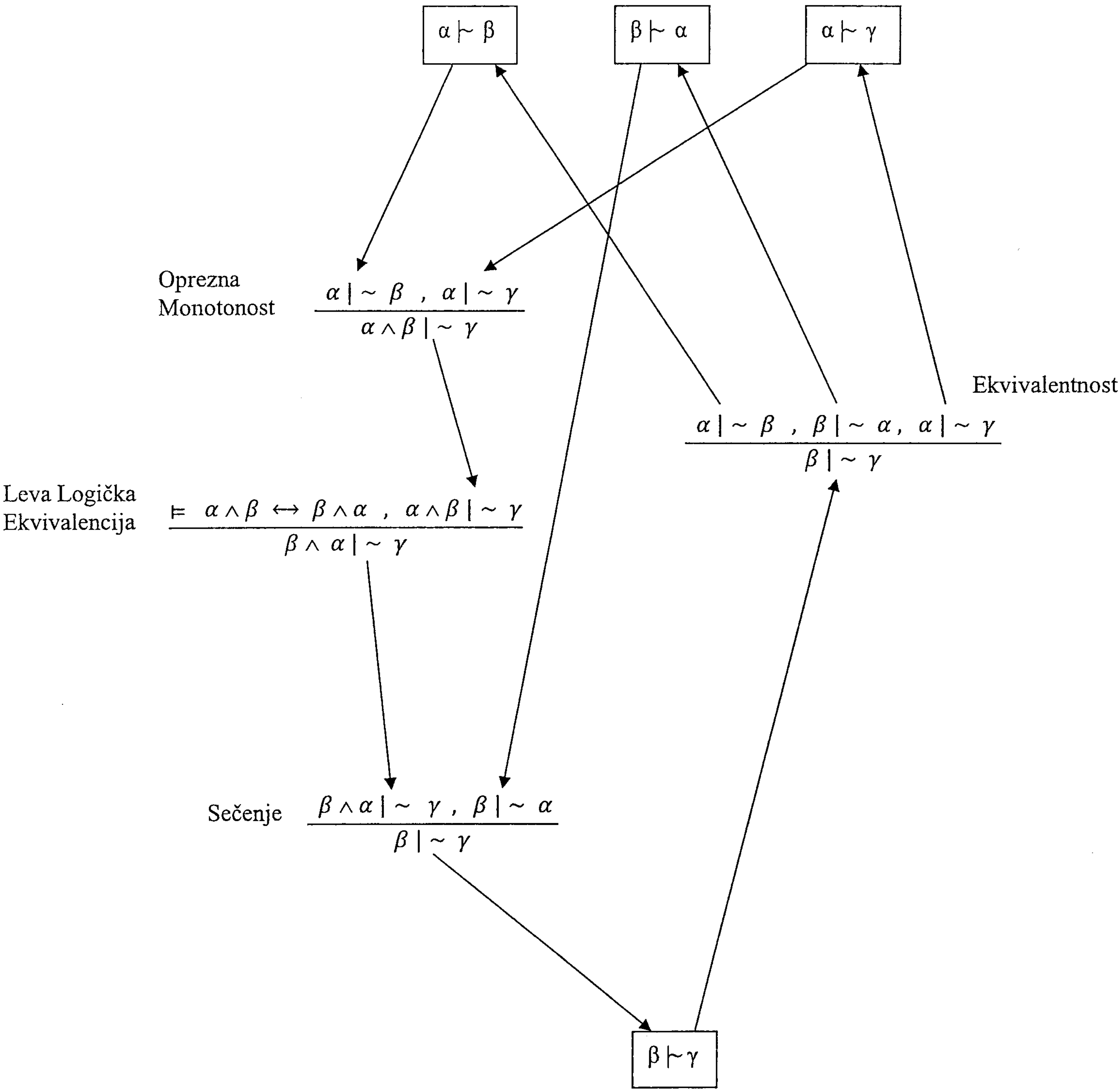
$$\frac{\beta \wedge \alpha \mid\sim \gamma \ ,\ \beta \mid\sim \alpha}{\beta \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Sečenje)}$$

i dobija se $\beta \mid\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja . ∎

Sada će ovo izvodjenje biti grafički prikazano. Sledi opis strukture grafika izvodjenja.

- Pravilo koje se izvodi se nalazi na desnoj strani.
- Hipoteze pravila su izdvojene na vrh stranice.
- Hipoteze se ubacuju u neko od pravila sistema iz kog se pravilo izvodi ili u neko pravilo koje je izvedeno iz tog sistema.
- Tako dobijeni zaključak se dalje takodje ubacuje u neko od pravila sistema C ili u neko pravilo koje je izvedeno iz tog sistema.
- Postupak se nastavlja dok se ne dobije zaključak pravila koje se izvodi.
- Kada se dobije zaključak pravila koje se izvodi izvodjenje je završeno.

Struktura svih sledećih grafika izvodjenja je u principu ista, samo će se izvoditi neka druga pravila iz nekih drugih sistema.



Slika 2. Grafički prikaz izvodjenja pravila Ekvivalentnost iz sistema C

Drugo pravilo izražava činjnicu da je konjunkcija dve verodostojne posledice takodje verodostojna posledica.

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma} \qquad (\text{And}) \qquad (7)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila And $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma}$ iz sistema C, treba iz hipoteza $\alpha \mid\sim \beta$ i

$\alpha \mid\sim \gamma$ pravila And zaključiti $\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma$ koristeći pravila iz sistema C.

Prvo se koristi Oprezna Monotonost da bi iz $\alpha \mid\sim \beta$ i $\alpha \mid\sim \gamma$ dobili $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$.

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma} \qquad (\text{Oprezna Monotonost})$$

Zatim , pošto je $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \models \beta \wedge \gamma$ sledi da važi $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\sim \beta \wedge \gamma$.

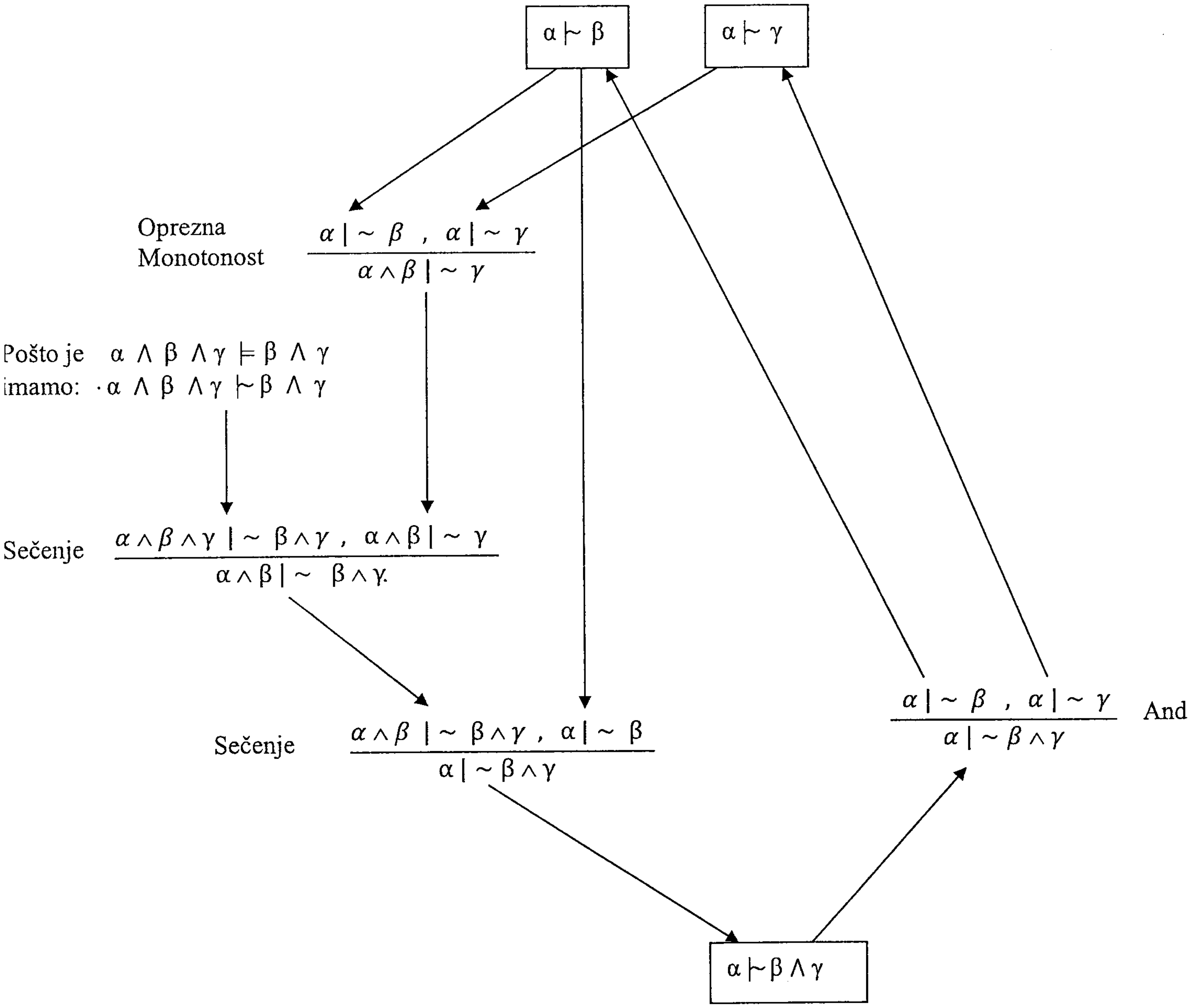
Zatim se primeni pravilo Sečenje na $\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\sim \beta \wedge \gamma$ i $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ i dobija se $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge \gamma$.

$$\frac{\alpha \wedge \beta \wedge \gamma \mid\sim \beta \wedge \gamma \ , \ \alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge \gamma} \qquad (\text{Sečenje})$$

Zatim se opet primeni pravilo Sečenje na $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge \gamma$ i hipotezu $\alpha \mid\sim \beta$ i dobja se $\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma$.

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge \gamma \ , \ \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma} \qquad (\text{Sečenje})$$

Dobijen je zaključak pravila And $\alpha \mid\sim \beta \wedge \gamma$ što je i bio cilj. ∎



Slika 3. Grafički prikaz izvodjenja pravila And iz sistema C

Treće pravilo liči na modus ponens. $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$ (MPC) (8)

Dokaz: Za izvodjenje pravila MPC $\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$ iz sistema C, potrebno je iz hipoteza

$\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$ i $\alpha \mid\!\sim \beta$ pravila MPC zaključiti $\alpha \mid\!\sim \gamma$ korišćenjem pravila iz sistema C.

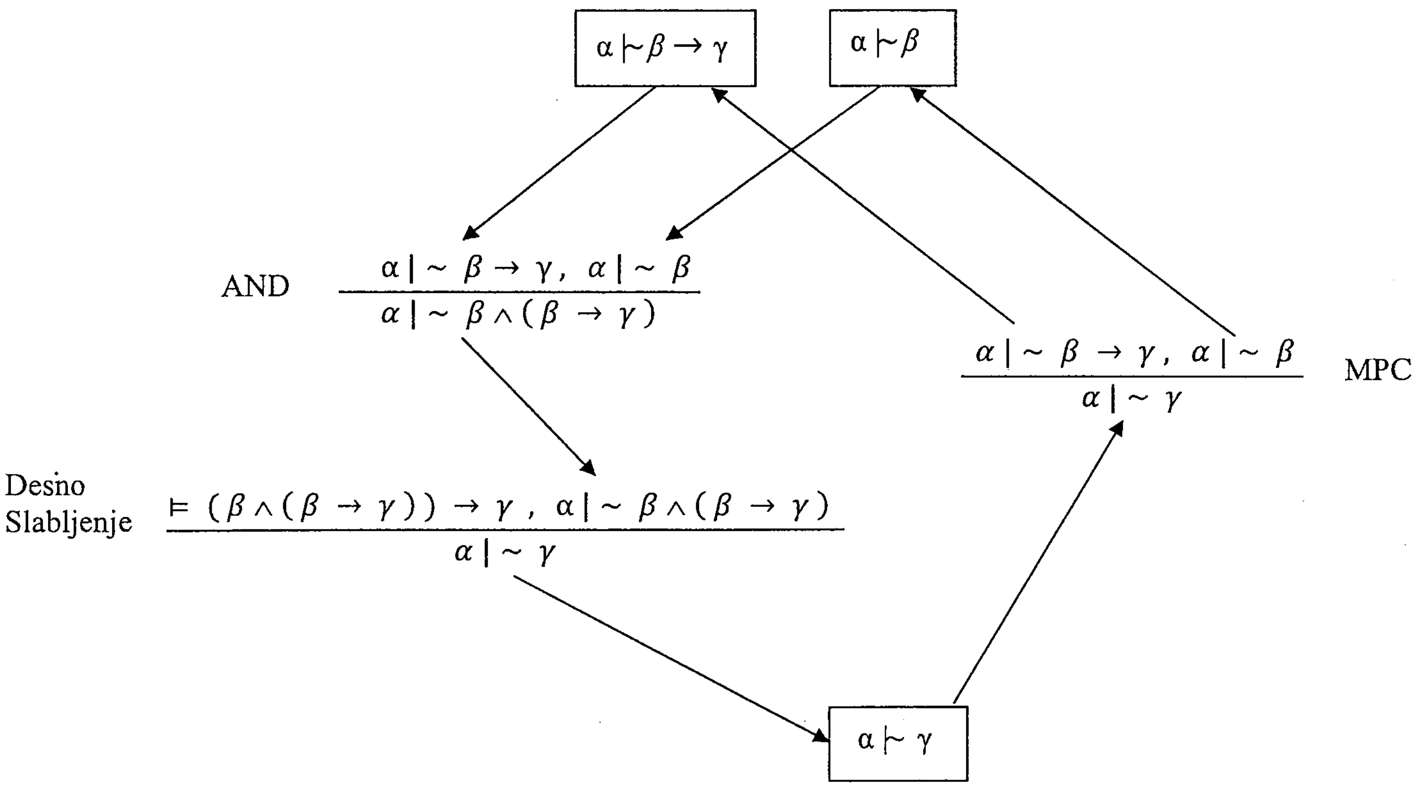
Prvo se koristi pravilo And da bi se iz $\alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma$ i $\alpha \mid\!\sim \beta$ dobilo $\alpha \mid\!\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta \to \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)} \qquad (\text{And})$$

Zatim se na dobijeni rezultat $\alpha \mid\!\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)$, tautologiju $((\beta \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma$ primeni pravilo Desno Slabljenje

$$\frac{\models (\beta \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma,\ \alpha \mid\!\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad (\text{Desno Slabljenje})$$

i dobija se $\alpha \mid\!\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 4. Grafički prikaz izvodjenja pravila MPC iz sistema C

Četvrto pravilo je

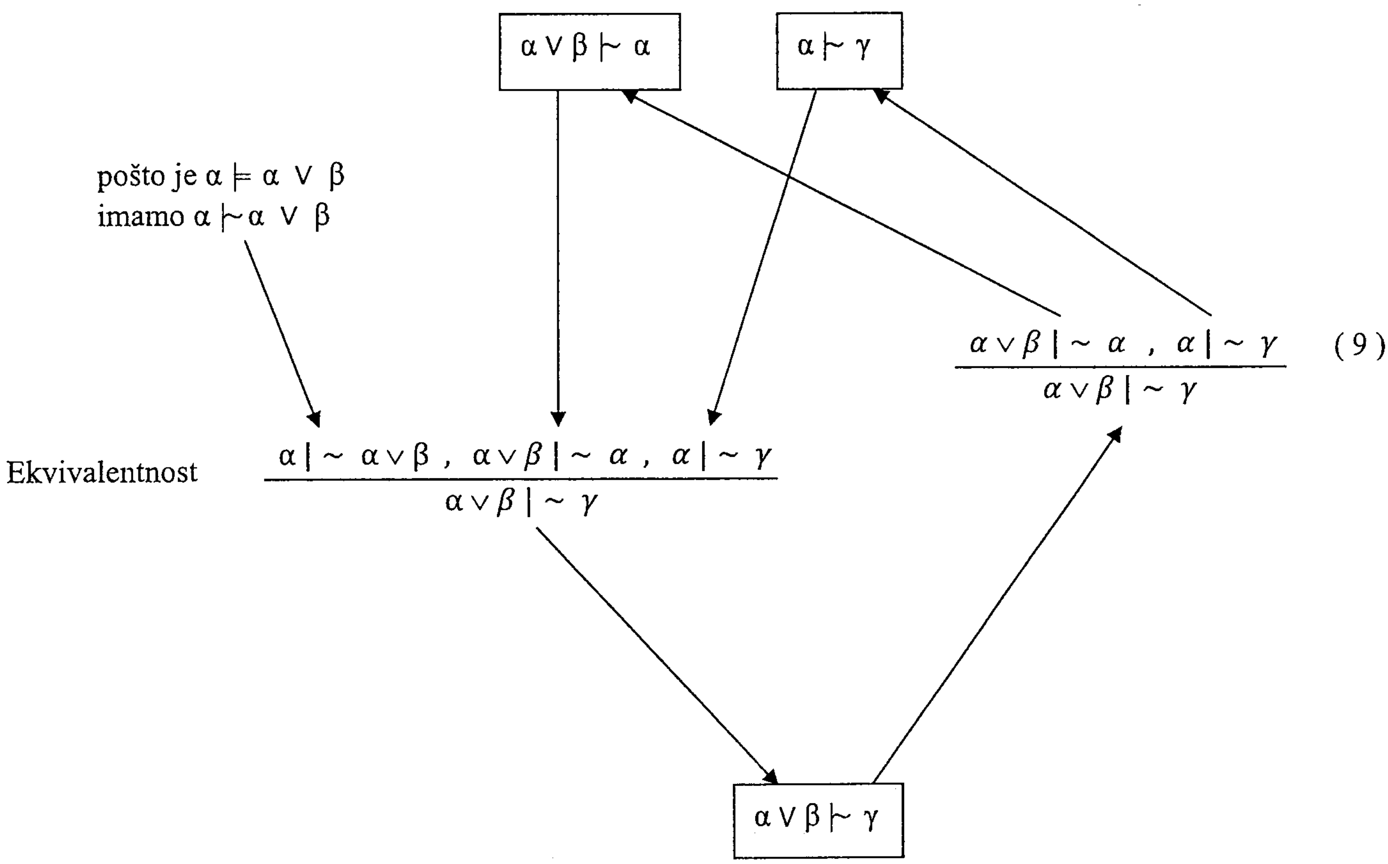
$$\frac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (9)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila (9) $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$ iz sistema C, potrebno je iz

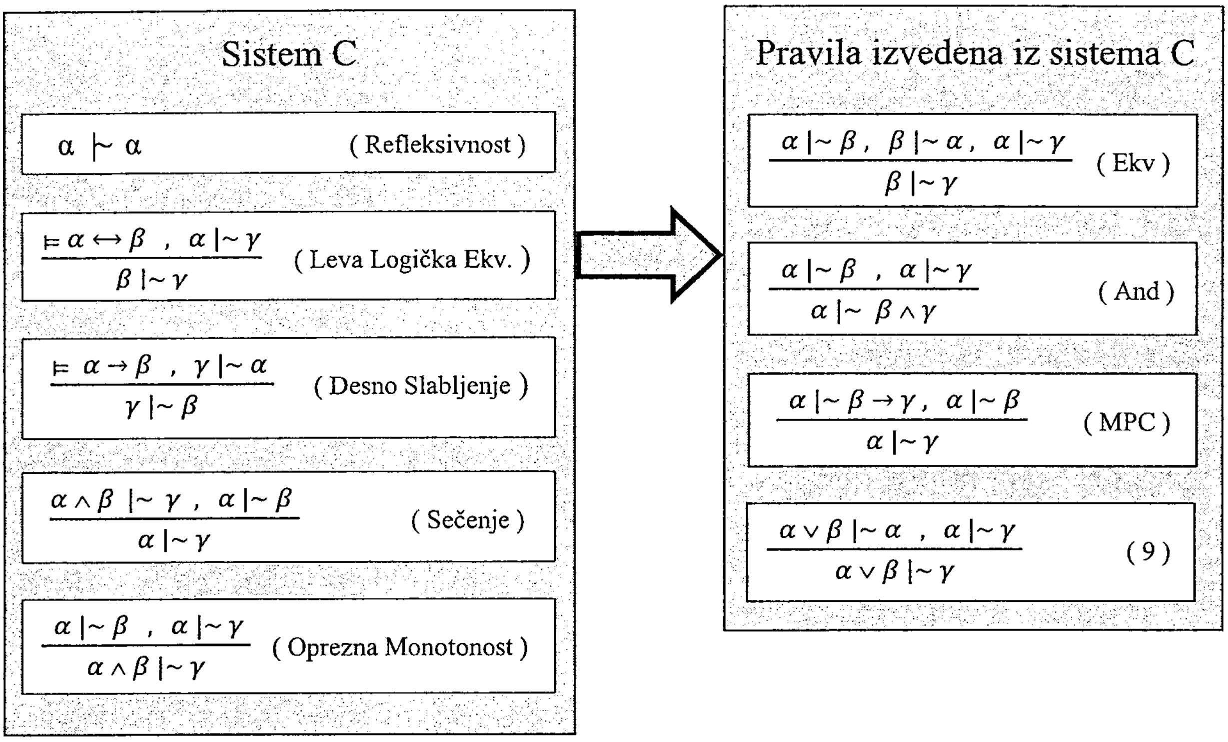
$\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha$ i $\alpha \mid\!\sim \gamma$ zaključiti $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma$ korišćenjem pravila iz sistema C.
Napomena je da, pošto je $\alpha \models \alpha \vee \beta$ sledi da važi $\alpha \mid\!\sim \alpha \vee \beta$.
Na $\alpha \mid\!\sim \alpha \vee \beta$ i hipoteze pravila (9) $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha$ i $\alpha \mid\!\sim \gamma$ primeni se pravilo Ekvivalentnost.

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \alpha \vee \beta \;,\; \alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad (\text{ Ekvivalentnost })$$

Dobija se $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma$ što je i bio cilj. ∎



Slika 5. Grafički prikaz izvodjenja pravila (9) iz sistema C



Slika 6. Sistem C i pravila izvedena iz sistema C.

Sledeća četiri pravila ne mogu biti izvedeni iz sistemu C. Prvo pravilo je Monotonost ili Levo Jačanje.

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{Monotonost} \qquad (10)$$

Pravila Leva Logička Ekvivalencija i Oprezna Monotonost su specijalni slučajevi Monotonosti. Ovo objašnjava ime Oprezna Monotonost.

Drugo pravilo je EHD (Easy Half of Deduction) i odgovara lakšoj polovini teoreme dedukcije.

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{EHD} \qquad (11)$$

Treće pravilo se zove Tranzitivnost.

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{Tranzitivnost} \qquad (12)$$

Četvrto pravilo je Kontrapozicija.

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta}{\neg\beta \mid\sim \neg\alpha} \qquad \text{Kontrapozicija} \qquad (13)$$

U prisustvu pravila iz C, pravila Monotonost, EHD i Tranzitivnost su ekvivalentna.

- Monotonost podrazumeva EHD, koristeći And.
- EHD podrazumeva monotonost.
- Monotonost podrazumeva Tranzitivnost, koristeći Sečenje.
- Tranzitivnost podrazumeva Monotonost.

Lema 1 U prisustvu Leve Logičke Ekvivalencije i Desnog Slabljenja, Kontrapozicija podrazumeva Monotonost.

Dokaz: Dokaz će biti detaljno prikazan u 8. delu koji se zove Monotono Rezonovanje ∎

Monotonost ne podrazumeva Kontrapoziciju čak ni u prisustvu pravila iz sistema C.

4.3 Kumulativni modeli

Sada će biti objašnjen pojam kumulativnog rezonovanja, tj. rezonovanja korišćenjem pravila sistema C. Potrebno je definisati familiju modela bez ikakvih referenci ka pravilima iz C i pokazati kako svaki model definiše relaciju posledice. Zatim treba da pokažemo da svaki model familije definiše kumulativnu relaciju posledice i da je svaka kumulativna relacija posledice definisana nekim modelom familije.

Definicija: **Kumulativni model** je trojka $\langle S, \ell, \prec \rangle$ gde je :

S skup, čiji se elementi zovu stanja. Skup stanja S se sastoji od stanja koja reprezentuju moguća stanja stvari, uključujući možda stanje uma ili znanja agenta. Stanje mogu biti različita kao na primer:

- Stanje da je agent bogat.

- Stanje da je agent siromašan.

- Stanje da je agent bogat i da on zna da je bogat

- Stanje da je agent bogat i da on ne zna da je bogat

- Stanje u kojem je Tviti ptica i da ona leti

- Stanje u kojem je Tviti ptica i da ona ne leti

$\ell : S \to 2^{\mathcal{U}}$ je funkcija koja dodeljuje svakom stanju neprazan skup svih svetova za koje onaj koji rezonuje misli da su mogući u tom stanju. Može se reći i da funkcija ℓ označava svako stanje sa nepraznim skupom svih svetova za koje onaj koji rezonuje misli da su mogući u tom stanju. Sa istim skupom svetova se mogu označiti mnoga različita stanja koja nisu ekvivalenta sa tačke gledišta binarne relacije $\prec$ tj. nisu ekvivalentna u smislu preferenci onoga koji rezonuje.

$\prec$ je binarna relacija na skupu stanja S koji zadovoljava uslov glatkosti. Relacija $\prec$ reprezentuje preference onoga koji rezonuje medju stanjima. Činjenica da je $s \prec t$ znači da je u umu onoga koji rezonuje s preferiran ili više je prirodan od t.

Semantika je ista kao u S5 modalnoj logici. Razmatranje binarne relacije na stanjima koja su označena skupovima svetova, umesto razmatranja binarne relacije na skupovima svetova, daje dodatni stepen slobode u izgradnji modela: a to je upravo ono što je već rečeno da se isti skup svetova može pojaviti na mnogim stanjima tj. sa istim skupom svetova se mogu označiti mnoga stanja koja nisu ekvivalenta sa tačke gledišta binarne relacije $\prec$ tj. nisu ekvivalentna u smislu preferenci onoga koji rezonuje. U daljem tekstu će se umesto termina onaj koji rezonuje koristiti termin agent. Agent prihvata kondicionalnu tvrdnju $\alpha \mid\!\sim \beta$ ako sva ona stanja koja su najviše preferirana medju svim stanjima koja zadovoljavaju α, zadovoljavaju β. Tj. agent je voljan da zaključi β iz α, ako najprirodnija stanja koja zadovoljavaju α, takodje zadovoljavaju i β.

Definicija: Neka je $\prec$ binarna relacija na skupu U. Binarna relacija $\prec$ je asimetričana *akko* $\forall\, s, t \in$ U takve da je $s \prec t$, imamo da $t \not\prec s$.

Definicija iznad u stvari kaže da ako je relacija $\prec$ asimetrična i ako agent preferira stanje s više nego stanje t tj. $s \prec t$ tada agent sigurno ne preferira stanje t više od stanja s.

Definicija: Neka je $V \subseteq U$ i neka je $\prec$ binarna relacija na U.
$t \in V$ je minimalan u V *akko* $\forall s \in V,\ s \not\prec t$.
$t \in V$ je minimum u V *akko* $\forall s \in V$ tako da $s \neq t$, $t \prec s$.

Definicija: Neka $P \subseteq U$ i neka je $\prec$ binarna relacija na U. Kaže se da je P glatak *akko* $\forall t \in P$, ili $\exists s$ minimalno u P, tako da $s \prec t$ ili je t minimalan u P.

Lema 2 Neka je U skup i $\prec$ asimetrična binarna relacija na U. Ako U ima minimum onda je taj minimum jedinstven, to je minimalni element u U i U je glatak.

Informacija da je neko stanje minimalno u skupu stanja govori da je to stanje koje agent najviše preferira u tom skupu stanja. Skup stanja je glatak ako imam minimum tj ako u njemu ima stanje koje agent najviše preferira od svih stanja u tom skupu stanja.

Definicija: Neka je $\langle S, \ell, \prec \rangle$ kumulativni model kao gore. Ako je α formula, Kaže se da stanje $s \in S$ zadovoljava formulu α i pišemo $s \models \alpha$ *akko* za svaki svet $m \in \ell(s)$, $m \models \alpha$.
Skup: $\{ s \mid s \in S,\ s \models \alpha \}$ svih stanja koja zadovoljavaju formulu α označava se sa $\hat{\alpha}$.

Definicija: (uslov glatkosti) Za trojku $\langle S, \ell, \prec \rangle$ se kaže da zadovoljava uslov glatkosti *akko*, $\forall \alpha \in L$, skup $\hat{\alpha}$ je glatak.

Iz definicije iznad je jasno da trojka $\langle S, \ell, \prec \rangle$ zadovoljava uslov glatkosti ako i samo ako za $\forall \alpha \in L$ skup $\hat{\alpha}$ ima minimalno stanje tj. stanje koje agent najviše preferira.

Uslov glatkosti je potreban da obezbedi validnost Oprezne Monotonosti.

U sledećoj definiciji je opisano kako kumulativni model definiše relaciju posledice.

Definicija: Pretpostavimo da je kumulativni model $W = \langle S, \ell, \prec \rangle$ dat. Relacija posledice definisana pomoću W biće označena sa $\mid\!\sim_W$ i definisana sa : $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ *akko* za svako *s* minimalno u $\hat{\alpha}$, $s \models \beta$.

Definicija: Za kumulativni model $\langle S, \ell, \prec \rangle$ se kaže da je **jak kumulativni model** *akko* :

1. Relacija $\prec$ je asimetrična
2. Za svaku formulu α, skup $\hat{\alpha}$ ima minimum.

4.4 Definisanje kumulativnih relacija

U ovoj sekciji je okarakterisana relacija izmedju kumulativnih relacija posledice i kumulativnih modela.

Lema 3 Neka je $W = \langle S, \ell, \prec \rangle$ kumulativni model. Za $\alpha, \beta \in L$, $\widehat{\alpha \wedge \beta} = \hat{\alpha} \cap \hat{\beta}$

Lema 4 (Saglasnost) za svaki kumulativni model W, relacija posledice $\mid\!\sim_W$ koju definiše je kumulativna relacija tj. sva pravila sistema **C** su zadovoljena relacijama posledice definisanim pomoću kumulativnih modela.

Dokaz: Treba razmotriti Sečenje i Opreznu Monotonost. Uslov glatkosti je potreban samo za rukovanje sa Opreznom Monotonosti.

Za Sečenje, pretpostavimo da svi minimalni elementi $\hat{\alpha}$ zadovoljavaju β i svi minimalni elementi $\widehat{\alpha \wedge \beta}$ zadovolajvaju γ. Bilo koji minimalni element $\hat{\alpha}$ zadovoljava β i zbog toga zadovoljava $\alpha \wedge \beta$. Pošto je to minimalno u $\hat{\alpha}$ i $\widehat{\alpha \wedge \beta} \subseteq \hat{\alpha}$, to je takodje minimalno u $\widehat{\alpha \wedge \beta}$.

Za Opreznu Monotonost potreban je uslov glatkosti. Pretpostavimo da je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ i $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$. Mi treba da dokažemo da je $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim_W \gamma$ tj. da za svaki s minimalan u $\widehat{\alpha \wedge \beta}$, $s \models \gamma$. Takav s je u $\hat{\alpha}$. Mi treba da dokažemo da je minimalan u $\hat{\alpha}$. Po uslovu glatkosti, ako nije minimalan, tu će biti neki s' minimalan u $\hat{\alpha}$ takav da je $s' \prec s$, ali $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ zbog toga $s' \models \beta$ i onda $s' \in \hat{\alpha} \cap \hat{\beta}$. Po lemi

3 mi zaključujemo da je s' u $\widehat{\alpha \wedge \beta}$, što je u kontradikciji sa minimalnošću s - a u ovom skupu. Dakle s je minimalan u $\hat{\alpha}$ i pošto je $\alpha \mid\!\sim_W \gamma$, zaključuje se da $s \models \gamma$. ∎

U daljem tekstu će biti dokazano da se za bilo koju datu kumulativnu relaciju $\mid\!\sim$, može izgraditi kumulativni model W koji definiše relaciju posledice $\mid\!\sim_W$ koja je tačno $\mid\!\sim$. Pretpostavimo, stoga da $\mid\!\sim$ zadovoljava pravila iz **C**. Sve definicije će se odnositi na ovu relaciju.

Definicija: Za svet $m \in \mathcal{U}$ se kaže da je normalan svet za α akko $\forall \beta \in L$ takvo da $\alpha \mid\!\sim \beta$, $m \models \beta$

Dakle, svet je normalan za formulu, ako i samo ako zadovoljava sve verodostojne posledice te formule. Očigledno ako relacija posledice zadovoljava Refleksivnost, normalni svet za α zadovoljava α jer ako relacija posledice zadovoljava Refleksivnost tada je $\alpha \mid\!\sim \alpha$ i tada je α verodostojna posledica od α a pošto normalni svet za α zadovoljava sve verodostojne posledice od α tada sledi da normalni svet za α zadovoljava α.

Lema 5 Pretpostavimo da relacija posledice $\mid\!\sim$ zadovoljava Refleksivnost, Desno Slabljenje i And i neka α, $\beta \in L$. Svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β akko $\alpha \mid\!\sim \beta$.

Dokaz: Deo *if* sledi iz definicije za normalne svetove. Sada treba da pokažemo samo *only if* deo. Pretpostavimo da je $\alpha \not\mid\!\sim \beta$, mi treba da izgradimo normalan svet za α koja ne zadovoljava β. Neka je $\Gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \neg\beta \} \cup \{ \delta \mid \alpha \mid\!\sim \delta \}$. Dovoljno je pokazati da je Γ_0 zadovoljavajući. Pretpostavimo da ne, zatim, po pretpostavci kompaktnosti, postoje konačni podskupovi Γ_0 koji nisu zadovoljavajući i stoga postoji konačan skup $D \subseteq \{ \delta \mid \alpha \mid\!\sim \delta \}$ takav da $\models \bigwedge_{\delta \in D} \delta \rightarrow \beta$. Sada je $\models \alpha \rightarrow (\bigwedge_{\delta \in D} \delta \rightarrow \beta)$ i po Refleksivnosti i Desnom Slabljenju $\alpha \mid\!\sim (\bigwedge_{\delta \in D} \delta \rightarrow \beta)$. Ali, koristeći And dobija se $\alpha \mid\!\sim \bigwedge_{\delta \in D} \delta$. Onda, koristeći MPC, zaključuje se $\alpha \mid\!\sim \beta$, kontradikcija. ∎

Definicija: kaže se da je α ekvivalentna β i pišemo $\alpha \sim \beta$ akko $\alpha \mid\!\sim \beta$ i $\beta \mid\!\sim \alpha$.

Lema 6 $\alpha \sim \beta$ akko $\forall \gamma$ $\alpha \mid\!\sim \gamma \Leftrightarrow \beta \mid\!\sim \gamma$. Relacija $\sim$ je stoga neka relacija ekvivalencije.

Dokaz : *if* deo sledi iz Refleksivnosti a *only if* deo iz Ekvivalencije. ∎

Klasa ekvivalencije formule α, pod $\sim$ se označava sa $\bar{\alpha}$.

Definicija: $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ *akko* $\exists \alpha' \in \bar{\alpha}$ takvo da $\beta \mid\!\sim \alpha'$.

Definicija $\leq$ ne zavisi od izbora reprezentacije α i β. Relacija $\leq$ je refleksivna ali nije opšte tranzitivna.

Lema 7 Relacija $\leq$ je asimetrična.

Dokaz : Pretpostavimo da je $\leq$ je simetrična tj. da je $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ i $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$.
Na osnovu prethodne definicije i pretpostavke $\bar{\alpha} \leq \bar{\beta}$ sledi da $\exists \alpha' \in \bar{\alpha}$ takvo da $\beta \mid\!\sim \alpha'$.

Zatim iz $\beta \mid\!\sim \alpha'$ i leme 6 sledi da za bilo koje $\beta'' \in \overline{\beta}$ sledi da $\beta'' \mid\!\sim \alpha'$.
Na isti način iz $\overline{\beta} \leq \overline{\alpha}$ sledi da $\exists \beta' \in \overline{\beta}$ takvo da $\alpha \mid\!\sim \beta'$.
Iz $\alpha \mid\!\sim \beta'$ i leme 6 sledi da za bilo koje $\alpha'' \in \overline{\alpha}$ sledi da $\alpha'' \mid\!\sim \beta'$.
Sada imamo $\beta'' \mid\!\sim \alpha'$ i $\alpha'' \mid\!\sim \beta'$
Po lemi 6 pošto $\beta'' \mid\!\sim \alpha'$ i $\beta'' \sim \beta'$ sledi da $\beta' \mid\!\sim \alpha'$ i pošto $\alpha'' \mid\!\sim \beta'$ i $\alpha'' \sim \alpha'$ sledi da $\alpha' \mid\!\sim \beta'$.
Pošto smo dobili da $\beta' \mid\!\sim \alpha'$ i $\alpha' \mid\!\sim \beta'$ sledi $\alpha' \sim \beta'$.
Zaključujemo da je $\overline{\alpha} = \overline{\beta}$ tj. da je relacija $\leq$ asimetrična. ∎

Kumulativni model W biće definisan na sledeći način: $W \stackrel{def}{=} \langle S, l, \prec \rangle$, gde je:
$S \stackrel{def}{=} L/\sim$ skup svih klasa ekvivalencije formula pod relacijom $\sim$,
$l(\overline{\alpha}) \stackrel{def}{=} \{ m \mid m$ je normalan svet za $\alpha \}$ i
$\overline{\alpha} \prec \overline{\beta}$ akko $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ i $\overline{\alpha} \neq \overline{\beta}$
Funkcija l ne zavisi od izbora reprezentacije formule α i od toga da li je $\prec$ asimetrična.

Lema 8 Za bilo koje $\alpha \in L$ stanje $\overline{\alpha}$ je minimum za $\widehat{\alpha}$.

Dokaz: Pretpostavimo da $s \neq \overline{\alpha}$ i da $s \in \widehat{\alpha}$. Pretpostavka da $s \in \widehat{\alpha}$ podrazumeva, po definiciji $\widehat{\alpha}$ (Ako je α formula, Kaže se da stanje $s \in S$ zadovoljava formulu α i pišemo $s \models \alpha$ *akko* za svaki svet $m \in \ell(s)$, $m \models \alpha$. Skup: $\{ s \mid s \in S,\ s \models \alpha \}$ svih stanja koja zadovoljavaju formulu α se označava sa $\widehat{\alpha}$), da $s \models \alpha$ tj. da svaki svet iz *l(s)* zadovoljava α.
Neka je $s = \overline{\beta}$ tada $l(s) = l(\overline{\beta}) \stackrel{def}{=} \{m \mid m$ je normalan svet za $\beta \}$ odatle sledi da svaki normalni svet za β zadovoljava α. Po lemi 5 sledi $\beta \mid\!\sim \alpha$, i stoga po definiciji relacije $\leq$ sledi da je $\overline{\alpha} \leq \overline{\beta}$ tj sledi da je $\overline{\alpha} \leq s$. Pošto je $s \neq \overline{\alpha}$ i $\overline{\alpha} \leq s$ mi zaključujemo da je $\overline{\alpha} \prec s$ tj. stanje $\overline{\alpha}$ je minimum za $\widehat{\alpha}$ ∎

Lema 9 $\alpha \mid\!\sim \beta$ akko $\alpha \mid\!\sim_W \beta$

Dokaz: Lema 8 i 2 podrazumevaju da je samo $\overline{\alpha}$ minimalno stanje u $\widehat{\alpha}$. Iz definicije relacije posledice definisane pomoću W imamo da $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ *akko* za $\overline{\alpha}$ minimalno u $\hat{\alpha}$, $\overline{\alpha} \models \beta$.
Pošto $\overline{\alpha} \models \beta$ *akko* za svaki svet $m \in \ell(\overline{\alpha})$, $m \models \beta$ i iz definicije kumulativnog modela W imamo da je $l(\overline{\alpha}) \stackrel{def}{=} \{ m \mid m$ je normalan svet za $\alpha \}$ sledi da svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β. Iz leme 5 imamo da svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β akko $\alpha \mid\!\sim \beta$ zaključujemo da $\alpha \mid\!\sim \beta$ ∎

Teorema (Reprezentaciona teorema za kumulativne relacije) Relacija posledice je kumulativna relacija posledice akko je definisana nekim kumulativnim modelom.

Dokaz: Dokaz da je za svaki kumulativni model W, relacija posledice $\mid\!\sim_W$ koju definiše, kumulativna relacija posledice tj. da su sva pravila sistema **C** su zadovoljena relacijama definisanim pomoću kumulativnih modela sledi iz leme 4. *Only if* deo sledi iz konstrukcije W i leme 8 koja prikazuje W kao kumulativni model i leme 9. ∎

Dokazani rezultati reprezentacije kažu da: bilo koja kumulativna relacija posledice je relacija posledice definisana jakim kumulativnim modelom.

Posledica: Neka K bude skup uslovnih tvrdnji i α, $\beta \in L$, sledeći uslovi su ekvivalentni. U slučaju da su tačni kažemo da je $\alpha \mid\!\sim \beta$ kumulativna posledica od **K**.

1. Za sve kumulativne modele **V** takve da $\mid\!\sim_V$ sadrži **K**, $\alpha \mid\!\sim_V \beta$

2. $\alpha \mid\!\sim \beta$ ima dokaz iz K u sistemu C.

Dokaz: Iz leme 4 vidi se da 2) podrazumeva 1). Za drugi smer, pretposatavimo da 2) nije istinita. Najmanja relacija posledice zatvorena pod pravilima **C** koja sadrži K je kumulativna relacija posledice koja ne sadrži $\alpha \mid\!\sim \beta$. Po teoremi 1, postoji kumulativni model koji je definiše. Ovaj model pokazuje da osobina 1) ne važi. ∎

Posledica: Neka je **K** prizvoljna baza znanja tj skup uslovnih tvrdnji. Postoji kumulativni model koji zadovoljava tačno ona tvrdjenja koja su kumulativno izvedena iz **K**.

Posledica: (kompaktnost) Sledeći iskazi su ekvivalentni:

1. $\alpha \mid\!\sim \beta$ je kumulativna posledica od K;
2. $\alpha \mid\!\sim \beta$ je kumulativna posledica konačnog podskupa od K.

Dokaz: (2) $\Longrightarrow$ (1) : očigledno (1) $\Longrightarrow$ (2) : Sva kumulativna izvodjenja su konačna i u svakom koraku koristimo konačno mnogo premisa. Prema tome , u svakom kumulativnom izvodjenju iz K koristimo konačno mnogo elemenata skupa K. ∎

Sistem C je verovatno previše slab da bi bio potpora realističnim sistemima zaključivanja.

5. Kumulativno rezonovanje sa petljom

5.1. Kumulativno uredjeni modeli

Definicija: Kumulativni uredjeni model je kumulativni model u kojem je relacija $\prec$ u strogom parcijalnom uredjenju.

5.2 Logički sistem CL

Pravilo nazvano Petlja engleski Loop, po svojoj formi, je u stvari duplikat tranzitivnosti preferencijalne relacije u modelima. Pravilo Petlja kaže da, ako iskazi mogu biti organizovani u petlju, tako da je svaki verodostojna posledica prethodnog, onda je svaki od njih verodostojna posledica bilo kog od njih tj. oni su svi ekvivalenti u smislu ekvivalentnosti.

Definicija: Sistem CL se sastoji od svih pravila iz C i sledećeg pravila koje se zove Petlja.

$$\frac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1,\ \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k,\ \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_k} \qquad \textbf{(Petlja – eng. Loop)} \qquad (14)$$

Sistem CL

$\alpha \mid\!\sim \alpha$	(Refleksivnost)
$\dfrac{\models \alpha \leftrightarrow \beta\ ,\ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$	(Leva logička Ekvivalencija)
$\dfrac{\models \alpha \rightarrow \beta\ ,\ \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$	(Desno Slabljenje)
$\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$	(Sečenje)
$\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta\ ,\ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$	(Oprezna Monotonost)
$\dfrac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1,\ \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2\ ,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k,\ \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_k}$	(Petlja)

Slika 7. Sistem CL

Za relaciju posledice koja zadovoljava sva pravila CL - a se kaže da je kumulativna sa petljom.

Lema 10 Sledeće pravilo je izvedeno iz CL - a, za bilo koji i , j = 0, ... k.

$$\frac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1,\ \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2,\ .\ .\ .\ ,\ \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k\ ,\ \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_i \mid\!\sim \alpha_j} \qquad (15)$$

Dokaz: Zbog invarijantnosti pretpostavke pod cikličnom permutacijom, zaključak petlje, može biti $\alpha_{i+1} \mid\!\sim \alpha_i$ za bilo koji $i = 0, \ldots, k$. Iz ekvivalencije može da se zaključi $\alpha_i \mid\!\sim \alpha_j$ za bilo koji $i\ ,\ j = 0\ , \ldots, k$. ∎

Sistem CL

$\alpha \mid\!\sim \alpha$	(Refleksivnost)
$\dfrac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$	(Leva logička Ekvivalencija)
$\dfrac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$	(Desno Slabljenje)
$\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \;,\; \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$	(Sečenje)
$\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$	(Oprezna Monotonost)
$\dfrac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1 ,\; \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2 \;, \;.\;.\;.\;,\; \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k ,\; \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_k}$	(Petlja)

Pravila izvedena iz sistema CL

$$\frac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1 ,\; \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2 ,\; .\;.\;.\;,\; \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k \;,\; \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_i \mid\!\sim \alpha_j \,.} \tag{15}$$

Slika 8. Sistem CL i pravila izvedena iz sistema CL

Lema 11 Petlja je validna u svim kumulativnim uredjenim modelima.

Dokaz: Neka je W = $\langle$ S , l, $\prec$ $\rangle$ kumulativni uredjeni model takav da $\alpha_i \mid\!\sim_W \alpha_{i+1}$ za $i = 0, \ldots\ldots, k$ (dodatak je razuman modulo k + 1) i neka $s_0 \in$ S bude minimalno stanje u $\widehat{\alpha_0}$. Treba da pokažemo da $s_0 \models \alpha_k$. Pošto je $\alpha_0 \mid\!\sim_W \alpha_1$ po definiciji $\mid\!\sim_W$ ($\alpha \mid\!\sim_W \beta$ *akko* za svako s minimalno u $\hat{\alpha}$, s $\models \beta$.) sledi da $s_0 \models \alpha_1$ tj. stanje s_0 mora da bude u $\widehat{\alpha_1}$. Po uslovu glatkosti, ako s_0 nije minimalan u $\widehat{\alpha_1}$, onda postoji stanje s_1 minimalno u $\widehat{\alpha_1}$ tako da je $s_1 \prec s_0$. Slično, za svaki $i = 0, \ldots\ldots, k$, postoji stanje s_i minimalno u $\widehat{\alpha_i}$ tako da je $s_i = s_{i-1}$ ili

$s_i \prec s_{i-1}$. Pošto je $\prec$ tranzitivana , $s_k = s_0$ ili $s_k \prec s_0$. Ali s_k je minimalan u $\widehat{\alpha_k}$ i $\alpha_k \vdash_W \alpha_0$, i mi zaključujemo da $s_k \models \alpha_0$ tj da $s_k \in \widehat{\alpha_0}$. Kako je po polaznoj pretpostavci s_0 minimalan u $\widehat{\alpha_0}$ sledi da sigurno nije $s_k \prec s_0$ i sledi zaključak da je $s_k = s_0$ i $s_0 \models \alpha_k$ ∎

5.3 Definisanje kumulativne relacije posledice sa petljom

Može se pokazati da se bilo koja data kumulativna relacija posledice sa petljom $\vdash$ može izgraditi kumulativno uredjenim modelom V tako da je relacija $\vdash_V$ jednaka relaciji $\vdash$. Pretpostavimo da je $\vdash$ takva relacija i da je W = $\langle S , l , \prec \rangle$ kumulativni model izgradjen od $\vdash$. Neka je $\prec^+$ tranzitivno zatvorenje od $\prec$. Prvo treba da pokažemo da, pošto $\vdash$ zadovoljava Petlju, relacija $\prec^+$ je u striktnom parcijalnom uredjenju.

Lema 13 Relacija $\prec^+$ je irefleksivna i dakle strogo parcijalno uredjena.

Dokaz: Pretpostavimo $\bar{\alpha}_0 \prec^+ \bar{\alpha}_0$. Pošto je $\prec$ je asimetričan, ona je ireflexivna i mora da postoji neko $n > 0$ tako da za $i = 0, \ldots.., n$, važi $\bar{\alpha}_i \prec \bar{\alpha}_{i+1}$.
Iz definicije $\prec$ i $\leq$, mi vidimo da, za $i = 0, \ldots , n$ postoje formule α_i' takve da je $\alpha_i \sim \alpha_i'$ i $\alpha_{i+1} \vdash \alpha_i'$. Iz leme 6, mi zaključujemo da je $\alpha_{i+1}' \vdash \alpha_i'$ za $i = 0, \ldots.. , n$.
Uz pomoć pravila Petlja vidimo da je $\alpha_i' \vdash \alpha_{i+1}'$ i stoga $\alpha_{i+1}' \sim \alpha_i'$ i $\alpha_i \sim \alpha_{i+1}$.
Ali ovo je kontradiktorno asimetriji relacije $\prec$. Mi smo pokazali da je relacija $\prec$ irefleksivna.
Pošto je tranzitivna po konstrukciji sledi da je u strogo parcijalnom uredjenju. ∎

Definišimo V $\stackrel{\text{def}}{=} \langle S , l , \prec^+ \rangle$ gde su S , l i $\prec$ kao u definiciji W.

Lema 14 U V, za bilo koje α, stanje $\bar{\alpha}$ je mínimum u $\hat{\alpha}$.
Stoga je V **jak kumulativni uredjeni model**. *(eng. strong cumulative ordered model).*

Dokaz: Lema 8 kaže da je $\bar{\alpha}$ minimum u $\hat{\alpha}$ sa važenjem relacije $\prec$. To je stoga minimum u odnosu na bilo koju slabiju relaciju i posebno u odnosu na relaciju $\prec^+$. Lema 13 podrazumeva da je $\prec^+$ asimetrična, i lemom 2, V zadovoljava uslov glatkosti.

Lema 15 $\alpha \vdash \beta$ akko $\alpha \vdash_V \beta$

Dokaz: Lema 14 podrazumeva da je $\bar{\alpha}$ jedino minimalno stanje u $\hat{\alpha}$,
stoga je $\alpha \vdash_V \beta$ akko svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β, i lema 5 podrazumeva zaključak. ∎

Teorema (Reprezentaciona teorema za kumulativne relacije sa petljom). Relacija posledice je kumulativna relacija sa petljom akko je definisana nekim kumulativnim uredjenim modelom.

6 Preferencijalno rezonovanje

6.1 Logički sistem P

J. Perl i H. Gefner [10] su uveli ovaj sistem kako bi služio kao *konzervativno jezgro (eng. conservative core)* nemonotonih sistema rezonovanja. U hijerarhiji nemonotonih sistema, sistem P je najvažniji sistem. Sistem P je strogo jači od sistema CL i podrazumeva postojanje disjunkcije u jeziku formula. Nazvan je P od engleske reči preferential. Njegova semantika, opisana u sledećoj sekciji 6.2 je varijacija semantike sistema koji je J. Šoham opisao u [11]. Sistem P razlikuje stanja i svetove, dok sistem iz [11] to ne čini.

Definicija: Sistem P se sastoji od svih pravila iz sistema C i pravila OR :

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma, \ \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \textbf{(OR)} \qquad (16)$$

Pravilo OR tvrdi da je svaka formula koja je, ponaosob, moguća (eng. plausible) posledica dve različite formule, takođe *moguća* posledica njihove disjunkcije.

Sistem P

$\alpha \mid\!\sim \alpha$	(Refleksivnost)
$\dfrac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \ , \ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma}$	(Leva Logička Ekvivalencija)
$\dfrac{\models \alpha \rightarrow \beta \ , \ \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta}$	(Desno Slabljenje)
$\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \ , \ \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$	(Sečenje)
$\dfrac{\alpha \mid\!\sim \beta \ , \ \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$	(Oprezna Monotonost)
$\dfrac{\alpha \mid\!\sim \gamma, \ \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma}$	(OR)

Slika 9. Sistem P

Primer: ako mislimo da *ako Dejan dođe na zabavu, normalno, zabava će biti sjajna*, a takođe ako mislimo da i *ako Sandra dođe na zabavu, normalno, zabava će biti sjajna* i čujemo da će bar jedno od njih dvoje doći, normalno je da mislimo da će zabava biti sjajna?

Relacija posledice koja zadovoljava sva pravila iz sistema P naziva se *prioritetnom ili preferencijalnom (eng. preferential).*

Sledeće pravilo je slično težoj polovini teoreme o dedukciji i zove se S. Pravilo S je moguće izvesti iz pravila OR. Pravilo **S** izražava činjenicu da dedukcije izvršene pod jakim pretpostavkama mogu biti korisne čak i ako pretpostavke nisu poznate činjenice.

Lema 16 Kada važe Refleksivnost, Desno Slabljenje i Leva Logička Ekvivalencija, iz pravila OR sledi pravilo S .

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma} \qquad (\mathrm{S}) \qquad (17)$$

S je, prema tome, pravilo izvedeno iz sistema P.

Dokaz: Za izvodjenje pravila S $\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}$ iz sistema P potrebno je iz pretpostavke $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$

zaključiti $\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma$ korišćenjem pravila iz sistema P.

Prvo se koristi tautologija $\gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$, hipoteza $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ i pravilo Desno Slabljenje

$$\frac{\models \gamma \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\ ,\ \alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}$$

Zatim se koristi tautologija $(\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$ i pošto zbog Refleksivnosti važi

$\alpha \wedge \neg \beta \mid\sim \alpha \wedge \neg \beta$ koristi se to i pravilo Desno Slabljenje

$$\frac{\models (\alpha \wedge \neg \beta) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)\ ,\ \alpha \wedge \neg \beta \mid\sim \alpha \wedge \neg \beta}{(\alpha \wedge \neg \beta) \mid\sim (\beta \rightarrow \gamma)}$$

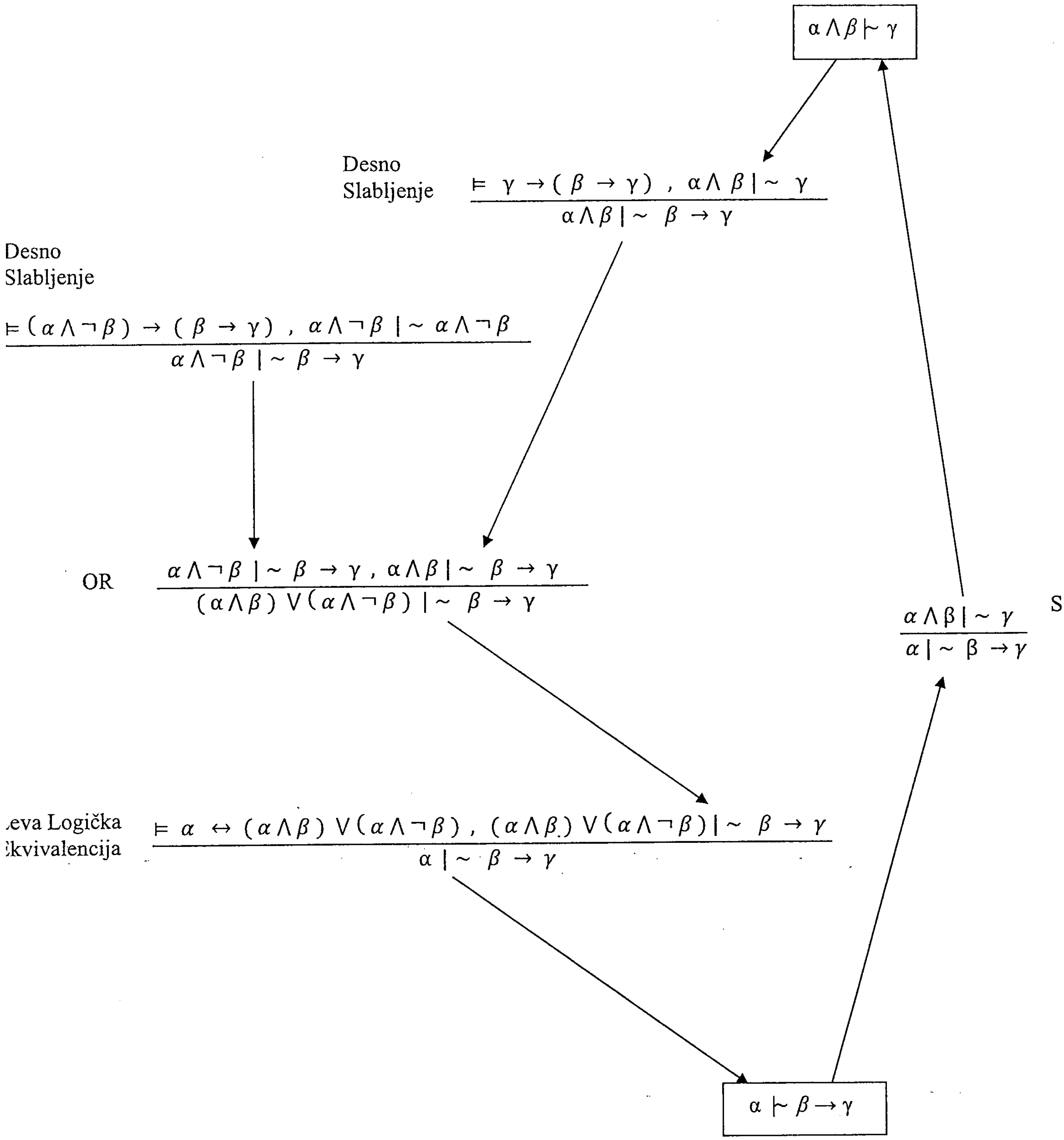
Zatim se na prethodno dobijena dva rezultata primeni pravilo OR

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \rightarrow \gamma\ ,\ \alpha \wedge \neg \beta \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}{(\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg \beta) \mid\sim (\beta \rightarrow \gamma)}$$

Zatim se koristi tautologija $\alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg \beta)$, prethodno dobijeni rezultat i pravilo Leva Logička Ekvivalencija

$$\frac{\models\ \alpha \leftrightarrow (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg \beta)\ ,\ (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \neg \beta) \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}$$

i dobija se $\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 10. Grafički prikaz izvodjenja pravila S iz sistema P

Lema 17 Kada važi pravilo S, pravilo Sečenje je posledica pravila And tj. kada važe pravila Desno Slabljenje, S i AND podrazumeva se pravilo Sečenje.

Dokaz: Za izvodjenje pravila Sečenje $\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma \ , \ \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma}$

potrebno je iz hippoteza $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ i $\alpha \mid\sim \beta$ Zaključiti $\alpha \mid\sim \gamma$.

Prvo se koristi pravilo S i hipoteza $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \to \gamma} \qquad \text{(S)}$$

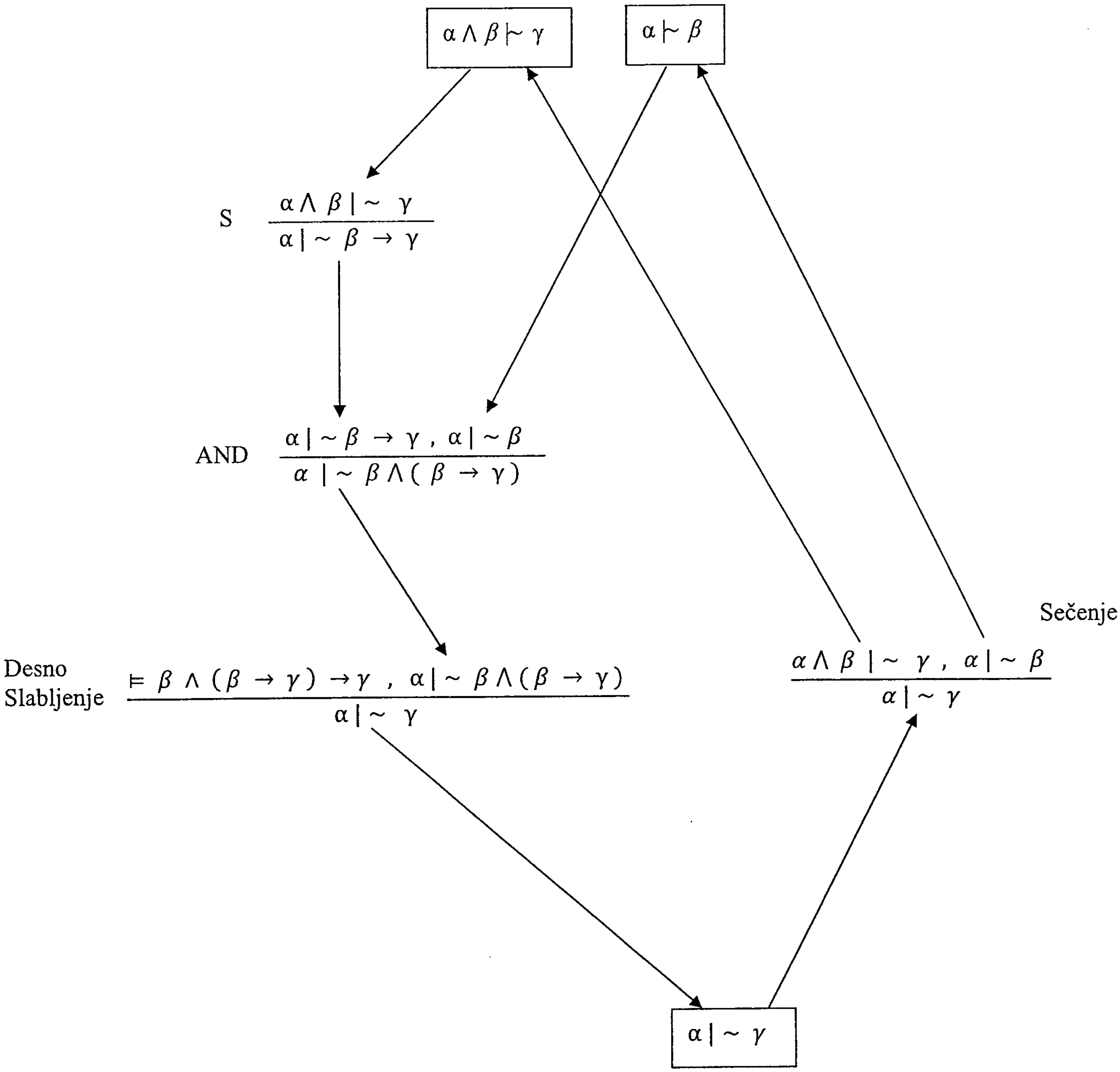
Zatima se koristi hipoteza $\alpha \mid\sim \beta$, rezultat dobijen u prethodnom koraku i pravilo AND

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \alpha \mid\sim \beta \to \gamma}{\alpha \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)} \qquad \text{(AND)}$$

Zatim se koristi tautologija $\models \beta \wedge (\beta \to \gamma) \to \gamma$, rezultat dobijen u prethodnom koraku $\alpha \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)$ i pravilo Desno Slabljenje .

$$\frac{\models \beta \wedge (\beta \to \gamma) \to \gamma \ , \ \alpha \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)}{\alpha \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Desno Slabljenje)}$$

i dobija se $\alpha \mid\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 11. Grafički prikaz izvodjenja pravila Sečenje iz sistema P

Prema tome, Refleksivnost, Leva Logička Ekvivalencija, Desno Slabljenje, And, Oprezna Monotonost i OR predstavljaju ekvivalentnu aksiomatizaciju sistema P.

Sistem P

$$\alpha \mid\!\sim \alpha \qquad \text{(Refleksivnost)}$$

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Leva logička Ekvivalencija)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta} \qquad \text{(Desno Slabljenje)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \wedge \gamma} \qquad \text{(And)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Oprezna Monotonost)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma ,\; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(OR)}$$

Slika 12. Sistem P

Sledeće pravilo je predložio D. Mekinson [8] . Ono izražava princip dokazivanja slučajevima.

$$\frac{\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \gamma \;,\; \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \textbf{(D)} \qquad (18)$$

Ako mislimo da:
Ako Dejan dodje na zabavu i Sandra ne dodje na zabavu, normalno, zabava će biti sjajna.
Takođe ako mislimo da:
Ako Dejan i Sandra dodju na zabavu, normalno, zabava će biti sjajna.
Zatim čujemo da će Dejan doći na zabavu, normalno je da pomislimo: *Da će zabava biti sjajna*?

Lema 18 Pravilo D je pravilo izvedeno iz sistema P

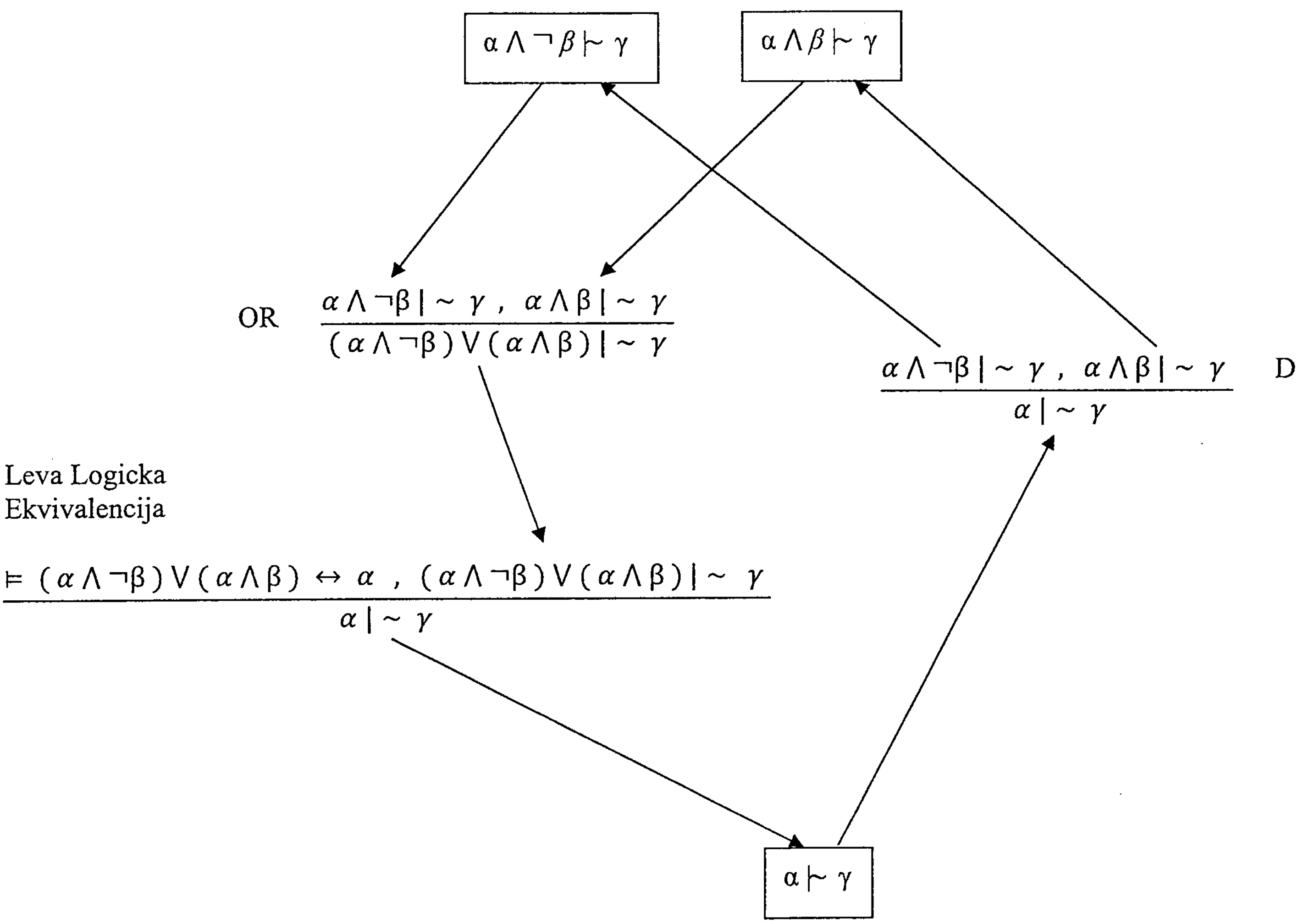
Dokaz: Za izvodjenje pravila D $\dfrac{\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$ iz sistema P prvo se na obe

hipoteze primeni pravilo OR $\dfrac{\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma}$ i dobija se $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma$.

Zatim se na dobijeni rezultat i tautologiju $(\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha$ primeni pravilo

Leva Logička Ekvivalencija $\dfrac{\models (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \leftrightarrow \alpha\ ,\ (\alpha \wedge \neg\beta) \vee (\alpha \wedge \beta) \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$

i dobija se $\alpha \mid\!\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 13. Grafički prikaz izvodjenja pravila D iz sistema P

Sledeća lema prikazuje još četiri pravila koja su izvedena iz sistema P.

Lema 19 Sledeća četiri pravila su izvedena iz sistema P :

$$\frac{\alpha \mid\sim \gamma \;,\; \beta \mid\sim \delta}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma \vee \delta} \qquad (19)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila (19) $\dfrac{\alpha \mid\sim \gamma \;,\; \beta \mid\sim \delta}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma \vee \delta}$ prvo se koristi prva hipoteza $\alpha \mid\sim \gamma$ pravila (19), tautologija $\models \gamma \rightarrow \gamma \vee \delta$ i pravilo Desno Slabljenje $\dfrac{\models \gamma \rightarrow \gamma \vee \delta \;,\; \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma \vee \delta}$

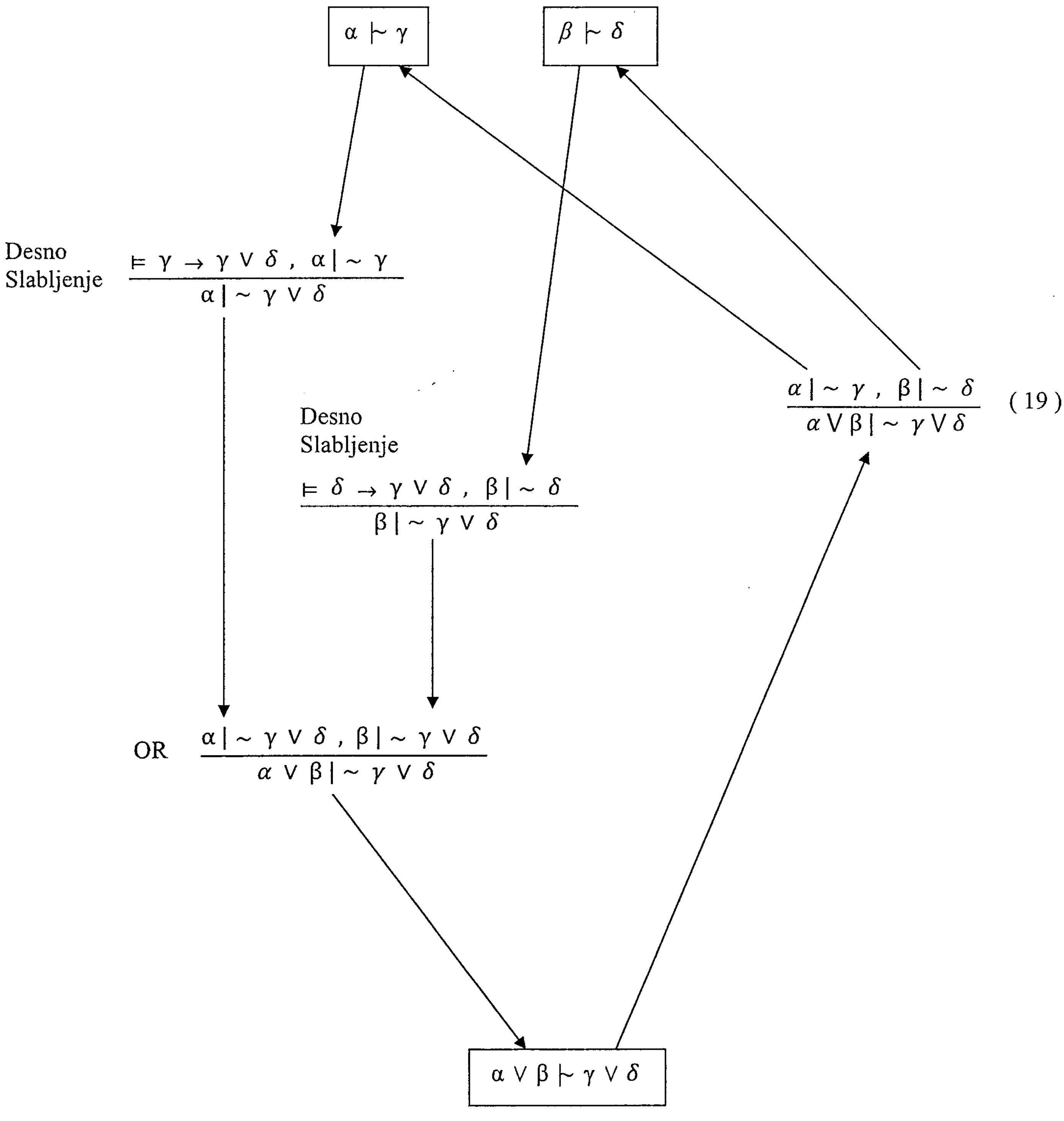
Zatim druga hipoteza $\beta \mid\sim \delta$ pravila (19), tautologija $\models \delta \rightarrow \gamma \vee \delta$ i pravilo Desno Slabljenje

$$\frac{\models \delta \rightarrow \gamma \vee \delta \;,\; \beta \mid\sim \delta}{\beta \mid\sim \gamma \vee \delta}$$

Zatim se na poslednja dva dobijena rezultata $\alpha \mid\sim \gamma \vee \delta$ i $\beta \mid\sim \gamma \vee \delta$ primeni pravilo OR

$$\frac{\alpha \mid\sim \gamma \vee \delta \;,\; \beta \mid\sim \gamma \vee \delta}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma \vee \delta}$$

Dobija se $\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma \vee \delta$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 14. Grafički prikaz izvodjenja pravila (19) iz sistema P

Sledeće pravilo je: $$\frac{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta} \qquad (20)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila (20) $\dfrac{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}$ prvo se iz druge hipoteze $\alpha \mid\!\sim \beta$ i

tautologije $\models (\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha$ koristeći Levu Logičku Ekvivalenciju

$\dfrac{\models (\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{(\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \mid\!\sim \beta}$ dobija $(\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \mid\!\sim \beta$. Koristeći dobijeno $(\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \mid\!\sim \beta$

i pravilo S $\dfrac{(\alpha \vee \gamma) \wedge \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}$ zaključuje se $\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$. Zatim iz prve hipoteze

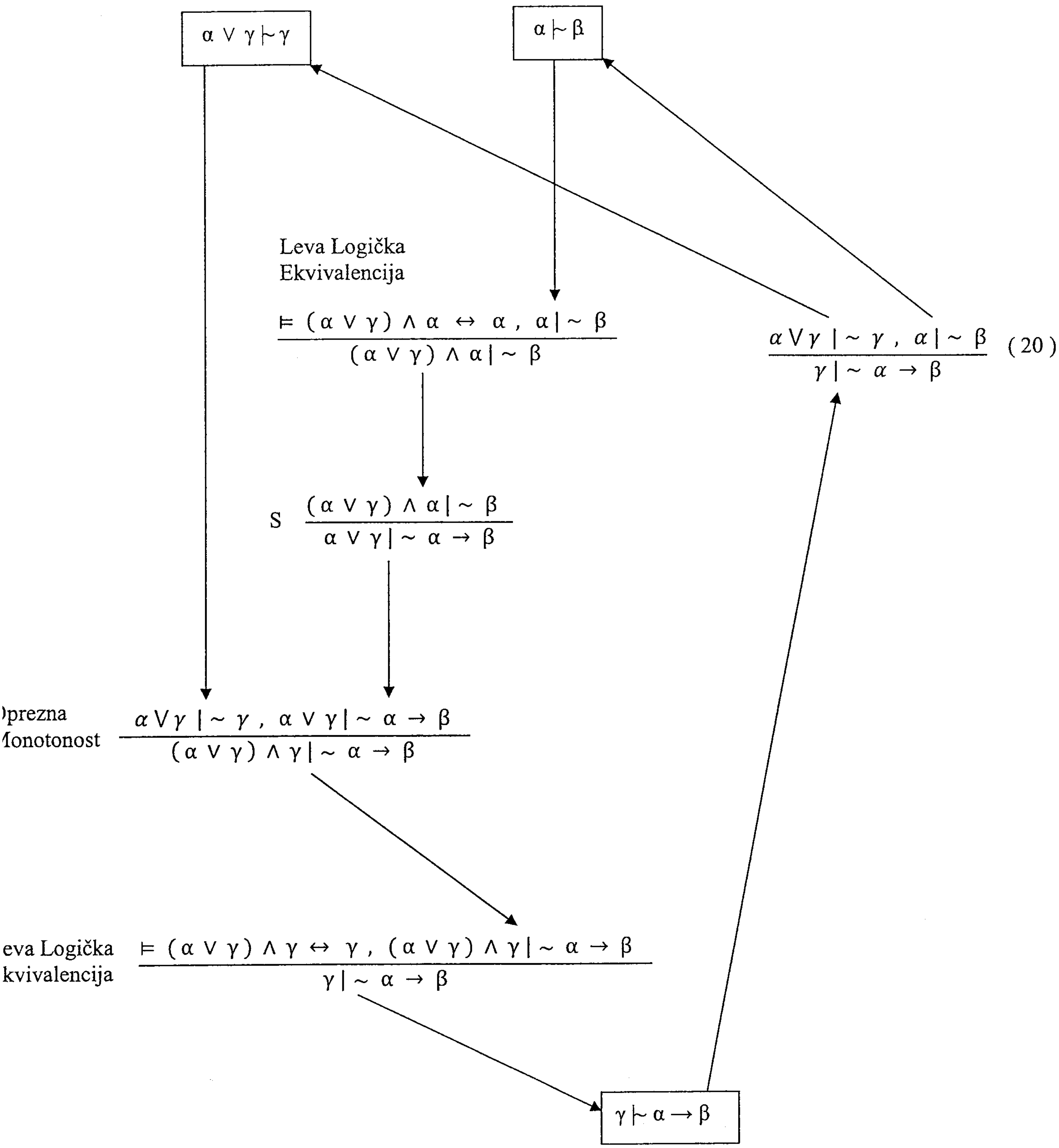
$\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma$ i dobijenog rezultata $\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$ u prethodnom koraku, korišćenjem Oprezne

Monotonosti $\dfrac{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma,\ \alpha \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}{(\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}$ dobija se $(\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$. Zatim iz

tautologije $\models (\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \leftrightarrow \gamma$ i dobijenog rezultata $(\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$ u prethodnom

koraku, korišćenjem Leve Logicke Ekvivalencije $\dfrac{\models (\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \leftrightarrow \gamma\ ,\ (\alpha \vee \gamma) \wedge \gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}{\gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta}$

dobija se $\gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 15. Grafički prikaz izvodjenja pravila (20) iz sistema P

Sledeće pravilo je: $$\frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{\alpha \vee \gamma \mid\sim \alpha} \qquad (21)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila (21) $\frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{\alpha \vee \gamma \mid\sim \alpha}$ koristeći obe hipoteze i pravilo

(19) $\frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta}$ zaključuje se $(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta$. Sada,

koristeći dobijeni zaključak , tautologiju $\models (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \beta \vee \gamma$ i pravilo Leva

Logička Ekvivalencija $\frac{\models (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \beta \vee \gamma\ ,\ (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta}$

Zaključuje se $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta$. Zatim korišćenjem dobijenog zaključka $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta$,

prve hipoteze $\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha$ pravila (21) i pravila (9) $\frac{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta\ ,\ \alpha \vee \beta \mid\sim \alpha}{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha}$

zaključuje se $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha$. Iz prve hipoteze $\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha$ i $\gamma \mid\sim \gamma$, korišćenjem pravila (19)

$\frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \gamma \mid\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \gamma}$ dobija se $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \gamma$. Zatim na dobijeni rezultat $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \gamma$

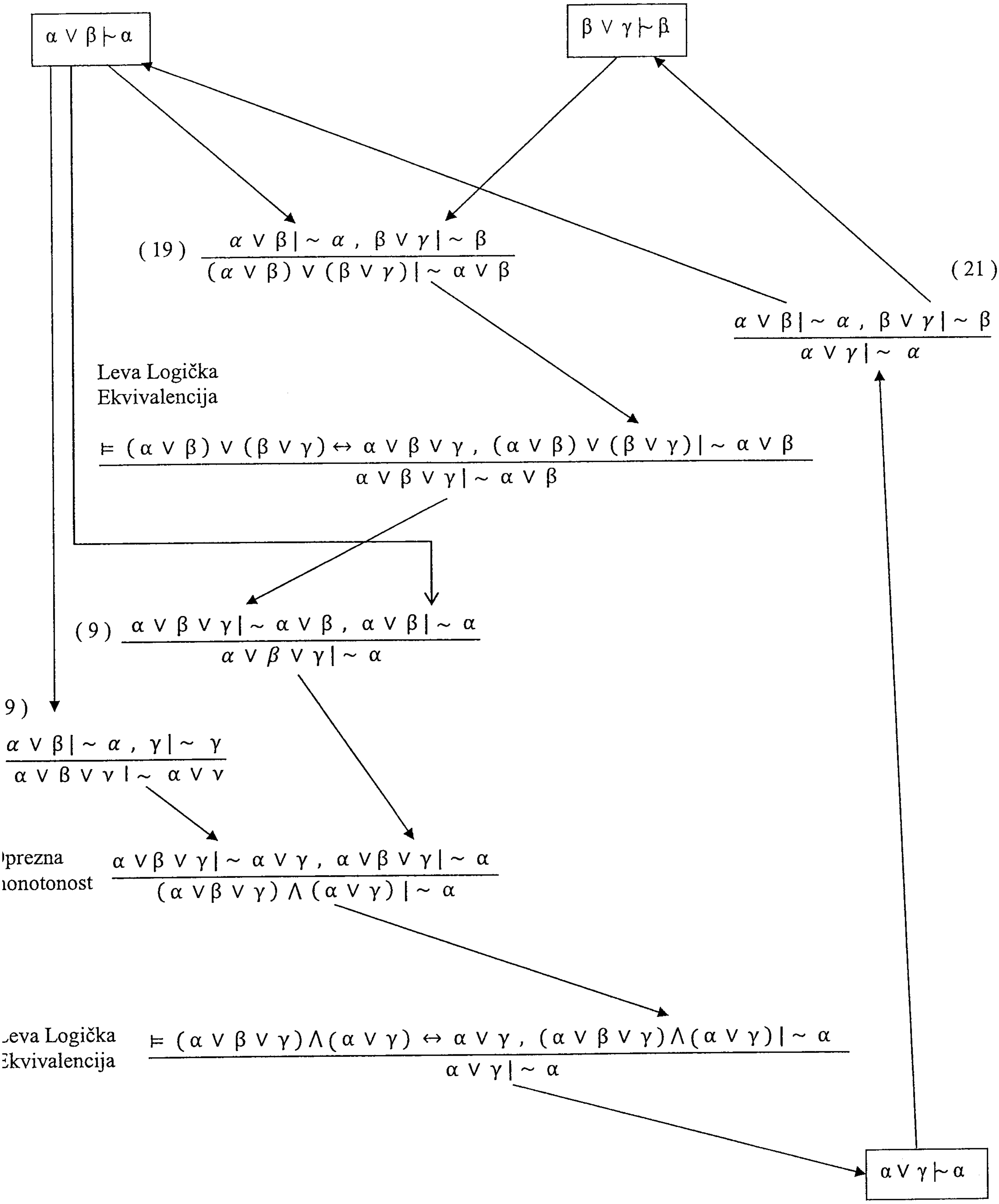
i rezultat koji smo dobili ranije $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha$ primenjuje se pravilo Oprezna Monotonost

$\frac{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \gamma\ ,\ \alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha}{(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma) \mid\sim \alpha}$ i zaključuje se $(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma) \mid\sim \alpha$.

Sada koristeci dobijeni rezultat, tautologiju $\models (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \gamma$ i pravilo Leva

Logicka Ekvivalencija $\frac{\models (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \gamma\ ,\ (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \gamma) \mid\sim \alpha}{\alpha \vee \gamma \mid\sim \alpha}$

Zaključuje se $\alpha \vee \gamma \mid\sim \alpha$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 16. Grafički prikaz izvodjenja pravila (21) iz sistema P

Sledeće pravilo je: $$\frac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma \to \beta} \qquad (22)$$

Dokaz: Za izvodjenje pravila (22) $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma \to \beta}$ iz druge hipoteze $\beta \vee \gamma \mid\sim \beta$,

tautologije $\models \beta \vee \gamma \leftrightarrow (\beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \gamma)$ i Leve Logičke Ekvivalencije

$$\frac{\models \beta \vee \gamma \leftrightarrow (\beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \gamma)\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{(\beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \mid\sim \beta}$$ dobija se $(\beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \mid\sim \beta$.

Iz dobijenog rezultata, koišćenjem pravila S $\dfrac{(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\beta \vee \gamma) \mid\sim \beta}{(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \mid\sim (\beta \vee \gamma) \to \beta}$ dobija se

$(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \mid\sim (\beta \vee \gamma) \to \beta$. Zatim korišćenjem dobijenog rezultata, tautologije

$\models ((\beta \vee \gamma) \to \beta) \to (\gamma \to \beta)$ i pravila Desno Slabljenje

$$\frac{\models ((\beta \vee \gamma) \to \beta) \to (\gamma \to \beta),\ \alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim (\beta \vee \gamma) \to \beta}{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \gamma \to \beta}$$ dobija se $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \gamma \to \beta$.

Iz obe hipoteze, korišćenjem pravila (19) $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta}$

dobija se $(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta$. Na dobijeni rezultat $(\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta$ i

tautologiju $\models (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \beta \vee \gamma$ se primeni Leva Logička Ekvivalencija

$$\frac{\models (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \leftrightarrow \alpha \vee \beta \vee \gamma,\ (\alpha \vee \beta) \vee (\beta \vee \gamma) \mid\sim \alpha \vee \beta}{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta}$$ i dobija se $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\sim \alpha \vee \beta$

.

Zatim se na dobijeni rezultat $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \vee \beta$ i na ranije dobijeni rezultat $\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta$

primeni pravilo Oprezna Monotonost $\dfrac{\alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\!\sim \alpha \vee \beta \;,\; \alpha \vee \beta \vee \gamma \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}{(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}$

i dobija se $(\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta$. Zatim korišćenjem dobijenog rezultata,

tautologije $\models (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow (\alpha \vee \beta)$ i Leve Logičke Ekvivalencije

$$\frac{\models (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \leftrightarrow \alpha \vee \beta \;,\; (\alpha \vee \beta \vee \gamma) \wedge (\alpha \vee \beta) \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}$$

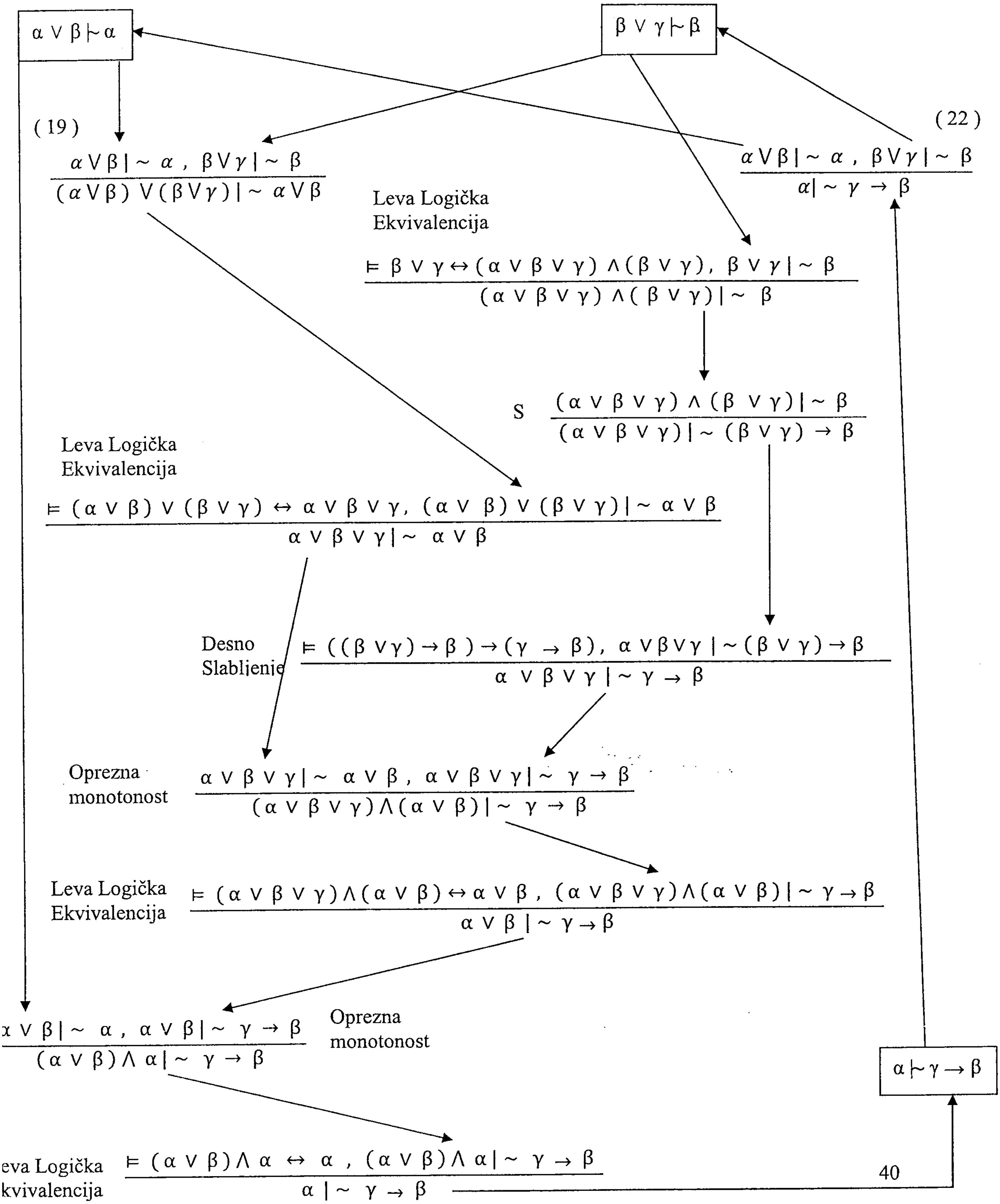
dobija se $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta$. Zatim se na dobijeni rezultat i prvu hipotezu $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha$ pravila (22)

primeni Oprezna Monotonost $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}{(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}$ i dobija se $(\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta$.

Zatim se na dobijeni rezultat i tautologiju $\models (\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha$ primeni pravilo

Leva Logicka Ekvivalencija $\dfrac{\models (\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \leftrightarrow \alpha \;,\; (\alpha \vee \beta) \wedge \alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta}$ i dobija se

$\alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta$ što je i bio cilj izvodjenja ∎



Slika 17. Grafički prikaz izvodjenja pravila (22) iz sistema P

Sistem P

$$\alpha \mid\!\sim \alpha \qquad \text{(Refleksivnost)}$$

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Leva logička Ekv)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \gamma \mid\!\sim \alpha}{\gamma \mid\!\sim \beta} \qquad \text{(Desno Slabljenje)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma \;,\; \alpha \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Sečenje)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \beta \;,\; \alpha \mid\!\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(Oprezna Monotonost)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma ,\; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(OR)}$$

Pravila izvedena iz sistema P

$$\frac{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_1 ,\; \alpha_1 \mid\!\sim \alpha_2 ,\; \ldots ,\; \alpha_{k-1} \mid\!\sim \alpha_k ,\; \alpha_k \mid\!\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\!\sim \alpha_k} \qquad \text{(Petlja)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \beta \rightarrow \gamma} \qquad \text{(S)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \neg\beta \mid\!\sim \gamma \;,\; \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma} \qquad \text{(D)}$$

$$\frac{\alpha \mid\!\sim \gamma \;,\; \beta \mid\!\sim \delta}{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \gamma \vee \delta} \qquad \text{(19)}$$

$$\frac{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma \;,\; \alpha \mid\!\sim \beta}{\gamma \mid\!\sim \alpha \rightarrow \beta} \qquad \text{(20)}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \beta \vee \gamma \mid\!\sim \beta}{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \alpha} \qquad \text{(21)}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \;,\; \beta \vee \gamma \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma \rightarrow \beta} \qquad \text{(22)}$$

Slika 18. Sistem P i pravila izvedena iz sistema P

6.2 Preferencijalni modeli

Preferencijalni modeli su kumulativni uredjeni modeli u kojima su stanja obeležena pojedinačnim svetovima a ne skupovima svetova. Mislilac (eng. reasoner), u suštini, ima prioritete za svetove osim kada isti svet može da obeležava različita stanja.

Definicija: Preferencijalni model W je trojka $\langle S,\ l,\ \prec \rangle$, gde je S skup elemenata koji se nazivaju stanjima, l : S $\mapsto \mathcal{U}$ pridružuje svet svakom stanju, a relacija $\prec$ je strogo parcijalno uređena na S tj. irefleksivna i tranzitivna relacija i W zadovoljava uslov glatkosti iz definicije glatkosti za kumulativni model.

Kod preferencijalnih modela važi da s $\models \alpha$ akko $l(s) \models \alpha$. Uslov glatkosti je ovde samo tehnički uslov neophodan za rukovanje beskonačnim skupovima formula i zadovoljen je u svakom prioritetnom modelu u kome je S konačan ili u kome je $\prec$ dobro zasnovana relacija (tj. nema beskonačnih opadajućih lanaca).

6.3 Definisanje preferencijalnih relacija posledice

Lema 20 Neka je $W = \langle S,\ l,\ \prec \rangle$ preferencijalni model. Za svako $\alpha, \beta \in L$, $\widehat{\alpha \vee \beta} = \widehat{\alpha} \cup \widehat{\beta}$.

Lema 21 (Saglasnost) Za proizvoljni preferencijalni model W, relacija posledice $\mid\sim_W$ koju definiše je preferencijalna relacija, tj. sva pravila sistema P su zadovoljena relacijama definisanim preferencijalnim modelima.

Dokaz: Pošto je preferencijalni model kumulativan, uzimajući u obzir lemu 4 jedino treba proveriti validnost za OR. Pretpostavimo da je dat preferencijalni model $W = \langle S,\ l, \prec \rangle$, kao i $\alpha, \beta, \gamma \in L$. Pretpostavimo da važi $\alpha \mid\sim_W \gamma$ i $\beta \mid\sim_W \gamma$. Svako stanje minimalno u $\widehat{\alpha \vee \beta}$ je, minimalno u skupu $\widehat{\alpha} \cup \widehat{\beta}$ jer je na osnovu leme 20 $\widehat{\alpha \vee \beta} = \widehat{\alpha} \cup \widehat{\beta}$ i prema tome, minimalno u proizvoljnom od podskupova kojima pripada i sledi zaključak da važi $\alpha \vee \beta \mid\sim_W \gamma$. ∎

U cilju dokazivanja reprezentacione teoreme, najpre se definiše relacija među formulama, za koju će se ispostaviti da je refleksivna i tranzitivna (eng. pre-ordering) kad god relacija $\mid\sim$ zadovoljava P.

Definicija: Kažemo da α nije manje obična (eng. Ordinary) nego β i pišemo $\alpha \leq \beta$ akko $\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha$.

Ako bismo zaključili da je α tačno na osnovu toga da je tačno α ili β, ovo bi značilo da prvo nije više neobično nego drugo. Ako $\mid\sim$ zadovoljava Refleksivnost i Levu Logičku Ekvivalenciju, onda za svako $\alpha, \beta \in L$, $\alpha \vee \beta \leq \alpha$.

Lema 22 Ako je relacija $\mid\sim$ preferencijalna , relacija $\leq$ je refleksivna i tranzitivna.

Dokaz: Refleksivnost sledi iz Leve Logičke Ekvivalencije i Refleksivnosti. Tranzitivnost sledi

iz pravila (21) $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\sim \beta}{\alpha \vee \gamma \mid\sim \alpha}$ leme 19. ∎

U nastavku se, do reprezentacione teorema za preferencijalne relacije, pretpostavlja da je relacija $\mid\sim$ preferencijalna.

Lema 23 Ako je $\alpha \leq \beta$ i m je normalan svet za α koji zadovoljava β, onda je m normalan svet za β.

Dokaz: Pretpostavimo da $\beta \mid\!\sim \delta$. Iz $\alpha \leq \beta$ imamo $\beta \vee \alpha \mid\!\sim \alpha$. Kada primenimo pravilo

(20) $\dfrac{\alpha \vee \gamma \mid\!\sim \gamma\ ,\ \alpha \mid\!\sim \beta}{\gamma \mid\!\sim \alpha \to \beta}$ na $\beta \vee \alpha \mid\!\sim \alpha$ i $\beta \mid\!\sim \delta$ imamo $\dfrac{\beta \vee \alpha \mid\!\sim \alpha\ ,\ \beta \mid\!\sim \delta}{\alpha \mid\!\sim \beta \to \delta}$ i

dobijamo $\alpha \mid\!\sim \beta \longrightarrow \delta$. Ako je m normalan za α, on mora zadovoljavati sve verodostojne posledice od α tj mora zadovoljavati $\beta \longrightarrow \delta$, a kako α zadovoljava β, sledi da mora zadovoljavati i δ . Zaključujemo da je m normalan svet za β. ∎

Lema 24 Ako je $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ i m je normalan svet za α koji zadovoljava γ, onda je m normalan svet za β.

Dokaz: Prema lemi 23, dovoljno je pokazati da m zadovoljava β.

Iz $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ imamo $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha$ i $\beta \vee \gamma \mid\!\sim \beta$

Na osnovu pravila (22) $\dfrac{\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha\ ,\ \beta \vee \gamma \mid\!\sim \beta}{\alpha \mid\!\sim \gamma \to \beta}$ imamo $\alpha \mid\!\sim \gamma \longrightarrow \beta$, a kako je m

normalan svet za α on zadovoljava sve verodostojne posledice od α pa sledi da zadovoljava i $\gamma \longrightarrow \beta$. Pošto m zadovoljava γ, on mora zadovoljavati i β. ∎

Sada je moguće opisati preferencijalni model potreban za reprezentacioni rezultat. Polazi se od proizvoljne preferencijalne relacije $\mid\!\sim$. Zatim se razmatra sledeći model: W $\stackrel{\text{def}}{=} \langle S\ ,\ l, \prec \rangle$, gde je

1) S $\stackrel{\text{def}}{=} \{ < m\ , \alpha > \mid m$ *je normalan svet za* $\alpha \}$
2) $l(< m\ , \alpha >) = m$ i
3) $< m , \alpha > \prec < n , \beta >$ akko $\alpha \leq \beta$ i $m \not\models \beta$

Najpre treba pokazati da je W preferencijalni model, tj. da je relacija $\prec$ strogo parcijalno uredjena i da W zadovoljava uslov glatkosti. Zatim će biti pokazano da je relacija $\mid\!\sim_W$ tačno $\mid\!\sim$.

Lema 25 Relacija $\prec$ je strogo parcijalno uređena, tj. ona je irefleksivna i tranzitivna.

Dokaz: Relacija $\prec$ nije refleksivna jer iz $\langle m, \alpha \rangle \prec \langle m, \alpha \rangle$ bi sledilo $m \not\models \alpha$, ali kako je m normalan svet za α i iz definicije normalnih svetova imamo da m zadovoljava sve verodostojne posledice od α a pošto je $\alpha \mid\!\sim \alpha$ zbog Refleksivnosti, sledi da m zadovoljava α tj. da $m \models \alpha$. Zaključujemo da je $\prec$ irefleksivna. Ostaje da se pokaže da je $\prec$ tranzitivna. Pretpostavimo da važi $\langle m_0, \alpha_0 \rangle \prec \langle m_1, \alpha_1 \rangle$ i $\langle m_1, \alpha_1 \rangle \prec \langle m_2, \alpha_2 \rangle$. Po definiciji relacije $\prec$ imamo da je $\alpha_0 \leq \alpha_1$ i $\alpha_1 \leq \alpha_2$. Odatle možemo izvesti dva zaključka. Prvo, na osnovu leme 22 zaključujemo da je $\alpha_0 \leq \alpha_2$. Drugo, pošto je m_0 normalan svet za α_0, koji ne zadovoljava α_1, na osnovu leme 24 zaključujemo da on ne zadovoljava α_2. Zaključujemo da je $\prec$ tranzitivna. ∎

Lema 26 U modelu W, $\langle m\ ,\ \beta \rangle$ je minimalan u $\widehat{\alpha}$ akko $m \models \alpha$ i $\beta \leq \alpha$.

Dokaz: Za deo *if*, pretpostavimo da je $m \models \alpha$ i $\beta \leq \alpha$. Jasno je da $m \in \hat{\alpha}$. Pretpostavimo sada da je $\langle n, \gamma \rangle \prec \langle m, \beta \rangle$ i $n \models \alpha$. Otuda je $\gamma \leq \beta \leq \alpha$, n normalan za γ, $n \not\models \beta$ i $m \models \alpha$, što je u kontradikciji sa lemom 24.
Za deo *only if*, pretpostavimo da je $\langle m, \beta \rangle$ minimalan u $\hat{\alpha}$. Jasno je da $m \models \alpha$. Pretpostavimo da je n normalan svet za $\alpha \vee \beta$ koji ne zadovoljava β (ne tvrdi se da takav normalan svet postoji). Kako je $\alpha \vee \beta \leq \alpha$, to mora biti $\langle n, \alpha \vee \beta \rangle \prec \langle m, \beta \rangle$. Kako je n normalan svet za $\alpha \vee \beta$ koji ne zadovoljava β, to on mora zadovoljavati α, što je u kontradikciji sa pretpostavkom da je $\langle m, \beta \rangle$ minimalan u $\hat{\alpha}$. Zaključujemo da svaki normalan svet za $\alpha \vee \beta$ zadovoljava β. Na osnovu leme 5 sledi $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \beta$. ∎

Sledi dokaz da W zadovoljava uslov glatkosti.

Lema 27 Za svako $\alpha \in L$, $\hat{\alpha}$ je glatko.

Dokaz: Pretpostavimo da $\langle m, \beta \rangle \in \hat{\alpha}$ tj. da $m \models \alpha$. Ako je $\beta \leq \alpha$, onda je, na osnovu leme 26, $\langle m, \beta \rangle$ minimalan u $\hat{\alpha}$ i zaključujemo da je $\hat{\alpha}$ glatko. S druge strane, ako je $\alpha \vee \beta \mid\!\not\sim \beta$, onda, na osnovu leme 5 (Svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β akko $\alpha \mid\!\sim \beta$) , postoji normalan svet n za $\alpha \vee \beta$ takav da $n \not\models \beta$. Kako je $\alpha \vee \beta \leq \beta$ i imamo da $n \not\models \beta$ iz definicije relacije $\prec$ u preferencijalnom modelu W ($<m, \alpha> \prec <n, \beta>$ akko $\alpha \leq \beta$ i $m \not\models \beta$) sledi da je $\langle n, \alpha \vee \beta \rangle \prec \langle m, \beta \rangle$. Pošto je n normalan svet za $\alpha \vee \beta$ a iz Refleksivnosti imamo da $\alpha \vee \beta \mid\!\sim \alpha \vee \beta$ sledi da $n \models \alpha \vee \beta$. Pošto $n \models \alpha \vee \beta$ i $n \not\models \beta$ sledi da $n \models \alpha$. Kako je $\alpha \vee \beta \leq \alpha$ i $n \models \alpha$ na osnovu leme 26 (U modelu W, $\langle m, \beta \rangle$ je minimalan u $\hat{\alpha}$ akko $m \models \alpha$ i $\beta \leq \alpha$) sledi da je $\langle n, \alpha \vee \beta \rangle$ minimalan u $\hat{\alpha}$ i zaključujemo da je $\hat{\alpha}$ glatko. ∎

Pokazano je da je W preferencijalni model. Sada treba pokazati da je $\mid\!\sim_W$ upravo relacija $\mid\!\sim$ od koje se pošlo.

Lema 28 Ako je $\alpha \mid\!\sim \beta$, onda je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$.

Dokaz: Treba pokazati da sva minimalna stanja skupa $\hat{\alpha}$ zadovoljavaju β. Pretpostavimo da je $\langle m, \gamma \rangle$ minimalno u $\hat{\alpha}$. Iz definicije stanja u modelu W m je normalan svet za γ. Iz leme 26 i pretpostavke da je $\langle m, \gamma \rangle$ minimalno u $\hat{\alpha}$ sledi da m zadovoljava α i da je $\gamma \leq \alpha$. Odatle prema lemi 23 sledi da je m normalan svet za α. Pošto normalan svet za α zadovoljava sve verodostojne posledice od α a β je verodostojna posledica od α sledi da m zadovoljava β tj. sledi da prizvoljno stanje $\langle m, \gamma \rangle$ koje smo pretpostavili da je minimalno u $\hat{\alpha}$ zadovoljava β. Zaključujemo da sva minimalna stanja skupa $\hat{\alpha}$ zadovoljavaju β. ∎

Lema 29 Ako je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$, onda je $\alpha \mid\!\sim \beta$.

Dokaz: Sledi iz definicije relacije $\prec$ gde za dati proizvoljni normalan svet m za α, važi da je $\langle m, \alpha \rangle$ minimalan u $\hat{\alpha}$. Ako je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$, svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β, pa na osnovu leme 5 koja kaže da svi normalni svetovi za α zadovoljavaju β akko $\alpha \mid\!\sim \beta$ sledi zaključak da je $\alpha \mid\!\sim \beta$ ∎

Teorema (**Reprezentaciona teorema za preferencijalne relacije**) Relacija posledice je preferencijalna relacija posledice akko je definisana nekim preferencijalnim modelom.

Dokaz: Dokaz da je za proizvoljni preferencijalni model W, relacija posledice $\mid\!\sim_W$ koju definiše taj preferencijalni model, preferencijalna relacija, tj. da su sva pravila sistema P zadovoljena relacijama definisanim preferencijalnim modelima sledi iz leme 21. Za deo *only if*, neka je $\mid\!\sim$ proizvoljna relacija posledice koja zadovoljava gornja pravila i neka je W definisan kao gore. Leme 25 i 27 pokazuju da je W preferencijalni model. Leme 28 i 29 pokazuju da on definiše relaciju posledice koja je upravo $\mid\!\sim$. ∎

6.4 Klasični primeri: Niksonov dijamant i trougao pingvina

Primer: Niksonov dijamant

Pretpostavimo da se baza znanja **K** sastoji od 4 tvrdnje koje slede. Može se čitati *tinejdžer* umesto *t*, *siromašan* umesto *p*, *student* umesto *s* i *zaposlen* umesto *e*.

1. $t \mid\!\sim p$
2. $t \mid\!\sim s$
3. $p \mid\!\sim e$
4. $s \mid\!\sim \neg e$

Nijedno tvrđenje koje bi ličilo na neku vrstu kontradikcije nije preferencijalno podrazumevano u **K**. Posebno, to nisu ni $t \mid\!\sim e$, ni $t \mid\!\sim \neg e$. Na osnovu informacija koje su date, ne može se zaključiti da su tinejdžeri normalno zaposleni, niti se može zaključiti da tinejdžeri normalno nisu zaposleni. Preferencijalno rezonovanje omogućuje neke prilično suptilne zaključke. Na primer, sledeća tvrdjenja se preferencijalno podrazumevaju u **K** : $\top \mid\!\sim \neg t$ normalno, ljudi nisu tinejdžeri, $\top \mid\!\sim \neg (p \wedge s)$ normalno, ljudi nisu siromašni studenti. Sledeće tvrdnje se ne podrazumevaju preferencijalno: $s \mid\!\sim \neg p$ studenti normalno nisu siromašni ili $p \mid\!\sim \neg s$ siromašni ljudi normalno nisu studenti i izgleda da nema dovoljno informacija u **K** kako bi se one opravdale. Primer tvrdnje koja nije preferencijalno podrazumevana u **K**, ali bi verovatno trebalo da sledi iz **K** je: $a \wedge p \mid\!\sim e$, jer se *a* ne pominje u K.

Primer: Trougao pingvina.

Pretpostavimo da naša baza znanja **K** sadrži tri tvrdnje koje slede. Može se čitati pingvin umesto *p*, leti umesto *f* i ptica umesto *b*.

1. $p \mid\!\sim b$
2. $p \mid\!\sim \neg f$
3. $b \mid\!\sim f$

Vidi se da, opisivanjem podesnih preferencijalnih modela, nijedno tvrđenje koje bi vodilo nekoj vrsti kontradikcije nije preferencijalno podrazumevano u **K**. Posebno, to nije $p \mid\!\sim f$. S druge strane, sledeća tvrđenja su preferencijalno podrazumevana u **K**.

1. $p \wedge b \mid\!\sim \neg f$
2. $f \mid\!\sim \neg p$
3. $b \mid\!\sim \neg p$
4. $b \vee p \mid\!\sim f$
5. $b \vee p \mid\!\sim \neg p$

Ovde ne nastaju problemi višestrukog proširenja (eng. multiple extension) i preferencijalno rezonovanje ispravno odabira najspecifičniju informaciju i efektivno sprečava podrazumevanu primenu manje specifičnih informacija.

Primer: Sada će primer o pingvinima biti razmotren, pokušavajući da se objasni kako nemonotono rezonovanje izvodi ispravne zaključke iz nekonzistentne baze podataka:
Neka se u bazi znanja nalaze sledeće informacije:

1. pingvini su ptice,
2. ptice uglavnom lete,
3. pingvini ne lete i
   da je neka konkretna životinja koju posmatramo ptica.

Kao što možemo da primetimo sa stanovišta klasične logike ova baza znanja nije konzistentna ako zanemarimo kvalifikator uglavnom, jer za bilo kog konkretnog pingvina zaključujemo da leti jer su pingvini ptice, a ptice lete i da ne leti jer pingvini ne lete, pa je time ova baza podataka neupotrebljiva. Medjutim, iz ugla nemonontonog rezonovanja koje pokušava da oponaša svakodnevno zaključivanje, možemo zaključiti da naša životinja, pošto je ptica leti. Ako bi se naknadno pojavio podatak da je reč o pingvinu, taj zaključak bi trebalo preispitati, odbaciti i izvesti novi da ne leti. Primer ilustruje elemente nemonotonog zaključivanja iz nekonzistentne baze podataka. Najpre je, iz nekonzistentne baze znanja koja sadrži skup opštih pravila *ptice uglavnom lete* koja imaju izuzetke *pingvini su ptice* i *pingvini ne lete*, izveden prihvatljiv zaključak, da bi zatim, nakon pristizanja novih informacija, on bio poništen.

Od velike važnosti je definisnje zahteva koje nemonotoni sistemi treba da ispune. Neki od tih zahteva su:

1. Kada postoji nezavisna argumentacija i za neki zaključak i za njegovu negaciju, ne bi trebalo zaključiti ni jedno ni drugo.

2. Na zaključke ne treba da utiče dodavanje irelevantnih podataka, na primer informacija da je neka ptica plava, ne treba da poništi zaključak o sposobnosti ptice da leti.

3. Prvo se donose zaključci na osnovu opštijih znanja a zatim na osnovu specifičnijih podataka se radi revizija donetih zaključaka, kao u primeru o pingvinima.

4. Kada nema specifičnijih znanja koja odbacuju opštija pravila tada se primenjuju opštija pravila iako mogu postojati neka specifična znanja koja utiču na neka druga opšta pravila, na primer pravilo *ptice imaju glavu* treba da bude primenljivo i na pingvine, iako su pingvini specifične ptice koje ne lete.

5. Forma zapisivanja baze znanja ne treba da utiče na zaključivanje tj. zaključivanje ne treba da zavisi od forme zapisivanja baze znanja.

6.5 Hornove formule

U ovoj sekciji će biti pokazano da, ako se razmatraju samo tvrđenja restriktivnog tipa takozvane Hornove formule, tada sistem P nije jači od sistema CL. Radi jednostavnije notacije, pretpostavlja se da je L iskazni jezik.

Definicija: Formula $\alpha \mid\!\sim \beta$ naziva se Hornovom formulom akko je formula α konjunkcija nula ili više iskaznih promenljivih a posledica β je ili jedna iskazna promenljiva ili formula **netačno**.

Lema 30 Ako je W kumulativni uređeni model, tada postoji preferencijalni model V takav da se $\mid\!\sim_W$ i $\mid\!\sim_V$ podudaraju sve dok se radi o Hornovim formulama.

Dokaz: Neka je W model $\langle S,\ l, \prec \rangle$. Definisaćemo V da bude model $\langle S,\ l', \prec \rangle$, gde je l' definisano na sledeći način. Za svako $s \in S$ i za svaku iskaznu promenljivu p, $l'(s) \models p$ akko za svako $u \in l(s)$, $u \models p$, drugim rečima akko $s \models p$ u W. Jasno je da, ako je α konjunkcija iskaznih promenljivih, tada se skupovi $\widehat{\alpha}$ u W i V podudaraju. Dakle, ako W zadovoljava uslov glatkosti, zadovoljava ga i V i $\mid\!\sim_W$ i $\mid\!\sim_V$ se slažu sa Hornovim formulama. ∎

Teorema Neka je **K** baza znanja koja sadrži samo Hornove formule, i $\mathcal{A}$ Hornova formula. Ako se tvrđenje $\mathcal{A}$ može izvesti iz **K** u sistemu P, onda se ono može izvesti i iz **K** u sistemu CL.

Dokaz: Pretpostavimo da se $\mathcal{A}$ ne može izvesti u CL. Prema teoremi reprezantacije za kumulativnu relaciju sa petljom, postoji kumulativni uređeni model W koji zadovoljava sva tvrđenja iz **K**, ali ne zadovoljava $\mathcal{A}$. Prema lemi 30, postoji preferencijalni model V koji zadovoljava **K**, ali ne zadovoljava $\mathcal{A}$. Zaključujemo, na osnovu dela o saglasnosti reprezentacione teoreme za preferencijalne relacije, da $\mathcal{A}$ ne može biti izvedeno u P. ∎

7 Kumulativno monotono rezonovanje

7.1 Logički sistem CM

Definicija: Sistem CM sadrži sva pravila iz sistema C i pravilo Monotonost $\dfrac{\models \alpha \rightarrow \beta \ , \ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma}$

Za relaciju posledice koja zadovoljava sva pravila iz CM se kaže da je kumulativno monotona.

Sistem CM je striknto jači od sistema CL, ali neuporediv sa sistemom P. Jači je od sistema CL jer se iz njega može izvesti paravilo Petlja čijim se dodavanjem na sistem C dobija sistem CL.

Sistem CM

$\alpha \mid\sim \alpha$ (Refleksivnost)

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \ , \ \alpha \mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma} \quad \text{(Leva Log Ekv)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \ , \ \gamma \mid\sim \alpha}{\gamma \mid\sim \beta} \quad \text{(Desno Slabljenje)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma \ , \ \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma} \quad \text{(Sečenje)}$$

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma} \quad \text{(Oprezna Mon.)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \ , \ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma} \quad \text{(Monotonost)}$$

Pravila izvedena iz sistema CM

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma} \quad \text{(EHD – Easy Half of Deduction)}$$

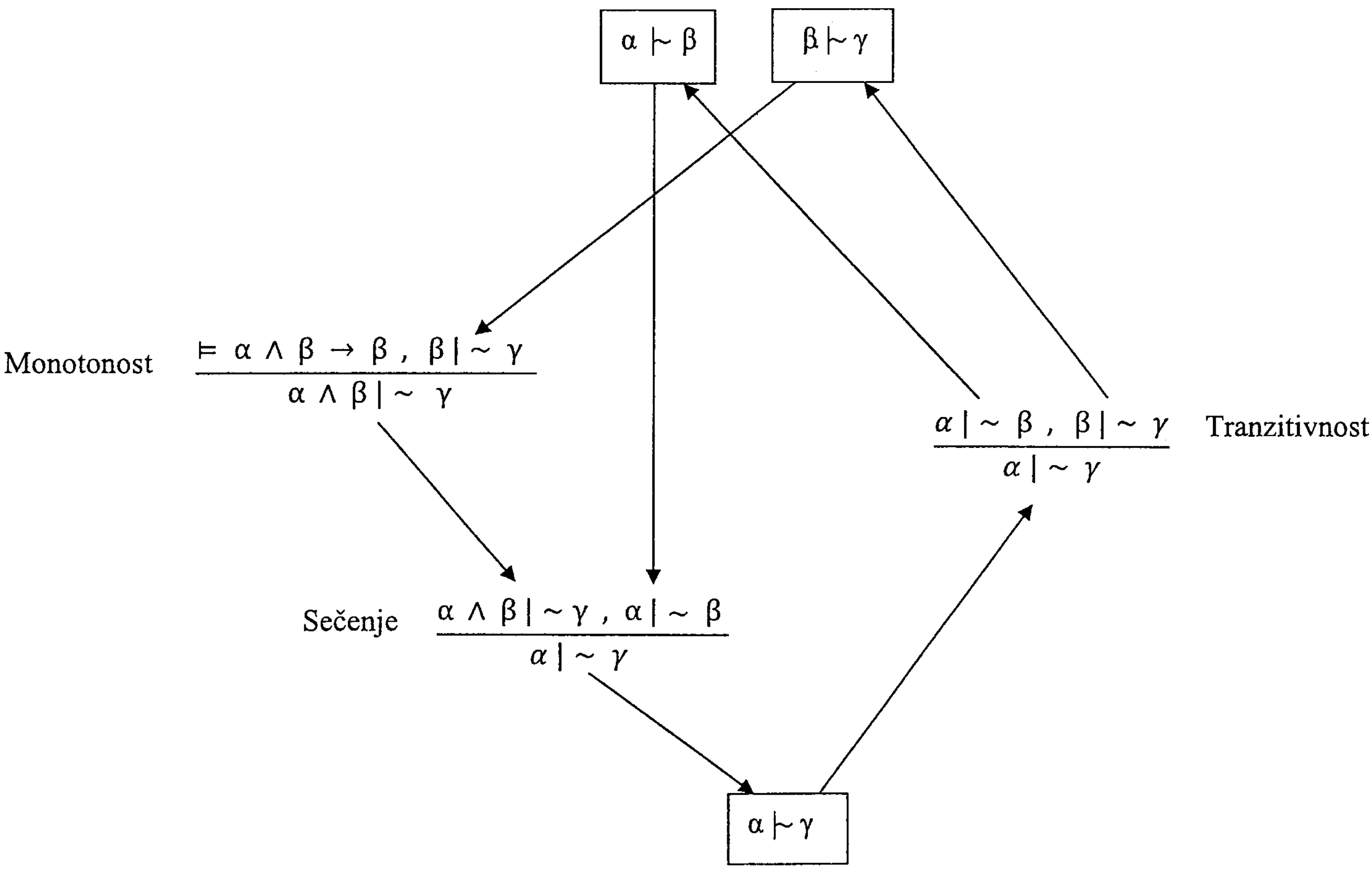
$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \ , \ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma} \quad \text{(Tranzitivnost)}$$

$$\frac{\alpha_0 \mid\sim \alpha_1 , \ \alpha_1 \mid\sim \alpha_2 , \ \ldots , \ \alpha_{k-1} \mid\sim \alpha_k , \ \alpha_k \mid\sim \alpha_0}{\alpha_0 \mid\sim \alpha_k} \quad \text{(Petlja)}$$

Slika 19. Sistem CM i pravila izvedena iz sistema CM

Ranije u tekstu je navedeno da su u prisustvu pravila iz C, pravila Monotonost, EHD i Tranzitivnost ekvivalenta i odatle se vidi da su EHD i Tranzitivnost izvedena pravila iz sistema CM .

Dokaz: Za izvodjenje pravila Tranzitivnost $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta\ ,\ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma}$ iz sistema CM prvo se iz druge hipoteze $\beta \mid\sim \gamma$ i tautologije $\models \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta$ koristeći pravilo Monotonost $\dfrac{\models \alpha \wedge \beta \rightarrow \beta\ ,\ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}$ dobija $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$. Koristeći dobijeni rezultat $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$, Prvu hipotezu $\alpha \mid\sim \beta$ i pravilo Sečenje $\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma\ ,\ \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma}$ dobija se $\alpha \mid\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja. ∎



Slika 20. Grafički prikaz izvodjenja pravila Tranzitivnost iz sistema CM

Dokaz: Za izvodjenje pravila EHD $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta \to \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}$ iz sistema CM prvo se iz hipoteze

$\alpha \mid\sim \beta \to \gamma$ i tautologije $\alpha \wedge \beta \to \alpha$ koristeći pravilo Monotonost $\dfrac{\models \alpha \wedge \beta \to \alpha \ , \ \alpha \mid\sim \beta \to \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \to \gamma}$

dobija $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \to \gamma$.

Zatim na osnovu prvila Refleksivnost imamo da je $\alpha \wedge \beta \mid\sim \alpha \wedge \beta$. Kotisteći to , tautologiju

$\alpha \wedge \beta \to \beta$ i previlo Desno Slabljenje $\dfrac{\models \alpha \wedge \beta \to \beta \ , \ \alpha \wedge \beta \mid\sim \alpha \wedge \beta}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta}$ dobijamo $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta$.

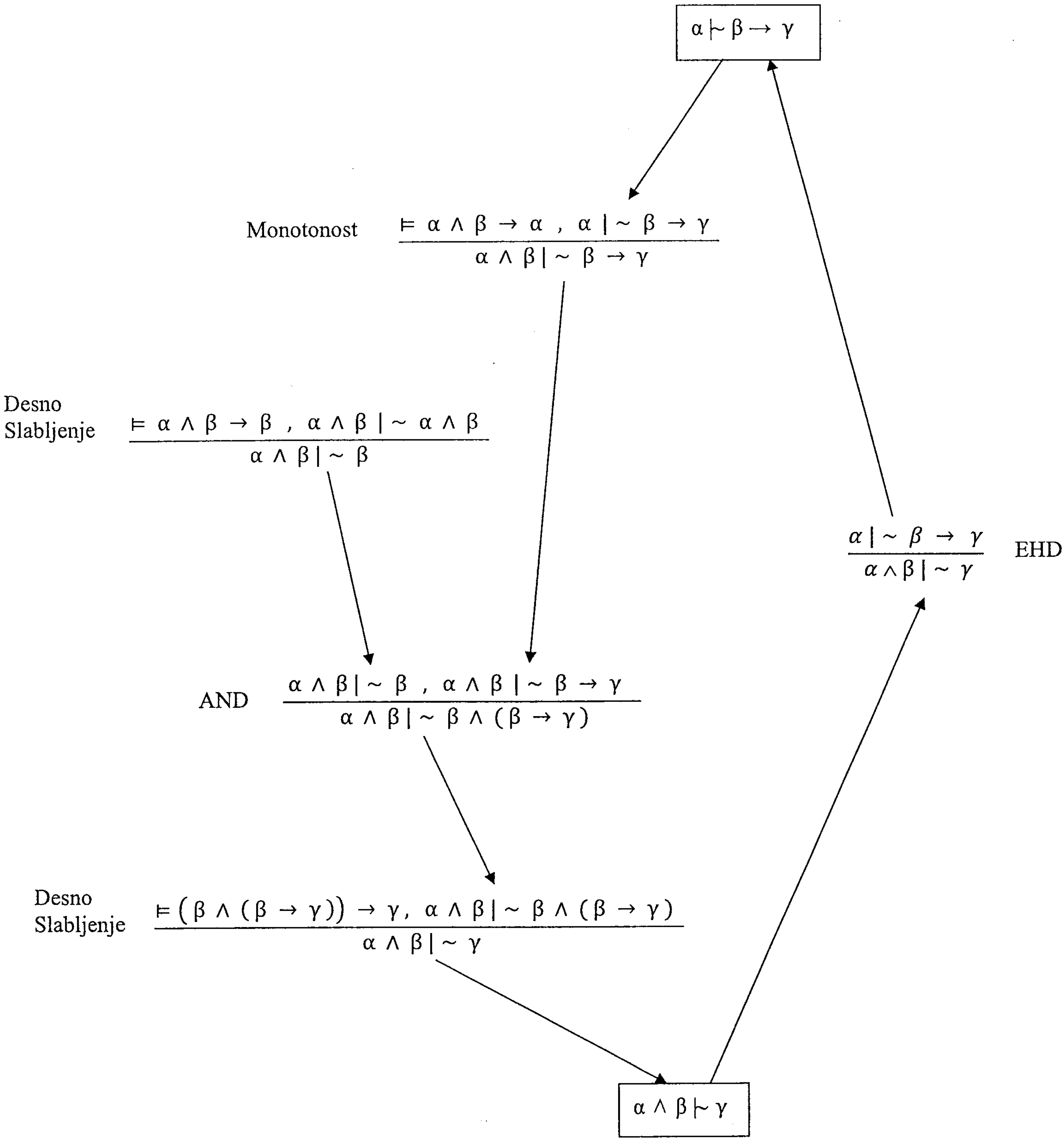
Zatim se na poslednji rezultat $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta$ i rezultat dobijen u prvom koraku $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \to \gamma$

primeni pravilo AND $\dfrac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \ , \ \alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \to \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)}$ i dobija se $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)$

Zatim korišćenjem dobijenog rezultata $\alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)$, tautologije $(\beta \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma$ i

pravila Desno Slabljenje $\dfrac{\models (\beta \wedge (\beta \to \gamma)) \to \gamma, \ \alpha \wedge \beta \mid\sim \beta \wedge (\beta \to \gamma)}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma}$

dobija se $\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma$ što je i bio cilj izvodjenja . ∎



Slika 21. Grafički prikaz izvodjenja pravila EHD iz sistema CM

Kao što je već navedeno očigledno je da je Petlja takodje izvedeno pravilo CM - a (tranzitivnošću). Postoje preferencijalni modeli koji ne zadovoljavaju Monotonost i sledi zaključak da je CM striktno jači od CL - a i nije slabiji od sistema P.

7.2 Jednostavni kumulativni modeli

Definicija: Kumulativni model će biti nazvan jednostavan kumulativni model ako je binarna relacija $\prec$ na njegovim stanjima prazna.

Jednostavan kumulativni model je kumulativno uredjen model. Uslov glatkosti je uvek zadovoljen u takvom modelu. Relacija posledice definisana bilo kojim jednostavnim kumulativnim modelom zadovoljava Monotonost. Postoje jednostavni kumulativni modeli koji ne zadovoljavaju izvesne instance pravila Or. Sledi zaključak da su P i CM neuporedivi. Takodje se mogu naći takvi modeli koji ne zadovoljavaju izvesne instance Kontrapozicije.

7.3 Definisanje monotonih kumulativnih relacija posledice

Teorema (Reprezentaciona teorema za kumulativno monotone relacije)
Relacija posledice je kumulativno monotona akko je definisana nekim jednostavnim kumulativnim modelom.

Dokaz: Pokazano je gore da je *if* deo trivijalan. Za *only if* deo, pretpostavimo da je $\mid\!\sim$ relacija posledice koja zadovoljava pravila iz sistema CM. Neka je W $\stackrel{\text{def}}{=} \langle A, \ell, \emptyset \rangle$, gde je $A \subseteq L$ skup svih formula α takvih da $\alpha \mid\!\not\sim \bot$ i $\ell(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \{ m \mid m$ je normlan svet za $\alpha \}$. Lema 5 podrazumeva da su sve oznake ne - prazne.
Po lemi 5, za bilo koju formulu α, $\hat{\alpha} = \{ \beta \mid \beta \mid\!\sim \alpha \}$. Pošto su sva stanja iz $\hat{\alpha}$ minimalna u $\hat{\alpha}$, vidi se da je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ akko je za sve γ takve da $\gamma \mid\!\sim \alpha$ i svi normalni svetovi m za γ, $m \models \beta$.
Po lemi 5 ovaj poslednji uslov je ekvivalnetan sa $\gamma \mid\!\sim \beta$ i imamo: $\alpha \mid\!\sim_W \beta$ akko za bilo koji γ, $\gamma \mid\!\sim \alpha \Rightarrow \gamma \mid\!\sim \beta$. Pretpostavimo da je $\alpha \mid\!\sim \beta$, uzmimo bilo koju γ tako da $\gamma \mid\!\sim \alpha$, mi imamo po Tranzitivnosti, izvedeno pravilo iz CM, $\gamma \mid\!\sim \beta$. Stoga je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$.
Pretpostavimo sada da je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$, onda, uzimajući da je $\gamma = \alpha$ vidi se da je $\alpha \mid\!\sim \beta$. ∎

8 Monotono rezonovanje

8.1 Logički sistem M

Definicija: Sistem M sadrži sva pravila iz sistema C i pravilo Kontrapozicija $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta}{\neg\beta \mid\sim \neg\alpha}$.

Za relaciju posledice koja zadovoljava sva pravila iz sistema M kaže se da je monotona.

Sistem M

$$\alpha \mid\sim \alpha \qquad \text{(Refleksivnost)}$$

$$\frac{\models \alpha \leftrightarrow \beta \;,\; \alpha \mid\sim \gamma}{\beta \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Leva Logička Ekvivalencija)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \gamma \mid\sim \alpha}{\gamma \mid\sim \beta} \qquad \text{(Desno Slabljenje)}$$

$$\frac{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma \;,\; \alpha \mid\sim \beta}{\alpha \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Sečenje)}$$

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta \;,\; \alpha \mid\sim \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Oprezna Monotonost)}$$

$$\frac{\alpha \mid\sim \beta}{\neg\beta \mid\sim \neg\alpha} \qquad \text{(Kontrapozicija)}$$

Pravila izvedena iz M

$$\frac{\alpha \mid\sim \gamma ,\; \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma} \qquad \text{(OR)}$$

$$\frac{\models \alpha \rightarrow \beta \;,\; \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \mid\sim \gamma} \qquad \text{(Monotonost)}$$

Slika 22. Sistem M i pravila izvedena iz sistema M

Ranije u tekstu je navedena lema 1 koja kaže da u prisustvu Leve Logičke Ekvivalencije i Desnog Slabljenja, Kontrapozicija podrazumeva Monotonost. Sada sledi detaljno izvodjenje pravila Monotonost iz sistema M.

Dokaz: Za izvodjenje pravila Monotonost $\dfrac{\models \alpha \to \beta \;,\; \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$ iz sistema M ,

potrebno je iz hipoteza $\models \alpha \to \beta$ i $\beta \mid\!\sim \gamma$ zaključiti $\alpha \mid\!\sim \gamma$ korišćenjem pravila iz sistema M.

Prvo se koristi druga hipotezu $\beta \mid\!\sim \gamma$ i pravilo Kontrapozicija: $\dfrac{\beta \mid\!\sim \gamma}{\neg \gamma \mid\!\sim \neg \beta}$

Zatim se na dobijeni rezultat $\neg \gamma \mid\!\sim \neg \beta$ i tautologiju $\neg\beta \to \neg\alpha \vee \neg\beta$ primeni

pravilo Desno Slabljenje $\dfrac{\models \neg\beta \to \neg\alpha \vee \neg\beta \;,\; \neg\gamma \mid\!\sim \neg \beta}{\neg\gamma \mid\!\sim \neg\alpha \vee \neg\beta}$

Zatim se na dobijeni rezultat primeni Kontrapozicija $\dfrac{\neg\gamma \mid\!\sim \neg \alpha \vee \neg \beta}{\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \mid\!\sim \neg \neg\gamma}$

Zatim se na dobijeni rezultat $\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \mid\!\sim \neg \neg\gamma$ i tautologiju $\neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \beta$

primeni Leva Logička Ekvivalencija $\dfrac{\models \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \leftrightarrow \alpha \wedge \beta \;,\; \neg(\neg \alpha \vee \neg \beta) \mid\!\sim \neg \neg \gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \neg \neg \gamma}$

Zatim se na dobijeni rezultat i tautologiju $\neg \neg\gamma \to \gamma$ primeni pravilo Desno Slabljenje

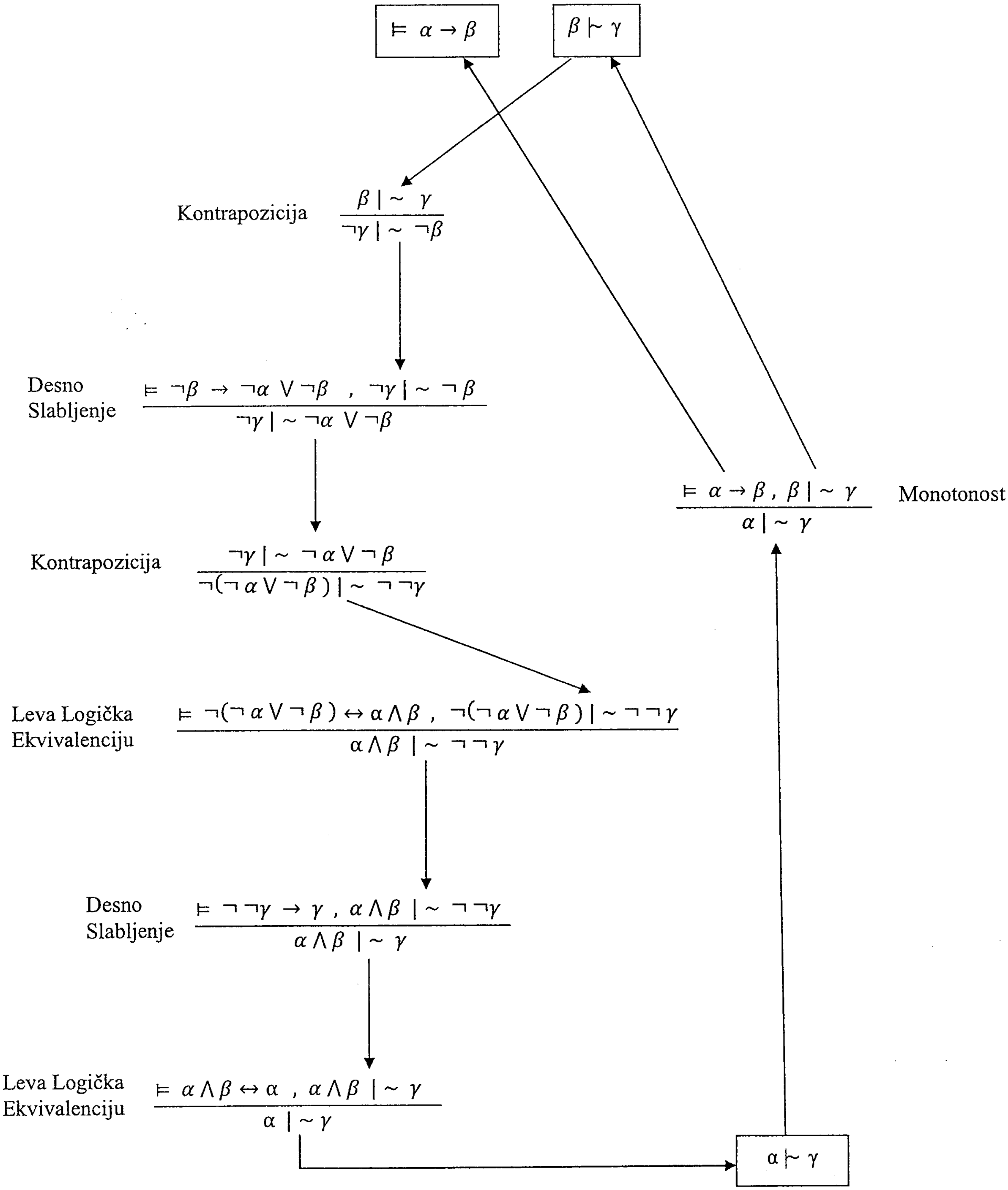
$\dfrac{\models \neg \neg\gamma \to \gamma \;,\; \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \neg \neg\gamma}{\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}$ i dobijamo $\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$.

Zatim iz prve hipoteza $\models \alpha \to \beta$ pravila Monotonost sledi da važi $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha$ tj.

sledi da je $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha$ tautologija. Korišćenjem rezultata dobijenog u prethodnom koraku

$\alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma$, činjenice da je $\alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha$ tautologija i pravila Leva Logička Ekvivalencija

$\dfrac{\models \alpha \wedge \beta \leftrightarrow \alpha \;,\; \alpha \wedge \beta \mid\!\sim \gamma}{\alpha \mid\!\sim \gamma}$ dobija se $\alpha \mid\!\sim \gamma$ što je i bio cilj. ∎



Slika 23. Grafički prikaz izvodjenja pravila Monotonost iz sistema M

Lema 31 Pravilo Or je izvedeno pravilo iz sistema M.

Dokaz: Za izvodjenje pravila OR $\dfrac{\alpha \mid\sim \gamma,\ \beta \mid\sim \gamma}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma}$ iz sistema M ,

potrebno je iz hipoteza $\alpha \mid\sim \gamma$ i $\beta \mid\sim \gamma$ zaključiti $\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma$ korišćenjem pravila iz sistema M.

Prvo se primeni pravilo Kontrapoziciju na obe hipoteze $\dfrac{\alpha \mid\sim \gamma}{\neg\gamma \mid\sim \neg \alpha}$ i $\dfrac{\beta \mid\sim \gamma}{\neg\gamma \mid\sim \neg \beta}$

Zatim se na dobijene rezultate primeni pravilo AND $\dfrac{\neg\gamma \mid\sim \neg \alpha\ ,\ \neg\gamma \mid\sim \neg \beta}{\neg\gamma \mid\sim \neg \alpha \wedge \neg \beta}$

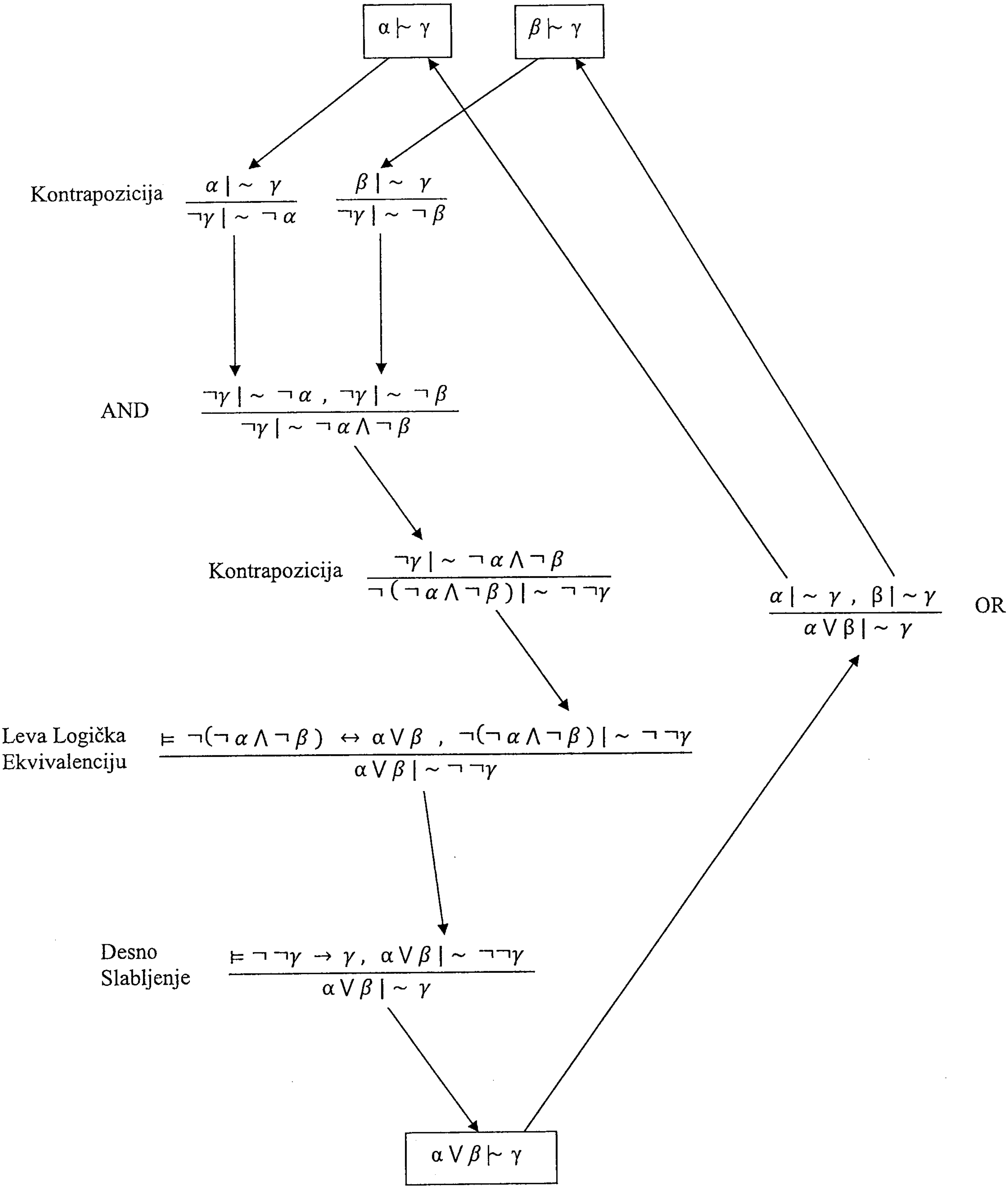
Zatim se na dobijeni rezultat primeni pravilo Kontrapozicija $\dfrac{\neg\gamma \mid\sim \neg \alpha \wedge \neg \beta}{\neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \mid\sim \neg \neg\gamma}$

Zatim se na dobijeni rezultat i tautologiju $\models \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \leftrightarrow \alpha \vee \beta$ primeni pravilo

Leva Logička Ekvivalencija $\dfrac{\models \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \leftrightarrow \alpha \vee \beta\ ,\ \neg(\neg \alpha \wedge \neg \beta) \mid\sim \neg \neg\gamma}{\alpha \vee \beta \mid\sim \neg \neg\gamma}$

Zatim se na dobijeni rezultat i tautologiju $\models \neg \neg\gamma \rightarrow \gamma$ primeni pravilo

Desno Slabljenje $\dfrac{\models \neg \neg\gamma \rightarrow \gamma,\ \alpha \vee \beta \mid\sim \neg\neg\gamma}{\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma}$ i dobija se $\alpha \vee \beta \mid\sim \gamma$ što je i bio cilj. ∎



Slika 24. Grafički prikaz izvodjenja pravila OR iz sistema M

Pošto iz sistema M možemo izvesti pravilo OR i pravilo Monotonost sledi da je sistem M striktno jači od sistema P i CM.

Lema 32 Relacija posledice je monotona akko zadovoljava Refleksivnost, Desno Slabljenje, Monotonost, And i Or.

Dokaz: *only if* deo sledi iz lema 1 i 31. Za *if* deo, primetimo, prvo, da su Leva Logička Ekvivalencija i Oprezna Monotonost specijalni slučajevi Monotonosti. Sada treba

pokazati da Kontrapozicija $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta}{\neg\beta \mid\sim \neg\alpha}$ može biti izvedena iz sistema P i pravila Monotonost.

Pretpostavimo da je $\alpha \mid\sim \beta$. Na osnovu pravila S $\dfrac{\alpha \mid\sim \beta}{\top \mid\sim \alpha \to \beta}$ zaključujemo $\top \mid\sim \alpha \to \beta$.

Na dobijeni rezultat $\top \mid\sim \alpha \to \beta$ i tautologiju $(\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha)$ se primeni pravilo

Desno Slabljenje $\dfrac{\models (\alpha \to \beta) \to (\neg\beta \to \neg\alpha),\ \ \top \mid\sim \alpha \to \beta}{\top \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha}$ i dobija se $\top \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$.

Zatima se na dobijeni rezultat $\top \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$ i tautologiju $\top \wedge \neg\beta \to \top$ primeni pravilo

Monotonost $\dfrac{\models \top \wedge \neg\beta \to \top\ ,\ \ \top \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha}{\top \wedge \neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha}$ i dobija se $\top \wedge \neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$.

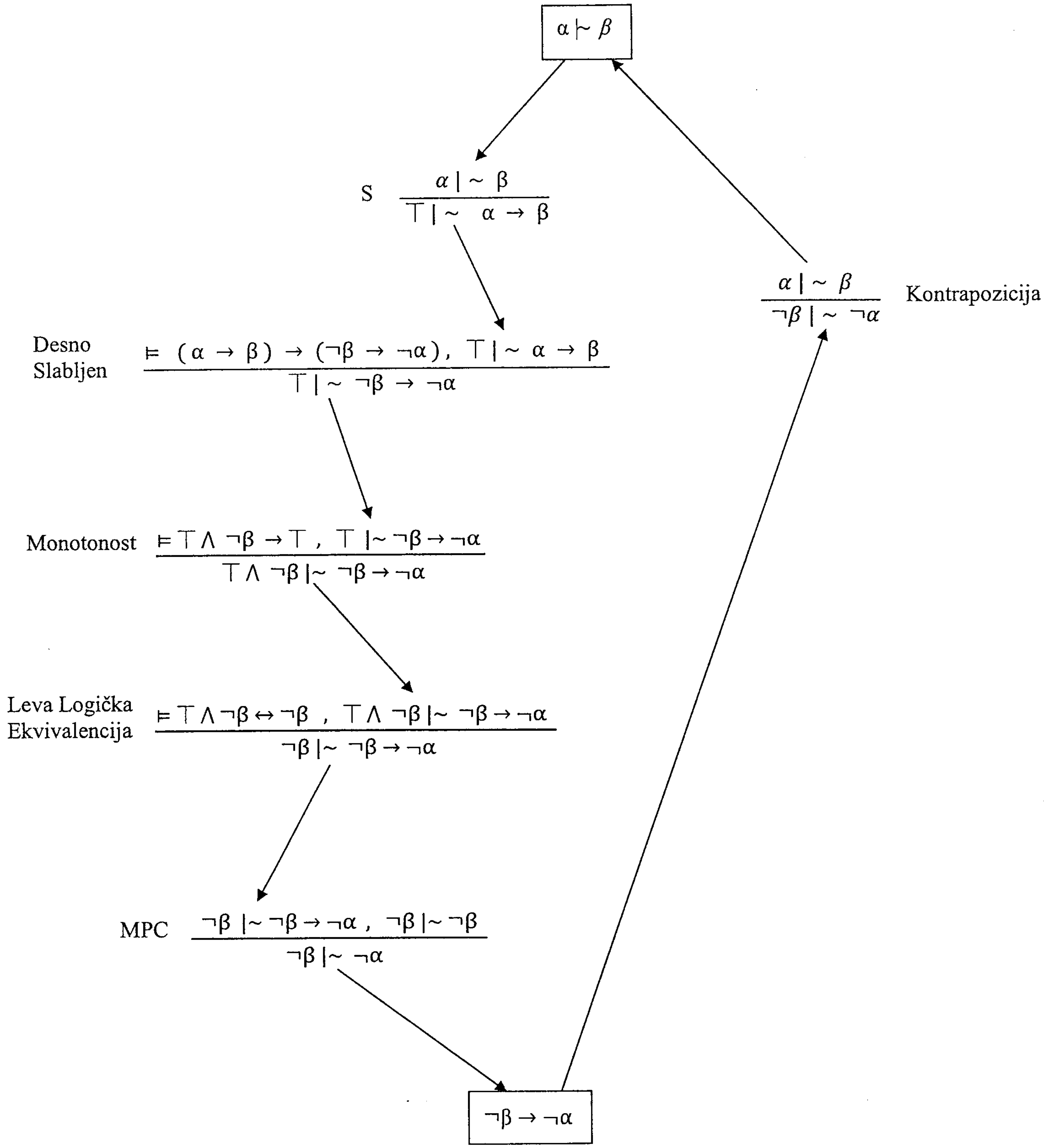
Zatim se na dobijeni rezultat $\top \wedge \neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$ i tautologiju $\top \wedge \neg\beta \leftrightarrow \neg\beta$ primeni pravilo

Leva Logička Ekvivalencija $\dfrac{\models \top \wedge \neg\beta \leftrightarrow \neg\beta\ \ ,\ \ \top \wedge \neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha}{\neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha}$ i dobija se

$\neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$. Na osnovu Refleksivnosti imamo da je $\neg\beta \mid\sim \neg\beta$.

Zatim se na dobijeni rezultat $\neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha$ i na $\neg\beta \mid\sim \neg\beta$ primeni pravilo

MPC $\dfrac{\neg\beta \mid\sim \neg\beta \to \neg\alpha\ ,\ \ \neg\beta \mid\sim \neg\beta}{\neg\beta \mid\sim \neg\alpha}$ i dobija se $\neg\beta \to \neg\alpha$ što je i bio cilj . ∎



Slika 25. Grafički prikaz izvodjenja pravila Kontrapozicija iz sistema P i pravila Monotonost

8.2 Jednostavni preferencijalni modeli

Iskaz monotonog rezonovanja može se shvatiti na sledeći način: Agent ima na umu skup mogućih svetova V. V je skup svetova za koji agent misli da su mogući u praksi. Ovaj skup V je podskup skupa $\mathcal{U}$ svih logički mogućih svetova. Agent je voljan da zaključi β iz α ako svi svetovi iz V- a koji zadovoljavaju α takodje zadovoljavaju i β.

Definicja: Jednostavni preferencijalni model je preferencijalni model u kojem je binarna relacija $\prec$ prazna.

Jednostavni preferencijalni model je jednostavni kumulativni model u kome funkcija ℓ svakom stanju dodeljuje jedan svet.

8.3 Definisanje monotonih relacija posledice

Teorema (Reprezentaciona teorema za monotone relacije) Relacija posledice je monotona akko je definisana nekim jednostavnim preferencijalnim modelom.

Dokaz: Dokaz za *if* deo je trivijalan. Za *only if* deo potrebno je da se izgradi jednostavan preferencijalni model za bilo koju datu monotonu relaciju posledice $\mid\!\sim$.
Neka je $V \stackrel{\text{def}}{=} \{ m \in \mathcal{U} \mid \forall \alpha, \beta \in L$, ako $\alpha \mid\!\sim \beta$ tada $m \models \alpha \to \beta \}$ i neka je $W \stackrel{\text{def}}{=} \langle V, \ell \rangle$, gde je ℓ identitet funkcija tj. $\ell(m) = m$. Dakle $m \mathrel{\models\!\!\!\equiv} \alpha$ akko $m \models \alpha$.

Treba dokazati da je $\alpha \mid\!\sim \beta$ akko je $\alpha \mid\!\sim_W \beta$. Ako je $\alpha \mid\!\sim \beta$ onda po konstrukciji V, $\alpha \mid\!\sim_W \beta$. Pretpostavimo sada da $\alpha \not\mid\!\sim \beta$, treba pokazati da postoji svet $m \in V$ koji ne zadovoljava $\alpha \to \beta$. Neka je $\Gamma_0 \stackrel{\text{def}}{=} \{ \neg\beta \} \cup \{ \delta \mid \alpha \mid\!\sim \delta \}$. Pošto $\alpha \not\mid\!\sim \beta$, Γ_0 je zadovoljiv. Ceo dokaz je dat u opštijem slučaju u lemi 5. Neka m bude svet koji zadovoljava Γ_0. Treba dokazati da je za $\forall\, \varphi, \psi \in L$ ako je $\varphi \mid\!\sim \psi$ onda je $m \models \varphi \to \psi$.

Ako je $\varphi \mid\!\sim \psi$ onda po **S** $\dfrac{\varphi \mid\!\sim \psi}{\top \mid\!\sim \varphi \to \psi}$ sledi $\top \mid\!\sim \varphi \to \psi$ i $\alpha \mid\!\sim \varphi \to \psi$ po Monotonosti.

Pošto je $\alpha \mid\!\sim \varphi \to \psi$ po definiciji Γ_0 sledi da $\varphi \to \psi \in \Gamma_0$ i $m \models \varphi \to \psi$. Zaključujemo da $m \in V$ i jasno je da $m \mathrel{\models\!\!\!\equiv} \alpha$ ali $m \not\mathrel{\models\!\!\!\equiv} \beta$. Sledi zaključak da m ne zadovoljava $\alpha \to \beta$. ∎

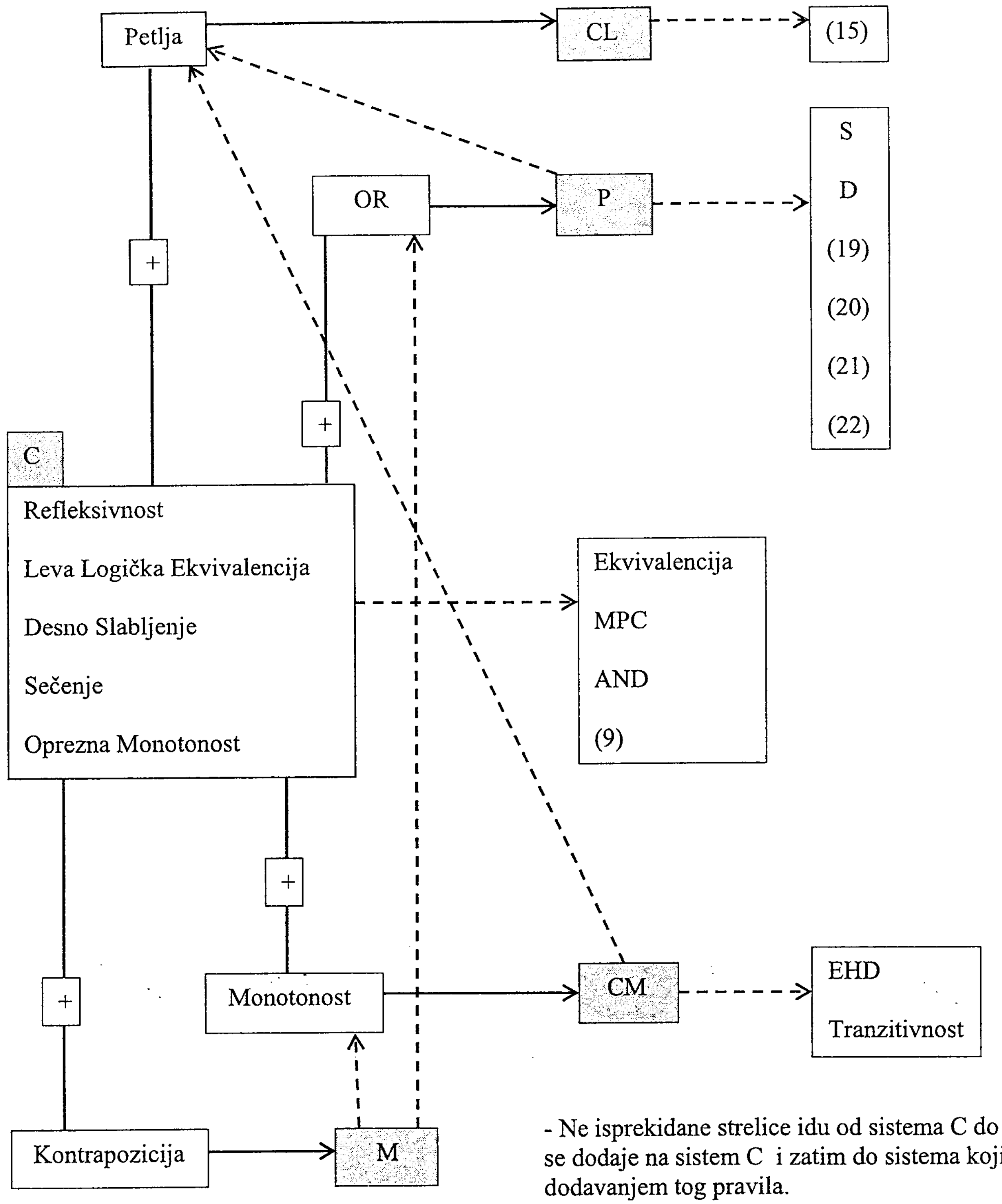
Posledica: Neka **K** bude skup uslovnih tvrdnji i $\alpha, \beta \in L$. Neka je $\Delta \stackrel{\text{def}}{=} \{ \gamma \to \delta \mid \gamma \mid\!\sim \delta \in K \}$ i neka W bude monotoni model $\langle \mathcal{U}_\Delta, \ell \rangle$, gde je ℓ identitet funkcija. Skup $\mathcal{U}_\Delta$ je definisan iznad u tekstu (Skup svetova koje treba da smatramo mogućim označava se sa $\mathcal{U}$. Podskup od skupa $\mathcal{U}$ koji sadrži samo svetove koji zadovoljavaju sve formule iz Δ nazivamo pogodan univerzum i označavamo ga sa $\mathcal{U}_\Delta$). Sledeći uslovi su ekvivalentni. Ako su zadovoljeni kaže se da K monotono izvodi $\alpha \mid\!\sim \beta$.

1. Za sve monotone modele V takve da $\vdash_V$ sadrži **K**, $\alpha \vdash_V \beta$
2. $\alpha \vdash_W \beta$
3. $\alpha \vdash \beta$ ima dokaz iz **K** u sistemu **M**.
4. $\alpha \rightarrow \beta$ sledi logički (u odnosu na $\mathcal{U}$) iz formula iz Δ.

Dokaz: Prvo treba pokazati ekvivalentnost 1 i 2. Relacija definisana u 1 je intersekcija svih monotonih relacija posledice koje sadrže **K**. Ako je V bilo koji monotoni model takav da $\vdash_V$ sadrži **K** onda oznaka njegovog stanja mora biti u $\mathcal{U}_\Delta$ i stoga $\vdash_V$ sadrži $\vdash_W$. Ali $\vdash_W$ sadrži **K** i jedna je od relacija razmatranih u 1. Da se vidi ekvivalentnost 1 i 3, primetimo da je relacija definisana u 3 intersekcija svih onih monotonih relacija koje sadrže **K**. Teorema reprezentacije za monotone relacije podrazumeva da 1 i 3 definišu istu relaciju. Ekvivalentnost izmedju 2 i 4 je neposredna. ∎

Iz ekvivalentnosti uslova 1 i 3 može se dokazati sledeći rezultat kompaktnosti:

Posledica: (kompaktnost) **K** monotono izvodi $\alpha \vdash \beta$ akko postoji konačni podskup od **K** koji monotono izvodi $\alpha \vdash \beta$.



- Ne isprekidane strelice idu od sistema C do pravila koje se dodaje na sistem C i zatim do sistema koji se dobija dodavanjem tog pravila.
- Isprekidane strelice idu od sistema do pravila koja su izvedena iz tog sistema.

Slika 26. Grafik formalnih logičkih sistema i pravila izvedenih iz njih

9 Zaključak

Definisani su pet familija modela i relacija posledica. Relacija izmedju njih je detaljno razmotrena. Svaka familija je okarakterisana logičkim sistemom i nijedna dva sistema od tih sistema nisu ekvivalentna. Familija kumulativnih modela sadrži sve druge familije i okarakterizovana je logičkim sistemom C koji sadrži Refleksivnost, Levu Logičku Ekvivalenciju, Desno Slabljenje, Sečenje i Opreznu Monotonost. Sledeća je familija kumulativno uredjenih modela. Okarakterizovana je logičkim sistemom CL koji sadrži, sva pravila iz sistema C i pravilo Petlja. Familije jednostavnih kumulativnih modela i preferencijalnih modela su dve neuporedive podfamilije familije kumulativno uredjenih modela. Jednostavni kumulativni modeli su okarakterizovani logičkim sistemom CM koji sadrži, sva pravila iz sistema C i pravilo Monotonost (ili ekvivalnetno, Tranzitivnost). Familija preferencijalnih modela, koja je najvažnija, je okarakterizovana logičkim sistemom P koji sadrži, sva pravila iz sistema C i pravilo OR. Familija monotonih modela je najmanja od svih njih. Sadržana je u sve četiri ostale. Okarakterizovana je logičkim sistemom M koji sadrži, sva pravila iz C, i pravilo Kontrapozicije. Kada imamo fiksiranu bazu podataka, možemo postaviti pitanje, koji je od ovih sistema najprikladniji za nemonotono rezonovanje? Monotono i kumulativno monotono rezonovanje su previše moćni tj. jednostavni kumulativni i jednostavni preferencijalni modeli su previše restriktivni da reprezentuju bogatstvo nemonotone procedure zaključivanja koju bismo želeli da razmatramo. Svi sistemi treba da implementiraju šablon rezonovanja koji upada u okvir kumulativnog rezonovanja, ali ne reprezentuju svi kumulativni modeli korisne nemonotone sisteme. Isto može da se kaže za kumulativno uredjene modele. Preferencijalno rezonovanje je najprikladnije za nemonotono rezonovanje. U ovom radu, za razliku od rada *Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics,* izvodjenja svih pravila su, korak po korak, detaljno opisana, a zatim su ta izvodjenja i grafički prikazana. Grafikoni izvodjenja omogućavaju čitaocu da bez preteranog napora, lako i brzo shvati kako je pravilo izvedeno. Detaljna izvodjenja pravila su veoma bitna da bi se videlo kako super inteligentni ekspertski sistemi izvode pravila na osnovu kojih donose zaključke. Prilikom izvodjenja pravila iz nekog sistema koriste se ne samo pravila od kojih se sastoji sistem, nego i sva pravila koja su predhodno izvedena iz sistema. Svi dokazi su mnogo detaljnije i opširnije prikazani. Takodje je dat prikaz objašnjenja nekih pravila i pomoću baze znanja i pomoću formula. Prikazano je i detaljno objašnjenje kako se sistem P može prikazati na dva načina i kada sadrži pravilo Sečenje i drugi način kada umesto Sečenja sadrži pravilo And. Dato je detaljno objašnjenje kumulativnih modela i relacije posledice. Na kraju je prikazan grafik svih pet logičkih sistema i svih pravila izvedenih iz njih. Na tom grafiku je prikazana i relacija izmedju logičkih sistema.

10. Literatura

[1] John P. Burgess, Quick completeness proofs for some logics of conditionals. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, 22:76–84, 1981.

[2] Dov M. Gabbay, Theoretical foundations for non-monotonic reasoning in expert systems. In Krzysztof R. Apt, editor, *Proc. of the NATO Advanced Study Institute on Logics and Models of Concurrent Systems*, pages 439 - 457, La Colle-sur-Loup, France, October 1985. Springer-Verlag.

[3] Sarit Kraus, Daniel Lehmann and Menachem Magidor, Nonmonotonic Reasoning, Preferential Models and Cumulative Logics. SAD, 1990.

[4] Daniel Lehmann, Preferential models and cumulative logics. In Ehud Shapiro, editor, *Fifth Israeli Symposium on Artificial Intelligence, Vision and Pattern Recognition*, pages 365–381, Tel Aviv, Israel, December 1988. Information Processing Association of Israel.

[5] Daniel Lehmann, What does a conditional knowledge base entail? In Ron Brachman and Hector Levesque, editors, *Proceedings of the First International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning*, Toronto, Canada, May 1989. Morgan Kaufmann.

[6] Daniel Lehmann and Sarit Kraus, Non monotonic logics: Models and proofs. In *European Workshop on Logical Methods in Artificial Intelligence*, pages 58 – 64, Roscoff (Finist`ere) France, June 1988.

[7] Daniel Lehmann and Menachem Magidor, Rational logics and their models: a study in cumulative logic. Technical Report TR 88-16, Leibniz Center for Computer Science, Dept. of Computer Science, Hebrew University, Jerusalem, November 1988.

[8] David Makinson, personal communication, April 1988.

[9] David Makinson, General theory of cumulative inference. In M. Reinfrank, J. de Kleer, M. L. Ginsberg and E. Sandewall, editors, *Proceedings of the Second International Workshop on Non-Monotonic Reasoning*, pages 1–18, Grassau, Germany, June 1988. Springer Verlag. Volume 346, Lecture Notes in Artificial Intelligence.

[10] Judea Pearl and Hector Geffner, Probabilistic semantics for a subset of default reasoning. TR CSD-8700XX, R-93-III, Computer Science Dept., UCLA, March 1988.

[11] Yoav Shoham, A semantical approach to nonmonotonic logics. In *Proc. Logics in Computer Science*, pages 275–279, Ithaca, N.Y., 1987.

[12] Yoav Shoham, *Reasoning about Change*. The MIT Press, 1988.

[13] Fahiem Bacchus, Adam J. Grove, Joseph Y. Halpern, Daphne Koller,
From Statistical Knowledge Bases to Degrees of Belief. Published in: Journal Artificial Intelligence Volume 87 Issue 1-2, Nov. 1996 Pages 75-143 Elsevier Science Publishers Ltd. Essex, UK.