Master rad

Tema:

DRUGA KNJIGA EUKLIDOVIH ELEMENATA,HIPOKRATVI MESECI I KVADRATRISA

student: Jovana Vojinović
mentor: dr Zoran Lučić

23. april 2011

Predgovor

Rad koji će se baviti Euklidovim elementima, Hipokratovim mesečcima i kvadratrisi najbolje je podeliti hronološki, odnosno, početi od osnovnih antičkih problema. Počevši od traganja za rešenjem Delskog problema, otvara se niz novih geometrijskih pitanja koja će se nadovezati na problem mesečastih oblika.

Prvi deo rada bavi se knjigom Euklidovih Elemenata, dok se drugi deo rada seli na Hipokratove mesečke. Konkretno II knjiga Elemenata je važna jer se bavi planimetrijom, odnosno geometrijskom algebrom. Na to će se nadovezati Arhitino rešenje za problem udvostručenja kocke.

Zatim, rad prati Hipokratovu teoriju o mesečcima koja takođe predstavlja pitanje kvadrature kruga. Poglavlje o mesečcima sadrži primere za jednačine i konstrukcije meseca kao i za ostale kvadrature meseca.

Sledeće poglavlje prati jednačinu i konstrukciju kvadratise čime se završava praktični deo rada. U nastavku slede biografije velikih matematičara koji su se bavili ovim problemima.

Sadržaj

1 Uvod **1**

2 Antički problemi **2**
2.1 Udvostručenje kocke 3
2.2 Kvadriranje kruga 6
2.3 Trisekcija ugla 7

3 Euklidovi Elementi **10**
3.1 II Euklidovih Elemenata 14
3.2 Arhitino rešenje 25

4 Hipokratovi mesečci **27**
4.1 Primeri 29
4.2 Jednačina meseca 36
4.3 Konstrukcija meseca 37
4.4 Ostale kvadrature meseca 39

5 Kvadratrisa **44**

6 Biografije **48**
6.1 Alexandar iz Afrodizije 48
6.2 Arhita 49
6.3 Čebotarev (Nikolai Grigorievich Chebotaryov) 51
6.4 Edmund Landau 52
6.5 Euklid oko 325. - oko 265.g.p.n.e 53
6.6 Hipokrat oko 470. - oko 410.g.p.n.e 55
6.7 Ibn al- Haytham (Alhazen) 58
6.8 Leonardo da Vinci 59
6.9 Lindeman (Carl Louis Ferdinand von Lindemann) 61
6.10 Simplikije iz Kilikije 62
6.11 Tomas Klauzen (Thomas Clausen) 63
6.12 Vanzel (Pierre Laurent Wantzel) 64

7 Zaključak **65**

Lenjirom sam započeo posao
pravljenja kruga četvorougaonim,
u njegovom centru biće mesto,
u koje svi pravci vodiće,
kao zvezda iz centra zračiće,
koja, mada kružno, šalje
svoja četiri zraka na sve strane
u vidu linije prave.[1]

Aristofan - komediograf

[1] Science Awakening - Van Der Waerden, New York, 1961. 148.str

Glava 1

Uvod

Mnogi su upoznati sa tri antička problema geometrije - Delski problem:

1. udvostručenje kocke[1],
2. kvadratura kruga[2] i
3. trisekcija ugla[3]

Međutim malo ko zna kako je njihovo rešavanje započeto. Sofisti, koji su bili manje sputani tradicijom u poređenju sa bilo kojom ranijom grupom naučnika, počeli su razmatrati matematičke probleme, više iz razloga da bi objasnili njihovu suštinu i filozofsko načelo, nego radi praktične koristi. Nažalost, iz tog perioda je do nas dospeo samo jedan matematički fragment, koji pripada jonskom filozofu Hipokratu sa Hiosa. Hipokratov način posmatranja matematičkog problema i odnosa objekata u prostoru je na veoma razvijenom nivou. Fragment je prepoznatljiv po činjenjici da se u njemu razmatra jedno sasvim nepraktično, ali teorijski izuzetno zanimljivo pitanje o tzv. "mesečastim oblicima". Reč je o ravnim figurama koje su omeđene sa dva kružna luka. Pronalaskom ovakvog rešenja Sofisti (a za njima i buduca pokolenja) nadali su se da će rešiti jedan od tri antička problema - KVADRATURU KRUGA. Pokušavajući da reše i preostala dva problema, došli su samo do novih otkrića – pokušajem rešenja trisekcije ugla došli su do KVADRATISE. A tek sa pojavom II knjige Euklidovih Elemenata nazire se put rešenju UDVOSRUČENJA KOCKE.

Ovaj rad će predstaviti postavljanje problema, pronalaskom jednačina i otkrivanjem nemogućnosti rešavanja pomenutih antičkih probleme.

[1]Određivanje ivice kocke koja bi imala dva puta veću zapreminu od zadate kocke
[2]Nalaženje kvadrata čija bi površina bila jednaka površini datog kruga
[3]Podela ma kog datog ugla na tri jednaka dela

Glava 2

Antički problemi

Konstrukcija lenjirom i šestarom predstavlja skup zadatih pravila koji datira iz antičkog vremena. Prvi put se pojavljuje u staroj Grčkoj, među matematičarima kojima je dozvoljeno da za rešavanje matematičkog problema koriste samo dva alata: lenjir i šestar. Lenjir služi za povlačenje linije između dve tačke[1]. Dok šestar služi za crtanje kruga iz proizvoljne tačke, sa proizvoljnim poluprečnikom[2].

Antički problemi su legendarni ne zato što nisu imali rešenja[3], ili su rešenja bila neobično teška, već nisu mogla da se reše pomoću lenjira i šestara. Postoje tri takva problema:

1. **Problem udvostručenja kocke** - konstruisati kocku dvostruko veće zapremine od date kocke.
2. **Problem kvadrature kruga** - konstruisati kvadrat iste površine kao i dati krug, i
3. **Problem trisekcije ugla** - konstruisati trecinu datog, proizvoljnog ugla.

Francuski matematičar Pijer Vanzel (Pierre Wantzel) je 1830. godine dokazao nemogućnost rešenja prvog i trećeg problema. Poslednji dokaz Ferdinanda fon Lindemana iz 1882. godine o transcedentnosti broja π čime je, posredno, potvrđeno da π nije konstruktibilan. Time je i poslednji problem, kvadratura kruga, definitivno skinut sa dnevnog reda.

[1]Na lenjiru nije dozvoljeno ostavljati oznake odnosno koristiti lenjir sa obeleženim rastojanjima.

[2]Tokom crtanja se otvor šestara ne može menjati niti se otvor šestara pamti kada se šestar podigne.

[3]Sva tri problema su rešena u helenskom periodu

2.1 Udvostručenje kocke

Postoje dva izvora o nastajanju problema udvostručenja kocke. Prvi izvor pripada Teonu iz Smirne[4] koji citira Eratostenov rad:

"Kada je Bog proglasio kroz Delsko proročište da, u cilju oslobođenja od kuge, treba da izgrade žrtvenik duplo već od postojećeg, njihove zanatlije su pale u veliki nedoumicu, u njihovim naporima da otkriju kako se čvrsto telo može udvostručiti, oni su otišli da pitaju Platona o tome, a on im je odgovorio da proročište traži oltar dvostruke veličine, a ne Bog, i da su oni želeli, u određivanju zadataka, da posrame Grke za zanemarivanje matematike i njihovog prezira geometrije.[5]"

Kuga je svakako bila jedan od velikih događaja u istoriji Atine, oko četvrtine stanovništva je umrlo od nje. Ovo je bilo oko 430 god. p.n.e. tako da ako postoji bilo kakva istina u ovoj priči možemo bar navesti tačan datum za pojavu problema, a kako se ovaj problem vezuje za Delsko proročanstvo dobija naziv **Delski problem**.

Eutoksija iz Askalona, koji je u VI veku komentarisao Arhimedovu raspravu *O sferi i cilindru*, koja predstavlja drugu verziju. Eratosten je napisao pismo pismo kralju Ptolomeju, iako se zna da je pismo falsifikat, pisac citiram neke originalne spise Eratostena:

*"Kažu da je jedan od drevnih tragičnih pesnika na scenu postavio Minoja koji je dao da se za Glauka[6] izgradi grob. kada je čuo da je grob dug sto stopa u svakom pravcu, rekao je: "Načinili ste premalo kraljevsko prebivalište, ono mora biti dvaput veće. Brzo udvostručite svaku stranu groba, ne kvareći njegov oblik.Cini se da je on načinio grešku. kada se udvostruči ivica, površina se uveća četiri,a zapremina osam puta. Geometri su stali da izračunavaju kako da udvostruče dato telo ne menjajući mu oblik, a ovaj problem nazvan je **udvostručenjem kocke**, budući da su počeli sa kockom u nameri da je udvostruče."[7]*

Već smo naveli da je rešenje udvostručenja kocke namoguće, pa ćemo to i pokazati.

[4]grčki filozof i matematičar, čija su dela bila pod jakim uticajem pitagorejske škole.

[5]$http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/HistTopics/Doubling_the_cube.html$

[6]U grčkoj mitologiji Glauk je sin slavnog i pravednog kritskog kralja Minoja i njegove žene persifaje, koji se udavio u ćupu s medom, ali ga je prorok Poliid oživeo i dao mu sposobnost proviđanja koju mu je kasnije oduzeo.

[7]Z. Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009. str. 219. - 220.

Za početak ćemo objasniti da su svi konstruktibilni brojevi algebarski. Uzećemo neko polje F_0 koje predstavlja racionalno polje generisano jednim segmentom, tada bi svi konstruktibilni brojevi bili algebarski. Brojevi koji se nalaze u polju F_1 su koreni kvadratne jednačine, a u F_3 su koreni jednačine četvrtog stepena, uopšteno brojevi F_h su koreni jednačine 2^h sa racionalnim koeficientima. Da bismo ovo pokazali za polje F_2 uradićemo jedan primer: $x = \sqrt{2} + \sqrt{3+\sqrt{2}}$. Imamo $(x-\sqrt{2})^2 = 3+\sqrt{2}$, $x^2+2-2\sqrt{2}x = 3+\sqrt{2}$, ili $x^2-1 = \sqrt{2}(2x+1)$, kvadratna jednačina sa koeficientima se nalazi u polju F_1. Kvadriranjem dobijamo

$$(x^2-1)^2 = 2(2x+1)^2,$$

jednačinu četvrtog stepena sa racionalnim koeficientima.

Uopšteno, svaki broj polja F_2 ima formu

$$x = p + q\sqrt{w},$$

gde p, q, w pripadaju polju F_1, odatle su $p = a + b\sqrt{s}$, $q = c + d\sqrt{s}$, $w = e + f\sqrt{s}$ gde su a, b, c, d, e, f, s racionalni brojevi. Iz $x = p + q\sqrt{w}$ imamo

$$x^2 - 2px + p^2 = q^2 w$$

koeficienti se nalaze u polju F_1, generišući $\sqrt{s}$. Dakle ova jednačina se može napisati i u sledećoj formi:

$$x^2 + ux + v = \sqrt{s}(rx+t),$$

gde su r, s, t, u, v su racionalni. Kvadriranjem obe strane dobijamo jednačinu četvrtog stepena

$$(x^2+ux+v)^2 = s(rx+t)^2$$

sa racionalnim koeficientima, kao što smo gore naveli.

Vratimo se udvostručenju kocke. Ako data kocka ima ivice jednake dužine, njena zapremina će biti kubnih jedinica, potrebno je naći ivicu x kocke sa dva puta većom zapreminom. Potrebno je da ivica x zadovolji jednostavnu jednačinu trećeg stepena:

$$x^3 - 2 = 0$$

Predpostavićemo da kocka može da se udvostruči pomoću lenjira i šestara. Neka se x nalazi u nekom polju F_k, koje se dobija iz polja racionalnih brojeva uzastopnim produženjima – dodavanjem kavadratnih korena.

Znamo da x ne može da pripada racionalnom polju F_0, jer je $\sqrt[3]{2}$ iracionalan broj. Dakle x jedino može da se nađe u produžetku polja F_k, gde je k pozitivan ceo broj. Možemo pretpostaviti da je k najmanji prirodni broj takav da $x \in F_k$. Iz toga sledi da se x može napisati u sledećem obliku

$$x = p + q\sqrt{w}$$

gde p, q i w pripadaju polju F_{k-1}, ali $\sqrt{w}$ ne pripada. Pokazaćemo ako je jednačina $x = p + q\sqrt{w}$ rešenje kubne jednačine $x^3 - 2 = 0$, tada je $y = p - q\sqrt{w}$ takođe rešenje. Kako x pripada polju F_k, x^3 i $x^3 - 2$ su takođe u polju F_k, tačnije imamo

$$x^3 - 2 = a + b\sqrt{w},$$

a i b su iz polja F_{k-1}. Lakim proračunom dobijamo $a = p^3 + 3pq^2w - 2$, $b = 3p^2q + q^3w$. Ako stavimo

$$y = p - q\sqrt{w},$$

zamenimo $-q$ na mesto q, tada će a i b pokazivati

$$y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}.$$

Sada bi x trebao biti koren $x^3 - 2 = 0$, otuda

$$a + b\sqrt{w} = 0.$$

Ovo podrazumeva da su argumenti a i b nula. Ako b nije nula dobili bi da je $\sqrt{w} = \frac{-a}{b}$. Tada bi $\sqrt{w}$ bio broj koji pripada polju F_{k-1} u kome leže a i b, što bi bilo suprotno od predpostavke. Dakle $b = 0$, sledi da je i $a = 0$ takođe.

Sada, s obzirom da je $a = b = 0$ i iz $y^3 - 2 = a - b\sqrt{w}$ zaključujemo da je $y = p - q\sqrt{w}$ takođe rešenje kubne jednačine $y^3 - 2 = 0$.
Štaviše, $y \neq x$ iz čega sledi da je $x - y \neq 0$, za $x - y = 2q\sqrt{w}$ može nastati samo ako je $q = 0$, odatle bi dobili da je $x = p$ koje bi se nalazilo u polju F_{k-1} što je suprotno od predpostavke da x leži u polju F_k.

Videli smo, prema tome, da ako je koren kubne jednačine $x^3 - 2 = 0$, tad je $y = p - q\sqrt{w}$ takođe koren te jednačine i to različit od x. Ovo odmah dovodi do kontradikcije. Jer, postoji samo jedan realan broj koji je kubni koren broja 2, s obzirom da su ostala dva imaginarna $y = p - q\sqrt{w}$ očigledno je realan jer su i p i q i $\sqrt{w}$ realni brojevi.

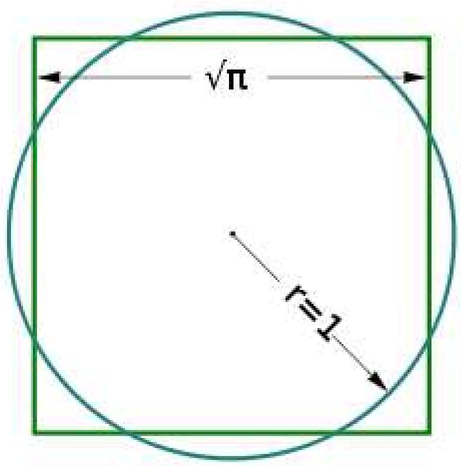
Znači naša polazna predpostavka dovela je do protivrečnosti, te je pogrešna; rešenje jednačine $x^3 - 2 = 0$ ne može da pripada polju F_k tako da je udvajanje kocke lenjirom i šestarom nemoguće.

2.2 Kvadriranje kruga

Već smo rekli da kvadratura kruga predstavlja:

Konstruisanje kvadrata iste površine kao datog kruga.

Da pojasnimo površina kvadrata se računa $P = a^2$, a površina kruga



Slika 2.1: Kvadratura kruga

je $P = r^2\pi$ kada izjednačimo površine dobijamo $a^2 = r^2\pi$ iz čega sledi da je $a = r\sqrt{\pi}$. Još su Heleni umeli da geometrijski pomnože dva broja (dve duži, odnosno da geometrijski nađu kvadratni koren broja), ali je za rešavanje ovog problema potrebno geometrijski konstruisati broj π. Geometrijska konstrukcija broja π je nemoguća, a to je tek 1882. godine pokazao Lindeman dokazujući da π nije algebarski već transcendentan broj.

Problem kvadrature kruga pojavljuje se još kod Starih Egipćana u Ahmesovom papirusu, oko 1650. god. p.n.e. Ahmes piše da treba konstruisati kvadrat od $\frac{8}{9}$ prečnika kruga. Heleni prvi na precizniji način definišu problem, poštujući pravilo konstrukcije lenjirom i šestarom. Anaksagora (među prvim Helenima) se bavio kvadraturom kruga. Sledeći kvadraturaši Antifon i Brison su takođe razmatrali ovaj problem ali njihovi spisi su izgubljeni. [8]

Arhimed nije rešio kvadraturu kruga, ali je prvi zaključio da je površina kruga jednaka površini pravouglog trougla čija je jedna kateta jednaka polu prečniku, a druga obimu kruga.

Prema našoj opštoj teoriji konstruktibilnih brojeva nemogućnost kvadrature kruga možemo dokazati ako pokažemo da broj π ne pripada ni jednom polju F_k koje se može dobiti uzastopnim dodavanjem kvadratnih korena racionalnom polju F_0. Kako su svi takvi brojevi algebarski, tj. brojevi koji zadovoljavaju algebarske jednačine sa celim koeficijentima, dovoljno je dokazati da π nije algebarski broj, tj. da je transcedentan.

2.3 Trisekcija ugla

Stari su Grci, pokušavali da pronađu opšti algoritam koji bi omogućio trisekciju svakog ugla i to im nije polazilo za rukom. Trisekcija ugla je tako, uz kvadraturu kruga i udvostručenje kocke, ostala veliki problem antičke geometrije.

Godine su prolazile, a da niko nije uspeo da reši ove naoko sasvim jednostavne probleme. Matematičari su počeli da pomišljaju na to da se problem uošte ne može rešiti pa su se pojavili i prvi dokazi takve tvrdnje. Trebalo je, međutim, da prođu 22 veka da bi 1837. godine u jednom francuskom matematičkom časopisu bio objavljen prvi matematički dokaz da se svaki ugao ne može podeliti na tri dela; tvorac ovog dokaza je P.L. Wantzel.

Matematičari su, naravno, opsežno proveravali Wantzelov rad i pronašli mu

[8] $http://www.gap-system.org/~history/HistTopics/Squaring_the_circle.html$

samo jednu zamerku: dokaz je, primetili su, veoma složen i teško ga je prevesti na "običan"jezik.

Trebalo bi znati da je dokaz trisekcije ugla šestarom i lenjirom u globalu nemoguć. Naravno, tu su uglovi, kao što su 90^o ili 180^o za koje se moze izvesti trisekcija ugla. Ono što bih trebalo da pokažem je da trisekcija ugla ne može da se uradi na svakom uglu. Za dokaz, je sasvim dovoljno da dokazni predmet bude samo jedan ugao na kome se ne može izvesti trisekcija ugla, jer globalni metod mora da važi za svaki ugao. Otuda, ne postoji generalni metod kojim se može dokazati, demonstriraću, npr. da se nad uglom od 60^o ne može izvršiti trisekcija ugla uz pomoć lenjira i šestara.

Možemo dobiti algebarsku jednačinu ovog problema na različite načine, najjednostavnije je razmotriti ugao Θ ako je dat njegov kosinus: $cos\Theta = g$. Onda je problem jednak pronalaženju $x = cos(\frac{\Theta}{3})$. Primenom trigonometrijskih formula dobija se jednačina

$$cos\Theta = g = 4cos^3\left(\frac{\Theta}{3}\right) - 3cos\left(\frac{\Theta}{3}\right)$$

Drugim rečima problem trisekcije ugla Θ sa $cos\Theta = g$ iznosi

$$4z^3 - 3z - g = 0$$

Da bi pokazala da se ova jednačina ne može uvek rešiti uzeću da je $\Theta = 60^o$, tada je $g = cos60^o = \frac{1}{2}$. Jednačina glasi

$$8z^3 - 6z = 1$$

Jedino što je potrebno da dokažem je da ova jednačina nema racionalni koren. Neka je $v = 2z$. Tada jednačina glasi

$$v^3 - 3v = 1$$

Ako postoji racionalan broj $v = \frac{r}{s}$ koji zadovoljava ovu jednačinu, gde su r i s celi brojevi bez zajednickog većeg od 1 tada je $r^3 - 3s^2r = s^3$. Iz ovoga sledi da je $s^3 = r(r^2 - 3s^2)$ deljiv sa r, što znaci da r i s imaju zajednički veći od 1. Takođe s^2 je činilac $r^3 = s^2(s + 3r)$, što znači da r i s imaju još zajedničkih osim 1. Pošto sam pretpostavila da r i s nemaju zajedničkih činilaca, pokazala sam da jedini racionalan broj koji zadovoljava gore navedenu jednačinu je broj 1[9]. Ali zamenom $+1$ ili -1 na mesto v primećujem

[9] +1 ili -1

da u datoj jednačini nijedna vrednost ne odgovara. Dakle, sledstveno, ne postoji racionalni koren i nemogućnost trisekcije ugla je dokazana.

Rešenja sa varalicama

Dovitljivi pronalazači su se potrudili da konstruišu mnogobrojne naprave koje se koriste isključivo za trisekciju ugla. Jedan takav uređaj imate i vi - to je običan sat sa kazaljkama. Leo Moser[10], u jednom od svojih radova primećuje da ce mala kazaljka opisati trećinu ugla ako veliku kazaljku prošetamo po uglu koji je četiri puta veći od osnovnog!

[10] profesor Univerziteta u Alberti (SAD)

Glava 3

Euklidovi Elementi

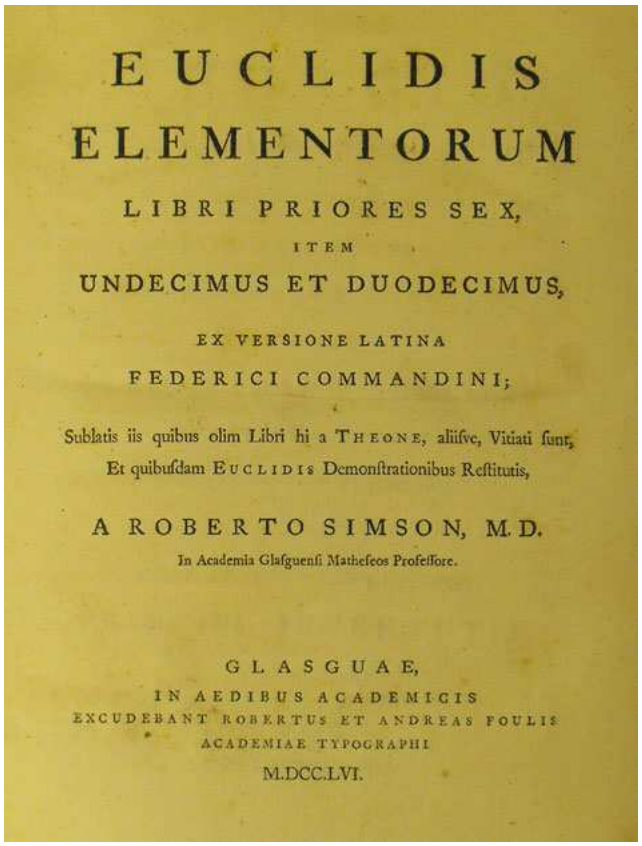
U odnosu na druge naučne oblasti, geometrija je dostigla zavidan nivo oko 300. god. p.n.e. pojavom dela ”Elementi”. Tada u matematici geometrija dominira, pa su i brojevi interpretirani geometrijski. Euklid je pokušao da izlaganje bude strogo deduktivna i upravo zbog te doslednosti ”Elementi” su vekovima smatrani najsavršenijim matematičkim delom. Mnoge generacije matematičara i drugih naučnika su učili iz ove knjige kako se logički zaključuje i novo povezuje sa ranije utvrdjenim činjenicama. Kasnije su Elementi analizirani i dopunjavani. Posebnu pažnju su privlačili aksiomi i postulati. U ovoj knjizi su sadržana sva saznanja i otkrića do kojih su došli Euklid i njegovi prethodnici u geometriji, teoriji brojeva i algebri. Takođe, dokazane su i 464 teoreme na način koji je i danas besprekoran.
Teon[1] i Heiberg[2] su se medju prvima bavili Eukidovim delom, i verovatno

Slika 3.1: Verovatno najstariji očuvani fragmenti Elemenata. Ovaj fragment sadrži petu teoremu iz druge knjige.

ga malo izmenili, radi lakšeg čitanja.

Ciceron[3] je prvi latinski autor koji pominje Euklida, verovatno da u vreme Cicerona Elementi nisu bili prevedeni na latinski i nisu se koristili na bilo kakav način od strane Rimljana, jer, kako Ciceron kaže da je geometrija Rimljanima na drugom mestu, jer se njom bave Grci, na prvom mestu su im merenje i računanje.

Magnus Aurelije Cassiodorius[4] u geometrijskom delu svoje enciklopedije


EUCLIDIS
ELEMENTORUM
LIBRI PRIORES SEX,
ITEM
UNDECIMUS ET DUODECIMUS,
EX VERSIONE LATINA
FEDERICI COMMANDINI;
Sublatis iis quibus olim Libri hi a THEONE, aliisve, Vitiati sunt,
Et quibusdam EUCLIDIS Demonstrationibus Restitutis,
A ROBERTO SIMSON, M.D.
In Academia Glasguensi Matheseos Professore.
GLASGUAE,
IN AEDIBUS ACADEMICIS
EXCUDEBANT ROBERTUS ET ANDREAS FOULIS
ACADEMIAE TYPOGRAPHI
M.DCC.LVI.

Slika 3.2: Latinska verzija Euklidovih Elemenata iz 1756.

[1]Teon je bio grčki naučnik i matematičar koji je živeo u Aleksandriji, Egipat. On je uredio i organizovao Euklidovi Elemenate.

[2]Danski filolog i istoričar. Najzaslužniji je za otkriće prethodno nepoznatih tekstova Arhimeda Palimpsest, i za izdanje Euklidovih Elemenata koje je T.L. Heath preveo na engleski jezik.

[3]Marko Tulije Ciceron (3. januar 106. | 7. decembar 43. p. n. e.) je bio rimski državnik, književnik i besednik.

[4]Flavije Aurelije Magnus Cassiodorus Senator (oko 485. – oko 585), poznatiji kao Cassiodorus, bio je rimski državnik i pisac, koji je služio u administraciji Teodorik Velikog

De artibus AC disciplinis liberaliunt literarum kaže da je geometrija bila zastupljena među Grcima od Euklida, Apolonija, Arhimeda, i drugih, *"od kojih je Euklid preveden na latinski jezik od strane velikog čoveka Boethius*[5] *"...*

Englez Athelhard je putovao u Španiju, Grčku, Malu Aziju i Egipat, a stečeno znanja arapskog, mu je omogućilo da prevede mnoga dela sa arapskog na latinski jezik, između ostalih delo, *Elementi* - XII vek.
Euklidovi Elementi sadrže trinaest knjiga i predstavljaju sistemsko izlaganje Grčke matematike tog vremena po odeljcima: elementarna geometrija, teorija brojeva, algebra, teorija merenja geometrijskih veličina, elementi teorije graničnih vrednost. . .

1482. se pojavila prva odštampana verzija Euklidovih Eelemenata, to je između ostalog i prva odštampana matematička knjiga ikada, štampana je u Veneciji.

Prvih šest knjiga se bave planimetrijom. Prva i druga knjiga se bave osnovnim osobinama trougla, paralela, paralelograma, pravougaonika i kvadrata. U trećoj knjizi opisan je krug, a u četvrtoj se bavi problemima kruga i tu se u velikoj meri nalaze misli Pitagorinih sledbenika. Peta knjiga je rezervisana za Eudoksov rad u kojoj je opisana primena proporcije merljivih i ne merljivih veličina. Šesta knjiga koristi rezultate pete knjige ali u geometriji ravni.

Knjige od sedme do devete bave se teorijom brojeva. U sedmoj knjizi se nalazi Euklidov algoritam za pronalaženje najvećeg zajedničkog delioca dva broja. Za osmu knjigu Van der Vaerden kaže da sadrži:

... glomaznu dikciju, nepotrebno ponavljanje, pa čak i logičke greške. Očigledno Euklidovo izlaganje je dobro samo u onim delovima u kojima je imao odličan izvor na raspolaganju.[6]

X knjiga se bavi teorijom iracionalnih brojeva što je uglavnom Teteov rad. Euklid je promenio nekoliko dokaza teorema u ovoj knjizi, tako da odgovaraju novim definicijama o proporciji koje je napisao Eudoks.

Od jedanaeste do trinaeste knjige se bave trodimenzionalnom geometrijom (stereometrijom). U jedanaestoj knjizi se nalaze osnovne definicije potrebne

- kralja Ostrogota.

[5]Anicius Manlius Severinus Boethius, obično naziva Boethius (oko 480. − 524. ili 525.) bio je hrišćanski filozof. Nameravao je da prevede sva dela Euklida, Aristotela i Platona sa originalnog grčkog na latinski.

[6]Preuzeto sa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euclid.html

za sve tri knjige. Zatim slede prilično slične teoremama datim u prve četiri knjige ali vezane za prostor.

Poznato je da su Proklovi komentari o Eukidovoj prvoj knjiga jedan od dva glavna izvora informacija o istoriji grčke geometrije koju danas posedujemo, drugi je Papusova *Zbirka*. Oni su veoma vredni, jer originalna dela prethodnika Euklida, Arhimeda i Apolonija su izgubljena, pošto su verovatno bila odbačena i zaboravljena gotovo odmah nakon pojave remek - dela ove velike trojke.

Euklidovi Elementi si izvanredni zbog jasnoće sa kojima su teoreme napisane i dokazane. Hit piše:

Ova divna knjiga, sa svim svojim nesavršenostima, kojih je zaista malo ako se uzme u obzir datum pisanja, jeste i ostaće nesumnjivo i dalje najveći matematički udžbenik svih vremena... Čak i u grčko vreme matematičari su bili okupirani ovom knjigom: Heron, Papus, Porfirije, Proklo i Simplicius su pisali komentare, Teon iz Aleksandrije ih je ponovo objavio...[7]

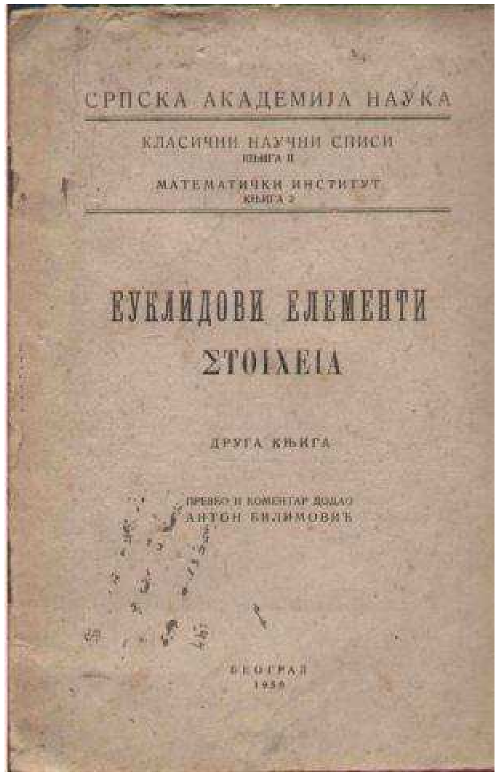
Van der Vaerden ocenjuje značaj Elemenata:

Gotovo iz vremena njegovog pisanja traje do danas, Elementi imaju vodeći i kontinuirani uticaj na ljudsko učenje. To je prvi izvor geometrijskog rezonovanja, teorema, metoda sve do pojave ne-euklidske geometrije u 19. veku. Kaže se da su, pored Biblije, "Elementi"najviše prevodjeno, objavljivano, i proučavano delo od svih knjiga napisanih u zapadnom svetu.[8]

Postoje neke nedoumice o autentičnosti Elemenata, tačnije pitanje da li je Euklid napisao svih XIII knjiga, ali postoje i neoborivi dokazi o tome. Bili su prihvaćeni bez sumnje od strane svih preko 2000 godina i postoji mali broj dokaza koji nisu u skladu sa ovom hipotezom. Tačno je da postoje razlike u stilu između nekih knjiga Elemenata, ali mnogi autori menjaju svoj stil pisanja vremenom. Opet činjenicu da je Euklid nesumnjivo osnovao Elemenate na prethodnim radovima znači da bi bilo prilično neverovatno, ako ni traga od originalnog stila autor nije ostavio.

[7] Preuzeto sa: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euclid.html
[8] Preuzeto se: http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Euclid.html

3.1 II Euklidovih Elemenata



Slika 3.3: Naslovna strana **druge knjige Elemenata** iz 1950 prevod Antona Bilimovića

Druga knjiga Euklidovih elemenata posvećena je geometrijskoj algebri. Sastoji se od dve definicije (u kojima su definisani pravougaonik i gnomon) i četrnaest stavova. Mnogi algebarski izrazi koje danas svakodnevno koristimo su u njoj stavovi koji su geometrijskim metodama dokazani.

Proizvod dva broja se predstavljao geometrijski, npr. pravougaonik obuhvaćen dvema pravama je proizvod dva broja. Bilo je potrebno samo otkriće nesamerljivih ili iracionalnih brojeva, kako bi geometrijski bile predstavljene od strane pravougaonika, proizvod bilo koje dve veličine, racionalne ili iracionalne, i bilo je moguće unapređenje iz geometrijske aritmetike u geometrijsku algebru, koja je zaista od Euklidovog vremena (i verovatno mnogo pre) dostigla visok stepen razvoja. Da bi geometrijske algebre bila efikasna u globalu, teorija proporcije je od suštinskog značaja. Dakle, pretpostavimo da su x, y, z veličine koje se mogu predstaviti pravim linijama, dok su α, β, i γ koeficijenti koji se mogu izraziti odnosom između linija. Onda možemo pomoću IV knjige naći pravu liniju takvu da je:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + ... = d$$

Da bi rešili prostu jednačine u opštem obliku

$$ax + a = b$$

gde a predstavlja svaki odnos između linija, zahteva korišćenje šeste knjige, mada, na primer, ako je $\frac{1}{2}$ ili $\frac{1}{3}$ . . . , ili ako je a 2, 4 ili bilo koji stepen dvojke, ne treba zahtevati ništa izvan I knjige za rešavanje ove jednačine. Slično je i sa opštim oblikom kvadratne jednačine koja zahteva korišćenje VI knjige za geometrijsko rešavanje, mada za rešavanje kvadratnih jednačina dovoljna je samo II knjiga Euklidovih Elemenata.

Pored toga što nam omogućava da rešimo kvadratnu jednačinu geometrijskim putem, II knjiga nam daje još neke geometrijske dokaze algebarskih formula:

1. $a(b + c + d + ...) = ab + ac + ad + ...;$
2. $(a + b)a + (a + b)b = (a + b)^2;$
3. $(a + b)a = ab + a^2;$
4. $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab;$
5. $ab + (\frac{a+b}{2} - b)^2 = (\frac{a+b}{2})^2;$

   ili $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + \beta^2 = \alpha^2;$
6. $(2a + b)b + a^2 = (a + b)^2$

   ili $(\alpha + \beta)(\beta - \alpha) + \alpha^2 = \beta^2;$
7. $(a + b)^2 + a^2 = 2(a + b)a + b^2$

   ili $\alpha^2 + \beta^2 = 2\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2;$
8. $4(a + b)a + b^2 = (a + b) + a^2$

   ili $4\alpha\beta + (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2;$
9. $a^2 + b^2 = 2(\frac{a+b}{2})^2 + (\frac{a+b}{2} - b)^2$

   ili $(\alpha + \beta)^2 + (\alpha - \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2);$

10. $(2a+b)^2+b^2=2a^2+(a+b)^2$

    ili $(\alpha+\beta)^2+(\beta-\alpha)^2=2(\alpha^2+\beta^2)$

Oblici ovih identiteta mogu naravno da se prilagode različitim simbolima koje možemo koristiti za označavanje određenih delove linija koje su date u Euklidovim Elementima tačnije u II knjizi. Oni su, u najvećem delu, jednostavni identiteti, ali nema razloga da predpostavimo da je to bila samo primena geometrijske algebre koju su Euklid i njegovi prethodnici bili u stanju da naprave.

Međutim, treba imati u vidu da je ceo postupak II knjige geometrijski, pravougaonik i kvadrat su prikazani brojkama. Izgleda da je Heron prvi usvojio algebarski način demonstriranja predloga II knjige.

Neki engleski autori smatraju da je Euklid preferirao algebarski metod, ali to nije od koristi onima koji žele da sačuvaju osnovne odlike grčke geometrije, ovaj metod predstavljena njen najveći eksponent, ali bi trebalo da cenimo i njihove tačke gledišta.

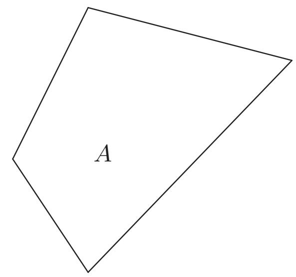
Druga knjiga smatra se najvažnijom knjigom Euklidovih elemenata, razloga je više. Gotova čitava planimetrija se u njoj nalazi nema nedoumica sve je detaljno i jasno obrazloženo, i danas je veoma praktična, iz nje se može sve iskoristiti osim gnomon-a koji se više ne koristi u matematici (ali je u potpunosti jasno definisan). Smatra se najboljom knjigom planimetrije ikada. Grci su smtrali da je Euklid napisao sve što je do tada (3. veka p.n.e.) bilo poznato iz planimetrije, na ovu knjigu mu nisu dali gotovo nikakvu zamerku, za razliku od stereometrije kojoj je posvetio dosta prostora (3 knjige), a nije sve tako dobro objasnio. Grci su se nadali da će buduća pokolenja napisati knjigu iz stereometrije koja će parirati Drugoj knjizi Euklidovih elemenat.

Udvostručenje kocke - jedan od tri Delska problema, nadu za rešenje dobilo je baš nastankom druge knjige Euklidovih elemenata, tačnije četrnaestim stavom ove knjige koji glasi:

Konstuisati kvadrat jednak datoj pravolinijskoj slici.

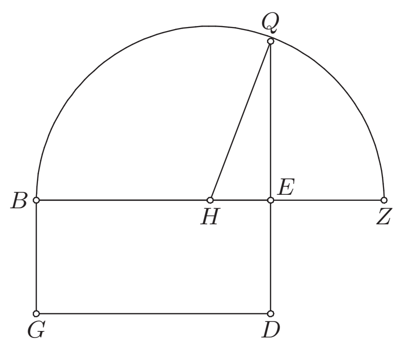
Ovim stavom je rečeno da uz pomoć šestara i lenjira možeš konstruisati kvadratnu površ jednaku datoj četvorougaonoj ili kakvoj drugoj poligonskoj površi.

Da bi dokazao ovaj stav Euklid uzima neku poligonsku površ A i kaže da treba konstruisati kvadrat koji će biti jednak baš toj poligonskoj površi A.



Slika 3.4: Poligonska površ A

Dokaz ćemo započeti konstrukcijom pravougaonika $BEDG$ koji je jed-



Slika 3.5: Pravougaonik $BEDG$

nak poligonskoj površi A [I.45][9]. Ako je BE jednako ED, zadatak je rešen, jer je konstruisan kvadrat $BEDG$ jednak poligonskoj površi A. Ako to nije slučaj, biće jedna od duži BE ili ED veća. Neka je veća duž BE, i neka se ona produži do Z tako da rastojanje EZ bude jednako ED. Zatim neka se prepolovi duž BZ tačkom H, treba nacrtati polukrug BQZ sa središtem u H i poluprečnikom HB (HZ), DE produži do Q i povuče HQ.

Duž BZ smo podelili tačkom H na jednake delove, a tačkom E na nejednake delove, biće pravougaonik $BEDG$ zajedno sa kvadratom nad EH jednak kvadratu nad HZ [II.5][10]. Znamo da su HZ i HQ jednake, prema tome je pravougaonik $BEDG$ zajedno sa kvadratom nad HE jednak kvadratu nad HQ. Ali kvadrat nad HQ je jednak kvadratima nad QE i nad

[9] 45. stav I knjige Euklidovih elemenata
[10] Peti stav II knjige Euklodovih Elemenata

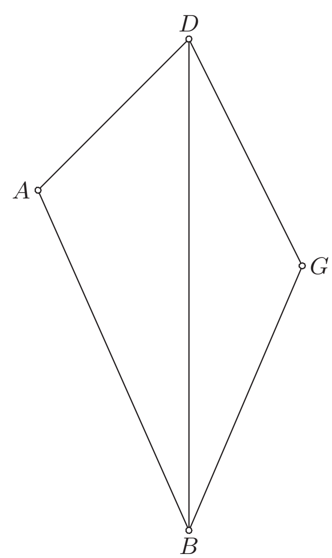
EH [I.47][11]. Prema tome je zbir pravougaonika $BEDG$ i kvadrata nad HE jednak zbiru kvadrata nad QE i nad EH. Neka se oduzme od jednog i drugog zbira, kvadrat nad HE. Na taj način biće pravougoanik $BEDG$ jednak kvadratu EQ, i pravougaonik obuhvaćen dužima BE i EZ jednak pravougaoniku $BEDG$. Prema tome biće paralelogram $BEDG$ jednak kvadratu nad QE. Kako paralelogram $BEDG$ jednak poligonskoj površi A biće i poligonska površ A jednaka kvadratu nacrtanom nad QE.

Na ovaj način je nad QE konstruisan kvadrat jednak poligonskoj površi A. A to je i trebalo izvesti.

Euklid je predhodno već dokazao stavove na koje se poziva:

Stav $I.45$ govori o uglu i pravolinijskoj slici. Tačnije u datom uglu (E) treba konstruisati paralelogram jednak datoj pravolinijskoj slici ($ABGD$).[12]

Da bi dokazali prethodni stav koristićemo pravolinijsku sliku $ABGD$



Slika 3.6: Slika a

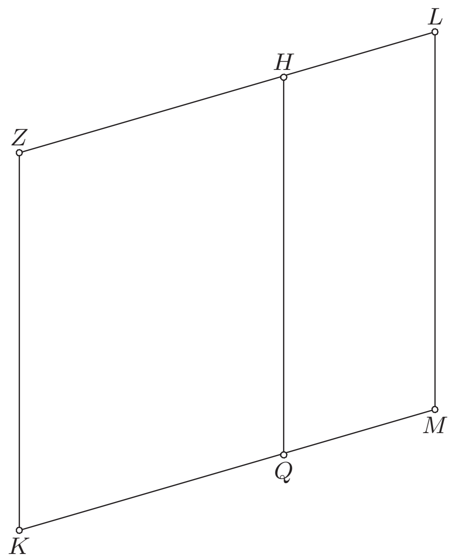
na slici a. Spojićemo tačke D i B zatim ćemo konstruisati ugao QKZ - slika c, koji je jednak uglu E prikazanom na slici b, paralelograma $ZHQK$ jednak trouglu ABD[13]; i dodamo ugao HQM, koji je takođe jednak uglu

[11] 47. stav I knjige Euklidovih Elemenata

[12] $I.45$ glasi: *U datom pravolinijskom uglu konstruisati paralelogram jednak datoj pravolinijskoj slici.*

[13] [I. 42, Euklidovih Elemenata]

Slika 3.7: Slika b



Slika 3.8: Slika c

E, na pravoj HQ paralelogram $HQML$ jednak trouglu DBG[14]. Pošto je ugao E jednak svakom od uglova QKZ, HQM, onda je ugao QKZ jednak uglu HQM[15]. Ako se svakom od ovih uglova doda ugao KQH, uglovi ZKQ, KQH biće jednaki uglovima KQH, HQM. Ali kako su uglovi ZKQ, KQH jednaki dvama pravim uglovima[16], to su i uglovi KQH, HQM jednaki dvama pravim uglovima. Pošto dve prave KQ, QM sa pravom HQ u tački Q, su sa iste strane ove prave, čine dva susedna ugla jednaka dvama pravim uglovima, to će KQ i QM ležati u istoj pravoj[17]. I pošto je QH transverzala za paralelne KM, ZH, to su unutrašnji naizmenični uglovi MQH, QHZ jednaki međusobno[18]. Ako se svakom od ovih doda ugao

[14] [I. 44, Euklidovih Elemenata]
[15] [A. 1, Euklidovih Elemenata]
[16] [I. 29, Euklidovih Elemenata]
[17] [I. 14, Euklidovih Elemenata]
[18] [I. 29, Euklidovih Elemenata]

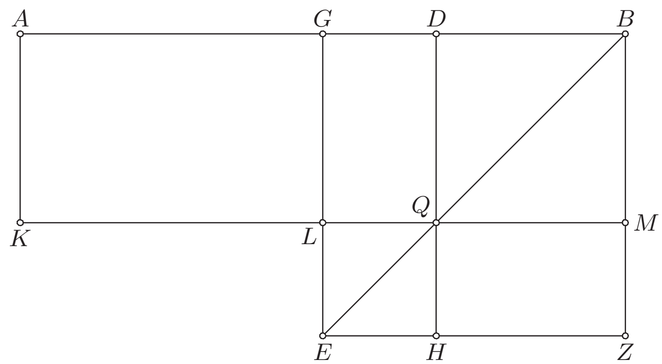
QHL, biće uglovi MQH, QHL jednaki uglovima QHZ, QHL[19]. Ali kako su uglovi MQH, QHL jednaki dvama pravim uglovima[20], to su i uglovi QHZ, QHL jednaki dvama pravim uglovima[21]; prema tome su i prave ZH i HL na istoj pravoj[22]. I pošto je ZK jednako i paralelno QH[23], a QH paralelno sa ML, to je i KZ jedanko i paraleleno ML[24]. Neka prave KM, ZL spajaju te prave, tada su KM, ZL jednake i paralelne[25], a $KZLM$ je paralelogram. I pošto je trougao ABD jednak paralelogramu $ZHQK$, a DBG paralelogramu $HLMQ$, to je cela pravolinijska slika $ABGD$ jednaka celom paralelogramu $KZLM$.

Na ovaj način je u pravolinijskom uglu ZKM, koji je jednak datom pravolinijskom uglu E, konstruisan paralelogram $KZLM$ jednak datoj pravolinijskoj slici $ABGD$. A to je trebalo izvesti.
Sledeći stav koji treba da dokazemo je stav $II.5$:

Neka se duž AB podeli na jednake delove tačkom G i na nejednake delove tačkom D. Tada je zbir pravougaonika $ADQK$ i kvadrata $LQHE$ jednak kvadratu $GBZE$.[26]

Nacrtajmo kvadrat $GBZE$[27] i povucimo: pravu BE, kroz tačku Q pravu DH paralelno ma kojoj od pravih GE ili BZ, kroz tačku Q, prava KM paralelno ma kojoj od pravih AB ili EZ i još kroz tačku A pravu AK paralelnu ma kojoj od pravih GL ili BM[28]. Pošto je dopuna $GDQL$ jednaka dopuni $QMZH$[29], biće, ako svakoj dodamo $DBMQ$, cela površina $GBML$ jednaka celoj površini $DBZH$. Pravougaonik $GBML$ jednak je pravougaoniku $AGLK$, jer je AG jednako GB[30], i na taj način pravougaonik $AGLK$ jednak je pravougaoniku $DBZH$. Ako svakom od njih dodamo pravougaonik $GDQL$, biće ceo pravougaonik $ADQK$ jednak gnomonu[31] MNX. Međutim pravougaonik $ADQK$ je obuhvaćen dužima AD i DB, jer je DQ jednako DB, pa prema tome je i gnomon MNX jednak pravougaoniku $ADQK$.

[19] [A. 2, Euklidovih Elemenata]
[20] [I. 29, Euklidovih Elemenata]
[21] [A. 1, Euklidovih Elemenata]
[22] [I. 14, Euklidovih Elemenata]
[23] [I. 34, Euklidovih Elemenata]
[24] [A. 1, I. 30, Euklidovih Elemenata]
[25] [I. 33, Euklidovih Elemenata]
[26] *Ako se data duž podeli dvema tačkama i na jednake i na nejednake delove, biće zbir pravougaonika obuhvaćena nejednakim delovima cele duži i kvadrata nad duži između deonih tačaka jednak kvadratu nad polovini duži.*
[27] [I.46, Euklidovih Elemenata]
[28] [I.31, Euklidovih Elemenata]
[29] [I.43, Euklidovih Elemenata]
[30] [I.36, Euklidovih Elemenata]
[31] Neka se u svakom paralelogramu ma koji od paralelograma na njegovoj dijagonali zajedno sa obema dopunama nazove gnomon.



Slika 3.9: II.5.

Svakoj od tih površina dodajmo površinu $LQHE$, koja je jednaka kvadratu nad GD. Na taj način, zbir gnomona MNX i kvadrata $LQHE$ jednak je zbiru pravougaonika $ADQK$ i kvadrata $LQHE$. Ali gnomon MNX i kvadrat $LQHE$ zajedno sačinjavaju kvadrat $GEZB$ nad GB. Na taj način zbir pravougaonika $ADQK$ i kvadrata $LQHE$ jednak je kvadratu $GBZE$.

Ovo je i trebalo dokazati.

Stav $I.47$ kaže:

Kvadrat nad hipotenuzom jednak je zbiru kvadrata nad katetama kod pravouglog trougla.[32]

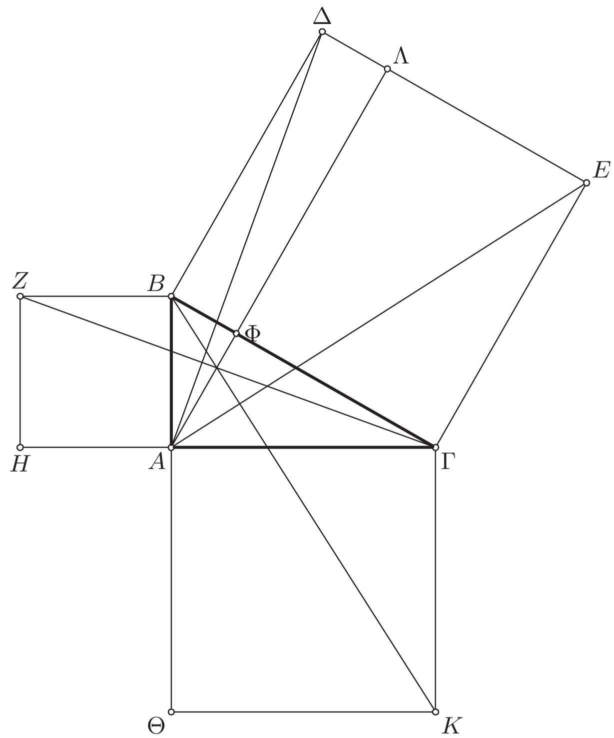
Neka je ABG pravougli trougao sa pravim uglom BAG. Treba pokazati da je kvadrat nad BG ($BGE\Delta$) jednak kvadratima nad BA ($BAHZ$) i AG ($AGK\Theta$).

Neka se nad BG konstruiše kvadrat $BGE\Delta$, a nad BA, AG kvadrati $BAHZ$, $AGK\Theta$[33], kroz tačku A povuče prava AL paralelna svakoj od pravih $B\Delta$, GE, a zatim povuku prave $A\Delta$, ZG. Pošto je svaki od uglova BAG, BAH prav, to prave AG, AH povučene nad pravom BA, kroz istu njenu tačku A, a sa raznih strana, čine susedne uglove jednake dvama pravim uglovima, pa su stoga prave GA i AH na istoj pravoj[34]. Iz istog razloga

[32] *Kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama).*

[33] [I. 46, Euklidovih Elemenata]

[34] [I. 14, Euklidovih Elemenata]



Slika 3.10: I.47.

su i prave BA i AQ na istoj pravoj. Ugao ΔBG jednak je uglu ZBA, jer je svaki od njih prav. A kad se doda svakom od njih ugao ABG, biće ceo ugao ΔBA jednak celom uglu ZBG[35]. Pošto je strana ΔB jednaka strani BG, a ZB strani BA, to su dve strane ΔB, BA jednake stranama ZB, BG, i to odgovarajućim, i ugao ΔBA jednak uglu ZBG, a tada je i osnovica $A\Delta$ jednaka osnovici ZG, i trougao $AB\Delta$ jednak trouglu ZBG[36]. A paralelogram $BFL\Delta$ je dvaputa veći od trougla ABL, jer imaju istu osnovicu BD i između istih su paralelnih BD, AL[37]. I kvadrat $BAHZ$ je dvaputa veći od trougla ZBG, jer i oni imaju istu osnovicu ZB i između istih su paralela ZB, HG[38]. Prema tome je paralelogram $BFL\Delta$ jednak kvadratu $BAHZ$. Na sličan način se, pomoću povučenih pravih AE, BK, može dokazati da je paralelogram $GKLF$ jednak kvadratu ΘAGK. Prema tome je ceo kvadrat $BGE\Delta$ jednak dvama kvadratima $BAHZ$, $AGK\Theta$[39]. A kvadrat $BGE\Delta$ je konstruisan nad BG, a kvadrati $BAHZ$, $AGK\Theta$ nad BA, AG. Prema tome

[35] [A. 2, Euklidovih Elemenata]
[36] [I.4, Euklidovih Elemenata]
[37] [I.41, Euklidovih Elemenata]
[38] [I. 41, Euklidovih Elemenata]
[39] [A. 2, Euklidovih Elemenata]

je kvadrat nad BG jednak kvadratima nad BA, AG.

Dakle, kod pravouglih trouglova je kvadrat na strani spram pravog ugla (na hipotenuzi) jednak kvadratima na stranama koje obrazuju prav ugao (na katetama). A to je trebalo dokazati.

Četrnaesti stav II knjige je veom često komentarisan pa tako:

Heiberg navodi, Aristotelovu primedbu da se "kvadratura"bolje definiše kao *"pronalaženje srednje vrednosti (proporcionale)"* nego kao *"pravljenje jednakostraničnog pravougaonika koji je jednak datom duguljastom"*, jer prva definicija daje uzrok, a druga zaključak. Ovo, Heiberg misli, znači da je u udžbenicima koji su bili dostupni Aristotlu, problem $II.14$ rešen putem razmere. U stvari, prava konstrukcija je ista u $II.14$ kao i u $VI.13$, a promene koje je Euklid morao razgraničiti zamenom, u dokazu o ispravnosti konstrukcije zasnovan je na principima I i II knjige umesto knjiga VI.

$I.47$, $II.14$ kompletira teoriju transformacije u onoj meri u kojoj može da se izvrši bez upotrebe razmere. Paralelogram se takođe može transformisati u jednak trougao sa istim stranama i datim uglom praveći dva puta veći ugao sa druge strane. Dalje, nam $I.47$ omogućava da kvadrat bude jednak zbiru kvadrata bilo kojih brojeva ili razlike između bilo koja dva kvadrata. Problem i dalje ostaje nerešen trebalo bi transformisati pravougaonik (predstaviti oblast jednaku bilo kakvoj pravolinijski slici - poligonskoj površi) u kvadrat jednake površine. Rešenje ovog problema, dato je u $II.14$, i ekvivalentno je vađenje kvadratnog korena, ili rešavanju čiste kvadratne jednačine:

$$x^2 = ab$$

Simson[40] je rekao da je u konstrukciji Euklid nešto naglasio, a to nije bilo neophodno: *"Neka bude veća"*, jer na konstrukciju ne utiče pitanje da li je BE ili ED veća. To je tačno, ali posle svih reči nanesena je mala šteta, a možda je Euklid smatrao pogodnim zbog jasnoće da se tačke B, G, E i F u istoj relativnoj poziciji kao i odgovarajuće tačke A, C, D, B na slici $II.5$ koji se citira u ovom dokazu.[41]

$II.14$ je stav kojim su Grci mislili da će doći do UDVOSTRUČENJA KOCKE, jer kako se do rešenja može doći u ravni, onda se tako sigurno može doći i u prostoru. Tačnije ako znamo da je $ab = x^2$ (površina pravougaonika jednaka

[40]Robert Simson (14. oktobar 1687. - 1. oktobar 1768.) bio škotski matematičar i profesor matematike na Univerzitetu u Glazgovu. Šimsonova linijađobila je ime po ovom matematičaru.

[41]The Thirteen Books of Euklid's Elements - Vol I 418 - 419

površini kvadrata, tada sigurno postoji da je zapremina kvadra jednaka zapremini kocke, $abc = x^3$, naravno uz pomoć lenjira i šestara.

Jedan od ljudi koji je to pokušao da dokaže još pre Euklida bio je Hipokrat sa Hiosa. Naime on je prvi primetio da se problem dupliranja kocke može svesti na problem nalaženja dve glavne proporcionale u kontinualnoj proporciji između dve prave linije, tj. "ako su a i b zadate duži, dovoljno je naći duži x i y, njihove dve *srednje proporcionale*, takve da je

$$a : x = x : y = y : b$$

da bi se rešio problem udvostručenja kocke.

Zaista, ako su x i y srednje linije proporcionale za a i b, tada je

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b},$$

pa, ako je a ivica kocke i ako je zadat odnos $a : b$, tada će i odnos zapremina kocki kojima su ivice a i x biti jednake zadatom odnosu. Na isti način:

$$\frac{y^3}{b^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b},$$

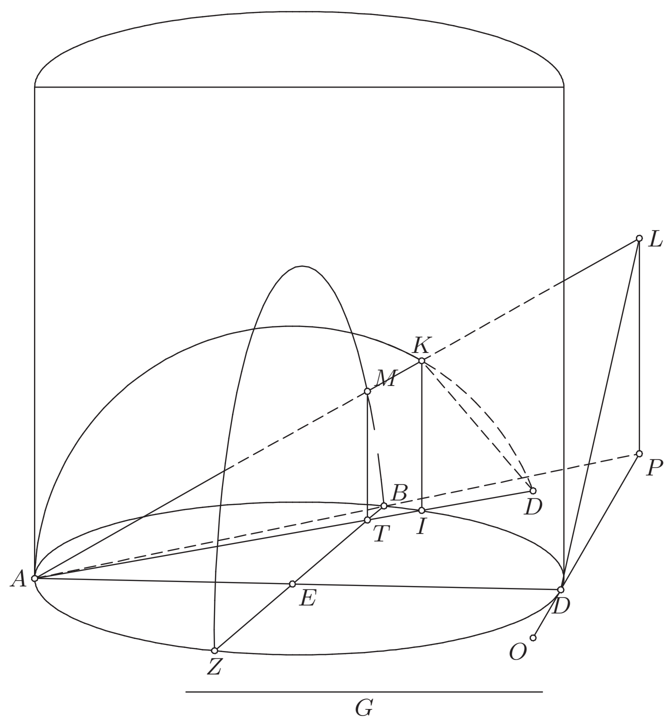
pa je odnos zapremina kocki kojima su ivice y i b jednake zadatom odnosu $a : b$. U posebnom slučaju kada je duž a dvostruko veća od b, zapremina kocke čija je ivica x biće dvostruko manja od zapremine kocke sa zadatom ivicom b"[42] To će kasnije inspirisati Arhitu koji će nam ponuditi jako interesantna rešenja problema udvostručenja kocke.

[42]Z. Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, str. 236,237

3.2 Arhitino rešenje

Arhitino rešenje je najizvanrednije od svih, posebno kada se razmotri vreme u kom je nastalo (prva polovina četvrtog veka p.n.e.), zato jer to nije konstrukcija u ravni, već smela konstrukcija u tri dimenzije, kojom se određuju konkretne tačke, kao što je presek tri revolucionarne površi pravilne kupe, cilindra i torusa. Presek poslednje dve površi daje po Arhiti konkretnu krivu, a potrebne tačke se nalaze u preseku konusa i ove krive. Pretpostavimo da su AD i G dve prave linije između kojih dve srednje proporcionale leže. Opišimo oko AD krug $ABDZ$ i nacrtajmo tetivu $AB = G$. Produžimo AB, i neka u tački P seče tangentu kruga koja prolazi kroz tačku D. Neka se povuče paralela BEZ liniji PDO, i neka se zamisli polucilindar upravan na polukrug ABD, a nad AD vertikalni polukrug u ravni pravougaonika tog polucilindra. Ako se ovaj polukrug zavrti oko D prema tački B, tako da A miruje kao kraj prečnika, seći će površ polucilindra i opisaće na njemu neku liniju. Ako se opet trougao APD, dok miruje AD, zavrti u suprotnom smeru od polukruga, opisaće prava AP površ konusa koji će u kruženju preseći liniju na cilindru u nekoj tački. Ujedno će i tačka B opisati polukrug na površi konusa. Sada neka položaj u kretanju polukruga bude $D'KA$ kada se ove dve linije seku, a položaj trougla koji se kreće u suprotnom smeru neka bude DLA, a tačka pomenutog preseka neka bude K. Sad neka BMZ bude polukrug koji opisuje tačka B, a zajednička tetiva tog polukruga i kruga $BDZA$ neka bude BZ. Od tačke K neka se povuče upravna na ravan polukruga BDA. Ona pada na obod kruga jer je cilindar prav. Neka ona bude KI, a prava koja povezuje I i A neka seče pravu BZ u T, a prava AL neka seče polukrug BMZ u tački M. Neka se spoje K i D', M i I, M i T. Kako je svaki od dvaju polukrugova $D'KA$ i BMZ upravan na osnovnoj ravni, njihova zajednička tetiva MT je upravna na ravni kruga, zato je i MT upravna na BZ.

Dakle, pravougaonik nad TB i TZ, i nad TA i TI, jednak je kvadratu nad MT. Stoga je trougao AMI sličan svakom od trouglova MIT i MAT, a zato je ugao IMA prav. Ali i ugao $D'KA$ je prav. Paralelne su dakle prave KD' i MI i, zbog sličnosti trouglova, kao što se odnose $D'A$ prema AK, odnosno KA prema AI, tako se i AI odnosi prema AM. Dakle, četiri duži $D'A$, AK, AI i AM su neprekidno proporcionalne. Duž AM jednaka je duži G, zato što je jednaka i duži AB. Dakle, dvema zadatim dužima AD i G nadene su dve srednje proporcionale AK i AI.



Slika 3.11: Arhitino rešenje

Glava 4

Hipokratovi mesečci

Deo odlomka koji je Edamus napisao o Hipokratu. "Kvadraturu meseca, koja po našem shvatanju spada u neobičnu vrstu problema zbog tesnog odnosa kruga i meseca, prvi je istražio Hipokrat i mislilo se da je njegov iskaz tačan. Počeo je i postavio ga kao prvu od teorema korisnih u te svrhe, s tvrdnjom da se površine sličnih kružnih odsečaka odnose kao površina kvadrata nad njegovim tetivama. Najpre je dokazao da se površine krugova odnose kao površine kvadrata na njegovim prečnicima."[1]

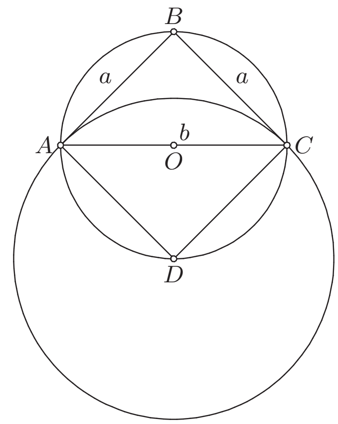
Pre nego nastavimo citat treba spomenuti da je Hipokrat pod "kvadraturom mesečka"mislio na konstrukciju kvadrata površine jednake površini mesečka. To znači isto što i kvadratura kruga, odnosno problem konstrukcije kvadrata površine jednake površini kruga.

"Nakon što je to dokazano, nastavio je pokazivati na koji način je moguće odrediti površinu meseca koga čine dva kruga različitih obima. To je postigao tako što je opisao polukrug oko jednakokrakog pravouglog trougla i odsečak kruga nad hipotenuzom tog trougla sa središtem u vrhu D kvadrata $ABCD$ (Slika 4.1).

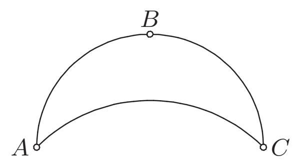
Tada, pošto je odsečak iznad baze jednak zbiru onih iznad krak, sledi da deo trougla iznad odsečka oko baze dodamo dvema sličnim, površina meseca jednaka je površini trougla. Onda mesec, pošto smo dokazali da mu je površina jednaka površini trougla, možemo odrediti njegovu kvadraturu."[2]

Da bismo razumeli Hipokratove argumente pogledajmo sliku na kojoj je $ABCD$ kvadrata sa središtem O. Dva kruga na slici su krug sa središtem u tački O kroz A, B, C i D, i krug sa središtem D kroz A i C. Uočimo

[1] Preuzeto sa: $http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/\ history/Biographies/Hippocrates.htm$
[2] Preuzeto sa: $http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/\ history/Biographies/Hippocrates.htm$



Slika 4.1: Jednakokraki pravougli trougao



Slika 4.2: Mesečak

najpre da je područje označeno sa a iznad $\overline{AB}$ deo kružnog isečka kojem pripada prav ugao kod središta O ($\measuredangle AOB$)dok je područje označeno sa b nad $\overline{AC}$ takođe deo kružnog isečka kojem pripada prav ugao kod središta D ($\measuredangle ADC$). Zato su odsečci a i b slični. Sada je

$$\frac{površina\ a}{površina\ b} = \frac{|AB|^2}{|AC|^2} = \frac{1}{2},$$

kako je $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$ prema Pitagorinoj teoremi i $|AB| = |BC|$, sledi $|AC|^2 = 2|AB|^2$. Vidimo, da je površina odsečka b dva puta veća od površine odsečka a, površina odsečka b jednaka je zbiru površina odsečaka označenih sa a. Tada je Hipokrat pokazao da kod polukruga oduzmemo dva odsečka a dobijamo trougao ABC za koji možemo konstruisati kvadrat jednake površine. Ali, ako oduzmemo odsečak b od polukruga ABC dobijemo mesec prikazan na drugoj slici. Tako je Hipokrat dokazao da možemo konstuisati kvadrat površine jednake površini meseca.

4.1 Primeri

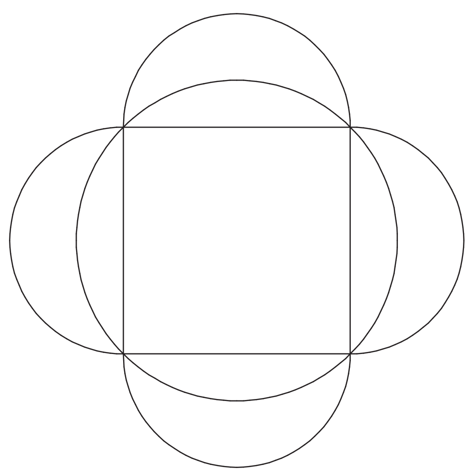
Sledeći primer je primena Hipokratove prve kvadrature mesečka koga srećemo u udžbenicima.

Primer 1. Kvadratu dodamo spolja četiri polukruga nad stranicama i od dobijenog lika izrežimo kvadratu opisan krug. Pokažite da je površina ostatka jednaka površini prvobitnog kvadrata.

Rešenje:

$P_{kvadrata} = a^2$
$P_{4polukruga} = 2(\frac{a^2}{4})\pi$
$P_{kruga} = \frac{a^2}{2}\pi$

$$P_{ostatka} = P_{kvadrata} + P_{4polukruga} - P_{kruga} = a^2 + \frac{a^2}{2}\pi - \frac{a^2}{2}\pi$$



Slika 4.3: Primer 1.

Malo uopštenje Hipokratovog problema je zadatak koji oko 1000. godine postavio i rešio Hasan Ibn al Haitam (Ibn al-Haytham). Zanimljivo je da ga je oko 5 vekova kasnije, verovatno samostalno, rešio Leonardo da Vinci. Naime, među njegovim rukopisima pronađene su brojne skice na tu temu.[3]

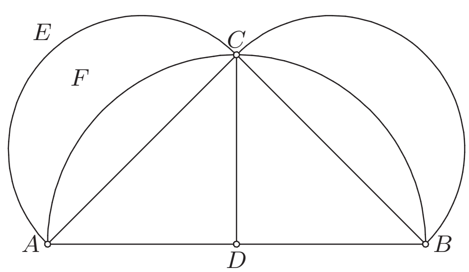
[3] $http://en.wikipedia.org/wiki/SimpliciusofCilicia$

Primer 2. Nad katetama pravouglog trougla konstruišemo polukrugove i od tog lika izrežemo polukrug nad hipotenuzom. Dokažimo da je površina tog lika jednaka površini početnog pravouglog trougla.

I ovu sliku često viđamo u udžbenicima i zbirkama. Hipokratova kvadratura mesečka je očito poseban slučaj primera 2, kada je pravougli trougao jednakokraki.

Prvi podaci o tome kako se Hipokrat bavio problemom kvadrature kruga dolaze od Aleksandra iz Afrodizija. On, naime, govori o tome da je Hipokrat najpre posmatrao **jednakokraki trougao** i mesece sastavljene od polukruga opisanog oko trougla i polukrugova opisanih nad kracima (slika 4.4). Hipokrat, po navodima Aleksandra, zaključuje da je suma površina ova dva meseca jednaka površini trougla. Naime, pod pretpostavkom da je AB prečnik kruga, D njegov centar, a AC i CB stranice u isti krug upisanog kvadrata, možemo opisati polukrug AEC nad stranicom AC kao prečnikom.

Kako je $AB^2 = 2AC^2$ i kako su krugovi (a stoga i polukrugovi) u is-



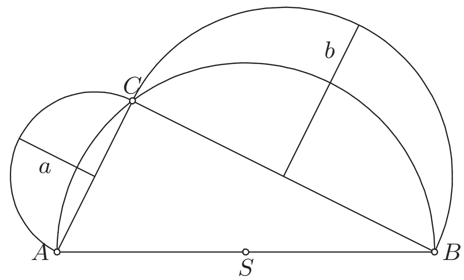
Slika 4.4: Primer 2.(jednakokraki trougao)

tom odnosu kao i njihovi prečnici, imaćemo
$(polukrug\ ACB) = 2(polukrugAEC)$, ali i $(polukrug\ ACB) = 2(kružni\ isečak\ ADC)$.
Sledi da je $(polukrug\ AEC) = (kružni\ isecak\ ADC)$.
Odavde dobijamo $(mesec\ AECF) = \triangle ADC$.

Neka su a, b i c stranice pravouglog trougla ABC koji **nije jednakokraki**.
Možemo pokazati da je:

$$P_a + P_b = P_{\triangle ABC},$$

$$P_a = P_{polukruga\ a} - (P_{(\pi-2\alpha)-kružnog\ isečka} - P_{\triangle SAC}),$$



Slika 4.5: Primer 2.(nije jednakokraki trougao)

$P_b = P_{polukruga\ b} - (P_{2\alpha-kru\check{z}nog\ ise\check{c}ka} - P_{\triangle SCB}),$

$$P_a + P_b = \frac{1}{2}(\frac{b}{2})^2\pi - \frac{1}{2}(\frac{c}{2})^2(\pi - 2\alpha) + \frac{ab}{4} + \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^2\pi - \frac{1}{2}(\frac{c}{2})^2 \cdot 2\alpha + \frac{ab}{4}$$
$$= \frac{a^2 + b^2 - c^2}{8}\pi + \frac{ab}{2}.$$

Ali, kako je trougao ABC pravougli možemo primeniti Pitagorinu teoremu prema kojoj je $a^2 + b^2 = c^2$ odnosno

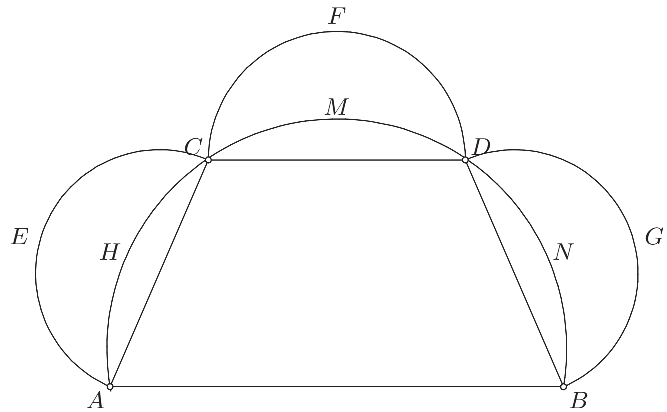
$$P_a + P_b = \frac{ab}{2} = P_{\triangle ABC}.$$

Hipokrat je otišao i dalje u istraživanjima takvih mesečaka. Dokaz koji smo prikazali je slučaj gde je spoljašnja ivica meseca luk polukruga. Hipokrat je proučavao i slučajeve gde je spoljašnja ivica manja od luka polukruga i slučajeve gde je spoljna ivica veća od luka polukruga i pokazaćemo da u svakom slučaju možemo odrediti kvadraturu meseca. Ova dva njegova rezultata su zaboravljena, a u 18. veku su ponovo otkrivene i tek je kasnije ustanovljeno da ih je već Hipokrat dokazao.

Posmatramo **jednakokraki trapez** kojeg čine prečnik kruga, recimo AB, i tri susedne ivice BD, DC, AC, u taj krug upisanog, pravilnog šestougla (slika 4.6).

Uočavajući mesečke sačinjene od polukrugova nad stranama šestougla i polukruga opisanog oko trapeza, on dokazuje da je suma površine polukruga nad jednom stranom šestougla i površine tri meseca jednaka površini trapeza.

Jer, kako je $AB^2 = 4AC^2 = AC^2 + AC^2 + CD^2 + DB^2$



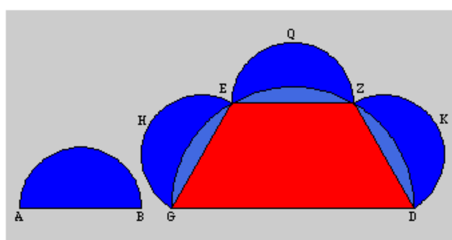
Slika 4.6: Primer 2.(jednakokraki trapez)

A krugovi su u istom odnosu kao i kvadrati njihovih prečnika, dobijamo da je

$(polukrug\ ACDB) = 4(polukrug\ AEC) = (sumapolukrugovaAEC, AEC, CFD, DGB)$

te je $(trapezABCD) = (sumatrimeseca) + (polukrugAEC)$

Zbog toga, zaključuje on, ukoliko bi bilo moguće kvadrirati tri lunule, bilo

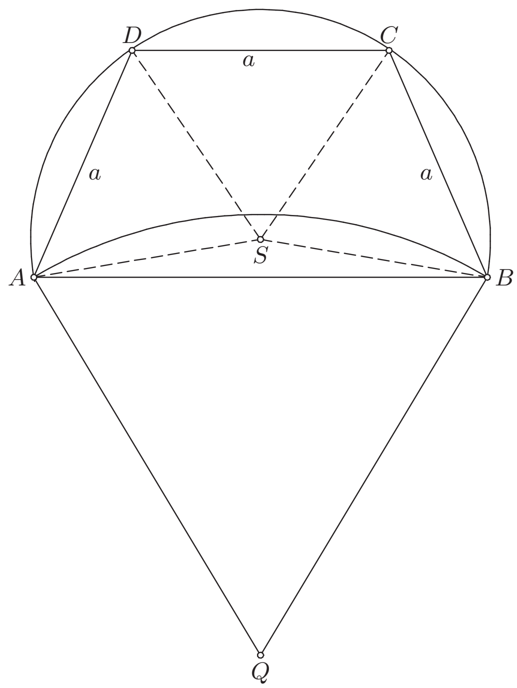


Slika 4.7: Jednakokraki trapez i njegovi meseci

bi moguće kvadrirati i polukrug, a time i krug. Ovo je bila Hipokratova ideja vodilja koja ga je usmerila ka izučavanju kvadriranja mesečka ograničenih lukovima krugova.

Kod drugog Hipokratovog meseca je **središnji ugao spoljašnjeg luka veći od** $180°$. Do njegove konstrukcije dolazim sledećim postupkom:

Prvo nacrtamo jednokraki trapez $ABCD$ za koji je $|AB|$=$\sqrt{3}$ i $|BC| = |CD| = |DA| = 1$, gde su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ osnovice, a $\overline{BC}$ i $\overline{AD}$ njegovi krakovi.



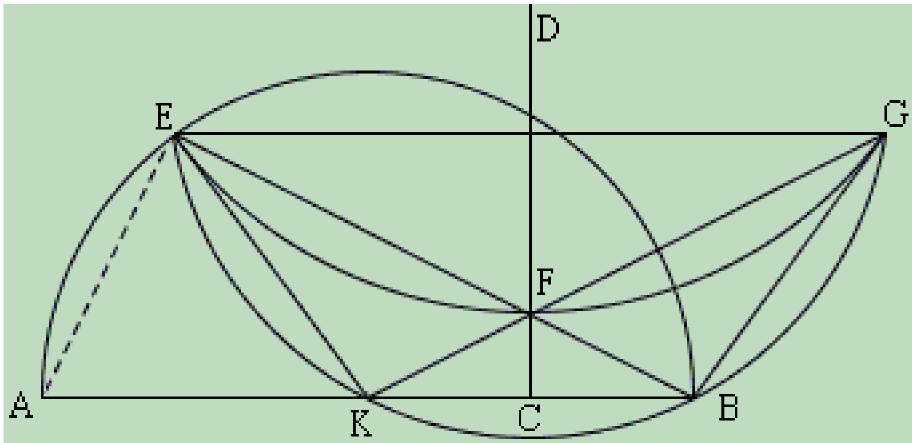
Slika 4.8: Primer 2.(jednakokraki trapez, spoljašnji ugao veći od 180^o)

Opišimo trapezu $ABCD$ kružnicu sa središtem S. Tako dobijemo spoljašnji luk $ABCD$ meseca.

Neka je trougao ABQ sličan trouglu DCS, pri čemu je središte sličnosti presek prava AD i BC. Iz ovog odnosa dužina stranica $\overline{AB}$ i $\overline{BC}$ sledi da je površina luka iznad tetive $\overline{AB}$ jednaka trostrukoj vrednosti površine luka iznad tetive $\overline{CD}$. Dakle, unija odsečaka iznad tetiva $\overline{AD}$, $\overline{DC}$, $\overline{BC}$ ima površinu jednaku površini kružnog odsečka iznad tetive $\overline{AB}$ (vidi sliku 4.8). Ukoliko primenimo Hipokratovu ideju iz prvog slučaja vidimo da je površina trapeza $ABCD$ jednaka površini meseca.

Treća Hipokratova konstrukcija kod koje je **spoljašnji luk meseca manji od** $180°$, malo je komplikovanija. Nacrtajmo polukrug nad prečnikom $\overline{AB}$. Tačka K je njeno središte, a prava CD je simetrala duži $\overline{KB}$. Zatim povucimo iz tačke B tetivu koja seče simetralu CD u tački F i polukrug u tački E, pri čemu je $|FE|^2 = \frac{3}{2}|EK|^2$ (vidi sliku 4.9).

Konstrukcija toga je problem povezan sa geometrijskim rešavanjem kvadratne jednačine. Ako je $|KB|=$ a i $|BF|=$ x, zbog sličnosti trouglova EKB



Slika 4.9: Primer 2.(jednakokraki trapez, spoljašnji ugao manji od 180^o)

i KFB sledi

$$|BE| \cdot |BF| = |KB|^2,$$

odkale je

$$(x + \sqrt{\frac{3}{2}}a)x = a^2,$$

odnosno

$$x^2 + \sqrt{\frac{3}{2}}ax - a^2 = 0.$$

Ako znamo x, lako konstruišemo tačku F i zatim tačku E. Kao što je već bilo rečeno, Hipokrat je znao rešavati takve kvadratne jednačine. Tačka G je osnosimetrična slika tačke E u odnosu na simetralu CD. Dobijenom jednokrakom trapezu opišimo kružnicu, pa opišimo kružni luk GFE tako da dobijemo mesec $KBGFE$.

U ovom slučaju Hipokrat je pokazao da je površina dobijenog meseca jednaka površini petougla $KBGFE$. Neka je u trapezu $KBGE$ tačka F presek dijagonala, sledi da je

$$|KB| = |BG| = |EK| = a$$

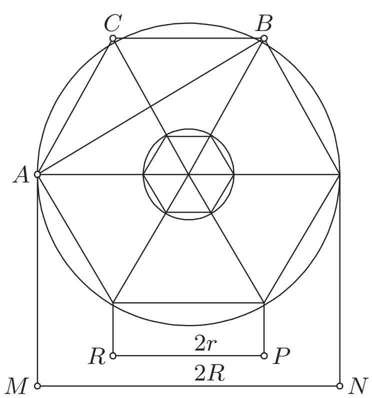
i

$$|FE| = |GF| = a\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Neka je S središte kružnice opisane oko trapeza $KBGE$, a Q centar kružnice opisane oko trougla EFG. Trouglovi BSK i GQF su slični. Prema navedenoj tvrdnji, površina dela nad $\overline{FG}$ jednaka površini $\sqrt{\frac{3}{2}}$ dela nad $\overline{KB}$. Prema tome unija delova ispod tetiva $\overline{FE}$ i $\overline{FG}$ ima istu površinu kao unija delova ispod tetiva $\overline{EK}$, $\overline{KB}$ i $\overline{BG}$. Ovim je tvrdnja dokazana.

Osim ovih osnovnih primera kvadrature meseca, Hipokrat je uspeo da napravi kvadraturu jednog meseca i kruga zajedno. Ako nacrtamo koncentrične krugove s poluprečnicima r i R, takve da je $R^2 = 6r^2$ i u svakom od njih upišemo pravilan šestougao, pa iznad kraće dijagonale većeg napravimo luk sličan onome nad svakom stranicom, lako se pokaže da je površina unije meseca i manjeg kruga jednaka površini unije trougla ABC i manjeg šestougla.

Zanimljivo je da se neko vreme verovatno baš radi ovog Hipokratovog



Slika 4.10: Kvadratura jednog meseca i kruga zajedno

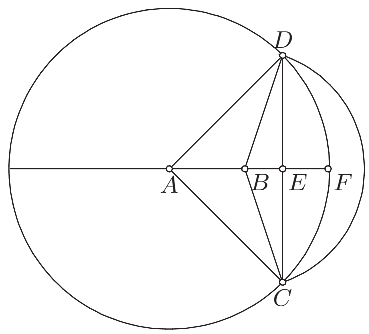
otkrića mislilo da je rešenje problema kvadrature, ako se zna kvadrirati mesec pa još jednan mesec i krug, zna kvadrirati i bilo koji krug! Pri tom nisu predvideli da se kod oba rešenja ne radi o istom mesecu.

Priča o Hipokratovim mesecima nije završena u antici, niti u srednjem veku ili renesansi već tek u 20. veku. Da bi ukratko opisali šta se dalje na ovom području dešavalo moramo dati problemu kvadrature meseca trigonometrijski oblik.

4.2 Jednačina meseca

Kako je konstrukcija kvadrature meseca postala dosta kompleksna, zapitali smo se da li postoji neko njeno uopštenje.

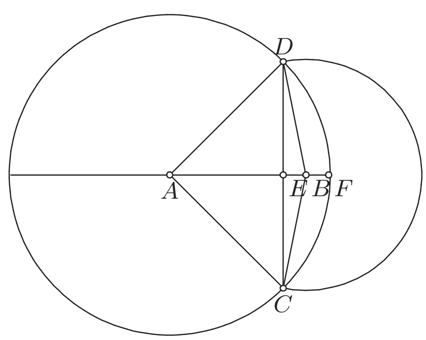
Ako je mesec konkavan lik dobijen presecanjem krugova sa centrima u A i



Slika 4.11: $\measuredangle CBF$ je manji od $\frac{\pi}{2}$

B, u preseku krugova su tačke C i D. Tačka E se dobija presecanjem prava AB i CD. Centri A i B su sa iste strane u odnosu na tačku E ($\measuredangle CBF = \beta$ manji je od $\frac{\pi}{2}$ - slika 4.11) ili E je između A i B ($\measuredangle CBF = \beta$ je veći od $\frac{\pi}{2}$ - slika 4.12).

Ako kažemo da su 2α i 2β mere uglova $\measuredangle CAD$ i $\measuredangle CBD$ i r_α i r_β od-



Slika 4.12: $\measuredangle CBF$ je veći od $\frac{\pi}{2}$

govarajući polupre\u010dnici krugova, sledi da su prostori meseca različiti zbog dva različita segmenta u odnosu na CD. Prostor meseca je

$$\beta \cdot r_\beta^2 \mp cos\beta sin\beta \cdot r_\beta^2 - (\alpha \cdot r_\alpha^2 - cos\alpha sin\alpha \cdot r_\alpha^2)$$

sa minus i plus u zavisnosti od toga da li su A i B sa iste ili različite strane u odnosu na E.

Dva gore konstruisana sektora ACD i BCD su jednaki u prostoru. Ako pojednostavimo predpostavku da su dva sektora jednaka u prostoru, tada je

$$\alpha \cdot r_\alpha^2 = \beta \cdot r_\beta^2$$

onda se oblast meseca svodi na

$$cos\alpha sin\alpha \cdot r_\alpha^2 \mp cos\beta sin\beta \cdot r_\beta^2$$

što u oba slučaja znači da je jednak površini četvorougla $ABCD$.

Ako je $\beta = m \cdot \alpha$ za neko $m \in R$, tada pojednostavljenjem

$$\alpha \cdot r_\alpha^2 = \beta \cdot r_\beta^2$$

dobijamo

$$r_\beta^2 m\alpha = r_\alpha^2 \alpha$$

ili

$$\sqrt{m} = \frac{r_\alpha}{r_\beta}.$$

Takođe uočavam da polovina duži CD, je zajednička osnova za oba kružna segmenta, objedinjuje α i β, r_α i r_β; pa je $CE = r_\alpha sin\alpha = r_\beta sin\beta$, zamenom $m \cdot \alpha$ umesto β i $\sqrt{m}$ umesto $\frac{r_\alpha}{r_\beta}$ u jednačinu dobijamo

$$\sqrt{m} sin\alpha = sin(m\alpha)$$

Ako možemo da rešimo ovu jednačinu za $sin\alpha$, tj. ako je $sin\alpha$ konstruktibilan (tada se $sin\alpha$ može izraziti samo pomoću četiri aritmetičke operacije plus kvadratni koren), onda sledi da je $\alpha \cdot r_\alpha^2 = \beta r_\beta^2$, a samim tim i odgovarajući mesec je jednak površini četvorougla $ABCD$.

4.3 Konstrukcija meseca

Neka je predpostavka da je jednačina $\sqrt{m} sin\alpha = sin(m\alpha)$ konstruktibilna za $m > 1$, tj. da je $sin\alpha$ konstruktibilan.

Za konstrukciju meseca potrebno je sledeće:

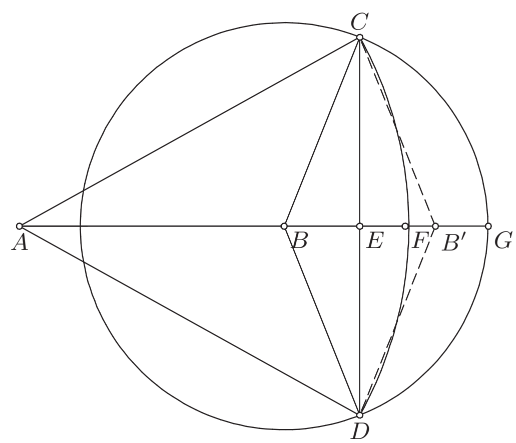
Počinjemo sa linijom l i konstruktabilnom dužinom $sin\alpha$

1. Konstruišem $CE = sin\alpha = DE$ normalan na pravu l u tački E.

2. Konstruišem $AE = 1 = AD$, tačka A se nalazi na pravoj l. Tako da je α mera ugla $\measuredangle CAE = \measuredangle DAE$.

3. Konstruišem krug sa centrom u A i poluprečnikom $AC = AD$.

4. Konstruišem $CB = \frac{1}{\sqrt{m}} = DB$[4] imajući u vidu da postojie dve mogućnosti



Slika 4.13: Konstrukcija meseca

za β i β'. Neka β bude mera ugla $\measuredangle CBE = \measuredangle DBE$ (oštar ugao) i β' mera ugla $\measuredangle CB'G = \measuredangle DB'G$(tup ugao). Posmatram $\beta' = \pi - \beta$.

5. Konstruišem ugao sa centrom u B (ili B') sa poluprečnikom $CB = DB$ (ili $CB' = DB'$)

6. Kako je $sin\beta = \frac{sin\alpha}{\frac{1}{\sqrt{m}}}$, onda je $sin\beta = \sqrt{m}sin\alpha = sin(m\alpha)$. Isto važi i za β', tj. $\beta = m\alpha$ ili $\beta' = m\alpha$.

7. Bez gubitka uopštenja, neka je $m \cdot \alpha = \beta$. Tada sledi da je $\measuredangle CAD$ (centralni ugao 2α, poluprečnik 1) i oblast $\measuredangle CBD$ (centralni ugao 2β, poluprečnik $\frac{1}{\sqrt{m}}$) su jednaki u prostoru. Nakon brisanja zajedničke oblasti, $CFDB$, prostor meseca $CGDF$ preostalog iz sektora CBD jednak je

[4] Kako je $\sqrt{m}sin\alpha = sin(m\alpha \leq 1)$ sledi da je $sin\alpha \leq \frac{1}{\sqrt{m}}$

površini četvorougla $ACBD$ preostalog iz sektora CAD.[5]

4.4 Ostale kvadrature meseca

Ispostavilo se da postoji samo pet vrednosti m za koje je jednačina $\sqrt{m} sin\alpha = sin(m\alpha)$ konstruktabilna. Prve tri vrednosti su $m = 2$, $m = 3$ i $m = \frac{3}{2}$, daju redom jednakokraki trougao, jednakokraki trapez, i konkavan petaugaonik, oni su nam već poznati iz dosadašnjeg teksta, tačnije smatra se da ih je pronašao Hipokrat.

Mali podsetnik:

Za $m = 2$ dobijamo jednačinu $\sqrt{2} sin\alpha = sin(2\alpha) = 2sin\alpha cos\alpha$ čije rešenje je $cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ili $sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Prema tome $sin\alpha$ je konstruktabilan za $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ili $\beta = \frac{\pi}{4}$. Ovo je jednakokraki pravougli mesec.

Za $m = 3$ jednačina glasi $sin(3\alpha) = \sqrt{3} sin\alpha$. Koristeći poznate formule za sumu i dvostruki ugao, dobijam

$$sin\alpha \cdot cos(2\alpha) + sin(2\alpha)cos\alpha = \sqrt{3} sin\alpha$$

$$sin\alpha(cos^2\alpha - sin^2\alpha) + 2sin\alpha cos^2\alpha = \sqrt{3} sin\alpha$$

$$4sin^2\alpha - 3 + \sqrt{3} = 0$$

za koje sam dobila rešenje

$$sin\alpha = \frac{\sqrt{3 - \sqrt{3}}}{2}$$

, tj. vrednost koju je lako konstruisati. Imajte na umu $\alpha \approx 0,5980$ radiana ili 34.26^o, $\beta \approx 1,79409$ radijana ili 102.79^o. Dobija se da je $\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \sqrt{3}$. Ovo je jednakokraki trapez meseca.

Za $m = \frac{3}{2}$ jednačina glasi $sin(\frac{3}{2} \cdot \alpha) = \sqrt{\frac{3}{2}} sin\alpha$ koristeći zamenu $t = \frac{\alpha}{2}$ dobijam jednačinu $sin(3t) = \sqrt{\frac{3}{2}} sin(2t)$ koja se može zapisati $sint = \frac{\sqrt{6} \pm \sqrt{22}}{8} = \frac{\sqrt{7 \pm \sqrt{33}}}{4}$ i $sint = \frac{\sqrt{9 \mp \sqrt{33}}}{4}$.kako je $\alpha = 2t$, $sin\alpha = sin(2t) = 2sintcost = 2\frac{\sqrt{9 \mp \sqrt{33}}}{4} \cdot \frac{\sqrt{7 \pm \sqrt{33}}}{4} = \frac{\sqrt{30 \pm 2\sqrt{33}}}{8}$. Samo $sin\alpha = \frac{\sqrt{30 + 2\sqrt{33}}}{8}$ je rešenje koje zadovoljava jednačinu. Tako $\alpha \approx 0,9359$ radiana ili 53.62^o i $\beta \approx 1,4039$

[5] $http://www3.wittenberg.edu/bshelburne/TheFiveLunes120408.pdf$

radiana ili 80.44^o i $\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Ovo je konkavan petougaoni mesec.

A druga dva slučaja su $m = 5$ i $m = \frac{5}{3}$

Za $m = 5$ (šestougaoni mesec) jednačina glasi $sin(5\alpha) = \sqrt{5}sin\alpha$ kako je $sin\alpha cos(4\alpha) + sin(4\alpha)cos\alpha = \sqrt{5}sin\alpha$, što dovodi do

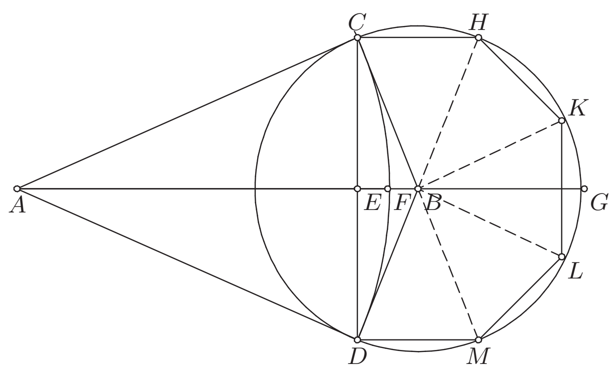
$$sin\alpha(cos^2(2\alpha) - sin^2(2\alpha)) + 2sin(2\alpha)cos(2\alpha)cos\alpha = \sqrt{5}sin\alpha.$$

Korišćenjem odgovarajuće zameneova jednačina može biti svedena na kvadratnu jednačinu $sin^2\alpha$.

$$16sin^4\alpha - 20sin^2\alpha + 5 - \sqrt{5} = 0$$

Ovo može biti rešenje za $sin\alpha = \sqrt{\frac{5\pm\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}$. Budući da za znak plus vrednost rezultata je veća od 1, samo minus odgovara. Tada je $\alpha \approx 0,40909$ radiana ili 23.44^o, $\beta \approx 2,04545$ radiana ili 117.196^o i $\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \sqrt{5}$.

Kako je β veće od 90^o, tačka E se nalazi između A i B i čini da me-



Slika 4.14: A i B su sa različitih strana

sec izgleda pomalo kao jednakokraki trapez meseca.

Slika pokazuje ovaj mesec. $CE = sin\alpha = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5+4\sqrt{5}}}{8}}$, $AC = 1$ i $BC = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Mesec $CGDF$ je jednak oblasti četvorougla $ACBD$ (zato što je E između A i B, pa to dodamo oblasti figure $CFDB$).

Takođe mogu pokazati da je površina meseca $CGDF$ jednaka površini spoljašnjeg šestougaonika $CHKLMD$ gde je odnos osnove CD i drugih pet stranica $\sqrt{5}:1:1:1:1:1$.

Počevši od slike koju smo dobili, uočavamo da je $\measuredangle KBG = \measuredangle LBG$ jednako uglu $\alpha = \measuredangle CAE$, to su takođe i polovine uglova CBK i LBD. Kako je $\beta = 5\alpha$, $\measuredangle CBH = \measuredangle HBK = \measuredangle KBL = \measuredangle LBM = \measuredangle MBD = 2\alpha$, pa su kružni segmenti CH, HK, KL, LM i MD su slični kružnom segmentu CD. Kako je $AC : BC = \sqrt{5} : 1$, $CD : CH : HK : KL : LM : MD = \sqrt{5} : 1 : 1 : 1 : 1 : 1$, pa sledi da je šestougao $CHKLMD$ jednak površini meseca $CGDF$.

Za $m = \frac{5}{3}$ (konkavan osmougaoni mesec) jednačina je najkomplikovanija. $sin(\frac{5}{3}\alpha) = \sqrt{\frac{5}{3}}sin\alpha$ koristim zamenu $\omega = \frac{\alpha}{3}$, tako da jednačina glasi $sin(5\omega) = \sqrt{\frac{5}{3}}sin(3\omega)$

Korišćenjem odgovarajućih identiteta jednačina može glasiti:

$$sin\omega cos(4\omega) + sin(4\omega)cos\omega = \sqrt{\frac{5}{3}}(sin\omega cos(2\omega) + sin(2\omega)cos\omega),$$

korišćenjem formula za dvostruki ugao za sinus i kosinus jednačina se svodi na: $sin^2\omega$, tj.

$$16sin^2\omega + (\frac{4}{3}\sqrt{15} - 20)sin^2\omega + (5 - \sqrt{15}) = 0$$

za koju smo dobili $sin\omega = \sqrt{\frac{15-\sqrt{15}\pm\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}}$, ružno ali konstruktabilno. Međutim samo minus zadovoljava jednačinu $sin(5\omega) = \sqrt{\frac{5}{3}}sin(3\omega)$. Kako $\omega = \frac{\alpha}{3}$ imam da je

$$sin\alpha = sin(3\omega) = sin\omega cos(2\omega) + sin(2\omega)cos\omega = sin\omega(3 - 4sin^2\omega)$$

čiji je konačan rezultat

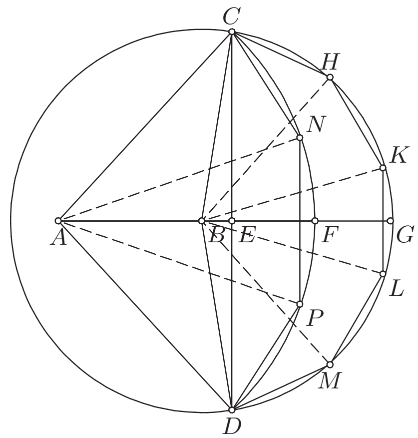
$$sin\alpha = \sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{24}} \cdot (\frac{3+\sqrt{15}+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}{6}).$$

$\alpha \approx 0,8793$ radiana ili 50.38^o, $\beta \approx 1,4655$ radiana ili 83.97^o i možemo izračunati $\frac{sin\beta}{sin\alpha} = \sqrt{\frac{5}{3}}$.

Kako je $\beta < 90^o$, tačke A i B nisu sa različitih strana u odnosu na tačku E, zbog čega mesec izgleda kao konkavan petougao.

Slika (4.15) pokazuje mesec gde je

$$CE = sin\alpha = \sqrt{\frac{15-\sqrt{15}-\sqrt{60+6\sqrt{5}}}{24}} \cdot \frac{3+\sqrt{15+\sqrt{60+6\sqrt{15}}}}{6}$$



Slika 4.15: A i B su sa istih strana

$AC = 1$ i $BC = \sqrt{\frac{3}{5}}$. Kako su dve oblasti ACD i BCD površinski jednake, od obe oduzimam površinu $CBDF$, sledi da je mesec $DGDF$ jednak površini četvorougla $ACBD$.

Takođe mogu pokazati da je površina meseca jednaka površini osmostrane figure $CHKLMDPN$. Kako je $\measuredangle CBG = \beta = \frac{5}{3}\alpha$. Konstruišem uglove $\measuredangle NAF = \measuredangle PAF = \measuredangle KBG = \measuredangle LBG = \frac{\alpha}{3}$. Prepoloviću uglove $\measuredangle CBK$ i $\measuredangle DBL$. Prema tome $\measuredangle CAN = \measuredangle NAP = \measuredangle PAD = \measuredangle CBH = \measuredangle HBK = \measuredangle KBL = \measuredangle LBM = \measuredangle MLD = \frac{2}{3}\alpha$.

Zbog toga jednakokraki trouglovi $\triangle CAN$, $\triangle NAP$ i $\triangle PAD$ su međusobno kongruentni kao što su jednakokraki trouglovi $\triangle CBH$, $\triangle HBK$, $\triangle KBL$, $\triangle LMB$ i $\triangle MBD$ koji odgovaraju kružnim segmentima slični. Kako poluprečnici $AC : BC = \sqrt{5} : \sqrt{3}$ su kružni segmenti na CN, NP i PD, a oni su kružni segmenti na CH, HK, KL, LM i MD kao $\sqrt{5} : \sqrt{3}$. Tako je površina tri kružna segmenta jednaka površini drugih pet kružnih segmenata, pa mesec $CGDF$ je površinski jednak konkavnoj osmougaonoj figuri $CHKLMDPN$.[6]

Poslednja dva primera meseca za koje možemo konstruisati kvadrate jednake površine pronašao je M. J. Wallenieus 1766. godine. T. Clausen je 1840. ponovo rešio slučajeve za $k = 3, \frac{3}{2}, 5, \frac{5}{3}$ (tada se još nije znalo da je slučajeve $k = 3$ i $k = \frac{3}{2}$ već rešio Hipokrat). Ovim su se problemom ponovo nastavili baviti u XX veku E. Landau je 1903. istražio problem bez pretpostavke da je razlika površina kružnih isečaka jednaka 0, već je uzeo da je

[6]Preuzeto sa:http://www3.wittenberg.edu/bshelburne/TheFiveLunes120408.pdf

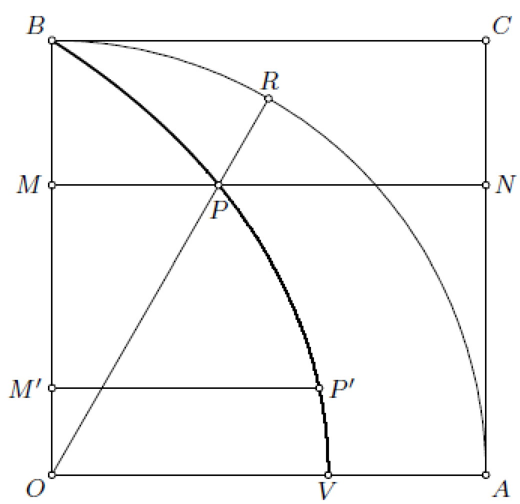
jednaka površini koja je konstruktibilan broj (odnosno možemo ga izraziti iz broja 1 samo sa racionalnim operacijama i kvadratnim korenima). Dokazao je da to uopštenje ne dovodi do novih primera kvadrature, te da je ona moguća ako je k Fermaov prost broj (odnosno broj oblika $k = 2^{2^j} + 1$, $j = 0, 1, 2...$). Godine 1929. L. Čakalov je dokazao Landauov iskaz na kraći način i dao mnogo drugih primera kada se ne može odrediti kvadratura. Ali, to je bilo još daleko od dokaza da je kvadraturu meseca moguće odrediti samo u pet spomenutih slučajeva. Prvi pozitivan rezultat je 1934. dao N. Čebotarev, koji je Clausenovu predpostavku da osim za slučajeve $k = 2, 3, \frac{3}{2}, 5, \frac{5}{3}$ nema drugih primera uspešne kvadrature meseca sa racionalnim odnosom središnjih uglova, potvrdio za primer $k = \frac{m}{n}$, gde su m i n različiti prosti brojevi: između takvih brojeva je kvadratura moguća samo za $k = 3$, $k = 5$ i $k = \frac{5}{3}$. Problem je u potpunosti rešio tek A. V. Dorodnov 1947. godine detaljim proučavanjem preostalog slučaja, kada je jedan od brojeva m, n prost, a drugi složen, potvrđena je Clausenova predpostavka da postoji samo pet meseca za koje se može konstruisati kvadrat površine datog meseca i konačno je bila završena priča o Hipokratovim mesecima.[7]

[7] $http://www3.wittenberg.edu/bshelburne/TheFiveLunes120408.pdf$

Glava 5

Kvadratrisa

Hipija Eleaćanin konstruisao je izvesnu krivu liniju pomoću koje se može lako izvršiti deoba nekog ugla na delove kakve želimo. To je tzv. **kvadratrisa**. Zamislimo da se poluprečnik OR jednog kruga (slika 5.1) okreće ravnomerno, od položaja OB ka položaju OA za to vreme se duž MN kreće ravnomerno od položaja BC ka položaju OA, ostajući paralelna sebi samoj. Tada se presek P (presek prave MN i poluprečnika OR) ovih duži kreće od B do V i opisuje određenu liniju — kvadratrisu. Prema tome je



Slika 5.1: kvadratrisa

$$\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle AOB} = \frac{OM}{OB},$$

a za neku drugu tačku P' krive linije

$$\frac{\measuredangle AOP'}{\measuredangle AOB} = \frac{OM'}{OB}.$$

Iz ovih odnosa sledi

$$\frac{\measuredangle AOP}{\measuredangle AOP'} = \frac{OM}{OM'}$$

i na kraju

$$\frac{\measuredangle AOP'}{\measuredangle POP'} = \frac{OM'}{M'M}.$$

Prema tome, ako treba ugao $\measuredangle AOP$ podeliti na dva dela u izvesnom datom odnosu (na primer $1:2$ u slučaju trisekcije ugla), treba samo podeliti duž OM u tom istom odnosu, tj. doći do tačke M' (što se lako čini na osnovu sličnih trouglova), zatim konstruisati pravu $M'P'$ i tako dobiti tačku P' koja određuje traženi ugao $\measuredangle AOP'$.

Uzmimo prave OA i OB za x i y osu. Neka je $OA = OB = 1$, a θ dužina luka AR. Ovim znacima jednačina $\frac{\measuredangle AOP'}{\measuredangle AOB} = \frac{OM'}{OB}$ glasi

$$\theta : \frac{\pi}{2} = y : 1,$$

odakle je

$$y = \frac{2\theta}{\pi},$$

$$\theta = y\frac{\pi}{2}.$$

Ali, kao što iz trigonometrije znamo,

$$\frac{y}{x} = tg\theta,$$

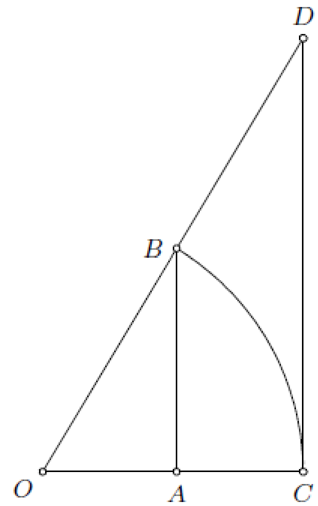
odakle je

$$y = xtg(y\frac{\pi}{2})$$

Ovo je jednačina kvadratrise. Ona spada u transcendentne jednačine[1].

Iz $y = \frac{2\theta}{\pi}, \theta = y\frac{\pi}{2}$ i $y = xtg(y\frac{\pi}{2})$ sledi da je

[1] Jednačina koja se sastoji od transcedentne funkcije. Npr. $x = e^{-x}$; $x = sin(x)$



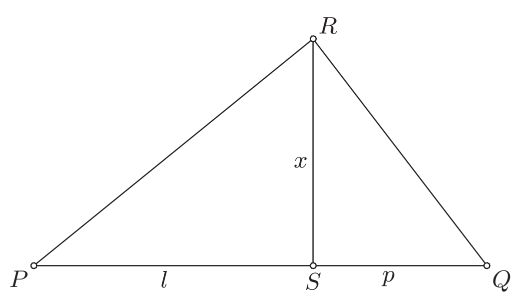
Slika 5.2: $\frac{2}{\pi}$

$$x = \frac{y}{tg(y\frac{\pi}{2})} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\theta}{sin\theta} \cdot cos\theta.$$

Ako θ teži ka nuli $cos\theta$ i $\frac{sin\theta}{\theta}$ teže ka jedinici, dakle x teži ka $\frac{2}{\pi}$, tj. $OV = \frac{2}{\pi}$. Iz duži čija je veličina $\frac{2}{\pi}$ izvodi se lako kvadratura kruga jer ako je r poluprečnik, površina P kruga je $P = \pi r^2$, a tu veličinu je lako konstruisati u obliku duži. Neka je, naime (slika 5.2)

$$OA = \frac{2}{\pi}$$

$$OB = OC = r$$



Slika 5.3: Pravougli trougao

$$OD = u$$

Tada je

$$\frac{2}{\pi} : r = r : u$$

dakle, i

$$u = \frac{\pi \cdot r^2}{2},$$

pa, prema tome, $p = 2u$, što se neposredno može konstruisati. Neka je, na kraju, PQR pravougli trougao (slika 5.3), u kome je visina $RS = x$, $PS = l$ i $QS = p$. Kako je $PS : RS = RS : QS$, imamo da je $x^2 = p$. Dakle, kvadrat kome je strana RS ima jednaku površinu kao i zadati krug poluprečnika r. Time je kvadratura kruga, pomoću Hipijine kvadratrise, izvršena. Kao što smo videli, pri tome se javlja transcendentna kriva sa transcendentnom jednačinom.

Glava 6

Biografije

6.1 Alexandar iz Afrodizije

Aleksandar iz Afrodizije (krajem 2. i početkom 3. veku nove ere) bio je Aristotelov učenik filozofa i najčuveniji Antički grk koji je komentarisao Aristotelova dela. Simplicius iz Kilikije pominje da je Aleksandar napisao komentare o kvadraturni meseca, kao i sročio problem o kvadriraturi kruga.[1]

Slika 6.1: Alexandar iz Afrodizije

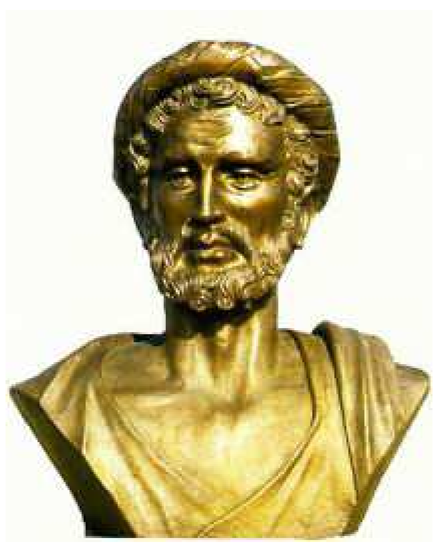
[1] $http://en.wikipedia.org/wiki/Alexander_of_Aphrodisias$

6.2 Arhita

Arhita iz Tarenta (428 – 347. god. p.n.e.) bio je antički grčki filozof, pripadnik pitagorejske škole, državnik, vojni strateg, teoretičar muzike, matematičar, fizičar i astronom.

Rodio se u južnoitalskom gradu Tarentu, gde je kasnije postao i pritan (izvršni magistrat), sprovodeći takvu razvojnu politiku koja je Tarent učinila najbogatijom metropolom u Velikoj Grčkoj. Podizanjem spomenika, hramova i javnih građevina dao je gradu novi sjaj. Pružio je novi podstrek trgovini razvijajući i učvršćujući odnose s drugim trgovačkim centrima, kao što su Istra, balkanska Grčka i Afrika. Takođe je pokušao da sve gradove Velike Grčke ujedini u neku vrstu saveza uperenog protiv tamošnjih autohtonih naroda. Bio je prijatelj Platona, s kojim se upoznao na Siciliji, i 361. godine p.n.e., kada je Dionisije Mlađi utamničio Platona, Arhita je pomogao njegovo oslobađanje iz zatvora. Arhita je bio učenik pitagorejca Filolaja iz Krotona, a zatim je učio matematiku kod Eudoksa iz Knida. On sam i Eudoks, pak, bili su Menehmovi učitelji. Među njegovim delima su *O umu i o počelima*, *O umu i čulima*, *O mudrosti*, *O deset kategorija*, *O kraljevstvu*, *O kraljevima*, *O rađanju*, i *O čuvanju*.

Glavno područje Arhite, kao pitagorejca, bila je matematika, i on je smatrao



Slika 6.2: Arhita

da su sve discipline podređene matematici. Tako je on istraživao frekvenciju i postavio jednu teoriju zvuka. Premda ova istraživanja sadrže greške, ipak predstavljaju izvanredan doprinos nauci i postaće osnova za Platonovu teoriju zvuka. Arhita je prvi ustanovio niz iracionalnih brojeva i njihov račun, tj. niz kvadratnih korena koji se razrešavaju kao razlomci.

Eutokije iz Askalone, u svom komentaru Arhimedovog dela *O sferi i valjku*, kaže da je Arhita rešio problem udvostručenja kocke, i to jednom geometrijskom konstrukcijom. Pre njega je Hipokrat sa Hiosa ovaj problem sveo na iznalaženje malih proporcija. Arhitina teorija proporcionalnosti se obrađuje u osmoj knjizi Euklidovih Elemenata, gde je konstrukcija dva proporcionalna tela jednaka vađenju kvadratnog korena. Prema Diogenu Laertiju, ova demonstracija, koja koristi linije koje prave rotirajuće geometrijske figure da bi se konstruisale dve proporcije između magnituda, predstavlja prvo izučavanje geometrije pomoću postavki mehanike. Prema Plutarhu, Platon je Arhiti prebacivao da je mehanikom "pokvario"geometriju.

Arhita je bio prvi koji je predložio da se grupišu tradicionalne discipline: aritmetika, geometrija, astronomija i muzika – koje će u srednjem veku činiti "kvadrivij".

Arhita se udavio kada je brod kojim je plovio potonuo u Jadranskom moru. Njegovo je telo ležalo nepokopano na obali sve dok ga neki mornar nije simbolično posuo sa malo peska, kako njegova duša ne bi narednih sto godina lutala s ove strane Stiksa.[2]

[2] http://sh.wikipedia.org/wiki/Arhita

6.3 Čebotarev (Nikolai Grigorievich Chebotaryov)

Slika 6.3: Čebotarev

Čebotarev (1894. – 1947.) je pod uticajem svoje majke zavoleo matematiku. 1912. upisao je Univerzitet u Kijevu. 1916. je diplomirao, a 1918. magistrirao. Zarađivao je dajući privatne časove matematike i radeći u školi. 1922., Nikolaj dokazuje teoremu zbog koje postaje poznat, teorema gustine. 1924. dobija stalni posao u Moskvi, ali ubrzo daje otkaz. 1925. prisustvuje sastanku namačkog matematičkog društva gde upoznaje Emmy Noether, Hensela i Hassea. Nakon toga odlazi u Berlin i Getingen.

Čebotarev je doktorirao na Ukrajinskoj Akademiji nauka doktorsku tezu je napisao na osnovu svojih rezultata 1922. Postao je profesor na Univerzitetu u Kazanju 1928. pošto je dobio ponudu u Kazanu i Lenjingradu. Ostao je u Kazanu do kraja svog života.[3]

[3] *http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Chebotaryov.html*

6.4 Edmund Landau

Slika 6.4: Landau

Edmund Landau je rođen u Berlinu u bogatoj jevrejskoj porodici. Landau obrazovanje stiče u francuskoj školi Licej u Berlinu, a na 16. rođendan polazi na univerzitet u Berlinu gde je studirao matematiku (dve godine ranije u odnosu na vršnjeke). 1899. je doktorirao (teorija brojeva). [4] Godine 1905. oženio se Marijanom (Marrianne) Erlih, ćerkom nobelovca Pola (Paul) Erliha. Vrlo rano, Lando pokazuje izuzetan talenat za matematiku. U 22. Landau je doktorirao, a dve godine kasnije dobija dozvolu da predaje na univerzitetu. Landau je ostao u Getingenu do 1933., kada je otpušten od strane nacista. Godine 1934. preselio se u Berlin, gde je umro 1938. [5]

[4] *http : //www − history.mcs.st − and.ac.uk/Biographies/Landau.html*
[5] *http : //www.ma.huji.ac.il/ landau/landau.html*

6.5 Euklid oko 325. - oko 265.g.p.n.e

Slika 6.5: Euklid

Euklid iz Aleksandrije je najznačajniji matematičar antičke Grčke, poznat po svojoj knjizi Elemenata. (Euklid je takođe bio poznat po svojim delima Data i "Optika") Dugogodišnja praksa korišćenja Elemenata Euklida svrstava u vodeće matematičare svih vremena. Međutim, malo je poznat njegov život. Zna se da je predavao u Aleksandriji u Egiptu. Proklo, poslednji veliki grčki filozof, koji je živeo oko 450 g.n.e. je napisao:

Ne mnogo mlađi od Platonovih učenika - Euklid, koji je sastavio "Elemente", doveo je u red mnoge od Eudoksovih teorema, usavršio mnoge Teteve teoreme, a takođe dovodi do nepobitnih činjenica (dokaza) teorema koje su bile samo delimično dokazane od strane njegovih prethodnika. Živeo je u vreme Ptolemeja, i Arhimeda, koji su ga tesno pratili. Ptolomej prvi pominje Euklida, takođe postoji zapis u kome ga kralj pita da li postoji kraći put da se savlada geometrija od Elemenata, na koje Euklid odgovara: "O, kralju, za putovanje širom zemlje postoje kraljevski putevi i putevi za običan svet, ali u geometrije postoji samo jedan put, koji je isti za sve."

Iz Proklovog teksta može se doći do zaključka da je Euklid živeo između prvih Platonovih učenika i Arhimeda. Platon je umro 347. Arhimed je živeo od 287. – 212., Eratosten 276. – 194. godine p.n.e. Tako da je Euklid morao živeti oko 300 p.n.e., datum se slaže i sa činjenicom da je Ptolomej vladao od 306. do 283. godine p.n.e.

Vrlo je verovatno da je Euklid dobio matematičko znanje u Atini od Platonovih učenika, jer većina matematičara koji su se bavili geometerijom predavalo je u toj školi. Takođe u Atini su živeli matematičari na osnovu čijih saznanja su Euklidovi "Elementi" i napisani. Može se reći da je Euklid bio Platonista, ali to se ne pojavljuje u Proklovoj izjavi o toj temi. Proklo kaže naime da je Euklid od škole Platona i u bliskom kontaktu sa tom filozofijom.

Jedna od zanimljivih priča vezanih za Euklida glasi. Prema Stobusu[6] neko ko je počeo da čita geometriju sa Euklidom, kada je naučio prvu teoremu, pitao je Euklida "Ali šta ću dobiti od učenja ovih stvari?" Euklid pozva svog roba i tužno mu reče: Daj mu tri penija, jer on mora da dobije nešto od onoga što uči.

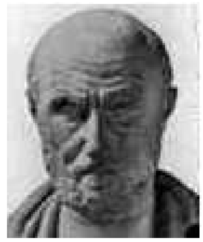
Postoje i druge informacije o Euklid koje daju određeni autori, ali se ne misli da su pouzdane. Dve vrste ove dodatne informacije postoje. Prvi tip dodatne informacije daje arapski autor koji navodi da je Euklid bio sin Naucratesa i da je rođen u Tiru. Istoričari matematike veruju da je to potpuno lažna informacija i da je to samo izmislio autor.

Drugi tip informacije je da je Euklid rođen u Megaru. To je takođe greška od strane autora koji je prvi dao ove informacije. U stvari, postojao je Euklid iz Megara, koji je bio filozof živeo je oko 100 godina pre matematičara Euklida iz Aleksandrije. Nije sasvim slučajno što možda izgleda da postoje dva naučnika po imenu Euklid. U stvari, Euklid je bilo veoma često ime iz ovog perioda i to je još jedna od komplikacija, bilo je jako teško otkriti prave informacije o Euklidu iz Aleksandrije, jer postoje reference o brojnim muškarcima koji se zovu Euklid, a nalaze se u literaturi ovog perioda.[7]

Arabljani su mišljenja da Elemente prvobitno nije napisao Euklid, već čovek čije ime je Apolonije - stolar, koji je napisao delo u 15 knjiga i odeljaka. Vremenom deo je izgubljen, a ostatak je promenjen, tako da je jedan od kraljeva Aleksandrije, koji je želeo da izučava geometriju poslao je ljude da dovedu Euklida, koji je u to vreme bio poznat kao matematičar koji se bavio geometrijom, i zamolio ga je da revidira i završi posao i da ga dovede u red. Euklid je zatim prepravio u 13 knjiga koje su kasnije postale poznate pod njegovim imenom. (Prema drugoj verziji Euklid sastavlja 13 knjiga od komentara koje su bile objavljene na dve Apolonijeve knjige). Na trinaestu knjigu dodate su još dve knjige, rad drugih ljudi, one sadrže nekoliko stvari koje se ne pominju kod Apolonija. Prema drugoj verziji Hipsicles, učenik Euklida iz Aleksandrije, ponudio je kralju i objavljivanje knjiga XIV i XV.

[6]prevodilac grčkih dela iz Makedonije - severna Grčka
[7]http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid.html

6.6 Hipokrat oko 470. - oko 410.g.p.n.e



Slika 6.6: Hippocrates of Chios

Grčki matematičar Hipokrat sa ostrva Hiosa, nakon dolaska u Atinu proučavao je i radio na klasičnim problemima kvadrature kruga i udvostručenja kocke. Malo se zna o njegovom životu, ali je poznato da je bio odličan geometar koji je, prema Aristotelovim rečima, bio "glup i nesposoban u stvarima koje se odnose na svaklodnevni život". Prema nekima bio je prevaren za veću sumu novca zbog svoje naivnosti, te mu je prema Iamblichusu (sirijski filozof) "*kada ga je zatekla ta nesreća dozvolili su mu da zarađuje novac podučavanjem geometrije*". Tako Heath (engleski matematičar, 1861.-1940.) pripoveda dve verzije te priče: "*Prema jednoj Hipokrat je bio trgovac, ali je izgubio svoju imovinu koju su mu zaplenili gusari. Tada je došao u Atinu da bi progonio krivce i tokom dužeg boravka pohađao predavanja i konačno postigao takvo znanje u geometriji da je pokušao naći kvadraturu kruga*".[8]

Prema drugoj verziji prevario ga je carinik iz Bizanta za veću količinu novca. Pretpostavlja se da je u Atini boravio između 450. i 430. god.p.n.e.

Predpostavlja se da je prva znanja iz matematike naučio još na Hiosu od Oenopidesa (učitelja matematike i astronomije takođe sa Hiosa). Na Hipokratov matematički rad verovatno su mnogo uticali PITAGOREJCI, pošto je susedno ostrvo Hiosa Samos (centar Pitagorejskog misljenja). Hipokrat se opisuje (matematički) kao para - Pitagorejac. Predpostavlja se da je on prvi počeo sa primenom dokazivanja "počevši od suprotne pretpostavke"(pps). [9]

[8] $http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Hippocrates.html$
[9] $http :== en : wikipedia : org = wiki = HippocratesofChios$

Slika 6.7: Chios

Kvadratura kruga za Grke je bio jedan od osnovnih matematičkih problema, a Hipokrat se najviše bavio tim pitanjem. U nastojanju da nađe kvadratura kruga pronašao je "kvadraturu meseca"koja se temelji na njegovoj tvrdnji da se površine sličnih kružnih odsečaka odnose kao površine kvadrata konstruisanih nad njihovim tetivama, što je nakon mnogih neuspeha, grčkim matematičarima pobudili nadu da je moguće na sličan način napraviti kvadraturu celog kruga. Pored ovoga njemu se pripisuje još jedno važno otkriće. Naime on je prvi primetio da se problem dupliranja kocke može svesti na problem nalaženja dve glavne proporcionale u kontinualnoj proporciji između dve prave linije, tj. "ako su a i b zadate duži, dovoljno je naći duži x i y, njihove dve *srednje proporcionale*, takve da je

$$a : x = x : y = y : b$$

da bi se rešio problem udvostručenja kocke.

Zaista, ako su x i y srednje linije proporcionale za a i b, tada je

$$\frac{a^3}{x^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b},$$

pa, ako je a ivica kocke i ako je zadat odnos $a : b$, tada će i odnos zapremina kocki kojima su ivice a i x biti jednake zadatom odnosu. Na isti način:

$$\frac{y^3}{b^3} = \frac{a}{x} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{y}{b} = \frac{a}{b},$$

pa je odnos zapremina kocki kojima su ivice y i b jednake zadatom odnosu $a : b$. U posebnom slučaju kada je duž a dvostruko veća od b, zapremina kocke čija je ivica x biće dvostruko manja od zapremine kocke sa zadatom ivicom b"[10] To će kasnije inspirisati Arhitu koji će nam ponuditi jako interesantna rešenja problema udvostručenja kocke.

Prvi je napisao Elemente geometrije, iako je taj njegov rad izgubljen predpostavlja se da je sadržao mnogo toga što je Euklid kasnije uključio u I i II knjigu Elemenata. Hipokratova knjiga je takođe sadržala i geometrijska rešenja kvadratnih jednačina. I prvi put se u njegovoj geometriji koriste velika štampana slova koja označavaju temena trougla. Simplikije (oko 530. godine p.n.e.) u svojim komentarima Aristotelove fizike naveo fragment iz Eudemusove "*Istorije geometrije*" u kojem se opisuje Hipokratova kvadratura izvesnih "lunula" ili luna. Ovo je jedan od najdragocenijih izvora za istoriju Grčke matematike pre Euklida.

U polju astronomije Hipokrat je pokušao da objasni fenomen kometa i mlečnog puta. Njegove ideje nisu dovoljno jasno prenošene, ali on je verovatno mislio da su oba fenomena optičke varke, rezultat prelamanja sunčevih zraka u sudaru sa vlažnim vazduhom koji odaju pojedinačno tobožnje planete blizu Sunca i od zvezda. Činjenica da je Hipokrat smatrao da svetlosni zraci nastaju u našim očima, umesto u objektu koji vidimo, doprinosi nesvakidašnjem karakteru njegovih ideja, koje pripadaju domenu spekulativne filozofije.[11]

[10] Z. Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009., str. 236,237

[11] $http :== turnbull : mcs : st??and : ac : uk = history = Biographies = Hippocrates : html$

6.7 Ibn al- Haytham (Alhazen)

Alhazen je rođen 965. u Basri, a umro je 1039. u Kairu. Bio je arapski ili persijski naučnik. Napravio je značajan doprinos u mnogim oblastima kao što su : optika, fizika, anatomija, astronomija, projektovanje, matematika, medicina, oftamologija, filozofija, psihologija i nauke uopšte, tj. primenom teorije.

U matematici, Ibn al-Haytham se razvijao na delima Euklida i Thabit ibn Qurra. Sistematizovao je konusne preseke i teoriju brojeva, započeo je razvoj analitičke geometije, među prvima je pokušao da poveže geometriju i algebru. Ibn al-Haytham je koristio geometrijske dokaze radi dokazivanja formula. U osnovnoj geometriji, Ibn al-Haitham pokušao je da reši problem kvadriranje kruga koristeći oblasti meseca (polumeseca). Jedan je od začetnika hiperboličke geometrije.[12]

Slika 6.8: Alhazen

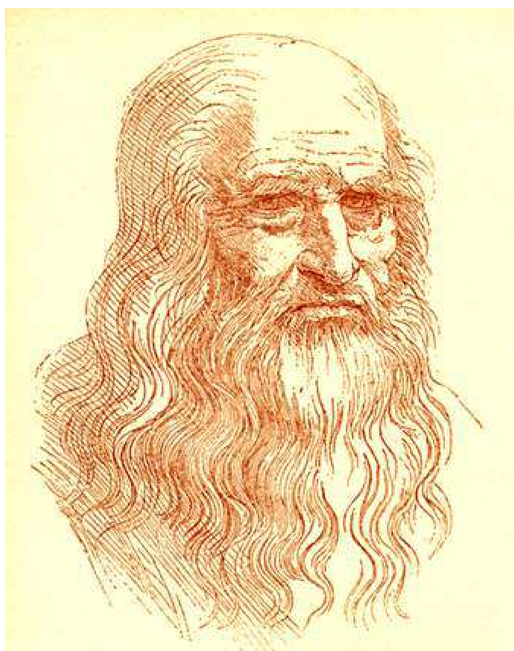
[12] $http :== en : wikipedia : org = wiki = Alhazen$

6.8 Leonardo da Vinci

Leonardo di ser Pietro da Vinci poznat kao Leonardo da Vinči (15. april 1452 — 2. maj 1519) je bio italijanski renesansni arhitekta, pronalazač, inženjer, vajar i slikar. Bio je opisan kao ideal "renesansnog čoveka"i kao univerzalni genije.

Obrazovanje stiče u kući svoga oca prima uobičajeno osnovno obrazovanje čitanje, pisanje i aritmetiku. Godine 1467. je postao šegrt učenja slikarstva, vajarstva i sticanje tehničke i mehaničke veštine. Postao je slikar u Firenci, 1472., ali je nastavio da radi kao šegrt do 1477. Od tada je radio za sebe u Firenci kao slikar. Već u ovo vreme je skicirano pumpe, vojno oružje i druge mašine. Između 1482. i 1499. Leonardo je bio u službi vojvode od Milana.

U 1490. je studirao matematiku, mentor mu je bio Luka Pacioli, pripremio



Slika 6.9: Leonardo da Vinci

je niz crteža urezanih u ploču, ovu knjigu je objavio zajedno sa svojim mentorom Pacioli De Divina Proportione 1509.[13]

[13] $http :== en : wikipedia : org = wiki = LeonardodaVinci$

1499. francuska vojska ulazi u Milana i vojvoda biva poražen. Nekoliko meseci kasnije, Leonarda napušta Milano. Putuje u Mantovi, Veneciju i Firencu. Iako je bio pod stalnim pritiskom da slika, matematičke studije ga udaljavaju od njegove slikarse delatnosti. 1506. Leonardo se po drugi put vraća Milano. Njegov naučni rad je idalje u prednost u odnosu na slikarstvo i on biva uključen u hidrodinamiku, anatomiju, mehaniku, matematiku i optiku. 1513. se seli u Rim i nakon tri godine boravka u večnom gradu prelazi u službu kralja Fransoa u Francusku. Da Vinči je od kralja dobio titulu "Kraljev prvi slikar, arhitekta i mehaničar", predpostavlja se da on za vreme boravka u Francuskoj ništa novo nije naslikao već da je samo dovršio stare radove Svetog Jovana Krstitelja, Mona Lizu, Bogorodicu, već da je vreme provodio baveći se naukom pre svega matematikom.[14]

[14] $http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Leonardo.html$

6.9 Lindeman (Carl Louis Ferdinand von Lindemann)

Slika 6.10: Lindeman

Ferdinand von Lindeman rođen je u Hanoveru (Nemačka) 1852. godine. Studirao je na univerzitetima u Getingenu, Erlangenu i Minhenu. U Erlagenu je napisao doktorsku disertaciju o ne − Euklidskoj geometriji. 1877. godine postaje profesor Univerziteta Frajburg, a 1883. Univerziteta Kenigsberga i 1893. Univerziteta u Minhenu gde ostaje do kraja svoje karijere (do smrti 1939.).

Lindeman se najviše bavio geometrijom i analizom. Proslavio se dokazom da je broj π transcedentan. 1882. na osnovu Hermitovog dokaza da je broj e transcedentan, Lindeman je objavio dokaz u kome je pokazao da je i broj π transcedentan.

Lamber je 1761. dokazao da je π iracionalan broj, ali to nije bilo dovoljno da se dokaže nemogućnost kvadrature kruga lenjirom i šestarom. Lindemann je dokazom da je π transcendentalan konačno utvrdio da je kvadratura kruga lenjirom i šestarom nerešiva. On je objavio svoj dokaz u radu Uber die Zahl 1882. [15].

[15] $http://www.gap-system.org/\ history/Biographies/Lindemann.html$

6.10 Simplikije iz Kilikije

Simplikije iz Kilikije (oko 490. - 560.g.n.e.), bio je učenik Amonija i Damaskija, i bio je jedan od poslednjih neoplantičara. Bio je među paganskim filozofima proganjanih od strane Justinijana početkom 6. veka i morao je neko vreme da potraži utočište u Persijskom sudu, pre nego što mu je dozvoljeno da se vrati u carstvo. On je opširno pisao o delima Aristotela. Njegovi radovi su sačuvali mnoge informacije o ranijim filozofima koje bi inače bile izgubljene (npr. o Hipokratu). On je, naime, iz čuvene Eudemove "Istorije geomterije" (334. godine p.n.e) verno preneo fragment koji se bavi problemom kvadrature meseca, ali dodajući pritom i izvesna objašnjenja. U tom fragmentu, između ostalog, ističe i to da je Hipokrat bio prvi koji je izložio problem kvadriranja meseca. Zahvaljujući ovom fragmentu, koji je u skorije vreme i "očišćen" od Simplikijevih dodataka, u prilici smo da upoznamo Hipokratovo rešenje.[16]

Slika 6.11: Rukopis Simplikija iz Kilikije

[16]Preuzeto: http://en.wikipedia.org/wiki/Simplicius of Cilicia

6.11 Tomas Klauzen (Thomas Clausen)

Slika 6.12: Klauzen

Klauzen je rođen u Snogbreku, malom gradu severozapadno od Sonderborga. Njegova porodica je bila siromašna, bavili su se poljoprivredom i Tomas je radio na farmi od malih nogu. Bio je najstarije dete u porodici od osmoro dece koliko su imali njegovi roditelji, ali nije išao u školu tako da nije naučio da čita i piše. Kada je napunio dvanaest godina, Tomas je počeo da radi za sveštenika u susednoj parohiji, Georga Holst. Tomas je brinuo o stoci, ali je ubrzo shvatio da je Holst veoma inteligentan pa dok je čuvao stoku, Tomas je prisustvovao lokalnoj školskoj nastavi. Uprkos tome što nije znao da čita i piše, Tomas je brzo napredovao pokazujući izuzetan talenat za matematiku. Holst je naučio Tomasa astronomijom i matematikom, kao i latinskim i grčkim. Clausen je naučio nekoliko jezika na svoju ruku, posebno francuski, engleski i italijanski.

Klauzenov rad bio je priznat od strane mnogih poznatih naučnika, uključujući Olbersa, Gausa, Besela, Hansena, Crellea, fon Humbolta i Araga. Međutim, on je počeo da pati od mentalne bolesti 1833. Bio je bolestan sedam godina. 1840. godine je objavio rad o kvadraturi mesečka koju je započeo Hipokrat sa Hiosa. 1866. je imenovan za direktora Tartu opservatorije, gde je ostao do penzionisanja 1872. Klausen se nikada nije ženio i, nakon prelaska na Tartu, izgleda da nije imao nikakvog kontakta sa porodicom u Danskoj.

Dobio je mnoga priznanja tokom godina koje je proveo u Tartu. On je bio izabran za člana Kraljevskog astronomskog društva u Londonu 1848., Getingenu akademije nauka u 1854., i Sankt Peterburgu akademije nauka u 1856. Dobitnik je dve nagrade od Getingenu akademije nauka za svoj izvanredan rad. [17]

[17] $http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/history/Biographies/Clausen.html$

6.12 Vanzel (Pierre Laurent Wantzel)

Slika 6.13: Vanzel

Vanzel je rođen 1814. u Parizu. Još u ranim godinama svoga života pokazao je veliko interesovanje za matematiku, Sen - Venant[18] o njemu kaže da je

"... pokazao je, svojim neverovatnim pamćenjem, sposobnost za matematiku, koju je proučavao sa velikim interesovanjem. On je ubrzo prevazišao čak i svoga učitelja, koga su poslali da podučava mladog Vantzela, kada je u devetoj godini naišao na težak geometrijski problem."[19]

1837. Vanzel je objavio dokaze jednog od najpoznatijih matematičkih problema svih vremena. Gaus je izjavio da problemi umnožavanja kocke i trisekcije ugla se ne mogu rešiti pomoću lenjira i šestara, ali on nije dao nikakav dokaz. U svom radu Vantzel 1837. je prvi uspeo da dokaže Gausovu predpostavku.

[18] francuski matematičar (1797. − 1886.)

[19] $http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Wantzel.html$

Glava 7

Zaključak

Tokom tri veka, rešenje antičkih problema je bilo cilj matematičarima, toliko da se izučavalo kao posebno istraživanje – grčka geometrija. Grci su matematičke probleme klasifikovali prema sredstvima pomoću kojih su ih rešavali, ali problem sa antičkom geometrijom je taj što nema konačnog broja konstrukcija pravih linija i kružnica, već se može samo približno utvrditi broj. To antičke probleme čini i značajnim, jer oni stalno iniciraju dalje traganje i ulaženje u nove oblasti matematike.

U vezi sa proučavanjem ovih problema bili su otkriveni konusni preseci, neke krive trećeg i četvrtog reda, kao i trascendentna kriva nazvana kvadratrisa, kvadratura lunule . . .

Zastupnici neograničenog procesa mogu da tvrde da su matematičari nešto prevideli i da je geometrija zasnovana na aksiomama koje bi mogle da budu i pogrešne. Ako uzmemo u obzir ovakvu tvrdnju dolazimo do zaključka da ona govori da matematičari greše i da su aksiome pogrešne. Ipak, jasno je da je matematika sasvim egzaktna nauka u kojoj se dokazi ispituju na tako utvrđen način da je nemoguće pogrešiti. U prilog tome govori i da nekad u matematici nije postojao proveren dokaz koji je, kasnije, proglašen pogrešnim. Sa druge strane, aksiom je, po definiciji, apsolutno tačna i nepromenljiva tvrdnja. Aksiomi se mogu dovesti u protivrečnost u nekim izuzetnim slučajevima, ali nikad kada je reč o geometriji. Geometrija je, dakle, ispravno izvedena iz aksioma, a sasvim tim, rešenje antičkih problema za sada mora biti ovo, postojeće.

Literatura

1. MacTutor, Biografija Hipokrata sa Hiosa, preuzeto sa:
   http : //turnbull.mcs.st−and.ac.uk/ history/Biographies/Hippocrates.html

2. B. L. van der Waerden, Science Awakening, OXFORD UNIVERSITY PRESS, New York, 1961. 148. str.

3. MacTutor, Udvostručenje kocke, preuzeto sa:
   http : //www−history.mcs.st−and.ac.uk/HistTopics/Doublingthecube.html

4. Z. Lučić, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009;

5. MacTutor, Kvadriranje kruga, preuzeto sa:
   http : //www.gap−system.org/ history/HistTopics/Squaring$_t$*he*$_c$*ircle.html*

6. MacTutor, Biografija Euklida, preuzeto sa:
   http : //www − history.mcs.st − and.ac.uk/Biographies/Euclid.html

7. Anton Bilimović, Euklidovi Elementi, preuzeto sa:
   http : //poincare.matf.bg.ac.rs/nastavno/zlucic/

8. L.T. Heath, The Thirteen Books of Euklid's Elements - Vol I, Cambrige, 1968.

9. Brian J. Shelburne, The Five Quadrable (Squarable) Lunes, Wittenberg University Springfield, 2008.

10. M. Radojčić, Opšta matematika, Matematički fakultet, Beograd, preuzeto sa:
    http : //www.ncd.matf.bg.ac.rs/ zlucic/opstamat.pdf

Slike

2.1 Kvadratura kruga 6

3.1 Verovatno najstariji očuvani fragmenti Elemenata. Ovaj fragment sadrži petu teoremu iz druge knjige. 10
3.2 Latinska verzija Euklidovih Elemenata iz 1756. 11
3.3 Naslovna strana **druge knjige Elemenata** iz 1950 prevod Antona Bilimovića 14
3.4 Poligonska površ A 17
3.5 Pravougaonik $BEDG$ 17
3.6 Slika a 18
3.7 Slika b 19
3.8 Slika c 19
3.9 II.5. 21
3.10 I.47. 22
3.11 Arhitino rešenje 26

4.1 Jednakokraki pravougli trougao 28
4.2 Mesečak 28
4.3 Primer 1. 29
4.4 Primer 2.(jednakokraki trougao) 30
4.5 Primer 2.(nije jednakokraki trougao) 31
4.6 Primer 2.(jednakokraki trapez) 32
4.7 Jednakokraki trapez i njegovi meseci 32
4.8 Primer 2.(jednakokraki trapez, spoljašnji ugao veći od 180^o) . 33
4.9 Primer 2.(jednakokraki trapez, spoljašnji ugao manji od 180^o) 34
4.10 Kvadratura jednog meseca i kruga zajedno 35
4.11 $\measuredangle CBF$ je manji od $\frac{\pi}{2}$ 36
4.12 $\measuredangle CBF$ je veći od $\frac{\pi}{2}$ 36
4.13 Konstrukcija meseca 38
4.14 A i B su sa različitih strana 40
4.15 A i B su sa istih strana 42

5.1 kvadratrisa 44
5.2 $\frac{2}{\pi}$ 46

5.3 Pravougli trougao 46

6.1 Alexandar iz Afrodizije 48
6.2 Arhita 49
6.3 Čebotarev 51
6.4 Landau 52
6.5 Euklid 53
6.6 Hippocrates of Chios 55
6.7 Chios 56
6.8 Alhazen 58
6.9 Leonardo da Vinci 59
6.10 Lindeman 61
6.11 Rukopis Simplikija iz Kilikije 62
6.12 Klauzen 63
6.13 Vanzel 64