Универзитет у Београду

Математички факултет

Марјана Максимовић

Геометријски метод решавања Пелове једначине

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

проф. др. Горан Ђанковић

Чланови комисије:

др. Славко Моцоња, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

др. Марко Радовановић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:

23.12.2022.

Садржај:

1. Увод

Циљ овог мастер рада је обрада и примена Пелове једначине помоћу геометријске интерпретације. Диофантове једначине се у различитим облицима помињу у основним и средњим школама, док је са Пеловом једначином то ређи случај. Много чешће се срећу у задацима за разна такмичења.

У овом раду смо се најпре упознали са Пелом, ко је он био, чиме се бавио и како је једначина названа по њему.

У трећој глави смо се подсетили Диофантових једначина. Навели смо и укратко описали неке методе од постојећих метода, а затим и који су све типови Диофантових једначина.

У четвртој глави смо мало детаљније прошли кроз Питагорине тројке, дефинисали смо их и представили услове који морају да важе за њихово постојање, такође и навели примере који то показују.

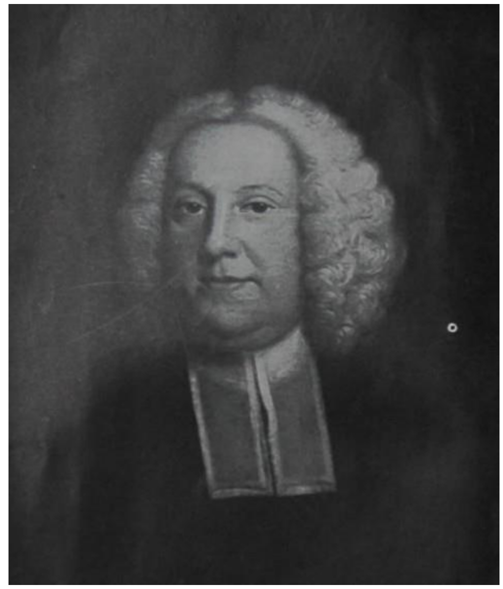
У петој глави смо обрадили Пелову једначину и како налазимо решења на алгебарски начин, с обзиром да доћи до основног решења некада зна бити тешко представили смо неколико начина за то и навели примере. У истој глави смо разрешили и једначине Пеловог типа и објаснили како доћи до њиховог решења.

У шестој глави смо представили како се геометријски одређују Питагорине тројке и то нам је неки увод за геометријско решавање Пелове једначине.

У седмој глави је оно главно а то је како решити Пелову једначину, а такође и једначину Пеловог типа, на геометријски начин. То је представљено са све примерима које прате одговарајуће слике.

На самом крају је и преглед коришћене литературе.

2. John Pell (Џон Пел)



Џон Пел је био енглески математичар и политички агент у иностранству, рођен 1. марта 1611. и живео до 12. децембра 1685. Рођен је у Саутвику у Сасексу. Његов отац се такође звао Џон Пел, а мајка Мери Холанд. Када је имао 6 година, брат и он остали су без оца, а наредне године и без мајке. Школовао се у Стеининг гимназији и са 13 година пошао на Тринити колеџ у Кембриџу. Током своје универзитетске каријере постао је врхунски лингвиста. 1632. године се оженио и добио четири сина и четири кћери.

Пел је провео већи део 1630-их радећи под Хартлибовим утицајем, на темама из области педагогије, енциклопедизма и комбинаторике. До 1638. године формулисао је предлог за универзални језик. У математици се бавио проширивањем обима алгебре у теорији једначина и на математичке табеле.

1638. издао је своју кратку *Идеју о математици.*

1644. отишао на катедру математике у Амстердаму и од тада је радио на полемичком делу, против Лонгомонтана.

1646. године Пел је прихватио позив од Фредерика Хенрија, принца од Оранжа, за место професора на Оранџ колеџу у Бреди. Када је видео да је избијање рата неминовно он се враћа у Енглеску, 1652.

Након његовог доласка, Оливер Кромвел га је именовао на место предавача математике у Лондону.

Од 1654. до 1658. Пел је деловао као Кромвелов политички агент у Цириху за протенстантске кантоне Швајцарске. Сарађивао је са Самјуелом Морландом, енглеским резидентом у Женеви.

Након повратка у Енглеску Пел је преузео наређења и 1661. постао викар Фобинга у Есексу. 1663. године добио је почасни DD(Ламбетов степен) и такође изабран је за члана Краљевског друштва.

Његова посвећеност математици омела је његов живот у Цркви и његов приватан живот. Једно време био је и у затвору. Умро је у кући господина Которна, читаоца цркве Светог Џајлса у Филсу.

Многи од Пелових рукописа доспели су код Ричарда Базбија, учитеља Вестминстерске школе, а затим су дошли у посед Краљевског друштва. Још увек се чувају у Британској библиотеци. Рукописи садрже не само Пелове сопствене мемоаре, већ и велики део његове преписке са математичарима његовог времена.

Занимљивост везана за Пелову једначину

Једначине овог типа у модерну математику увео је Ферма (Pierre de Fermat 1601-1665), тако што је у писму енглеским математичарима упутио "изазов" решавања проблема. Он у том писму задаје да се докаже следеће тврђење.

За произвољан дати број који није квадрат постоји бесконачно много квадрата, таквих да ако се такав квадрат помножи датим бројем и производу дода јединица, резултат је поново квадрат. Другим речима, он тврди да ако природан број d није потпун квадрат, тада једначина

$$dy^2 + 1 = x^2$$

има бесконачно много целобројних решења.

Проблем су покушали да реше енглески математичари Браункер (W. Brouncker 1620-1684) и Валис (J. Wallis 1616-1703), али Ферма није био задовољан њиховим решењем. Притом је тврдио да он зна доказ егзистенције решења и да га је извео методом „бесконачног смањивања" , али га никада није објавио.

Ојлер (L. Euler 1707-1783) док је проучавао Фермаову заоставштину, наишао је на овај проблем и заинтересовао се за њега. Из неког разлога он је погрешно сматрао да је у решавању учествовао математичар Пел, те је једначину назвао по њему. До данас нико није успео да промени име тој једначини.

Ојлер је у својим радовима описао алгоритам за долазак до решења али није ни он доказао да се тим алгоритмом увек долази до решења. Први који је то урадио 1768. године био је Лагранж (J. L. Lagrange 1736-1813) и то је доказао коришћењем верижних разломака. Тај доказ је остао најпознатији до дан данас.

3. Диофантове једначине

Алгебарска једначина или систем алгебарских једначина, са рационалним коефицијентима, чија се решења траже у скупу целих или рационалних бројева зове се алгебарска Диофантова једначина.

Обично се претпоставља да Диофантова једначина има две или више променљивих. Међутим, постоје и неке друге врсте Диофантових проблема и једначина. Уколико се непознате величине у Диофантовој једначини јављају само у првом степену, онда је таква једначина линеарна Диофантова једначина, док је она у којој се променљиве јављају са изложиоцем већим од 1, нелинеарна Диофантова једначина.

Приликом решавања Диофантових једначина, захтеви могу бити веома разноврсни, одговори на задата питања често веома тешки, што захтева препознавање одговарајуће методе за решавање датог проблема. Општи поступак се може дефинисати само за поједине класе једначина. У овом поглављу биће укратко изложене најчешће методе за решавање Диофантових једначина, а затим и типови Диофантових једначина да би дошли до онога што је нама у овом раду најбитније а то су Пелове једначине.

За решавање Диофантових једначина постоји доста метода што негде и представља проблем спознати када који метод искористити и шта је најбоље применити. Укратко ћемо их описати.

3.1. Методе решавања Диофантових једначина

Метод разликовања случајева

Ово је један од метода који се најчешће примењује у решавању математичких проблема уопште. У решавању Диофантових једначина је такође један од највише примењиваних метода, самостално или у комбинацији са другим методама. Код ове методе важну улогу играју математичко искуство, интуиција, осећај за проблем, сналажљивост. Све то је неопходно да би се лакше одговорило на питање „Како раздвојити случајеве?“. Те случајеве бирамо у зависности каква је једначина, колико има променљивих,... Може се претпоставити вредност за једну променљиву, па одредити друга или се ипак раздвајање случајева врши по једној променљивој која је за то најподеснија, затим се у једном случају разматрају нови и све тако док се не добије низ једначина са једном непознатом.

Пример: *Одредити све уређене парове (x, y) природних бројева x и y тако да важи једнакост $xy^2 + 4 = 2000y^2$.*

Решење: Разликујемо два случаја:

1) Ако је $y = 0$, тада заменом у једначину имамо $x \cdot 0^2 + 4 = 2000 \cdot 0^2$, тј. $4 = 0$, па $y = 0$ није решење дате једначине;
2) Ако је $y \neq 0$, погодном трансформацијом, добијамо $\frac{4}{y^2} = 2000 - x$.

   Како је $2000 - x$ природан број, то и $\frac{4}{y^2}$ мора бити природан број.

   Закључујемо да y^2 мора бити делилац броја 4 и зато су могући случајеви:
   a) Ако је $y = 1$, онда је $x = 1996$;
   b) Ако је $y = 2$, онда је $x = 1999$.

   Коначно долазимо до закључка да је скуп решења дате једначине: $(x, y) \in \{(1996,1), (1999,2)\}$. ▲

Метод производа

Овај метод се често користи при решавању нелинеарних Диофантових једначина. Састоји се из низа трансформација и факторизација Диофантове једначине у производ два или више чинилаца. Најповољнија ситуација је уколико се на једној страни једнакости израз који садржи промењиве факторизује на чиниоце, а на другој страни факторизује константа. Након тога се овај метод своди на метод разликовања случајева.

Пример:Одредити све парове (x, y) *целих бројева за које је* $2x^2 + 3xy + y^2 + 1 = 0$.

Решење: Трансформацијом добијамо

$$2x(x + y) + y(x + y) = -1$$

односно,

$$(x + y)(2x + y) = -1.$$

Одавде је ($x + y = 1$ и $2x + y = -1$) или ($x + y = -1$ и $2x + y = 1$). Први случај даје решења ($x = -2, y = 3$), а други ($x = 2, y = -3$). ▲

Метод количника

Један од начина за раздвајање случајева је и коришћење количника и анализа његове целобројности. Идеја је да се једначина $A = B$, низом трансформација преведе у облик $M = N + \frac{P}{Q}$. Ако су Mи N цели бројеви, онда то мора бити и $\frac{P}{Q}$. То значи да се број Q мора садржати у броју P.

<u>Пример:</u> Одредити целе бројеве x и y тако да је $x^2 - xy + 2x - 3y = 6$.

<u>Решење:</u> Раздвајајући променљиве добијамо

$$x^2 + 2x - 6 = xy + 3y = y(x + 3).$$

Како за $x = -3$ задња једначина нема решења $(-3 = 0)$, то мора бити

$$y = \frac{x^2 + 2x - 6}{x + 3} = \frac{x^2 + 3x - x - 3 - 3}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x - 1) - 3}{x + 3} = x - 1 - \frac{3}{x + 3}.$$

За $(x + 3) \in \{1, -1, 3, -3\}$, односно $x \in \{-2, -4, 0, -6\}$ добијамо одговарајуће вредности за $y \in \{-6, -2, -2, -6\}$, па је скуп решења

$(x, y) \in \{(-2, -6), (-4, -2), (0, -2), (-6, -6)\}$. ▲

Метод збира

Суштина овог метода је да се најпре дата једначина трансформише у облик погодан за разликовање случајева. Један од најпогоднијих облика био би збир квадрата, или још општије, збир ненегативних сабирака.

<u>Пример:</u> У скупу целих бројева решити једначини $4x^2 + y^2 = 12x + 4y - 12$.

<u>Решење:</u> Трансформишимо једначину у збир квадрата

$$(2x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 1.$$

Сада због почетног услова, разликујемо случајеве:

1) $2x - 3 = 1$ и $y - 2 = 0$;
2) $2x - 3 = -1$ и $y - 2 = 0$;
3) $2x - 3 = 0$ и $y - 2 = 1$;
4) $2x - 3 = 0$ и $y - 2 = -1$.

Случајеви под 3) и 4) немају решења јер тражимо целобројна решења.
Сада су решења дате једначине $(x, y) \in \{(2,2), (1,2)\}$. ▲

Метод неједнакости

Веома често се као један од начина за разликовање случајева користе неједнакости, са циљем да се из области дефинисаности једначине издвоје скупови у којима једначина нема решења. У следећем кораку, једначина се решава неким од претходно изложених поступака, у преосталом делу области дефинисаности. Добро је елиминасати бесконачни део области дефинисаности, ако је то могуће, а затим једначину решавати у коначном скупу.

<u>Пример:</u> Ако су x, y, z различити природни бројеви, решити једначину $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

<u>*Решење:*</u> С обзиром да је једначина симетрична функција променљивих, не умањујући општост, можемо претпоставити да је $x > y > z$. Тада је

$$\frac{1}{x} < \frac{1}{y} < \frac{1}{z}$$

и тада је

$$\frac{3}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 < \frac{3}{z}.$$

Сада је

$$\frac{3}{x} < 1 \text{ и } \frac{3}{z} > 1,$$

што даје $x > 3$ и $z < 3$.

Како су x, y, z различити од 1 и како је $z < 3$, то је $z = 2$.

Сада је $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$. По истој логици имамо да је

$$\frac{2}{x} < \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2} < \frac{2}{y} \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{2}{y} \Longrightarrow y < 4.$$

Како је $y > z = 2 \Rightarrow y = 3$, односно $x = 6$. Како је једначина симетрична функција променљивих, коначна решења су:

$(x, y) \in \{(6,3,2), (6,2,3), (2,3,6), (2,6,3), (3,2,6), (3,6,2)\}$. ▲

Метод парности

Коришћење особина парности тј. непарности може довести до елиминисања великог броја случајева а самим тим и до сужења области вредности променљивих. Овај метод за решавање Диофантових једначина користи се већ у петом разреду основне школе.

<u>Пример:</u> Одредити све просте бројеве p, q и *r такве да је* $2p + 3q + 4r = 2006$.

<u>*Решење:*</u> Бројеви $2p, 4r$ и 2006 су парни бројеви, па је паран и број $3q$. Онда је и q паран број. Једини паран прост број је 2, па је $q = 2$. Сада је

$$2p + 4r = 2000,$$

односно

$$p + 2r = 1000.$$

Како су $2r$ и 1000 парни бројеви, то је паран и број p, тј. $p = 2$. Следи да је $r = 499$. Како је 499 прост број, закључујемо да је јединствено решење задатка: $p = q = 2$ и $r = 499$. ▲

Метод дељивости

Ова метода се заснива на једноставној чињеници да ако је $A = B$, онда су и својства израза A и B у погледу дељивости идентична. Овај метод користимо када је у питању дељење без остатка.

<u>Пример:</u> *Одредити све двоцифрене природне бројеве који су девет пута већи од збира својих цифара.*

<u>Решење:</u> Нека је тражени број облика $\overline{ab}$. Тада је, по услову задатка,

$$10a + b = 9(a + b)$$

Како је десна страна једнакости дељива са 9, то је и лева страна једнакости дељива са 9, а то значи и да је збир цифара тог броја дељив са 9. То значи да је тада $a + b$ једнако 9 или 18. Односно, $10a + b = 9 \cdot 9 = 81$ или $10a + b = 9 \cdot 18 = 162$. Како је 162 троцифрен број, једино решење је $81 = 9 \cdot (8 + 1)$ тј. $\overline{ab} = 81$. ▲

Метод дискриминанте

У овом методу углавном се дата једначина посматра као квадратна по једној од променљивих, а онда се дискусијом дискриминанте разликују могући случајеви. Да би решења квадратне једначине били цели бројеви и сама дискриминанта мора бити цео број.

<u>Пример:</u> *Одредити све целе бројеве x и y такве да је $2x^2 + 5x + y^2 = 19$.*

<u>Решење:</u> Дату једначину можемо посматрати као квадратну једначину по x, тј.

$$2x^2 + 5x + (y^2 - 19) = 0.$$

Њена решења су: $x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (y^2 - 19)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 8(y^2 - 19)}}{4}$.

Очигледно је да x може (али не мора) бити целобројно само ако је дискриминанта ове квадратне једначине потпун квадрат. Другим речима мора бити

$$25 - 8(y^2 - 19) = a^2,$$

где је a неки цео број, који такође треба одредити. Дакле,

$$25 - 8y^2 + 152 = a^2,$$

па је

$$a^2 + 8y^2 = 177.$$

Како је $8y^2 \leq 177$, то је $y \leq 4$, па $|y| \in \{0,1,2,3,4\}$. Број a је цео број ако је $|y| \in \{1,4\}$. Тада је $|a| \in \{13,7\}$. Тада се лако добијају сва решења (која испуњавају почетне услове да су цели бројеви) дате једначине:

$(x, y) \in \{(1,13), (-1,13), (4,7), (-4,7)\}$. ▲

Ојлеров метод

Метод Ојлера се примењује код решавања линеарне Диофантове једначине, тј. једначине облика $ax + by = c$ и при томе су бројеви a и b узајамно прости. Сама методологија је прилично јасна и овај метод се најчешће користи у основној школи.

Пример: *Одредити сва целобројна решења* x и y *једначине* $3x + 7y = 89$.

Решење: Пошто су бројеви 3 и 7 узајамно прости, за решавање ове једначине можемо користити Ојлеров метод. Решавањем једначине по x добијамо $x = \frac{89-7y}{3}$, тј. после трансформација десне стране

$$x = \frac{89 - 7y}{3} = 29 - 2y - \frac{y - 2}{3},$$

па је x цео број само ако је $y - 2$ дељиво са 3, што можемо записати као $y - 2 = 3k$, где је k неки цео број. Тада је $y = 3k + 2$, а $x = 25 - 7k$.

Добијено решење је опште решење дате једначине и дата једначина има бесконачно много решења, јер се за свако целобројно k добије уређени пар $(x, y) = (25 - 7k, 3k + 2)$ који је решење дате једначине. ▲

Диофантов метод

Диофант даје општи метод за одређивање рационалних решења алгебарске квадратне једначине са две промењиве. Диофантов метод се састоји у следећем. Посматра се квадратна једначина са две промењиве $Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0$ где су A, B, C, D, E, F цели бројеви. Посматрана једначина у равни xOy представља неку криву другог реда (или једну, односно две праве). Ако је $(x_{0,}y_0)$ једно решење дате једначине, онда се кроз тачку $(x_{0,}y_0)$ поставља прамен правих $y - y_0 = m(x - x_0)$, где је m рационалан број различит од нуле. За разне вредности параметра m, добија се бесконачно много тачака пресека правих и криве.

<u>Пример:</u> Решити једначину $x^2 - 2y^2 + 3xy - 4x - 5y + 3 = 0$ *у скупу рационалних бројева.*

<u>Решење:</u> Једно решење дате једначине је $(x_0, y_0) = (1,0)$. Сада

$$x = 1 + t, y + 0 = k[(1 + t) - 1], \text{тј. } y = kt.$$

Заменом, у почетну једначину, добијамо нову једначину

$$(1 + t)^2 - 2(kt)^2 + 3(1 + t)kt - 4(1 + t) - 5kt + 3 = 0.$$

После трансформације последње једначине добија се

$$t[t(1 - 2k^2 + 3k) + 8k - 2] = 0.$$

Одавде је

$$t = 0 \text{ или } t = \frac{8k - 2}{2k^2 - 3k - 1}.$$

Ако је $t = 0$, тада су решења једначине почетна решења $(x_0, y_0) = (1,0)$.

Уколико је $t = \frac{8k-2}{2k^2-3k-1}$, тада су решења почетне једначине

$$x = \frac{2k^2 + 5k - 3}{2k^2 - 3k - 1} \text{ и } y = \frac{8k^2 - 2k}{2k^2 - 3k - 1}.$$

За $k \neq 0$ добијамо бесконачно много рационалних решења. ▲

3.2. Типови Диофантових једначина

Методе које смо претходно навели су битан предуслов за успешно решавање разних типова Диофантових једначина.

Оно што је такође битно при решавању Диофантових једначина, увек треба одговорити на основна питања везана за сваку Диофантову једначину:

а) Доказати (не)постојање решења,

б) Пребројати колико укупно решења има дата једначина (коначно или бесконачно много),

в) Ако једначина има коначно много решења, одредити сва њена решења,

г) Ако једначина има бесконачно много решења одредити општу формулу која даје сва решења, д) Од свих могућих решења издвојити она која задовољавају посебне услове (ако се то тражи).

У даљем тексту ћемо навести неке најинтересантније типове Диофантових једначина које се обрађују у основној и средњој школи.

Математички ребуси

Елементарне Диофантове једначине раде се још у основној школи и називају се математички ребуси. Поступак решавања тих ребуса назива се дешифровање. При самом решавању ребуса користе се идеје на којима почивају многе методе за решавање Диофантових једначина. Кључна је чињеница све што важи за једну страну једнакости важи и за другу. Ако је на једној страни паран број, или потпун квадрат, или број дељив неким бројем, онда све то исто мора важити и на другој страни.

Поред тога, знајући да непознате цифре у математичком ребусу могу имати само вредности из скупа $\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ разматрамо десет различитих могућности, али увек постоје нека ограничења или услови у поставци задатка тако да се број случајева смањује.

Пример: *Да ли ребус* $*** + ***=***$ *има решења, ако се свака од цифара* $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ *може употребити само једном?*

Решење: Овај ребус могу решавати ученици који су савладали сабирање до хиљаду. У том узрасту не постоји прецизан метод за решавање ребуса, али се тад тек почиње са стицањем навика да неки задатак нема само једно решење и да се може решити на само један начин. Прво што треба видети у овом задатку је да збир два троцифрена броја такође троцифрен број. Логика налаже да први сабирак треба да је што мањи број. Ако почнемо са 123, видећемо да се нека цифра мора поновити. Покушајмо са 124. Сада цифра јединица у другом сабирку може бити 3, 5, 9. Ако покушамо са цифрама 3, 5 видимо да се цифре понављају. Ако ставимо цифру 9 тада имамо $124 +{**}9 ={**}3$. Одавде није тешко закључити да је $124 + 659 = 783$. ▲

Диофантове једначине једне променљиве

Дефиниција: *Једначина која садржи једну променљиву и која има за услов да је она целобројна, јесте Диофантова једначина једне променљиве.*

Проблем Диофантових једначина једне променљиве, може се уопштити на проблем полинома, а за такво разматрање веома су значајне следеће две теореме.

Теорема: *Ако је* $\frac{p}{q}$ *(*p *и* q *узајамно прости цели бројеви и* $q \neq 0$*) рационална нула полинома*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o$$

са целобројним коефицијентима $a_n \neq 0$, онда је p делилац броја a_o, q делилац броја a_n.

Теорема: *Ако x_0 представља целобројну нулу следећег полинома*

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_o$$

са целобројним коефицијентима $a_n \neq 0$, онда је x_0 један од целобројних делилаца броја a_o.

<u>*Пример:*</u> *Одредити четири узастопна цела броја тако да је збир кубова прва три броја једнак кубу четвртог броја.*

<u>*Решење:*</u> Нека је први тражени број n. Из услова задатка имамо једнакост

$$n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 = (n+3)^3$$

Сређивањем ове једнакости добијамо:

$$n^3 - 6n - 9 = 0$$

У делиоцима слободног члана, у овом случају броја 9, ћемо наћи целобројне нуле овог полинома. Делиоци броја 9 су $\{1, -1, 3, -3, 9, -9\}$ и провероми видимо да је једна нула полинома број 3. То значи да је $n = 3$, па имамо да су та тражена четири узастопна броја 3, 4, 5 и 6. ▲

Линеарне Диофантове једначине

Дефиниција: *Ако су a,b и c цели бројеви $a, b \neq 0$ линеарна једначина облика $ax + by = c$, при чему су вредности x и y из скупа целих бројева, назива се линеарна Диофантова једначина.*

Ако је $c = 0$, добијамо једначину $ax + by = 0$, која се назива хомогена линеарна Диофантова једначина.

Када је реч о линеарним Диофантовим једначинама са две променљиве, одговор на питања која смо навели на почетку, а која су битна за све Диофантове једначине, даће следеће теореме.

Теорема: *Линеарна Диофантова једначина облика $ax + by = c$ (a, b, c цели бројеви) има решења ако и само ако $d|c$, где је $d = NZD(a, b)$.*

<u>*Доказ:*</u> Нека је $d = NZD(a, b)$, $d \neq 1$. Претпоставимо да је (x_0, y_0) решење линеарне Диофантове једначине облика $ax + by = c$, тада је $ax_0 + by_0 = c$ и постоје узајамно прости бројеви k и l такви да је $a = kd$ и $b = ld$, што значи да је $kdx_0 + ldy_0 = c$, тј. $d(kx_0 + ly_0) = c$. Лева страна једнакости је дељива са d, па мора и десна страна бити дељива, тј. $d|c$.

Претпоставимо обрнуто, $d|c$. Тада постоји цео број m такав да је $c = md$. С друге стране d се може представити као линеарна функција од a и b, тј. постоје цели бројеви x' и y' такви да је

$$ax' + by' = d.$$

Множећи последњу једнакост са m, добијамо $amx' + bmy' = dm$, односно $a(mx') + b(my') = c$. Дакле, добијамо да је једно решење једначине $(x, y) = (mx', my')$.

Уколико је $c = 0$, тј. $ax + by = 0$, тада је $x = -\frac{b}{a}y$, а како су x и y цели бројеви, то је $x = -bt$ и $y = at$. ■

Теорема: *Ако је $d = NZD(a, b)$, $d|c$ и (x_0, y_0) једно решење Диофантове једначине $ax + by = c$, тада су сва решења (x, y) дата формулама: $x = x_0 + \frac{b}{d}t$ и $y = y_0 - \frac{a}{d}t$, t цео број.*

<u>Пример:</u> Доказати да Диофантова једначина $28x + 70y = 39$ нема решења у скупу целих бројева.

<u>Решење:</u> Како је $NZD(70,28) = 14$, а 14 не дели број 39, значи да дата Диофантова једначина нема решења у скупу целих бројева. ▲

<u>Пример:</u> Одредити сва целобројна решења једначине $13x + 32y = 5$.

<u>Решење:</u> Прво да проверимо да ли једначина има решења, закључујемо да има јер је $NZD(13,32) = 1$, а 1 дели број 5.

Користећи Еуклидов алгоритам добијамо

$$32 = 13 \cdot 2 + 6$$

$$13 = 6 \cdot 2 + 1$$

$$6 = 6 \cdot 1$$

Бројеви 32 и 13 су узајамно прости, па број 1 можемо представити као линеарну функцију бројева 32 и 13:

$$1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2 \cdot (32 - 13 \cdot 2) = 13 - 2 \cdot 32 + 4 \cdot 13 = 5 \cdot 13 - 2 \cdot 32.$$

И коначно добијамо да је $13 \cdot 25 + 32 \cdot (-10) = 5$. Дакле, једно решење линеарне Диофантове једначине $13x + 32y = 5$ је $(25, -10)$. На основу претходних теорема имамо да је $a = 13, b = 32, c = 5, d = 1, x_0 = 25$ и $y_0 = -10$. На основу тога добијамо и друга решења дате једначине *:* $x = x_0 + \frac{b}{d}t = 25 + \frac{32}{1}t = 25 + 32t$. $y = y_0 - \frac{a}{d}t = -10 - \frac{13}{1}t = -10 - 13t$, где је t цео број. ▲

Диофантове једначине степена већег од један

Диофантове једначине које садрже променљиву степена већег од један су нелинеарне Диофантове једначине. Овај тип једначина углавном се разматра у скупу природних бројева (ако другачије није наглашено), а сва разматрања могу се обавити и у скупу целих бројева, мада резултат не мора бити идентичан.

Неки од познатих типова Диофантових једначина чији је степен већи од један су:

- Питагорине тројке
- Квадратне Диофантове једначине
- Диофантове једначине облика $x^4 \pm ax^2y^2 + y^4 = z^2$
- Диофантове једначине облика $x^n + y^n = z^n$

Проблем питагориних бројева, тј. питање решења Питагорине Диофантове једначине, је један од проблема теорије бројева о коме ћемо више писати у наредној глави.

Ирационалне Диофантове једначине

Ирационалне Диофантове једначине представљају још један тип Диофантових једначина који ћемо само поменути. То су једначине чије су променљиве целобројне, а непознате величине се налазе под коренима парног степена. Код оваквих једначина посебну пажњу треба обратити на домен дефинисаности корена.

Пример: *Решити једначину* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{1996}$ *у скупу ненегативних целих бројева.*

Решење: Дата једначина је еквивалентна са једначином

$$x = y + z + 1996 + 2\sqrt{yz} - 4\sqrt{499y} - 4\sqrt{499z}.$$

Бројеви x, y, z су ненегативни цели бројеви, ако је

$$0 \leq y = 499a^2 \leq 1996 \text{ и } 0 \leq z = 499b^2 \leq 1996,$$

па је

$$0 \leq a \leq 2, 0 \leq b \leq 2 \text{ и } a + b \leq 2.$$

За a и b узимамо само целебројеве, јер у супротном y и z не би били цели бројеви зато што је 499 прост број и нека делиоце.

Разматрањем случајева добија се шест решења:

(0,0,1996), (0,1996,0), (1996,0,0), (0,499,499), (499,0,499), (499,499,0). ▲

Експоненцијалне Диофантове једначине

Експоненцијалне Диофантове једначине заузимају важно место међу свим Диофантовим једначинама, јер је њихово решавање у суштини синтеза свих досадашњих реализованих метода. У решавању експоненцијалних Диофантових једначина користе се основне теореме теорије бројева, али и најважније особине експоненцијалних функција.

<u>*Пример:*</u> *Постоје ли природни бројеви* x и y *такви да важи једнакост* $2^x + 1 = y^2$?

<u>*Решење:*</u> Из дате једнакости је $2^x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$. Изрази $y-1$ и $y+1$ су исте парности, а како је њихов производ 2^x, они су парни, па је

$y - 1 = 2^a$ и $y + 1 = 2^b, (a + b = x, a < b)$.

Одузимањем прве од друге једнакости добија се да је

$$2^b - 2^a = 2.$$

Следи да је

$$2^a(2^{b-a} - 1) = 2.$$

Сада је

$$2^a = 2 \text{ и } 2^{b-a} - 1 = 1,$$

па је

$$a = 1, b = 2.$$

Дакле,

$$x = a + b = 3.$$

Коначно, једино решење дате једначине је $(x, y) = (3,3)$. ▲

Пелова једначина

Пелова једначина је такође Диофантова једначина, уједно и последња коју ћемо поменути, којој је посвећен цео овај рад.

4. Питагорине тројке

Дефиниција: *Уређену тројку природних бројева* (x, y, z) *зовемо Питагорина тројка ако су* x, y *катете, а* z *хипотенуза неког правоуглог троугла, тј. ако важи* $x^2 + y^2 = z^2$. *Ако су* x, y, z *узајамно прости, онда кажемо да је* (x, y, z) *примитивна Питагорина тројка, а такав троугао називамо примитивни Питагорин троугао.*

Докажимо да од бројева x, y један мора бити паран, а други непаран и да је z непаран број. Ако су x, y парни бројеви, онда је $x = 2a$ и $y = 2b$ $(a, b \in \mathbb{N})$. Тада је $NZD(x, y) = NZD(2a, 2b) = 2$. То значи да x и y нису узајамно прости јер имају заједнички делилац већи од 1, па ова могућност отпада. Ако су $x = 2a + 1$ и $y = 2b + 1$ $(a, b \in \mathbb{N})$ непарни бројеви онда је z паран број, $z = 2c$ $(c \in \mathbb{N})$, па се из једнакости $x^2 + y^2 = z^2$, добија $(2a + 1)^2 + (2b + 1)^2 = (2c)^2$ или $4a^2 + 4a + 1 + 4b^2 + 4b + 1 = 4c^2$. Како је са десне стране једнакости број дељив са 4, а са леве стране број који при дељењу са 4 даје остатак 2, то једнакост није могућа. Дакле x и y не могу бити исте парности.

Теорема: *Да би уређена тројка* (x, y, z) *представљала примитивно решење једначине* $x^2 + y^2 = z^2$ *у скупу природних бројева, неопходно је и довољно да се* x, y и z *изражавају у облику*

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$$

где су $m, n \in \mathbb{N}, (m, n) = 1, m > n$ *и* m, n *су различите парности.*

Такође важи и $y = m^2 - n^2, x = 2mn, z = m^2 + n^2$.

Диофантов доказ: Ако једначину $x^2 + y^2 = z^2$ поделимо са z^2, добићемо једначину $\left(\frac{x}{z}\right)^2 + \left(\frac{y}{z}\right)^2 = 1$ и ако уведемо смену $b = \frac{x}{z}$ и $a = \frac{y}{z}$ тада имамо $b^2 + a^2 = 1$.

Једначину решавамо Диофантовим методом. Како је $(-1,0)$ једно решење добијене једначине, узимамо праву која садржи тачку $(-1,0)$ и представимо је у параметарком облику

$$a = nt \text{ и } b = -1 + mt, \qquad n, m \in \mathbb{N}.$$

И када ову праву пресечемо са кругом $b^2 + a^2 = 1$, добијамо

$$(mt - 1)^2 + (nt)^2 = 1,$$

па је

$$m^2t^2 - 2mt + 1 + n^2t^2 = 1$$

сређивањем добијамо

$$t = \frac{2m}{m^2 + n^2}.$$

Заменом добијамо да је

$$a = \frac{2mn}{m^2+n^2} \text{ и } b = \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2},$$

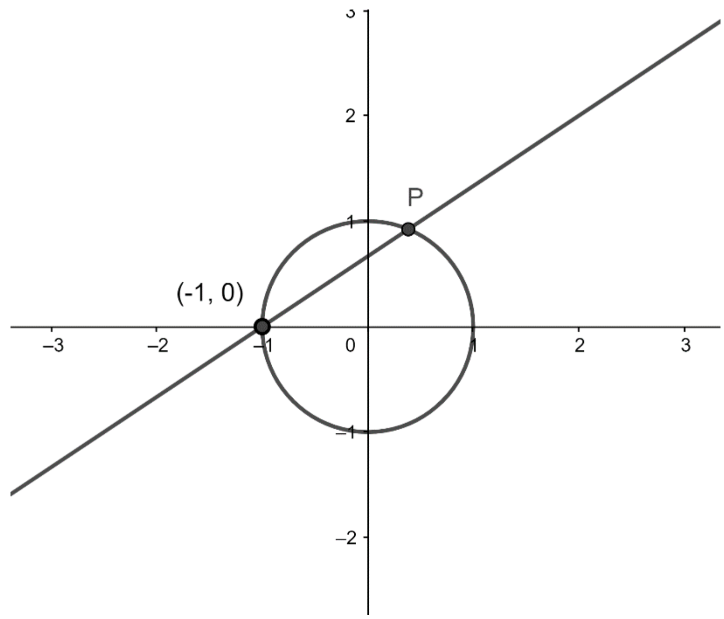
а сада када вратимо a и b у смене $b = \frac{x}{z}$ и $a = \frac{y}{z}$

добијамо

$$x = k(m^2-n^2), y = 2kmn \text{ и } z = k(m^2+n^2) \quad , k \in \mathrm{Z}.$$

За $k = 1$ добија се тражена формула $x = m^2 - n^2, y = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$.

На овој слици видимо пресек праве која пролази кроз тачку $(-1,0)$ и са кружницом



$a^2 + b^2 = 1$ има две тачке пресека, једна тачка је$(-1,0)$, а друга $(a,b) = \left(\frac{2mn}{m^2+n^2}, \frac{m^2-n^2}{m^2+n^2}\right)$. ■

<u>*Алгебарски доказ:*</u> Једначину $x^2 + y^2 = z^2$ можемо писати у облику $y^2 = z^2 - x^2 = (z-x)(z+x)$. Ако се од ове релације формира пропорција

$$\frac{y}{z-x} = \frac{z+x}{y} = \frac{m}{n}, (m \text{ и } n \text{ су неки природни бројеви}),$$

налазимо да је

$$z + x = \frac{my}{n}, z - x = \frac{ny}{m}.$$

Решавањем претходног система једначина по z и x добија се

$$\frac{z}{y} = \frac{m^2+n^2}{2mn} \text{ и } \frac{x}{y} = \frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

Тада је $x = k(m^2-n^2), y = 2kmn, z = k(m^2+n^2), \quad k \in \mathrm{Z}$.

За $k = 1$, добија се тражена формула

$$x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2. ■$$

Последица: *Опште решење једначине* $x^2 + y^2 = z^2$, *дато је у облику* $x = k(m^2-n^2), y = 2kmn, z = k(m^2+n^2)$, где су $k, m, n \in \mathrm{Z}$.

Наведимо све примитивне Питагорине тројке облика $x = m^2 - n^2, y = 2mn$ и $z = m^2 + n^2$ код којих је $m \leq 8$.

m	n	x	y	z	m	n	x	Y	z
2	1	3	4	5	7	2	45	28	53
3	2	5	12	13	7	4	33	56	65
4	1	15	8	17	7	6	13	84	85
4	3	7	24	25	8	1	63	16	65
5	2	21	20	29	8	3	55	48	73
5	4	9	40	41	8	5	39	80	89
6	1	35	12	37	8	7	15	112	113
6	5	11	60	61					

Пример: Одредити све примитивне правоугле троуглове код којих је једна страница једнака 12 мерних јединица.

Решење: Разликујемо три случаја:

1) Ако је $x = 12 = 2mn$ онда је

а) $m = 6, n = 1, x = 12, y = 35, z = 37$;

б) $m = 3, n = 2, x = 12, y = 5, z = 13$;

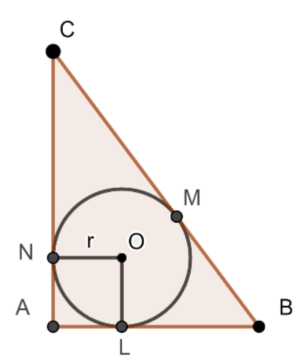
2) Ако је $y = 12 = m^2 - n^2 = (m-n)(m+n)$, тада је $m + n = 6$ а $m - n = 2$, па је $m = 4, n = 2$ односно, $y = 12, x = 16, z = 20$, али овај случај не задовољава услов да је правоугли троугао примитиван па га одбацујемо.

3) Ако је $z = 12 = m^2 + n^2$ тада нема решења јер не постоје природни бројеви m и n чији је збир квадрата једнак 12.▲

Пример: Ако је полупречник круга непаран прост број, тада се око тог круга могу описати тачно два неподударна примитивна Питагорина троугла.

Решење: Ако је $x = m^2 - n^2, y = 2mn, z = m^2 + n^2$ примитивна Питагорина тројка, нађимо формулу за полупречник уписаног круга одговарајућег троугла.

Ако имамо правоугли троугао ABC где су AB и AC катете, а BC хипотенуза и ако имамо круг уписан у овај троугао са центром у тачки O, са L означимо тачку додира круга и странице AB, са M тачку додира са страницом BC и са N тачку додира круга и странице AC. Тада имамо да важе једнакости $AL = AN, BL = BM$ и $CM = CN$ (зато што су то тангенте из једне тачке на круг).



Приметимо још да је $AL = AN = ON = OL = r$ (полупречник овог круга)

(Ова једнакост важи јер је угао код темена A прав по услову задатка, углови код темена L и N су такође прави јер су то углови између тангенте и полупречника, следи да и четврти угао мора бити прав, а пошто је и $AL = AN$ онда је то квадрат.)

Сада имамо да је обим троугла једнак:

$$O = AL + LB + BM + MC + CN + NA = 2r + 2BM + 2CM = 2r + 2BC.$$

Ако узмемо да је $AB = x, BC = z$ и $CA = y$ имамо

$$x + y + z = 2r + 2z,$$

$$x + y = 2r + z.$$

Добијамо формулу за полупречник уписаног круга

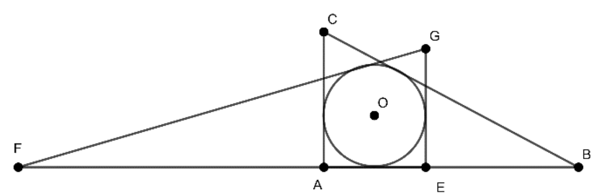
$$r = \frac{1}{2}(x + y - z).$$

Сада у ову једначину мењамо примитивну Питагорину тројку:

$r = \frac{1}{2}(x + y - z) = \frac{1}{2}(m^2 - n^2 + 2mn - m^2 - n^2) =$

$$= \frac{1}{2}(2mn - 2n^2) = mn - n^2$$

$$= n(m - n).$$



Ако је то непаран прост број p, мора бити:

1) $n = 1, m = p + 1, x = p(p + 2), y = 2(p + 1), z = p^2 + 2p + 2$ или
2) $n = p, m = p + 1, x = 2p + 1, y = 2p(p + 1)$ $z = 2p^2 + 2p + 1$. ▲

5. Пелова једначина

Нека је D позитиван цео број који није потпун квадрат (без умањења општости, може се претпоставити да је D производ различитих простих бројева), тада једначину $x^2 - Dy^2 = 1$ зовемо *Пелова једначина*. Видимо да су $x = \pm 1, y = 0$ тривијална решења Пелове једначине, док су сва друга решења нетривијална.

Решења Пелове једначине тражимо у скупу природних бројева.

Наведимо најпре нека основна својства ове једначине.

Услов да је D различито од потпуног квадрата је неопходан да би једначина имала решења. Претпоставимо да је тај услов испуњен и представимо једначину у облику

$$\left(x - y\sqrt{D}\right)\left(x + y\sqrt{D}\right) = 1.$$

Претпоставимо да знамо једно решење (x_1, y_1) једначине, тј. да је

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right) = 1.$$

Математичком индукцијом докажимо да степеновањем Пелове једначине такође добијемо Пелову једначину.

Квадрирамо једначину:

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^2\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^2 = 1,$$

Сређивањем добијамо

$$\left(({x_1}^2 + {y_1}^2 D) - 2x_1y_1\sqrt{D}\right)\left(({x_1}^2 + {y_1}^2 D) + 2x_1y_1\sqrt{D}\right) = 1,$$

Па ако нам је ${x_1}^2 + {y_1}^2 D = x_2, 2x_1y_1 = y_2$, добијамо

$$\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right)\left(x_2 + y_2\sqrt{D}\right) = 1.$$

Ако претпоставимо да степеновањем на $n-1$ добијамо једначину облика

$$\left(x_{n-1} - y_{n-1}\sqrt{D}\right)\left(x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{D}\right) = 1,$$

одредимо једначину степена n:

$$\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^n\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^n = \left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)^{n-1}\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)^{n-1}\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right) =$$

$$= \left(x_{n-1} - y_{n-1}\sqrt{D}\right)\left(x_{n-1} + y_{n-1}\sqrt{D}\right)\left(x_1 - y_1\sqrt{D}\right)\left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right) =$$

$$\Big((x_{n-1}x_1 + y_{n-1}y_1D) - (x_{n-1}y_1 + y_{n-1}x_1)\sqrt{D}\Big)\Big((x_{n-1}x_1 + y_{n-1}y_1D) + (x_{n-1}y_1 + y_{n-1}x_1)\sqrt{D}\Big) = \big(x_n - y_n\sqrt{D}\big)\big(x_n + y_n\sqrt{D}\big) = 1.$$

Значи степеновањем са n добијамо

$$\big(x_n - y_n\sqrt{D}\big)\big(x_n + y_n\sqrt{D}\big) = 1,$$

за неке природне бројеве x_n и y_n. Дакле, дата једначина, ако важе претпоставке да D није потпун квадрат и да постоји бар једно решење, има бесконачно много решења (x_n, y_n). Главни проблем је наћи једно решење једначине. Најмање решење (тј. оно решење код којег је $x_n + y_n\sqrt{D}$ најмање) назива се *основним решењем.*

За доказ егзистенције решења користићемо следећу лему и Дирихлеову теорему.

Лема: *Ако су за неко $k \in \mathbb{Z}$ парови (x_1, y_1)и (x_2, y_2) решења једначине $x^2 - Dy^2 = k$, онда је условом*

$$X + Y\sqrt{D} = \big(x_1 + y_1\sqrt{D}\big)\big(x_2 \pm y_2\sqrt{D}\big), \qquad X, Y \in \mathbb{Z}$$

(узима се произвољан знак у последњој загради) одређено решење једначине $X^2 - DY^2 = k^2$.

<u>*Доказ:*</u> У доказу користимо да из

$$X + Y\sqrt{D} = \big(x_1 + y_1\sqrt{D}\big)\big(x_2 \pm y_2\sqrt{D}\big), \qquad X, Y \in \mathbb{Z}$$

следи

$$X - Y\sqrt{D} = \big(x_1 - y_1\sqrt{D}\big)\big(x_2 \mp y_2\sqrt{D}\big), \qquad X, Y \in \mathbb{Z}.$$

Сада је

$$X^2 - DY^2 = \big(X + Y\sqrt{D}\big)\big(X - Y\sqrt{D}\big)$$
$$= \big(x_1 + y_1\sqrt{D}\big)\big(x_2 \pm y_2\sqrt{D}\big)\big(x_1 - y_1\sqrt{D}\big)\big(x_2 \mp y_2\sqrt{D}\big)$$
$$= ({x_1}^2 - D{y_1}^2)({x_2}^2 - D{y_2}^2) = k^2. \blacksquare$$

Важан резултат теорије Диофантових апроксимација је следећа Дирихлеова теорема.

Теорема: *Нека је α произвољан реалан број и $t \in \mathbb{N}$. Тада постоји рационалан број $\frac{p}{q}$ такав да важи*

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{qt} \text{ и } 0 < q \leq t.$$

<u>*Доказ:*</u> Посматрајмо $t + 1$ бројева $\alpha x - \lfloor \alpha x \rfloor$ за $x = 0,1,2, \dots, t$. Сви они припадају интервалу $[0,1)$. Поделимо тај интервал на t интервала

$$\left[0, \frac{1}{t}\right), \quad \left[\frac{1}{t}, \frac{2}{t}\right), \dots, \left[\frac{t-1}{t}, 1\right).$$

На основу Дирихлеовог принципа, бар један од тих интервала садржи два од датих бројева; нека су то бројеви $\alpha x_1 - \lfloor \alpha x_1 \rfloor$ и $\alpha x_2 - \lfloor \alpha x_2 \rfloor$ и нека је, на пример $x_2 > x_1$. Тада је

$\frac{1}{t} > |(\alpha x_2 - \lfloor \alpha x_2 \rfloor) - (\alpha x_1 - \lfloor \alpha x_1 \rfloor)| = |\alpha(x_2 - x_1) - (\lfloor \alpha x_2 \rfloor - \lfloor \alpha x_1 \rfloor)|$.

Означимо $q = x_2 - x_1, \lfloor \alpha x_2 \rfloor - \lfloor \alpha x_1 \rfloor = p$. Тада важи $0 < q \leq t$ и

$$|\alpha q - p| < \frac{1}{t}, \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{tq}. \blacksquare$$

Теорема: *За произвољан природан број D који није потпун квадрат, једначина $x^2 - Dy^2 = 1$ има решења.*

<u>*Доказ:*</u> Нека је фиксиран природан број $t_1 > 1$. На основу Дирихлеове теореме постоје природни бројеви p_1 и q_1 за које важи

$$\left|q_1\sqrt{D} - p_1\right| < \frac{1}{t_1}, \qquad q_1 \leq t_1.$$

Тада је

$$p_1 < q_1\sqrt{D} + \frac{1}{t_1} < q_1\sqrt{D} + 1,$$

па је

$$q_1\sqrt{D} + p_1 < 2q_1\sqrt{D} + 1.$$

Множећи леве и десне стране прве и треће неједнакости, с обзиром да је $q_1 \leq t_1$, добијамо да је

$$|{p_1}^2 - {q_1}^2 D| < 2\sqrt{D} + 1.$$

Изаберимо сада природан број t_2 тако да важи

$$t_2 > t_1 \text{ и } \frac{1}{t_2} < \left|q_1\sqrt{D} - p_1\right|.$$

На претходно описан начин нађимо нови пар природних бројева $(p_2\,, q_2)$ за које важи $|{p_2}^2 - {q_2}^2 D| < 2\sqrt{D} + 1$. Затим наставимо овај поступак налазећи низ парова $(p_n\,, q_n)$ који задовољавају неједначину $|{p_n}^2 - {q_n}^2 D| < 2\sqrt{D} + 1$.

Посматрајмо вредности ${p_n}^2 - {q_n}^2 D$ за све $n \in \mathbb{N}$. Све оне се налазе у интервалу $\left(-2\sqrt{D} - 1, 2\sqrt{D} + 1\right)$, па како тај интервал садржи коначно много целих бројева, то постоји цео број $k \neq 0$ у њему такав да је

$${p_n}^2 - {q_n}^2 D = k$$

за бесконачно много вредности n. Међу тако изабраним паровима $(p_n\,, q_n)$ сигурно ће постојати два, означимо их са (x_1, y_1) и (x_2, y_2) за које важи $x_1 \equiv x_2 (mod\ |k|)$ и $y_1 \equiv y_2 (mod\ |k|)$. Означимо са x_0 и y_0 целе бројеве за које важи

$$x_0 + y_0\sqrt{D} = \left(x_1 + y_1\sqrt{D}\right)\left(x_2 - y_2\sqrt{D}\right).$$

На основу леме важи

$${x_0}^2 - {y_0}^2 D = k^2.$$

При томе је

$$x_0 = x_1 x_2 - y_1 y_2 D \equiv {x_1}^2 - {y_1}^2 D \equiv 0 (mod\ |k|),$$

$$y_0 = -x_1 y_2 + x_2 y_1 \equiv -x_1 y_1 + x_1 y_1 \equiv 0 (mod\ |k|).$$

Због тога је $x_0 = x|k|, y_0 = y|k|$ за неке целе бројеве x и y, за које, заменом у ${x_0}^2 - {y_0}^2 D = k^2$ добијамо да важи $x^2 - Dy^2 = 1$. ■

Теорема: *Нека је D позитиван цео број који није потпун квадрат* и нека је (x_e, y_e) оно позитивно решење $(x_e > 0, y_e > 0)$ једначине $x^2 - Dy^2 = 1$ за које је $x_e + y_e\sqrt{D}$ минимално. Тада је свако решење (x, y) једначине $x^2 - Dy^2 = 1$ одређено са

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_e + y_e\sqrt{D})^n, x, y \in \mathbb{N}, \qquad \text{за неко n} \in \mathbb{N}.$$

Доказ: По претходним примедбама, ако је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 - Dy^2 = 1$, онда је и сваки пар (x, y) одређен условом из формулације теореме такође решење те једначине. Доказаћемо да других решења нема. Претпоставићемо супротно: да постоји неко решење (x, y) које није задатог облика. Тада за неко $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n < x + y\sqrt{D} < \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^{n+1}.$$

Узимајући у обзир да је $\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^{-1} = x_e - y_e\sqrt{D}$ и множећи ову двоструку неједнакост са $\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n > 0$ добијамо:

$$1 < \left(x + y\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n < \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right).$$

Ако сада дефинишемо $X, Y \in \mathbb{Z}$ са

$$X + Y\sqrt{D} = \left(x + y\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n,$$

следи да важи

$$X^2 - DY^2 = \left(X + Y\sqrt{D}\right)\left(X - Y\sqrt{D}\right) =$$

$$= \left(x + y\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n\left(x - y\sqrt{D}\right)\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n$$

$$X^2 - DY^2 = (x^2 - Dy^2)({x_e}^2 - D{y_e}^2)^n = 1,$$

па и (X, Y) представљају решења једначине $x^2 - Dy^2 = 1$.

Неједнакост $1 < \left(x + y\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n < \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)$ можемо сада написати у облику $1 < X + Y\sqrt{D} < \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)$, одакле је $0 < X - Y\sqrt{D} < 1$. Због последње неједнакости мора бити да су $X, Y > 0$, али друга неједнакост из неједнакости

$$1 < X + Y\sqrt{D} < \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)$$

чини контрадикцију са претпостављеним минималним својствима решења (x_e, y_e). Добијена контрадикција доказује теорему. ■

Када је основно решење (x_e, y_e) познато, одређивање осталих решења (x_n, y_n) може се извршити било описаним поступком степеновања, било формирањем рекурентне везе између два узастопна решења. Наиме, из

$$x_{n+1} + y_{n+1}\sqrt{D} = \left(x_n + y_n\sqrt{D}\right)\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)$$

$$= (x_e x_n + y_e D y_n) + (x_e y_n + x_n y_e)\sqrt{D}$$

закључујемо да мора да важи

$$x_{n+1} = x_e x_n + y_e D y_n$$

$$y_{n+1} = x_e y_n + x_n y_e.$$

Ако узмемо да је

$$2x_n = \left(x_n + y_n\sqrt{D}\right) + \left(x_n - y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n + (x_e - y_e\sqrt{D})^n \text{ и}$$

$$2y_n\sqrt{D} = \left(x_n + y_n\sqrt{D}\right) - \left(x_n - y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n - (x_e - y_e\sqrt{D})^n,$$

једнакости важе на основу претходне теореме, добијамо формуле за директно одређивање низова:

$$x_n = \frac{1}{2}\left[\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n + \left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n\right]$$

$$y_n = \frac{1}{2\sqrt{D}}\left[\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n - \left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n\right].$$

Као што смо рекли главни и највећи проблем је одредити основно решење (x_e, y_e). Некада у појединим ситуацијама то може бити и једноставно, погледајмо које су то ситуације.

- Ако је $D = a^2 - 1, a \in \mathbb{N}$, онда је $x^2 - Dy^2 = x^2 - (a^2 - 1)y^2 = 1$. Одавде имамо да је $x^2 - 1 = (a^2 - 1)y^2$, па је основно решење једначине $(x_e, y_e) = (a, 1)$.
- Ако је $D = a^2 + 1, a \in \mathbb{N}$, онда је $x^2 - Dy^2 = x^2 - (a^2 + 1)y^2 = 1$. Следи да је $x^2 = (a^2 + 1)y^2 + 1 = a^2y^2 + y^2 + 1$. Потребно нам је да је $a^2y^2 + y^2 + 1$ потпун квадрат, онда треба да важи да је $y^2 = 2ay$, тј. $y = 2a$, а $x^2 = (ay + 1)^2$ па је $x = ay + 1 = 2a^2 + 1$. Значи основно решење је $(x_e, y_e) = (2a^2 + 1{,}2a)$.
- Ако Пелова једначина облика $x^2 - Dy^2 = 1$ има решења, онда једначина $x^2 - q^2Dy^2 = 1, q \in \mathbb{N}$, има основно решење $\left(x_{e,}y_e\right) = \left(x_e, \frac{y_e}{q}\right)$. Овде D одређујемо на основу претходна два случаја. На пример, основно решење за Пелову једначину $x^2 - 10y^2 = 1$ је $\left(x_{e,}y_e\right) = (19{,}6)$, а на основу тога је основно решење за једначину $x^2 - 90y^2 = 1$ тј. $x^2 - 3^2 \cdot 10y^2 = 1$ износи $\left(x_{e,}y_e\right) = \left(19, \frac{6}{3}\right) = (19{,}2)$.

На основу ових олакшица лако је наћи поједина решења али не и сва. Постоји још један познати метод за одређивање основног решења који користи ***верижне разломке***.

Ако је (x, y) решење Пелове једначине $x^2 - Dy^2 = 1$, разломак $\frac{x}{y}$ је близак $\sqrt{D}$ и у извесном смислу представља добру апроксимацију ирационалног броја $\sqrt{D}$ рационалним. Апроксимације ирационалног броја α рационалним су у тесној вези са развојем α у тзв. верижни разломак.

Сваки реалан број α се може развити у верижни разломак облика

$$[a_0; a_1, a_2, a_3, \dots] \coloneqq a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cdots}}}$$

где је $a_0 \in \mathbb{Z}$ и $a_1, a_2, \dots \in \mathbb{N}$.

Формирамо рекурентни низ $r_0 = \alpha$ и $r_i = \frac{1}{r_{i-1} - \lfloor r_{i-1} \rfloor}, r_i \in \mathbb{Z}$ добићемо да је $a_i = \lfloor r_i \rfloor$.

<u>*Пример:*</u> *Одредити верижни разломак броја* $\sqrt{8}$.

Према претходној рекурентној вези имамо да је

$r_0 = \sqrt{8}, a_0 = \lfloor r_0 \rfloor = 2,$

$r_1 = \frac{1}{r_0 - \lfloor r_0 \rfloor} = \frac{1}{\sqrt{8} - 2} = \frac{\sqrt{8}+2}{4}$ па је $a_1 = \lfloor r_1 \rfloor = 1,$

даље добијамо да је $a_2 = 4, a_3 = 1, a_4 = 4, \dots$

На крају имамо да је верижни разломак броја $\sqrt{8}$:

$\sqrt{8} = 2 + \frac{1}{1+\frac{1}{4+\frac{1}{1+\frac{1}{4+\cdots}}}} = [2; 1,4,1,4, \dots]$. ▲

Овај развој је коначан за рационално α, односно бесконачан за ирационално α. Верижни разломци $[a_0], [a_0, a_1], [a_0, a_1, a_2], \dots$ су рационални бројеви који теже броју α.

Дефиниција: *За бесконачан верижни разломак $[a_0, a_1, a_2, \dots]$ кажемо да је периодичан ако постоје цели бројеви $m \geq 0, k \geq 1$ такви да је $a_{k+n} = a_n$* за све *$n \geq m$. У том случају верижни разломак пишемо у облику*

$$[a_0, a_1, \dots, a_{m-1}, \overline{a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+k-1}}],$$

где „црта" изнад бројева $a_m, a_{m+1}, \dots, a_{m+k-1}$ значи да се тај блок бројева понавља у недоглед. Број k називамо дужина периода. Ако је $m = 0$, онда кажемо да је верижни разломак чисто периодичан.

Желимо да пронађемо верижни разломак за $\sqrt{D}$, зато ћемо навести теорему која важи за верижни разломак броја $\sqrt{D}$.

Теорема: *Нека је D природан број који није потпун квадрат. Тада развој броја* $\sqrt{D}$ у верижни разломак има облик

$$\sqrt{D} = [a_0; \overline{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, 2a_0}],$$

где је $a_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$, а $a_1, \dots, a_{k-1}$ су централно симетрични, тј. $a_1 = a_{k-1}, a_2 = a_{k-2}, \dots$

Нека је

$a_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$, сада имамо $\sqrt{D} = a_0 + \left(\sqrt{D} - a_0\right) = a_0 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{D}-a_0}}$, применимо исту процедуру на $\frac{1}{\sqrt{D}-a_0} = \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-{a_0}^2}$ и имамо

$$a_1 = \left\lfloor \frac{\sqrt{D}+a_0}{D-{a_0}^2} \right\rfloor,$$

сада је $\sqrt{D} = a_0 + \frac{1}{a_1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt{D}+a_0}{D-{a_0}^2}-a_1}}}$, па следи да је $a_2 = \left\lfloor \frac{1}{\frac{\sqrt{D}+a_0}{D-{a_0}^2}-a_1} \right\rfloor$,

ако наставимо овако на основу претходне теореме доћи ћемо до разломка који изгледа овако

$$\sqrt{D} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots a_{k-1} + \cfrac{1}{a_0 + \sqrt{D}}}}}$$

и тада треба стати.

Ако је k *паран* број , где је k дужина периода, онда је основно решење дато са (x_e, y_e), где је

$$\frac{x_e}{y_e} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-1}}}}}.$$

Ако је k *непаран* број онда важи

$$\frac{x_e}{y_e} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots a_k + \cfrac{1}{2a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots a_{k-1} + \cfrac{1}{a_к}}}}}}}}.$$

На основу свих ових олакшица могуће је формирати таблицу основних решења за првих тридесетак природних вредности коефицијената D у Пеловој једначини $x^2 - Dy^2 = 1$:

D	x_e	y_e		D	x_e	y_e		D	x_e	y_e		D	x_e	y_e
2	3	2		11	10	3		19	170	39		27	26	5
3	2	1		12	7	2		20	9	2		28	127	24
5	9	4		13	649	180		21	21	55		29	9801	1820
6	5	2		14	15	4		22	197	42		30	11	2
7	8	3		15	4	1		23	24	5		31	1520	273
8	3	1		17	33	8		24	5	1		32	17	3
10	19	6		18	17	4		26	51	10		33	23	4

<u>*Пример:*</u> *Одредити опште решење једначине* $x^2 - 3y^2 = 1$.

<u>*Решење:*</u> Тривијално решење ове једначине је $(x_0, y_0) = (1,0)$, а основно или минимално решење је $(x_e, y_e) = (2,1)$.

Опште решење би добили из рекурентне везе

$$x_{n+1} = x_e x_n + y_e D y_n$$

$$y_{n+1} = x_e y_n + x_n y_e.$$

Када убацимо основно решења добијемо

$$x_{n+1} = 2x_n + 3y_n$$

$$y_{n+1} = 2y_n + x_n.$$

Или ако представимо општом формулом имамо

$$x + y\sqrt{3} = \pm(2+\sqrt{3})^n.\blacktriangle$$

<u>Пример:</u> Одредити опште решење једначине

$$x^2 - 14y^2 = 1$$

<u>Решење:</u> Да би нашли основно решење у овом случају морамо применити верижне разломке.

$a_0 = \lfloor\sqrt{14}\rfloor = 3$, тада је $\sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14}-3) = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{14}-3}} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{14}+3}{5}}$, (1.1)

$\frac{1}{\sqrt{14}-3} = \frac{\sqrt{14}+3}{14-9} = \frac{\sqrt{14}+3}{5}$,

$a_1 = \left\lfloor\frac{\sqrt{14}+3}{5}\right\rfloor = 1$, мењамо у једначину (1.1) и добијамо

$$\sqrt{14} = 3 + (\sqrt{14}-3) = 3 + \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{14}-3}} = 3 + \frac{1}{\frac{\sqrt{14}+3}{5}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{\frac{\sqrt{14}+3}{5}-1}}} \qquad (1.2)$$

Сређујемо последњи разломак $\frac{\sqrt{14}+3}{5} - 1 = \frac{\sqrt{14}+3-5}{5} = \frac{\sqrt{14}-2}{5}$

$\frac{1}{\frac{\sqrt{14}-2}{5}} = \frac{5}{\sqrt{14}-2} = \frac{5\sqrt{14}+10}{14-4} = \frac{\sqrt{14}+2}{2}$,

$a_2 = \left\lfloor\frac{\sqrt{14}+2}{2}\right\rfloor = 2$,

Опет мењамо у једначину (1.2) и добијамо:

$$\sqrt{14} = 3 + \left(\sqrt{14} - 3\right) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{14} - 3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 3}{5}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 3}{5} - 1}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 2}{2} - 2}}}} \tag{1.3}$$

$\frac{\sqrt{14}+2}{2} - 2 = \frac{\sqrt{14}+2-4}{2} = \frac{\sqrt{14}-2}{2}$,

$\frac{1}{\frac{\sqrt{14}-2}{2}} = \frac{2}{\sqrt{14}-2} = \frac{2\sqrt{14}+4}{14-4} = \frac{2\sqrt{14}+4}{10} = \frac{\sqrt{14}+2}{5}$,

$a_3 = \left\lfloor \frac{\sqrt{14}+2}{5} \right\rfloor = 1$, у једначини (1.3) то изгледа овако

$$\sqrt{14} = 3 + \left(\sqrt{14} - 3\right) = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\sqrt{14} - 3}} = 3 + \cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 3}{5}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 3}{5} - 1}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 2}{2} - 2}}}} = 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{\cfrac{\sqrt{14} + 2}{5} - 1}}}}}$$

$$= 3 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\sqrt{14} + 3}}}} =$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 2}{5} - 1} = \frac{1}{\frac{\sqrt{14} + 2 - 5}{5}} = \frac{5}{\sqrt{14} - 3} = \frac{5\sqrt{14} + 15}{14 - 9} = \sqrt{14} + 3$$

Дошли смо до корака када треба да станемо и погледамо колико смо корака одрадили. $k = 4$ а то је паран број онда узимамо да нам је основно решење једнако:

$\frac{x_e}{y_e} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1}}} = 3 + \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{15}{4}$. Значи основно решење је $(x_{\mathrm{e}}, y_{\mathrm{e}}) = (15,4)$

$(15^2 - 14 \cdot 4^2 = 225 - 224 = 1)$. Квадрирање даје $(15 + 4\sqrt{14})^2 = 449 + 120\sqrt{14}$, па је $(x_2, y_2) = (449,120)$. Даље се може наставити степеновањем, међутим једноставније је искористити рекурентну везу, тако да је

$$x_{n+1} = 15x_n + 4 \cdot 14y_n$$

$$y_{n+1} = 15y_n + x_n 4.$$

$$x_2 = 15 \cdot 15 + 4 \cdot 14 \cdot 4 = 449,$$

$$y_2 = 15 \cdot 4 + 15 \cdot 4 = 120,$$

$$x_3 = 15 \cdot 449 + 4 \cdot 14 \cdot 120 = 13455,$$

$$y_3 = 15 \cdot 120 + 449 \cdot 4 = 3596,$$

…

Даљим рачуном се може добити

N	x_n	y_n
1	15	4
2	449	120
3	13455	3596
4	403201	107760
5	12082575	3229204

итд. ▲

5.1. Једначине Пеловог типа

$$x^2 - Dy^2 = a,$$

где је a цео број и D природан број који није потпун квадрат.

За $a = 1$ ова једначина се своди на Пелову једначину за коју смо рекли да има бесконачно много целобројних решења који су дати формулом

$$x + y\sqrt{D} = \pm(x_e + y_e\sqrt{D})^n, n \in \mathbb{Z},$$

где је (x_e, y_e) најмање решење у скупу $\mathbb{N}$.

За разлику од Пелове једначина $x^2 - Dy^2 = a$ не мора да има целобројна решења. Ипак, онда када има решења, могуће је одредити сва.

Нека је (x_0, y_0) једно решење, а (x_n, y_n) опште решење једначине $x^2 - Dy^2 = a$ у скупу природних бројева и нека је (x_e, y_e) основно решење једначине $x^2 - Dy^2 = 1$. Тада важе релације:

$$x^2 - Dy^2 = \left(x - y\sqrt{D}\right)\left(x + y\sqrt{D}\right) = a,$$

$$x_n{}^2 - Dy_n{}^2 = \left(x_n - y_n\sqrt{D}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right) = a,$$

$$x_e{}^2 - Dy_e{}^2 = \left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n = 1.$$

Следи да је

$$\left(x_n - y_n\sqrt{D}\right)\left(x_n + y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)\left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n = a$$

па одавде имамо

$$\left(x_n + y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_0 + y_0\sqrt{D}\right)\left(x_e + y_e\sqrt{D}\right)^n, n \in \mathbb{Z},$$

а тада и $\left(x_n - y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n$.

То значи да, да бисмо решили једначину Пеловог типа (x_0, y_0) , треба прво да решимо одговарајућу Пелову једначину.

И овде је највећи проблем одредити основна решења (x_0, y_0) једначине Пеловог типа. Зато ћемо дати једну теорему без доказа.

Теорема: *Ако једначина $x^2 - Dy^2 = a$ има бар једно решење, онда постоје цео број n и решење (x_0, y_0) дате једначине, за које важи $y_0{}^2 \leq \frac{ay_e{}^2}{2(x_e+1)}$ ако је $a > 0$ и $y_0{}^2 \leq \frac{-ay_e{}^2}{2(x_e+1)}$ ако је $a < 0$, такво да је $\left(x_n - y_n\sqrt{D}\right) = \left(x_0 - y_0\sqrt{D}\right)\left(x_e - y_e\sqrt{D}\right)^n$.*

Пример: *Наћи сва целобројна решења једначине $x^2 - 7y^2 = 2$.*

Решење: У овој једначини $D = 7$ и основно решење одговарајуће Пелове једначине је $(x_e, y_e) = (8,3)$ (ово можемо одредити коришћењем верижне разломке).

$a = 2 > 0$, па имамо $y_0{}^2 \leq \frac{ay_e{}^2}{2(x_e+1)} = \frac{2\cdot 3^2}{2(8+1)} = \frac{18}{18} = 1$. Следи да је $y_0 = \pm 1$, мењајући у почетну једначину добијамо да су основна решења једначине $x^2 - 7y^2 = 2$, $(x_0, y_0) = (\pm 3, \pm 1)$. На крају формула траженог решења је

$$x_n + y_n\sqrt{7} = \pm\left(\pm 3 \pm \sqrt{7}\right)\left(8 + 3\sqrt{7}\right)^n, n \in \mathbb{Z}. \blacktriangle$$

Пример: *Одредити опште решење једначине* $x^2 - 5y^2 = 44$ *у скупу целих бројева*.

Решење: Овде је $D = 5$ и $a = 44 > 0$, па је основно решење Пелове једначине

$x^2 - 5y^2 = 1$, $(x_e, y_e) = (9,4)$ ($D = 5 = 2^2 + 1$, на основу олакшица о којима смо претходно писали за проналажење основног решења имамо да је $(x_e, y_e) = (2 \cdot 2^2 + 1, 2 \cdot 2) = (9,4)$) и ${y_0}^2 \leq \frac{a{y_e}^2}{2(x_e+1)} = \frac{44 \cdot 4^2}{2 \cdot (9+1)} = 35{,}2$. То значи да је потенцијално $y_0 \in \{1,2,3,4,5\}$.

Када ове вредности за y_0 заменимо у почетну једначину добијамо да су једина могућа решења $(x_0, y_0) = \{(\pm 7, \pm 1), (\pm 8, \pm 2), (\pm 13, \pm 5)\}$. Дакле, тражена решења се изражавају формулама

$x_n + y_n\sqrt{5} = \pm(7 \pm \sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n$,

$x_n + y_n\sqrt{5} = \pm(8 \pm 2\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n$,

$x_n + y_n\sqrt{5} = \pm(13 \pm 5\sqrt{5})(9 + 4\sqrt{5})^n$. ▲

6. Геометријски медот решавања Питагорине једначине

У овом одељку представљамо геометријски метод за проналажење решења Питагорине једначине. На почетку за тачку $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ са $z \neq 0$ дефинишемо $R(x, y, z)$ да би добили тачку $\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \in \mathbb{R}^2$.

Ако је јасно да $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^3$ са $z \neq 0$, онда $R(x, y, z)$ представља рационалну тачку са координатама које су рационални бројеви. Претпоставимо да је (a, b, c) примитивно решење Питагорине једначине. Имамо

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1.$$

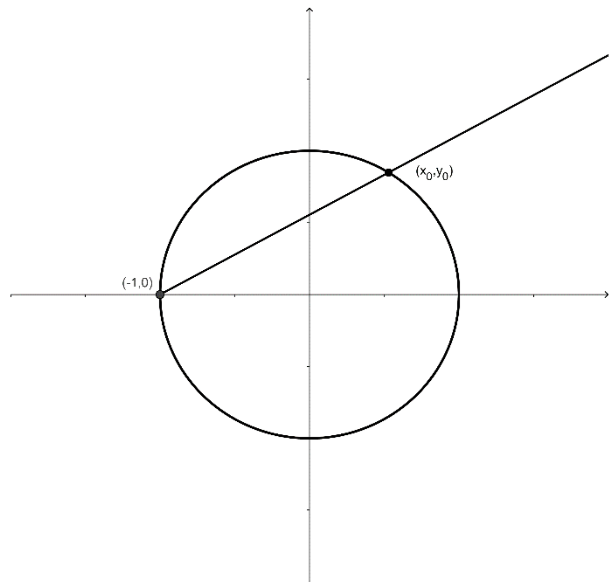
То значи да је $R(a, b, c)$ тачка са рационалним координатама на јединичној кружници $x^2 + y^2 = 1$.

Сада претпоставимо да имамо рационалну тачку $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$, $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, на једничној кружници са центром у координатном почетку и претпоставимо да су рационални бројеви $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ у скраћеном облику, што значи да је $NZD(a, b) = NZD(c, d) = 1$. Желимо да покажемо да постоји примитивно решење (x, y, z) Питагорине једначине као што је $R(x, y, z)$=$\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{d}\right)$. Ова тврдња је очигледна ако је једна од координата $\frac{a}{b}$ или $\frac{c}{d}$ нула. Зато претпоставимо да је $a, c \neq 0$. Након промене знакова, ако је потребно претпостављамо $a, b, c, d > 0$. Пошто је $(a/b)^2 + (c/d)^2 = 1$, $a^2d^2 + c^2b^2 = b^2d^2$ и $b^2|c^2b^2$ и $b^2|b^2d^2$ закључујемо одатле да $b^2|a^2d^2$, али пошто смо претпоставили да је $NZD(a, b) = 1$, следи да $b^2|d^2$. То значи $b|d$. Слично томе $d|b$. Сходно томе $b = d$.

Као резултат ће свака рационална тачка у првом квадранту на јединичној кружници бити облика $\left(\frac{a}{b}, \frac{c}{b}\right)$ са a, b, c природним бројевима и $NZD(a, b) = 1$ и $NZD(c, b) = 1$. Такође, имамо $a^2 + c^2 = b^2$, односно (a, c, b) је решење Питагорине једначине. Такође лако је видети да је $NZD(a, c) = 1$. У ствари, ако је u заједнички фактор за a и c, онда $u^2|a^2 + c^2 = b^2$, дајући $u^2|b^2$, из чега следи да $u|b$. То имплицира $u|NZD(a, b) = 1$, дакле $u = 1$.

Сумирамо, за рационалну тачку (x, y) на јединичној кружници $x, y > 0$, постоје копрости природни бројеви a, b, c тако да је $x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{b}$ и $a^2 + c^2 = b^2$. То значи да је $R(a, c, b) = (x, y)$. Обратите пажњу на то да $R(-a, -c, -b) = (x, y)$ и (a, c, b) и $(-a, -c, -b)$ су једне примитивне Питагорине тројке чије R је (x, y). Коначно, ако је било који од x или y негативан, можемо да прилагодимо знак a или c да би добили тачан предзнак.

Слика 1. Проналажење рационалне тачке на јединичној кружници. Овде смо повезали тачку $(-1{,}0)$ и тачку (x_0, y_0).



Слика 1.

Закључак ове дискусије је да у циљу проналажења Питагорине тројке довољно је одредити рационалну тачку на јединичној кружници.

Настављамо са одређивањем скупа рационалних тачака на јединичној кружници. Кружница $x^2 + y^2 = 1$ на слици 1 има нека очигледана решења, нпр. $(\pm 1{,}0)$ или $(0, \pm 1)$. Можемо да узмемо једну од ових тачака, рецимо $(-1{,}0)$. Главно запажање је да ако је (x_0, y_0) тачка са рационалним координатама, онда је коефицијент правца праве која повезује ту тачку са основном тачком $(-1{,}0)$ је

$$m = \frac{y_0}{x_0 + 1}$$

је рационалан број.

Наша идеја је да урадимо супротно од овога, односно, да пронађемо праву са рационалним нагибом која пролази кроз $(-1{,}0)$ и видимо тачку пресека праве са јединичном кружницом $x^2 + y^2 = 1$ и надамо се да је резултујућа тачка рационална тачка. Једначина праве са коефицијентом правца m кроз тачку $(-1{,}0)$ је

$$y = m(x + 1)$$

Да би смо пронашли тачку пресека ове праве са јединичном кружницом треба да решимо следећи систем једначина

$$y = m(x + 1)$$

$$x^2 + y^2 = 1$$

Уметање вредности y из прве једначине у другу једначину даје

$$x^2 + m^2(x+1)^2 = 1$$

Поједностављивање даје $(m^2+1)x^2 + 2m^2x + (m^2-1) = 0$.

Пошто је производ корена претходне једначине облика $\frac{(m^2-1)}{(m^2+1)}$ и знамо да је један корен -1, онда видимо да је други корен

$$x = \frac{1-m^2}{1+m^2}.$$

Коришћењем једначине $y = m(x+1)$, видимо да је $y = \frac{2m}{1+m^2}$. То значи да је тачка пресека

$$P_m \coloneqq \left(\frac{1-m^2}{1+m^2}, \frac{2m}{1+m^2}\right)$$

Сада бисмо желели да изведемо тројку целих бројева (a, b, c) од ова два рационална броја. Нека је $m = \frac{r}{s}$, где су r, s међусобно прости цели бројеви. Онда добијамо

$$P_m = \left(\frac{s^2-r^2}{s^2+r^2}, \frac{2rs}{s^2+r^2}\right)$$

Сада налазимо примитивну Питагорину тројку (u, v, w) тако да

$$R(u,v,w) = \left(\frac{s^2-r^2}{s^2+r^2}, \frac{2rs}{s^2+r^2}\right)$$

Треба још да израчунамо $NZD(s^2-r^2, s^2+r^2)$ и $NZD(2rs, s^2+r^2)$.

Лема: *За копросте целе бројеве r, s, дефинишемо функцију*

$$\delta(r,s) = NZD(2, s^2+r^2).$$

Тада је $NZD(s^2-r^2, s^2+r^2) = NZD(2rs, s^2+r^2) = \delta(r,s)$.

Доказ: Пошто је $NZD(r,s) = 1$, имамо

$$NZD(rs, s^2+r^2) = 1.$$

Заиста, ако је p прост број и $p|\ NZD(rs, s^2+r^2)$, онда или $p|r$ или $p|s$. Ако је $p|r$, онда $p|s^2+r^2$, па следи да $p|s^2$ и као резултат $p|s$. Дакле $p|r$, $p|s$ у супротности је са почетном претпоставком. Као резултат тога

$$NZD(2rs, s^2+r^2) = NZD(2, s^2+r^2).$$

Даље $NZD(s^2-r^2, s^2+r^2) = NZD\big(s^2+r^2, s^2+r^2+(s^2-r^2)\big)$

$$= NZD(s^2+r^2, 2s^2) = NZD(2, s^2+r^2) = \delta(r,s),$$

поново је $NZD(s^2, s^2+r^2) = 1.$■

Бележимо да је $\delta(r,s) = \begin{cases} 2 & \text{ако је } r \equiv s \, mod 2; \\ 1 & \text{у супротном.} \end{cases}$

Из леме следи да је

$$P_m = \left(\frac{\frac{s^2-r^2}{\delta(r,s)}}{\frac{s^2+r^2}{\delta(r,s)}}, \frac{\frac{2rs}{\delta(r,s)}}{\frac{s^2+r^2}{\delta(r,s)}} \right),$$

и у овом запису координате од P_m су у скраћеном облику. Као последица тога ако узмемо да је

$$(u,v,w) = \left(\frac{s^2-r^2}{\delta(r,s)}, \frac{2rs}{\delta(r,s)}, \frac{s^2+r^2}{\delta(r,s)} \right),$$

затим је $R(u,v,w) = P_m$. Ако нам није битан редослед, можемо писати $\{u,v,w\} = \tau(r,s)$, где је

$$\tau(r,s) = \left\{ \frac{s^2-r^2}{\delta(r,s)}, \frac{2rs}{\delta(r,s)}, \frac{s^2+r^2}{\delta(r,s)} \right\}.$$

Проблем са овом параметризацијом Питагорине тројке је што није бијекција са скупом међусобно простих целих бројева r, s. На пример, $(r,s) = (1,2)$ и $(1,3)$ оба дају чувену Питагорину тројку 3,4,5. У ствари, уопштено, ако су r и s оба непарна, ми добијамо

$$\{u,v,w\} = \left\{ \frac{s^2-r^2}{2}, sr, \frac{s^2+r^2}{2} \right\}.$$

Дакле, питање на које сада треба да одговоримо је: Шта се дешава са случајевима када су или r или s парни. Ово има забавно објашњење.

Лема: *Нека су r, s копрости цели бројеви различите парности. Онда су $r+s$ и $r-s$ међусобно прости непарни бројеви и*

$$\tau(r,s) = \tau(s+r, s-r).$$

<u>*Доказ:*</u> Лака провера показује да

$$\frac{(s+r)^2 + (s-r)^2}{2} = s^2 + r^2;$$

$$\frac{(s+r)^2 - (s-r)^2}{2} = 2sr;$$

и

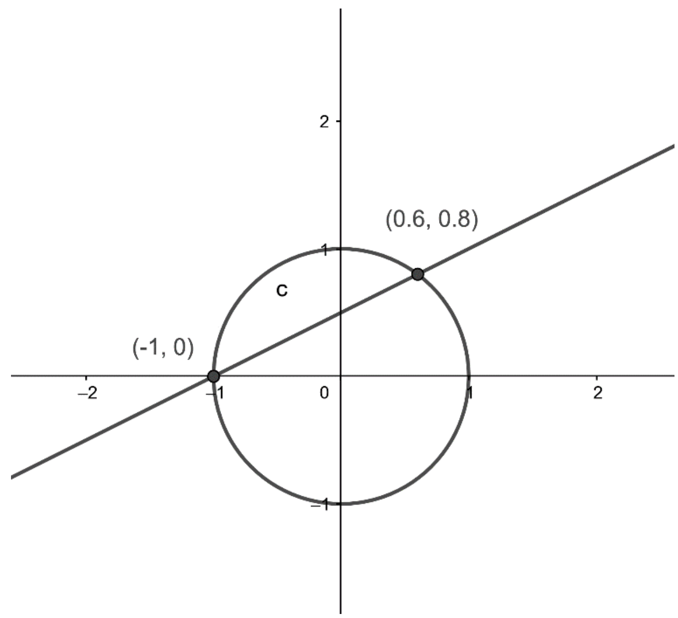
$$(s + r)(s - r) = r^2 - s^2.$$

Доказали смо следећу теорему:

Теорема: *Нека су u, v, w три странице примитивног Питагориног правоуглог троугла. Постоје међусобно прости цели бројеви x, y различите парности тако да*

$$\{u, v, w\} = \{x^2 - y^2, 2xy, x^2 + y^2\}.$$

Пример: Ако узмемо да је нагиб праве кроз тачку $(-1,0)$ $m = \frac{1}{2}$ то на графику изгледа овако:



Једначина те праве $y = \frac{1}{2}(x + 1)$, а јединичне кружнице $x^2 + y^2 = 1$. Пресек праве и кружнице би добили решавањем система и добили бисмо тачку $(x, y) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$.

То значи да је тражена примитивна тројка 3,4,5.▲

7. Геометријски метод решавања Пелове једначине

Може изгледати сувишно користити геометријски метод за проналажење решења Питагорине једначине у свету много лакших метода, међутим геометријска метода из претходног поглавља има примену у ситуацијама у којима елементарне методе дају мало или нимало информација. Да бисмо демонстрирали ову методу, дискутујемо два примера у овом одељку.

Први пример који разматрамо је Пелова једначина:

$$x^2 - Dy^2 = 1$$

где претпостављамо да је D позитиван цео број који није потпун квадрат. Овде бисмо желели да размотримо ову једначину над рационалним бројевима. Постоје нека очигледна решења, $(+1,0)$ и $(-1,0)$. Користићемо једно од ових, рецимо $(-1,0)$, да пронађемо друга рационална решења.

Једначина праве која пролази кроз $(-1,0)$ са коефицијентом правца m је

$$y = m(x+1).$$

Налазимо тачке пресека ове праве са кривом чија је једначина $x^2 - Dy^2 = 1$. Убацивањем вредности y из једначине праве у једначину криве добијамо

$$x^2 - Dm^2(x+1)^2 = 1.$$

Сређивањем чланова ове једначине добијамо

$$(1 - Dm^2)x^2 - 2Dm^2x - (Dm^2 + 1) = 0.$$

Пошто знамо да је $x = -1$ решење ове једначине, друго решење претходне квадратне једначине је

$$x = \frac{1 + Dm^2}{1 - Dm^2}, \qquad Dm^2 \neq 1,$$

јер је $D \neq \frac{1}{m^2}$, D је позитиван цео број који није потпун квадрат.

Коришћењем овог x налазимо одговарајуће y као

$$y = m\left(\frac{1 + Dm^2}{1 - Dm^2} + 1\right) = \frac{2m}{1 - Dm^2}, \qquad x, y \in \mathbb{Q}.$$

Теорема: *Свако решење Пелове једначине над рационалним бројевима осим пара* $(x, y) = (-1,0)$ *може се изразити као*

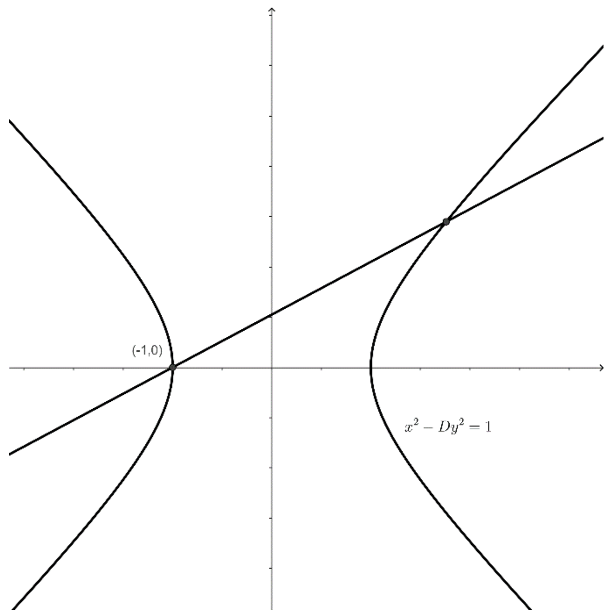
$$\begin{cases} x = \dfrac{1 + Dm^2}{1 - Dm^2}, \\ y = \dfrac{2m}{1 - Dm^2} \end{cases}$$

за неко $m \in \mathbb{Q}$.

Из услова да D није потпун квадрат , $D \neq \frac{1}{m^2}$, па је $1 - Dm^2 \neq 0$, што значи да су x и y увек дефинисани и зато претходним формулама добијамо сва решења Пелове једначине.

Слика 2. График од $x^2 - Dy^2 = 1$.

Овде смо повукли праву са коефицијентом правца m кроз тачку $(-1,0)$.

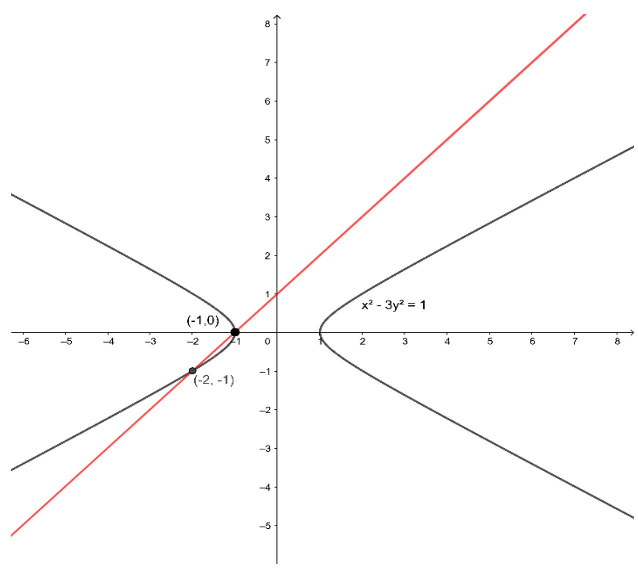


Слика 2.

<u>Пример:</u> Геометријским методом решити једначину $x^2 - 3y^2 = 1$ *у скупу* $\mathbb{Q}$.

<u>Решење:</u> Ову једначину смо већ решили алгебарском методом а сада ћемо то урадити геометријски.

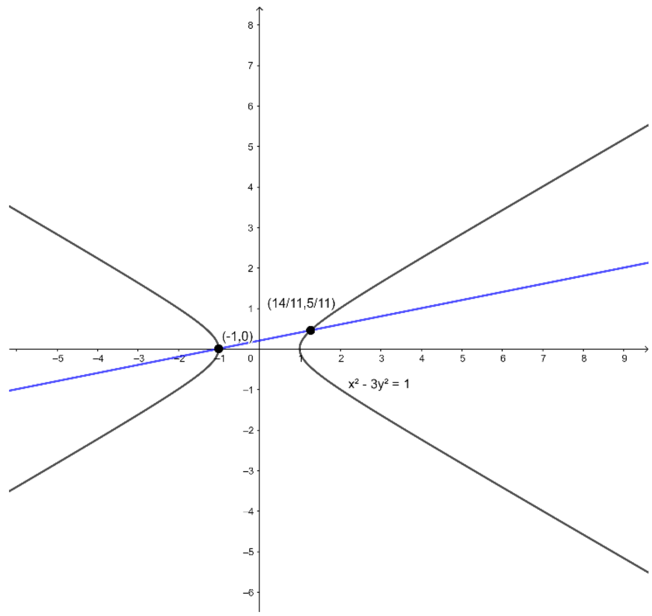
Имамо да је $D = 3$, а тривијална решења су $(-1,0)$и $(1,0)$. Из претходне теореме знамо да се свако решење може представити као $x = \frac{1+Dm^2}{1-Dm^2}$ и $y = \frac{2m}{1-Dm^2}$ за $m \in \mathbb{Q}$, па ако узмемо да је нпр. $m = 1$, добијамо $x = -2$, а $y = -1$, то на графику изгледа овако:



Слика 3.

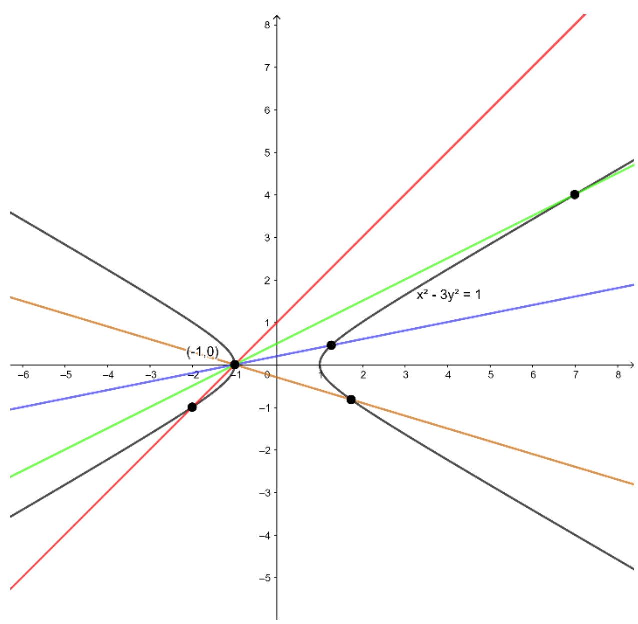
Слика 4.

Ако узмемо да је $m = \frac{1}{5}$ добијамо $x = \frac{14}{11}$ и $y = \frac{5}{11}$, а на графику то изгледа као на слици 4:



Слика 5.

На крају када би у $x = \frac{1+Dm^2}{1-Dm^2}$ и $y = \frac{2m}{1-Dm^2}$ мењали разне вредности за m из скупа рационалних бројева добили бисмо сва могућа решења једначине $x^2 - 3y^2 = 1$ јер је $1 - 3m^2 \neq 0,\ 3 \neq \frac{1}{m^2}, m \in \mathbb{Q}$.▲



7.1. Геометријски метод решавања једначине Пеловог типа

Једначине Пеловог типа геометријски решавамо на сличан начин као и класичне Пелове једначине. У овом поглављу ћемо размотрити само оне једначине код којих $\sqrt{a}$ припада скупу рационалних бројева. Наиме, имамо једначину

$$x^2 - Dy^2 = a$$

где је a цео број и D природан број који није потпун квадрат. За њу постоје нека очигледна решења $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$ и $(\sqrt{a}, 0)$ у скупу рационалних бројева, Користићемо једно од њих нпр. $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$ да би нашли друга решења.

Једначина праве са коефицијентом правца m кроз тачку $\left(-\sqrt{a}, 0\right)$ је облика

$$y = m\left(x + \sqrt{a}\right).$$

Сада нас занима да нађемо тачке пресека са кривом $x^2 - Dy^2 = a$.

Ако у једначину криве убацимо једначину праве добијамо:

$$x^2 - D\left(m\left(x + \sqrt{a}\right)\right)^2 = a,$$

$$x^2 - Dm^2(x^2 + 2x\sqrt{a} + a) = a$$

Даљим срећивањем долазимо до квадратне једначине

$$x^2(1 - Dm^2) - x\left(2\sqrt{a}Dm^2\right) - a(Dm^2 + 1) = 0.$$

Како је једно решење $x = -\sqrt{a}$, следи да је друго решење квадратне једначине

$$x = \frac{\sqrt{a}(Dm^2 + 1)}{(1 - Dm^2)}, \qquad Dm^2 \neq 1,$$

јер је $D \neq \frac{1}{m^2}$, D је позитиван цео број који није потпун квадрат.

Мењањем вредности за x у једначину праве $y = m\left(x + \sqrt{a}\right)$ добијамо:

$$y = \frac{2\sqrt{a}m}{1 - Dm^2}.$$

То значи да свако решење једначине Пеловог типа можемо представити као

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{a}(Dm^2 + 1)}{(1 - Dm^2)} \\ y = \dfrac{2\sqrt{a}m}{1 - Dm^2} \end{cases} \quad \text{за } m \in \mathbb{Q}.$$

Пример: *Геометријским методом решити једначину* $x^2 - 5y^2 = 4$.

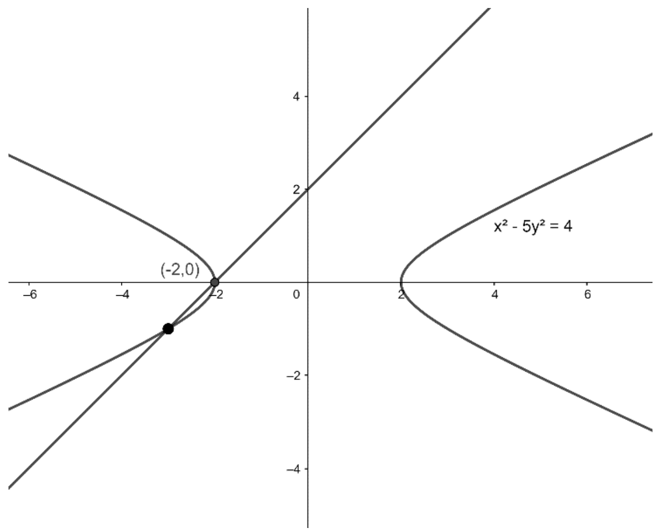
Решење: Код ове једначине имамо да је $D = 5$, а $a = 4$.

Тривијално решење је $(-2,0)$, нађимо остала решења преко формула за x и y:

$$x = \frac{\sqrt{a}(Dm^2 + 1)}{(1 - Dm^2)}, y = \frac{2\sqrt{a}m}{1 - Dm^2},$$

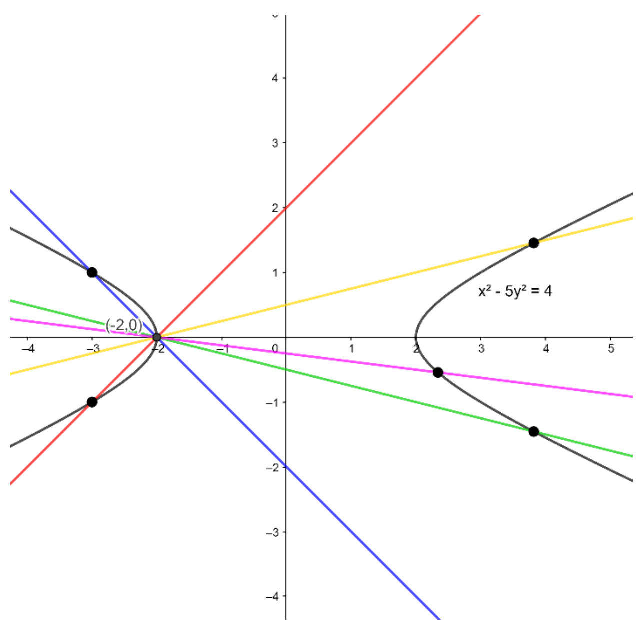
$$x = \frac{\sqrt{4}(5m^2 + 1)}{1 - 5m^2}, y = \frac{2\sqrt{4}m}{1 - 5m^2}.$$

Ако узмемо да нам је $m = 1$, добићемо $x = -3, y = -1$. На графику то изгледа овако :



Слика 7.

Ако наставимо да мењамо m за разне вредности из скупа $\mathbb{Q}$, добићемо сва решења ове једначине у скупу рационалних бројева.▲



Слика 8.

8. Закључак

Овај рад представља једно од могућих виђења садржаја о Пеловој једначини. У њему је садржан теоријски приступ Пеловој једначини, као и решавање исте на алгебарски и геометријски начин. Задаци оваквог типа су већином напредног нивоа тако да овај рад може послужити у припреми ученика за математичка такмичења. Такође може послужити наставницима и професорима као „мали подсетник“ за Пелове једначине у току припреме часова редовне и додатне наставе.

Кроз рад са Пеловом једначином, али и Диофантовим једначинама, стиче се добар увид у теоријску поткованост ученика, затим у способност њиховог расуђивања, логичког закључивања, обим стеченог искуства у одабиру математичких средстава која су пут ка решавању проблема. Једном речју, могућ је добар увид у напредак и постигнућа током рада са ученицима.

Литература

[1] Ramin Takloo-Bighash, *A Pythagorean Introduction to Number Theory,* Undergraduate Texts in Mathematics, Springer Nature Switzerland AG 2018

[2] Владимир Мићић, Зоран Каделбург, Душан Ђукић, Увод у теорију бројева, Друштво математичара Србије, Београд, 2013

[3] Зоран Каделбург, Владимир Мићић, Срђан Огњановић, *Анализа са алгебром 2*, Круг Београд, 2005

[4] Војислав Андрић , *Мала збирка Диофантових једначина*, Ваљево, 2006.

[5] др Зоран Каделбург, *Још једном о Пеловој једначини, Настава математике,* 2002

[6] Стојановић В., *Водич за шампионе*, MATHEMATISKOP 1 , , Београд, 1999

[7] www.diofant.org

[8] www.scribd.com, Смајиловић М. Диофантове једначине – Збирка задатака