

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ



Ивана Милосављевић

КОМБИНАТОРИКА У ДОДАТНОЈ
НАСТАВИ И У ТАКМИЧАРСКИМ
ЗАДАЦИМА СРЕДЊОШКОЛАЦА

мастер рад

Београд, 2023.

Ментор:

др Тања СТОЈАДИНОВИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Маја РОСЛАВЦЕВ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Александра КОСТИЋ, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: март 2023.

Клари

Наслов мастер рада: Комбинаторика у додатној настави и у такмичарским задацима средњошколаца

Резиме: Комбинаторни концепти и питања појављују се природно у многим гранама математике, као што су алгебра, геометрија, теорија бројева, теорија графова, оптимизација, теоријско рачунарство. У комбинаторици постоји велики број метода и техника помоћу којих се решавају разни проблеми, а често је за решавање новог проблема довољна нека креативна идеја која не захтева познавање компликованог математичког апарата. У овом раду представићемо комбинаторику кроз градиво и додатну наставу у средњим школама, као и кроз примере такмичарских задатака. Градиво из комбинаторике на нивоу средње школе подразумева дефинисање основних концепата пребројавања и дефинисање појмова као што су комбинације, варијације и пермутације, са и без понављања. Све појмове ћемо илустровати примерима и решеним такмичарским задацима. Решавање задатака из комбинаторике на вишим нивоима такмичења пружа доста могућности за интелигентно опажање и креативно размишљање. За крај осврнућемо се на комбинаторику у редовној и додатној настави.

Кључне речи: комбинаторика, варијације, пермутације, комбинације, додатна настава, математичко такмичење

Садржај

1	Увод	1
2	Историјат комбинаторике	3
2.1	Почетак комбинаторике	3
2.2	Комбинаторика данас	4
3	Основни концепти пребројавања	5
3.1	Правило збира	5
3.2	Правило производа	7
4	Комбинаторни концепти	9
4.1	Варијације	9
4.2	Пермутације	11
4.3	Комбинације	13
5	Комбинаторика у додатној настави средњих школа	16
5.1	Циљ и улога математике у настави	16
5.2	Настава комбинаторике у средњој школи	17
5.3	Специфични облици наставе	19
6	Задаци	21
7	Закључак	37
	Библиографија	39

Глава 1

Увод

Овај рад намењен је свима онима који желе да усаврше комбинаторни начин размишљања. Представљени су методи и принципи који нам помажу у решавању комбинаторних проблема. Комбинаторни проблеми су представљени разним примерима и задацима са такмичења, али и кроз занимљиве примере из живота и свакодневнице, како бисмо читаоца на што интересантнији начин упознали и пробилижили му ову област математике. Комбинаторика је врло јединствена и занимљива за изучавање, јер њену примену можемо наћи у готово свакој области како науке тако и живота. Тема овог рада највише обухвата изучавање комбинаторике у настави средњих школа, уз посебан осврт на такмичарске задатке који припадају овој области.

У првом поглављу осврнули смо се на историјски развој комбинаторике и представили смо где се комбинаторика данас проучава и примењује у свакодневном животу и науци.

У другом и трећем поглављу представили смо математичке концепте који нам служе за решавање комбинаторних проблема и задатака. Прво смо представили правила пребројавања, односно правило збира и производа, а затим смо представили комбинаторне концепте варијације, пермутације и комбинације, са и без понављања. Сваки концепт је дочаран примером или задатком са којим се ученици сусрећу током изучавања ове области у школи.

У четвртном поглављу представили смо специфичне облике наставе математике. Осврнули смо се на место комбинаторике у редовној и додатној настави, као и на њену заступљеност у плану и програму средњих школа. Која је улога и циљ изучавања комбинаторике у средњој школи? Указали смо на важност изучавања ове области ради испуњења циљева задатих у настави математике.

тике планом и програмом, као и великог значаја развоја логичко-апстрактног мишљења код ученика.

У петом поглављу представили смо примере и задатке са математичких такмичења из области комбинаторике. За решавање задатака коришћене су идеје и концепти из другог и трећег поглавља.

Желела бих да овај рад буде од користи како ученицима, тако и наставницима који желе да се додатно едукују и инспиришу за додатни рад у области комбинаторике. Такође, и онима који још нису препознали лепоту математике.

Захваљујем се свом ментору, професорки Тањи Стојадиновић, на подршци, сугестијама и помоћи приликом израде овог рада. Такође, желим да се захвалим професорки Маји Рославцев и професорки Александри Костић које су својим сугестијама допринеле његовом финалном уобличавању.

Глава 2

Историјат комбинаторике

2.1 Почетак комбинаторике

Корени комбинаторике потичу још из далеке прошлости из времена почетка математике, а можемо рећи и саме науке. Људи су увек искушавали срећу у играма на срећу и управо из тог интересовања се родила комбинаторика. Индијски математичари су најстарији познати који су се бавили пермутацијама и комбинацијама углавном из религиозних разлога.

Први неформални докази о постојању комбинаторике датирају око 3500. године пре Христа када су пронађени докази о постојању игре на срећу Астрагал. Астрагал је игра у којој се користио посебан реквизит од кости овчијих папака звездастог облика, који је имао два заобљена и четири заравњена краја. Циљ игре био је погодити на коју заравњену страну ће реквизит пасти.

Први формални писани докази о постојању комбинаторике јављају се у 17. веку када су постављени њени темељи. Ови темељи су настали током дописивања Blaise Pascala и de Fermata, а повод за њихово дописивање били су проблеми са којима се сусрео коцкар Cheevalier de Mere. Cheevalier de Mere је послао писмо Pascal-у у коме тражи помоћ за решавање два проблема. Први проблем је био исплати ли се кладити да уколико бацимо две коцкице 24 пута, да ће барем једном пасти две шестица. Други проблем је био како расподелити улоге (новац играча) у игри на срећу која је превремено завршена и у којој нема нерешеног исхода, где је победник онај који први однесе победу у одређеном броју кругова. Детаљно решење ових проблема можете прочитати у [1].

У литератури често можемо заједно срести комбинаторику и теорију ве-

роватноћа, јер су се ове две гране математике заједно развијале. Многи математичари су се бавили развојем комбинаторике као што су Daniel Bernoulli, Jean D'Alembert, Simeon-Denis Poisson и други.

2.2 Комбинаторика данас

Комбинаторика се касније развијала заједно са другим областима математике у којима је била неизоставан део. Можемо је срести у гранама математике као што су теорија бројева, геометрија, алгебра, анализа, теорија вероватноћа, математичка статистика, рачунарство и другим областима. Такође има и примену у другим научним дисциплинама: у физици, молекуларној биологији, хемији, медицини, економији, програмирању.

У новије време комбинаторика је постала део плана и програма у школском образовном систему и изучава се у оквиру предмета математика. У неким земљама ученици се сусрећу са њом већ у нижим разредима основног образовања, док се у нашој земљи овом облашћу бави први и четврти разред средње школе. Више о теми комбинаторике у средњој школи и додатној настави можете прочитати у петом поглављу овог рада. Комбинаторика је данас веома важан део образовања, јер даје велики број метода и техника помоћу којих се решавају разни проблеми и задаци, а често је за решавање новог проблема довољна нека креативна идеја која не захтева познавање компликованог математичког апарата.

Глава 3

Основни концепти пребројавања

Комбинаторика је област математике која проучава коначне (или пребројиве) скупове и структуре, бави се израчунавањем могућих расподела, правилима груписања и методама пребројавања.

Један од основних задатака комбинаторике јесте одређивање броја елемената скупа, односно пребројавање коначног скупа или његовог подскупа са одређеним својствима. Елементи скупова имају углавном садржај који је лако описати математичким језиком, али за одређивање броја елемената неког скупа не можемо користити само њихово набрајање. За решавање ових задатака потребно је имати ефикасне методе које ће нам омогућити бржи и лакши приступ решењу проблема, нарочито ако се ради о скуповима који имају велики број елемената.

3.1 Правило збира

Основна правила која ће нам служити за решавање проблема пребројавања елемената скупа јесу правило бијекције, правило већег броја, правило збира и правило производа. Навешћемо правила бијекције и већег броја у оквиру овог поглавља, јер ће нам бити потребни у даљем раду. Нећемо се бавити њиховим доказима, зато што се ова два правила не изучавају у школи. Детаљније ћемо обрадити правило збира и правило производа.

Увешћемо основне појмове и ознаке које ћемо користити у овом поглављу.

Скуп, као основни појам у математици, одређен је ако је познато које елементе садржи. За број елемената скупа A користимо ознаку $|A|$. Ознаку

$a \in A$ користимо када елемент a припада скупу A , а ознаку $a \notin A$ када елемент a не припада скупу A .

Нека су A и B произвољни непразни скупови. Функција $f : A \rightarrow B$ је дефинисана, ако је сваком елементу $a \in A$, придружен тачно један елемент $b = f(a) \in B$. Елемент $a \in A$ назива се оригинал, а елемент $f(a) \in B$ је вредност функције f у тачки a или слика оригинала a .

Функција $f : A \rightarrow B$ је „1-1” пресликавање ако важи $f(a_1) \neq f(a_2)$, увек када је $a_1 \neq a_2$ и $a_1, a_2 \in A$. Функција $f : A \rightarrow B$ је „на” пресликавање ако за сваки елемент $b \in B$, постоји елемент $a \in A$ такав да важи $b = f(a)$. Функција $f : A \rightarrow B$ је бијекција, ако је „1-1” и „на” пресликавање.

Теорема 1. Правило бијекције. Два непразна коначна скупа A и B имају једнак број елемената ако и само ако постоји бијекција $f : A \rightarrow B$.

Теорема 2. Правило веће броја. Нека су A и B коначни скупови и функција $f : A \rightarrow B$ таква да за сваки елемент $b \in B$, постоји тачно k елемената скупа A , чије су слике при пресликавању f једнаке елементу b . Тада важи једнакост

$$|A| = k \cdot |B|.$$

Теорема 3. Правило збира. Ако су A и B дисјунктни коначни скупови, тада је

$$|A \cup B| = |A| + |B|.$$

Доказ:

Како су A и B коначни скупови, односно знамо њихове елементе, можемо их записати као

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Такође, скупови A и B су дисјунктни и њихову унију можемо представити као

$$A \cup B = \{c_1, c_2, \dots, c_n, c_{n+1}, c_{n+2}, \dots, c_{n+m}\}. \quad \text{где је } c_i = a_i, \text{ за } 1 \leq i \leq n \text{ и } c_{n+i} = b_i, \text{ за } 1 \leq i \leq m.$$

Следи да је

$$|A \cup B| = m + n = |A| + |B|.$$

□

Претходну теорему можемо представити и на унији произвољног броја дисјунктних коначних скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ као

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n|.$$

Пример 1. Два града повезују три аутобуске и две железничке линије. На колико начина можемо доћи из једног у други град?

Решење: Применом правила збира решење овог примера је једноставно, јер можемо доћи само аутобусом или само возом.

Следи да је укупан број начина на који можемо доћи из једног града у други $2 + 3 = 5$.

Пример 2. Ученик бира задатке из једне од три групе задатака. У првој групи се налази 5, у другој 11 и у трећој 7 задатака. Колико је различитих задатака које ученик може да изабере?

Решење: Означимо редом групе задатака као скупове A , B и C . Број задатака у групи представимо као $|A| = 5$, $|B| = 11$ и $|C| = 7$. По правилу збира следи да је укупан број начина на који ученик може да изабере задатак

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| = 5 + 11 + 7 = 23.$$

3.2 Правило производа

Пре дефинисања правила производа дефинисаћемо Декартов производ скупова.

Декартов производ скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ је скуп свих уређених n -торки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, за које важи $a_1 \in A_1, a_2 \in A_2, \dots, a_n \in A_n$. Декартов производ скупова означавамо са $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$.

Теорема 4. *Правило производа.* Ако су A и B коначни скупови, тада је Декартов производ $A \times B$ коначан скуп и важи

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|.$$

Доказ: Како су A и B коначни скупови, односно знамо њихове елементе, можемо их записати као

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}.$$

Знамо да је $|A| = n$ и $|B| = m$. Декартов производ скупова A и B је

[illegible]

Следи да је

$$|A \times B| = n \cdot m = |A| \cdot |B|.$$

9

Претходну теорему можемо представити и на Декартовом производу произвољног броја коначних скупова $A_1, A_2, \dots, A_n$ као

$$|A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n| = |A_1| \cdot |A_2| \cdot \dots \cdot |A_n|.$$

Пример 3. У једном разреду има 20 ученика. Потребно је изабрати председника, потпредседника, секретара и благајника, тако да ни једна особа не може вршити две или више функције истовремено. На колико начина их можемо изабрати?

Решење: Прво ћемо да изаберемо председника и њега можемо одабрати на 20 начина, јер толико има ученика и ни једном другом ученику још није додељена ни једна од функција. Следећи којег бирамо је потпредседник. Њега можемо изабрати на 19 начина, јер је један ученик већ именован за председника. Сада бирамо секретара и њега можемо одабрати на 18 начина, јер су два ученика добила функцију. За крај бирамо благајника и њега бирамо на 17 начина, по истом принципу како смо изабрали претходна три ученика. Применом правила производа закључујемо да је укупан број начина на који можемо одабрати ова четири ученика једнак

$$20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 = 116280.$$

Глава 4

Комбинаторни концепти

Код решавања комбинаторних задатака користимо комбинаторне концепте варијације, са и без понављања, пермутације, са и без понављања и комбинације са и без понављања. Код оваквих задатака највише се сусрећемо са питањима на колико начина можемо све елементе неког скупа распоредити у низ и на колико начина можемо изабрати коначан скуп са одређеним условима.

Основни задаци комбинаторике су:

1. Доказивање постојања или непостојања комбинаторних концепата за које важе одређени услови
2. Пребројавање комбинаторних концепата за које важе дати услови када је евидентна егзистенција таквих концепата
3. Класификација комбинаторних концепата
4. Задаци комбинаторне оптимизације, односно одређивање у датом скупу неког комбинаторног концепта, који у највећој мери задовољава одређене услове.

У овом раду представимо методе пребројавања чија је егзистенција евидентна.

4.1 Варијације

Варијације су распореди елемената скупа код којих је битан распоред елемената, али у општем случају не морамо користити све елементе који припа-

дају скупу.

Дефиниција 1. Сваки линеаран распоред од k различитих елемената неког скупа од n елемената ($1 \leq k \leq n$) назива се **варијација без понављања** k -те класе од n елемената.

Теорема 5. Нека је $k \leq n$. Број k -варијација без понављања елемената n -скупа A једнак је

$$V_n^k = n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

Доказ: У k -торки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ различитих елемената n -скупа A први члан a_1 може бити било који елемент n -скупа A , други члан a_2 може бити било који елемент $(n-1)$ -скупа $A \setminus \{a_1\}$, ..., k -ти члан a_k може бити било који елемент $(n-k+1)$ -скупа $A \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$. Применом правила производа добијамо да је број k -торки различитих елемената n -скупа A једнак

$$n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1).$$

□

Пример 4. На колико начина можемо направити сендвич ако можемо одабрати три састојка, не можемо више пута узети исти састојак и морамо водити рачуна којим редоследом бирамо састојке. Понуђени састојци су ке-чай, мајонез, пршута, кајмак, шунка, ајвар, крајсавец, павлака и сир?

Решење: Одговор је број варијација без понављања, односно 3 варијације елемената скупа од 9 елемената, који се налазе у скупу понуђених састојака.

$$V_9^3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

Варијације са понављањем

Дефиниција 2. Варијација k -те класе скупа A , који има n елемената, је сваки низ од k елемената скупа A , при чему се елементи могу понављати. Овакви низови називају се **варијације са понављањем**.

Теорема 6. Број варијација k -те класе скупа од n -елемената једнак је

$$V_n^k = n^k.$$

Доказ: У k -торки $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ различитих елемената n -скупа A први члан a_1 може бити било који елемент n -скупа A , други члан a_2 може бити било који елемент n -скупа A , јер можемо опет изабрати елемент који смо одабрали. Сваки следећи елемент бирамо на исти начин као прва два, тј. сваки члан можемо одабрати на n начина. Број k -торки различитих елемената n -скупа A једнак је

$$n \cdot n \cdot n \cdots n = n^k.$$

□

Пример 5. *Колико има петцифрених бројева који у свом запису немају цифре 1, 2, 3 и 4?*

Решење: Број можемо представити као низ чији су елементи цифре. Како тражимо петцифрен број, наш низ ће имати пет елемената, односно низ ће бити дужине 5. Чланови овог низа припадају скупу $\{0, 5, 6, 7, 8, 9\}$ и број петцифрених бројева који садрже цифре које су елементи претходног скупа је 6^5 . Како број не може почињати цифром 0, морамо одузети све такве бројеве које смо избројали у претходном рачуну. Таквих бројева има 6^4 . На крају, тражених петцифрених броја има

$$6^5 - 6^4 = 6480.$$

4.2 Пермутације

Пермутације се баве прерасподелом елемената скупа. Пермутација скупа је ређање елемената скупа у било ком поретку где морамо искористити све елементе скупа.

Нека $n \in \mathbb{N}$. Производ $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = n!$ читамо n факторијел. Посебно дефинишемо $0! = 1$.

Дефиниција 3. *Пермутација без понављања n -скупа A је n -варијација без понављања елемената n -скупа A .*

Теорема 7. *Број пермутација n -скупа A једнак је $P_n = n!$.*

Доказ: Доказ следи на основу теореме о броју варијација без понављања (Теорема 5). Користимо исти метод као у Теорему 5, разлика је само то што

ћемо искористити све елементе скупа A . Следи да је број пермутација n -скупа A једнак

$$n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

□

Пример 6. Кошаркашки тим има 5 чланова. На почетку сваке утакмице тим сјаје у врсту. На колико начина тим може сјати у врсту?

Решење: Тражени број начина на који могу играчи стати у врсту је заправо број пермутација чланова тима. Односно,

$$5! = 120.$$

Пермутације са понављањем

Дефиниција 4. Нека је дат скуп $A = \{a_1, a_1, \dots, a_n\}$. Сваки низ дужине $k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n$ у коме се елементи a_1 појављује k_1 пута, елементи a_2 појављује k_2 пута, ..., елементи a_m појављује k_m пута, назива се **пермутација са понављањем** скупа A .

Теорема 8. Број описаних пермутација једнак је

$$P_n^{(k_1, k_1, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_m!}.$$

Доказ: Претпоставимо да су сви чланови скупа A различити. Тада бисмо имали пермутацију без понављања од n елемената и укупан број пермутација би био $n!$.

Код пермутација са понављањем можемо мењати места елементима који су исти, а да се пермутација не промени. Тако можемо заменити места елементима који су једнаки a_1 и таквих размештаја има $k_1!$. Исто можемо учинити са члановима који су једнаки a_2 и таквих размештаја има $k_2!$. Овај поступак можемо урадити за сваки елемент скупа A . Дакле, за сваку пермутацију са понављањем имамо $k_1! k_2! \cdots k_m!$ пермутација без понављања у којима се не мења међусобни распоред различитих чланова скупа A . Када бисмо променили и такве распореде онда бисмо добили укупан број пермутација без понављања од n елемената.

Видимо да важи

$$k_1! k_2! \cdots k_m! \cdot P_n^{(k_1, k_1, \dots, k_m)} = n!$$

Коначно, када поделимо једнакост са $k_1!k_2!\cdots k_m!$, добијамо

$$P_n^{(k_1, k_2, \dots, k_m)} = \frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_m!}.$$

□

Пример 7. На колико начина је могуће распоредити слова у речи МАРАМА?

Решење: Реч МАРАМА има укупно 6 слова, од којих слова А има три, слова М два и слова Р једно. Применом формуле из претходне теореме за $n = 6$, $k_1 = 3$, $k_2 = 2$ и $k_3 = 1$ следи да је број начина за распоред слова једнак

$$P_6^3 = \frac{6!}{3!2!1!} = 60.$$

4.3 Комбинације

Комбинације су распореди код којих није битан редослед и поредак елемената.

За природне бројеве n и k , $0 \leq k \leq n$, дефинишемо биномни коефицијент $\binom{n}{k}$ који се рачуна као

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Дефиниција 5. Нека је $k \leq n$. **K -комбинација без понављања** елемената n -скупа A је k -подскупа A .

Теорема 9. Број k -комбинација елемената n -скупа A једнак је

$$C_n^k = \binom{n}{k}.$$

Доказ: Формирајмо два скупа A_1 и A_2 . Скуп A_1 чине све варијације k -те класе скупа A од n елемената.

Дефинишимо функцију $f : A_1 \rightarrow A_2$ која варијацији k -те класе придружује комбинацију k -те класе. Сваки елемент из скупа A_2 је слика тачно $k!$ елемента скупа A_1 .

На основу Теореме 5 скуп A_1 има $n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)$ елемената. На основу Теореме 2 следи $|A_2| \cdot k! = |A_1|$, одакле следи да

$$C_n^k = |A_2| = \frac{|A_1|}{k!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

□

Пример 8. *Туристџа у прогадвниџи сувенира бира маџнеџе. Од попуџених 10 разлџичиџих маџнеџа, џуристџа жеџли да куџи џри. На колико начина може изабрати маџнеџе?*

Решење: Тражимо броџ комбинаџиџа скупа коџи садржи 10 елемената, а ми жеџлимо да изабереџо 3 елемента. На основу претходне теореме закључуџемо да је броџ начина на коџи туриста може да изабере магнете једнак

$$\binom{10}{3} = 120.$$

Комбинаџиџе са понављањем

Дефиниџиџа 6. *Ако се из n -џочланоџ скуџа A бира један по један са враћањем, k елемената и ако није биџан редослед већ само коџи елементи и колико поџа су изабрани, онда се резулџат избора назива **комбинаџиџа са понављањем** k -џе класе скуџа од n -елемената.*

Теорема 10. *Броџ комбинаџиџа са понављањем k -џе класе скуџа A једнак је*

$$C_n^k = \binom{n+k-1}{k}.$$

Доказ: Поређаџмо елементе скупа $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, тако да сви елементи коџи се понављају буду груписани заједно, односно $a_1, a_1, \dots, a_1, a_2, a_2, \dots, a_2, \dots, a_n, a_n, \dots, a_n$, тако да елемената a_1 има m_1 , a_2 има $m_2, \dots, a_n$ има m_n , при чему важи $m_1 + m_2 + \dots + m_n = k$.

Да бисџо добиџи броџ комбинаџиџа са понављањем k -те класе на скупу A потребно је да нађемо броџ ненегативних целоброџних решења једначине $m_1 + m_2 + \dots + m_n = k$.

Знаџо да је збир k јединица једнак k . Поређаџмо их у низ. Ако низ преградиџо са $n - 1$ заградом, онда ћеџо на тај начин дефинисати једно решење једначине, односно решења има онолико колико има места на коџа можеџо ставити заграде. Како $m_1, m_2, \dots, m_n$ могу бити и нуле, онда је заграду могуће ставити пре прве јединице и иза последње јединице. Видимо да $n - 1$

заграда можемо да распоредимо на $k + n - 1$ места, што можемо урадити на $\binom{k+n-1}{n-1}$ начина.

Користићемо особину биномног коефицијента $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ за даљи део доказа.

Користећи ову особину даље следи

$$\binom{k+n-1}{n-1} = \binom{k+n-1}{k+n-1-(n-1)} = \binom{k+n-1}{k}.$$

Ово је заправо и укупан број решења тражене једначине.

□

Пример 9. *Колико има шестоцифрених бројева у чијем запису цифре чине неоппадајући низ?*

Решење: Цифре коју могу учествовати у одабиру су 1, 2, ..., 9. Цифру 0 не можемо узети у обзир, јер се траже бројеви чије су цифре поређане у неоппадајући низ, а ниједан број не почиње цифром 0. Тражимо 6-комбинација са понављањем од 9 елемената. Тражених бројева има

$$\binom{6+9-1}{6} = \binom{14}{6} = 3003.$$

Глава 5

Комбинаторика у додатној настави средњих школа

5.1 Циљ и улога математике у настави

Учењем математике потребно је научити и оспособити ученика да кроз усвајање математичких концепата, знања и вештина развије апстрактно и критичко мишљење, као и способност комуникације математичким језиком и најважније, да стечено знање може даље да примени кроз школовање, како кроз сам предмет математике, тако и кроз остале предмете. Математика развија истраживачки дух, дедуктивно и индуктивно мишљење, размишљање по аналогији и разумевању како доћи до решења проблема.

Циљ наставе математике јесте да ученици усвоје, разумеју и овладају основним математичким компетенцијама, као што су знање и вештине, које су им потребни за схватање појмова и појава како у природи, тако и у друштву. Циљ учења математике јесте да оспособи ученика да самостално примењује усвојено знање у даљем животу и решавању проблема, као и да допринесе развоју и формирању личности, такође и да допринесе формирању научног погледа на свет. Најважнији циљ наставе математике јесте да ученик формира позитивне ставове према предмету математика.

Задаци наставе математике:

- развој логичког, критичког и апстрактног мишљења
- развој способности јасног и прецизног изражавања и коришћења математичког апарата

ГЛАВА 5. КОМБИНАТОРИКА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ СРЕДЊИХ ШКОЛА

- усвајање дедуктивног закључивања
- разумевање функционалне зависности, њено представљање и примена
- усвајање знања и вештина, која могу повезати са другим предметима
- формирање свести о универзалности и примени математичког размишљања

Ученике треба подстицати на усавршавање и развијање у складу са индивидуалним потребама, али и потребама друштва. Наставник треба да пружи широк поглед на свет и подржи свестран развитак личности ученика кроз математичко образовање.

Комбинаторика је део математике и тако се све што смо описали у овом делу рада може односити и на област комбинаторике.

5.2 Настава комбинаторике у средњој школи

Улога и значај образовања у развоју друштва, као и појединца, одувек је била битна. Потреба за сталним напретком и развијањем појединца и друштва, доводи до потребе за бољим квалитетом образовања. Примарно место где се процес образовања спроводи јесте школа, где кроз планове и програме за наставне предмете, добијамо могућност за образовање појединца, односно ученика. Главни координатори образовног процеса јесу наставници.

Наставник је онај који подупире логичко-комбинаторно размишљање ученика кроз процес учења, користећи методе за пренос знања. Овај процес се одвија кроз сваки наставни предмет у школама, па тако и математику. У овом делу рада осврнућемо се на данашњу наставу комбинаторике у средњој школи.

У основне циљеве и исходе наставе математике спадају и решавање комбинаторних проблема, као и идеје и модели комбинаторике. Решавање комбинаторних проблема и задатака захтева примену нових и занимљивих метода, као што су кибернетичке методе, графови, дијаграми, таблице, скупови, методе претпоставки, методе откривања, проблемске методе... Један од битних метода које је пожељно користити у настави комбинаторике јесу методи игре, испитивање случаја, симулације, које могу ученику лакше створити слику о проблему који решава.

ГЛАВА 5. КОМБИНАТОРИКА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ СРЕДЊИХ ШКОЛА

Математичка логика и комбинаторика се изучавају у првом и четвртном разреду средње школе. У првом разреду се комбинаторика обрађује делимично у оквиру области „Логика и скупови”. Од укупног годишњег броја часова, што је 148 часова, темом комбинаторике се ученици баве свега 15 часова, што је 10,13% градива од укупног градива које се спроводи у првом разреду. У овом разреду се уводе основи комбинаторике који су дати кроз једноставне примере, затим се уче основни принципи пребројавања коначних скупова, правило збира и правило производа.

У четвртном разреду средње школе у зависности од профила средње школе комбинаторика се изучава различит број часова. Такође, у плану и програму предмета математике појединих профила средњих стручних школа се не налази област комбинаторика у оквиру четвртог разреда. Представимо наставни план за гимназије природно-математичког смера. У гимназији се од укупно 165 часова, комбинаторика обрађује 15 часова, што је 9.09% од укупног градива које је предвиђено за овај разред. У четвртном разреду ученици надограђују своје стечено знање из првог разреда новим концептима комбинаторике, где уче да препознају суштину распоређивања, одређивања броја распореда објеката, препознају и примене одређени концепт комбинаторике на дате објекте, савладају правила и формуле за варијације, пермутације и комбинације.

Оријентациони програм за додатни рад у гимназијама је направљен тако да наставник од одређеног броја тема може изабрати од 6 до 8 тема које ће обрадити на часовима додатне наставе. Већина наставника у свој одабир тема уврсти тему логичких и комбинаторних задатака, због њене важности. Ова тема је посебно важна за ученике који похађају додатну наставу и припреме за такмичења, јер на сваком такмичењу се нађе барем по један задатак из ове области. За први разред средње школе укупан годишњи број часова додатне наставе је 32, од којих је 5 часова предвиђено за логичке и комбинаторне задатке, што је 15.62% часова од укупног броја часова додатне наставе. За четврти разред средње школе од укупно 30 часова коју су предвиђени за додатну наставу на 8 часова се изучавају логички и комбинаторни задаци, што је 26.66% од укупног броја часова додатне наставе. За разлику од редовне наставе где се тема комбинаторике не среће у плану и програму за други и трећи разред средње школе, за додатну наставу то није случај. У другом и трећем разреду средње школе додатна настава обухвата 4 часа која су

ГЛАВА 5. КОМБИНАТОРИКА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ СРЕДЊИХ ШКОЛА

посвећена логичким и комбинаторним задацима од укупно 32 часа која су предвиђена за додатну наставу.

5.3 Специфични облици наставе

Поред редовне наставе математике, постоје и специфични облици наставе као што су додатна настава, припреме за такмичења, математичке секције и такмичења. За ове видове наставе неопходно је додатно ангажовање и посвећеност како наставника тако и ученика. Ови видови наставе служе за подстицање надарених ученика за додатно и интензивније учење, као и још веће интересовање за математику. Поред наведених облика наставе постоји и допунска настава, али њоме се нећемо бавити у овом раду.

Додатна настава се спроводи са одређеним бројем ученика који желе да продубе и прошире знање стечено на часовима редовне наставе. Овакав облик наставе се спроводи у групама. Од наставника се очекује да припреми задатке тежег нивоа од задатака који се обрађују на редовној настави, као и да обрати пажњу на интелектуалне карактеристике и жеље ученика. Одредити обим и квалитет знања којим ученици располажу је од пресудног значаја. За постизање добрих резултата потребна је жеља, истрајност и знање. Овакав вид наставе један је од значајних подстрека за даљи рад и унапређивање ученика.

Припреме за такмичења и такмичења су вероватно најзахтевнији облик наставе. Такмичења служе да ученик упореди своје знање са вршњацима. Припреме за такмичења могу се одвијати у оквиру додатне наставе или кроз индивидуалне часове. У оваквом облику наставе од ученика се највише очекује, односно ученик мора показати самостално залагање за рад. Такође, ученик треба сва претходно стечена знања са лакоћом да примењује. У овом процесу наставник је тај који стимулише, мотивише и усмерава ученике у раду, одабиром одговарајућих задатака који би служили за добијање најбољих резултата. Такмичења представљају највећу мотивацију и инспирацију за напредак ученика.

Математичка секција је врло интересантан вид наставе, јер окупља ученике различитог узраста и знања. Овакав вид наставе захтева осмишљавање новог план и програма. Код математичких секција битно је дати ученицима што разноврсније градиво различитог тежинског нивоа. Ученике који поха-

ГЛАВА 5. КОМБИНАТОРИКА У ДОДАТНОЈ НАСТАВИ СРЕДЊИХ ШКОЛА

Ћају математичку секцију треба посматрати као истраживаче или научнике. Пустити ученике да испоље свој истраживачки дух један је од основних задатака ове наставе. Такође, у оваквој настави пожељно је имати корелацију са што више наставних предмета, како би настава била занимљивија. Како у животу, тако и у школи, математика прожима велики број наставних предмета као што су физика, биологија, хемија, програмирање итд. Смелији и искуснији наставници могу направити и корелацију са предметима као што су музичка култура, ликовна култура или физичко васпитање.

Глава 6

Задаци

Задатак 1. На колико начина може 6 парова да седне у ред биоскопа који има 20 места, ако сваки пар жели да седне на суседна места?

(Окружно такмичење, 2010.)

Решење: Посматраћемо два суседна места на којима пар седи као целину. Када свих 6 парова сместимо у ред остаје нам 8 слободних места. Да бисмо закључили на колико начина можемо распоредити целине и слободна места користићемо Теорему о броју комбинација. Суседна места посматрамо као целине и онда је потребно распоредити 6 парова на 14 места. Закључујемо да целине и слободна места можемо распоредити на $\binom{14}{6}$ начина. На $6!$ начина можемо расподелити парове. Сваки пар може да седне у целину на 2 начина, па пошто има 6 парова, укупно има 2^6 начина да се парови сместе у оквиру целина. Укупан број начина на који можемо распоредити парове је

$$\binom{14}{6} \cdot 6! \cdot 2^6.$$

Задатак 2. Колико има стоцифрених бројева који се записују цифрама 1, 2 и 3, тако да им никоје две суседне цифре нису једнаке?

(Олимпијско такмичење, 2014.)

Решење: На располагању имамо три цифре и потребно је од њих формирати број у чијем запису нема истих суседних цифара. Посматрајмо број као један низ на чије елементе је потребно сместити цифре. Кренимо од прве цифре овог стоцифреног броја. Прву цифру можемо изабрати на три начина, односно било коју цифру можемо узети од оних коју су на располагању. Другу цифру можемо изабрати на два начина, јер смо једну цифру већ

искористили за прву цифру траженог броја и морамо водити рачуна да она буде различита од прве цифре. Трећу цифру броја бирамо, такође на два начина, јер смо за претходну цифру већ изабрали једну од понуђених и она мора бити различита од претходне изабране цифре. Овај поступак бирања цифара настављамо даље кроз одабир осталих цифара и закључујемо да све остале цифре осим прве можемо изабрати на 2 начина и њих укупно има 99. Укупан број начина на који можемо изабрати све цифре осим прве је 2^{99} и број начина на који можемо изабрати прву цифру је 3, па следи да је укупан број начина на који можемо изабрати цифре траженог броја

$$3 \cdot 2^{99}.$$

Задатак 3. *Колико има петоцифрених бројева чије су све цифре различите, а да се прва и последња разликују за 3?*

(Танџенџа, Напредни задаци)

Решење: Цифре које можемо користити за формирање траженог броја су $\{0, 1, \dots, 9\}$. Услови задатка су да разлика између прве и последње цифре мора бити 3 и број не може почињати цифром 0. Формираћемо парове за које важе дати услови. Фиксирајмо прву и последњу цифру. Парови цифара који испуњавају услове су

$$\{(1, 4), (2, 5), (3, 6), (4, 7), (5, 8), (6, 9), (3, 0), (4, 1), (5, 2), (6, 3), (7, 4), (8, 5), (9, 6)\}.$$

Видимо да за прву и последњу цифру имамо 13 начина за избор. Другу цифру можемо изабрати на 8 начина, јер смо за прве две искористили већ две цифре. Трећу можемо изабрати на 7 и четврту цифру можемо изабрати на 6 начина по истом принципу као што смо изабрали другу цифру. Укупан број начина на који можемо изабрати тражене петоцифрене бројеве је

$$13 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6.$$

Задатак 4. *У равни су датa два скупа паралелних права $\{a_1, a_2, \dots, a_{13}\}$ и $\{b_1, b_2, \dots, b_7\}$. Праве првог скупа секу праве другог скупа. Колико је паралелограма одређено овим правима?*

(Окружно такмичење, 2003.)

Решење: За формирање паралелограма потребно нам је да из сваког скупа узмемо по две праве. Дате су паралелне праве и када узмемо по две

праве из оба скупа добићемо паралелограм. Заправо питамо се колико комбинација можемо направити од датих прави, при чему су нам две праве фиксирани из сваког скупа. Пар правих из првог скупа можемо изабрати на $\binom{13}{2}$ начина, пар правих из другог скупа можемо изабрати на $\binom{7}{2}$ начина. Укупан број паралелограма одређених овим правима је

$$\binom{13}{2} \cdot \binom{7}{2}.$$

Задатак 5. Квадрат 2×2 подељен је на 4 квадрата 1×1 . Сваки од квадрата је обојен црвеном, ђлавом или белом бојом.

- a) Колико има различитих бојења?
- b) Колико има различитих бојења у којима се све три боје појављују?

(Републичко такмичење, 2005.)

Решење:

a) На располагању имамо 3 боје којима треба обојити 4 квадрата. Односно, питамо се колико варијација 3 боје можемо направити за бојење 4 квадрата. Укупан број оваквих бојења је

$$3^4 = 81.$$

b) Када се све три боје појављују у бојењу, онда два квадрата морају бити обојена истом бојом. Овакве квадрате можемо изабрати на $\binom{4}{2} = 6$ начина. Боју којом ћемо обојити та два квадрата можемо изабрати на 3 начина. Преостала два поља можемо бојити са две боје, јер смо већ једну боју искористили. Њих можемо обојити на $2! = 2$ начина. Укупан број бојења је

$$6 \cdot 3 \cdot 2 = 36.$$

Задатак 6. У врсцу је поређано 2016 столица. На колико начина је могуће обојити сваку столицу црвеном или ђлавом бојом на такав начин да број ђлавих столица буде паран?

(Општинско такмичење, 2016.)

Решење: Узмемо првих 2015 столица и њих можемо бојити плавом или црвеном бојом, односно за сваку столицу постоје два начина бојења. Преосталу столицу морамо обојити тачно једном бојом, како би број плавих столица био паран. Укупан број начина на који можемо обојити столице је

$$2^{2015}.$$

Задатак 7. Тамара има 8 различитих креда у боји. Она на табли записује све могуће датуме који се могу записати помоћу пет двојки и три нуле (један такав датум је 20.02.2022.) и при том сваку цифру записује групом бојом. Одреди укупан број различитих датума које Тамара може записати на табли, ако је одређено којих пет боја ће се користити за записивање двојки, а самим тим и које три боје ће се користити за записивање нула. (При писању датума користе се све цифре, при чему се приликом писања редног броја дана и месеца, али не и године записују водеће нуле, ако оне постоје. Датуми $a_1a_2.a_3a_4.a_5a_6a_7a_8.$ и $b_1b_2.b_3b_4.b_5b_6b_7b_8.$ су различити ако за било које $i \in \{1, 2, \dots, 8\}$ цифре a_i и b_i нису исте или нису обојене истом бојом.) (Окружно такмичење, 2022.)

Решење: Означимо са m_1, m_2, m_3, m_4, m_5 боје којим ћемо бојити двојке и са n_1, n_2, n_3 боје којим ћемо бојити нуле. Из самог задатка закључујемо да месец мора бити фебруар и прва цифра године мора бити 2, односно тражимо датум облика $a_1a_2.02.2a_6a_7a_8.$ Преостале су нам 2 нуле и 3 двојке, као и услов да a_1 и a_2 не могу бити истовремено нуле. Закључујемо да се распоред цифара може урадити на $\binom{5}{2} - 1$ начина. Потребно је још наћи на колико начина се могу боје расподелити. Број начина на који можемо изабрати бојење двојки је $5!$, независно од овог бојења, број начина на који можемо обојити нуле је $3!$. Укупан број различитих датума је

$$\left(\binom{5}{2} - 1\right) \cdot 5! \cdot 3!.$$

Задатак 8. На колико начина се може распоредити 6 плавих и 7 зелених куглица, тако да никоје две плаве куглице нису суседне? (Куглице исте боје се не разликују.)

(Олимпијско такмичење, 2021.)

Решење: Поређајмо све зелене куглице. Плаве куглице постављамо између њих и за овакав распоред имамо на располагању осам места. Пошто

нема суседних плавих куглица, на шест места ћемо ставити по једну плаву куглицу и два места ће остати празна. Та два места можемо изабрати на $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ начина. Дакле, укупан број начина за тражени распоред је 28.

Задатак 9. У једном реду биоскопа је $2n$ седишта. Треба означити n седишта на којима ће седење бити дозвољено, при чему правило дистанце налаже да два посетиоца не смеју да седе један до другог. На колико начина се може то учинити?

(Окружно такмичење, 2021.)

Решење: Посматрајмо два случаја. Први случај, ако прво или последње место није означено, онда морамо означити свако друго седиште и у овом случају имамо две могућности.

Други случај, када означимо прво и последње седиште. Имамо n означених места и између њих $n - 1$ празнина. Сваку празнину чини једно седиште и једну празнину чине два места. Место празнине са два седишта можемо одабрати на $n - 1$ начина.

Закључујемо да је укупан број начина $n + 1$.

Задатак 10. У затвору има 29 затвореника, заведених под редним бројевима од 1 до 29. Свака два затвореника са збиром редних бројева 30 су у сукобу, док су остали парови у добрим односима. На колико начина се може одабрати затворска фудбалска екипа од 11 чланова међу којима никоја два нису у сукобу?

(Окружно такмичење, 2021.)

Решење: Формирајмо парове затвореника који су у сукобу, односно тако да је збир њихових редних бројева 30.

Парови су $\{1, 29\}, \{2, 28\}, \{3, 27\}, \dots, \{13, 17\}, \{14, 16\}$. Из сваког од ових парова можемо изабрати само једног затвореника који ће играти.

Размотримо два случаја: ако је затвореник са редним бројем 15 у екипи и ако није.

Ако је затвореник са редним бројем 15 у екипи, потребно је изабрати још 10 парова и из сваког пара по једног играча. Парове можемо одабрати на $\binom{14}{10}$ начина, а играче из парова на 2^{10} начина. Укупан број начина на који можемо одабрати екипу је

$$\binom{14}{10} \cdot 2^{10}.$$

Ако затвореник са редним бројем 15 није у екипи, потребно је одабрати 11 парова и из сваког пара по једног играча. Парове можемо одабрати на $\binom{14}{11}$ начина, а играче из парова на 2^{11} начина. Укупан број начина на који можемо одабрати екипу је

$$\binom{14}{11} \cdot 2^{11}.$$

На крају, укупан број начина на који можемо формирати фудбалску екипу је

$$\binom{14}{10} \cdot 2^{10} + \binom{14}{11} \cdot 2^{11}.$$

Задатак 11. *Дато нам је шест различитих лопти и три кутије. У прву кутију може да сстане једна лопта, у другу три, а у трећу пет. На колико начина се ове лопте могу распоредити у кутије?*

(Окружно такмичење, 2021.)

Решење: Размотримо два случаја.

Први случај када је прва кутија празна. Тада друга кутија може да садржи једну, две или три куглице, па следи да се садржај друге кутије може добити на $\binom{6}{1} + \binom{6}{2} + \binom{6}{3} = 41$ начин. Истим разматрањем ћемо добити број начина на који можемо распоредити лопте у трећу кутију.

Други случај када се у првој кутији налази једна куглица и она се може изабрати на 6 начина. Друга кутија тада садржи ниједну, једну, две или три куглице. Број начина на који можемо одабрати садржај друге кутије је $\binom{5}{0} + \binom{5}{1} + \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = 26$. Укупан број начина да расподелимо лоптице у кутије је

$$41 + 6 \cdot 26 = 197.$$

Задатак 12. *За шаховску екипу једне школе треба изабрати три такмичара од 11 кандидата, међу којима је 6 дечака и 5 девојчица. На колико начина се то може учинити ако се зна да у екипи мора бити барем једна девојчица?*

(Општинско такмичење, 2014.)

Решење: Постоје три могућности за формирање екипе тако да у екипи буду три девојчице, две девојчице и један дечак или једна девојчица и два дечака.

У првом случају екипу можемо одабрати на $\binom{5}{3} = 10$ начина. У другом случају можемо одабрати на $\binom{5}{2} \cdot \binom{6}{1} = 60$ начина и у трећем случају на $\binom{5}{1} \cdot \binom{6}{2} = 75$ начина. Укупан број начина да се формира екипа је

$$10 + 60 + 75 = 145.$$

Задатак 13. *На колико начина може сести 20 људи на 20 места једног реда у биоскопу, тако да Ана седи поред Бојана, а Весна поред Горана?*

(Олимпијинско такмичење, 2011.)

Решење: Потребно је распоредити 16 људи и 2 пара, односно Ану и Бојана као један пар и Весну и Горана као други пар. Парове посматрамо као целине. Односно имамо 18 целина које можемо распоредити на $18!$ начина. Сваки пар можемо распоредити на два начина. Укупан број начина на који можемо направити распоред седења је

$$2 \cdot 2 \cdot 18!.$$

Задатак 14. *После сваког сасијанка комисије, неки чанови (значи њих бар двоје) одлазе заједно на ручак. Тамо међутим, свако од присућних се посвађа са сваким. Након тога посвађани неће више оћићи у заједничком друштву на ручак после сасијанка комисије. Сасијанци комисије се одржавају докле год је могуће оформити друштво (од бар двоје људи) за одлазак на ручак након сасијанка.*

- a) *Да ли је могуће да је комисија која броји 7 чланова одржала укупно 10 сасијанака(шј. ручкова)?*
- b) *Да ли је могуће да је комисија која броји 11 чланова одржала укупно 5 сасијанака(шј. ручкова)?*

(Олимпијинско такмичење, 2004.)

Решење: а) Можемо конструисати пример. Означимо чланове комисије бројевима од 1 до 7. Укупно има $\binom{7}{2} = 21$ парова и толико ће бити одржано ручкова ако иду по два члана на ручак. Уколико иду по три члана онда се изгубе два будућа ручка, ако иду по четири члана онда се изгуби 5 ручкова, ако иду по пет чланова онда се изгуби 9 ручкова итд. Нама је потребно да изгубимо 11 ручкова и то можемо урадити на пример ако прво иду $\{1, 2, 3, 4, 5\}, \{5, 6, 7\}$, а осталих 8 ручкова су сви са по два члана $\{1, 6\}, \{1, 7\}, \{2, 6\}, \{2, 7\}, \{3, 6\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}, \{4, 7\}$. Одговор је да може.

б) У овом случају укупно има $\binom{11}{2} = 55$ парова. Претпоставимо да је могуће. Требало би да за сваки пар постоји тачно један ручак на коме су два члана комисије била заједно. На ручку са k особа искористи се $\binom{k}{2}$ парова. Како је $\binom{5}{2} = 10$ и $5 \cdot 10 = 50 < 55$, јасно је да од тих 5 ручкова барем на једном од њих је морало бити 6 или више особа, јер у супротном би остао неки пар чланова који није никад био заједно на ручку, односно и након тих 5 ручкова би било могуће организовати још неки ручак. Такође, немогуће је да су по 2 члана ишла на преостала 4 ручка, јер би у овом случају остао неки пар који није био на ручку заједно, јер је највише $\binom{10}{2} + 4 = 49 < 55$ различитих парова било на ручку. Значи имамо бар један ручак са 6 и више особа, и један са 3 и више особа. Ова два ручка имају највише једног заједничког члана. Онда заправо имамо бар пет особа са првог ручка, које још нису ручале са бар две особе са другог ручка. За то је потребно организовати бар још $2 \cdot 5 = 10$ ручкова да би свако од њих ручао са сваким. То је контрадикција. Одговор је да не може.

Задатак 15. У месецу Доње Зуце сваки телефонски број има пет цифара које су поређане у строго растућем или опадајућем поретку, и првом цифром је 0. Колико максимално телефонских бројева може постојати у том месецу?

(Окружно такмичење, 2019.)

Решење: Прво ћемо пребројати колико има бројева чије су цифре у строго опадајућем поретку. Такав број мора имати 5 различитих цифара коју су поређане у опадајућем поретку. Имамо 10 цифара на располагању и укупан број таквих бројева је $\binom{10}{5}$.

Избројимо бројеве чије су цифре у растућем поретку. На исти начин као у претходном случају добићемо број тражених бројева, али у овом случају морамо искључити цифру 0, јер је такав услов задатка. Укупан број оваквих бројева је $\binom{9}{5}$.

Максималан број телефонских бројева у овом месту је

$$\binom{10}{5} + \binom{9}{5}.$$

Задатак 16. На колико начина се могу обојити темена петоугла $ABCDE$ помоћу 4 боје ако суседна темена не могу бити исте боје?

(Државно шакмичење, 2015.)

Решење: Прво претпоставимо да су тема A и D исте боје. За њихово бојење имамо 4 начина. Теме E мора бити различите боје од боје тема A и D и за његово бојење имамо 3 начина. За теме B бирамо боју различиту од боје тема A и за ово бојење имамо 3 начина. За боју тема C бирамо различиту боју од тема B и D и за то бојење имамо 2 начина. У овом случају имамо $4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 = 72$ начина за бојење.

Ако су тема A и D различите боје, онда их можемо обојити на $4 \cdot 3$ начина. Теме E мора бити различите боје од тема A и D и за његово бојење имамо 2 начина. Уколико је теме C исте боје као теме A , тада за бојење тема B имамо 3 начина. Уколико је теме C различите боје од тема A онда за његово бојење имамо 2 начина и за бојење тема B имамо 2 начина. У овом случају имамо $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (3 + 2 \cdot 2) = 168$ начина за бојење.

Укупан број начина за бојење овог петоугла је

$$72 + 168 = 240.$$

Задатак 17. Колико има функција $f : \{a, b, c, d\} \rightarrow \{a, b, c, d\}$ које нису бијекција и нису константне функције?

(Окружно шакмичење, 2013.)

Решење: Сваки елемент скупа $\{a, b, c, d\}$ се може пресликати у било који елемент скупа $\{a, b, c, d\}$ и укупан број оваквих функција је 4^4 . Број бијекција је заправо број пермутација чланова скупа, односно $4!$. Број константних функција је број елемената скупа, односно 4. Укупан број функција које задовољавају услове је

$$4^4 - 4! - 4 = 228.$$

Задатак 18. *Колико има четвороцифрених бројева који се у бројевном систему са основом 10 записују помоћу две различите цифре?*

(Окружно такмичење, 2011.)

Решење: На располагању су нам цифре $\{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}$. Размотримо на колико начина можемо записати сваку од цифара траженог броја.

Прву цифру можемо записати на 9 начина, цифру 0 не можемо користити, јер број не може почињати цифром 0.

Друга цифра може бити иста или различита као прва. Уколико је друга цифра различита од прве можемо је одабрати на 9 начина. Онда за трећу и четврту цифру можемо одабрати једну од цифара коју смо узели за прву или другу цифру. У овом случају има $9 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 2 = 324$ бројева.

У случају да је друга цифра иста као прва, тада другу цифру можемо изабрати на један начин. Трећу цифру можемо изабрати на 9 начина, јер смо једну цифру искористили за прве две цифре траженог броја. Четврту цифру можемо изабрати на 2 начина, по истом принципу закључивања као претходне три цифре. У овом случају има $9 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 2 = 162$ бројева.

Уколико су прве три цифре исте, онда четврту можемо одабрати на 9 начина. У овом случају има $9 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 9 = 81$ бројева.

На крају, укупан број тражених бројева је

$$324 + 162 + 81 = 567.$$

Задатак 19. *На колико начина се може поређати 10 различитих књига на полицу, али тако да за њих одређених важи да никоје две нису једна до групе?*

(Окружно такмичење, 2011.)

Решење: Прво ћемо распоредити пет књига, чији нам распоред није битан. Њих можемо распоредити на $5!$ начина. Преосталих пет књига можемо ставити између већ постављених пет књига, на почетак или на крај реда.

Уколико их поставимо између већ постављених књига на располагању имамо 4 места, а уколико су на почетку или на крају реда, онда на располагању имамо 6 места. Морамо изабрати 5 од 6 могућих места за постављање 5 књига. Ово можемо урадити на $\binom{6}{5} \cdot 5!$ начина. Укупан број распореда књига је

$$5! \cdot \binom{6}{5} \cdot 5! = 5! \cdot 6!.$$

Задатак 20. На стадиону има укупно 2022 седишта која су означена бројевима од 1 до 2022. Сваки од 2022 навијача добио је улазницу са бројем од 1 до 2022 (сваки навијач добио је улазницу са различитим бројем), али су одлучили да места појуне по свом нахођењу (сваки навијач појунава тачно једно место). На утакмици је организована наградна игра, тако да награду добија сваки навијач коме је збир бројева написаних на карти и седишту паран.

- a) На колико начина се могу појунити места, тако да тачно 9 навијача добије награду?
- b) На колико начина се могу појунити места, тако да тачно 4 навијача добије награду?

(Државно такмичење, 2022.)

Решење: Услов задатка је да награду добија навијач коме је збир броја седишта и броја карте паран. Из услова следи да навијач добија награду ако су бројеви на његовој улазници и на његовом седишту исте парности. Означимо са B_{pp} број навијача чији су број улазнице и број седишта парни, са B_{np} број навијача чији су број улазнице непаран и број седишта паран, са B_{pn} број навијача чији су број улазнице паран и број седишта непаран и са B_{nn} број навијача чији су број улазнице и број седишта непарни.

Онда је збир $B_{pp} + B_{pn}$ једнак броју навијача који на улазницама имају паран број, односно $B_{pp} + B_{pn} = 1011$, аналогно $B_{np} + B_{nn} = 1011$, $B_{pn} + B_{nn} = 1011$ и $B_{pp} + B_{np} = 1011$. Даље следи да је $B_{pp} = B_{nn}$ и $B_{pn} = B_{np}$.

a) Број навијача који су добили награду је $B_{pp} + B_{nn} = 2B_{pp}$, односно број навијача који добије награду мора бити паран број, па није могуће попунити места тако да 9 навијача добије награду.

b) Број навијача који су добили награду је $B_{pp} + B_{nn} = 2B_{pp} = 4$, следи да је $B_{pp} = B_{nn} = 2$ и $B_{pn} = B_{np} = 1009$. Два навијача која ће добити награду и имају паран број улазнице можемо изабрати на $\binom{1011}{2}$ начина, њихова места која су означена парним бројем можемо изабрати на $\binom{1011}{2}$ начина и на та места се могу распоредити на $2!$ начина.

Места за преостале навијаче са парним бројем улазница могу се изабрати на $\binom{1011}{1009} = \binom{1011}{2}$ начина, пошто заузимају места означена непарним бројем, а на та места се могу распоредити на $1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdot \dots \cdot 3$ начина.

Затим, два награђена навијача са непарним бројем улазница могу се изабрати на $\binom{1011}{2}$ начина, на преостала два места означена непарним бројем се могу распоредити на $2!$ начина, а преосталих 1009 навијача са непарним бројем улазница се на преосталих 1009 места означена парним бројем може распоредити на $1009!$ начина.

Укупан број попуњавања места тако да тачно 4 навијача добије награду је

$$\binom{1011}{2} \cdot 2! \binom{1011}{2} \cdot 1011 \cdot 1010 \cdot 1009 \cdot \dots \cdot 3 \cdot \binom{1011}{2} \cdot 2! \cdot 1009!.$$

Задатак 21. За правоугаоним столом је представљено осам столица, четири са једне стране и наспрам њих четири са друге стране. На колико начина је могуће распоредити осморо пријатеља за овим столом, а да при том Ана и Бане не седе једно наспрам другог, а Весна и Горан седе једно поред другог? (Познао је да сви пријатељи имају међусобно различита имена.)

(Олимпијско такмичење, 2019.)

Решење: Страну стола за којом ће седети Весна и Горан можемо изабрати на 2 начина, а њихово место као пара можемо изабрати на 3 начина и њихов међусобни распоред на 2 начина. Укупан број начина на који можемо распоредити Весну и Горана је $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

Ако Ана и Бане седе са супротне стране стола у односу на Весну и Горана можемо их распоредити на $4 \cdot 3 = 12$ начина. Ако седе са исте стране стола као Весна и Горан можемо их распоредити на 2 начина. Ако седе са различитих страна, место на страни на којој су Весна и Горан можемо изабрати на 2 начина, затим ко ће од њих двоје бити на том месту можемо одабрати на 2 начина и на крају место за другу особу можемо одабрати на 3 начина. Ана и Банета можемо распоредити на $12 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 3 = 26$ начина.

Остала 4 госта можемо распоредити на $4!$ начина.

Укупан број распореда је

$$12 \cdot 26 \cdot 4!.$$

Задатак 22. Бетмен хоће да провали шифру Едварда Ниџме. Њему је познато да шифра представља неку пермутацију слова у изразу TRICKORTREAT и да су при том прво и последње слово шифре једнаки. Колико укућно постоји могућности за такву шифру?

(Окружно такмичење, 2019.)

Решење: Слово Т и R у траженој шифри се појављују три пута, остала слова се појављују по једном. По услову задатка прво и последње слово мора бити исто, односно то мора бити једно од слова Т или R.

Претпоставимо да шифра почиње и завршава се словом Т. Тада нам у шифри остаје 10 слова, међу којима се R јавља 3 пута, а остала слова по једном, а она се могу испермутовати на $\frac{10!}{3!}$ начина и то је укупан број могућих шифри које се завршавају и почињу словом Т.

Аналогно, добијамо исти број начина уколико шифра почиње словом R.

Укупан број могућности за шифру је

$$2 \cdot \frac{10!}{3!}.$$

Задатак 23. *Колико има природних бројева мањих од 10 000 у чијем се декадном запису не појављују цифре 4, 8 и 9, а цифра 1 се појављује тачно једанпут? (Преостале цифре се могу појављивати произвољан број пута, укључујући и могућности да се не појаве уопште.)*

(Окружно такмичење, 2017.)

Решење: Тражени број може бити највише четвороцифрен. У броју се појављује тачно једном цифра 1 и њену позицију можемо одабрати на 4 начина. Не можемо користити цифре 4, 8 и 9, па нам остаје 6 цифара које можемо распоредити на остала 3 места. Број оваквих распореда је 6^3 .

Тражених бројева има укупно

$$4 \cdot 6^3.$$

Задатак 24. *Дато је 2015 једнаких плавих и 3 једнаке беле куглице. На колико начина их можемо поређати у низ од 2018 куглица уз услов да прва и последња куглица у низу буду исте боје?*

(Олимпијско такмичење, 2015.)

Решење: Размотримо два случаја. Први случај ако су прва и последња куглица у низу плаве, онда од преосталих 2016 позиција у низу треба одабрати 3 на којима ће бити беле куглице. Оваквих распореда има $\binom{2016}{3}$.

У другом случају, ако је прва и последња бела куглица, онда на осталих 2016 позиција можемо распоредити једну белу куглицу и то можемо урадити на 2016 начина.

Укупан број начина на који можемо формирати низ куглица је

$$\binom{2016}{3} + 2016.$$

Задатак 25. *Колико има дијагонала конвексној 15-шоуџа које сјајају по два његова темена између којих се (посматрајући у оба моћућа смера) налазе бар три група темена?*

(Олимпијско такмичење, 2004.)

Решење: Свако теме не може бити спојено са самим собом и са суседних 6 темена (по 3 темена са сваке стране). Свако од 15 темена може бити спојено са преосталих 8 темена и сваку дијагоналу бројимо 2 пута. Следи да је укупан број дијагонала

$$\frac{15 \cdot 8}{2} = 60.$$

Задатак 26. *На колико начина се 3 шоја моћу поставити на шаховску таблу димензија 6×2006 шако да се узајамно не шуку(шј. два шоја се не моћу истовремено наћи у истој врсти или истој колони)?*

(Олимпијско такмичење, 2006.)

Решење: Први топ се на таблу може поставити на било које поље и за тај потез имамо $6 \cdot 2006$ начина. Следећег топа постављамо на поље које се не налази у истој врсти или колони са већ постављеним топом и то можемо урадити на $5 \cdot 2005$ начина. Последњи топ се може поставити на таблу на $4 \cdot 2004$ начина, пратећи поступак као са претходна два топа. Није битно којим редом постављамо топове на таблу, па се иста позиција може изабрати на $3! = 6$ начина.

Укупан број начина на који можемо поставити топове је

$$(6 \cdot 2006 \cdot 5 \cdot 2005 \cdot 4 \cdot 2004) : 6 = 2006 \cdot 2005 \cdot 2004 \cdot 20.$$

Задатак 27. *У дневној соби се налази неки број људи и познато је да сваки од њих познаје тачно пет пријатељских. Доказати да је за неко $n > 5$ моћуће одабрати n људи из дневне собе и смешити их за округли сто у шрпезарији шако да свако седи између два познаника.*

(Републичко такмичење, 2006.)

Решење: Од људи који се налазе у дневној соби прво формирамо врсту максималне дужине за коју важи да се свака два суседна човека у врсти познају.

Први човек у овој врсти има пет познаника који сви такође морају бити у врсти. Ако одаберемо редом људе из врсте, од првог човека до последњег његовог познаника у врсти и сместимо их за округли сто у том редоследу, онда свако мора седети између својих познаника. Број људи за столом је већи од 5, јер за столом седи први човек из врсте са својих пет познаника.

Задатак 28. Свако од јединичних поља табле 3×3 обојено је једном од три боје. Колико има различитих бојења код којих су свака два суседна (поља са заједничком страном) јединична поља различите боје?

(Олишинско такмичење, 2010.)

Решење: Размотрићемо неколико сличајева. Нека су a , b и c боје којима ћемо бојити поља.

Ако је централно поље обојено бојом a размотрићемо три случаја. Први случај је када су сва четири суседна поља у односу на централно поље обојена истом бојом. Та боја се може одабрати на 2 начина. За свако угаоно поље можемо одабрати на 2 начина боју за његово бојење. У овом случају можемо таблицу обојити на $2 \cdot 2^4 = 32$ начина.

У другом случају посматрамо када су три суседна поља у односу на централно поље обојена истом бојом, а четврто поље је обојено различитом бојом. Оваквих бојења има $\binom{4}{3} \cdot 2 = 8$. Остала угаона поља можемо обојити на 2^2 начина, јер два угаона поља имају два суседна поља различите боје, а преостала два имају два суседна поља исте боје. У овом случају таблицу можемо обојити на $8 \cdot 2^2 = 32$ начина.

У трећем случају посматрамо када су по два суседна поља обојена истом бојом. У овом случају имамо два подслучаја.

За први подслучај посматрамо поља која су дијаметрално супротна у односу на централно поље и која су обојена различито. Оваквих бојења има 4. Тада два угаона поља имају суседна поља различите боје, а два угаона поља имају суседна поља исте боје. Овакво бојење можемо направити на $4 \cdot 2^2 = 16$ начина.

У другом подслучају посматрамо поља која су дијаметрално супротна у односу на централно поље и која су обојена истом бојом. Оваквих бојења

има два. Тада свако угаоно поље има суседна поља различите боје, па је број бојења у овом подслучају 2.

На крају укупан број бојења таблице ако је централно поље обојено бојом a је

$$32 + 32 + 16 + 2 = 82.$$

На исти начин ћемо добити и број бојења ако централно поље обојимо b и ако обојимо бојом c , па је укупан број бојења

$$3 \cdot 82 = 246.$$

Задатак 29. Бројеви од 1 до n су поређани у низ тако да је сваки број или већи од свих претходних бројева или мањи од свих претходних. На колико начина је то могуће учинити?

(Танјенша 600)

Решење: На последње место долази број који је или мањи или већи од претходних бројева. За последње место имамо две могућности или 1 или n . У сваком следећем кораку имамо две могућности, или највећи или најмањи број од преосталих. Када поставимо $n - 1$ бројева, на првом месту пишемо последњи преостали број. Тражени број пермутација је

$$2^{n-1}.$$

Задатак 30. На такмичењу је учествовало 100 ученика, који су решавали по пет задатака. Познато је да је сваки задатак решило бар 60 ученика. Доказати да постоје два ученика која су решили све задатке заједно.

(Танјенша 600)

Решење: За свака два ученика посматрамо скуп проблема које они нису решили. Треба показати да постоји неки пар који је празан. Број парова ученика је $\binom{100}{2} = 4950$. За сваки проблем постоје највише $100 - 60 = 40$ ученика који га нису решили. Од њих можемо да направимо укупно $\binom{40}{2}$ парова за сваки проблем. Највећи број парова који имају неурађен задатак је $5 \cdot \binom{40}{2} = 3900$, што је мање од укупног броја парова.

Дакле, постоји пар који је решио све задатке.

Глава 7

Закључак

Комбинаторика је област математике која је највише повезана са практичним потребама свакодневног живота. Развој науке и програмирања у последњих неколико деценија допринео је повећању значаја и употребе комбинаторике.

У петом поглаљу смо детаљније обрадили тему комбинаторике у редовној и додатној настави у средњим школама. Закључујемо, да се овој теми не посвећује довољно пажње у редовној настави и да је проценат часова на којима се она обрађује већи на додатној настави. Због све веће потребе за практичном употребом логичког размишљања и расуђивања у свакодневном и професионалном животу требало би наставни план и програм предмета математика прилагодити данашњим потребама ученика и више пажње посветити овој теми.

Такође, видимо да се тема комбинаторике не обрађује у свим средњим школама у истом обиму, у неким она уопште није тема. Логички и комбинаторни задаци не би требало да буду намењени само надареним ученицима и такмичарима. Ово је тема која би требало да буде доступна свим ученицима, како основцима, тако и средњошколцима без обзира на профил или смер средње школе.

Специфични облици наставе су се показали као облици наставе на којима се наставници и ученици највише и најдубље баве темом комбинаторике. Иако су овакви видови наставе доста захтевни за ученика, али и за наставника, ова тема ипак проналази своје место. Наставници су свесни њене важности за развој ученика у сваком погледу. Посебно се обраћа пажња на ову тему када су у питању припреме за такмичења из математике, јер готово да нема

такмичења на коме се не појављује задатак из ове области.

Кроз решене такмичарске задатке у шестом поглављу имамо прилику да видимо да решавање комбинаторних задатака некада не захтева познавање математичког апарата, већ само логичко размишљања и расуђивање. Управо из тог разлога овом темом се треба бавити више у школама. Решавањем комбинаторних задатака ученици развијају и проширују своје логичке способности и размишљања. Било би добро да ученици не решавају задатке механички без размишљања о проблему који решавају искључиво применом формули, већ да их решавање логичких задатака и проблема мотивише на размишљање.

Библиографија

- [1] F. M. Bruckler, *Повјесни математике II*. Свеучилиште Ј.Ј., Одјел за математичаре, 2010.
- [2] П. Младеновић. *Комбинајорика*. Материјали за младе математичаре. Друштво математичара Србије, 1989.
- [3] Р. Јовановски. *Комбинајорика*. Збирка задатака са решењима и основа теорије. Архимедес, 2016.
- [4] Ж. Ивановић, С. Огњановић. *Математика 1*. Збирка задатака и тестова за 1. разред гимназија и техничких школа. Круг, 2005.
- [5] Ж. Ивановић, С. Огњановић. *Математика 4*. Збирка задатака и тестова за 4. разред гимназија и техничких школа. Круг, 2005.
- [6] Д. Стефановић, М. Тирић, С. Симић, В. Балтић. *Дискретна математика*. Друштво математичара Србије, Београд, 2007.
- [7] М. Матељевић. *Елементи методике, начела наставе математике*. Математички факултет. Београд, 2014.
- [8] З. Каделбург. *Танјенша 600*. Задаци из математике часописа „Тангента”. Друштво математичара Србије, Београд, 2014.
- [9] <https://dms.rs/>
- [10] <https://zuov.gov.rs/wp-content/uploads/2020/08/pravilnik-gimnazija.pdf>

Биографија аутора

Ивана Милосављевић (Ужице, Србија, 18. август 1992.) је дипломирани професор математике и рачунарства Универзитета у Београду. Завршила је Ужичку Гимназију, природно-математички смер, 2011. године.

Исте године уписала је Математички факултет у Београду, смер професор математике и рачунарства. По завршетку основних студија 2019. године уписала је мастер студије на истом факултету.

Од 2016.године до 2021. године ради у школи програмирања за децу Kliker IT centar za decu као предавач на програмима Scratch, AppInventor и Robotika. Ко-аутор је програма Scratch. Од 2018. године до 2019. године ради као едукатор и координатор наставе у Kliker IT centru za decu.

Од 2019.године до 2021.године ради у средњој школи за информационе технологије ITHS као наставник математике и наставник база података.