UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Milena Jovović
1047/2020

KONCEPT ZAVISNIH ŽIVOTA U ŽIVOTNOM OSIGURANJU

master rad

Beograd, 2023.

Mentor:

dr Jelena Jocković, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Bojana Milošević, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Marija Cuparić, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: ____________________

Uvod

Aktuarska matematika je naučna disciplina koja se bavi kvantitativnom analizom u osiguranju. Zasniva se na teoriji vjerovatnoće i statistici. Predmet izučavanja aktuarske matematike su premije odnosno cijene kako u životnom tako i u neživotnom osiguranju, obračun tehničkih rezervi itd.
Aktuari su tradicionalno računali premije osiguranja za više osoba vodeći se pretpostavkom da su preostale dužine života osiguranih osoba nezavisne slučajne veličine. Međutim, dodatne studije demonstriraju zavisnost preostalih dužina života parova (kao što su muž i žena). Ova zavisnost materijalno utiče na vrijednosti anuiteta i osiguranja više osoba. Za takve slučajeve su teorijski izvedene nove vrijednosti premija i anuiteta.
U ovom radu će se razmatrati alternative pretpostavke nezavisnosti preostalih dužina života i izvesti zaključci za takva aktuarska računanja.

U prvoj glavi je kratki osvrt na osnovne pojmove i osnovne vrste životnog osiguranja koji su potrebni za razumijevanje narednih glava.

U drugoj glavi su definisani različiti pojmovi bivarijantne zavisnosti slučajnih veličina, koje u ovom radu konkretno predstavljaju preostale dužine života muža i žene. Pokazuje se da iz uslova rasta jedne slučajne veličine u desnom repu za drugu slučajnu veličinu slijedi povezanost istih slučajnih veličina. Zatim, iz toga slijedi pozitivna zavisnost tih slučajnih velicina. U nastavku je na primjeru različitih vrsta osiguranja pokazano kako pretpostavka zavisnosti utiče na visinu premije.

U trećoj glavi je dat drugačiji pristup rješavanja problema osiguranja bračnog para, primjenom lanaca Markova. Definisana su 4 moguća stanja: stanje da su supružnici živi, stanje u kojem muž nije živ a žena jeste, stanje u kojem je muž živ a žena nije i stanje u kojem oboje nisu živi. Glavni faktori koji utiču na vjerovatnoće prelaska iz jednog stanja u drugo su pretpostavke inteziteta smrtnosti bračnog para koje se mijenjaju kada jedan od supružnika prvi umre. Dokazuje se da ako se intezitet smrtnosti mijenja u zavisnosti od stanja u kojem se nalaze, da su slučajne veličine koje predstavljaju preostala trajanja života supružnika zavisne. Dati su primjeri koji mogu biti korisni za bolje razumijevanje zavisnosti ovih slučajnih veličina.

Zahvaljujem se mentoru, dr Jeleni Jocković, i članovima komisije, dr Bojani Milošević i dr Mariji Cuparić, na ukazanom povjerenju i korisnim primjedbama i sugestijama koje su doprinijele poboljšanju rada.

Beograd, februar 2023.

Sadržaj

Glava 1

Uvod u životno osiguranje

Aktuari primjenjuju različite naučne principe i tehnike iz niza različitih disciplina za opisivanje problema u koje su uključeni rizici, neizvjesnosnost i finansije. U ovom poglavlju će biti postavljen kontekst matematike koji se koristi u narednim poglavljima, opisujući pozadinu savremene aktuarske prakse u životnom osiguranju.

1.1 Pozadina osiguranja i osnovni pojmovi

Osiguranje predstavlja socijalni mehanizam koji omogućava pojedincima i organizacijama da se zaštite od finansijskih gubitaka koji mogu nastati u budućnosti kao rezultat djelovanja različitih nepovoljnih okolnosti.
Prvi aktuari u evropskim zemljama su bili zaposleni u ranim godinama 18.vijeka od strane kompanija koje su se bavile životnim osiguranjem. Njihov zadatak je bio da obezbjede naučnu osnovu za upravljanje imovinom i obavezama dugovanja tih kompanija. Dugovanja su zavisila od broja smrti među osiguranima u svakoj godini. Modelovanje mortaliteta je postala jedna od glavnih tema koja je bila i od komercijalnog i od opšteg naučnog interesa. Privukla je mnoge značajne naučnike i matematičare aktuarskim problemima što je rezultiralo da je veliki dio ranog rada na polju vjerovatnoće bio tijesno povezan sa razvojem rješenja aktuarskih problema.
Osiguravač je društvo koje se bavi osiguranjem, odnosno preuzima obavezu isplate naknade iz osiguranja, ako nastane osigurani slučaj za određenu cijenu (premiju).
Polisa osiguranja je osnovni pisani dokument koji prati posao osiguranja i kojim se definišu obaveze učesnika u osiguranju. Učesnici u osiguranju su *ugovarač osiguranja*, *osiguravač* i *osiguranik*.
Ugovarač osiguranja je lice koje zaključuje ugovor o osiguranju, u korist drugog lica

ili svoju. Ugovarač osiguranja je lice koje ima obavezu da plaća premiju i pripadaju mu sva prava i obaveze iz ugovora o osiguranju života.
Osiguranik je lice čiji je život osiguran, odnosno lice koje je osigurano od rizika.
Korisnik osiguranja je lice koje u slučaju nastanka osiguranog slučaja ima pravo na naknadu iz osiguranja.
Prvi ugovori koji se tiču životnog osiguranja bili su godišnjeg tipa. Ako bi osiguranik umro u toku godine u kojoj je polisa osiguranja još uvijek na snazi, tada osiguravač treba da plati korisniku osiguranja osiguranu sumu. Kroz vrijeme, osiguranje nastavlja da se razvija. Polise osiguranja postaju mnogo kompleksnije: od izbora vrste životnog osiguranja koje želi osiguranik da kupi, zatim koliko će ugovor da traje pa sve do načina plaćanja (i od strane osiguravača i od strane osiguranika).

1.2 Model preostale dužine života

Neka osoba koja želi da sklopi ugovor o osiguranju ima x godina. Takvu osobu ćemo označavati sa (x), $x \geq 0$. Kako se smrt može desiti u bilo kojoj godini osiguranika koja je veća od x, modelujemo preostalu dužinu života pomoću neprekidne slučajne veličine $T(x)$. To znači da $x + T(x)$ predstavlja broj godina osiguranika kada se desila njegova smrt.
Neka je $G(t)$ funkcija raspodjele slučajne veličine $T(x)$. Dakle,

$$G(t) = P[T(x) < t]$$

predstavlja vjerovatnoću da osoba (x) ne živi više od $x + t$ godina.
U mnogim problemima životnog osiguranja, kao i u problemu sa kojim ćemo se upoznati u narednim poglavljima, posmatra se suprotno, funkcija preživljavanja, pa definišemo

$$S(t) = 1 - G(t) = P[T(x) \geq t].$$

Dakle, ona predstavlja vjerovatnoću da osoba (x) živi još bar t godina.
Funkciju $G(t)$ još označavamo ${}_tq_x$, a funkciju preživljavanja ${}_tp_x$.
Još jedan važan pojam je intezitet smrtnosti. Intezitet smrtnosti osobe starosti x u trenutku $x + t$ je

$$\mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = -\frac{d}{dt}\ln(1 - G(t)) = -\frac{d}{dt}\ln({}_tp_x),$$

gdje $g(t) = G'(t)$ je odgovarajuća gustina raspodjele. Iz prethodne jednakosti se jednostavno dobija

$$ {}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}. $$

Kako je $G(t)$ funkcija raspodjele i $g(t)$ njena funkcija gustine, slijedi da

$$ G(t) = \int_0^t g(s) ds, $$

što u aktuarskoj notaciji može biti zapisano kao

$$ {}_tq_x = \int_0^t {}_sp_x \mu_{x+s} ds. $$

Sada se može izraziti i očekivani preostali životni vijek osobe starosti x godina:

$$ \mathring{e}_x = E(T(x)) = \int_0^{+\infty} t g(t) dt = \int_0^{+\infty} (1 - G(t)) dt = \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt. $$

Analitička raspodjela za preostalu dužinu života

Često se, iz praktičnih razloga, pretpostavlja da preostala dužina života T ima neku datu, jednostavnu raspodjelu. Nabrojaćemo nekoliko raspodjela koje su čest izbor.

1. **De Muavrov zakon** (Abraham de Moivre, 1724.): Pretpostavlja se da $T(x) : \mathcal{U}(0, \omega - x)$ gdje je ω maksimalni broj godina koje može doživjeti ljudsko biće. Važi

$$ g(t) = \frac{1}{\omega - x}, \quad 0 < t < \omega - x, $$
$$ \mu_{x+t} = \frac{g(t)}{1 - G(t)} = \frac{\frac{1}{\omega - x}}{1 - \frac{t}{\omega - x}} = \frac{1}{\omega - x - t}, \quad 0 < t < \omega - x. $$

Primijetimo da je intezitet smrtnosti rastuća funkcija po t.

2. **Gompercov zakon** (Benjamin Gomperz, 1824.): Benjamin Gomperz je pretpostavio da je intezitet smrtnosti jednak

$$ \mu_{x+t} = B \cdot c^{x+t}, $$

za $t > 0$ i neke konstante $B, c > 0$.
U ovom slučaju, intezitet smrtnosti raste eksponencijalno po t.

3. **Mejhemov zakon** (William Matthews Makeham, 1860.): Ovo je uopštenje prethodnog modela, tj.

$$\mu_{x+t} = A + B \cdot c^{x+t},$$

za $t > 0$ i neke konstante $A, B, c > 0$.

4. **Vejbulov zakon** (Weibull, 1939.): Pretpostavlja se da je

$$\mu_{x+t} = k \cdot (x+t)^n,$$

za $t > 0$ i neke konstante $k, n > 0$.

Uz pomoć navedenih formula se može izračunati vjerovatnoća preživljavanja i sve ostale veličine.

Primjer 1

Neka je $\mu_x = B \cdot c^x$, $x > 0$ i B, c konstante za koje važi $0 < B < 1$ i $c > 1$. Izvodimo čemu je jednaka funkcija preživljavanja $S_x(t)$.

Prvo,

$$S_x(t) = e^{-\int_x^{x+t} \mu_r dr} = e^{-\int_x^{x+t} B \cdot c^r dr}.$$

Ako napišemo $c^r = e^{r \cdot \log c}$,

$$\begin{aligned}\int_x^{x+t} B \cdot c^r dr &= B \int_x^{x+t} e^{r \cdot \log c} dr \\ &= \frac{B}{\log c} e^{r \cdot \log c}\Big|_x^{x+t} \\ &= \frac{B}{\log c}(c^{x+t} - c^x).\end{aligned}$$

Dobijamo da je

$$S_x(t) = e^{-\frac{B}{\log c} c^x (c^t - 1)}.$$

Navedeni primjer[1] će nam koristiti za izradu jednog od narednih primjera.

Cjelobrojni preostali životni vijek

Kako se mnogi tokovi novca odvijaju u diskretnim vremenskim trenucima, preostali životni vijek ćemo predstaviti kao diskretnu slučajnu veličinu.

[1] [2] Dickson, David CM, Mary R. Hardy, Howard R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, Second Edition, Cambridge University Press, 2013;

Definicija 1.2.1. *Ako je $T(x)$ preostali životni vijek osobe starosti x, onda je*

$$K = K(x) = [T(x)]$$

broj preostalih (cijelih) godina života osobe starosti x, ili cjelobrojni preostali životni vijek.

Tada je

$$P[K = k] = P[k \leq T < k + 1] = {}_k p_x \cdot q_{x+k}.$$

Sada možemo dobiti i formulu za očekivani cjelobrojni preostali životni vijek:

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot P[K = k] = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k},$$

ili, na drugi način,

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} P[K \geq k] = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_k p_x.$$

1.3 Životno osiguranje

U ovom poglavlju bavićemo se određivanjem sadašnje vrijednosti osigurane sume i vrijednosti premije osiguranja. Određivanje premije osiguranja predstavlja značajnu temu aktuarstva jer premija je, na neki način, mjera rizika koji se osigurava. Napomenimo, trenuci kada se vrše uplate premija i isplate osigurane sume zavise od slučajne veličine T, tj. od trenutka smrti osobe, i mogu i same biti slučajne veličine. Za određivanje vrijednosti premije koristi se *princip ekvivalencije*, po kome je zbir svih uplata svedenih na isti vremenski trenutak jednak zbiru svih isplata svedenih na isti taj trenutak.

Najjednostavnija vrsta premije i ona kojom ćemo se baviti u ovom radu je **jednokratna neto premija**, koja podrazumijeva da se odgovarajući iznos uplaćuje u cjelini u momentu definisanom ugovorom. Ako je Z sadašnja vrijednost osigurane sume, onda je $E(Z)$ iznos jednokratne neto premije koji treba uplatiti za osiguranje. Pored $E(Z)$, da bismo bolje opisali rizik osiguranja, često se računa i $D(Z)$.

Osnovne pretpostavke koje ćemo koristiti kroz ovo poglavlje su da je osigurana suma konstantna (recimo, jednaka 1), kamatna stopa i je fiksna i osoba koja želi da se osigura ima x godina.

Doživotno osiguranje za slučaj smrti

Neprekidni slučaj, $\bar{A}_x$

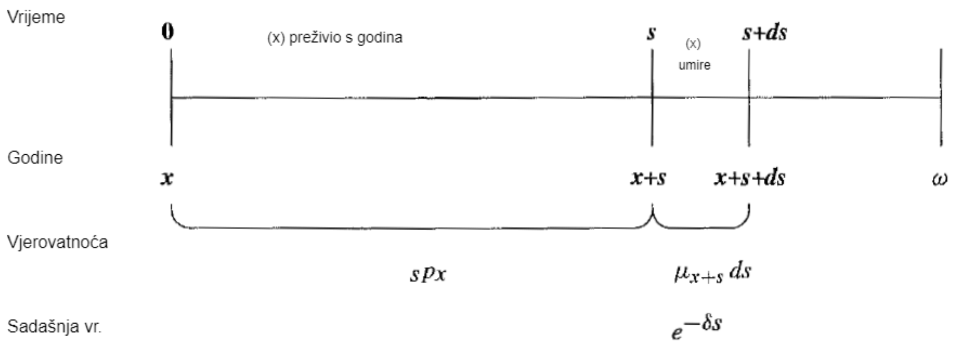
U ovoj vrsti osiguranja, smrt osiguranika je uvijek osigurani slučaj, bilo kada da se desi. Osigurana suma će biti isplaćena u trenutku smrti. Kako sadašnja vrijednost osigurane sume zavisi od trenutka smrti za koji ne znamo unaprijed kada će se desiti, sadašnja vrijednost je slučajna veličina. Označimo je sa Z. Tada je Z jednako

$$Z = v^{T(x)} = e^{-\delta T(x)},$$

gdje je v diskontni faktor i δ intezitet kamate. Vrijednost jednokratne neto premije je jednaka

$$\bar{A}_x = E(Z) = E(e^{-\delta T(x)}) = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot g(t)dt = \int_0^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt.$$

Vrijedi prokomentarisati intuiciju koja stoji iza ove formule. Posmatrajmo sledeću sliku.



Slika 1.1: Doživotno osiguranje za slučaj smrti - neprekidni slučaj

Posmatramo trenutak s, gdje $x \leq s < \omega$. Sa ω smo označili maksimalan broj godina koje osiguranik može da doživi. Vjerovatnoća da je osiguranik živ u trenutku s je ${}_sp_x$, a vjerovatnoća da (x) umre između njegovih godina $x+s$ i $x+s+ds$ uključujući da je preživio $x+s$ godina je μ_{x+s}, pod pretpostavkom da je ds veoma mali broj. U ovom slučaju, sadašnja vrijednost osigurane sume 1 je $e^{-\delta s}$. Sada možemo proći integralom kroz proizvod $e^{-\delta s} \cdot {}_sp_x \cdot \mu_{x+s}$ da bismo odredili očekivanu vrijednost osigurane sume koja će biti plaćena upravo u jednom od mogućih intervala od s do $s + ds$.

Diskretni slučaj, A_x

Pretpostavimo da se osigurana suma 1 plaća na kraju godine smrti osobe (x). Da bismo izračunali sadašnju vrijednost Z i njeno očekivanje, koristimo cjelobrojni preostali životni vijek. Na primjer, ako je (x) živio 25.6 godina od sklapanja ugovora o osiguranju, vrijednost $K = K(x)$ bi bila 25, a osigurana suma koja se isplaćuje na kraju godine smrti bi se isplaćivala 26 godina od kako je potpisan ugovor.
Dakle,

$$Z = v^{K+1},$$

a

$$A_x = E(v^{K+1}) = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Sa v označavamo diskontni faktor i on je jedank $v = \frac{1}{1+i}$.

Privremeno osiguranje sa trajanjem n godina

Kod privremenog osiguranja, smrt osiguranika je osigurani slučaj samo ako se desi u određenom periodu. Neka taj period ovdje bude n godina. U suprotnom slučaju, osigurana suma se ne isplaćuje, a premije se ne vraćaju.

Neprekidni slučaj, $\bar{A}^1_{x:\overline{n}|}$

U neprekidnom slučaju, osigurana suma se isplaćuje u trenutku smrti. Sadašnja vrijednost osigurane sume 1 koju označavamo Z je

$$Z = \begin{cases} v^T = e^{-\delta T} & , \ T \leq n \\ 0 & , \ T > n. \end{cases}$$

Očekivana vrijednost osigurane sume, tj. jednokratna neto premija iznosi

$$\bar{A}^1_{x:\overline{n}|} = \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt.$$

Diskretni slučaj, $A^{1}_{x:\overline{n}|}$

Sada se osigurana suma isplaćuje na kraju godine smrti. Sadašnja vrijednost slučajne veličine osigurane sume jednaka je

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & , \ K < n \\ 0 & , \ K \geq n. \end{cases}$$

Jednokratna neto premija jednaka je

$$A^{1}_{x:\overline{n}|} = E(Z) = E(v^{K+1}\mathbf{1}\{K < n\}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Osiguranje za slučaj doživljenja sa trajanjem n godina, $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$

Kod ove vrste osiguranja, osigurani slučaj je da osiguranik doživi određeni broj godina (n godina) i u tom slučaju se njemu isplaćuje osigurana suma. U suprotnom slučaju, osigurana suma se ne isplaćuje, a uplaćene premije se, obično, vraćaju. Ovakva vrsta osiguranja najčešće se kupuje u kombinaciji sa drugom vrstom osiguranja, kao na primjer privremeno osiguranje na n godina čime se kreira mješovito osiguranje o kojem će biti riječ u nastavku.
Sadašnja vrijednost osigurane sume vrijednosti 1 izdata osobi (x) iznosi

$$Z = \begin{cases} 0 & , \ T < n \\ v^{n} & , \ T \geq n. \end{cases}$$

Primijetimo da ovdje trenutak isplate osigurane sume nije slučajna veličina. Takođe, kako se osigurana suma isplaćuje isključivo u trenutku n, pod pretpostavkom da je osiguranik preživio tih n godina, nema potrebe razlikovati neprekidni i diskretni slučaj. Ovdje, jedina moguća verzija je diskretni slučaj.
Jednokratna neto premija je

$$A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}} = {}_nE_x = E(Z) = E(v^{n}\mathbf{1}\{T \geq n\}) = v^{n} \cdot P[T \geq n] = v^{n} \cdot {}_np_x.$$

Pored aktuarske oznake $A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}$, vrlo često se koristi i oznaka ${}_nE_x$, koju ćemo i mi koristiti u narednom tekstu kada je riječ o ovoj vrsti osiguranja.

Mješovito osiguranje

Mješovito osiguranje obezbjeđuje kombinaciju privremenog osiguranja za slučaj smrti osiguranika i osiguranja za slučaj doživljenja. Osigurana suma se isplaćuje na sledeći način: osiguraniku ako doživi određeni broj godina (n godina) ili korisnicima osiguranja ako osiguranik umre u periodu od n godina.

Neprekidni slučaj, $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$

Prvo posmatramo kada se osigurana suma 1 isplaćuje u trenutku smrti. Sadašnja vrijednost osigurane sume je

$$Z = \begin{cases} v^T = e^{-\delta T} & , \ T < n \\ v^n & , \ T \geq n. \end{cases}$$

Može se vidjeti da slučajnu veličinu Z možemo zapisati kao

$$Z = Z_1 + Z_2 = v^T \mathbf{1}\{T < n\} + v^n \mathbf{1}\{T \geq n\},$$

pa je jednokratna neto premija jednaka

$$\bar{A}_{x:\overline{n}|} = E(Z_1) + E(Z_2) = \bar{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Diskretni slučaj, $A_{x:\overline{n}|}$

U diskretnom slučaju, osigurana suma se isplaćuje na kraju godine smrti kao što je bilo i u prethodnim vrstama osiguranja kada je u pitanju diskretni slučaj. Dakle, slučajna veličina sadašnje vrijednosti osigurane sume je

$$Z = \begin{cases} v^{K+1} & , \ K < n \\ v^n & , \ K \geq n. \end{cases}$$

Analogno neprekidnom slučaju ove vrste osiguranja,

$$Z = Z_1 + Z_2 = v^{K+1} \mathbf{1}\{K < n\} + v^n \mathbf{1}\{K \geq n\}.$$

Jednokratna neto premija je jednaka

$$A_{x:\overline{n}|} = E(Z_1) + E(Z_2) = A^{1}_{x:\overline{n}|} + A_{x:\overset{1}{\overline{n}|}}.$$

Odloženo doživotno osiguranje (za n godina)

Pod odloženim doživotnim osiguranjem za n godina smatra se osiguranje kod kojeg je smrt osiguranika osigurani slučaj samo ako se desi najmanje n godina od trenutka zaključivanja ugovora o osiguranju.

Neprekidni slučaj, $_{n|}\bar{A}_x$

Osigurana suma 1 se isplaćuje odmah po smrti osiguranika pod uslovom da je ispunjen uslov ugovora. Tada

$$Z = \begin{cases} 0 & , \ T < n \\ v^T = e^{-\delta T} & , \ T \geq n, \end{cases}$$

a jednokratna neto premija je jednaka

$$_{n|}\bar{A}_x = \int_n^{+\infty} e^{-\delta t} \cdot {}_tp_x \cdot \mu_{x+t} dt.$$

Diskretni slučaj, $_{n|}A_x$

Sadašnja vrijednost osigurane sume je

$$Z = \begin{cases} 0 & , \ K < n \\ v^{K+1} & , \ K \geq n, \end{cases}$$

a jednokratna neto premija je jednaka

$$_{n|}A_x = E(Z) = E(v^{K+1}\mathbf{1}\{K \geq n\}) = \sum_{k=n}^{+\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Korisno je da upamtimo i vezu

$$\begin{aligned} A_x &= A^1_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}A_x, \\ \bar{A}_x &= \bar{A}^1_{x:\overline{n}|} + {}_{n|}\bar{A}_x. \end{aligned}$$

Iz ovoga vidimo da, na primjer ako posmatramo diskretni slučaj privremenog osiguranja na n godina,

$$\begin{aligned} A^1_{x:\overline{n}|} &= A_x - {}_{n|}A_x \\ &= A_x - v^n \cdot {}_np_x \cdot A_{x+n}. \end{aligned}$$

Ova veza može biti korisna kada želimo da izračunamo $A^1_{x:\overline{n}|}$ za cijeli broj x i n a data nam je tabela vrijednosti A_x i ℓ_x.

Sa ℓ_x označavamo broj živih osoba starosti x. Detaljnije o tome se nalazi u poglavlju na kraju rada pod nazivom „Komutativne funkcije”.

1.4 Osiguranje rente

U ovoj sekciji kratko ćemo se osvrnuti na rentu radi boljeg razumijevanja narednih poglavlja.
Renta je tok novca koji se sastoji od periodičnih isplata unaprijed određene sume tokom trajanja života osobe. Primjeri rente su isplata penzije dok je osoba živa ili isplata premije osiguranja u određenim, jednakim intervalima. Razlikujemo sledeće rente: doživotna renta i renta ograničenog trajanja, lična renta i renta nadživljenja, neposredna renta i odložena renta, renta plativa unaprijed i renta plativa naknadno, stalna renta i promjenljiva renta. Klasifikacija koju ćemo uvijek praviti jeste klasifikacija po momentima plaćanja rente. Detaljnije, rente plative unaprijed se vrše u trenucima $0, 1, \dots, K$, a kod renti plativih naknadno isplate se vrše u trenucima $1, 2, \dots, K$. Sada ćemo detaljnije razmotriti različite vrste rente.
Pretpostavićemo da su vrijednosti svih isplata jednake 1. Sadašnja vrijednost niza isplata je slučajna veličina jer zavisi od preostale dužine života osobe koja isplaćuje i označavamo je sa Y. I ovdje smo primarno zainteresovani da odredimo očekivanu vrijednost od Y, tj. jednokratnu neto premiju.

Stalna godišnja renta

Neposredna doživotna renta

Kod neposredne doživotne rente isplata počinje odmah po zaključivanju ugovora.
(i) *plativa unaprijed*
Kao što smo napomenuli, isplate se vrše u trenucima $0, 1, \dots, K$. Sadašnja vrijednost niza isplata je

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}.$$

Odredimo raspodjelu ove slučajne veličine,

$$P[Y = \ddot{a}_{\overline{K+1}|}] = P[K = k] = {}_kp_x \cdot q_{x+k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Jednokratna neto premija je

$$\ddot{a}_x = E(Y) = \sum_{k=0}^{+\infty} \ddot{a}_{\overline{K+1}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}.$$

Slučajnu veličinu Y možemo zapisati

$$Y = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot \mathbf{1}\{K \geq k\},$$

a onda možemo i premije rente izračunati na drugi način

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot {}_kp_x.$$

Možemo izvesti vezu između jednokratne neto premije ove rente i jednokratne neto premije doživotnog osiguranja. Primijetimo da

$$\begin{aligned} Y &= 1 + v + v^2 + \ldots + v^K \\ &= \frac{1 - v^{K+1}}{1 - v} = \frac{1 - Z}{d}, \end{aligned}$$

gdje je Z sadašnja vrijednost osigurane sume kod diskretnog doživotnog osiguranja. Prelaskom na očekivanje, dobija se

$$\ddot{a}_x = E(Y) = E(\frac{1 - Z}{d}) = \frac{1 - A_x}{d}.$$

(ii) *plativa naknadno*

Isplate se vrše u trenucima $1, 2, \ldots, K$, pa je sadašnja vrijednost isplata jednaka

$$Y = v + v^2 + \ldots + v^K = a_{\overline{K}|}.$$

Jednokratna neto premija je

$$a_x = E(Y) = \ddot{a}_x - 1.$$

Neposredna renta ograničenog trajanja (n godina)

(i) *plativa unaprijed*

Isplate počinju odmah i traju n godina pod uslovom da je osoba živa tokom tih n godina. Sadašnja vrijednost ovakvih isplata je

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} 1 + v + v^2 + \ldots + v^K = \ddot{a}_{\overline{K+1}|} & , \ K < n \\ 1 + v + v^2 + \ldots + v^{n-1} = \ddot{a}_{\overline{n}|} & , \ K \geq n \end{cases} \\ &= \ddot{a}_{\overline{K+1}|}\mathbf{1}\{K < n\} + \ddot{a}_{\overline{n}|}\mathbf{1}\{K \geq n\}. \end{aligned}$$

Jednokratna neto premija je

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \sum_{k=0}^{n-1} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k} + \ddot{a}_{\overline{n}|} \cdot {}_np_x.$$

Jednokratnu neto premiju možemo izraziti i na drugi način

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(\sum_{k=0}^{n-1} v^k \mathbf{1}\{K \geq k\}) = \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_kp_x.$$

Zapišimo slučajnu veličinu Y kao

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} \frac{1-v^{K+1}}{d} & , \ K < n \\ \frac{1-v^n}{d} & , \ K \geq n \end{cases} \\ &= \frac{1-Z}{d}, \end{aligned}$$

gdje slučajna veličina Z, u ovom slučaju, predstavlja sadašnju vrijednost mješovitog osiguranja. Kada prođemo očekivanjem, dobija se treća formula za jednokratnu neto premiju kod renti

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d}.$$

(ii) *plativa naknadno*

Isplate se vrše u trenucima $1, 2, \ldots, n$ pod uslovom da je osiguranik živ tokom tog perioda. Sadašnja vrijednost isplata je

$$\begin{aligned} Y &= \begin{cases} v + v^2 + \ldots + v^K = a_{\overline{K}|} & , \ K < n \\ v + v^2 + \ldots + v^n = a_{\overline{n}|} & , \ K \geq n \end{cases} \\ &= a_{\overline{K}|}\mathbf{1}\{K < n\} + a_{\overline{n}|}\mathbf{1}\{K \geq n\}, \end{aligned}$$

pa je jednokratna neto premija jednaka

$$a_{x:\overline{n}|} = E(Y) = \sum_{k=1}^{n} v^k \cdot {}_kp_x = \frac{1 - A_{x:\overline{n}|}}{d} - 1 + v^n \cdot {}_np_x.$$

Odložena (za n godina) doživotna renta

Kod odložene rente isplata počinje posle određenog broja godina (n godina).

(i) *plativa unaprijed*

Prva isplata je na početku n-te godine, a poslednja u trenutku $K = K(x)$. Sadašnja vrijednost isplata je

$$Y = \begin{cases} 0 & , \ K < n \\ v^n + v^{n+1} + \ldots + v^K & , \ K \geq n. \end{cases}$$

Jednokratna neto premija je

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= \sum_{k=n}^{+\infty} v^k \cdot {}_kp_x \\
&= {}_np_x \cdot v^n \cdot \ddot{a}_{x+n} \\
&= \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

(ii) plativa naknadno
Ovdje je prva isplata na kraju n-te godine, a poslednja u trenutku $K = K(x)$. Sadašnja vrijednost isplata je

$$
Y = \begin{cases} 0 & , \ K < n \\ v^{n+1} + v^{n+2} + \ldots + v^K & , \ K \geq n. \end{cases}
$$

Jednokratna neto premija je

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}a_x &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} v^k \cdot {}_kp_x \\
&= {}_np_x \cdot v^n \cdot a_{x+n} \\
&= a_x - a_{x:\overline{n}|}.
\end{aligned}
$$

Stalna neprekidna renta

U praksi, isplate se najčešće vrše u diskretnim vremenskim intervalima, ali ako su ovi intervali mali, na primjer isplate se vrše nedeljno, onda je pogodno tretirati isplate kao da se vrše neprekidno.
(i) neposredna doživotna renta
Sadašnja vrijednost svih isplata je

$$
Y = \int_0^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T}|}.
$$

Jednokratna neto premija je

$$
\bar{a}_x = \int_0^{+\infty} v^t \cdot {}_tp_x dt.
$$

(ii) neposredna renta ograničenog trajanja (n godina)
Sadašnja vrijednost svih isplata je

$$
Y = \begin{cases} \int_0^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T}|} & , \ 0 \leq T(x) < n \\ \int_0^n v^t dt = \bar{a}_{\overline{n}|} & , \ T(x) \geq n. \end{cases}
$$

Jednokratna neto premija je

$$\bar{a}_{x:\overline{n}|} = \int_0^n v^t \cdot {}_tp_x dt.$$

(iii) odložena (za n godina) renta
Sadašnja vrijednost svih isplata je

$$Y = \begin{cases} 0 & , \ 0 \leq T(x) < n \\ \int_n^T v^t dt = \bar{a}_{\overline{T}|} - \bar{a}_{\overline{n}|} & , \ T(x) \geq n. \end{cases}$$

Jednokratna neto premija je

$$_{n|}\bar{a}_x = \int_n^{+\infty} v^t \cdot {}_tp_x dt.$$

Model osiguranja više osoba

Modeli osiguranja više osoba spadaju u jedno od najuzbudljivijih razvoja u aktuarstvu poslednjih godina. Intuitivni su i laki za korišćenje uz pomoć jednostavnih, numeričkih metoda. Takođe, pojednostavljuju i pružaju osnovu za određivanje cijena i vrjednovanje ugovora složenijih vrsta osiguranja. Ova cjelina je veoma značajna za razumijevanje narednih poglavlja.
Kada se osigurava grupa ljudi, preživljavanje pod unaprijed određenim uslovima se zove *status interesa* (ili samo status) i precizno se definiše. U nastavku teksta ćemo definisati neke vrste statusa.
Bazne pretpostavke za narednu priču su da imamo m osiguranika u grupi, čije starosti u trenutku sklapanja ugovora o osiguranju su $x_1, x_2, \ldots, x_m$, a $T_1, T_2, \ldots, T_m$ preostale dužine života za svaku osobu iz grupe.

Status zajedničkog doživljenja

Status zajedničkog doživljenja, koji označavamo

$$u = x_1 : x_2 : \ldots : x_m,$$

važi dok je svih m osoba iz grupe živo. Preostalo vrijeme do okončanja ovog statusa je

$$T(u) = \min\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}.$$

Pretpostavljamo da su slučajne veličine $T_1, T_2, \ldots, T_m$ nezavisne. Vjerovatnoća opstanka statusa je

$$\begin{aligned}
{}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m} &= P[T(u) > t] \\
&= P[\min\{T_1, T_2, \ldots, T_m\} > t] \\
&= P[T_1 > t, T_2 > t, \ldots, T_m > t] \\
&= \prod_{k=1}^{m} P[T_k > t] \\
&= \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k},
\end{aligned}$$

iz čega možemo dobiti vjerovatnoću

$${}_tq_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = 1 - {}_tp_{x_1:x_2:\ldots:x_m}.$$

Trenutna stopa okončanja statusa zajedničkog doživljenja je

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_u = -\frac{d}{dt} \ln \prod_{k=1}^{m} {}_tp_{x_k} = -\frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{m} \ln {}_tp_{x_k} = \sum_{k=1}^{m} \mu_{x_k+t},$$

gdje je μ_{x_k+t} intezitet smrtnosti k-te osobe iz grupe u trenutku $x_k + t$.
Možemo primjeniti principe iz prethodnih sekcija da izračunamo, na primjer, premiju diskretnog osiguranja koja traje do isteka statusa zajedničkog doživljenja. Pa,

$$A_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot {}_kp_{x_1:x_2:\ldots:x_m} \cdot q_{x_{1+k}:x_{2+k}:\ldots:x_{m+k}},$$

a premija odgovarajuće rente je

$$\ddot{a}_{x_1:x_2:\ldots:x_m} = \sum_{k=0}^{+\infty} v^k \cdot {}_kp_{x_1:x_2:\ldots:x_m}.$$

Status poslednjeg preživjelog

Status poslednjeg preživjelog, koji označavamo

$$u = \overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m},$$

važi sve dok je bar jedna osoba iz grupe živa. Dakle, status prestaje da važi smrću poslednjeg živog osiguranika u tih m osoba. Slijedi da je preostalo vrijeme do okončanja statusa poslednjeg preživjelog

$$T(u) = \max\{T_1, T_2, \ldots, T_m\}.$$

Pod pretpostavkom nezavisnosti slučajnih veličina $T_1, T_2, \dots, T_m$, vjerovatnoća ${}_tq_u$ je jednaka

$$\begin{aligned} {}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} &= P[T(u) \le t] \\ &= P[\max\{T_1, T_2, \dots, T_m\} \le t] \\ &= P[T_1 \le t, T_2 \le t, \dots, T_m \le t] \\ &= \prod_{k=1}^{m} P[T_k \le t] \\ &= \prod_{k=1}^{m} {}_tq_{x_k}. \end{aligned}$$

Vjerovatnoća

$${}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = 1 - {}_tq_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}}.$$

U slučaju kad su $T_1, T_2, \dots, T_m$ zavisne slučajne veličine, ${}_tp_u$ možemo da odredimo koristeći formulu uključivanja i isključivanja:

$${}_tp_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \sum_{j_1=1}^{m} {}_tp_{x_{j_1}} - \sum_{1 \le j_1 < j_2 \le m} {}_tp_{x_{j_1}:x_{j_2}} + \ldots + (-1)^{m-1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_m \le m} {}_tp_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_m}}.$$

Premija diskretnog osiguranja koja traje do isteka statusa poslednjeg preživjelog jednaka je

$$A_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le m} A_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}},$$

a premija doživotne rente iznosi

$$\ddot{a}_{\overline{x_1:x_2:\ldots:x_m}} = \sum_{k=1}^{m} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le j_1 < j_2 < \ldots < j_k \le m} \ddot{a}_{x_{j_1}:x_{j_2}:\ldots:x_{j_k}}.$$

Pored ova dva statusa, postoje opšti simetrični status i nesimetrični statusi. Opšti simetrični status traje dok je bar k od m osoba iz grupe živo. Oznaka je

$$u = \overset{k}{\overline{x_1 : x_2 : \ldots : x_m}}.$$

Ovaj status obuhvata prethodno razmatrane statuse. Za $k = m$ dobija se status zajedničkog doživljenja, a za $k = 1$ status poslednjeg preživjelog.
Dok su u prethodnim simetričnim statusima svi osiguranici ravnopravni, u nesimetričnom to ne važi. Primjer takvog statusa je

$$u = \overline{x : y : z : \overline{p : q}}.$$

Međutim, ovi statusi nisu razmatrani u daljem radu pa neće biti više riječi o njima.

Za pisanje dosadašnjeg dijela teksta korišćena je literatura [1] Gerber, Hans U, *Life Insurance Mathematics*, Third Edition, Springer Science, 1997.

1.5 Primjer iz prakse

Slijedi primjer koji pokazuje jedan od mogućih pristupa problemu bračnog para koje mogu koristiti osiguravajuća društva. Primjer ćemo odraditi i u programskom jeziku R. Prvo prokomentarišimo formule koje će se koristiti.

Neka muž i žena žele da kupe polisu mješovitog osiguranja na 10 godina. Tom polisom se garantuje:
- isplata ugovorene osigurane sume za slučaj doživljenja oba osiguranika;
- isplata ugovorene osigurane sume za slučaj smrti jednog od osiguranika.

Premija osiguranja se plaća godišnje tokom cijelog trajanja osiguranja, odnosno najkasnije do smrti jednog ili oba osiguranika istovremeno. Neka je iznos osigurane sume jednak $10,000$ eura. Muž ima 40 godina, a žena 35 godina. Tehnička kamatna stopa je jednaka 1.25%.
U praksi, ne gledaju se godine svakog osiguranika individualno, već se obračunava zajednička pristupna starost koju ćemo označiti sa z, obračunata po formuli:

$$z = \min\{x, y\} + faktor \;\; za \;\; korekciju.$$

Faktor za korekciju predstavlja broj koji dodajemo u zavisnosti od toga kolika je razlika u godinama starosti osiguranika. Kompanije odlučuju o izboru metode definisanja faktora korekcije. Detaljnije o tome se može pronaći na sajtu Society Of Actuaries. Neka, za razliku u godinama koja je u ovom primjeru jednaka 5, faktor za korekciju iznosi 3. Tada

$$z = 35 + 3 = 38.$$

Za ovakav vid polise, pretpostavlja se da su njihovi životi međusobno nezavisni. Koristeći osnovne tablice smrtnosti populacije prave se nove prema formuli

$$q_z = q_{x,m} + q_{y,f} - q_{x,m} \cdot q_{y,f} \tag{1.1}$$

gdje $x = y = z$ predstavljaju godine osiguranika, a m je oznaka da se radi o vjerovatnoći smrtnosti muškarca, a f o vjerovatnoći smrtnosti žene. Napominjemo da su vjerovatnoće muškarca i žene za iste godine starosti različite, tj. $q_{x,m} \neq q_{y,f}$. Na osnovu gornjih pretpostavki i obračunatog q_z, formiraju se komutativni brojevi i tablice smrtnosti.

Pristup sajtu Society Of Actuaries je `https://www.soa.org/`.

Koristeći princip ekvivalentnosti,

$$S \cdot A_{z:\overline{n}|} = P \cdot (1-\alpha) \cdot \ddot{a}_{z:\overline{n}|},$$

gdje je $\alpha = 0.2$ što bi u procentima predstavljalo 20%, S iznos osigurane sume koji je ovdje jednak $10,000$ eura, P iznos godišnje premije čiju ćemo vrijednost u nastavku izračunati. Parametar α ovdje predstavlja ukupne troškove koje ima osiguranje i koji su uključeni u iznos premije. Svako osiguravajuće društvo ima tri vrste troškova: akvizicioni troškovi, upravni troškovi i inkaso troškovi. Akvizicioni troškovi, tj. troškovi pribave osiguranja predstavljaju troškove provizije za zaključene ugovore osiguranja i troškove zaposlenih direktno. Da bi se naplatile premije, osiguravajuća društva imaju svoje zastupnike koji se time bave. Zastupnici takođe dobijaju novac za svoj posao. Ova vrsta izdatka je uključena u inkaso trošak. U administrativne troškove su uključeni izdaci potrebni za kancelarije, radnike itd. Kada u premiju uključimo troškove, takva premija se naziva *bruto premija*.
Za ovako naveden zahtjev, godišnja premija će iznositi $1,185.46$ eura. Kroz program je obračunata i matematička rezerva primjenjujući prospektivnu metodu, tj.

$$V(t) = S \cdot A_{z:\overline{n-t}|} - P \cdot (1-\alpha) \cdot \ddot{a}_{z:\overline{n-t}|}.$$

Prije samog kodiranja, pripremili smo bazu u kojoj se nalaze korigovane vjerovatnoće smrtnosti prema formuli (1.1) i u odnosu na njih su izračunati komutativni brojevi.
Slijedi tabela vjerovatnoće smrtnosti populacije Crne Gore, koja je korišćena za obračun q_z. Vjerovatnoće smrtnosti su izvučene iz Tablica mortaliteta stanovništva Crne Gore 2010-2012 koje je objavio Zavod za statistiku Crne Gore, a koje se koriste za kreiranje proizvoda osiguranja.

Pristup Tablicama mortaliteta stanovništva Crne Gore 2010-2012 je `https://www.ano.me/images/stories/monstat_mortalitet_knjiga.pdf`.

godine	muskarac	zena												
g	q g,m	q g,f	g	q g,m	q g,f	g	q g,m	q g,f	g	q g,m	q g,f	g	q g,m	q g,f
0	0,00569	0,00396	21	0,00074	0,00025	41	0,00235	0,00098	61	0,01855	0,00772	81	0,09921	0,08374
1	0,00099	0,00040	22	0,00054	0,00028	42	0,00250	0,00107	62	0,02003	0,00866	82	0,10972	0,09365
2	0,00012	0,00026	23	0,00056	0,00029	43	0,00268	0,00118	63	0,02115	0,00986	83	0,12133	0,10473
3	0,00007	0,00014	24	0,00072	0,00030	44	0,00289	0,00129	64	0,02233	0,01100	84	0,13418	0,11711
4	0,00010	0,00011	25	0,00074	0,00028	45	0,00313	0,00121	65	0,02434	0,01220	85	0,14839	0,13097
5	0,00006	0,00005	26	0,00072	0,00015	46	0,00307	0,00135	66	0,02594	0,01353	86	0,16410	0,14646
6	0,00003	0,00007	27	0,00071	0,00015	47	0,00347	0,00216	67	0,02751	0,01534	87	0,18147	0,16378
7	0,00005	0,00003	28	0,00067	0,00032	48	0,00414	0,00253	68	0,02931	0,01715	88	0,20068	0,18316
8	0,00013	0,00011	29	0,00064	0,00035	49	0,00475	0,00292	69	0,03114	0,01876	89	0,22193	0,20482
9	0,00013	0,00010	30	0,00067	0,00040	50	0,00530	0,00308	70	0,03169	0,02093	90	0,24543	0,22905
10	0,00016	0,00012	31	0,00085	0,00033	51	0,00623	0,00344	71	0,03385	0,02407	91	0,27141	0,25614
11	0,00011	0,00006	32	0,00097	0,00040	52	0,00705	0,00408	72	0,03834	0,02706	92	0,30015	0,28644
12	0,00012	0,00008	33	0,00105	0,00055	53	0,00794	0,00454	73	0,04395	0,03053	93	0,33192	0,32033
13	0,00010	0,00011	34	0,00109	0,00060	54	0,00888	0,00487	74	0,05102	0,03448	94	0,36707	0,35822
14	0,00009	0,00012	35	0,00148	0,00065	55	0,00962	0,00528	75	0,05689	0,03897	95	0,40593	0,40059
15	0,00010	0,00012	36	0,00163	0,00070	56	0,01065	0,00564	76	0,06295	0,04405	96	0,44891	0,44798
16	0,00016	0,00005	37	0,00179	0,00074	57	0,01178	0,00600	77	0,06933	0,04970	97	0,49643	0,50097
17	0,00024	0,00002	38	0,00191	0,00074	58	0,01341	0,00638	78	0,07604	0,05521	98	0,54899	0,56023
18	0,00050	0,00009	39	0,00191	0,00080	59	0,01548	0,00648	79	0,08171	0,06371	99	0,60712	0,62650
19	0,00062	0,00016	40	0,00204	0,00090	60	0,01700	0,00704	80	0,08971	0,07488	100	1,00000	1,00000
20	0,00069	0,00022												

Slika 1.2: Vjerovatnoće smrtnosti populacije Crne Gore 2010-2012

Vjerovatnoća q_z je obračunata za godine $z \in \{0, 100\}$, nakon čega su pripremljeni komutativni brojevi u Excel-u, što izgleda ovako:

Nove tablice smrtnosti									
z	qz	lz	dz	Dz	Nz	Sz	Cz	Mz	Rz
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,009623	100000	962	100000	4604893	142565343	950,464535	43149,46656	2844827
1	0,001391	99038	138	97814,97	4504893	137960449,8	134,347813	42199,00202	2801678
2	0,000381	98900	38	96473,03	4407078	133455556,6	36,30863	42064,65421	2759479
3	0,000207	98862	21	95245,69	4310605	129048478,3	19,5083437	42028,34558	2717414
4	0,000205	98842	20	94050,31	4215360	124737873,1	19,0349601	42008,83723	2675386
5	0,000107	98821	11	92870,16	4121309	120522513,6	9,77367679	41989,80227	2633377
6	9,97E-05	98811	10	91713,84	4028439	116401204,4	9,02926193	41980,0286	2591387
7	8,07E-05	98801	8	90572,55	3936725	112372765,4	7,21732617	41970,99934	2549407
8	0,000236	98793	23	89447,15	3846153	108436040,2	20,8470172	41963,78201	2507436
9	0,000223	98770	22	88322,02	3756706	104589887,5	19,4235846	41942,93499	2465472
10	0,000276	98748	27	87212,2	3668383	100833182	23,7674322	41923,51141	2423529
11	0,000169	98721	17	86111,74	3581171	97164798,5	14,4000237	41899,74398	2381606
12	0,000201	98704	20	85034,23	3495060	93583627,2	16,9197384	41885,34395	2339706
13	0,000215	98684	21	83967,5	3410025	90088567,64	17,8211495	41868,42421	2297821
14	0,000207	98663	20	82913,05	3326058	86678542,31	16,9195353	41850,60306	2255952
15	0,000218	98642	22	81872,51	3243145	83352484,48	17,6658726	41833,68353	2214102
16	0,000213	98621	21	80844,07	3161272	80109339,69	17,0158818	41816,01766	2172268
17	0,000259	98600	26	79828,98	3080428	76948067,42	20,4171771	41799,00177	2130452
18	0,000592	98574	58	78823,02	3000599	73867639,21	46,1181223	41778,5846	2088653
19	0,000778	98516	77	77803,78	2921776	70867039,98	59,7995689	41732,46647	2046874
20	0,00091	98439	90	76783,44	2843972	67945263,78	69,0474785	41672,66691	2005142
21	0,000991	98350	97	75766,45	2767189	65101291,35	74,1519287	41603,61943	1963469
22	0,000816	98252	80	74756,91	2691423	62334102,35	60,2243361	41529,4675	1921866
23	0,000851	98172	84	73773,76	2616666	59642679,81	61,9767777	41469,24316	1880336
24	0,001019	98088	100	72800,99	2542892	57026014,17	73,2806353	41407,26638	1838867
25	0,001018	97989	100	71828,93	2470091	54483122,29	72,2368357	41333,98575	1797460
26	0,000873	97889	85	70869,92	2398262	52013031,4	61,0761775	41261,74891	1756126
27	0,000861	97803	84	69933,91	2327392	49614769,44	59,4890406	41200,67274	1714864
28	0,000991	97719	97	69011,04	2257458	47287377,41	67,5394034	41141,1837	1673663
29	0,000997	97622	97	68091,51	2188447	45029919,29	67,0596726	41073,64429	1632522
30	0,001073	97525	105	67183,81	2120356	42841472,2	71,1909608	41006,58462	1591449
31	0,001172	97420	114	66283,19	2053172	40721116,62	76,6994523	40935,39366	1550442
32	0,001374	97306	134	65388,18	1986889	38667944,86	88,7562453	40858,69421	1509507
33	0,001597	97172	155	64492,16	1921500	36681056,29	101,736194	40769,93796	1468648
34	0,001693	97017	164	63594,23	1857008	34759555,9	106,350304	40668,20177	1427878
35	0,002131	96853	206	62702,76	1793414	32902547,68	131,988567	40561,85146	1387210
36	0,002333	96647	225	61796,67	1730711	31109133,68	142,372712	40429,8629	1346648
37	0,002528	96421	244	60891,37	1668915	29378422,45	152,043523	40287,49018	1306218
38	0,002644	96177	254	59987,58	1608023	27709507,89	156,667938	40135,44666	1265930
39	0,002708	95923	260	59090,33	1548036	26101484,7	158,036976	39978,77872	1225795
40	0,00294	95663	281	58202,78	1488945	24553449,1	169,016136	39820,74175	1185816
41	0,003331	95382	318	57315,21	1430742	23064503,83	188,541017	39651,72561	1145996
42	0,003571	95064	339	56419,08	1373427	21633761,34	198,966633	39463,1846	1106344
43	0,003856	94725	365	55523,58	1317008	20260334,06	211,471409	39264,21796	1066881
44	0,004171	94360	394	54626,63	1261485	18943325,86	225,043435	39052,74655	1027616
45	0,004333	93966	407	53727,18	1206858	17681841,24	229,935679	38827,70312	988563,7
46	0,004412	93559	413	52833,95	1153131	16474983,25	230,242533	38597,76744	949736
47	0,005621	93146	524	51951,44	1100297	15321852,44	288,431204	38367,52491	911138,2
48	0,006655	92622	616	51021,63	1048345	14221555,58	335,342745	38079,0937	872770,7
49	0,007658	92006	705	50056,39	997323,8	13173210,16	378,576052	37743,75096	834691,6
50	0,008358	91301	763	49059,83	947267,4	12175886,37	404,992054	37365,1749	796947,8

Slika 1.3: Korigovane tablice smrtnosti

51	0,009656	90538	874	48049,17	898207,6	11228618,97	458,215496	36960,18285	759582,6
52	0,011095	89664	995	46997,75	850158,4	10330411,41	515,012685	36501,96735	722622,5
53	0,012441	88669	1103	45902,52	803160,7	9480253,006	564,004463	35986,95467	686120,5
54	0,013705	87566	1200	44771,82	757258,1	8677092,355	606,041546	35422,95021	650133,5
55	0,014843	86366	1282	43613,04	712486,3	7919834,223	639,359009	34816,90866	614710,6
56	0,016222	85084	1380	42435,24	668873,3	7207347,907	679,895591	34177,54965	579893,7
57	0,017713	83704	1483	41231,46	626438	6538474,626	721,326244	33497,65406	545716,1
58	0,019701	82221	1620	40001,1	585206,6	5912036,591	778,340227	32776,32782	512218,5
59	0,021853	80601	1761	38728,92	545205,5	5326830,012	835,90435	31997,98759	479442,1
60	0,023921	78840	1886	37414,88	506476,6	4781624,533	883,934606	31162,08324	447444,2
61	0,026125	76954	2010	36069,03	469061,7	4275147,974	930,683364	30278,14863	416282,1
62	0,028517	74944	2137	34693,05	432992,6	3806086,296	977,137283	29347,46527	386003,9
63	0,030807	72806	2243	33287,61	398299,6	3373093,65	1012,84585	28370,32799	356656,5
64	0,033087	70563	2335	31863,8	365012	2974794,059	1041,26502	27357,48213	328286,1
65	0,036239	68229	2473	30429,16	333148,2	2609782,074	1089,11962	26316,21711	300928,7
66	0,039116	65756	2572	28964,37	302719	2276633,892	1118,99083	25227,09749	274612,4
67	0,042432	63184	2681	27487,79	273754,7	1973914,868	1151,97473	24108,10666	249385,3
68	0,045957	60503	2781	25996,46	246266,9	1700160,213	1179,96006	22956,13193	225277,2
69	0,049314	57722	2847	24495,56	220270,4	1453893,352	1193,06634	21776,17188	202321,1
70	0,051957	54876	2851	23000,08	195774,8	1233622,954	1180,26434	20583,10554	180544,9
71	0,057103	52025	2971	21535,86	172774,8	1037848,116	1214,5849	19402,84121	159961,8
72	0,064361	49054	3157	20055,4	151238,9	865073,3569	1274,84763	18188,25631	140559
73	0,073141	45897	3357	18532,96	131183,5	713834,4606	1338,77595	16913,40868	122370,7
74	0,083736	42540	3562	16965,38	112650,5	582650,9675	1403,06795	15574,63273	105457,3
75	0,093644	38978	3650	15352,86	95685,16	470000,4324	1419,95111	14171,56478	89882,68
76	0,10423	35328	3682	13743,37	80332,29	374315,2774	1414,79123	12751,61367	75711,12
77	0,115582	31646	3658	12158,91	66588,92	293982,9853	1388,004	11336,82244	62959,5
78	0,127045	27988	3556	10620,79	54430,01	227394,0636	1332,65884	9948,818439	51622,68
79	0,140215	24432	3426	9157,014	43809,22	172964,0498	1268,10239	8616,159603	41673,86
80	0,15788	21006	3316	7775,862	34652,21	129154,8299	1212,49942	7348,057215	33057,7
81	0,174647	17690	3089	6467,365	26876,34	94502,62423	1115,55911	6135,557796	25709,64
82	0,19309	14600	2819	5271,961	20408,98	67626,28074	1005,396	5019,998685	19574,09
83	0,213352	11781	2514	4201,479	15137,02	47217,30175	885,327146	4014,60269	14554,09
84	0,235578	9268	2183	3264,282	10935,54	32080,28416	759,500569	3129,275544	10539,49
85	0,259918	7084	1841	2464,482	7671,256	21144,74601	632,656047	2369,774975	7410,21
86	0,286521	5243	1502	1801,4	5206,774	13473,49006	509,766704	1737,118928	5040,435
87	0,315531	3741	1180	1269,394	3405,374	8266,715936	395,587689	1227,352224	3303,316
88	0,347083	2560	889	858,1347	2135,98	4861,341906	294,166459	831,764535	2075,964
89	0,381295	1672	637	553,3739	1277,845	2725,361755	208,393979	537,5980764	1244,199
90	0,418261	1034	433	338,1482	724,4715	1447,516265	139,688214	329,204097	706,601
91	0,458034	602	276	194,2853	386,3234	723,0447211	87,8907391	189,5158829	377,3969
92	0,500614	326	163	103,996	192,038	336,7213673	51,4191548	101,6251439	187,881
93	0,545926	163	89	51,29293	88,04206	144,6833207	27,6564505	50,20598905	86,25585
94	0,593794	74	44	23,00323	36,74913	56,64125796	13,4905517	22,54953858	36,04986
95	0,643908	30	19	9,228689	13,7459	19,89212333	5,86906722	9,058986865	13,50032
96	0,695783	11	7	3,245688	4,517214	6,14622031	2,23041543	3,189919647	4,441334
97	0,748704	3	2	0,975202	1,271526	1,629006658	0,72112381	0,959504215	1,251415
98	0,801659	1	1	0,242039	0,296324	0,357480722	0,19163715	0,238380403	0,291911
99	0,853257	0	0	0,047413	0,054285	0,061156853	0,03995639	0,046743255	0,05353
100	1	0	0	0,006872	0,006872	0,006871705	0,00678687	0,00678687	0,006787

Slika 1.4: Korigovane tablice smrtnosti

Ovako sređena tabela (slike 1.3 i 1.4) se koristi kao baza za obračun u R-u.

Kako se radi o diskretnom tipu osiguranja, najlakši pristup obračuna jeste korišćenje komutativnih brojeva. Pa, kada iz jednačine principa ekvivalentnosti izvučemo P, dobijamo

$$P = \frac{S \cdot A_{z:\overline{n}|}}{(1-\alpha)\cdot \ddot{a}_{z:\overline{n}|}}.$$

Primjenom komutativnih brojeva (4.12) i (4.16) koje imamo u poglavlju „Komutativne funkcije”, ovo je isto što i

$$P = \frac{S \cdot (M_z - M_{z+n} + D_{z+n})}{(1-\alpha)\cdot (N_z - N_{z+n})}.$$

U R-u to izgleda ovako:

```
x <- 35
y <- 40

p <- c(x, y)
z <- min(p) + 3
z
print(z)

qz <- Nove_tablice$qz
print(qz)
Mz <- Nove_tablice$Mz
Nz <- Nove_tablice$Nz
Dz <- Nove_tablice$Dz



n <- 10
S <- 10000
t <- 0.2

P <- S*(Mz[z+2]-Mz[z+n+2]+Dz[z+n+2])/ ((1-t)*(Nz[z+2]-Nz[z+n+2]))
print(P)
```

Nakon pokretanja koda, vidimo rezultat u konzoli. Dobijena premija P iznosi 1,186.46. Slično, primjenom komutativnih funkcija na formulu za obračun matematičke rezer-

Na kraju master rada se nalaze formule za komutativne funkcije koje su korištene u primjeru.

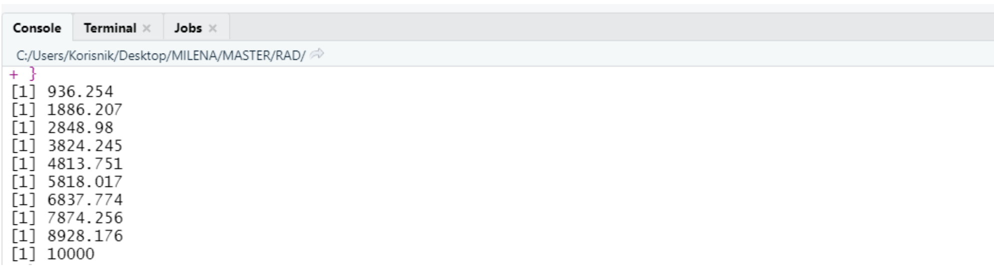
ve, dobijamo

$$V(z+t) = S \cdot (M_{z+t} - M_{z+n} + D_{z+n}) - (1-\alpha) \cdot P \cdot (N_{z+t} - N_{z+n}), \; t = \overline{1,10}$$

što u R-u izgleda ovako:

```
V <- c()
for (j in 1:n){
V[j] =
(S*(Mz[z+j+2]-Mz[z+n+2]+Dz[z+n+2])-P*(1-t)*(Nz[z+j+2]-Nz[z+n+2]))/Dz[z+j+2]
print(V[j])
}
```

Rezultat obračuna matematičke rezerve je na sledećem prikazu:



Slika 1.5: Rezultat razvijene matematičke rezerve u R-u

Znak da smo dobro razvili ponašanje matematičke rezerve jeste da je u 10. godini matematička rezerva jednaka osiguranoj sumi, što vidimo u rezultatu u konzoli.

Glava 2

Zavisnost života u životnom osiguranju

Prethodno objašnjeni primjer zadovoljavajuće opisuje postupak osiguranja za bračni par, ali ne uzima u obzir neka zapažanja iz realnog života koja bi se mogla iskoristiti pri modelovanju. Sledeći dio rada se odnosi na razvijanje te ideje i njene primjene.

2.1 Zavisni životi

Aktuarske tablice su se bazirale na pretpostavci da kada posmatramo više osoba, preostale dužine života ljudi iz posmatrane grupe su nezavisne slučajne veličine. Međutim, ova pretpostavka nije realistična.
Neka su S i T realne slučajne veličine definisane na nekom vjerovatnosnom prostoru. Kako nas interesuje analiza preživljavanja koja se tiče životnog osiguranja, neka S i T predstavljaju preostale dužine dva života koja su pokrivena istom polisom osiguranja. Na primjer, možemo da posmatramo bračni par gdje slučajna veličina S predstavlja preostalu dužinu života muža, a T predstavlja preostalu dužinu života žene. Dodatno, pretpostavimo da su S i T strogo pozitivne sa vjerovatnoćom 1 i da imaju zajedničku funkciju gustine.
Slučajne veličine S i T su **stohastički nezavisne** ako

$$P[S > s, T > t] = P[S > s] \cdot P[T > t] \quad \forall s, t \ . \tag{2.1}$$

Stohastička nezavisnost implicira da je $cov(g(S), h(T)) = 0 \ \forall g, h$ gdje su g i h funkcije takve da je kovarijansa dobro definisana.

Statistika smrtnosti ukazuje da su dužine života muža i žene zavisne slučajne veličine, štaviše, pozitivno korelisane. Za ovu empirijsku činjenicu postoji više različitih objašnjenja. Na primjer, ljudi koji su u braku pretežno imaju sličan način života i životne uslove pa zbog toga i rizike od sličnih ili istih bolesti i nesreća. Dodatno, smrt jednog supružnika utiče na trajanje života drugog (znamo za slučajeve kada jedan od supružnika umre, preživjeli supružnik umre vrlo brzo nakon toga zbog tuge za voljenom osobom ili prosto jer ne umije da se snađe u novonastaloj situaciji, ne vodi računa o svom zdravlju, ne zna da nabavlja i sprema sebi hranu itd.).
Korelacija je specijalnija mjera zavisnosti, ali neće biti potrebna u daljem radu.

2.2 Pojmovi zavisnosti

Postoje različite definicije pozitivne zavisnosti slučajnih veličina.

Definicija 2.2.1. *Neka su S i T slučajne veličine definisane na istom prostoru vjerovatnoća, koje skoro sigurno uzimaju strogo pozitivne vrijednosti. Tada važi:*
(a) S i T su ***pozitivno zavisne u prvom kvadrantu*** *ako je*

$$P[S > s, T > t] \geq P[S > s] \cdot P[T > t] \quad \forall s, t > 0 \ .$$

(b) S i T su ***povezane*** *ako je*

$$cov(g(S,T), h(S,T)) \geq 0,$$

za sve parove realnih funkcija g i h koje su rastuće po oba argumenta i takve da postoje $E(g(S,T)), E(h(S,T)), E(g(S,T) \cdot h(S,T))$.
(c) S je ***rastuća u desnom repu*** *za T ako je*

$$P[S > s | T > t]$$

rastuća funkcija po t za svako fiksirano s.

Napomena 2.2.1. *Uslov iz definicije (c) se može zapisati i kao*

$$P[S > s | T > t] \geq P[S > s],$$

što možemo interpretirati: znajući da će žena živjeti bar još t godina, povećava se vjerovatnoća preživljavanja muškarca.

Za pisanje poglavlja 2.1. korišćena je literatura: [3] Norberg, Ragnar, *Basic Life Insurance Mathematics*, Lecture notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen (2000).

Napomena 2.2.2. *U prethodnoj definiciji, umjesto događaja $S > s$ i $T > t$ možemo posmatrati i događaje $S \geq s$ i $T \geq t$. Kako su S i T slučajne veličine apsolutno neprekidnog tipa, to je mjera jedne tačke jednaka 0, pa ne utiče na rezultat.*

Definicija pozitivne zavisnosti u prvom kvadrantu je simetrična po objema promjenljivima, kao i definicija povezanih slučajnih veličina. Definicija (c) nije simetrična po promjenljivima, tj. ako je S rastuća u desnom repu za T, ne mora T da bude rastuća u desnom repu za S.
Analogno se može definisati negativna zavisnost slučajnih veličina. Kažemo da su S i T negativno zavisne u prvom kvadrantu ako je nejednakost u definiciji (a) obrnuta. Takođe, kažemo da su S i T negativno povezane, ako je nejednakost u definiciji (b) obrnuta. Kažemo da je S opadajuća u desnom repu za T ako je $P[S > s|T > t]$ opadajuća funkcija po t za svako fiksirano s.

Pokazuje se da iz uslova rasta u desnom repu slijedi povezanost, a iz toga slijedi pozitivna zavisnost slučajnih veličina. Da bismo ovo dokazali, prethodno ćemo detaljnije analizirati navedene pojmove zavisnosti.

Definicija 2.2.2. *Kažemo da je S* ***opadajuća u lijevom repu*** *za T ako je*

$$P[S \leq s|T \leq t]$$

opadajuća funkcija po t za svako fiksirano s.

Definicija 2.2.3. *Kažemo da je S* ***pozitivno regresiono zavisna*** *od T ako je*

$$P[S \leq s|T = t]$$

opadajuća funkcija po t za svako fiksirano s.

Uslov iz definicije 2.2.2 ekvivalentan je sa uslovom

$$P[S > s|T \leq t_1] \leq P[S > s|t_1 < T < t_2] \quad \forall s \text{ i } t_1 < t_2. \tag{2.2}$$

Uslov iz definicije 2.2.1(c) ekvivalentan je sa uslovom

$$P[S > s|t_1 < T \leq t_2] \leq P[S > s|t_2 < T] \quad \forall s \text{ i } t_1 < t_2. \tag{2.3}$$

Kombinujući (2.2) i (2.3), dolazi se do zajedničkog uslova za S opadajuća u lijevom repu za T i S rastuća u desnom repu za T :

$$P[S > s|T \leq t_1] \leq P[S > s|t_1 < T < t_2] \leq P[S > s|T \geq t_2] \quad \forall s \text{ i } t_1 < t_2. \tag{2.4}$$

Elementarnim sređivanjem se pokazuje da je uslov (2.2) ekvivalentan sa:

$$P[S > s, T \leq t_1] \cdot P[S \leq s, t_1 < T \leq t_2]$$
$$\leq P[S \leq s, T \leq t_1] \cdot P[S > s, t_1 < T \leq t_2] \quad \forall s \text{ i } t_1 < t_2. \tag{2.5}$$

Analogno, pokazuje se da je uslov (2.3) ekvivalentan sa:

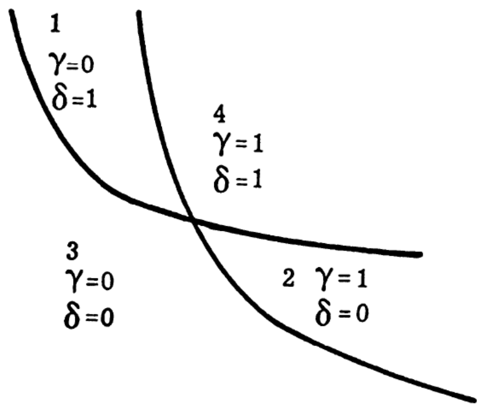
$$P[S > s, t_1 < T \leq t_2] \cdot P[S \leq s, T > t_2]$$
$$\leq P[S \leq s, t_1 < T \leq t_2] \cdot P[S > s, T > t_2] \quad \forall s \text{ i } t_1 < t_2. \tag{2.6}$$

U radu Esary, Proschan i Walkup(1967), pokazuje se da je uslov povezanosti iz definicije 2.2.1 (b) ekvivalentan uslovu:

$$P[\gamma(S,T) = 1, \delta(S,T) = 0] \cdot P[\gamma(S,T) = 0, \delta(S,T) = 1]$$
$$\leq P[\gamma(S,T) = 0, \delta(S,T) = 0] \cdot P[\gamma(S,T) = 1, \delta(S,T) = 1] \tag{2.7}$$

za sve parove binarnih funkcija (γ, δ) koje su rastuće po svakom od svoja dva argumenta.

Na sledećoj slici je prikaz prethodnog uslova (2.7), tj. $P[1] \cdot P[2] \leq P[3] \cdot P[4]$.



Slika 2.1: Slika preuzeta iz [5].

Literatura na koju se oslanja rad je [4] Esary, James D., Frank Proschan, David W. Walkup, *Association of random variables, with applications*, The Annals of Mathematical Statistics 38.5 (1967): 1466-1474.

Teorema 2.2.1. *Iz uslova da je slučajna veličina S rastuća u desnom repu za T slijedi da su slučajne veličine S i T povezane. Iz povezanosti slučajnih veličina S i T slijedi da su one pozitivno zavisne u prvom kvadrantu.*

Za dokaz navedene teoreme će biti potrebne i sledeće leme, čije dokaze nećemo navoditi.

Definicija 2.2.4. *Kažemo da je (s_0, t_0) granična tačka oblasti $\{\gamma = 0\} \equiv \{(s,t)|\gamma(s,t) = 0\}$ ako je $\gamma(s_0, t_0) = 0$ i $\gamma(s_0 + 1, t_0 + 1) = 1$.*

Lema 2.2.1. *Neka je (s_2, t_2) granična tačka oblasti $\{\gamma = 0\}$ i $\{\delta = 0\}$. Slabljenjem uslova (2.6), uslov da je S rastuća u desnom repu za T implicira*

$$P[\gamma(S,T) \neq \delta(S,T), t_1 < T \leq t_2] \cdot P[\gamma(S,T) \neq \delta(S,T), t_2 < T]$$
$$\leq P[\gamma(S,T) = 0, \delta(S,T) = 0, t_1 < T \leq t_2] \cdot P[\gamma(S,T) = 1, \delta(S,T) = 1, t_2 < T]$$

za sve $t_1 < t_2$.

Za fiksirano t važi (i) $\gamma(s,t) \geq \delta(s,t) \ \ \forall s$ ili (ii) $\gamma(s,t) \leq \delta(s,t) \ \ \forall s$. Interval $[0, n]$ možemo podijeliti na intervale $I_1, I_2, \ldots, I_k$, tako da na svakom intervalu $I_j, \ \ j = 1, \ldots, k$ važi (i) ili (ii). Pritom, ako na I_j važi (i), onda na intervalu I_{j+1} važi (ii) i obratno, ako na intervalu I_j važi (ii), onda na intervalu I_{j+1} važi (i). Ovakvu podjelu intervala nazivamo *naizmjeničnom podjelom intervala.*

Lema 2.2.2. *Neka je $I_1, I_2, \ldots, I_k$ naizmjenična podjela intervala $[0, n]$. Neka je $t_j = \max\{t|t \in I_j\}$, $s_j = \max\{s|\gamma(s, t_j) = \delta(s, t_j) = 0\}$. Onda su tačke (s_j, t_j), $j = 1, \ldots, k-1$ granične tačke oblasti $\{\gamma = 0\}$ i $\{\delta = 0\}$.*

Dokaz. (teoreme 2.2.1) Sada ćemo započeti postupak pokazivanja da iz uslova rasta u desnom repu slijedi povezanost, a iz toga slijedi pozitivna zavisnost slučajnih veličina. Prvo pokazujemo da iz uslova rasta u desnom repu slijedi povezanost.
Za date slučajne veličine S i T, napravimo dvije proizvoljne podjele realne prave sa podeonim tačkama $s_1 < s_2 < \ldots < s_m$ i $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$. Neka su nadalje ove tačke fiksirane.
Definišimo diskretne slučajne veličine S^* i T^* na sledeći način:
$S^* = i$ ako je $s_i < S \leq s_{i+1}$,
$T^* = i$ ako je $t_i < T \leq t_{i+1}$,
gdje $i = 0, \ldots, n$, $s_0 = t_0 = -\infty$ i $s_n = t_n = +\infty$.

Povezanost slučajnih veličina (definicija 2.2.1(b)) ekvivalentna sa povezanošću slučajnih veličina S^* i T^* za sve izbore brojeva n,m i $s_1, \ldots, s_m$, $t_1, \ldots, t_n$. Jasno je i da iz uslova da je slučajna veličina S rastuća u desnom repu za T implicira uslov da je slučajna veličina S^* rastuća u desnom repu za T^*, tj.

$$P[S^* > i | T^* > j] = P[S > s_{i+1} | T^* > j] > P[S > s_i | T^* > j] = P[S^* > i-1 | T^* > j].$$

Iz navedenog se vidi da je sada dovoljno pokazati da iz uslova da je slučajna veličina S^* rastuća u desnom repu za T^* slijedi da su slučajne veličine S^* i T^* povezane.
U skladu sa prethodnim napomenama, pretpostavimo od sada da je:
S diskretna slučajna veličina koja uzima vrijednosti $0, 1, \ldots, m$,
T diskretna slučajna veličina koja uzima vrijednosti $0, 1, \ldots, n$.
Takođe, pretpostavljamo da su γ, δ binarne, rastuće funkcije po argumentima $s = 0, 1, \ldots, m$ i $t = 0, 1, \ldots, n$. Ako su γ ili δ identički jednake 0 ili 1, onda je $cov(\gamma(S,T), \delta(S,T)) = 0$. Iz tog razloga, pretpostavljamo da ni γ ni δ nisu identički jednake 0 ili 1.

Prvo pokazujemo da iz $P[S > s | T > t]$ rastuća funkcija po t za svako fiksirano s slijedi da su S i T povezane. Definiciju povezanosti koju ćemo pokazati je (2.7).
Oslanjajući se na uslov (2.7) za povezanost slučajnih veličina S i T, neka je
$p_{ij} = P[\gamma(S,T) = i, \delta(S,T) = j] \ \ i, j = 0, 1.$
Neka je $I_1, I_2, \ldots, I_k$ naizmjenična podjela intervala $[0, n]$.
Neka je
$a_j = P[\gamma(S,T) \neq \delta(S,T), \ T \in I_j]$
$b_j = P[\gamma(S,T) = \delta(S,T) = 0, \ T \in I_j]$
$c_j = P[\gamma(S,T) = \delta(S,T) = 1, \ T \in I_j]$, $j = 1, \ldots, k$.
Primjenimo lemu 2.2.1 (interval iz leme 2.2.1 $(t_1, t_2]$ je interval I_j) da dobijemo

$$a_j \cdot (a_{j+1} + \ldots + a_k) \leq b_j \cdot (c_{j+1} + \ldots + c_k), \quad j = 1, \ldots, k-1.$$

Sada,

$$p_{10} = \sum_{j=1}^{k} e_j \cdot a_j$$
$$p_{01} = \sum_{j=1}^{k} (1 - e_j) \cdot a_j$$

gdje je

$$e_j = \begin{cases} 1 & , \gamma \geq \delta \text{ na intervalu } I_j \\ 0 & , \gamma < \delta \text{ na intervalu } I_j. \end{cases}$$

Takođe,

$$p_{00} = \sum_{j=1}^{k} b_j$$

$$p_{11} = \sum_{j=1}^{k} c_j \ .$$

Onda slijedi da

$$p_{10} \cdot p_{01} \leq \sum_{i<j} a_i \cdot a_j \leq \sum_{i<j} b_i \cdot c_j \leq p_{00} \cdot p_{11}$$

čime je pokazano da važi uslov (2.7).

Sada prelazimo na lakši dio dokaza u kojem pokazujemo da iz povezanosti slučajnih veličina S i T (definicija 2.2.1 (b)) slijedi da su one pozitivno zavisne u prvom kvadrantu.

Za

$$g(S,T) = \mathbf{1}_{(s,\infty)}(S) = \mathbf{1}\{S > s\},$$
$$h(S,T) = \mathbf{1}_{(t,\infty)}(S) = \mathbf{1}\{T > t\},$$

$cov(g(S,T), h(S,t)) \geq 0$ svodi se na

$$cov(\mathbf{1}\{S > s\}, \mathbf{1}\{T > t\}) \geq 0$$

što je upravo reformulacija nejednakosti za pozitivno zavisne slučajne veličine u prvom kvadrantu.

□

Naredni rezultat govori da je pozitivna zavisnost u prvom kvadrantu ekvivalentna „marginalnoj povezanosti".

Lema 2.2.3. *S i T su pozitivno kvadratno zavisne ako i samo ako je $cov(g(S), h(T)) \geq 0$ za sve rastuće funkcije g i h.*

Za pisanje poglavlja 2.2 korišćena je literatura: [5] Esary, James D., Frank Proschan, *Relationships among some concepts of bivariate dependence*, The Annals of Mathematical Statistics (1972): 651-655.

Dokaz. Prema $cov(\mathbf{1}\{S > s\}, \mathbf{1}\{T > t\}) \geq 0$, rezultat važi za rastuće indikatorske funkcije.
Onda važi i za rastuće jednostavne funkcije koje su date na sledeći način

$$g(S) = g_0 + \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\},$$
$$h(T) = h_0 + \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\},$$

gdje su $g_0, h_0 \in \mathbf{R}$, g_i i h_i konstante za koje važi $g_i > 0,\ i = 1, \ldots, m$ i $h_j > 0,\ j = 1, \ldots, n$.
Pokazujemo da važi

$$\begin{aligned}
cov(g(S), h(T)) &= E[(g_0 + \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}) \cdot (h_0 + \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\})] \\
&- E[g_0 + \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}] \cdot E[h_0 + \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\}] \\
&= E[g_0 \cdot h_0 + g_0 \sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\} + h_0 \sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\} \\
&+ \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i h_j \mathbf{1}\{S > s_i\} \mathbf{1}\{T > t_j\}] \\
&- [g_0 + E(\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\})] \cdot [h_0 + E(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\})] \\
&= g_0 h_0 + g_0 E(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\}) + h_0 E(\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}) \\
&+ E(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} g_i h_j \mathbf{1}\{S > s_i\} \mathbf{1}\{T > t_j\}) \\
&- [g_0 h_0 + g_0 E(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\}) + h_0 E(\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}) \\
&+ E(\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}) E(\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\})].
\end{aligned}$$

Nakon skraćivanja sabiraka i elementarnog sređivanja, dolazimo do izraza

$$\begin{aligned} cov(g(S), h(T)) &= E[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i h_j \mathbf{1}\{S > s_i\}\mathbf{1}\{T > t_j\}] \\ &- E[\sum_{i=1}^{m} g_i \cdot \mathbf{1}\{S > s_i\}] \cdot E[\sum_{j=1}^{n} h_j \cdot \mathbf{1}\{T > t_j\}] \\ &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} g_i \cdot h_j \cdot cov(\mathbf{1}\{S > s\}, \mathbf{1}\{T > t\}) \geq 0. \end{aligned}$$

Kako važi za rastuće jednostavne funkcije, onda važi za sve rastuće funkcije $g(S)$ i $h(T)$ jer bilo koja rastuća funkcija koja slika iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}$ može biti napisana kao limes niza rastućih jednostavnih funkcija.

□

2.3 Sadašnja vrijednost osiguranih suma i životnih anuiteta kada su životi zavisni

Sada ćemo prethodnu diskusiju primjeniti na slučaj životnog osiguranja za dvije osobe. Tačnije, posmatraćemo bračni par koji kupuje polisu osiguranja u trenutku kada muž ima x godina, a žena y godina. Povezujući sa prethodnim poglavljem, neka i ovdje slučajna veličina S predstavlja preostalo trajanje života muža, a slučajna veličina T preostalo trajanje života žene.
Interesuju nas sledeći statusi:

Status (z)	Dužina života U	Funkcija preživljavanja $P[U > \tau]$	
Muž (x)	S	$P[S > \tau]$	(1)
Žena (y)	T	$P[T > \tau]$	(2)
Zajedničkog doživljenja (x, y)	$S \wedge T$	$P[S > \tau, T > \tau]$	(3)
Poslednjeg preživjelog $(\overline{x, y})$	$S \vee T$	$P[S > \tau] + P[T > \tau] - P[S > \tau, T > \tau]$	(4)

Tabela 2.1: Statusi i njihove funkcije preživljavanja

Slučajne veličine koje će nam biti od posebnog značaja su sadašnje vrijednosti plaćanja koja su određena životnim vijekom ovih statusa. U sledećoj tabeli su date formule za sadašnje vrijednosti i njihove očekivane vrijednosti za osnovne vrste osiguranja za status (z) sa preostalom dužinom života U. Date šeme plaćanja su sa restrikcijom na n godina. Kao i inače, $v = e^{-\delta}$ predstavlja diskontni faktor sa odgovarajućom fiksiranom vrijednosti inteziteta kamate δ.

Vrsta osiguranja	Sadašnja vrijednost	Očekivana sadašnja vrijednost	
Za slučaj doživljenja	$C_n^e(U) = v^n \mathbf{1}\{U > n\}$	$A_{z:\overset{1}{\overline{n}\rceil}} = v^n P[U > n]$	(5)
Privremena renta	$C_n^a(U) = \int_o^n v^\tau \mathbf{1}\{U > \tau\} d\tau = \frac{1-v^{U \wedge n}}{\delta}$	$\bar{a}_{z:\overline{n}\rceil} = \int_0^n v^\tau P[U > \tau] d\tau$	(6)
Privremeno osiguranje	$C_n^i(U) = v^U \mathbf{1}\{U \leq n\}$	$\bar{A}^1_{z:\overline{n}\rceil} = 1 - \delta \bar{a}_{z:\overline{n}\rceil} - A_{z:\overset{1}{\overline{n}\rceil}}$	(7)

Tabela 2.2: Očekivane sadašnje vrijednosti za osnovne vrste osiguranja za status (z) sa preostalom dužinom života U

Iz tabele 2.1 vidimo da dužine života statusa (z), što smo označili sa U, su rastuće funkcije po S i T.
Sada posmatrajmo tabelu 2.2. Oboje, $C_n^e(U)$ i $C_n^a(U)$ su onda rastuće funkcije po U, a $C_n^i(U)$ je opadajuća funkcija po U. Napomenimo, gornji indeksi e, a, i stoje kako bismo razlikovali sadašnju vrijednost po vrsti osiguranja. Za slučaj doživljenja je indeks e kao *endowment* na engleskom, za anuitet je a kao *annuity* i za privremeno osiguranje je indeks i kao *insurance* na engleskom.
Kombinujući navedene rezultate sa definicijom 2.2.1 (b), dobijamo određene rezultate koji su zasnovani na međuzavisnosti sadašnjih vrijednosti plaćanja koje se tiču povezanih života.
Dakle, pretpostavimo da su S i T povezane slučajne veličine u smislu definicije 2.2.1(b) i neka slučajne veličine U i V budu bilo koje dvije dužine života od dužina života navedenih u tabeli 2.1. Onda su $C_m^\alpha(U)$ i $C_n^\beta(V)$ pozitivno korelisane za $\alpha, \beta \in \{a, e\}$ i za $\alpha = \beta = i$, a negativno korelisane za $\alpha \in \{a, e\}$ i $\beta = i$. Na primjer, ako posmatramo sadašnju vrijednost osigurane sume privremenog osiguranja na m godina kod muža $C_m^i(S)$ i sadašnju vrijednost osigurane sume privremenog osiguranja na n godina kod žene $C_n^i(T)$, te dvije slučajne veličine su pozitivno korelisane. Sa druge strane, ako posmatramo sadašnju vrijednost osigurane sume privremenog osiguranja na m godina kod muža $C_m^i(S)$ i neprekidnu rentu na n godina kod žene $C_n^a(T)$, te dvije slučajne veličine su negativno korelisane. Slični iskazi vrijede za izraze koji su tipa

$$C_n^i(V) - \pi \cdot C_n^a(U). \tag{2.8}$$

Navedeni izraz predstavlja razliku sadašnje vrijednosti osigurane sume privremenog osiguranja na n godina i premije koja se plaća za to osiguranje u trenutku V ako je

$V \leq n$, sa nivoom premije koji se isplaćuje sa konstantnom stopom π sve dok važi $U \wedge n$. Jasno, ovaj izraz je opadajuća funkcija po S i T, pa ako bismo, na primjer, posmatrali $C_m^i(S) - \pi_x \cdot C_m^a(S)$ i $C_n^i(T) - \pi_y \cdot C_n^a(T)$, ove dvije razlike su pozitivno korelisane.
Opšti rezultati ovog tipa se ne mogu dobiti za sadašnje vrijednosti koje nisu monotone po S i T. Primjeri za to su odložena plaćanja koja su tipa $C_\infty^\alpha(U) - C_m^\alpha(U)$, $\alpha \in \{a, i\}$, sadašnje vrijednosti povezane sa složenim statusima, na primjer privremeno osiguranje za osobu starosti (x) koje se isplaćuje jedino u slučaju da osoba starosti (y) nadživi (x) ($v^S \mathbf{1}\{S \leq T \wedge n\}$) ili povraćajna renta za osobu starosti (y) nakon smrti osobe starosti (x) ($C_n^a(T) - C_n^a(S \wedge T)$).

Napomena 2.3.1. *Kako se sa terminom povraćajna renta kroz ovaj rad nismo do sada susreli, a značajan je u aktuarskoj nauci, slijedi objašnjenje istog. Svešćemo ga na primjer bračnog para, kako bismo bili u skladu sa temom, iako se može primjeniti na bilo koja dva života. Povraćajna renta je anuitet koji se isplaćuje ženi kada muž umre, pod uslovom da je ona još uvijek živa. Mogu biti bilo koja dva života, ali primjer bračnog para daje dobru intuiciju kada razmišljamo o ovakvom primjeru. Motivacija nastanka ovakve vrste osiguranja je nastala davno u prošlosti kada su samo muškarci radili i zarađivali novac a žene bile kod kuće. Tada, u slučaju smrti muškarca, postojao je rizik da žena više neće imati prihoda, što se rješavalo ovakvom vrstom osiguranja. Koliko će iznositi anuitet po nastanku osiguranog slučaja se dogovara, a na cijenu premije uticaće godine starosti od oboje, muža i žene.*

Zavisnost između slučajnih veličina S i T ne samo da utiče na varijansu i kovarijansu sadašnjih vrijednosti plaćanja, već i na očekivanja istih koja su povezana sa modelima osiguranja više osoba i složenim statusima. Neka indeks „*ind*" označava da je u računu dodatno pretpostavljena nezavisnost slučajnih veličina S i T, tj. važi (2.1). Pretpostavimo da su slučajne veličine S i T pozitivno zavisne u prvom kvadrantu. Uvidom u tabele 2.1 i 2.2 (redovi $(3) - (7)$) i korišćenjem navedenih pretpostavki, dolazi se do rezultata

$$\begin{array}{lll} A_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}} \geq A^{ind}_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}}, & \bar{a}_{xy:\overline{n}|} \geq \bar{a}^{ind}_{xy:\overline{n}|}, & \bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|} \leq {\bar{A}^{1}_{xy:\overline{n}|}}^{ind}, \\ A_{\overline{xy}:\overset{1}{\overline{n}|}} \leq A^{ind}_{\overline{xy}:\overset{1}{\overline{n}|}}, & \bar{a}_{\overline{xy}:\overline{n}|} \leq \bar{a}^{ind}_{\overline{xy}:\overline{n}|}, & \bar{A}^{1}_{\overline{xy}:\overline{n}|} \geq {\bar{A}^{1}_{\overline{xy}:\overline{n}|}}^{ind}. \end{array}$$

Pokazujemo $A_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}} \geq A^{ind}_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}}$,

$$\begin{aligned} A_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}} &= v^n \cdot P[S \wedge T > n] = v^n \cdot P[S > n, T > n] \\ &\geq v^n \cdot P[S > n] \cdot P[T > n] = A^{ind}_{xy:\overset{1}{\overline{n}|}}. \end{aligned}$$

Analogno,

$$A_{\overline{xy}:\overline{n|}}^{\;1} = v^n \cdot P[S \vee T > n] = v^n \cdot (P[S > n] + P[T > n] - P[S > n, T > n])$$
$$\leq v^n \cdot (P[S > n] + P[T > n] - P[S > n] \cdot P[T > n]) = A_{\overline{xy}:\overline{n|}}^{ind1}.$$

Na analogan način se dolazi i do ostala četiri navedena rezultata.
Povrh toga, neka je nivo premije u (2.8) određen principom ekvivalencije, tj. zahtijeva se da je očekivana vrijednost izraza (2.8) jednaka 0. Slijedi primjer koji će približiti značenje zavisnih slučajnih veličina.

Primjer 2
Neka se muž i žena odluče da kupe polisu osiguranja života za slučaj smrti na n godina koja važi sve dok je jedno od njih živo. I neka, recimo, godišnju premiju za tu polisu plaća muž n godina.
Kada prođemo očekivanjem u jednakosti (2.8) i primjenimo princip ekvivalencije, pod pretpostavkom pozitivne zavisnosti slučajnih veličina S i T u prvom kvadrantu, dobijamo

$$\pi = \frac{\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n|}}^{1}}{\bar{a}_{\overline{x}:\overline{n|}}}.$$

Brojilac iz gornje jednakosti je veći ili jednak ${\bar{A}_{\overline{xy}:\overline{n|}}^{1}}^{ind}$, iz čega slijedi $\pi \geq \pi^{ind}$. Zaključuje se da, u ovom slučaju, pretpostavka nezavisnosti dovodi do potcijenjene premije.

Na analogan način kao u navedenom primjeru, iz gornjih nejednakosti očekivanih sadašnjih vrijednosti dobijamo da je $\pi \geq \pi^{ind}$ za slučajeve $V = S \vee T$ i $U \in \{S, T, S \vee T\}$. Sa druge strane, za $V \in \{S, T, S \wedge T\}$ i $U = S \wedge T$ važiće $\pi \leq \pi^{ind}$ što znači da za navedene slučajeve pretpostavka nezavisnosti dovodi do precijenjene vrijednosti premija.
Primjer 3 (Numerički primjer)
Slijedi primjer obračuna premije za status zajedničkog doživljenja. Uporedićemo pretpostavku da su preostale dužine života muža i žene zavisne slučajne veličine sa pretpostavkom da su iste nezavisne.
U skladu sa oznakama u radu, označimo sa S slučajnu veličinu koja predstavlja preostalu dužinu života muža koji ima x godina i sa T slučajnu veličinu koja predstavlja preostalu dužinu života žene koja ima y godina. Neka navedene slučajne veličine

imaju eksponencijalnu raspodjelu sa parametrima raspodjele λ_1 i λ_2 redom. Dakle, $S : Exp(\lambda_1)$ pa je njena funkcija gustine

$$f_S(s, \lambda_1) = \begin{cases} \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 \cdot s}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0 \end{cases}$$

i funkcija raspodjele

$$F_S(s) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda_1 \cdot s}, & s \geq 0 \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

Analogno, $T : Exp(\lambda_2)$ čiju ćemo funkciju gustine i funkciju raspodjele označiti sa $g_T(t, \lambda_2)$ i $G_T(t)$ redom.
Neka je funkcija raspodjele vektora (S, T) Farlie-Gumbel-Morgenstenova, tj.

$$H_\alpha(s,t) = F(s) \cdot G(t) \cdot \big[1 + \alpha \cdot (1 - F(s)) \cdot (1 - G(t))\big], \ s, t \geq 0.$$

Ako je $\alpha > 0$, S i T su pozitivno zavisne u prvom kvadrantu. Pokažimo ovo.
Pokazujemo da važi

$$\begin{aligned} &P\big[S < s, T < t\big] \geq P\big[S < s\big] \cdot P\big[T < t\big], \ \text{tj.} \\ &P\big[S < s, T < t\big] - P\big[S < s\big] \cdot P\big[T < t\big] \geq 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &F(s) \cdot G(t) \cdot \big[1 + \alpha \cdot (1 - F(s)) \cdot (1 - G(t))\big] - F(s) \cdot G(t) \\ &= F(s) \cdot G(t) + \alpha \cdot F(s) \cdot G(t) \cdot (1 - F(s)) \cdot (1 - G(t)) - F(s) \cdot G(t) \\ &= \alpha \cdot (1 - e^{-\lambda_1 \cdot s}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 \cdot t}) \cdot e^{-\lambda_1 \cdot s} \cdot e^{-\lambda_2 \cdot t} \\ &\geq 0, \ 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Kako jednokratna neto premija osiguranja sa statusom zajedničkog doživljenja iznosi

$$\begin{aligned} \bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} &= \int_0^n v^m \cdot P\big[S > m, T > m\big] \cdot \mu_{S,T}(m) dm \\ &= -\int_0^n v^m \cdot P\big[S > m, T > m\big] \cdot \frac{1}{P\big[S > m, T > m\big]} \cdot \frac{\partial}{\partial m} P\big[S > m, T > m\big] dm \\ &= -\int_0^n e^{-\delta \cdot m} \cdot \frac{\partial}{\partial m} P\big[S > m, T > m\big] dm. \end{aligned}$$

Detaljnije o Farlie-Gumbel-Morgenstenovoj raspodjeli u [8] Lai, Chin Diew, N. Balakrishnan *Continuous bivariate distributions*, Springer-Verlag New York, 2009.

prvo ćemo izračunati $P\big[S > m, T > m\big]$, a potom izvod.

$$\begin{aligned}
&P\big[S > m, T > m\big] \\
&= 1 - F_S(m) - G_T(m) + F_S(m) \cdot G_S(m) \cdot \big[1 + \alpha \cdot (1 - F_S(m)) \cdot (1 - G_T(m))\big] \\
&= 1 - 1 + e^{-\lambda_1 \cdot m} - 1 + e^{-\lambda_2 \cdot m} \\
&+ (1 - e^{-\lambda_1 \cdot m}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 \cdot m})\big[1 + \alpha \cdot (1 - 1 + e^{-\lambda_1 \cdot m}) \cdot (1 - 1 + e^{-\lambda_2 \cdot m})\big] \\
&= e^{-(\lambda_1 + \lambda_2) \cdot m} \cdot \big[1 + \alpha \cdot (1 - e^{-\lambda_1 \cdot m}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 \cdot m})\big].
\end{aligned}$$

Nakon pronalaženja izvoda $-\frac{\partial}{\partial m} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)\cdot m} \cdot \big[1 + \alpha \cdot (1 - e^{-\lambda_1 \cdot m}) \cdot (1 - e^{-\lambda_2 \cdot m})\big]$ i množenja istog sa $e^{-\delta \cdot m}$, dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} &= (\alpha + 1) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \int_0^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot m} dm \\
&- \alpha \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot \int_0^n e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta)\cdot m} dm \\
&- \alpha \cdot (2\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \int_0^n e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot m} dm \\
&+ 2 \cdot \alpha \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \int_0^n e^{-(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta)\cdot m} dm. \qquad (2.9)
\end{aligned}$$

Primijetimo da ako stavimo $\alpha = 0$, dobijamo

$$\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} = (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \int_0^n e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot m} dm. \qquad (2.10)$$

što predstavlja jednokratnu neto premiju $\bar{A}^{1\ \ ind}_{xy:\overline{n}|}$ za osiguranje sa statusom zajedničkog doživljenja kada pretpostavimo da su S i T nezavisne slučajne veličine. Jedan od načina da se riješi integral $\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|}$ jeste uvođenje smjene $e^{-m} = t$. Dobijamo da je

$$\begin{aligned}
\bar{A}^1_{xy:\overline{n}|} &= -(\alpha + 1) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \frac{e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot n} - 1}{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta} \\
&+ \alpha \cdot (\lambda_1 + 2\lambda_2) \cdot \frac{e^{-(\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta)\cdot n} - 1}{\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta} \\
&+ \alpha \cdot (2\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \frac{e^{-(2\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot n} - 1}{2\lambda_1 + \lambda_2 + \delta} \\
&- 2 \cdot \alpha \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \frac{e^{-(2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta)\cdot n} - 1}{2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \delta}. \qquad (2.11)
\end{aligned}$$

U slučaju pretpostavke nezavisnosti, dobijamo

$$\bar{A}^{1\ \ ind}_{xy:\overline{n}|} = (\alpha + 1) \cdot (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot \frac{1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2 + \delta)\cdot n}}{\lambda_1 + \lambda_2 + \delta}. \qquad (2.12)$$

Intezitete λ_1 i λ_2 ćemo dobiti metodom maksimalne vjerodostojnosti. Prvo ćemo opisati navedeni postupak.

Neka je $\mathbb{T} = (T_1, \ldots, T_n)$ prost slučajan uzorak u kojem slučajne veličine imaju eksponencijalnu raspodjelu sa funkcijom gustine $f(t; \lambda)$ i nezavisne su. Definišemo funkciju vjerodostojnosti

$$\begin{aligned} L(\lambda; t_1, \ldots, t_n) &= \prod_{i=1}^{n} f(t_i; \lambda) \\ &= \prod_{i=1}^{n} \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t_i} \\ &= \lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i}. \end{aligned}$$

Ocjena maksimalne vjerodostojnosti parametra λ je jednaka

$$\overset{\wedge}{\lambda} = \underset{\lambda}{argmax}\, L(\lambda; t).$$

Da bismo našli ovaj maksimum, prelazimo na traženje maksimuma logaritma funkcije, tj.

$$\begin{aligned} l(\lambda; t_1, \ldots, t_n) &= \ln(L(\lambda; t_1, \ldots, t_n)) \\ &= \ln(\lambda^n \cdot e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i}) \\ &= \ln(\lambda^n) + \ln(e^{-\lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i}) \\ &= n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i. \end{aligned}$$

Rješavanjem jednačine $\frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) = 0$ dobijamo ocjenu maksimalne vjerodostojnosti parametra. Dakle,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} l(\lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda}(n \cdot \ln(\lambda) - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i) \\ &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{i=1}^{n} t_i. \qquad (2.13) \end{aligned}$$

Kada stavimo da je poslednji izraz jednak 0, dobijamo da je

$$\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}.$$

Posmatrajući znak prvog izvoda (2.13) za $\lambda > 0$, zaključujemo da je sa lijeve strane tačke $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$ izvod pozitivan, a sa desne iste tačke izvod je negativan što znači da je rješenje $\overset{\wedge}{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} t_i}$ zaista vrijednost kojom se dobija maksimalna vjerodostojnost.

Sada definišimo parametre kako bismo dobili iznose jednokratne neto premije i uporedili ih.
Potrebno je da dobijemo dva parametra λ_1 i λ_2 koji će se razlikovati prema polu, tj. da li su u pitanju muški ili ženski osiguranici. Uzorak je napravljen prema štetama smrti koje su prijavljene u Wiener Städtische životnom osiguranju u Podgorici na sljedeći način: na primjer, ako je početak polise osiguranja 01/01/2019 a datum nastanka osiguranog slučaja i je 10/08/2022, veličina T_i je jednaka 3 jer je prošlo 3 godine od kako se desio osigurani slučaj. Za svaku polisu imamo informaciju o polu osiguranika, pa možemo i uzorak napraviti prema podjeli pola. Veličina uzorka n je jednaka ukupnom zbiru šteta smrti raspodijeljenih po polu.
Prema navedenom postupku, dobile su se sljedeće vrijednosti dimenzije uzorka i sume vrijednosti uzoraka:

$$n_m = 155,\ n_f = 52$$
$$\sum_{i=1}^{n_m} T_{i,m} = 582,\ \sum_{i=1}^{n_f} T_{i,f} = 213.$$

gdje pomoću indeksa m i f razlikujemo da li se radi o uzorcima gdje su u pitanju osiguranici muškog ili ženskog pola redom.
Primijetimo da je veličina uzorka za muški pol veća što još jednom potvrđuje da je smrtnost muškaraca veća od smrtnosti žena. Prema ovako dobijenom uzorku, dobijamo da je

$$\underset{m}{\overset{\wedge}{\lambda}} = 0.27,$$
$$\underset{f}{\overset{\wedge}{\lambda}} = 0.24.$$

Dakle, neka je $\lambda_1 = 0.27$ i $\lambda_2 = 0.24$. Da bismo primjer što više približili praksi, pretpostavimo da je 1.25% kamatna stopa iz čega dobijamo da je intezitet kamate $\delta = \ln(1 + i) = 0.012$.
Slijedi tabela dobijenih rezultata jednokratne neto premije za osiguranu sumu u vrijednosti od $10,000$ eura prema dobijenim jednakostima (2.11) i (2.12):

α	Trajanje osiguranja	JNP nezavisne s.v.	JNP zavisne s.v.
0.3	10	$9,709.65$	$9,684.77$
0.3	20	$9,761.93$	$9,750.32$
0.5	10	$9,709.65$	$9,668.18$
0.5	20	$9,761.93$	$9,742.59$
0.8	10	$9,709.65$	$9,643.30$
0.8	20	$9,761.93$	$9,730.98$

Tabela 2.3: Jednokratne neto premije prema parametru zavisnosti i trajanju osiguranja

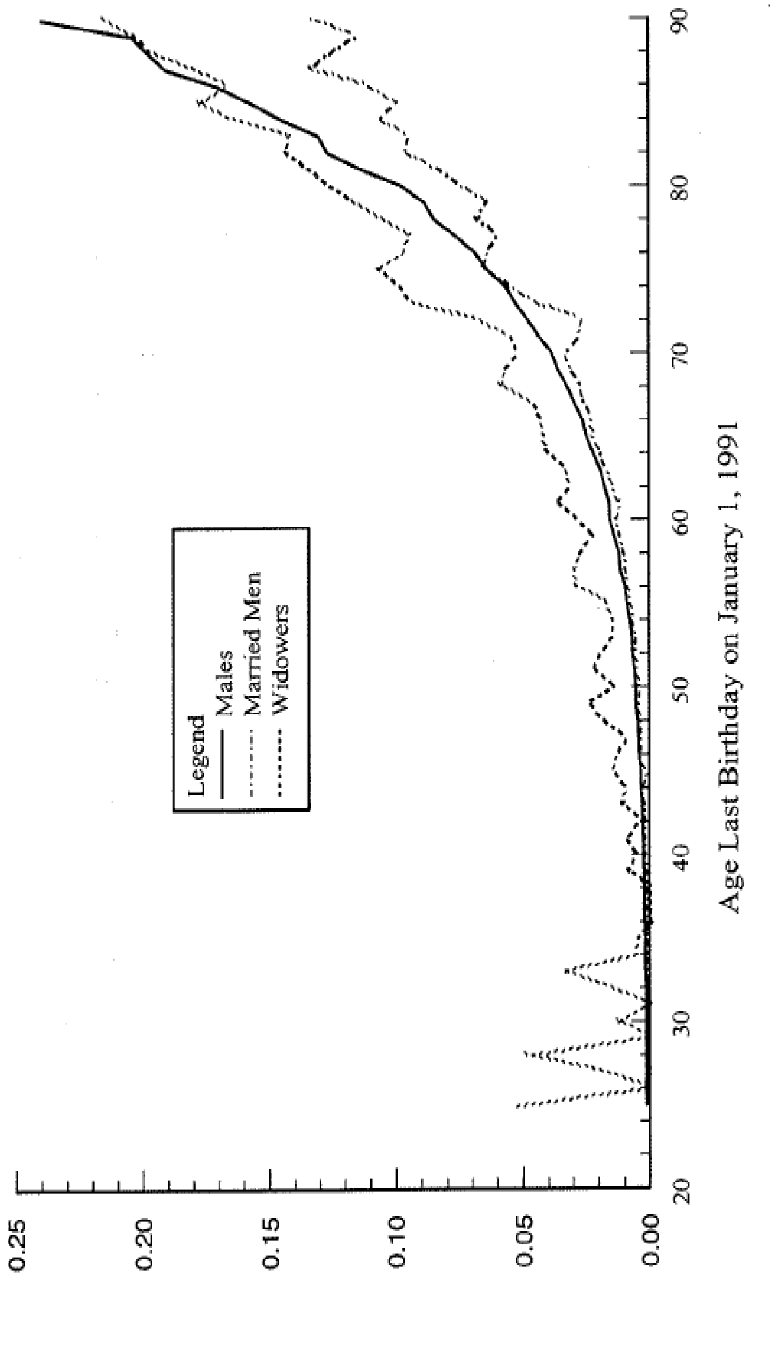
Primijetimo da povećanjem parametra zavisnosti α razlika između jednokratne neto premije za nezavisne slučajne veličine i zavisne slučajne veličine postaje vidljivija, tj. što je veća zavisnost slučajnih veličina to je manja jednokratna neto premija za osiguranje sa trajanjem do isteka statusa zajedničkog doživljenja.
Dodatno, primijetimo da za pravljenje ovog primjera nisu korištene godine starosti osiguranika već su vrijednosti zavisile od parametara λ_1, λ_2, α (u slučaju pretpostavke zavisnosti) i trajanja osiguranja, jer smo odabrali da slučajne veličine imaju eksponencijalnu raspodjelu, što je jedan od mogućih izbora raspodjele slučajnih veličina.

Za pisanje ovog poglavlja korišćena je literatura [6] Norberg, Ragnar, *Actuarial analysis of dependent lives*, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 1988.

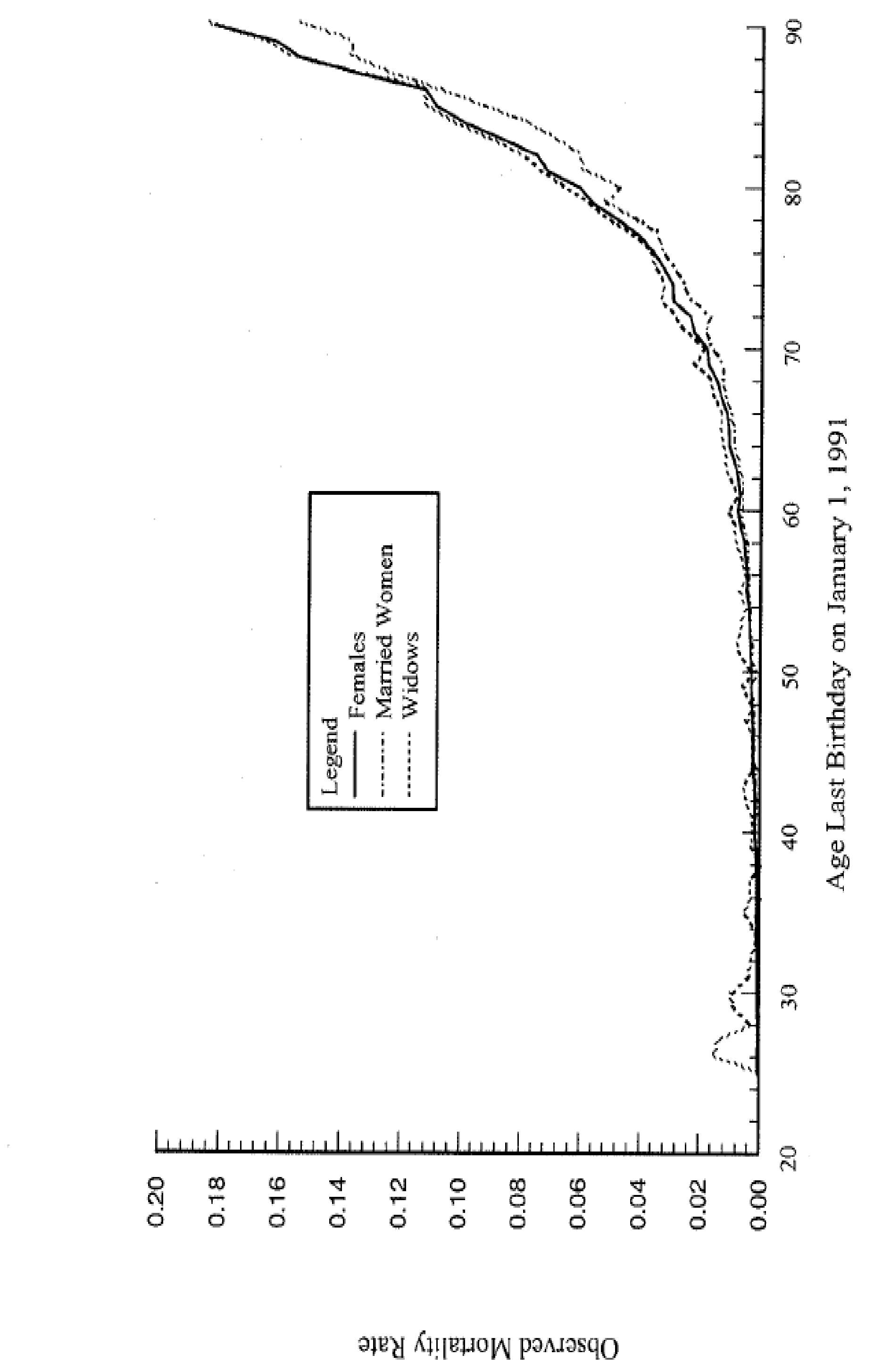
Glava 3

Lanci Markova u modelu osiguranja za dvije osobe

Međuzavisnost dužina života muža i žene se može objasniti promjenom uslova u kojima muž (žena) živi nakon smrti svoga supružnika (tuga, stres itd.). Za ilustraciju ove priče, poslužićemo se istraživanjima koje je vršio Nacionalni institut za statistiku u Belgiji tokom 1991.godine. Tim istraživanjima je utvrđeno da bračni status značajno utiče na intezitet smrtnosti pojedinca. Posmatrajmo naredne dvije slike.



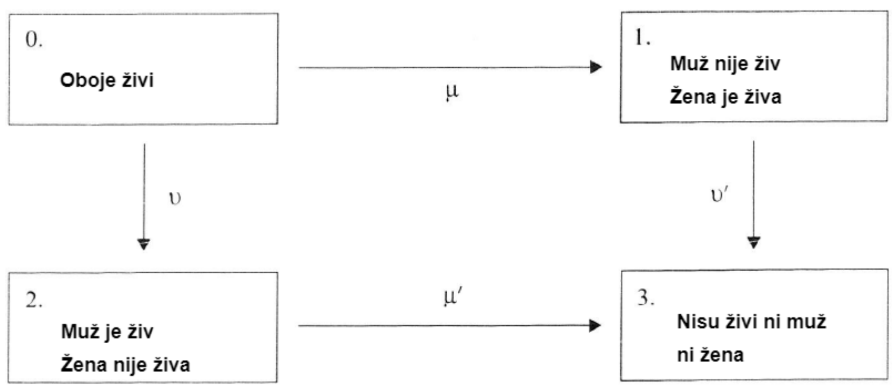
Slika 3.1: Preuzeto iz [7] Denuit, Michel, Anne Cornet, *Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes*, (1999).



Slika 3.2: Preuzeto iz [7] Denuit, Michel, Anne Cornet, *Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes*, (1999).

Na graficima je posmatrana vjerovatnoća da osoba koja ima x godina će umrijeti prije nego bude imala $x + 1$ godina, oznaka q_x. Posmatrane vjerovatnoće su ucrtane kao funkcije od x, gdje $x = 25, \ldots, 90$. Na prvoj slici su ucrtane vjerovatnoće za muškarce, a na drugoj za žene. Za oba pola, q_x se posmatralo prema bračnom statusu. Možemo jasno vidjeti da smrtnost zavisi od bračnog statusa, posebno za muškarce. Prema istraživanju, udovci/ice umiru ranije od prosjeka za cijelo belgijsko stanovništvo.

Uslovi u kojima muž (žena) živi nakon smrti svoga supružnika se mogu uračunati tako što će intezitet smrtnosti zavisiti od bračnog statusa, nezavisno od godina i pola. Konkretno, pretpostavimo da je intezitet smrtnosti muža kada ima $x+s$ godina jednak μ_{x+s} ako je i dalje oženjen, a μ'_{x+s} ako je udovac. Analogno, intezitet smrtnosti žene kada ima $y + t$ godina je υ_{y+t} ako je još uvijek udata, υ'_{y+t} ako je udovica. U nastavku ćemo intezitet smrtnoste označavati $\mu(s)$ i $\upsilon(t)$ da ne bismo naredni dokaz opteretili tekstom. Napomenimo da ovdje apostrof ne predstavlja da se radi o izvodu funkcije već je samo stvar oznake da bismo razlikovali intezitete smrtnosti. Pod ovim pretpostavkama, budući razvoj bračnog statusa za muža koji ima x godina i ženu od y godina predstavlja neprekidni lanac Markova $\{X_{\tau(S,T)} \mid \tau \geq 0\}$ sa stanjima i intezitetima prelaska iz jednog stanja u drugo kao na slici:



Slika 3.3: Lanac Markova za bračni par

Stanje 3 je apsorbujuće stanje. Stanje 0 čini status zajedničkog doživljenja, a stanja $0, 1$ i 2 zajedno čine status poslednjeg preživjelog.

Za pisanje dosadašnjeg dijela teksta korišćena je literatura [7] Denuit, Michel, Anne Cornet, *Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes*, (1999); [3] Norberg, Ragnar, *Basic Life Insurance Mathematics*, Lecture notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen (2000).

Izračunajmo sada vjerovatnoće prelaska iz jednog stanja u drugo. Za $i, j = 0, 1, 2, 3$

$$p_{ij}(t_1, t_2) = P[(x, y) \text{ u stanju } j \text{ u trenutku } t_2 \mid (x, y) \text{ u stanju } i \text{ u trenutku } t_1].$$

Jasno, za bilo koje $0 \leq t_1 \leq t_2$, $0 \leq p_{ij}(t_1, t_2) \leq 1$ za sve i, j, $p_{ij}(t_1, t_1) = 1$ ako je $i = j$ i 0 ako je obratno.Takođe, važi i $\sum_j p_{ij}(t_1, t_2) = 1$ za sve i.
Nas interesuju sledeće vjerovatnoće:

$$\begin{aligned}
p_{00}(s, t) &= e^{-\int_s^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau}, \\
p_{01}(s, t) &= \int_s^t e^{-\int_s^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau, \\
p_{02}(s, t) &= \int_s^t e^{-\int_s^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \upsilon(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \mu'(m)dm} d\tau.
\end{aligned}$$

Zajednička funkcija preživljavanja za S i T je

$$\begin{aligned}
P[S > s, T > t] &= \begin{cases} p_{00}(0, t) + p_{00}(0, s) \cdot p_{01}(s, t) & , \ s \leq t \\ p_{00}(0, s) + p_{00}(0, t) \cdot p_{02}(s, t) & , \ s > t \end{cases} \\
&= \begin{cases} e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_s^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau & , \ s \leq t \\ e^{-\int_0^s \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_t^s e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \upsilon(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^s \mu'(m)dm} d\tau & , \ s > t. \end{cases}
\end{aligned}$$

Marginalna funkcija preživljavanja od T je (kada stavimo $s = 0$ u prethodnom izrazu)

$$\begin{aligned}
P[T > t] &= P[S > 0, T > t] = p_{00}(0, t) + p_{01}(0, t) \\
&= e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau,
\end{aligned}$$

gdje je $t \geq 0$.
Analogno, marginalna funkcija preživljavanja od S je

$$\begin{aligned}
P[S > s] &= P[S > s, T > 0] = p_{00}(0, s) + p_{02}(0, s) \\
&= e^{-\int_0^s \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_0^s e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \upsilon(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^s \mu'(m)dm} d\tau,
\end{aligned}$$

gdje je $s \geq 0$.
Intuitivno je jasno da su S i T nezavisne slučajne veličine ako je $\mu'(\tau) = \mu(\tau)$ i $\upsilon'(\tau) = \upsilon(\tau)$ za svako τ što ćemo formalno vidjeti u narednoj teoremi. Takođe je intuitivno jasno da će S i T biti zavisne slučajne veličine ako dopustimo da intezitet smrnosti zavisi od bračnog statusa.

Teorema 3.0.1. *(i) Ako je $\mu'(\tau) \geq \mu(\tau)$ i $\upsilon'(\tau) \geq \upsilon(\tau)$ za svako τ, onda su S i T pozitivno zavisne u smislu da je S rastuća u desnom repu za T (iz čega po teoremi 2.2.1 slijedi da su povezane, a iz čega slijedi da su pozitivno zavisne u prvom kvadrantu) .*
(ii) Ako je $\mu'(\tau) \leq \mu(\tau)$ i $\upsilon'(\tau) \leq \upsilon(\tau)$ za svako τ, onda su S i T negativno zavisne u smislu da je S opadajuća u desnom repu za T (iz čega po teoremi 2.2.1 slijedi da su povezane $-S$ i T, a iz čega slijedi pozitivna zavisnost u prvom kvadrantu slučajnih veličina $-S$ i T) .
(iii) Ako je $\mu'(\tau) = \mu(\tau)$ i $\upsilon'(\tau) = \upsilon(\tau)$ za svako τ, onda su S i T nezavisne slučajne veličine.

Dokaz. Posmatrajmo prvo slučaj $s \leq t$:

$$\begin{aligned}
P[S > s \mid T > t] &= \frac{P[S > s, T > t]}{P[T > t]} \\
&= \frac{e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d(\tau)} + \int_s^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau}{e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d(\tau)} + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau} \\
&= \frac{1 + \int_s^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau}{1 + \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau}.
\end{aligned}$$

Koristeći pravilo diferenciranja $\frac{\partial(\frac{g}{h})}{\partial t} = \frac{h \cdot \partial g - g \cdot \partial h}{h^2}$, znak od $\frac{\partial}{\partial t} P[S > s \mid T > t]$ je istog znaka kao

$$\begin{aligned}
&\left\{1 + \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau\right\} \\
&\cdot \left[\mu(t) + \int_s^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau \cdot \{\mu(t) + \upsilon(t) - \upsilon'(t)\}\right] \\
&- \left\{1 + \int_s^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau\right\} \\
&\cdot \left[\mu(t) + \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)} \cdot \mu(\tau)d\tau \cdot \{\mu(t) + \upsilon(t) - \upsilon'(t)\}\right].
\end{aligned}$$

Označimo

$$A(u) = \int_0^u e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau,$$

pa prethodni izraz možemo zapisati kao

$$\begin{aligned}
&\{1 + A(t)\} \cdot \Big[\mu(t) + \{A(t) - A(s)\} \cdot \{\mu(t) + \upsilon(t) - \upsilon'(t)\}\Big] \\
&- \{1 + A(t) - A(s)\} \cdot \Big[\mu(t) + A(t) \cdot \{\mu(t) + \upsilon(t) - \upsilon'(t)\}\Big] \\
&= A(s) \cdot \{\upsilon'(t) - \upsilon(t)\}. \qquad (3.1)
\end{aligned}$$

Pređimo sada na drugi slučaj, tj. $s > t$.

$$
\begin{aligned}
P[S > s \mid T > t] &= \frac{P[S > s, T > t]}{P[T > t]} \\
&= \frac{e^{-\int_0^s \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_t^s e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \upsilon(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^s \mu'(m)dm} d\tau}{e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau}.
\end{aligned}
$$

Znak od $\frac{\partial}{\partial t} P[S > s \mid T > t]$ će biti isti kao znak od

$$
\begin{aligned}
&\Big\{ e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau \Big\} \\
&\cdot \Big\{ - e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} \cdot \upsilon(t) \cdot e^{-\int_t^s \mu'(m)dm} \Big\} \\
&- \Big\{ e^{-\int_0^s \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} + \int_t^s e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \upsilon(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^s \mu'(m)dm} d\tau \Big\} \\
&\cdot \Big[e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} \cdot \{-\mu(t) - \upsilon(t)\} \\
&+ e^{-\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} \cdot \mu(t) + \int_0^t e^{-\int_0^\tau \mu(m)+\upsilon(m)dm} \cdot \mu(\tau) \cdot e^{-\int_\tau^t \upsilon'(m)dm} d\tau \cdot \{-\upsilon'(t)\} \Big].
\end{aligned}
$$

Kada pomnožimo ovaj izraz sa $e^{\int_0^t \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau} e^{\int_0^s \mu(\tau)+\upsilon(\tau)d\tau}$, dobija se

$$
\begin{aligned}
&\Big\{ 1 + \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau \Big\} \cdot \Big\{ e^{-\int_t^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot \upsilon(t) \Big\} \\
&- \Big\{ 1 + \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \upsilon(\tau)d\tau \Big\} \\
&\cdot \Big[- \upsilon(t) - \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau \cdot \upsilon'(t) \Big] \\
&= \int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau \Big[- e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \upsilon(t) \\
&+ \Big\{ 1 + \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot \upsilon(\tau)d\tau \Big\} \upsilon'(t) \Big] \\
&+ \upsilon(t) \cdot \Big[e^{-\int_t^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} + 1 + \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \upsilon(\tau)d\tau \Big]. \qquad (3.2)
\end{aligned}
$$

Zamjenom izraza

$$
\begin{aligned}
\int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot \upsilon(\tau)d\tau &= \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot (\mu(\tau) + \upsilon(\tau) - \mu'(\tau))d\tau \\
&+ \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu+\upsilon-\mu'} \cdot (\mu'(\tau) - \mu(\tau))d\tau \\
&= e^{\int_t^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} - 1 \\
&+ \int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)-\mu'(m)+\upsilon(m)dm} \cdot (\mu'(\tau) - \mu(\tau))d\tau
\end{aligned}
$$

u prethodni izraz (3.2), dobijamo

$$\begin{aligned}(3.2) = &\int_0^t e^{\int_\tau^t \mu(m)+\upsilon(m)-\upsilon'(m)dm} \cdot \mu(\tau)d\tau \cdot \Big[e^{\int_t^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot (\upsilon'(t)-\upsilon(t)) \\ &+ \upsilon'(t)\int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm} \cdot (\mu'(\tau)-\mu(\tau))d\tau\Big] \\ &+ \upsilon(t)\int_t^s e^{\int_\tau^s \mu(m)+\upsilon(m)-\mu'(m)dm}(\mu'(\tau)-\mu(\tau))d\tau. \qquad (3.3)\end{aligned}$$

Kada pogledamo izraze (3.1) i (3.3), vidimo da $\mu' \geq \mu$ i $\upsilon' \geq \upsilon$ implicira $\frac{\partial}{\partial t}P[S > s \mid T > t] \geq 0$ za svako s i t, tj. slučajna veličina S je rastuća u desnom repu za T čime je dokazana prva stavka teoreme. Druga stavka slijedi direktno. Treća stavka slijedi napominjući da uslovi da je S rastuća u desnom repu za T i da je S opadajuća u desnom repu za T zajedno predstavljaju ekvivalent stohastičkoj nezavisnosti. □

Napomena 3.0.1. *Pretpostavljeno je da su inteziteti smrtnosti, koji se pojavljuju u modelu, neprekidni. Zbog toga su diferenciranja koja se vrše u dokazu validna.*

Sada ćemo navesti par primjera koji mogu biti korisni za bolje razumijevanje međusobno zavisnih života. Koristićemo sliku 3.3.

Primjer 4

a) Sa ${}_tq^1_{xy}$ označavamo vjerovatnoću da osoba (x) umre za t godina, a osoba (y) je živa u vrijeme trenutka smrti osobe (x). Gornji indeks 1 stoji iznad x što znači da je osoba starosti x prva umrla. Da je to bila osoba (y), indeks 1 bi stajao iznad y. Sa ${}_tp^{01}_{xy}$ označavamo vjerovatnoću da osoba (x) umre za t godina, a (y) je živa tih t godina. Ovdje, indeks 01 znači prelazak iz stanja 0 u stanje 1 sa slike 3.3. Objasniti zašto ${}_tq^1_{xy}$ nije isto što i ${}_tp^{01}_{xy}$ i napisati čemu je jednaka vjerovatnoća ${}_tq^1_{xy}$.

b) Sa ${}_tq^2_{xy}$ označavamo vjerovatnoću da (x) umre za t godina, a da osoba (y) već nije živa kada osoba (x) umire, pod uslovom da su (x) i (y) živi u trenutku 0. Ovdje, indeks 2 iznad x označava da je osoba (x) umrla druga po redu. Napisati čemu je jednaka vjerovatnoća ${}_tq^2_{xy}$.

a) Prva vjerovatnoća, ${}_tq^1_{xy}$, dopušta mogućnost da (y) umre nakon (x) u tih t godina, a druga vjerovatnoća, ${}_tp^{01}_{xy}$, ne.

Za pisanje dosadašnjeg dijela teksta korišćena je literatura [3] Norberg, Ragnar, *Basic Life Insurance Mathematics*, Lecture notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen (2000).

Vjerovatnoća ${}_tq^1_{xy}$ je jednaka

$${}_tq^1_{xy} = \int_0^t {}_sp^{00}_{xy} \cdot \mu ds.$$

Prokomentarišimo ovu jednakost. Vjerovatnoću da (x) umre za t godina i (y) je živa u trenutku smrti osobe (x) možemo zapisati tako što ćemo proći integralom kroz sve beskonačno male intervale u kojima (x) može da umre, pod uslovom da su oboje, (x) i (y), živi do tog trenutka.

b)

$${}_tq^2_{xy} = \int_0^t {}_sp^{02}_{xy} \cdot \mu' ds$$

Prokomentarišimo ovu jednakost. Posmatrajući sliku 3.3., proces mora iz stanja 0 preći u stanje 2, a zatim u stanje 3 za tih t godina. Kada „sumiramo" sve vjerovatnoće ovakvog kretanja preko beskonačno malog intervala, dobijamo ovu formulu.

Primjer 5

Neka je sa (x) označen muškarac koji ima x godina, a sa (y) žena koja ima y godina. Izvesti naredni izraz koji predstavlja vjerovatnoću da je (x) umro prije nego što je doživio $x + t$ godina, pod uslovom da je (x) u braku sa (y) u trenutku 0.

$$\int_0^t {}_sp^{00}_{xy} \cdot \mu ds + \int_0^t \int_0^s {}_up^{00}_{xy} \cdot \upsilon \cdot {}_{s-u}p^{22}_{x+u} du \ \mu' ds$$

Početno stanje je 0. Da (x) umre prije trenutka t, postoje 2 mogućnosti:

(i) da iz stanja 0 se pređe u stanje 1 u nekom trenutku s, gdje $0 < s \le t$

(ii) da iz stanja 0 se pređe u stanje 2 ((y) umire dok je (x) živ) u trenutku u $(0 < u \le t)$, a potom se prelazi u stanje 3 u trenutku s $(u < s \le t)$.

Pa je vjerovatnoća jednaka

$$\int_0^t {}_sp^{00}_{xy} \cdot \mu ds + \int_0^t {}_sp^{02}_{xy} \cdot \mu' ds,$$

gdje

$$\begin{aligned}
{}_sp^{00}_{xy} &= e^{-\int_0^s \mu + \upsilon du}, \\
{}_sp^{02}_{xy} &= \int_0^s {}_up^{00}_{xy} \cdot \upsilon \cdot {}_{s-u}p^{22}_{x+u} du, \\
{}_{s-u}p^{22}_{x+u} &= e^{-\int_0^{s-u} \mu' dr},
\end{aligned}$$

čime se dobija tražena formula.

Primjer 6

Za model koji je ilustrovan na slici 3.3, date su sledeće informacije:

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) &= B_f \cdot c_f^{y+t},\\
\mu(t) &= B_m \cdot c_m^{x+t},\\
\mu'(t) &= C_m \cdot d_m^{x+t},\\
\upsilon'(t) &= C_f \cdot d_f^{y+t},
\end{aligned}$$

gdje

$$\begin{aligned}
B_f &= 9.741 \cdot 10^{-7} & c_f &= 1.3331,\\
B_m &= 2.622 \cdot 10^{-5} & c_m &= 1.0989,\\
C_m &= 3.899 \cdot 10^{-4} & d_m &= 1.0725,\\
C_f &= 2.638 \cdot 10^{-5} & d_f &= 1.1020.
\end{aligned}$$

Muž trenutno ima $x = 65$ godina, a žena $y = 62$. Izračunati vjerovatnoće da:

a) su oboje živi za 15 godina,

b) (x) je živ za 15 godina,

c) (y) je živa za 15 godina,

d) bar jedno od njih dvoje je živo za 15 godina.

da se inteziteti smrtnosti ponašaju prema Gompercovom zakonu. Takođe, vidimo da inteziteti smrtnosti oba partnera zavise od toga da li je bračni par živ ili ne, a ne zavise od njihovih godina. Na primjer, ako žena postane udovica, njen intezitet smrtnosti se povećava. Dakle, ova dva života su zavisna.

a) Vjerovatnoća da su oboje živi za 15 godina iznosi

$$\begin{aligned}
{}_{15}p^{00}_{65:62} &= e^{-\int_0^{15} \mu(t)+\upsilon(t)dt}\\
&= e^{-\int_0^{15}(B_m \cdot c_m^{x+t} + B_f \cdot c_f^{y+t})dt}\\
&= g_m^{c_m^{65}(c_m^{15}-1)} \cdot g_f^{c_f^{62}(c_f^{15}-1)}\\
&= 0.671701 \cdot 0.905223\\
&= 0.608039
\end{aligned}$$

gdje $g_m = e^{-\frac{B_m}{\log c_m}}$ i $g_f = e^{-\frac{B_f}{\log c_f}}$.

b) Vjerovatnoća da je muž živ za 15 godina je jednaka zbiru vjerovatnoća ${}_{15}p^{00}_{65:62}$ i

${}_{15}p^{02}_{65:62}$. U dijelu pod a smo izračunali ${}_{15}p^{00}_{65:62}$, ostaje još da izračunamo :

$$ {}_{15}p^{02}_{65:62} = \int_0^{15} {}_tp^{00}_{65:62} \cdot \upsilon(t) \cdot {}_{15-t}p^{22}_{65+t} dt, $$

gdje

$$ \begin{aligned} {}_{15-t}p^{22}_{65+t} &= e^{-\int_0^{15-t} \mu'(s) ds} \\ &= h_m^{d_m^{65+t}(d_m^{15-t}-1)}, \end{aligned} $$

gdje $h_m = e^{-\frac{C_m}{\log d_m}}$.
Sada se može izračunati vrijednost ${}_{15}p^{02}_{65:62}$ i ona iznosi ${}_{15}p^{02}_{65:62} = 0.050402$, pa je tražena vjerovatnoća jednaka

$$ {}_{15}p^{00}_{65:62} + {}_{15}p^{02}_{65:62} = 0.658442. $$

c) Analogno prethodnom, vjerovatnoća da je žena živa za 15 godina je jednaka zbiru vjerovatnoća ${}_{15}p^{00}_{65:62}$ i ${}_{15}p^{01}_{65:62}$, gdje

$$ {}_{15}p^{01}_{65:62} = \int_0^{15} {}_{15}p^{00}_{65:62} \cdot \mu(t) \cdot {}_{15-t}p^{11}_{62+t} dt. $$

Računamo

$$ \begin{aligned} {}_{15-t}p^{11}_{62+t} &= e^{-\int_0^{15-t} \upsilon'(s) ds} \\ &= h_f^{d_f^{62+t}(d_f^{15-t}-1)}, \end{aligned} $$

gdje $h_f = e^{-\frac{C_f}{\log d_f}}$.
Dobija se da je ${}_{15}p^{01}_{65:62} = 0.258823$, pa tražena vjerovatnoća iznosi

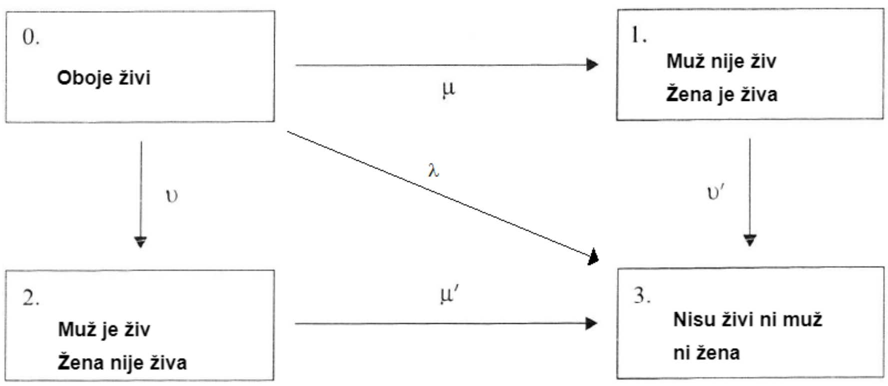
$$ {}_{15}p^{00}_{65:62} + {}_{15}p^{01}_{65:62} = 0.86682. $$

d) Vjerovatnoća da je bar jedno od njih dvoje živo za 15 godina iznosi

$$ \begin{aligned} {}_{15}p^{00}_{65:62} + {}_{15}p^{01}_{65:62} + {}_{15}p^{02}_{65:62} &= 0.608039 + 0.050402 + 0.258823 \\ &= 0.917265. \end{aligned} $$

Korisno je pomenuti da pored ovog modela, ilustrovanog na slici 3.3, postoji takozvani *uobičajeni model šoka*. Prethodni model pretpostavlja zavisnost između S i T tako što intezitet smrtnosti jednog (S ili T) zavisi od toga da li je druga osoba živa. Ova zavisnost se može proširiti tako što ćemo dodati mogućnost da osobe S i T umru u isto vrijeme, na primjer kao posljedica saobraćajne nesreće. Model je ilustrovan na sledećoj slici.

Za pisanje dosadašnjeg dijela teksta je korišćena literatura [2] Dickson, David CM, Mary R. Hardy, Howard R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, Second Edition, Cambridge University Press, 2013.



Slika 3.4: Lanac Markova za bračni par - uobičajeni model šoka

Glava 4

Zaključak

Aktuarska nauka se svake godine više razvija. Osiguravajuća društva traže najbolji način razvijanja jednog proizvoda tako da on u isto vrijeme bude zanimljiv i primamljiv na tržištu ali i da garantuje stabilnost osiguravajućem društvu.

Nakon uvoda u osnovne vrste osiguranja, imali smo prilike da vidimo na primjeru polise mješovitog osiguranja jedno od mogućih rješenja problema bračnog para. Možemo vidjeti da se i dalje koristi pretpostavka nezavisnosti preostalih dužina života bračnog para. Sa druge strane, problem rizika se rješava korekcijom pristupne starosti koja se koristi za obračun premije zajedničke polise. Ovakvo rješenje se kroz testiranje pokazalo kao povoljnije za bračni par nego da se osiguravaju odvojeno. Ovaj primjer je izabran jer je u praksi popularnija vrsta tradicionalnih osiguranja upravo mješovito osiguranje. Osiguranja doživljenja nisu više atraktivna za klijente zbog sve manjih tehničkih kamatnih stopa. Cilj primjera je bio da pokaže primjenu matematike u praksi, jedno od rješenja problema bračnog para u praksi kao i da bude uvod u istraživanje kojim sam se bavila.

U nastavku smo vidjeli kako pretpostavka zavisnosti preostalih dužina života bračnog para utiče na cijenu pojedinih vrsta osiguranja. Konkretno, za polisu sa statusom poslednjeg preživjelog, premija je veća kada pretpostavimo zavisnost preostalih dužina života. Za polisu sa statusom zajedničkog doživljenja koju uzima bračni par, premija će biti niža pod pretpostavkom zavisnosti njihovih preostalih dužina života. Napravljen je numerički primjer u kojem možemo vidjeti da što je veća zavisnost između bračnog para, to je premija za polisu za osiguranje sa statusom zajedničkog doživljenja manja.
U trećoj glavi se pokazuje da se problem preživljavanja bračnog para može posmatrati i kao lanac Markova. Pod pretpostavkom zavisnosti preostalih dužina života

se smatra da će intezitet smrtnosti zavisiti od bračnog statusa, tj. kada jedno od supružnika postane udovac/ica, intezitet smrtnosti se povećava.
Teoremom 3.0.1. smo dokazali da promjena inteziteta smrtnosti implicira da su preostale dužine života zavisne.
Odnose dužine života muškaraca i žena smo vidjeli kroz istraživanje koje je vršio Nacionalni institut za statistiku u Belgiji tokom 1991.godine. Istraživanja su jasno pokazala da bračni status utiče na preostalu dužinu života supružnika. Ovo se posebno odražava na muškarce, gdje smo vidjeli da je vjerovatnoća smrtnosti udovca veća od vjerovatnoće smrtnosti muškarca u braku.

Navedene zaključke možemo interpretirati na više načina. Jasno je da će premija za polisu sa statusom zajedničkog doživljenja biti niža pod pretpostavkom zavisnosti njihovih života jer na primjer, što duže živi žena, to će duže živjeti i muškarac pa je vjerovatnoća da će polisa duži period biti aktivna veća. Suprotno tome, polisa sa statusom poslednjeg preživjelog će imati manju vjerovatnoću da bude aktivna duži period godina nakon smrti jednog od supružnika, što utiče da takva polisa bude skuplja.

Drago mi je da sam imala prilike da istražujem na ovu temu, posebno u momentu kada počinjem i da radim u ovoj struci. Prilika da istražujem više na polju aktuarstva je otvorila širok spektar mogućnosti na koji način razviti jedan proizvod koji u isto vrijeme treba da zadovolji želje osiguranika i osiguravajućeg društva. Da li ćemo se odlučiti za pretpostavku zavisnosti preostalih dužina života je samo jedno od pitanja koje utiče na razvoj proizvoda i njegovu cijenu.

Komutativne funkcije

Komutativne funkcije su nastale u 18. vijeku, a i danas se koriste. Razlog njihove popularnosti je u tome što pojednostavljuju numeričke obračune mnogih aktuarskih funkcija. Komutativne funkcije su napravljene sa ciljem da se pojedinačne neto premije, koje se razlikuju po starosti osiguranika i trajanju osiguranja a koriste iste tablice smrtnosti po istoj kamatnoj stopi, mogu dobiti iz jedne tabele.
Podsjećamo:

$$l_x\text{- } \textit{broj živih osoba starosti } x \tag{4.1}$$

$$D_x\text{- } \textit{diskontovani broj preživjelih osoba i računa se}$$

$$D_x = v^x \cdot l_x \tag{4.2}$$

$$N_x = D_x + D_{x+1} + D_{x+2} + \cdots \tag{4.3}$$

$$S_x = D_x + 2D_{x+1} + 3D_{x+2} + \cdots \tag{4.4}$$

$$= N_x + N_{x+1} + N_{x+2} + \cdots \tag{4.5}$$

$$d_x\text{- } \textit{broj umrlih osoba između godina starosti } x \textit{ i } x+1 \textit{ i računa se}$$

$$d_x = l_x - l_{x+1} \tag{4.6}$$

$$C_x = v^{x+1} \cdot d_x \tag{4.7}$$

$$M_x = C_x + C_{x+1} + C_{x+2} \cdots \tag{4.8}$$

$$R_x = C_x + 2 \cdot C_{x+1} + 3 \cdot C_{x+2} \cdots \tag{4.9}$$

$$= M_x + M_{x+1} + M_{x+2} + \cdots \tag{4.10}$$

gdje je $v = \frac{1}{1+i}$ diskontni faktor, i kamatna stopa.

Renta

Posmatrajmo neposrednu doživotnu rentu jediničnih isplata, koju smo predstavili u Poglavlju 1.4. Jednokratnu neto premiju za ovakvu vrstu rente smo označavali $\ddot{a}_x$.

Kada vjerovatnoću ${}_kp_x$ zamjenimo sa $\frac{l_{x+k}}{l_x}$, dobijamo

$$\ddot{a}_x = \frac{l_x + v \cdot l_{x+1} + v^2 \cdot l_{x+2} + \cdots}{l_x}.$$

Kada imenilac i brojilac pomnožimo sa v^x, dobijamo

$$\ddot{a}_x = \frac{v^x \cdot l_x + v^{x+1} \cdot l_{x+1} + v^{x+2} \cdot l_{x+2} + \cdots}{v^x \cdot l_x}.$$

Kada primjenimo formule 4.2 i 4.3, dolazimo do jednostavne formule

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}. \tag{4.11}$$

Analogno, dolazi se do sledećih formula

$$\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \frac{N_x - N_{x+n}}{D_x}, \tag{4.12}$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}. \tag{4.13}$$

Životno osiguranje

Kada iz $A_x = \sum_{k=1}^{+\infty} v^{k+1} \cdot {}_kp_x \cdot q_{x+k}$ zamjenimo ${}_kp_x \cdot q_{x+k}$ sa $\frac{d_{x+k}}{l_x}$, dolazimo do formule

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{v \cdot d_x + v^2 \cdot d_{x+1} + v^3 \cdot d_{x+2} + \cdots}{l_x} \\ &= \frac{C_x + C_{x+1} + C_{x+2} + \cdots}{D_x} \\ &= \frac{M_x}{D_x}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Slično, dolazimo do formula

$$A^1_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \tag{4.15}$$

$$A_{x:\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}. \tag{4.16}$$

Detaljnije o komutativnim funkcijama se može pronaći u [1] Gerber, Hans U, *Life Insurance Mathematics*, Third Edition, Springer Science, 1997.

Oznake

$P(A)$	vjerovatnoća događaja A
(x)	osoba starosti x
μ_{x+t}	intezitet smrtnosti
${}_tq_x$	vjerovatnoća da osoba starosti x umre u narednih t godina
${}_tp_x$	vjerovatnoća da osoba starosti x preživi narednih t godina
v	diskontni faktor
p_{ij}	vjerovatnoća prelaska iz stanja i u stanje j
Z	sadašnja vrijednost osigurane sume
EZ	očekivana sadašnja vrijednost osigurane sume
s.v.o.s.	sadašnja vrijednost osigurane sume
A_x	očekivana s.v.o.s. diskretnog doživotnog osiguranja
$\bar{A}_x$	očekivana s.v.o.s. neprekidnog doživotnog osiguranja
$A^1_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v.o.s. diskretnog osiguranja života na n godina
$\bar{A}^1_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v.o.s. neprekidnog osiguranja života na n godina
$A_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v.o.s. diskretnog mješovitog osiguranja života na n godina
$\bar{A}_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v.o.s. neprekidnog mješovitog osiguranja života na n godina
$A_{x:\overset{1}{\overline{n}\rvert}},\ {}_nE_x$	očekivana s.v.o.s. osiguranja za slučaj doživljenja na n godina
${}_{n\rvert}A_x$	očekivana s.v.o.s. odloženog diskretnog doživotnog osiguranja
${}_{n\rvert}\bar{A}_x$	očekivana s.v.o.s. odloženog neprekidnog doživotnog osiguranja
Y	sadašnja vrijednost životnog anuiteta; renta
EY	očekivana sadašnja vrijednost rente
$\ddot{a}_x$	očekivana s.v. neposredne doživotne rente plative unaprijed
a_x	očekivana s.v. neposredne doživotne rente plative naknadno
$\ddot{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v. neposredne rente na n godina, plative unaprijed
$a_{x:\overline{n}\rvert}$	očekivana s.v. neposredne rente na n godina, plative naknadno
${}_{n\rvert}\ddot{a}_x$	očekivana s.v. odložene za n godina, doživotne rente, plative unaprijed
${}_{n\rvert}a_x$	očekivana s.v. odložene za n godina, doživotne rente, plative naknadno
$\bar{a}_x$	očekivana s.v. stalne neprekidne, neposredne doživotne rente
$\bar{a}_{x:\overline{n}\rvert}$	oočekivana s.v. stalne neprekidne, neposredne rente na n godina
${}_{n\rvert}\bar{a}_x$	očekivana s.v. stalne neprekidne, odložene za n godina rente

Bibliografija

[1] Gerber, Hans U, *Life Insurance Mathematics*, Third Edition, Springer Science, 1997

[2] Dickson, David CM, Mary R. Hardy, Howard R. Waters, *Actuarial Mathematics for Life Contingent Risks*, Second Edition, Cambridge University Press, 2013

[3] Norberg, Ragnar, *Basic Life Insurance Mathematics*, Lecture notes, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen (2000)

[4] Esary, James D., Frank Proschan, David W. Walkup, *Association of random variables, with applications*, The Annals of Mathematical Statistics 38.5 (1967): 1466-1474

[5] Esary, James D., Frank Proschan, *Relationships among some concepts of bivariate dependence*, The Annals of Mathematical Statistics (1972): 651-655

[6] Norberg, Ragnar, *Actuarial analysis of dependent lives*, Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, 1988

[7] Denuit, Michel, Anne Cornet, *Multilife Premium Calculation with Dependent Future Lifetimes*, (1999)

[8] Lai, Chin Diew, N. Balakrishnan *Continuous bivariate distributions*, Springer-Verlag New York, 2009

Biografija autora

Milena Jovović (*25.07.1997.*)
Odrasla sam i školovala se u Podgorici. Osnovne studije Matematike i računarskih nauka sam završila u redovnom roku na Prirodno-matematičkom fakultetu, Univerzitet Crne Gore u Podgorici. Diplomirala sam braneći temu, iz teorije vjerovatnoće, „Sankt Peterburški paradoks" kod profesora dr Siniše Stamatovića. Primjena matematike u različitim oblastima finansija je bila prva na listi preferencija u kojem aspektu matematike sam željela da se nadogradim. Zbog toga i želje za promjenom, učenjem od profesora iz čijih knjiga sam imala priliku da učim tokom osnovnih studija, odlučujem se da upišem Statistiku, aktuarsku i finansijsku matematiku na Matematičkom fakultetu u Beogradu. Nakon položenih ispita na master studijama, počinjem da se obučavam i radim u Wiener Städtische životnom osiguranju u Podgorici. Bavim se aktuarstvom u životnom osiguranju.