U n i v e r z i t e t u B e o g r a d u

Matematički fakultet

NEKI SPEKTRALNI PROBLEMI I NJIHOVO NUMERIČKO REŠAVANJE

M a s t e r r a d

Student: Sandra G. Hodžić
Mentor: prof. dr Boško S. Jovanović

B e o g r a d, 2011

S a d r ž a j

Uvod

U ovom radu opisano je rešavanje specijalnog slučaja graničnih problema običnih diferencijalnih jednačina, tzv. problema sopstvenih vrednosti. U matematici, fizici kao i u inženjerskim problemima, klasičan problem sopstvenih vrednosti predstavlja sledeća diferencijalna jednačina drugog reda:

$$-u''(x) + p(x)u(x) = \lambda u(x)$$

koja se naziva i Šturm-Liuvilova jednačina, gde je $p(x) \geq 0$ i $p(x) \in C[0,1]$. Funkcija $u = u(x)$ mora zadovoljavati i određene uslove na krajevima zadatog intervala. Veličina λ nije poznata, već je upravo cilj naći vrednosti parametra λ za koje postoje netrivijalna rešenja date jednačine.
Šturm-Liuvilove jednačine se pojavljuju u problemima primenjene matematike. Na primer, one predstavljaju vibraciona stanja različitih sistema, kao sto su vibracije žice, ili energetske sopstvene funkcije kvantno-mehaničkih oscilatora. U prvom slučaju, rešenja jednačina odgovaraju rezonantnim frekvencijama vibracije, a u drugom, energetskim nivoima. Osim toga, ideja da se diskretni energetski nivoi uočeni u atomskim sistemima mogu predstaviti kao sopstvene vrednosti diferencijalnog operatora, dovela je to toga da Šredinger predloži svoju talasnu jednačinu.

Rad je podeljen na tri poglavlja i jedan dodatak.

U prvom poglavlju dati su uvodni pojmovi i sama formulacija problema.

U drugom, najobimnijem poglavlju, postavljeni su i rešeni problemi sopstvenih vrednosti sa raznim graničnim uslovima (Dirihleovim, Nojmanovim, Robinovim, nelokalnim Robin-Dirihleovim, periodičnim i asimetričnim). Posebna pažnja je posvećena asimetričnom graničnom spektralnom zadatku jer se prilikom njegovog rešavanja uporedo rešava i tzv. konjugovani asimetrični zadatak, što ga i izdvaja od ostalih izloženih problema. Takođe, dato je nekoliko primera koji praktično ilustruju prethodna teorijska očekivanja. Ovo se posebno odnosi na Robinov i nelokalni Robin-Dirihleov problem sopstvenih vrednosti.

U trećem poglavlju je opisano numeričko rešavanje asimetričnog spektralnog zadatka, koji je i najsloženiji od svih navedenih. Izložena je ideja metode konačnih razlika i zatim data odgovarajuća diferencijska shema. Tu se, naime, kontinualni problem svodi na diskretni, što, dalje, podrazumeva operatorsko-matrični zapis problema.

Dodatak čini kod programa u programskom paketu MATLAB koji je pisan za potrebe rešavanja Robinovog i Robin-Dirihleovog problema. Sve slike u radu su takođe napravljene u Matlab-u.

Posebnu zahvalnost na pruženoj pomoći i konsultacijama tokom pisanja rada, dugujem svom mentoru, profesoru dr Bošku S. Jovanoviću.

1 Obične diferencijalne jednačine; formulacija graničnih problema

Granični problem za obične diferencijalne jednačine je problem nalaženja partikularnog rešenja jednačine

$$u^{(m)}(x) = f(x, u, u', \ldots u^{(m-1)}),$$

koje zadovoljava uslove zadate u više od jedne tačke intervala. Stoga se granični problemi ne mogu definisati za jednačine prvog reda. Prvobitno su to bili problemi kod kojih su uslovi definisani samo na krajevima intervala te otuda potiče naziv. Značaj graničnih problema, čak i onih najjednostavnijih, je u tome što kriju određeni fizički smisao. Tako, recimo, rešenjem graničnog problema

$$-u''(x) = f(x), \qquad a \leq x \leq b$$
$$u(a) = u(b) = 0$$

se može opisati oblik zategnute žice učvršćene na krajevima, kada na nju deluje spoljašnja sila $f(x)$.

Granični problem

$$u^{(4)}(x) = f(x) \qquad a \leq x \leq b$$

$$u(x_i) = 0 \qquad i = 1, 2, 3, 4 \qquad a \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq b$$

opisuje deformaciju grede pod uticajem spoljašnje sile $f(x)$, ako se u četiri tačke x_i greda oslanja na nosače.

Kod graničnih problema, uslovima zadatim u početnoj tački rešenje nije jednoznačno odredjeno kao što je to slučaj sa Košijevim problemom. Ovde treba iz familije integralnih krivih koje zadovoljavaju dati početni uslov, izabrati onu koja će proći kroz ostale tačke, tj. zadovoljiti uslove zadate u ostalim tačkama.
Bez obzira na raznovrsnost, svi granični problemi se rešavaju u osnovi istim metodama.
Možemo ih podeliti u 3 osnovne grupe:

1. metode gađanja
2. metode konačnih razlika
3. varijacione metode.

U daljem radu zadržaćemo se na jednom posebnom graničnom problemu, tzv. problemu sopstvenih vrednosti. Linearna diferencijalna jednačina drugog reda

$$a(x)y''(x) + b(x)y'(x) + c(x)y(x) = d(x)$$

svodi se smenom

$$y(x) = y_1(x)e^{-\frac{1}{2}\int\limits_0^x \frac{b(t)}{a(t)}dt}$$

na jednačinu

$$-y_1''(x) + p_1(x)y_1(x) = f_1(x)$$

koja ne sadrži prvi izvod nepoznate funkcije. Proizvoljan interval (a, b) u kojem je zadat granični problem može se linearnom smenom svesti na jedinični interval: $(a, b) \ni t \mapsto x = \dfrac{t-a}{b-a} \in (0, 1)$.

Najzad, novom smenom, $y_1(x) = u(x) + Ax + B$, gde su A i B pogodno izabrane konstante, nehomogeni granični uslovi

$$\alpha_0 y_1'(0) + \beta_0 y_1(0) = M_0, \qquad \alpha_1 y_1'(1) + \beta_1 y_1(1) = M_1,$$

svode se na homogene. Konačno dobijamo tzv. "kanonski granični problem" oblika

$$-u''(x) + p(x)u(x) = f(x), \qquad 0 \le x \le 1 \tag{1}$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u(0) &= 0 \\ \alpha_2 u'(1) + \beta_2 u(1) &= 0 \end{aligned} \tag{2}$$

koji se može zapisati u obliku operatorske jednačine

$$Lu = f \qquad \text{gde je} \qquad Lu = -u'' + pu. \tag{3}$$

Ako je $\alpha_i = 0$ i $\beta_i \neq 0$, $i = 1, 2$, granični uslovi (2) su prvi ili Dirihleovi [1] granični uslovi

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4}$$

a granični problem (1), (4) se naziva prvi ili Dirihleov granični problem.

Ako je $\alpha_i \neq 0$ i $\beta_i = 0$, $i = 1, 2$, granični uslovi (2) su drugi ili Nojmanovi [2] granični uslovi

$$u'(0) = u'(1) = 0 \tag{5}$$

[1] P.G.L. Dirichlet, 1805-1859, nemački matematičar
[2] K.G. Neumann, 1832-1925, nemački matematičar

a granični problem $(1),(5)$ se naziva drugi ili Nojmanov problem.

Ako je $\alpha_i \neq 0$ i $\beta_i \neq 0$, $i = 1,2$, granični uslovi (2) su treći (mešoviti) ili Robinovi [3] granični uslovi i mogu se zapisati u sledećem obliku

$$
\begin{aligned}
& u'(0) - \sigma_1 u(0) = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \sigma_1 = -\frac{\beta_1}{\alpha_1} \qquad \sigma_2 = \frac{\beta_2}{\alpha_2} \\
& u'(1) + \sigma_2 u(1) = 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

Granični problem $(1),(6)$ se naziva treći (mešoviti) ili Robinov granični problem.

Iz teorije diferencijalnih jednačina poznati su sledeći rezultati:

Teorema 1. *Ako su funkcije $p(x)$ i $f(x)$ neprekidne na intervalu $[0,1]$ i $p(x) \geq 0$, tada prvi granični problem $(1),(4)$ ima jedinstveno rešenje $u(x)$.*

Teorema 2. *Ako su funkcije $p(x)$ i $f(x)$ neprekidne na intervalu $[0,1]$, $p(x) \geq 0$, $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$, tada treći granični problem $(1),(6)$ ima jedinstveno rešenje $u(x)$.*

Što se tiče drugog graničnog problema (1),(5), u važnom specijalnom slučaju kada je $p(x) = 0$, njegovo rešenje nije jedinstveno. Naime, ako je $u(x)$ rešenje tog problema, onda je i svaka funkcija oblika $u(x) + c$, gde je c proizvoljna konstanta, takođe rešenje.
Funkcionalni prostori koji će nam u daljem radu biti od značaja su sledeći:

$C[a,b]$ - prostor neprekidnih funkcija na intervalu $[a,b]$ sa normom

$$\|f\|_{C[a,b]} = \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

$C(a,b)$ - prostor neprekidnih funkcija na otvorenom intervalu (a,b).

$C^n[a,b]$ i $C^n(a,b)$ - prostor funkcija neprekidnih na intervalu $[a,b]$, odnosno (a,b), zajedno sa svim izvodima reda $\leq n$.

$L_2(a,b)$ - Lebegov[4] prostor kvadratno integrabilnih funkcija, sa skalarnim proizvodom

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

i normom

$$\|f\|_{L_2(a,b)} = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b f^2(x)dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

---

[3] V.G. Robin, 1855-1897, francuski matematičar
[4] H.L. Lebesgue, 1875-1941, francuski matematičar

2 Problem sopstvenih vrednosti

Problem sopstvenih vrednosti ili problem Šturm[5]-Liuvila[6] predstavlja, kao što je već rečeno, specijalni slučaj graničnog problema (1), (4):

$$-u''(x) + p(x)u(x) = \lambda u(x) \qquad 0 < x < 1 \tag{7}$$

$$u(0) = u(1) = 0 \tag{4}$$

koji ima netrivijalna rešenja samo za neke vrednosti parametra λ.

Definicija 2.1 *Vrednost parametra λ za koju Šturm-Liuvilov granični problem* (7),(4) *ima netrivijalno rešenje, naziva se sopstvena (karakteristična) vrednost, a odgovarajuće rešenje sopstvena (karakteristična) funkcija.*

Slično se definišu problemi sopstvenih vrednosti s drugim tipovima graničnih uslova; naime to su problemi (7),(5) i (7),(6).

Iz teorije diferencijalnih jednačina je takođe poznato da ako je $p(x) \geq 0$ i $p(x) \in C[0,1]$, tada zadatak (7),(4) ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti λ_k koje su sve pozitivne i $\lambda_k \to \infty$ kad $k \to \infty$ (v. [3]). Odgovarajuće sopstvene funkcije u_k su uzajamno ortogonalne u smislu standardnog skalarnog proizvoda u $L_2(0,1)$.

2.1 Problem sopstvenih vrednosti sa Dirihleovim graničnim uslovima

Posmatrajmo specijalni slučaj, kada je $p(x) = 0$. Tada, problem postaje jednostavniji za rešavanje, a sopstvene vrednosti su nenegativne i uređene u rastućem poretku. Zadatak (7),(4) se svodi na

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{8}$$

$$u(0) = u(1) = 0. \tag{4}$$

Potražimo rešenje zadatka u obliku: $u(x) = e^{\mu x}$. Tada je

$$u'(x) = \mu e^{\mu x}, \qquad u''(x) = \mu^2 e^{\mu x} = \mu^2 u(x).$$

Kada to uvrstimo u (8) dobijamo $-\mu^2 u = \lambda u$, i pošto je $u \neq 0$ sledi

$$\mu^2 = -\lambda\,,$$

[5] J.F.C. Sturm, 1803-1855, francuski matematičar
[6] J. Liouville, 1809-1882, francuski matematičar

$$\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}\,.$$

Za $\lambda < 0$ funkcije $e^{\sqrt{-\lambda}}$ i $e^{-\sqrt{-\lambda}}$ su linearno nezavisne pa opšte rešenje ima oblik $u = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\,x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\,x}$. Zbog graničnih uslova (4) imamo

$$u(0) = 0 = C_1 + C_2,$$

$$u(1) = 0 = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}},$$

odakle sledi da je $C_1 = C_2 = 0$, pa $u(x) = 0$ nije rešenje problema.

Za $\lambda = 0$, tj. $\mu = 0$, $u(x) = 1$, a to nije rešenje razmatranog problema.

Za $\lambda > 0$ opšte rešenje ima oblik $u = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Zbog graničnih uslova (4) imamo

$$u(0) = 0 = C_1,$$
$$u(1) = 0 = C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = C_2 \sin\sqrt{\lambda},$$

i pošto želimo netrivijalno rešenje $u(x)$, mora biti $C_2 \neq 0$, odakle sledi da je

$$\sin\sqrt{\lambda} = 0,$$

$$\sqrt{\lambda} = k\pi, \qquad k = 1, 2\ldots.$$

Konačno, sopstvene vrednosti problema (8), (4) su $\lambda_k = k^2\pi^2$, a sopstvene funkcije $u = u_k(x) = \sin(k\pi x)$, $k = 1, 2\ldots$. Konstantu C_2 ne možemo odrediti jer ako je $u(x)$ sopstvena funkcija, onda je i $Cu(x)$ sopstvena funkcija, odnosno, sopstvene funkcije određene su do na proizvod sa konstantom.

Dakle, dobili smo sistem sopstvenih funkcija $\{u_k(x)\} = \{\sin(k\pi x)\}$. Proverimo da li on čini ortogonalan sistem funkcija u odnosu na standardni Lebegov skalarni proizvod.

$$(u_k, u_l) = \int_0^1 u_k(x) u_l(x)\,dx = \int_0^1 \sin(k\pi x)\sin(l\pi x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \Big[\cos(k-l)\pi x - \cos(k+l)\pi x\Big]dx =$$

$$= \begin{cases} 0, & k \neq l \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 dx = \dfrac{1}{2}, & k = l. \end{cases}$$

Zaključujemo da ovaj sistem jeste ortogonalan. Možemo izvršiti normiranje sopstvenih funkcija skalarom $\sqrt{2}$. Tako dobijamo ortonormirani sistem $\{\sqrt{2}\sin(k\pi x)\}$:

$$(u_k, u_l) = \delta_{kl} = \begin{cases} 0, & k \neq l \\ 1, & k = l \end{cases}$$

Iz teorije matematičke analize je poznato da te funkcije čine bazu prostora $L_2(0,1)$.

Ukoliko (8) napišemo u operatorskom obliku dobijamo

$$Lu = \lambda u.$$

Neka funkcija v zadovoljava iste uslove (4). Tada je:

$$(Lu, v) = \int_0^1 Lu\, v\, dx = \int_0^1 -u''v\, dx = -u'v\Big|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx = \tag{9}$$

$$= \int_0^1 u'v'dx = uv'\Big|_0^1 - \int_0^1 uv''dx = \int_0^1 u(-v'')dx = \int_0^1 u\, Lv\, dx = (u, Lv)$$

Ovde je urađena dva puta parcijalna integracija i iskorišćen je uslov (4) za funkcije u i v.

Pošto je $(Lu, v) = (u, Lv)$, zaključujemo da je $L = L^*$, odnosno radi se o samokonjugovanom operatoru.

2.2 Problem sopstvenih vrednosti sa Nojmanovim graničnim uslovima

Razmotrimo sada problem sopstvenih vrednosti za jednačinu (8), kada su nam umesto Dirihleovih uslova (4) zadati Nojmanovi uslovi (5). Međutim, princip rešavanja ovog zadatka je isti. Za $\lambda < 0$ ne nalazimo sopstvene funkcije. Za $\lambda = 0$ dobijamo $u \equiv 1$, koja jeste sopstvena funkcija. Za $\lambda > 0$ opšte rešenje je oblika

$$u = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x,$$

a konstante C_1, C_2 se određuju iz graničnih uslova:

$$u'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x,$$

$$u'(0) = 0 = C_2\sqrt{\lambda} \Rightarrow C_2 = 0,$$

$$u'(1) = 0 = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}.$$

Pošto tražimo netrivijalno rešenje $u(x)$, tj. $C_1 \neq 0$, sledi da je $\sin\sqrt{\lambda} = 0$, odnosno $\sqrt{\lambda} = k\pi,\ k = 1, 2\ldots$.

Konačno, sopstvene vrednosti problema $(8),(5)$ su $\lambda_k = k^2\pi^2, \quad k = 1,2\ldots,$ a sopstvene funkcije $u = u_k(x) = \cos(k\pi x), \quad k = 1,2\ldots$. Sopstvena vrednost $\lambda_0 = 0$ i odgovarajuća sopstvena funkcija $u_0 = 1$ mogu se uključiti u ovu familiju stavljajući $k = 0$. Kao i u prethodnom slučaju, sopstvene funkcije određene do na proizvod sa konstantom.

Iz $(u_k, u_l) = \int\limits_0^1 u_k(x)u_l(x)dx = \int\limits_0^1 \cos(k\pi x)\cos(k\pi x)dx =$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_0^1 (\cos(k+l)\pi x + \cos(k-l)\pi x)dx = \begin{cases} 0, & za \ \ k \neq l \\ \dfrac{1}{2}\displaystyle\int\limits_0^1 dx = \dfrac{1}{2}, & za \ \ k = l \end{cases}$$

zaključujemo da i sistem $\{u_k(x)\} = \{\cos(k\pi x)\}$ jeste ortogonalan, čije se normiranje postiže konstantom $\sqrt{2}$.

Iz izvođenja (9) se uz korišćenje uslova (5) opet lako vidi da je i u ovom slučaju $L = L^*$.

2.3 Problem sopstvenih vrednosti sa Robinovim graničnim uslovima

Granični problem $(8),(6)$ razmatraćemo u slučaju kada je $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$. U tom slučaju nije teško pokazati da je operator L koji odgovara Robinovom graničnom zadatku takođe samokonjugovan i nenegativan .

$$(Lu, v) = \int\limits_0^1 Lu\, v\, dx = \int\limits_0^1 -u''v\, dx = -u'v\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 u'v'dx =$$

$$= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int\limits_0^1 u'v'dx = \sigma_2 u(1)v(1) + \sigma_1 u(0)v(0) + \int\limits_0^1 u'v'dx.$$

Slično,

$$(u, Lv) = \int\limits_0^1 u\, Lv\, dx = \int\limits_0^1 -uv''\, dx =$$

$$= \sigma_2 v(1)u(1) + \sigma_1 v(0)u(0) + \int\limits_0^1 v'u'dx,$$

odakle sledi da je $L = L^*$. Pošto je $(Lu, u) = \sigma_2 u^2(1) + \sigma_1 u^2(0) + \int\limits_0^1 (u')^2 dx \geq 0$, on je i nenegativan pa su i sve sopstvene vrednosti ovog zadatka nenegativne.

Ako je $\lambda = \mu^2$, opšte rešenje jednačine ima oblik

$$u = C_1 \sin(\mu x) + C_2 \cos(\mu x) = D_1 \sin(\mu x + \gamma),$$

pa sopstvenu funkciju možemo tražiti u obliku

$$u = \sin(\mu x + \gamma). \tag{10}$$

Prvi izvod funkcije u je $u' = \mu \cos(\mu x + \gamma)$, a drugi izvod je $u'' = -\mu^2 \sin(\mu x + \gamma)$. Ako u (8) zamenimo u u u'' dobićemo $\lambda = \mu^2$. Iz Robinovih graničnih uslova (6) imamo:

$$\mu \cos\gamma = \sigma_1 \sin\gamma$$

$$\mu \cos(\mu + \gamma) = -\sigma_2 \sin(\mu + \gamma).$$

Ako prvu od ove dve jednakosti podelimo sa $\cos\gamma$ dobijamo $\mu = \sigma_1 \mathrm{tg}\,\gamma$, odakle je

$$\mathrm{tg}\,\gamma = \frac{\mu}{\sigma_1}.$$

Druga jednakost je ekvivalentna sa

$$\mu \cos\mu \cos\gamma - \mu \sin\mu \sin\gamma = -\sigma_2 \sin\mu \cos\gamma - \sigma_2 \cos\mu \sin\gamma.$$

I ovu jednakost podelimo sa $\cos\gamma$,

$$\mu \cos\mu - \mu \sin\mu \,\mathrm{tg}\,\gamma = -\sigma_2 \sin\mu - \sigma_2 \cos\mu \,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$\mu \cos\mu + \sigma_2 \sin\mu + (\sigma_2 \cos\mu - \mu \sin\mu)\frac{\mu}{\sigma_1} = 0.$$

Pomnožimo ovu sa jednakost sa σ_1,

$$\sigma_1 \mu \cos\mu + \sigma_1 \sigma_2 \sin\mu + \sigma_2 \mu \cos\mu - \mu^2 \sin\mu = 0,$$

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\mu \cos\mu = (\mu^2 - \sigma_1 \sigma_2) \sin\mu.$$

Podelimo još ovu jednakost sa $\mu \sin\mu$,

$$(\sigma_1 + \sigma_2)\,\mathrm{ctg}\,\mu = \mu - \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\mu}. \tag{11}$$

U ovoj jednačini nepoznat je parametar μ, dok su σ_1 i σ_2 konstante koje figurišu u Robinovim graničnim uslovima (6). Kako ne možemo μ odavde odrediti eksplicitno, poslužimo se grafičkim i numeričkim metodama da bismo odredili rešenje.

Funkciju sa leve strane jednakosti (11) označimo sa $f_1(\mu)$, a sa desne strane sa $f_2(\mu)$. Rešenja μ se nalaze u preseku grafika funkcija $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$.
Pronađimo sopstvene vrednosti μ za neke vrednosti parametara σ_1, σ_2. Primetimo da se za $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ problem svodi na Nojmanov granični zadatak $(8), (5)$, koji

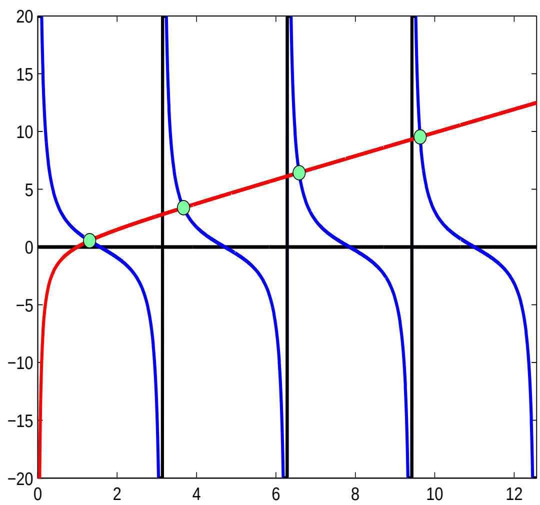
smo već razmotrili. Takođe, ako jednačinu (11) posmatramo kao funkciju po σ_1 i σ_2, odnosno ako (11) zapisemo u obliku $g(\sigma_1, \sigma_2) = 0$, onda se lako vidi da vazi $g(\sigma_1, \sigma_2) = g(\sigma_2, \sigma_1)$.

Koristeći programski paket MATLAB rešili smo jednacinu (11). Program dozvoljava unos parametara σ_1, σ_2, a kao rezultat nam vraća grafike funkcija $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$ sa istaknutim presečnim tačkama. Vrednosti μ za koje važi $f_1(\mu) = f_2(\mu)$ određene su numeričkim metodma. Kvadrati tih dobijenih vrednosti jesu upravo tražene sopstvene vrednosti.

Ideja programa je sledeća. Definišimo prostor $[0, 4\pi] \times [-20, 20] \subset R^2$ kome pripadaju grafici funkcija $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$. Pošto je osnovni tip podataka u MATLAB-u matrica, odnosno vektor, μ-osa je zadata diskretno sa korakom $h = \frac{\pi}{1000}$, pa i funkcije $f_1(\mu), f_2(\mu)$ treba shvatiti kao diskretno zadate velicine (vektore, čiji su elementi vrednosti funkcija f_1, f_2 u čvorovima sa μ-ose). Presečne tačke grafika ovih dveju funkcija tražimo kao lokalne ekstreme (minimume) funkcije $|f_1(\mu) - f_2(\mu)|$. Naime, najpre je moguće sa tačnošću ε, tj. sa uslovom $|f_1(\mu) - f_2(\mu)| < \varepsilon$ lokalizovati presečne tačke i iscrtati grafike. Tim postupkom su već nađene apscise μ presečnih tačaka. Međutim, tačnost možemo poboljšati tako što ćemo naći tačke lokalnih minimuma funkcije $|f_1(\mu) - f_2(\mu)|$. One se dobijaju u nulama prvog izvoda te funkcije. Zato se poslužimo i tehnikama numeričkog diferenciranja. Pogodno je iskoristiti diferencirani prvi Njutnov interpolacioni polinom s obzirom na ekvidistantni raspored čvorova (može se implementirati i drugi Njutnov interpolacioni polinom, razlika je samo u izboru čvorova). Razni test primeri (u kojima menjamo samo parametre σ_1, σ_2) pokazuju da se sva rešenja $\mu \in [0, 4\pi]$ koja samo dobili na ovaj način razlikuju od rešenja koja smo dobili pri lokalizaciji sa tačnošću ε uglavnom od treće decimale.

Najzad, navedimo nekoliko primera.

Primer 1: $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$

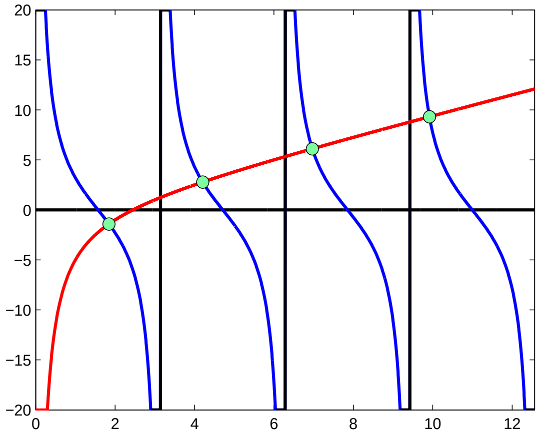


Slika 1

Za prve četiri sopstvene vrednosti dobijamo, budući da je $\lambda = \mu^2$, sledeće vrednosti: 1.7063, 13.4878, 43.3521, 92.7646.

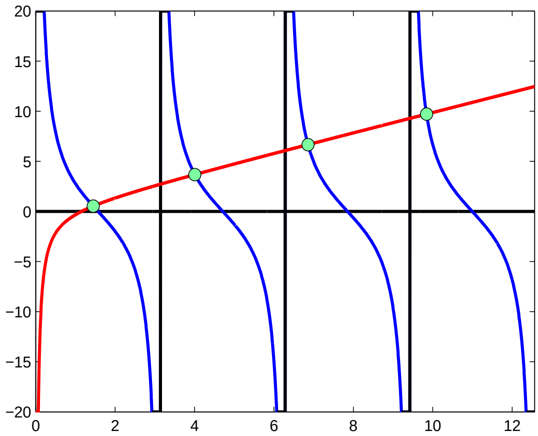
Funkcije $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$ "zadržavaju svoje osobine" i pri svakom drugom izboru konstanti σ_1, $\sigma_2 > 0$, jer tada se samo vrši odgovarajuće skaliranje funkcija $\operatorname{ctg}\mu$ i $\dfrac{1}{\mu}$. Tačnije, funkcija $\operatorname{ctg}\mu$ se množi konstantom $\sigma_1 + \sigma_2$, a funkcija $\frac{1}{\mu}$ konstantom $\sigma_1\sigma_2$, pa su grafici funkcija $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$ "slični" kao na **Slici 1.**

Primer 2: $\sigma_1 = 2$, $\sigma_2 = 3$



Slika 2
Prve četiri sopstvene vrednosti su: 3.4023, 17.6833, 48.5625, 98.3525.

Primer 3: $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = \frac{1}{3}$



Slika 3
Prve četiri sopstvene vrednosti su: 2.0988, 16.0664, 47.0548, 96.9146

2.4 Problem sopstvenih vrednosti sa nelokalnim Robin - Dirihleovim graničnim uslovima

Razmotrimo sledeći granični problem:

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u'(0) &= \sigma_0 u(0) - \rho_0 u(1) \\ u'(1) &= -\sigma_1 u(1) + \rho_1 u(0) \end{aligned} \tag{12}$$

Za razliku od do sada posmatranih graničnih uslova, uslovi (12) su nelokalni. U njima se pojavljuju vrednosti nepoznate funkcije i njenih izvoda u obe granične tačke. Primetimo odmah da za $\rho_0 = \rho_1 = 0$ problem se svodi na Robinov, a ako je još i $\sigma_0 = \sigma_1 = 0$, onda se radi o Nojmanovom graničnom problemu. Inače, rešenje ovog problema takođe potražimo u obliku $u = \sin(\mu x + \gamma)$. Odnosno, ponovo vazi da je $\lambda = \mu^2$. Kada u i u' zamenimo u (12), dobićemo sledeće dve jednačine:

$$\mu \cos \mu = \sigma_0 \sin \gamma - \rho_0 \sin(\mu + \gamma)$$

$$\mu \cos(\mu + \gamma) = -\sigma_1 \sin(\mu + \gamma) + \rho_1 \sin \gamma.$$

Primenjujući poznate trigonometrijske identitete za sinus i kosinus zbira uglova dobijamo iz prve jednačine

$$\mu \cos \gamma = \sigma_0 \sin \gamma - \rho_0 \sin \mu \cos \gamma - \rho_0 \cos \gamma \sin \mu,$$

a iz druge

$$\mu \cos \mu \cos \gamma - \mu \sin \mu \sin \gamma = -\sigma_1 \sin \mu \cos \gamma - \sigma_1 \cos \mu \sin \gamma + \rho_1 \sin \gamma.$$

Iz prve dalje, deleći je sa $\cos \gamma$, dobijamo:

$$\mu = \sigma_0 \mathrm{tg}\, \gamma - \rho_0 \sin \mu - \rho_0 \cos \mu \,\mathrm{tg}\, \gamma,$$

$$(\sigma_0 - \rho_0 \cos \gamma)\mathrm{tg}\, \gamma = \mu + \rho_0 \sin \mu,$$

$$\mathrm{tg}\, \gamma = \frac{\mu + \rho_0 \sin \mu}{\sigma_0 - \rho_0 \cos \mu}.$$

Ako i drugu jednačinu podelimo sa $\cos \gamma$ imamo

$$\mu \cos \mu - \mu \sin \mu \,\mathrm{tg}\, \gamma + \sigma_1 \sin \mu + \sigma_1 \cos \mu \,\mathrm{tg}\, \gamma - \rho_1 \mathrm{tg}\, \gamma = 0,$$

$$\mu \cos \mu + \sigma_1 \sin \mu + (\sigma_1 \cos \mu - \mu \sin \mu - \rho_1)\frac{\mu + \rho_0 \sin \mu}{\sigma_0 - \rho_0 \cos \mu} = 0.$$

Množeći poslednju jednakost sa $\sigma_0 - \rho_0 \cos \mu$, dobijamo

$$\sigma_0 \mu \cos \mu + \sigma_0 \sigma_1 \sin \mu - \rho_0 \mu \cos^2 \mu - \sigma_1 \rho_0 \sin \mu \cos \mu + \sigma_1 \mu \cos \mu +$$

$$+ \sigma_1 \rho_0 \sin \mu \cos \mu - \mu^2 \sin \mu - \mu \rho_0 \sin^2 \mu - \rho_1 \mu - \rho_0 \rho_1 \sin \mu = 0,$$

odnosno,

$$(\sigma_0+\sigma_1)\mu\cos\mu-\rho_0\mu(\cos^2\mu+\sin^2\mu)-\rho_1\mu+(\sigma_0\sigma_1-\rho_0\rho_1-\mu^2)\sin\mu=0,$$

$$(\sigma_0+\sigma_1)\mu\cos\mu-\mu(\rho_0+\rho_1)+(\sigma_0\sigma_1-\rho_0\rho_1-\mu^2)\sin\mu=0,$$

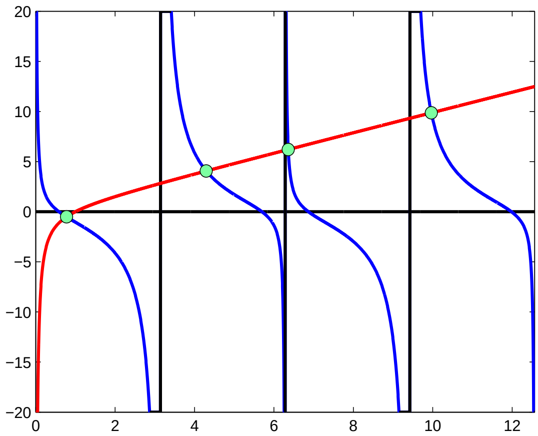
$$(\sigma_0+\sigma_1)\operatorname{ctg}\mu-\frac{\rho_0+\rho_1}{\sin\mu}=\mu-\frac{\sigma_0\sigma_1-\rho_0\rho_1}{\mu}. \tag{13}$$

Posmatrajmo jednačinu (13) i razmotrimo rešenje u zavisnosti od parametara $\sigma_0, \sigma_1, \rho_0, \rho_1$. Možemo iskoristiti već napisani program u MATLAB-u. Definišu se dve nove promenljive veličine ρ_0, ρ_1. Funkciju sa leve strane jednakosti (13) označimo sa $f_1(\mu)$, a sa desne strane sa $f_2(\mu)$. Dalje se zadatak rešava isto kao i kod Robinovog problema, odnosno, ideja za nalaženje sopstvenih vrednosti je ista.
Ako je $\sigma_0+\sigma_1=\rho_0+\rho_1=C$, onda je $f_1(\mu)=C(ctg\,\mu-\frac{1}{\sin\mu})$. Funkcija u zagradi je pozitivna na intervalima $(k\pi,(k+1)\pi)$, $k=1,3,5,...$, tj. $ctg\,\mu\geq\frac{1}{\sin\mu}$ na takvim intervalima. Uočavamo da postoje dva slucaja:

$$1)\ \sigma_0+\sigma_1\geq\rho_0+\rho_1,$$

$$2)\ \sigma_0+\sigma_1<\rho_0+\rho_1.$$

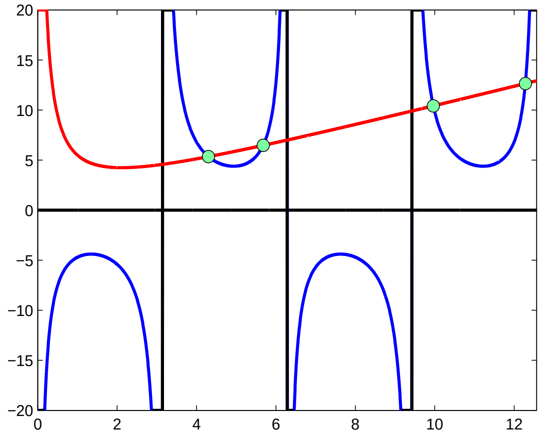
U prvom slučaju fukcija $ctg\,\mu$, “dominira” nad funkcijom $\frac{1}{\sin\mu}$, a u drugom slučaju obrnuto. U drugom slučaju se može desiti da je presek grafika funkcija $f_1(\mu)$ i $f_2(\mu)$ prazan (na intervalu $[0,4\pi]$ koji smo uzeli za domen tih funkcija pri pisanju programa), a to znači da ne postoje rešenja $\mu\in[0,4\pi]$, a samim tim ni odgovarajuće sopsvene vrednosti posmatranog graničnog zadatka. Što se tiče funkcije $f_2(\mu)$, to je, u opštem slučaju, kriva oblika $\mu-C\frac{1}{\mu}$, C=const, ali za $\sigma_i=\rho_j=0,\ i,j\in\{0,1\}$, postaje prava μ. Navedimo nekoliko primera koji idu u prilog izloženom teorijskom tumačenju.
Primer 1: $\sigma_0=1, \sigma_1=2, \rho_0=0.5, \rho_1=2$



Slika 1. ***Slučaj 1)***

Prve četiri sopstvene vrednosti su: 0.6015, 18.4466, 40.4719, 99.2923

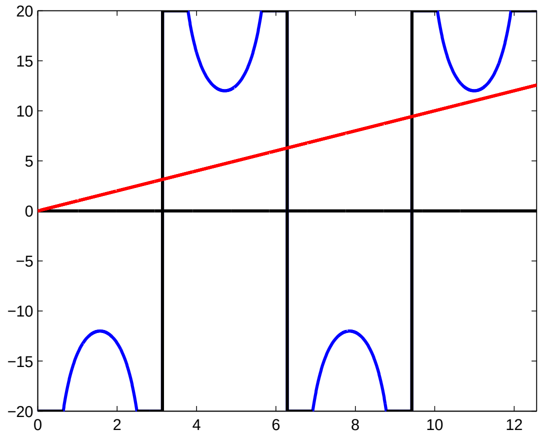
Primer 2: $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1.5, \rho_1 = 3$



Slika 2. ***Slučaj 2)***

Prve četiri sopstvene vrednosti su: 18.4924, 32.2486, 99.2932, 150.8627

Primer 3: $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 0, \rho_0 = 0, \rho_1 = 12$



Slika 3.

Za ovakav izbor parametara desilo se da ne postoji nijedno rešenje jednačine (13) u intervalu $[0, 4\pi]$, pa nemamo ni sopstvene vrednosti $0 < \lambda < (4\pi)^2$.

Na ovaj način smo dobijali samo pozitivne sopstvene vrednosti jer je $\lambda = \mu^2$. Proverimo da li nula može biti sopstvena vrednost problema (8), (12). Iz (8) se vidi da je za $\lambda = 0$ funkcija u oblika $u = ax + b$, gde su a i b konstante. Stavljajući u u uslove (12) dobijamo

$$u'(0) = a = \sigma_0 b - \rho_0(a + b),$$

$$u'(1) = a = -\sigma_1(a + b) + \rho_1 b,$$

odnosno

$$a(\sigma_0 - \sigma_1) + b(\sigma_0 - \rho_0 + \sigma_1 - \rho_1) = 0. \tag{14}$$

Dakle, $\lambda = 0$ jeste sopstvena vrednost ukoliko je ispunjen uslov (14).

Najzad, ako je $\lambda = -\mu^2 < 0$, opšte rešenje jednačine ima oblik

$$u = C_1 \sinh(\mu x) + C_2 \cosh(\mu x) = D_1 \sinh(\mu x + \gamma),$$

pa sopstvenu funkciju možemo tražiti u obliku $u = \sinh(\mu x + \gamma)$. Kada $u' = \mu \cosh(\mu x + \gamma)$ i $u'' = \mu^2 \sinh(\mu x + \gamma)$ zamenimo u (12), dobićemo sledeće dve jednačine:

$$\mu \cosh \mu = \sigma_0 \sinh \gamma - \rho_0 \sinh(\mu + \gamma)$$
$$\mu \cosh(\mu + \gamma) = -\sigma_1 \sinh(\mu + \gamma) + \rho_1 \sinh \gamma.$$

Primenjujući sledeće identitete za hiperboličke funkcije

$$\sinh(\mu + \gamma) = \sinh \mu \cosh \gamma + \cosh \mu \sinh \gamma,$$

$$\cosh(\mu + \gamma) = \cosh \mu \cosh \gamma + \sinh \mu \sinh \gamma,$$

dobijamo iz prve jednačine

$$\mu \cosh \gamma = \sigma_0 \sinh \gamma - \rho_0 \sinh \mu \cosh \gamma - \rho_0 \cosh \gamma \sinh \mu,$$

a iz druge

$$\mu \cosh \mu \cosh \gamma + \mu \sinh \mu \sinh \gamma = -\sigma_1 \sinh \mu \cosh \gamma - \sigma_1 \cosh \mu \sinh \gamma + \rho_1 \sinh \gamma.$$

Iz prve dalje, deleći je sa $\cosh \gamma$, dobijamo:

$$\mu = \sigma_0 \mathrm{tgh}\, \gamma - \rho_0 \sinh \mu - \rho_0 \cosh \mu \,\mathrm{tgh}\, \gamma,$$

$$(\sigma_0 - \rho_0 \cosh \gamma)\mathrm{tgh}\, \gamma = \mu + \rho_0 \sinh \mu,$$

$$\mathrm{tgh}\, \gamma = \frac{\mu + \rho_0 \sinh \mu}{\sigma_0 - \rho_0 \cosh \mu}.$$

Ako i drugu jednačinu podelimo sa $\cosh \gamma$ imamo

$$\mu \cosh \mu + \mu \sinh \mu \mathrm{tgh}\, \gamma + \sigma_1 \sinh \mu + \sigma_1 \cosh \mu \mathrm{tgh}\, \gamma - \rho_1 \mathrm{tgh}\, \gamma = 0,$$

$$\mu \cosh \mu + \sigma_1 \sinh \mu + (\sigma_1 \cosh \mu + \mu \sinh \mu - \rho_1) \frac{\mu + \rho_0 \sinh \mu}{\sigma_0 - \rho_0 \cosh \mu} = 0.$$

Množeći poslednju jednakost sa $\sigma_0 - \rho_0 \cosh \mu$, dobijamo

$$\sigma_0 \mu \cosh \mu + \sigma_0 \sigma_1 \sinh \mu - \rho_0 \mu \cosh^2 \mu - \sigma_1 \rho_0 \sinh \mu \cosh \mu + \sigma_1 \mu \cosh \mu +$$

$$+ \sigma_1 \rho_0 \sinh \mu \cosh \mu + \mu^2 \sinh \mu + \mu \rho_0 \sinh^2 \mu - \rho_1 \mu - \rho_0 \rho_1 \sinh \mu = 0,$$

odnosno,

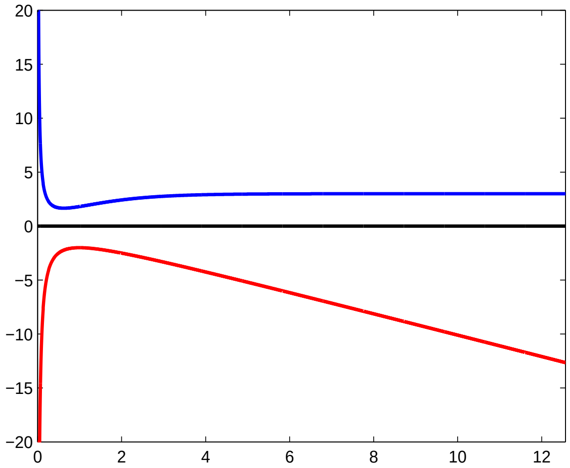
$$(\sigma_0 + \sigma_1)\, \mu \cosh \mu - \rho_0 \mu (\cosh^2 \mu - \sinh^2 \mu) - \rho_1 \mu + (\sigma_0 \sigma_1 - \rho_0 \rho_1 + \mu^2) \sinh \mu = 0,$$

$$(\sigma_0+\sigma_1)\mu\cosh\mu - \mu(\rho_0+\rho_1) + (\sigma_0\sigma_1 - \rho_0\rho_1 - \mu^2)\sinh\mu = 0,$$

$$(\sigma_0+\sigma_1)\operatorname{ctgh}\mu - \frac{\rho_0+\rho_1}{\sinh\mu} = -\mu - \frac{\sigma_0\sigma_1-\rho_0\rho_1}{\mu}. \tag{15}$$

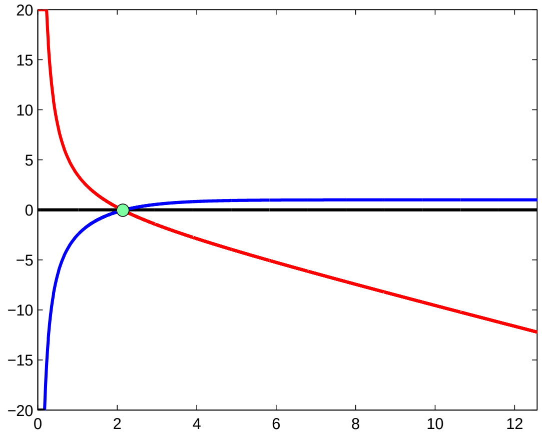
Ostaje još da u postojećem programu umesto jednačine (13) stavimo jednačinu (15) i testiramo program na sledećim primerima.

Primer 4: Za parametre kao iz primera 1, tj. $\sigma_0 = 1, \sigma_1 = 2, \rho_0 = 0.5, \rho_1 = 2$, nemamo negativne sopstvene vrednosti. Presek funkcija sa leve i desne strane jednačine (15) je prazan.



Slika 4.

Primer 5: Za parametre kao iz primera 2, tj. $\sigma_0 = 0, \sigma_1 = 1, \rho_0 = 1.5, \rho_1 = 3$, dobijamo jednu negativnu sopstvenu vrednost. Apscisa presečne tačke je 2.1422 pa je tražena sopstvena vrednost $-(2.1422)^2 = -4.5892$



Slika 5.

Ovaj granični zadatak razlikuje se od prethodnih po tome što operator L, u opštem slučaju, nije ni samokonjugovan ni nenegativan. U Dirihleovom, Nojmanovom i Robinovom graničnom zadatku ova dva uslova su bila ispunjena, što je garantovalo da su sve sopstvene vrednosti realne i nenegativne. Ispitajmo pod kojim uslovima će operator L koji odgovara zadatku (8), (12) ispunjavati ove uslove.

$$(Lu, v) = \int_0^1 -u''v\,dx = -u'v\Big|_0^1 + \int_0^1 u'v'dx =$$

$$= -u'(1)v(1) + u'(0)v(0) + \int_0^1 u'v'dx =$$

$$= [\sigma_1 u(1) - \rho_1 u(0)]v(1) + [\sigma_0 u(0) - \rho_0 u(1)]v(0) + \int_0^1 u'v'dx =$$

$$= \int_0^1 u'v'dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) - \rho_0 u(1)v(0) - \rho_1 u(0)v(1).$$

Slično,

$$(u, Lv) = (Lv, u) = \int_0^1 u'v'dx + \sigma_0 u(0)v(0) + \sigma_1 u(1)v(1) - \rho_0 u(0)v(1) - \rho_1 u(1)v(0).$$

Odavde sledi da je

$$(Lu, v) - (u, Lv) = (\rho_1 - \rho_0)[u(1)v(0) - u(0)v(1)],$$

pa zaključujemo da je operator samokonjugovan za $\rho_1 = \rho_0$. Dalje, za $v = u$ imamo

$$(Lu, u) = \int_0^1 (u')^2 dx + \sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) - (\rho_0 + \rho_1)u(0)u(1).$$

Kako je integral nenegativne funkcije nenegativan, poslednji izraz biće tim pre nenegativan ako je i

$$\sigma_0 u^2(0) + \sigma_1 u^2(1) - (\rho_0 + \rho_1)u(0)u(1) \geq 0,$$

odnosno,

$$(\rho_0 + \rho_1)^2 - 4\sigma_0\sigma_1 \leq 0.$$

Napomena: U vezi sa ovim, primetimo da je u primeru 4 zaista ispunjen uslov za pozitivnu definitnost ($(0.5+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 \leq 0$), pa ne postoje negativne sopstvene vrednosti.

2.5 Problem sopstvenih vrednosti sa periodičnim graničnim uslovima

Posmatrajmo problem sopstvenih vrednosti sledećeg oblika:

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u(0) &= u(1) \\ u'(0) &= u'(1) \end{aligned} \tag{16}$$

Uslovi (16) se nazivaju uslovima periodičnosti. Oni su takođe nelokalnog karaktera. Rešenje potražimo u obliku $u(x) = e^{\mu x}$. Na isti način kao kod problema (8), (4) i (8), (5) dobijamo da je $\mu_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$.

Za $\lambda < 0$ se lako proveri da ne postoje sopstvene funkcije (dobije se samo trivijalno rešenje).

Za $\lambda = 0$ imamo da je $\mu = 0$, odnosno $u \equiv 1$. Funkcija koja je identički jednaka jedinici na intervalu $[0, 1]$ jeste sopstvena funkcija jer je rešenje razmatranog zadatka (8), (16).

Za $\lambda > 0$, rešenje je oblika $u = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Iz graničnih uslova sledi da je

$$u(0) = C_1 = u(1) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda},$$

odakle izrazimo C_2

$$C_2 = \frac{C_1(1 - \cos\sqrt{\lambda})}{\sin\sqrt{\lambda}},$$

$$u' = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}x,$$

$$u'(0) = \sqrt{\lambda}C_2 = u'(1) = -\sqrt{\lambda}C_1 \sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}C_2 \cos\sqrt{\lambda}.$$

Podelimo poslednju jednakost sa $\sqrt{\lambda}$ $(\lambda > 0)$,

$$C_2 = -C_1 \sin\sqrt{\lambda} + C_2 \cos\sqrt{\lambda}.$$

Stavljajući ovde $C_2 = \dfrac{C_1(1 - \cos\sqrt{\lambda})}{\sin\sqrt{\lambda}}$, dobićemo $C_1(1 - \cos\sqrt{\lambda}) = 0$. Pošto želimo netrivijalno rešenje, konstanta C_1 mora biti različita od nule pa je zato

$$\cos\sqrt{\lambda} = 1,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Dakle, našli smo sopstvene vrednosti $\lambda_k = (2k\pi)^2$, $k = 1, 2, \ldots$ problema (8), (16). Stavljajući λ_k u granične uslove dobijamo samo identitete $C_1 = C_1$ i $C_2 = C_2$ što znači da su sopstvene funkcije ovog zadatka oblika

$$u = C_1 \cos(2k\pi x) + C_2 \sin(2k\pi x),$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne konstante. Odatle sledi da svakoj sopstvenoj vrednosti odgovaraju po dve linearno nezavisne funkcije, tj. sopstvene vrednosti su dvostruke. Ako zadatak zapišemo u operatorskom obliku $Lu = \lambda u$, onda se iz izvođenja (9) uz korišćenje graničnih uslova (16) jednostavno zaključi da je operator L samokonjugovan.

2.6 Asimetrični spektralni zadaci

Svi spektralni problemi koje smo do sada rešavali, svodili su se na samokonjugovane, izuzev Robin- Dirihleovog koji je takav u specijalnom slučaju ($\rho_0 = \rho_1$). Odgovarajuće sopstvene funkcije činile su ortogonalan sistem funkcija u prostoru $L_2(0,1)$. Sada ćemo razmotriti zadatak koji ne ispunjava ove osobine.
Ukoliko iz Dirihleovih uslova (4) zadržimo uslov u levom kraju intervala, i dodamo uslov jednakosti prvog izvoda rešenja u levom i desnom kraju intervala, dobijamo sledeći zadatak:

$$-u''(x) = \lambda u(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{8}$$

$$\begin{aligned} u(0) &= 0 \\ u'(0) &= u'(1) \end{aligned} \tag{17}$$

Od sada ćemo zadatak (8), (17) nazivati asimetrični spektralni zadatak. Uporedo sa tim zadatkom posmatraćemo i konjugovani asimetrični spektralni zadatak koji se obrazuje na sledeći način.

Lema 1. *Neka su $u(x)$ i $v(x)$ dve neprekidno diferencijabilne funkcije na odsečku $[0,1]$, pri čemu $u(x)$ zadovoljava granične uslove (17), a $v(x)$ zadovoljava granične uslove*

$$v(1) = v(0), \qquad v'(1) = 0. \tag{18}$$

Tada važi jednakost

$$(u''(x), v(x)) = (u(x), v''(x)) \tag{19}$$

gde je $(\cdot\,,\cdot)$ standardni skalarni proizvod u $L_2(0,1)$.

Dokaz:

$$(u''(x), v(x)) - (v''(x), u(x)) = \int_0^1 u''(x)v(x)dx - \int_0^1 v''(x)u(x)dx =$$

$$= u'v\Big|_0^1 - \int_0^1 u'(x)v'(x)dx - v'u\Big|_0^1 + \int_0^1 v'(x)u'(x)dx =$$

$= (u'(1)v(1) - u'(0)v(0)) - (v'(1)u(1) - v'(0)u(0)) =$

$= (u'(1)v(1) - v'(1)u(1)) - (u'(0)v(0) - v'(0)u(0))\,.$

Kako funkcija $u(x)$ zadovoljava granične uslove (18) imamo:

$$(u''(x), v(x)) - (v''(x), u(x)) = u'(1)(v(1) - v(0)) - v'(1)u(1).$$

Kako funkcija $v(x)$ zadovoljava granične uslove (18), iz prethodne jednakosti sledi:

$(u''(x), v(x)) - (v''(x), u(x)) = 0 \;\Rightarrow$

$(u''(x), v(x)) = (v''(x), u(x)) = (u(x), v''(x))\,.$

$\square$

Jednakost (19) pokazuje da operator L^* drugog reda sa graničnim uslovima (18) predstavlja konjugovani operator operatora L drugog reda sa graničnim uslovima (17).
Zbog toga, spektralni zadatak

$$-v''(x) = \bar{\lambda} v(x), \qquad 0 < x < 1 \tag{20}$$

$$\begin{aligned} v'(1) &= 0\,, \\ v(1) &= v(0)\,, \end{aligned} \tag{21}$$

nazivamo konjugovanim zadatkom, zadatka (8), (17).

Vrednost $\bar{\lambda}$ je sopstvena vrednost za spektralni zadatak (20), (21).

U daljem radu biće pokazano da konjugovani zadatak ima isti spektar (skup sopstvenih vrednosti) kao i osnovni zadatak; razlikuju se samo sopstvene i tzv. pridružene funkcije.

2.6.1 Sopstvene i pridružene funkcije asimetričnog spektralnog zadatka

Rešimo zadatak (8), (17), odnosno pronađimo sopstvene vrednosti i funkcije.

Pre svega, primetimo da za $\lambda = 0$ dobijamo sopstvenu funkciju $u_0(x) = x$. Zaista, pri $\lambda = 0$, iz (8) sledi da je $u(x) = ax + b$. Kako uslovi (17) moraju biti zadovoljeni imamo:

$$u(0) = 0 = b,$$

pa sa tačnošću do na proizvod sa konstantom imamo $u_0(x) = x$.

Dalje se, kao i u zadacima $(8),(4)$ i $(8),(5)$ rešenje traži u obliku

$$u(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x.$$

Iz (17) dobijamo

$$u(0) = 0 = C_1\,,$$

$$u'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = u'(1) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,, \quad \text{odakle sledi}$$

$$C_2\sqrt{\lambda} = C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,,$$

$$1 = \cos\sqrt{\lambda}\,,$$

$$\sqrt{\lambda} = 2k\pi, \quad k = 1, 2 \dots .$$

Sopstvene vrednosti su $\lambda_k = (2k\pi)^2, \quad k = 1, 2 \dots .$

Odgovarajuće sopstvene funkcije, sa tačnošću do na proizvod sa konstantom su:

$$u_0(x) = x, \qquad u_k(x) = \sin(2k\pi x), \qquad k = 1, 2 \dots .$$

Primetimo, da sopstvene funkcije u_k, za $k > 0$ nisu ortogonalne na u_0. Naime,

$$(u_0, u_k) = \int_0^1 u_0(x)u_k(x)dx = \int_0^1 x\sin(2k\pi x)dx =$$

$$= -\frac{1}{2k\pi}x\cos(2k\pi x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2k\pi}\cos(2k\pi x)dx = -\frac{1}{2k\pi} \neq 0$$

Sopstvene funkcije ovog problema ne čine potpun sistem tj. ne obrazuju bazu prostora funkcija $L_2(0,1)$. Međutim, sistem možemo popuniti tzv. pridruženim funkcijama.

Pridružena funkcija $\tilde{u}_k(x)$ koja odgovara istoj sopstvenoj vrednosti λ_k kojoj odgovara i sopstvena funkcija $u_k(x)$, određuje se kao rešenje graničnog zadatka

$$\tilde{u}_k''(x) + \lambda_k\tilde{u}_k(x) = p_k u_k(x), \quad 0 < x < 1,$$

(22)

$$\tilde{u}_k(0) = 0, \ \tilde{u}_k'(0) = \tilde{u}_k'(1), \ \ k = 0, 1 \dots$$

gde je $p_k \neq 0$ konstanta.

Istaknimo, problem (22) nije problem sopstvenih vrednosti.
Ovde su λ_k i $u_k(x)$ već poznati. I ovaj problem se može zapisti u operatorskom obliku:

$$L\tilde{u} = \lambda\tilde{u} - pu$$

Lema 2. *Ne postoje pridružene funkcije koje odgovaraju sopstvenoj vrednosti* $\lambda = 0$. *Ostalim sopstvenim vrednostima* λ_k *odgovaraju pridružene funkcije*

$$\tilde{u}_k(x) = x\cos(2k\pi x), \quad k = 1, 2 \dots \tag{23}$$

pri čemu je $p_k = -4\pi k$ *u* (22).

Dokaz:

Za $k = 0$, zadatak (22) dobija oblik

$$\tilde{u}_0''(x) = p_0 u_0(x), \ \tilde{u}_0(0) = 0, \ \tilde{u}_0'(0) = \tilde{u}_0'(1)$$

$$\tilde{u}_0''(x) = p_0 x$$

Odakle dobijamo $\tilde{u}_0'(x) = p_0 \dfrac{x^2}{2} + c_1$. Iz graničnih uslova se nađe da p_0 mora biti nula što nije dozvoljeno (jer je to konstanta različita od nule) pa ne postoji pridružena funkcija koja bi odgovarala $\lambda = 0$. Proverimo, da pri određenom izboru p_k, $k > 0$, pridružene funkcije imaju oblik (23). Zaista, takve funkcije zadovoljavaju (22)

$$\tilde{u}_k(x) = x\cos(2k\pi x)\,,$$

$$\tilde{u}_k'(x) = -2(k\pi x)\sin(2k\pi x) + \cos(2k\pi x)\,,$$

$$\tilde{u}_k''(x) = -2k\pi\sin(2k\pi x) - 4k^2\pi^2 x\cos(2k\pi x) - 2k\pi\sin(2k\pi x) =$$

$$= -4k\pi\sin(2k\pi x) - x(2k\pi)^2\cos(2k\pi x)\,,$$

$$\tilde{u}_k''(x) + \lambda_k\tilde{u}_k(x) = -4k\pi\sin(2k\pi x) - x(2k\pi)^2\cos(2k\pi x) + (2k\pi)^2(x\cos(2k\pi x)) =$$

$$= -4k\pi\sin(2k\pi x) = p_k u_k(x)\,,$$

$$p_k = -4\pi k = -2(2\pi k) = -2\sqrt{\lambda}_k, \ \tilde{u}_k(0) = 0$$

$$\tilde{u}_k'(0) = \cos 0 = 1, \ \tilde{u}_k'(1) = -2k\pi\sin(2k\pi) + \cos(2k\pi) = 1$$

□

Označimo $U_{2k} = u_k$ i $U_{2k-1} = \tilde{u}_k$ i poređajmo sopstvene (eig) i pridružene (adj) funkcije zadatka (8), (17) u sledeći niz:

$$(NIZ\,1) \ \ U_0(x) = x, \ U_{2k-1}(x) = x\cos(2k\pi x), \ U_{2k}(x) = \sin(2k\pi x), \ k = 1, 2 \dots .$$

I tako, svakoj sopstvenoj vrednosti λ_k, $k > 0$, odgovara jedna sopstvena funkcija $U_{2k}(x)$ i jedna pridružena funkcija $U_{2k-1}(x)$, pa je i pridruženih funkcija graničnog problema (8), (17) beskonačno mnogo.

2.6.2 Sopstvene i pridružene funkcije konjugovanog asimetričnog zadatka

Posmatrajmo granični problem (20), (21)

Lema 3. *Sopstvene vrednosti zadatka* (20), (21) *su* $\bar{\lambda}_k = \lambda_k = (2k\pi)^2$, $k = 0, 1 \ldots$, *i njima odgovaraju sopstvene funkcije*

$$v_0(x) = C_0, \;\; v_k(x) = C_k \cos(2k\pi x), \tag{16}$$

gde je $C_k \neq 0$ *konstanta.*

Dokaz: Za $\bar{\lambda}_k = 0$ dobijamo jednačinu $v''(x) = 0$, odakle je $v(x) = ax + b$. Iz graničnih uslova sledi da je $a = 0$ i $v(x) = \underline{const} = C_0$. Neka je $\lambda_k \neq 0$. Tada se opšte rešenje traži u obliku $v(x) = C_1 \sin \sqrt{\bar{\lambda}} x + C_2 \cos \sqrt{\bar{\lambda}} x$ odakle je

$$v'(x) = C_1 \sqrt{\bar{\lambda}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} x - C_2 \sqrt{\bar{\lambda}} \sin \sqrt{\bar{\lambda}} x\,,$$

$$v'(1) = 0 = C_1 \sqrt{\bar{\lambda}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - C_2 \sqrt{\bar{\lambda}} \sin \sqrt{\bar{\lambda}}\,,$$

$$v(1) = C_1 \sin \sqrt{\bar{\lambda}} + C_2 \cos \sqrt{\bar{\lambda}} = v(0) = C_2\,,$$

$$C_1 \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - C_2 \sin \sqrt{\bar{\lambda}} = 0\,,$$

$$C_1 = \frac{C_2(1 - \cos \sqrt{\bar{\lambda}})}{\sin \sqrt{\bar{\lambda}}}\,,$$

$$\frac{C_2(1 - \cos \sqrt{\bar{\lambda}})}{\sin \sqrt{\bar{\lambda}}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - C_2 \sin \sqrt{\bar{\lambda}} = 0 / \sin \sqrt{\bar{\lambda}}\,,$$

$$C_2(1 - \cos \sqrt{\bar{\lambda}} \cos \sqrt{\bar{\lambda}} - C_2(1 - \cos^2 \sqrt{\bar{\lambda}}) = 0\,,$$

$$C_2(\cos \sqrt{\bar{\lambda}} - \cos^2 \sqrt{\bar{\lambda}} - 1 + \cos^2 \sqrt{\bar{\lambda}}) = 0\,.$$

Da ne bismo dobili trivijalno rešenje, mora biti $C_2 \neq 0$, pa je $\cos \sqrt{\bar{\lambda}} = 1$,

odakle dobijamo $\bar{\lambda}_k = \lambda_k = (2k\pi)^2 \;\; k = 0, 1 \ldots$.

Iz graničnih uslova je $C_1 \cos(2k\pi) - C_2 \sin(2k\pi) = 0$, $tj.$ $C_1 = 0$ pa su sopstvene funkcije oblika $v(x) = C_2 \cos(2k\pi x)$

$\square$

Uzimajući u obzir svojstvo biortonormiranosti (v. 2.6.3.) dobijamo $C_0 = 2$, $C_k = 4$, $k = 1, 2, \ldots$.

Nađimo pridružene funkcije $\tilde{v}_k(x)$ konjugovanog zadatka (20), (21).

$$\tilde{v}_k''(x) + \lambda_k \tilde{v}_k(x) = p_k v_k(x),$$

$$\tilde{v}_k'(1) = 0, \;\; \tilde{v}_k(0) = \tilde{v}_k(1), \;\; k = 0, 1 \ldots .$$

Lema 4. *Ne postoje pridružene funkcije koje odgovaraju sopstvenoj vrednosti* $\lambda = 0$. *Ako stavimo da je* $p_k = -2\sqrt{\lambda_k} = -4\pi k, \quad k = 1, 2 \ldots ,$ *tada ostalim sopstvenim vrednostima* λ_k *odgovaraju pridružene funkcije*

$$\tilde{v}_k(x) = 4(1 - x)\sin(2k\pi x).$$

Dokaz:

Neka je $k = 0$. Tada

$$\tilde{v}_0''(x) = p_0 v_0(x) = p_0 C_0 = 2c = const$$

$$\tilde{v}_0(x) = cx^2 + dx + e, \;\; \tilde{v}_0'(x) = 2cx + d,$$

$$\tilde{v}_0'(1) = 0 \Rightarrow \; d = -2c, \; \tilde{v}_0(x) = cx^2 - 2cx + e,$$

$$\tilde{v}_0(0) = e, \; \tilde{v}_0(1) = -c + e, \; \tilde{v}_0(0) = \tilde{v}_0(1) \Rightarrow c = 0, \;\; d = 0$$

$$\tilde{v}_0''(x) = 0, \quad p_0 = 0\,,$$

tj. ne postoji pridružena funkcija jer je p_k konstanta različita od nule.
Neka je $k = 1, 2 \ldots .$ Tada, pridružene funkcije treba da budu rešenje jednačine

$$\tilde{v}_k''(x) + \lambda \tilde{v}_k(x) = p_k C_k \cos(2k\pi x),$$

$$\tilde{v}_k'(1) = 0, \; \tilde{v}_k(0) = \tilde{v}_k(1).$$

Proverimo da funkcija $\tilde{v}_k(x) = a(1 - x)\sin(2k\pi x)$ to zadovoljava.
Zaista,

$$\tilde{v}_k(0) = 0 = \tilde{v}_k(1) = 0\,,$$

$$\tilde{v}_k'(x) = a[2k\pi(1 - x)\cos(2k\pi x) - \sin(2k\pi x)], \;\; \tilde{v}_k'(1) = 0$$

$$\tilde{v}_k''(x) = a[-(1 - x)(2k\pi)^2 \sin(2k\pi x) - 4k\pi \cos(2k\pi x)],$$

$$\lambda_k \tilde{v}_k(x) = a(2k\pi)^2(1 - x)\sin(2k\pi x),$$

$$\tilde{v}_k''(x) + \lambda_k \tilde{v}_k(x) = a[-4k\pi \cos(2k\pi x)].$$

Kako je $v_k(x) = C_k \cos(2k\pi x)$, koeficijent a se nalazi iz uslova

$$-4k\pi a = p_k C_k$$

$$-4k\pi a = -(2\sqrt{\lambda_k}) \cdot 4$$

$$k\pi a = 2 \cdot 2k\pi$$

$$a = 4.$$

Sada je konačno $\tilde{v}_k(x) = 4(1-x)\sin(2k\pi x)$.

$\square$

Označimo $V_{2k} = v_k$ i $V_{2k-1} = \tilde{v}_k$ i poređajmo sopstvene (eig) u pridružene (adj) funkcije zadatka $(20), (21)$ u sledeći niz:

$$(NIZ\,2),\;\; V_0(x) = 2,\;\; V_{2k-1}(x) = 4\cos(2k\pi x),\;\; V_{2k}(x) = 4(1-x)\sin(2k\pi x)$$

$k = 1, 2 \ldots$.

I tako, svakoj sopstvenoj vrednosti $\lambda_k,\; k > 0$, odgovara jedna (eig) funkcija $V_{2k-1}(x)$ i jedna (adj) funkcija $V_{2k}(x)$.

2.6.3 Biortonormiranost sistema sopstvenih i pridruženih funkcija

Razmatrali smo dva asimetrična spektralna zadatka:
takozvani osnovni

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,\;\; u(0) = 0,\;\; u'(0) = u'(1)$$

i konjugovani

$$v''(x) + \bar{\lambda} v(x) = 0,\;\; v'(1) = 0,\;\; v(1) = v(0)\,.$$

Sopstvene vrednosti i jednog i drugog problema su iste: $\bar{\lambda}_k = \lambda_k = (2k\pi)^2, k = 0, 1 \ldots$, a videli smo kako se dobijaju dva sistema funkcija $(NIZ\,1)$ i $(NIZ\,2)$ koji se sastoje od sopstvenih i pridruženih funkcija osnovnog i konjugovanog zadatka respektivno.

Definicija 2.4.3. *Dva sistema funkcija* $f_k(x)$ *i* $g_l(x)$ $\;k, l = 1, 2 \ldots$, *nazivaju se biortonormiranim na odsečku* $[0, 1]$, *ako važi:*

$$(f_k, g_l) = \int\limits_0^1 f_k(x) g_l(x) dx = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

Sistemi se nazivaju biortogonalnim ako je $(f_k, g_l) = 0$ za sve $k \neq l$. Sistemi $(NIZ\,1), (NIZ\,2)$ su biortonormirani.

Lema 5. $(NIZ\,1)\, i\, (NIZ\,2)$ *čine biortonormiran sistem na odsečku* [0,1], *odnosno*

$$(U_k,\, V_l) = \delta_{kl}.$$

Ideja dokaza: Normiranje na jedinicu dokazuje se neposredno. Treba pokazati da funkcije iz $(NIZ\,1)$ i $(NIZ\,2)$ zadovoljavaju uslove $(U_l, V_l) = 1,\;\; l = 0, 1, \ldots$, odnosno treba da važe tri grupe jednakosti

1) $(U_0, V_0) = 1$

2) $(U_{2k-1},\, V_{2k-1}) = 1, \quad k = 1, 2, \ldots$

3) $(U_{2k},\, V_{2k}) = 1, \qquad\quad k = 1, 2, \ldots$

Ovo se svodi na računanje jednostavnih integrala. Potom se pokaže da važi i

1) $(U_{2k}, V_{2l-1}) = 0,\ \forall k, l;\;\; (U_{2k}, V_{2l}) = 0,\ \forall k \neq l$

2) $(U_{2k-1}, V_{2l-1}) = 0,\ \forall k \neq l;\;\; (U_{2k-1}, V_{2l}) = 0,\ \forall k, l$

Tim proverama je pokazana biortonormiranost sistema funkcija $U_k(x)$ i $V_l(x)$, $k, l = 1, 2, \ldots$.

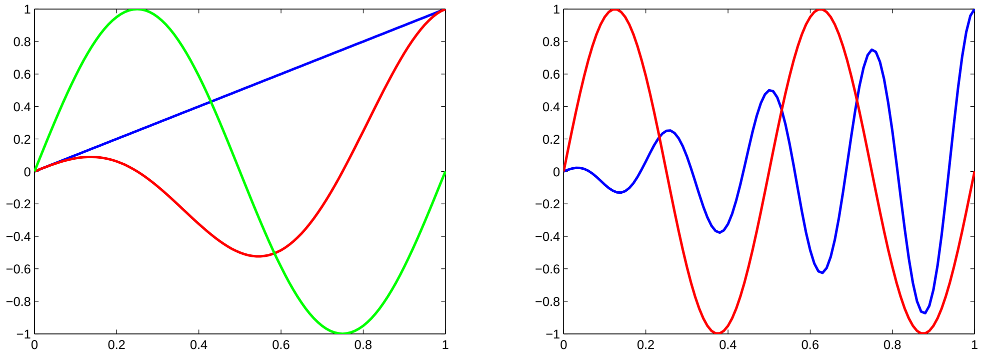
2.6.4 Grafički prikaz sopstvenih i pridruženih funkcija asimetričnog spektralnog zadatka i primer razlaganja funkcije u biortonormiran red

U sledećoj tablici dato je prvih pet sopstvenih vrednosti, kao i množitelja p_k problema (8), (17).

k	0	1	2	3	4
$\lambda_k = (2k\pi)^2$	0	39.48	157.9	355.3	631.7
$p_k = -4\pi k$		-12.57	-25.13	-37.7	-50.27

U kolonama niže navedene tablice date su vrednosti prvih pet (eig) i (adj) funkcija problema (8), (17) sračunate u tačkama podele intervala $[0, 1]$ sa korakom $h = 0.1$

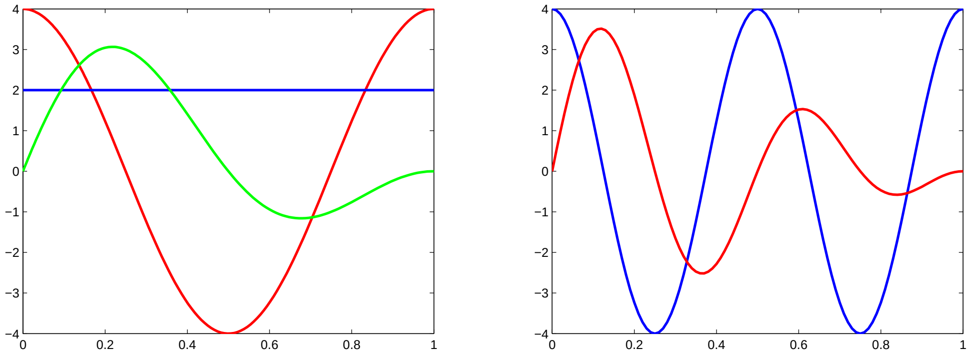
x	$U_0(x)$	$U_1(x)$	$U_2(x)$	$U_3(x)$	$U_4(x)$
0	0	0	0	0	0
0.1	0.1	0.0809	0.5878	0.0309	0.9511
0.2	0.2	0.0618	0.9511	-0.1618	0.5878
0.3	0.3	-0.9271	0.9511	0.2427	-0.5878
0.4	0.4	-0.3236	0.5878	0.1236	-0.9511
0.5	0.5	0.5	0	0.5	0
0.6	0.6	-0.4854	-0.5878	0.1854	0.9511
0.7	0.7	-0.2163	-0.9511	-0.5663	0.5878
0.8	0.8	0.2472	-0.9511	-0.6472	-0.5878
0.9	0.9	0.7281	-0.5878	0.2781	-0.9511
1.0	1	1	0	1	0



Slika 1. *Sopstvene (eig) i pridružene (adj) funkcije graničnog problema* (8), (17), *(levo :* $U_0(x), U_1(x), U_2(x)$; *desno :* $U_3(x), U_4(x)$*)*

Slično, dole u tabeli su navedene vrednosti, a niže i grafici (*eig*) *i* (*adj*) funkcija graničnog problema (20), (21)

x	$V_0(x)$	$V_1(x)$	$V_2(x)$	$V_3(x)$	$V_4(x)$
0	2	4	0	4	0
0.1	2	3.236	2.116	1.236	3.424
0.2	2	1.236	3.043	-3.236	1.881
0.3	2	-1.236	2.663	-3.236	-1.646
0.4	2	-3.236	1.411	1.236	-2.283
0.5	2	-4	0	4	0
0.6	2	-3.236	-0.9405	1.236	1.522
0.7	2	-1.236	-1.141	-3.236	0.7053
0.8	2	1.236	-0.7608	-3.236	0.4702
0.9	2	3.236	-0.2351	1.236	-0.3804
1.0	2	4	0	4	0



Slika 2. *Sopstvene* (eig) *i prdružene* (adj) *funkcije graničnog problema* (20), (21), *(levo* : $V_0(x), V_1(x), V_2(x)$; *desno* : $V_3(x), V_4(x)$*)*

Pokažimo sada, primera radi, razlaganje jedne konkretne funkcije u red po sopstvenim i pridruženim funkcijama. Slično razvoju u Furijeov red, za funkciju $\varphi(x)$ tražimo razvoj sledećeg oblika:

$$\varphi(x) = \varphi_0 U_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\varphi_{2k} U_{2k}(x) + \varphi_{2k-1} U_{2k-1}(x)\Big],$$

gde su koeficijenti

$$\varphi_0 = (\varphi, V_0) = 2\int_0^1 \varphi(x)dx,$$

$$\varphi_{2k-1} = (\varphi, V_{2k-1}) = 4\int_0^1 \varphi(x)\cos(2k\pi x)dx,$$

$$\varphi_{2k} = (\varphi, V_{2k}) = 4\int_0^1 \varphi(x)(1-x)\sin(2k\pi x)dx, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Napomena: Razvoj funkcije $\varphi(x)$ se vrši po (eig) i (adj) funkcijama zadatka (8), (17), a koeficijenti se računaju kao skalarni proizvod funkcije $\varphi(x)$ i (adj) i (eig) funkcija zadatka (20) i (21).

Primer 1.

Razviti u biortonormiran red polinom $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$.

Rešenje:

Polinom $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$ zadovoljava uslove $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) = \varphi'(1)$.

Za tu funkciju imamo

$$\varphi_0 = 2\int_0^1 (2x^3 - 3x^2)dx = -1$$

$$\varphi_{2k-1} = 4\int_0^1 (2x^3 - 3x^2)\cos(2k\pi x)dx = 0,$$

$$\varphi_{2k} = 4\int_0^1 (2x^3 - 3x^2)(1-x)\sin(2k\pi x)dx = \cdots = \frac{3}{\pi^3 k^3},$$

Dobijamo razvoj:

$$2x^3 - 3x^2 = -x + \sum_{k=1}^{\infty}\Big[\frac{3}{\pi^3 k^3}\sin(2k\pi x)\Big].$$

Označimo $\varphi(x) = 2x^3 - 3x^2$

$\varphi^{(1)}(x) = -U_0(x) + \varphi_2 \sin(2\pi x)$

$\varphi^{(2)}(x) = -U_0(x) + \varphi_2 \sin(2\pi x) + \varphi_4 \sin(4\pi x)$

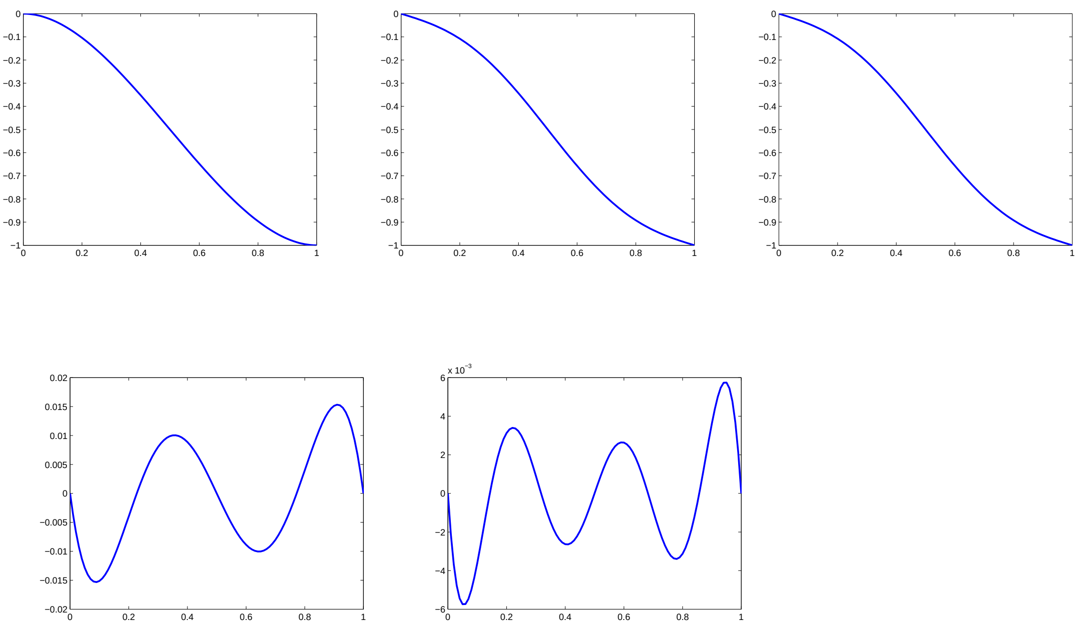
i greške, $z^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}(x) - \varphi(x),\ z^{(2)}(x) = \varphi^{(2)}(x) - \varphi(x),$

Grafici funkcija $\varphi(x),\ \varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x)$ i grafici $z^{(1)}(x)$ i $z^{(2)}(x)$ dati su na Slici 3.

Greške $z^{(1)}(x)$ i $z^{(2)}(x)$ se karakterišu svojim normama:

$$\|z^{(1)}\|_{L_2(0,1)} = \Big(\int_0^1 (z^{(1)}(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \approx 0.030$$

$$\|z^{(2)}\|_{L_2(0,1)} = \Big(\int_0^1 (z^{(2)}(x))^2 dx\Big)^{\frac{1}{2}} \approx 0.027$$



Slika 3. *Grafici funkcija* $\varphi(x),\ \varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ z^{(1)}(x),\ z^{(2)}(x),$ *redom*

3 Numeričko rešavanje problema sopstvenih vrednosti

3.1 Metoda konačnih razlika

Metoda konačnih razlika se zasniva na zameni izvoda količnicima konačnih razlika. Prvo se izabere konačno mnogo tačaka intervala [0,1], i one čine mrežu. Ako su čvorovi ravnomerno raspoređeni kažemo da je mreža ravnomerna ili ekvidistantna. Korak h je rastojanje između dva susedna čvora.

$$\bar{\omega}_h = \{x_i \mid \quad x_i = ih, \quad i = 0, \dots n, \quad h = \frac{1}{n}\}$$

$$\omega_h = \{x_i \mid \quad x_i = ih, \quad i = 1, \dots n-1, \quad h = \frac{1}{n}\}.$$

Aproksimacije prvog izvoda funkcije $u(x)$, u tački x_i su podeljene razlike unapred ili unazad:

$$u_{x,i} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h}, \quad u_{\bar{x},i} = \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h},$$

a drugog izvoda:

$$u_{x\bar{x},i} = (u_{x,i})_{\bar{x}} = \frac{u_{x,i} - u_{x,i-1}}{h} = \frac{\frac{u(x_{i+1}) - u(x_i)}{h} - \frac{u(x_i) - u(x_{i-1})}{h}}{h}$$

$$= \frac{u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1})}{h^2}$$

Prvi izvod možemo aproksimirati i centralnom podeljenom razlikom:

$$u_{\dot{x},i} = \frac{u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})}{2h} = \frac{u_{x,i} + u_{\bar{x},i}}{2}.$$

Ukoliko je funkcija $u(x)$ dovoljno glatka, razvojem u Tejlorov red možemo oceniti grešku ovih aproksimacija.

Na primer,

$$u'(x_i) - u_{x,i} = u'(x_i) - \frac{1}{h}\Big[u(x_{i+1}) - u(x_i)\Big] =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{h}\Big[u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i + \theta h) - u(x_i)\Big] =$$

$$= -\frac{h}{2}u''(x_i + \theta h) \quad \text{odakle sledi da je} \quad u'(x_i) = u_{x,i} + O(h)\,.$$

Ili, ako vršimo aproksimaciju centralnom podeljenom razlikom, onda imamo:

$$u'(x_i) - u_{\dot{x},i} = u'(x_i) - \frac{1}{2h}\Big[u(x_{i+1}) - u(x_{i-1})\Big] =$$

$$= u'(x_i) - \frac{1}{2h}\Big[u(x_i) + hu'(x_i) + \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u''(x_i + \theta_1 h) -$$

$$- u(x_i) + hu'(x_i) - \frac{h^2}{2}u''(x_i) + \frac{h^3}{6}u''(x_i + \theta_2 h)\Big] = O(h^2) \quad \text{odakle dobijamo da je}$$

$u(x_i) = u_{\dot{x},i} + O(h^2)$.

Kada $h \to 0$, tj. kada se mreža zgušnjava, aproksimacije teže vrednostima izvoda funkcije $u(x)$ u čvorovima. Pri tome, konvergencija je brža kod aproksimacije centralnim razlikama.
Zamenom funkcije $u(x)$ i njenih izvoda u graničnom problemu $(1), (2)$ odgovarajućim količnicima konačnih razlika u čvorovima mreže $\bar{\omega}_h$, vršimo diskretizaciju polaznog problema.
Kontinualnu veličinu $u(x)$ zamenjujemo vektorom $y = (y_0, \dots y_n)^T$, pri čemu je $y_i \approx u(x_i)$, a granični problem $(1), (2)$ sistemom linearnih jednačina po y_i,

$$-y_{x\bar{x},i} + p_i y_i = f_i, \;\; i = 1, \dots, n-1,$$

$$\alpha_1 y_{x,0} + \beta_1 y_0 = 0,$$

$$\alpha_2 y_{\bar{x},n} + \beta_2 y_n = 0$$

gde je $p_i = p(x_i)$ i $f_i = f(x_i)$.

Dobili smo tzv. diferencijsku shemu.

Primenimo ovu metodu na naš problem sopstvenih vrednosti $(7), (4)$. Dobijamo diferencijsku shemu s greškom $O(h^2)$ koja ima oblik

$$-y_{x\bar{x},i} + p_i y_i = \lambda_h y_i, \quad i = 1, \dots n-1$$

$$y_0 = y_n = 0,$$

gde je sa λ_h označena aproksimacija sopstvenih vrednosti.

Ova shema, u stvari, predstavlja homogeni sistem linearnih jednačina s trodijagonalnom matricom u kojoj figuriše parametar λ_h. Stoga se granični problem $(7), (4)$ metodom konačnih razlika, uzimajući u obzir granične uslove, svodi na problem sopstvenih vrednosti

$$Ay = \lambda_h y,$$

kvadratne matrice. Zbog

$$y = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

vektor y ćemo tretirati kao $(n-1)$- dimenzion.

Iz $-\frac{1}{h^2}\Big[y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}\Big] + p_i y_i = \lambda_h y_i, \;\; i = 1, \dots, n-1$

se vidi da je matrica A oblika

$$A = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & & & & 0 \\ -1 & 2 & -1 & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & & & & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & & & & 0 \\ & p_2 & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & \cdot \\ 0 & & & & p_{n-1} \end{pmatrix}$$

Matrica A je simetrična, a ako je $p(x) \geq 0$, ona je i pozitivno definitna pa su joj sve sopstvene vrednosti pozitivne. Sopstveni vektori predstavljaju aproksimacije prvih $(n-1)$ sopstvenih funkcija problema $(7), (4)$ u čvorovima mreže $\bar{\omega}_h$.
Razmotrimo u daljem radu aproksimacije konačnim razlikama osnovnog spektralnog problema $(8), (17)$ i pridruženog problema (22).

3.2 Diferencijska shema osnovnog asimetričnog spektralnog zadatka

Uveli smo pojam mreže $\bar{\omega}_h$ i izvršili identifikaciju

$$y_i = u(x_i) \leftrightarrow (y_0, y_1, \dots, y_{n-1}, y_n)^T.$$

Uvedimo i prostor H_h koji se sastoji od ovih vektora

$$H_h = \{y \;\;|\;\; y = (y_1, \dots, y_n)^T, \;\; y_0 = 0\}.$$

Posmatraćemo H_h kao $n-$dimenzioni vektorski prostor snabdeven skalarnim proizvodom i normom

$$(y, z] = \sum_{i=1}^{n-1} h y_i z_i + \frac{h}{2} y_n z_n,$$

$$||y|| = \sqrt{(y,y]}$$

Neka je dat operator $A : H_h \to H_h$ na sledeći način:

$$(Ay)_i = \begin{cases} 0, & i = 0 \\ -y_{x\bar{x},i}, & i = 1, ..., n-1 \\ -\frac{2}{h}(y_{x,0} - y_{\bar{x},n}), & i = n. \end{cases} \tag{25}$$

Pomoću njega osnovni asimetrični spektralni zadatak možemo zapisati kao

$$Ay = \lambda y, \quad y \in H_h.$$

Lema 6. *Pretpostavimo da je n neparno i označimo $m = (n-1)/2$.*

Sopstvene vrednosti operatora (25) *imaju oblik*

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Vrednost $\lambda_0 = 0$ je prosta sopstvena vrednost a njoj odgovarajuća sopstvena funkcija $\mu^{(0)}(x_i) = x_i$. Ostale sopstvene vrednosti su dvostruke. Za $k = 1, 2, \ldots, m$ svakoj sopstvenoj vrednosti λ_k odgovara jedna sopstvena funkcija $\mu^{(2k)}(x_i) = \sin(2k\pi x_i)$ i jedna pridružena funkcija $\mu^{(2k-1)}(x_i) = x_i \cos(2k\pi x_i)$, tako da su ispunjene jednakosti

$$\begin{aligned} A\mu^{(2k)}(x_i) &= \lambda_k \mu^{(2k)}(x_i), \\ A\mu^{(2k-1)}(x_i) &= \lambda_k \mu^{(2k-1)}(x_i) + p_k \mu^{(2k)}(x_i), \end{aligned} \tag{26}$$

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$

gde $p_k = 2\cos(k\pi h)\sqrt{\lambda_k} = \dfrac{2}{h}\sin(2k\pi h)$

U slučaju parnog n važi:

Lema 7. *Neka je n parno i $m = n/2$. Sopstvene vrednosti λ_k operatora* (25) *imaju oblik*

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h), \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Vrednosti λ_0 i $\lambda_{n/2} = \dfrac{4}{h^2}$ su proste sopstvene vrednosti kojima odgovaraju sopstvene *funkcije* $\mu^{(0)}(x_i) = x_i$ *i* $\mu^{(n/2)}(x_i) = (-1)^i x_i$. *Ostale sopstvene vrednosti su dvostruke. Za* $k = 1, 2, \ldots, m-1$ *svakoj sopstvenoj vrednosti* λ_k *odgovara jedna sopstvena funkcija* $\mu^{(2k)}(x_i) = \sin(2k\pi x_i)$ *i jedna pridružena funkcija* $\mu^{(2k-1)}(x_i) = = x_i \cos(2k\pi x_i)$, *tako da su ispunjene jednakosti* (26).

Sopstvene vrednosti i sopstvene - pridružene funkcije osnovnog spektralnog zadatka su pregledno date u sledećim tabelama.

n neparno	**n** parno
$k = 0: \ \lambda_0 = 0, \ \mu^{(0)}(x_j) = x_j$	$k = 0: \ \lambda_0 = 0, \ \mu^{(0)}(x_j) = x_j$
$k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2} \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $\mu^{(k)}(x_j) = \sin\left(\dfrac{2\pi kj}{n}\right)$	$k = 1, 2, \ldots, n/2 - 1$ $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2} \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $\mu^{(k)}(x_j) = \sin\left(\dfrac{2\pi kj}{n}\right)$
	$\lambda_{n/2} = \dfrac{4}{h^2}, \mu^{(n/2)}(x_i) = (-1)^j x_j$

Tabela 1. *Sopstvene vrednosti i sopstvene funkcije diferencijske sheme osnovnog asimetričnog spektralnog zadatka.*

n neparno	**n** parno
$k = 1, 2, \ldots, (n-1)/2$ $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2} \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $\tilde{\mu}^{(k)}(x_j) = x_j \cos\left(\dfrac{2\pi kj}{n}\right)$	$k = 1, 2, \ldots, n/2 - 1$ $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2} \sin^2\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$ $\tilde{\mu}^{(k)}(x_j) = x_j \cos\left(\dfrac{2\pi kj}{n}\right)$

Tabela 2. *Pridružene funkcije diferencijske sheme osnovnog asimetričnog spektralnog zadatka.*

Dokaz Leme 6. Jednakosti (26) proveravaju se neposredno.

Za funkciju $\mu^{(0)}(x_i) = x_i$, u tačkama $i = 1, 2, \ldots, n-1$ imamo

$$-(\mu^{(0)})_{x\bar{x},i} = -\frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2} = 0 = 0 \cdot \mu^{(0)}(x_i)$$

Osim toga, za $i = n$ imamo

$$-\frac{2}{h}((\mu^{(0)})_{x,0} - (\mu^{(0)})_{\bar{x},n}) = -\frac{2}{h}\Big(\frac{x_1 - x_0}{h} - \frac{x_n - x_{n-1}}{h}\Big) = 0 = 0 \cdot \mu^{(0)}(x_n)$$

Dakle, vrednost λ_0 je sopstvena vrednost operatora A, kojoj odgovara sopstvena funkcija $\mu^{(0)}(x_i) = x_i$

Proverimo dalje, da "mrežne" funkcije (funkcije definisane u čvorovima mreže intervala $[0,1]$),

$$\mu^{(2k)}(x_i) = \sin(2k\pi x_i), \quad k = 1, 2, \ldots, m$$

predstavljaju sopstvene funkcije operatora (25).

Zaista, za $i = 1, 2, \ldots, n-1$ dobijamo

$$-(\mu^{(2k)})_{x\bar{x},i} = -\frac{1}{h^2}\Big[\sin(2k\pi(x_i + h)) - 2\sin(2k\pi x_i) + \sin(2k\pi(x_i - h))\Big] =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[2\sin\frac{2k\pi(x_i + h + x_i - h)}{2}\cos\frac{2k\pi(x_i + h - x_i + h)}{2} - 2\sin(2k\pi x_i)\Big] =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[2\sin(2k\pi x_i)\cos(2k\pi h) - 2\sin(2k\pi x_i)\Big] =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[2\sin(2k\pi x_i)(\cos(2k\pi h) - 1)\Big] =$$

$$= \frac{1}{h^2}\Big[4\sin(2k\pi x_i)\frac{1 - \cos(2k\pi h)}{2}\Big] =$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h)\sin(2k\pi x_i) = \lambda_k \mu^{(2k)}(x_i).$$

Dalje, proverimo da li su zadovoljeni granični uslovi.

$$-\frac{2}{h}\Big[(\mu^{(2k)})_{x,0} - (\mu^{(2k)})_{\bar{x},n}\Big] =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big[\frac{\sin(2k\pi h) - \sin(2k\pi \cdot 0)}{h} - \frac{\sin(2k\pi \cdot 1) - \sin(2k\pi(1 - h))}{h}\Big] =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big[\frac{\sin(2k\pi h)}{h} + \frac{\sin(2k\pi(1 - h))}{h}\Big] =$$

$$= -\frac{4}{h^2}\Big[\sin\frac{2k\pi(h + 1 - h)}{2}\cos\frac{2k\pi(h - 1 + h)}{2}\Big] =$$

$$= -\frac{4}{h^2} \cdot 0 = \lambda_k \mu^{(2k)}(x_n).$$

Proverimo sada da za $k = 1, 2, \ldots, m$ "mrežne" funkcije

$\mu^{(2k-1)}(x_i) = x_i \cos(2k\pi x_i)$ predstavljaju pridružene funkcije operatora (25), gde je $\lambda = \lambda_k$ i $p = p_k \neq 0$

Za funkciju $z_i = x_i \cos(2k\pi x_i), \quad i = 1, 2, \ldots, m$ imamo

$$-z_{x\bar{x},i} =$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[(x_i + h)\cos(2k\pi(x_i + h)) - 2x_i\cos(2k\pi x_i) + (x_i - h)\cos(2k\pi(x_i - h))\Big]$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[x_i\Big(2\cos\frac{2k\pi\cdot 2x_i}{2}\cos\frac{2k\pi\cdot 2h}{2}\Big) +$$

$$+h\Big(-2\sin\frac{2k\pi\cdot 2x_i}{h}\sin\frac{2k\pi\cdot 2h}{h}\Big) - 2x_i\cos(2k\pi x_i)\Big]$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[2x_i\cos(2k\pi x_i)\cos(2k\pi h) - 2h\sin(2k\pi x_i)\sin(2k\pi h) - 2x_i\cos(2k\pi x_i)\Big]$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[-2x_i\cos(2k\pi x_i)(1 - \cos(2k\pi h)) - 2h\sin(2k\pi x_i)\sin(2k\pi h)\Big]$$

$$= -\frac{1}{h^2}\Big[-4x_i\cos(2k\pi x_i)\sin^2(k\pi h) - 2h\sin(2k\pi x_i)\sin(2k\pi h)\Big]$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h)x_i\cos(2k\pi x_i) + \frac{2\sin(2k\pi h)}{h}\sin(2k\pi x_i)$$

$$= \lambda_k\mu^{(2k-1)}(x_i) + p_k\mu^{(2k)}(x_i),$$

odakle se vidi da je $\quad p_k = \dfrac{2\sin(2k\pi h)}{h}$.

Sledi da važi

$$-(\mu^{(2k-1)})_{x\bar{x},i} = \lambda_k\mu^{(2k-1)}(x_i) + p_k\mu^{(2k)}(x_i),$$

za $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Za $i = n$ imamo

$$-\frac{2}{h}(z_{x,0} - z_{\bar{x},n}) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(\frac{z_1 - z_0}{h} - \frac{z_n - z_{n-1}}{h}\Big) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(\frac{h\cos(2k\pi h) - 0}{h} - \frac{\cos(2k\pi) - (1-h)\cos(2k\pi(1-h))}{h}\Big) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(\cos(2k\pi h) - \frac{1-(1-h)(\cos(2k\pi)\cos(2k\pi h)+\sin(2k\pi)\sin(2k\pi h))}{h}\Big) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(\cos(2k\pi h) - \frac{1-(1-h)\cos(2k\pi h)}{h}\Big) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(\cos(2k\pi h) - \frac{1-\cos(2k\pi h)}{h} - \cos(2k\pi h)\Big) =$$

$$= -\frac{2}{h}\Big(-\frac{1-\cos(2k\pi h)}{h}\Big).$$

Konačno dobijamo

$$-\frac{2}{h}(z_{x,0} - z_{\bar{x},0}) - \lambda_k z_n = 2\frac{1-\cos(2k\pi h)}{h^2} - \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h)\cos(2k\pi) =$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h) - \frac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h) = 0\,.$$

$\square$

Dokaz Leme 7. se izvodi analogno.

Napomena: Može se pokazati da sistem sopstvenih i pridruženih funkcija $\{\mu^{(k)}\}_{k=0}^{n-1}$ čini bazu u n- dimenzionom linearnom prostoru H_h koji se sastoji od vektora $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n)^T$ gde je $y_0 = 0$.

Za n neparno i $m = (n-1)/2$ uvedimo matricu

$$M = [\mu^{(0)}\mu_1, \ldots, \mu_m],$$

čije su kolone sopstveni i pridruženi vektori matrice operatora A.
Ovde je $\mu^{(0)}$ sopstveni vektor koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_0 = 0$, a μ_k je matrica sa dve kolone,

$$\mu_k = [\mu^{(2k-1)}\mu^{(2k)}], \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\mu^{(l)} = (\mu_1^{(l)}\mu_2^{(l)}\ldots\mu_n^{(l)})^T, \quad l = 1, 2, \ldots, n-1,$$

Možemo posmatrati matricu M kao linearni operator koji deluje na H_h. To je tzv. bazna matrica. Jednakosti (26) se mogu zapisati u matričnom obliku

$$AM = MJ,$$

gde je A matrica operatora (25) i

J blok - dijagonalna matrica,

$$J = diag[J_0, J_1, \ldots, J_m]$$

sa blokovima

$$J_0 = 0, \quad J_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 0 \\ p_k & \lambda_k \end{bmatrix}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Za n parno uvedimo matrice

$$M = [\mu^{(0)} \mu_1 \ldots \mu_m \, \mu^{(n/2)}],$$

$$J = diag[J_0, J_1, \ldots, J_m, J_{n/2}],$$

gde je $J_{n/2} = \lambda_{n/2}$ i $\mu^{(n/2)}$ sopstveni vektor matrice A koji odgovara sopstvenoj vrednosti $\lambda_{n/2}$.

Na snazi je i dalje matrična jednakost $AM = MJ$.

Zbog **Napomene**, matrica M^{-1} postoji pa je

$$A = MJM^{-1}.$$

Poznato je da spektar operatora čine sopstvene vrednosti. Odredimo donju i gornju granicu spektra našeg operatora A.

Primer: U slučaju $n = 4$ imamo

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad h = \frac{1}{4} = 0.25$$

Matrica M čije su kolone sopstvene i pridružene funkcije je oblika

$$M = \begin{bmatrix} x_1 & x_1\cos(2\pi x_1) & \sin(2\pi x_1) & x_1\cos(4\pi x_1) \\ x_2 & x_2\cos(2\pi x_2) & \sin(2\pi x_2) & x_2\cos(4\pi x_2) \\ x_3 & x_3\cos(2\pi x_3) & \sin(2\pi x_3) & x_3\cos(4\pi x_3) \\ x_4 & x_4\cos(2\pi x_4) & \sin(2\pi x_4) & x_4\cos(4\pi x_4) \end{bmatrix}$$

$$x_i = ih \;\Rightarrow\; x_i = 0.25\,i, \quad i = 1, 2, 3, 4$$

$$M = \begin{bmatrix} 0.25 & 0 & 1 & -0.25 \\ 0.5 & -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.75 & 0 & -1 & -0.75 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrica $J = M^{-1}AM$ je

$$J = \frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

odakle vidimo da $\lambda_1 = \dfrac{2}{h^2} = 32\Big(= \dfrac{4}{h^2}\sin^2\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big)\Big)$ i $p_1 = \dfrac{0.5}{h^2} = 8\Big(= 2\cos\Big(\dfrac{\pi}{4}\Big)\sqrt{32}\Big)$.

Lema 8. *Važe ocene*

$$\lambda_1 \geq \frac{2}{1+\sqrt{1-h^2}}, \qquad \lambda_m \leq \frac{2}{1-\sqrt{1-h^2}}\,.$$

Dokaz: Pokazano je da su $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h)$ sopstvene vrednosti operatora A.

Za $k = 1$ je $\lambda_1 = \dfrac{4}{h^2}\sin^2(\pi h)$.

Zato je prva od nejednakosti koju treba dokazati ekvivalentna nejednakosti

$$\frac{4}{h^2}\sin^2(\pi h) \geq \frac{2}{1+\sqrt{1-h^2}}\,,$$

$$\sin^2(\pi h) \geq \frac{h^2}{2(1+\sqrt{1-h^2})}\,,$$

$$\sin^2(\pi h) \geq \frac{h^2(1-\sqrt{1-h^2})}{2(1-1+h^2)}\,,$$

$$\frac{1-\cos(2\pi h)}{2} \geq \frac{1-\sqrt{1-h^2}}{2}\,,$$

(27) $$\cos(2\pi h) \leq \sqrt{1-h^2}.$$

Za n neparno i $m = (n-1)/2$ imamo

$$\lambda_m = \frac{4}{h^2}\sin^2(m\pi h) = \frac{4}{h^2}\sin^2\Big(\frac{n-1}{2}\pi\frac{1}{n}\Big)$$

$$= \frac{4}{h^2}\sin^2\Big(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi h}{2}\Big) = \frac{4}{h^2}\cos^2\frac{\pi h}{2}$$

$\Big($jer je $\sin\Big(\dfrac{\pi}{2} - \alpha\Big) = \cos(\alpha)$ za $\alpha \in \Big[0, \dfrac{\pi}{2}\Big]\Big)$.

Druga nejednakost koju treba dokazati ekvivalentna je nejednakosti

$$\frac{4}{h^2}\cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \leq \frac{2}{1-\sqrt{1-h^2}}\,,$$

$$\cos^2\left(\frac{\pi h}{2}\right) \leq \frac{h^2(1+\sqrt{1-h^2})}{2(1-1+h^2)}\,,$$

$$\frac{1+\cos(\pi h)}{2} \leq \frac{1+\sqrt{1-h^2}}{2}\,,$$

$$\cos(\pi h) \leq \sqrt{1-h^2}. \tag{28}$$

Ne umanjujući opštost, možemo smatrati da je $h \leq \frac{1}{2}$ (da bi mreža ω_h imala više od jedne tačke, odnosno $\bar{\omega}_h$ više od tri).

Tada je $2\pi h \leq \pi$, $\;2\pi h \geq \pi h$, $\;\cos(2\pi h) \leq \cos(\pi h)$.

Zbog toga (27) sledi iz (28) pa je za potpun dokaz leme dovoljno proveriti nejednakost (28).

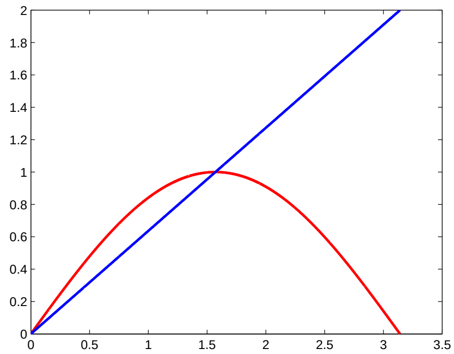
Kvadrirajući (28) dolazimo do

$$\cos^2(\pi h) \leq 1-h^2\,,$$
$$1-\sin^2(\pi h) \leq 1-h^2\,,$$

$$\sin^2(\pi h) \geq h^2. \tag{29}$$

Ako je $h \leq \dfrac{1}{2}$, onda je $\quad \pi h \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Primetimo da za $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ važi nejednakost $\quad \sin x \geq \dfrac{2x}{\pi}$



Pošto su $\sin x$ i $\dfrac{2x}{\pi}$ veći od nule za $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ imamo $\sin^2 x \geq \dfrac{4x^2}{\pi^2}$. Umesto x

stavimo πh. Sledi da važi nejednakost

$$\sin^2(\pi h) \geq \frac{4\pi^2 h^2}{\pi^2} = 4h^2. \tag{30}$$

Nejednakost (29) sledi iz (30).

$$(30) \;\Rightarrow\; (29) \;\Rightarrow\; (28)$$

$\square$

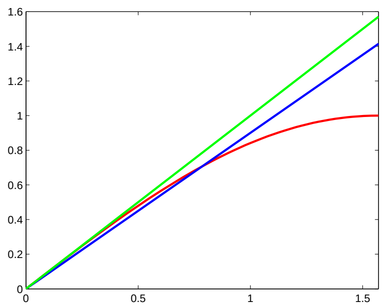
Dakle, sopstvene vrednosti $\lambda_k = \dfrac{4}{h^2}\sin^2(k\pi h)$ su zbog

$$0 < \pi h \leq k\pi h \leq m\pi h = \frac{n-1}{2}\pi\frac{1}{n} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2h} < \frac{\pi}{2}$$

poređane u rastućem poretku u kome su nam na osnovu prethodne leme poznate donja i gornja granica

$$\frac{2}{1+\sqrt{1-h^2}} \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots \leq \lambda_m \leq \frac{2}{1-\sqrt{1-h^2}}.$$

Donja ocena se može i preciznije odrediti ako je, $h \leq \dfrac{1}{4}$. Na intervalu $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$ funkcija $\sin x$ se nalazi između prave koja prolazi kroz tačke $\left(0,0\right)$ i $\left(\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i prave x,



$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi}x \leq \sin x \leq x$$

$$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} \leq \frac{\sin x}{x}$$

$$\lambda_1 = \frac{4}{h^2}\sin^2\pi h = 4\Big(\frac{\sin\pi h}{h}\Big)^2 = 4\pi^2\Big(\frac{\sin\pi h}{\pi h}\Big)^2 \geq 4\pi^2\cdot\Big(\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\Big)^2 = 32\,.$$

Vidimo da su sve sopstvene vrednosti osnovnog asimetričnog spektralnog zadatka veće od 32.

Iz asimptotskog razvoja sinusne funkcije, za fiksno k, sledi

$$\frac{\lambda_{h,k}}{\lambda_k} = \frac{4\sin^2(k\pi h)}{h^2(2k\pi)^2} = \Big(\frac{\sin(k\pi h)}{k\pi h}\Big)^2 = \Big(1 - \frac{1}{3!}(k\pi h)^2 + o(k^4h^4)\Big)^2 =$$

$$= 1 - \frac{1}{3}(k\pi h)^2 + o(k^8h^8) \to 1 \qquad \text{ako} \quad kh \to 0.$$

Specijalno, za n neparno i $m = \dfrac{n-1}{2}$, $h = \dfrac{1}{n}$,

$$\frac{\lambda_{h,m}}{\lambda_m} = \frac{\dfrac{4}{h^2}\sin^2\Big(\dfrac{(n-1)h\pi}{2}\Big)}{4\Big(\dfrac{n-1}{2}\Big)^2\pi^2} = \frac{\dfrac{1}{h^2}\sin^2\Big(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi h}{2}\Big)}{\dfrac{(n-1)^2\pi^2}{4}} = \frac{4}{h^2}\frac{h^2\cos^2\Big(\dfrac{\pi h}{2}\Big)}{(1-h)^2\pi^2} \to \frac{4}{\pi^2}\,,$$

kada $h \to 0$.

Možemo da zaključimo sledeće. Kontinualni problem (8), (17) sa pridruženim problemom (22) ima prebrojivo mnogo sopstvenih vrednosti i sopstvenih-pridruženih funkcija. Njegova diskretna aproksimacija konačnim razlikama ima ih konačno mnogo, tačnije $(n-1)$ gde je $(n+1)$ broj čvorova mreže diferencijske sheme. Stoga, diferencijskom shemom određujemo aproksimacije prvih $(n-1)$ sopstvenih vrednosti i sopstvenih - pridruženih funkcija pri čemu je aproksimacija sopstvene vrednosti lošija ukoliko je k veće. Smanjivanjem koraka h, tj. povećavanjem broja čvorova, dobijaju se aproksimacije većeg broja sopstvenih vrednosti, kao i veća tačnost aproksimacije onih sa nižim indeksom k.

Zaključak

U ovom radu predstavljeno je nekoliko graničnih problema sopstvenih vrednosti i metod konačnih razlika kojom se ti problemi mogu rešiti. U slučaju kada tražena sopstvena funkcija u ili njen izvod u' na krajevima intervala zadovoljavaju homogene uslove (a to su, redom, Dirihleov i Nojmanov problem), rešavanje problema je vrlo jednostavno. Diferencijalni operator L koji odgovara jednačini ima dobre osobine; samokonjugovan je i pozitivno definitan. Za takve operatore važi da su im sopstvene vrednosti realne i pozitivne i da su za različite sopstvene vrednosti odgovarajući sopstveni vektori uzajamno ortogonalni.(v. [6]). Međutim, već pri postavljanju Robinovih graničnih uslova, ne možemo naći sopstvene vrednosti analitičkim putem. Pojavljuju se nelinearne jednačine za čije rešavanje numerička matematika nudi razne metode. I dok je u klasičnoj matematici osnovni cilj utvrditi pod kojim uslovima postoji rešenje nekog zadatka i koje su osobine tog rešenja, zadatak numeričke matematike jeste efektivno nalaženje rešenja sa zadatom tačnošću. Na taj način numerička matematika zajedno sa razvijenom računarskom tehnikom postaje sredstvo kojim se ostvaruje cilj klasične matematike.

U slučaju kada operator nije obavezno samokonjugovan i pozitivan, pokazano je da možemo dobiti i negativnu sopstvenu vrednost. Nedostatak ortogonalnosti (samim tim i ortonormiranosti) sistema sopstvenih funkcija pri razmatranju asimetričnih zadataka je otklonjiv, u smislu da se može dopuniti pridruženim funkcijama čime dolazimo do pojma biortonormiranosti. Sada svaka sopstvena vrednost ima odgovarajuću sopstvenu i pridruženu funkciju. Važna osobina Hilbertovog prostora $L_2(0,1)$, da se svaka funkcija $f \in L_2(0,1)$ može razviti u Furijeov red po potpunom ortonormiranom sistemu funkcija u $L_2(0,1)$, važi i za biortonormiran sistem.

Opisana i primenjena metoda konačnih razlika na asimetričnom zadatku može se smatrati reprezentativnom metodom. Dobijene su takođe donja i gornja ocena za sopstvene vrednosti ovog zadatka. Dalji rad bi se mogao odnositi i na primenu nekih drugih numeričkih metoda (konačnih elemenata, varijacionih metoda...), kao i na upoređivanju rezultata.

Literatura

[1] А.В. Гулин, Н.И. Ионкин, В.А. Морозова:
Устойчивость нелокальных разностных схем, Издательство ЛКИ, Москва 2008.

[2] Boško Jovanović, Desanka Radunović:
Numerička analiza. Matematički fakultet, Beograd 2003.

[3] Julka Knežević-Miljanović, Svetlana Janković, Jelena Manojlović, Vladimir Jovanović:
Parcijalne diferencijalne jednačine. Univerzitetska štampa, Beograd 2000.

[4] Aleksandra M. Delić, Boško S. Jovanović, Zorica D. Milovanović:
About a Transmission Eigenvalue Problem in Disjoint Domains.
Comput. Methods Appl. Math. 11, No 4 (2011) (u štampi)

[5] Radoje Šćepanović, Julka Knežević-Miljanović, Ljubomir Protić:
Diferencijalne jednačine. Matematički fakultet, Beograd 2005.

[6] Miloš Arsenović, Milutin Dostanić, Danko Jocić:
Teorija mere, funkcionalna analiza, teorija operatora. Matematički fakultet, Beograd 1998.