УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Илија - Петар Милић

ВИШЕДИМЕНЗИОНИ GARCH МОДЕЛИ С ПРИМЕНОМ У ФИНАНСИЈАМА

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Бојана Милошевић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Марко Обрадовић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Јелена Јоцковић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 23. септембар 2022.

Наслов мастер рада: Вишедимензиони GARCH модели с применом у финансијама

Резиме: Мотивација овог мастер рада базирана је на проблему промене условне дисперзије и коваријације/корелације временских серија током времена. Вишедимензиони GARCH модели омогућавају његово решавање и чине основ за формирање портфолија, вредновање финансијских инструмената и процену ризика. Нарочит значај примене ових модела примећује се у кризним ситуацијама (Светска економска криза 2008. године, пандемија вируса Ковид - 19, рат у Украјини), јер омогућавају прецизније моделовање динамике тржишта. Рад је подељен у 5 целина. На самом почетку представљен је једнодимензиони модел и приступа се његовом уопштењу. У глави 2 биће приказане основне варијанте спецификација вишедимензионих модела као и њихових својстава. Како би конструисани модели били применљиви у пракси у глави 3 се уводе услови стационарности, који чувају статистичка својства временске серије током времена. Централни део рада је фокусиран на оцену параметара приликом формирања модела, формулисање критеријума за квалитет модела као и предвиђањем будућих вредности што ће бити описано у глави 4. На самом крају биће приказане примене ових модела на реалне податке користећи моделе и својства која су претходно теоријски дефинисана. Примери и симулације биће употпуњени коришћењем програмског језика R.

Кључне речи: временске серије, вишедимензиони GARCH модели, волатилност, финансије

Садржај

Глава 1

Увод

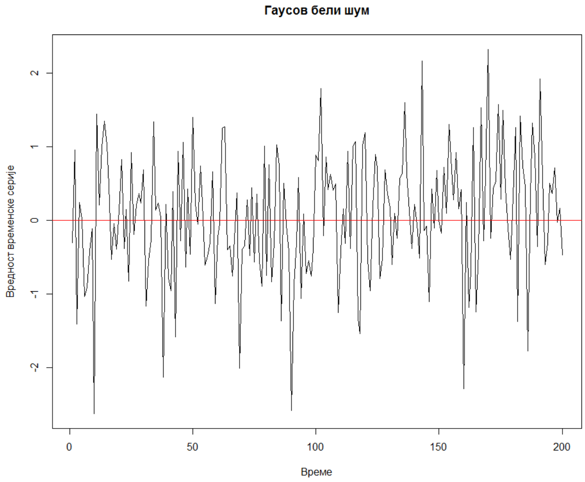
Дисперзија, један од централних појмова статистике, дефинисана је као математичко очекивање квадрата одступања случајне величине од своје средње вредности (што се формализује појмом математичког очекивања). Када се посматрају временске серије неопходно је дискутовати динамику којом се мењају вредности дисперзије.

Дефиниција 1.1 (Филтрација)**.** *Нека је $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ простор вероватноћа, а $(I, \leq)$ потпуно уређен индексни скуп (најчешће је $I \in \{\mathbb{N}, \mathbb{R}^+\}$). Нека је за свако $i \in I$ са $\mathcal{F}_i$ дата сигма алгебра таква да $\mathcal{F}_i \subseteq \mathcal{A}$. Тада се $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_i)_{i \in I}$ назива филтрацијом уколико $\mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_l$ за свако $k \leq l$. Филтрације заправо представљају фамилије сигма алгебри које имају неопадајући поредак.*

Пример 1.1. *Нека је $(X_n)_{t \in T}$ случајни процес, дефинисан на простору вероватноћа $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Нека је са $\mathcal{F}_t = \sigma(X_k \,|\, k \leq t)$ дефинисана сигма алгебра генерисана случајним величинама $\{X_1, ..., X_t\}$. Тада $\mathbb{F} = (\mathcal{F})_{t \in T}$ представља филтрацију, јер су $\mathcal{F}_t$ сигма алгебре и важи $\sigma(X_k \,|\, k \leq t-1) \subseteq \sigma(X_k \,|\, k \leq t)$. Ова филтрација се још назива и природном филтрацијом.*

Нека је $\{X_t \,|\, t = 1, 2, ...\}$ временска серија и $\mathcal{F}_t = \sigma\{X_1, X_2, ..., X_t\}$ филтрација генерисана датом временском серијом.

Дефиниција 1.2 (Хомоскедастичност)**.** *Временска серија $\{X_t\}$ је хомоскедастична (хомогене дисперзије) уколико је дисперзија временске серије константна током времена тј.* $(\forall t = 1, 2, ...)\, D(X_t) = \sigma^2,\ \sigma = const.$

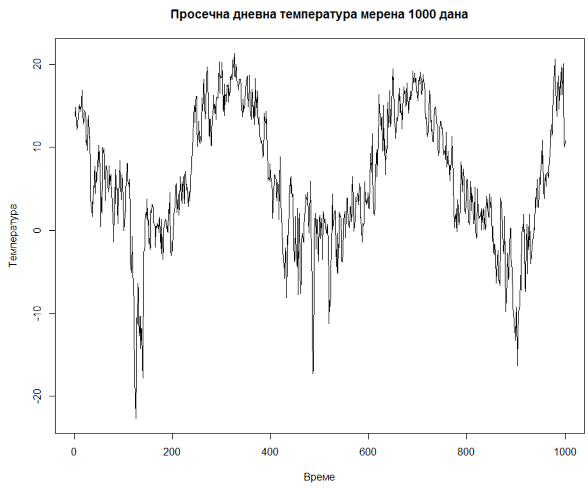


Слика 1.1: Хомоскедастична временска серија

График (Слика 1.1) представља реализацију вредности Гаусовог белог шума тј. 200 вредности из нормалне $\mathcal{N}(0,1)$ расподеле. У овом случају дисперзија је константна и износи 1 што одговара дефиницији хомоскедастичности.

У другом случају дисперзија временске серије није константна током времена, што се често дешава када је реч о временским серијама које моделују процес из реалног света. Тада се дисперзија представља као функција времена t. У зависности од типа промене вредности дисперзије током времена, разликују се две врсте:

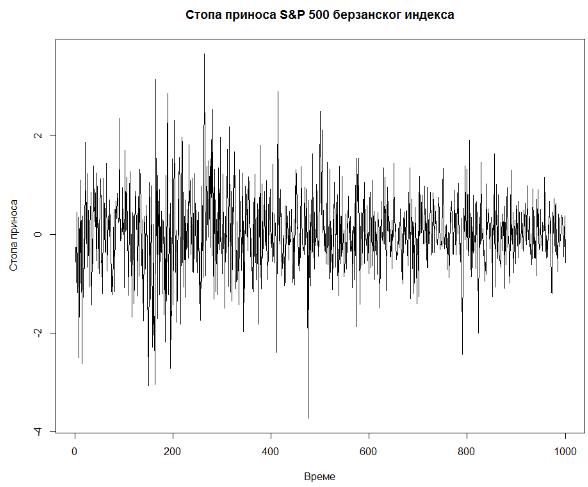
Дефиниција 1.3 (Хетероскедастичност)**.** *Временска серија $\{X_t\}$ је (неусловно) хетероскедастична (хетерогене дисперзије) уколико дисперзија временске серије зависи од параметра времена (t) тј.* $D(X_t) = \sigma_t^2$.



Слика 1.2: Хетероскедастична временска серија

График (Слика 1.2) представља температуру мерену на одређеном подручју током 1000 дана. На графику се може јасно увидети зависност дисперзије од временског тренутка t односно у овом случају годишњег доба.

Дефиниција 1.4 (Условна хетероскедастичност)**.** *Временска серија је условно хетероскедастична уколико је дисперзија временске серије корелисана у времену односно условна дисперзија (условна у односу на претходни ток временске серије) зависи од параметра времена (t) тј.* $D(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = \sigma_t^2$.



Слика 1.3: Условно хетероскедастична временска серија

График (Слика 1.3) представља промену стопе приноса S&P500 берзанског индекса. Реч је о финансијској временској серији и у овом случају примећују се периоди повећане или смањене дисперзије, што указује на то да је корелисана у времену.

За финансијске временске серије најзначајнија је условна хетероскедастичност (често се назива и волатилност), којом се квантификује мера варијације одређеног обележја (нпр. приноса) финансијског инструмента. С обзиром да је реч о реалном процесу очекује се да ће се дисперзија мењати током времена, такође та промена се не може одвијати потпуно независно у односу на претходни ток. Управо ову променљивост условне дисперзије (волатилности) временске серије описују (G)ARCH модели (погледати [9] и [4] у литератури).

Дефиниција 1.5 (GARCH(p, q) модели)**.** *Процес* $\{X_t\}$ *је GARCH(p, q) процес уколико су задовољени следећи услови:*

- *Прва два условна момента постоје и коначни су.*
- $E(X_t \,|\, X_u,\, u < t) = 0,\, t \in \mathbb{Z}$
- *Постоје константе* $\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_q, \beta_1, ..., \beta_p$ *такве да важи:*

$$\sigma_t^2 = D(X_t \,|\, X_u, u < t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2,\, t \in \mathbb{Z}$$

У претходној дефиницији није могуће експлицитно изразити GARCH(p, q) процес дат са $\{X_t\}$. Уколико се претпостави да важи услов: $\sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 = 0$ тада је са $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2$ дат један ARCH(q) процес. По дефиницији грешка процеса X_t^2 је дата са $\nu_t = X_t^2 - \sigma_t^2$. Када се замени σ_{t-j}^2 са $X_{t-j}^2 - \nu_{t-j}$ у једначини из дефиниције добија се:

$$X_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r} (\alpha_i + \beta_i) X_{t-i}^2 + \nu_t - \sum_{j=1}^{p} \beta_j \nu_{t-j},\;\; t \in \mathbb{Z},$$

где је $r = max\{p, q\}$ и важи да је $\alpha_i = 0, \forall i > q$ и $\beta_j = 0, \forall j > p$. Овако дефинисан модел има линеарну структуру ARMA модела, што омогућава једноставну прогнозу будућих вредности. Наметнути услов који је омогућио овакву репрезентацију није реалистичан. Он ће смањити способност да се довољно добро опише процес који је потребно моделовати, стога оваква репрезентација није добра. За директно изражавање процеса $\{X_t\}$ потребно је увести следећу дефиницију, која ће уз нешто строже услове то омогућити.

Дефиниција 1.6 (Јаки GARCH(p, q) модели). *Нека је* $\{e_t\}$ *низ независних и једнако расподељених случајних величина са очекивањем 0 и дисперзијом 1. Процес* $\{X_t\}$ *је јаки GARCH(p, q) процес уколико:*

- $X_t = \sigma_t e_t$, *где је* $(\forall t)\, \sigma_t > 0$
- $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2$, *где су* $\alpha_0 > 0$, $\alpha_1, ..., \alpha_q \geq 0$, $\beta_1, ..., \beta_p \geq 0$

Због своје структуре GARCH модел се разликује од стандардних модела временских серија, зато што не моделује условно очекивање вредности у одређеном временском тренутку t, већ условну дисперзију. Из тог разлога се они не могу користити за прогнозу саме вредности временске серије, већ се комбинују са другим моделима. Једнодимензиони случај је користан за разумевање концепата и разматрање теоријских својстава али није примењљив. У пракси, нпр. приликом формирања портфолија, није пожељно да се моделује један по један финансијски инструмент. На тај начин не би биле обухваћене њихове међузависности, што за последицу има непоуздану процену ризика. Уопштењем GARCH модела у више димензија, уместо дисперзије једног финансијског инструмента добија се матрица коваријације/корелације. Тиме је омогућено да се поред дисперзије појединачних серија, које описују кретање цене финансијских инструмената, одреде и њихове међусобне корелације. Управо је то један од главних разлога због чега је уопштење GARCH модела у више димензија неопходно.

Глава 2

Типови вишедимензионих GARCH модела

2.1 Конструкција вишедимензионог GARCH модела

Уопштење у више димензија доноси са собом одређене проблеме. Наиме, када је реч о стандардним моделима временских серија, предвиђање њене вредности у тренутку t се своди на одређивање условног очекивања. У том случају одговарајућа очекивана вредност вектора димензије m јесте вектор исте димензије. Код GARCH модела неопходно је одредити условну дисперзију, чије је уопштење у више димензија условна коваријациона матрица. Она захтева још и одређивање међусобних коваријација свих елемената вектора, па је њена димензија једнака $m \times m$. Како је коваријациона матрица симетрична то је неопходно одредити $\frac{m(m+1)}{2}$ вредности како би она била потпуно одређена. Природно би било представити сваки од ових елемената матрице као функцију вредности из прошлости али то би захтевало велики број параметара за оцењивање. Зато је неопходно увести одређена ограничења, која ће поступак конструкције учинити практично изводљивим.

Дефиниција 2.1. *Вишедимензиони GARCH модел у простору $\mathbb{R}^m$ је дефинисан са $X_t = (X_{1t}, ..., X_{mt})^T$ и важе следећи услови:*

- $E(X_t \,|\, X_u,\, u < t) = 0,\; t \in \mathbb{Z}$
- $cov(X_t \,|\, X_u,\, u < t) = E(X_t X_t^T \,|\, X_u,\, u < t) = H_t,\; t \in \mathbb{Z}$

За дефинисање јаких модела неопходно је искористити одређена својства матрице H_t. Познато је да је коваријациона матрица увек квадратна, симетрична, позитивно семидефинитна и да су њени сопствени вектори реално вредносни и позитивни. Тако да је могуће применити следеће декомпозиције.

Дефиниција 2.2 (Чолески декомпозиција)**.** *Нека је A симетрична позитивно дефинитна матрица. Чолески декомпозиција матрице A је дата са: $A = LL^T$, где је L доњетроугаона матрица са реалним и позитивним вредностима на дијагонали, а L^T транспонат матрице L. Свака симетрична позитивно дефинитна матрица има јединствену Чолески декомпозицију.*

Дефиниција 2.3 (Спектрална декомпозиција)**.** *Нека је A квадратна симетрична матрица таква да $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Тада је њена спектрална декомпозиција дата са: $A = PD^{1/2}P^T$, где је $D = diag(\lambda_1, ..., \lambda_n)$, $\lambda_1 \geq ... \geq \lambda_n$ сопствене вредности матрице A у опадајућем поретку, а P ортогонална матрица чије колоне чине сопствени вектори матрице A.*

Матрица H_t се може представити као $H_t = H_t^{1/2}(H_t^{1/2})^T$ (погледати [24] и [25] у литератури), где је матрица $H_t^{1/2}$ одабрана тако да буде доњетроугаона, симетрична и позитивно дефинитна. То је могуће учинити јер за сваку позитивно дефинитну матрицу А постоји јединствена позитивно дефинитна матрица B тако да је $A = B^2$. Тада на основу спектралне декомпозиције матрице B важи да је $B = PD^{1/2}P^T$.

Сада је могуће формулисати јаки модел у следећем облику: $X_t = H_t^{1/2}e_t$, где је e_t низ независних и једнако расподељених реално вредносних случајних величина димензије m, са очекивањем 0 и дисперзијом σ^2. Често се e_t назива компонентом грешке.

Својства која H_t треба да задовољи теже је одредити него у једнодимензионом случају. Оно што је неопходно да важи јесте да H_t као коваријациона матрица буде симетрична и позитивно дефинитна. Потребно је да постоје одређена ограничења под којима је могуће одредити оцене параметара, што ће бити дискутовано детаљније у глави 4. Такође, модел треба да буде оптималне комплексности како би могао да уочи одговарајуће коваријације, а да притом не дође до преприлагођавања подацима.

2.2 Векторски GARCH модел

Најприродније уопштење у вишедимензиони случај представља векторски GARCH модел. Са $vektor(\cdot)$ је означен оператор који пресликава простор квадратних матрица у простор вектора на следећи начин:
Нека је дата матрица A^*, при чему се посматра само њен доњетроугаони део који ће бити означен са A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix},$$

тада се применом оператора $vektor(\cdot)$ на матрицу A^* добија: $vektor(A^*) = (a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}, a_{22}, a_{32}, ..., a_{m2}, ..., a_{mm})^T$ што представља транспоновани вектор надовезаних колона доњетроугаоног дела матрице A^*.

Дефиниција 2.4. *Нека је (e_t) случајна компонента временске серије. Процес (X_t) задовољава векторску GARCH(p, q) репрезентацију уколико важи:*

- $X_t = H_t^{1/2} e_t$, *где је H_t матрица таква да важи:*
- $vektor(H_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)} vektor(X_{t-i} X_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} vektor(H_{t-j})$, *где је ω вектор димензије $m(m+1)/2$ а $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ матрице димензије $m(m+1)/2 \times m(m+1)/2$*

Посебно је битно дефинисати својство стабилности при груписању које је од нарочитог значаја за примене GARCH модела.

Дефиниција 2.5. *Ако је X_t вишедимензиони GARCH модел тада је процес $\tilde{X}_t = PX_t$, где је P инвертибилна квадратна матрица, такав да $E(\tilde{X}_t \,|\, \tilde{X}_u, u < t) = 0$ и $cov(\tilde{X}_t \,|\, \tilde{X}_u, u < t) = \tilde{H}_t = PH_tP^T$. Неопходно је да коваријационе матрице $\tilde{H}_t$ задовољавају исте услове као и матрица H_t за сваки одабир инвертибилне квадратне матрице P.*

Ово својство има примену у финансијама, јер када елементи вектора X_t представљају приносе финансијских инструмената, тада су елементи вектора $\tilde{X}_t$ заправо портфолији истих финансијских инструмената. Сваки од његових елемената представља количине појединачних инструмената које чине тај портфолио.

Теорема 2.1 (Стабилност при груписању)**.** *Нека је* (X_t) *векторски GARCH(p, q) процес. Тада за сваку инвертибилну квадратну матрицу* P *димензије* $m \times m$ *важи да је* $\tilde{X}_t = PX_t$ *векторски GARCH(p, q) процес.*

Доказ. Са $\widetilde{vektor}$ је дефинисан оператор који пресликава простор квадратних матрица у простор вектора над истим пољем скалара, тако да све елементе матрице по колонама слаже у један вектор. Нека је дата матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}.$$

Применом оператора се добија $\widetilde{vektor}$(A) $= (a_{11}, ..., a_{m1}, ..., a_{1m}, ..., a_{mm})$.

Веза између оператора $vektor$ и $\widetilde{vektor}$ дата је преко дупликационе D_m и елиминационе D_m^+ матрице тј. :

$$\widetilde{vektor}(A) = D_m vektor(A)$$

$$vektor(A) = D_m^+ \widetilde{vektor}(A),$$

где је A симетрична матрица димензије $m \times m$. D_m је матрица димензије $m^2 \times \frac{m(m+1)}{2}$ која има максималан ранг (број њених линеарно независних колона је једнак $\frac{m(m+1)}{2}$) и она међу својим елементима садржи само 0 и 1. D_m^+ је матрица димензије $\frac{m(m+1)}{2} \times m^2$ таква да важи $D_m^+ = (D_m^T D_m)^{-1} D_m^T$.

Примери матрица D_m и D_m^+ за $m = 2$:

$$D_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \; D_2^+ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Такође, за доказ је битна и следећа релација:

$$\widetilde{vektor}(ABC) = (C^T \otimes A)\widetilde{vektor}(B),$$

где $\otimes$ представља Кронекеров производ матрица дефинисан као множење сваког елемента матрице A димензије $m \times m$ са сваким елементом матрице B димензије $n \times n$, чиме се добија матрица димензије $mn \times mn$.

Нека је сада $\tilde{H}_t = PH_tP^T$, тада је $\tilde{X}_t = \tilde{H}_t^{1/2} e_t$ и

$$\begin{aligned} vektor(\tilde{H}_t) &= \tilde{\omega} + \sum_{i=1}^{q} \tilde{A}^{(i)} vektor(\tilde{X}_{t-i}\tilde{X}_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{B}^{(j)} vektor(\tilde{H}_{t-j}) \\ &= D_m^+(P \otimes P) D_m vektor(H_t), \end{aligned}$$

где је

$$\begin{aligned} \tilde{\omega} &= D_m^+(P \otimes P) D_m \omega, \\ \tilde{A}^{(i)} &= D_m^+(P \otimes P) D_m A^{(i)} D_m^+(P^{-1} \otimes P^{-1}) D_m, \\ \tilde{B}^{(i)} &= D_m^+(P \otimes P) D_m B^{(i)} D_m^+(P^{-1} \otimes P^{-1}) D_m. \end{aligned}$$

Да би се добио облик за $\tilde{A}^{(i)}$ и $\tilde{B}^{(i)}$, неопходно је применити својства дефинисана на почетку доказа :

$$\widetilde{vektor}(X_tX_t^T) = \widetilde{vektor}(P^{-1}\tilde{X}_t\tilde{X}_t^T(P^{-1})^T) = (P^{-1} \otimes P^{-1}) D_m vektor(\tilde{X}_t\tilde{X}_t^T),$$

$$\widetilde{vektor}(H_t) = \widetilde{vektor}(P^{-1}\tilde{H}_t(P^{-1})^T) = (P^{-1} \otimes P^{-1}) D_m vektor(\tilde{H}_t).$$

□

Да би матрица H_t била позитивно семидефинитна, почетне вредности морају бити позитивно семидефинитне, као и доњетроугаона матрица Ω која је састављена од вредности из вектора ω ($\omega = vektor(\Omega)$). Такође, матрице $A^{(i)}$ и $B^{(i)}$ треба да пресликавају векторизоване позитивно семидефинитне матрице у саме себе.

Нека је са $h_t = vektor(H_t)$ дефинисан вектор састављен од елемената доњетроугаоног дела матрице H_t. Нека је са $h_{kl,\,t}$ означен општи члан вектора h_t, а са $a^{(i)}_{kl,\,k^Tl^T}$ и $b^{(j)}_{kl,\,k^Tl^T}$ општи чланови матрица $A^{(i)}$ и $B^{(j)}$ редом, тако да се налазе у истом реду као елемент $h_{kl,\,t}$ у матрици H_t и истој колони као елемент $h_{k^Tl^T,\,t}$ у матрици H_t^T. Сада се добија репрезентација која је еквивалентна запису у матричном облику:

$$h_{kl,\,t} = cov(X_{kt},\, X_{lt} \,|\, X_u,\, u < t),$$

на основу чега се након расписивања добија:

$$h_{kl,\,t} = \omega_{kl} + \sum_{i=1}^{q} \sum_{\substack{k^T,\,l^T=1 \\ k^T \geq l^T}}^{m} a^{(i)}_{kl,\,k^Tl^T} X_{k^T,\,t-i} X_{l^T,\,t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{k^T,\,l^T=1 \\ k^T \geq l^T}}^{m} b^{(j)}_{kl,\,k^Tl^T} h_{k^Tl^T,\,t-j}.$$

Запис прве суме се може упростити уколико се са $A_{kl}^{(i)}$ означи симетрична матрица димензије $m \times m$ таква да се на месту (k^T, l^T) налази елемент $\frac{a_{kl,\,k^T l^T}^{(i)}}{2}$ за $k^T \neq l^T$ (неопходно је делити са 2 јер је матрица симетрична, па ће се приликом множења добити еквивалентни изрази као у претходном запису) а на дијагонали се налазе елементи $a_{kl,\,k^T k^T}^{(i)}$. Сада је претходни израз једнак:

$$h_{kl,\,t} = \omega_{kl} + \sum_{i=1}^{q} X_{t-i}^T A_{kl}^{(i)} X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{\substack{k^T,\,l^T=1 \\ k^T \geq l^T}}^{m} b_{kl,\,k^T l^T}^{(j)} h_{k^T l^T,\,t-j}.$$

Како би се овај израз додатно упростио, потребно је применити спектралну декомпозицију на матрицу H_t, која (зато што је коваријациона матрица) задовољава услове наведене декомпозиције. Нека је $V_t = (v_t^{(1)}, ..., v_t^{(m)})$ ортогонална матрица сопствених вектора $v_t^{(k)}$, $k = 1, ..., m$ матрице H_t који одговарају позитивним сопственим вредностима $\lambda_t^{(k)}$, $k = 1, ..., m$. Тада је:

$$H_t = \sum_{k=1}^{m} \lambda_t^{(k)} v^{(k)} (v^{(k)})^T.$$

Када се по аналогији у односу на $A_{kl}^{(i)}$ дефинише и матрица $B_{kl}^{(j)}$ добија се следеће:

$$h_{kl,\,t} = \omega_{kl} + \sum_{i=1}^{q} X_{t-i}^T A_{kl}^{(i)} X_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{t-j}^{(k)} (v_{t-j}^{(k)})^T B_{kl}^{(j)} v_{t-j}^{(k)}.$$

Нека је сада матрица димензије $m^2 \times m^2$ састављена од блокова $A_i = (A_{kl}^{(i)})$ и нека је $B_j = (B_{kl}^{(j)})$. Тада је претходно еквивалентно са:

$$H_t = \sum_{k=1}^{m} \lambda_t^{(k)} v^{(k)} (v^{(k)})^T,$$

$$H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q} (\mathbf{I}_m \otimes X_{t-i}^T) A_i (\mathbf{I}_m \otimes X_{t-i}) + \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{m} \lambda_{t-j}^{(k)} (\mathbf{I}_m \otimes (v_{t-j}^{(k)})^T) B_j (\mathbf{I}_m \otimes v_{t-j}^{(k)}),$$

где је Ω симетрична матрица таква да важи $vektor(\Omega) = \omega$.
Пошто су матрице A_i и B_j позитивно семидефинитне а матрица Ω позитивно дефинитна, следи да је матрица H_{t-j} позитивно дефинитна на скупу пуне мере, тада је и матрица H_t позитивно дефинитна.

2.3 Модели константних условних корелација

Ова класа модела заснива се на претпоставци да су све условне корелације константне и при томе се условне дисперзије моделују једнодимензионим GARCH моделима. Иако ће ова претпоставка допринети смањењу броја параметара, у пракси најчешће није задовољена што се може одразити на квалитет самог модела.

Нека је вишедимензиони GARCH модел дат у облику $X_t = H_t^{1/2} e_t$, нека су историјске вредности условне дисперзије X_{kt} сумиране тако да им је сума једнака $h_{kk,\,t}$, при томе је $E(h_{kk,\,t}) = E(X_{kt}^2)$. Нека је са $\tilde{e}_{kt} = h_{kk,\,t}^{-1/2} X_{kt}$ дата случајна компонента временске серије. Како је случајна грешка $\tilde{e}_{kt}$ корелисана у времену, са R ће бити означена матрица корелација тј. $R = cov(\tilde{e}_t) = (\rho_{kl})$, где је са ρ дат коефицијент корелације, а $\tilde{e}_t = (\tilde{e}_{1t}, ..., \tilde{e}_{mt})$.

На основу $\tilde{e}_{kt} = h_{kk,t}^{-1/2} X_{kt}$ множењем једнакости са $h_{kk,t}^{1/2}$ са леве стране добија се $X_{kt} = h_{kk,\,t}^{1/2} \tilde{e}_{kt}$. Када се овај запис уопшти тако X не зависи од kt већ само од t добија се:

$$X_t = diag(h_{11,\,t}^{1/2}, ..., h_{mm,\,t}^{1/2}) \tilde{e}_t.$$

Условна дисперзија претходног израза је дата са:

$$H_t = diag(h_{11,\,t}^{1/2}, ..., h_{mm,\,t}^{1/2}) R \, diag(h_{11,\,t}^{1/2}, ..., h_{mm,\,t}^{1/2}).$$

На основу конструкције, следи да условне корелације X_t не зависе од времена, што се види након расписивања израза коефицијента корелације:

$$\rho_{kl} = \frac{h_{kl,\,t}}{h_{kk,\,t}^{1/2} h_{ll,\,t}^{1/2}} = \frac{E(X_{kt}\, X_{lt} \mid X_u,\, u < t)}{(E(X_{kt}^2 \mid X_u,\, u < t) E(X_{lt}^2 \mid X_u,\, u < t))^{1/2}}.$$

Већ је напоменуто да се условне дисперзије моделују једнодимензионим GARCH моделима (погледати [5] у литератури) па на основу тога следи да је:

$$h_{kk,\,t} = \omega_k + \sum_{i=1}^{q} a_{k,\,i} X_{k,\,t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} b_{k,\,j} h_{kk,\,t-j},$$

за коефицијенте важи следеће: $\omega_k > 0, a_{k,\,i} \geq 0, b_{k,\,j} \geq 0$, а како је са ρ означен коефицијент корелације, важи да је $\rho_{kk} = 1$ и $-1 \leq \rho_{kl} \leq 1$ (за $k \neq l$). Матрица R је симетрична и позитивно семидефинитна, јер су њени елементи коефицијенти корелације.

У вишедимензионом случају интуитивно уопштење претходне једначине јесте постављање услова да $h_{kk,t}$ не зависи само од својих претходних вредности, већ и од свих вредности самог модела $X_{l,t}$. Како би било могуће формално дефинисати модел константних условних корелација (погледати [15] у литератури) уводе се следеће ознаке:

$$\bar{h}_t = \begin{pmatrix} h_{11,t} \\ \vdots \\ h_{mm,t} \end{pmatrix}; \; D_t = \begin{pmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \sqrt{h_{mm,t}} \end{pmatrix}; \; \bar{X}_t = \begin{pmatrix} X_{1t}^2 \\ \vdots \\ X_{mt}^2 \end{pmatrix}$$

Дефиниција 2.6 (CCC - GARCH(p, q) процес)**.** *Нека је (e_t) случајна компонента временске серије. Процес X_t се назива GARCH(p, q) процесом константних условних корелација уколико важи:*

- $X_t = H_t^{1/2} e_t$
- $H_t = D_t R D_t$
- $\bar{h}_t = \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{q} A_i \bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j \bar{h}_{t-j}$, *где је R корелациона матрица, $\bar{\omega}$ је вектор димензије $m \times 1$ са позитивним елементима а A_i и B_j су матрице димензије $m \times m$ са ненегативним елементима.*

Важи да је $X_t = D_t \tilde{e}_t$, при чему се врши трансформација компоненте грешке $\tilde{e}_t = R^{1/2} e_t$ коваријационом матрицом R. Елементи матрице X_t су облика $X_{kt} = h_{kk,t}^{1/2} \tilde{e}_{kt}$, при чему условна дисперзија $h_{kk,t}$ зависи од свих вредности X_t из прошлих тренутака t. С обзиром да условне дисперзије углавном нису линеарне функције од $X_{t-i} X_{t-i}^T$ и елемената матрице H_t за тренутке t из прошлости, овде није реч о векторским GARCH моделима. Једини специјалан случај у којима ће они имати векторску репрезентацију, јесте када је R јединична матрица.

Позитивна дефинитност матрице H_t је условљена позитивношћу елемената матрица A_i и B_j, као и одабиром позитивно дефинитне матрице R.

Предност ових модела је у томе што се стационарност може испитати релативно једноставно. Са друге стране они не задовољавају услов стабилности при груписању и претпостављају константну условну корелацију, што у пракси није често случај.

2.4 Модели променљивих условних корелација

Модели променљивих условних корелација представљају уопштење претходно наведене класе увођењем динамике условних корелација. То се постиже заменом матрице R са R_t, која је мерљива у односу на филтрацију генерисану са $\sigma\{X_u \,|\, u < t\}$. Због једноставности требало би одабрати дијагоналне матрице A_i и B_j које одговарају једнодимензионим GARCH моделима за сваку компоненту, као у формулацији код CCC - GARCH модела. Различите репрезентације се добијају у зависности од тога које услове задовољава матрица R_t.

Једноставна формулација R_t (погледати [28] у литератури) је дата са:

$$R_t = \theta_1 R + \theta_2 \Psi_{t-1} + \theta_3 R_{t-1},$$

где су $\theta_1, \theta_2, \theta_3 \geq 0$ тежине такве да $\sum_{i=1}^{3} \theta_i = 1$, R је матрица константних корелација, R_t је корелациона матрица која зависи од t а Ψ_{t-1} је корелациона матрица за вредности X_{t-i} из прошлости.
Уколико се посматра најједноставнији случај једнодимензионог GARCH(1, 1) модела добија се:

$$X_t = \sigma_t e_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2 + \beta_1 \sigma_{t-1}^2.$$

Могуће је приметити сличност израза за дисперзију са R_t када се константе поистовете и то $\theta_1 R$ са α_0, θ_2 са α_1 и θ_3 са β_1.
Још један начин репрезентације R_t је дат са:

$$R_t = (diag(Q_t))^{-1/2} Q_t (diag(Q_t))^{-1/2},$$

где је са $diag(Q_t)$ означена дијагонална матрица састављена од дијагоналних елемената из Q_t, што представља низ коваријационих матрица и мерљив је у односу на филтрацију генерисану са $\sigma\{X_u \,|\, u < t\}$.
У оригиналној конструкцији овог модела (погледати [10] у литератури) репрезентација Q_t је дата са:

$$Q_t = (1 - \alpha - \beta) S + \alpha e_{t-1}^* (e_{t-1}^*)^T + \beta Q_{t-1},$$

где је $e_t^* = (X_{1t}/\sqrt{h_{11,t}}, ..., X_{mt}/\sqrt{h_{mm,t}})^T$ вектор стандардизованих вредности модела, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$ а S је позитивно дефинитна матрица. Проблем који се јавио у првој формулацији овог модела јесте у томе што није могуће на једноставан начин изразити матрицу S. Углавном је потребно увести више услова, који смањују употребљивост у пракси. Зато је дошло до корекције иницијалног модела (погледати [1] у литератури) и Q_t је формулисано као:

$$Q_t = (1-\alpha-\beta)S + \alpha(diag(Q_{t-1}))^{1/2}e^*_{t-1}(e^*_{t-1})^T(diag(Q_{t-1}))^{1/2} + \beta Q_{t-1},$$

где је $e^*_t = (X_{1t}/\sqrt{h_{11,t}}, ..., X_{mt}/\sqrt{h_{mm,t}})^T$ вектор стандардизованих вредности модела, $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$ а S је позитивно дефинитна матрица. За овај модел, под одређеним условима стационарности (који су наведени у глави 3), важи да је:

$$S = E(Q_t) = E((diag(Q_t))^{1/2}e^*_t(e^*_t)^T(diag(Q_t))^{1/2}).$$

Множењем матрице Q_t са леве и десне стране произвољном позитивно дефинитном матрицом добија се иста матрица условне корелације R_t. Такође потребно је одредити матрицу S на неки начин, нпр. тако да она буде корелациона матрица.

2.5 BEKK модели

Ова класа модела односи се на посебну репрезентацију вишедимензионих GARCH модела. За разлику од претходно дефинисаних класа из самог имена није могуће ништа више закључити о спецификацији, јер оно потиче од аутора који су развили ове моделе (погледати [11] у литератури).

Дефиниција 2.7 (BEKK - GARCH(p, q) процес)**.** *Нека је* (e_t) *случајна компонента временске серије. Процес* X_t *се назива јаким BEKK - GARCH(p, q) процесом уколико важи:*

- $X_t = H_t^{1/2} e_t$
- $H_t = \Omega + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} A_{ik}X_{t-i}X_{t-i}^T A_{ik}^T + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} B_{jk}H_{t-j}B_{jk}^T$, *где је* K *природан број,* Ω, A_{ik}, B_{jk} *квадратне матрице димензија* $m \times m$ *и важи да је* Ω *позитивно дефинитна матрица.*

Из репрезентације се директно може увидети да из позитивне дефинитности матрице H_{t-i}, $i = 1, ..., p$ на скупу пуне мере следи да је и матрица H_t позитивно дефинитна на истом скупу.

Како би веза између BEKK и векторских модела била уочена, неопходно је записати H_t у векторском облику. Користећи већ дефинисане релације за симетричне квадратне матрице:

$$\widetilde{vektor}(A) = D_m vektor(A),$$

$$vektor(A) = D_m^+ \widetilde{vektor}(A),$$

$$\widetilde{vektor}(ABC) = (C^T \otimes A)\widetilde{vektor}(B),$$

добија се следећи облик BEKK модела:

$$vektor(H_t) = vektor(\Omega) + \sum_{i=1}^{q} D_m^+ \sum_{k=1}^{K} (A_{ik} \otimes A_{ik}) D_m vektor(X_{t-i}X_{t-i}^T) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{p} D_m^+ \sum_{k=1}^{K} (B_{jk} \otimes B_{jk}) D_m vektor(H_{t-j}).$$

Када се уведу ознаке $A^{(i)} = D_m^+ \sum_{k=1}^{K}(A_{ik} \otimes A_{ik})D_m$ и $B^{(j)} = D_m^+ \sum_{k=1}^{K}(B_{jk} \otimes B_{jk})D_m$ за $i = 1, ..., q$ и $j = 1, ..., p$, могуће је BEKK модел записати преко репрезентације векторског GARCH(p, q) модела. Обратно не важи у општем случају. Већ за $m \geq 3$, могуће је пронаћи векторски модел који се не може представити у облику BEKK модела. Овде је право место да се објасни значење параметра K. Неформално, он заправо одређује до ког опсега се општа репрезентација векторског модела може апроксимирати BEKK моделом.
Када су матрице A_{ik} и B_{jk} дијагоналне, тада овај модел има дијагоналну репрезентацију, што се може исказати следећом теоремом:

Теорема 2.2. *За модел дефинисан векторском репрезентацијом:*

$$A^{(i)} = diag\{vektor(\tilde{A}^{(i)})\},\ B^{(j)} = diag\{vektor(\tilde{B}^{(j)})\},$$

где су $\tilde{A}^{(i)} = (\tilde{a}_{ll^T}^{(i)})$ и $\tilde{B}^{(j)} = (\tilde{b}_{ll^T}^{(j)})$ симетричне позитивно семидефинитне матрице димензије $m \times m$. Тада постоје матрице A_{ik} и B_{jk} такве да важи $A^{(i)} = D_m^+ \sum_{k=1}^{K}(A_{ik} \otimes A_{ik})D_m$ и $B^{(j)} = D_m^+ \sum_{k=1}^{K}(B_{jk} \otimes B_{jk})D_m$ за $i = 1, ..., q$ и $j = 1, ..., p$ када је $K = m$.

Пример 2.1 (Облик векторског модела)**.** *Нека су дате следеће вредности параметара у дефиницији BEKK модела: $p = 0$, $q = 1$, $m = 2$ и нека компонента грешке e_t има недегенерисану расподелу. Према дефиницији матрица*

H_t има следећи облик:

$$H_t = \Omega + \sum_{k=1}^{4} A_k X_{t-1} X_{t-1}^T A_k^T,$$

где је матрица Ω симетрична и позитивно дефинитна а A_k су квадратне матрице димензије 2×2 дефинисане на следећи начин:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11,1} & a_{12,1} \\ a_{21,1} & a_{22,1} \end{pmatrix};\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_{21,2} & a_{22,2} \end{pmatrix};\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12,3} \\ 0 & a_{22,3} \end{pmatrix};\ A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a_{22,4} \end{pmatrix},$$

при чему мора важити да је $a_{11,1} \geq 0$, $a_{21,2} \geq 0$, $a_{12,3} \geq 0$, $a_{22,4} \geq 0$ како би сам модел био добро дефинисан и једнозначно одређен.

Сада је овај модел могуће записати у векторском облику, ослањајући се на дефиницију векторског GARCH модела за $p = 0$, $q = 1$, $m = 2$:

$$X_t = H_t^{1/2} e_t,$$

где је H_t матрица таква да важи:

$$vektor(H_t) = \omega + A^{(1)} vektor(X_{t-1} X_t^T),$$

где је ω вектор димензије 3 а $A^{(1)}$ матрица димензије 3×3.
Потребно је одредити вредности елемената матрице $A^{(1)}$:

$$A^{(1)} = \sum_{k=1}^{4} D_2^+ (A_k \otimes A_k) D_2 =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11,1}^2 & 2a_{11,1}a_{12,1} & a_{12,1}^2 + a_{12,3}^2 \\ a_{11,1}a_{21,1} & a_{12,1}a_{21,1} + a_{11,1}a_{22,1} & a_{12,1}a_{22,1} + a_{12,3}a_{22,3} \\ a_{21,1}^2 + a_{21,2}^2 & 2(a_{21,1}a_{22,1} + a_{21,2}a_{22,2}) & a_{22,1}^2 + a_{22,2}^2 + a_{22,3}^2 + a_{22,4}^2 \end{pmatrix}.$$

Услови за позитивности елемената су били неопходни, зато што је сада могуће једнозначно одредити њихове вредности решавањем система једначина, када се матрица добијена у претходном кораку изједначи са конкретним вредностима. Овако записан модел има једнак број параметара као и векторски GARCH модел, с тим што се у овом случају позитивна дефинитност матрице H_t остварује у старту.

Теорема 2.3 (Стабилност при груписању). *Нека је (X_t) BEKK - GARCH(p, q) процес. Тада за сваку инвертибилну матрицу P димензије $m \times m$ важи да $\tilde{X}_t = PX_t$ представља BEKK - GARCH(p, q) процес.*

Доказ. Уводећи ознаке: $\tilde{H}_t = PH_tP^T$, $\tilde{\Omega} = P\Omega P^T$, $\tilde{A}_{ik} = PA_{ik}P^{-1}$ и $\tilde{B}_{jk} = PB_{jk}P^{-1}$, добија се:

$$\tilde{X}_t = \tilde{H}_t^{1/2} e_t,$$

$$\tilde{H}_t = \tilde{\Omega} + \sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{K} \tilde{A}_{ik}\tilde{X}_{t-i}\tilde{X}_{t-i}^T\tilde{A}_{ik}^T + \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K} \tilde{B}_{jk}\tilde{H}_{t-j}\tilde{B}_{jk}^T.$$

Пошто је $\tilde{\Omega}$ позитивно дефинитна матрица, решење се добија као и у случају векторског GARCH модела. □

Квадрат вредности X_t представља ARMA репрезентацију. Нека је ν_t дефинисано са:

$$\nu_t = \widetilde{vektor}(X_tX_t^T) - \widetilde{vektor}(E(X_tX_t^T \mid X_u,\, u < t)) = \widetilde{vektor}(X_tX_t^T) - \widetilde{vektor}(H_t).$$

Применом оператора $\widetilde{vektor}$ и заменом $\widetilde{vektor}(H_{t-j})$ са $\widetilde{vektor}(X_{t-j}X_{t-j}^T) - \nu_{t-j}$ у дефиницији BEKK - GARCH модела добија се:

$$\widetilde{vektor}(X_tX_t^T) = \widetilde{vektor}(\Omega) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}((A_{ik}+B_{ik})\otimes(A_{ik}+B_{ik}))\widetilde{vektor}(X_{t-i}X_{t-i}^T) +$$

$$+\nu_t - \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{K}(B_{jk}\otimes B_{jk})\nu_{t-j}, \;\; t\in\mathbb{Z},\, r = max(p,\, q),$$

при томе важи да је $A_{ik} = 0$, када је $q < i$ и $B_{jk} = 0$, када је $p < j$. Моменте другог реда за X_t (када постоје) могуће је одредити користећи:

$$E(\widetilde{vektor}(X_tX_t^T)) = \widetilde{vektor}(\Omega) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}((A_{ik}+B_{ik})\otimes(A_{ik}+B_{ik}))E(\widetilde{vektor}(X_tX_t^T)).$$

Када се израз среди тако да се $E(\widetilde{vektor}(X_tX_t^T))$ налази само са једне стране једнакости, добија се:

$$E(\widetilde{vektor}(X_tX_t^T)) = (I - \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}((A_{ik}+B_{ik})\otimes(A_{ik}+B_{ik})))^{-1}\widetilde{vektor}(\Omega),$$

под условом да је матрица $I - \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{K}((A_{ik}+B_{ik})\otimes(A_{ik}+B_{ik}))$ инвертибилна.

Глава 3

Стационарност вишедимензионих GARCH модела

У интуитивном и неформалном смислу, стационарност временске серије обезбеђује да се њена статистичка својства не мењају током времена. То наравно не значи да се сама временска серија не мења током времена, већ је њена промена предвидива. Ово својство их чини лакшим за анализирање, моделовање и њихове будуће вредности је могуће прецизније прогнозирати. Иако стационарни модели временских серија чине само мали подскуп свих могућих модела, они су изузетно корисни за апроксимацију и изградњу сложенијих модела.

Дефиниција 3.1. *Векторска временска серија (X_t) димензије m је (слабо) стационарна уколико важе услови:*

- $E(X_{it}) < +\infty$, $\forall t$, $i = 1, ..., m$
- $E(X_t) = \mu = const.$, $\forall t$
- $cov(X_t, X_{t+h}) = E((X_t - \mu)(X_{t+h} - \mu)^T) = \Gamma(h)$, $\forall t$, $h \in \mathbb{Z}$, *где $\Gamma(h)$ представља аутоковаријациону функцију серије (X_t), кодомен ове функције је простор квадратних матрица димензије $m \times m$. Када је $h = 0$ у питању је симетрична коваријациона матрица.*

Напомена. *Из стационарности компоненти $X_{1t}, ..., X_{mt}$ векторске временске серије не следи да је и целокупна серија (X_t) стационарна у општем* *случају. Разлог за то јесте што последњи услов претходне дефиниције не мора бити испуњен.*

Пример 3.1. *Најједноставнија временска серија која задовољава услов стационарности јесте бели шум. У векторском облику димензије m он је дат са*

$$\varepsilon_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_{1t} \\ \vdots \\ \varepsilon_{mt} \end{pmatrix},$$

где је $E(\varepsilon_t) = 0$, $cov(\varepsilon_t) = \Sigma$, $E(\varepsilon_t \varepsilon_{t-k}^T) = \begin{cases} \Sigma, & \text{ако } k = 0 \\ 0, & \text{ако } k \neq 0 \end{cases}$ *, а Σ представља симетричну позитивно дефинитну матрицу димензије $m \times m$.*

3.1 Стационарност векторских и BEKK GARCH модела

Није могуће експлицитно изразити услове неопходне да векторски GARCH модел буде стационаран. То се може видети посматрањем следећег примера:

Пример 3.2. *Нека је дат ARCH(1) модел, он има следећу репрезентацију:*

$$X_t = \sigma_t e_t,$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_{t-1}^2,$$

односно када се замени $X_{t-1} = \sigma_{t-1} e_{t-1}$ добија се:

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_{t-1}^2 e_{t-1}^2 = ... = \alpha_0 (1 + \alpha_1 e_{t-1}^2 + \alpha_1^2 e_{t-1}^2 e_{t-2}^2 + ...),$$

под условом да ред у заградама конвергира на скупу пуне мере. Нека је сада дат исти модел уопштен до димензије 2 облика $X_t = H_t^{1/2} e_t$, тако да је $H_t = I_2 + \alpha X_{t-1} X_{t-1}^T$ доњетроугаона матрица и α позитивни скалар. Тада за елементе доњетроугаоне матрице $H_t^{1/2}$ важи:

$$h_{11,t} = 1 + \alpha h_{11,t-1} e_{1,t-1}^2,$$

$$h_{12,t} = \alpha h_{12,t-1} e_{1,t-1}^2 + \alpha (h_{11,t-1} h_{22,t-1} - h_{12,t-1}^2)^{1/2} e_{1,t-1} e_{2,t-1},$$

$$h_{22,t} = 1 + \alpha\frac{h_{12,t-1}^2}{h_{11,t-1}}e_{1,t-1}^2 + \alpha\frac{h_{11,t-1}h_{22,t-1} - h_{12,t-1}^2}{h_{11,t-1}}e_{2,t-1}^2 +$$
$$+2\alpha\frac{h_{12,t-1}(h_{11,t-1}h_{22,t-1} - h_{12,t-1}^2)^{1/2}}{h_{11,t-1}}e_{1,t-1}e_{2,t-1}.$$

Из претходних формула лако је увидети да за дато e_{t-1} постоји линеарна веза између $h_{11,t}$ и $h_{11,t-1}$. Већ између $h_{12,t}$ и $h_{22,t}$ не постоји линеарна веза, исто ће се догодити и са наредним компонентама матрице H_{t-1}. Због тога их није могуће изразити као функције од α, $\{e_{t-1}, ..., e_{t-k}\}$ и H_{t-k} за $k \geq 1$. Овај проблем ће се само усложњавати са порастом димензије и представља препреку приликом одређивања услова стационарности.

Дефиниција 3.2 (Спектрални радијус). *Нека је дата матрица $A \in \mathbb{K}^{n\times n}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) са сопственим вредностима $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K}$. Спектрални радијус матрице A је дефинисан као:*

$$\rho(A) = max\{|\lambda_1|, ..., |\lambda_n|\}.$$

Следећа теорема обезбеђује услове стационарности за векторске моделе и BEKK моделе (погледати [6] у литератури).

Теорема 3.1 (Стационарност и ергодичност). *Постоји строго стационарно решење векторског GARCH(p, q) модела уколико:*

- *Матрице $A^{(i)}$ и $B^{(j)}$ су позитивно семидефинитне а матрица Ω је позитивно дефинитна*
- *e_t има густину позитивну у некој околини тачке 0, у односу на Лебегову меру на скупу $\mathbb{R}^n$*
- *$\rho(\sum_{i=1}^r(A^{(i)} + B^{(i)})) < 1$, $r = max(p, q)$, $\rho(\cdot)$ представља спектрални радијус квадратне матрице.*

Овакво решење је јединствено, слабо стационарно и ергодично.

Напомена. *Ова теорема не обезбеђује експлицитне услове између X_t и e_{t-i} који треба да буду задовољени (с обзиром да их је у применама лакше проверити) како би модел био стационаран.*

Пример 3.3. *Нека је дат векторски GARCH модел у свом основном облику са параметрима $p = 0$, $q = 1$, $m = 2$:*

$$X_t = H_t^{-1/2}e_t,$$

при чему је матрица H_t *позитивно дефинитна и важи да је*

$$vektor(H_t) = \omega + A^{(1)} vektor(X_{t-1}X_{t-1}^T),$$

где је ω *вектор димензије* 3×1 *а* $A^{(1)}$ *матрица димензије* 3×3. *Њих је могуће представити на следећи начин:*

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix};\ A^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Како би ω *био позитивно дефинитан вектор, неопходно је да има строго позитивне елементе. Како би матрица* $A^{(1)}$ *била позитивно семидефинитна, неопходно је да се успоставе одређени услови које њени елементи морају да задовољавају. Зарад једноставнијег рачуна, нека су дијагонални елементи матрице* $A^{(1)}$ *једнаки* $\frac{1}{2}$, *док су остали елементи једнаки нули. За елементе* $A^{(1)}$ *је неопходно да важи:*

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq 0$$

за сваки вектор $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *Када се израчуна производ вектора и матрице, добија се следећи услов који елементи матрице* $A^{(1)}$ *морају да задовоље за све вредности* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$$\frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^2}{2} \geq 0$$

Што је увек задовољено, па је матрица $A^{(1)}$ *позитивно семидефинитна.*
Како би компонента грешке e_t *имала густину позитивну у некој околини тачке нула, у односу на Лебегову меру на скупу* $\mathbb{R}^n$, *довољно је узети да је* e_t *Гаусов бели шум.*
Последњи услов се своди на то да је највећа по апсолутној вредности сопствена вредност матрице $A^{(1)}$ *строго мања од 1.*

$$det(A^{(1)} - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(\frac{1}{2}-\lambda)^3 = 0$$

$$max(|\lambda_i|) = \frac{1}{2} < 1$$

Из три претходно проверена услова следи да је овако дефинисан векторски GARCH модел (слабо) стационаран и ергодичан.

Сада је потребно конструисати алгоритам који ће омогућити проверу стационарности на начин погодан за практичну употребу.
Нека $\forall t, k \in \mathbb{Z}$ важи:

$$X_t^{(k)} = H_t^{(k)} = 0,\ k < 0,$$

и за $k \geq 0$ важи рекурзивна веза:

$$vektor(H_t^{(k)}) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)} vektor(X_{t-i}^{(k-i)}(X_{t-i}^{(k-i)})^T) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} vektor(H_{t-j}^{(k-j)}),$$

где је $X_t^{(k)} = (H_t^{(k)})^{1/2} e_t$. За $k \geq 1$ важи да је:

$$H_t^{(k)} = f_k(e_{t-1}, ..., e_{t-k}),\ \ EH_t^{(k)} = H^{(k)},$$

где је f_k мерљива функција а $H^{(k)}$ квадратна матрица. $((H_t^{(k)})^{1/2})$ и $(X_t^{(k)})$ задовољавају услов стационарности и њихови елементи припадају простору L^2 који је комплетан у односу на одговарајућу норму. Битно је напоменути да се елементи простора сматрају еквивалентним уколико се поклапају на скупу пуне мере. Строго стационарно решење векторског GARCH(p, q) модела постоји уколико $(\forall t)$ $H_t^{(k)}$ конвергира скоро сигурно када $k \to +\infty$. Када је $\lim_{k\to+\infty}(H_t^{(k)})^{1/2} = H_t^{1/2}$ и $X_t = H_t^{1/2} e_t$, пуштањем лимеса са обе стране у претходно дефинисаној једнакости:

$$\lim_{k\to+\infty} vektor(H_t^{(k)}) = \lim_{k\to+\infty} \omega + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)} vektor(X_{t-i}^{(k-i)}(X_{t-i}^{(k-i)})^T) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} vektor(H_{t-j}^{(k-j)}),$$

добија се други услов VEC - GARCH(p, q) модела:

$$vektor(H_t) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A^{(i)} vektor(X_{t-i} X_{t-i}^T) + \sum_{j=1}^{p} B^{(j)} vektor(H_{t-j}).$$

Процес (X_t) представља строго стационарно решење зато што је $X_t = H_t^{1/2} e_t$ мерљива функција од $\{e_u \,|\, u < t\}$. Такође ако матрица H_t постоји, она је симетрична и позитивно дефинитна. То важи зато што су матрице $H_t^{(k)}$ симетричне и важи $\lambda^T H_t^{(k)} \lambda \geq \lambda^T \Omega \lambda > 0$ када је $\lambda \neq 0$ па су и позитивно дефинитне.

Решење ће такође бити слабо стационарно уколико важи да $H_t^{(k)}$ конвергира у норми простора L^1 када $k \to +\infty$.

Нека је разлика чланова низа $(H_t^{(k)})_k$ дефинисана са:

$$\Delta_t^{(k)} = vektor(|H_t^{(k)} - H_t^{(k-1)}|).$$

Како би се добила конвергенција низа $(H_t^{(k)})_k$ у адекватној норми неопходно је ослонити се на тврђење из теорије мере:

Тврђење. *Нека је $p \in [1, +\infty)$ и (u_n) низ реалних случајних величина из простора L^p тако да важи:*

$$E|u_n - u_{n-1}|^p \leq C\rho^n,$$

за неку позитивну константу C и $\rho \in (0, 1)$.
Тада важи да низ (u_n) конвергира скоро сигурно и у норми простора L^p ка некој случајној величини u, која припада простору L^p.

Када се претходно тврђење примени на низ $\Delta_t^{(k)}$ добија се да важи $(\forall t)$ $H_t^{(k)}$ конвергира скоро сигурно када $k \to +\infty$. Одатле следи да је решење слабо стационарно уколико постоји $\rho \in (0, 1)$ тако да је $\|\mathrm{E}(\Delta_t^{(k)})\| \leq C\rho^k$ скоро сигурно када $k \to +\infty$ за $C > 0$. Слично се добија услов $\forall t$ $H_t^{(k)}$ конвергира скоро сигурно када $k \to +\infty$ уколико се уместо $\|\mathrm{E}(\Delta_t^{(k)})\|$ посматра $\|\Delta_t^{(k)}\|$, што обезбеђује строгу стационарност.

Напомена. *Иако су претходне теореме изведене за векторске моделе оне ће важити и у случају BEKK модела. Наиме, већ је показано да сваки BEKK модел има векторску репрезентацију док обратно не мора важи у оштем случају.*

Пример 3.4. *Нека је дат векторски GARCH модел у свом основном облику са параметрима $p = 0$, $q = 1$, $m = 2$:*

$$X_t = H_t^{-1/2} e_t,$$

при чему је матрица H_t позитивно дефинитна а e_t Гаусов бели шум. На основу дефиниције важи да је

$$vektor(H_t) = \omega + A^{(1)} vektor(X_{t-1} X_{t-1}^T),$$

где је ω вектор димензије 3×1 а $A^{(1)}$ матрица димензије 3×3 задати на следећи начин:

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}; \; A^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

при чему су вредности $\omega_1, \omega_2, \omega_3 > 0$.

Услов (слабе) стационарности ће бити задовољен уколико постоји $\rho \in (0,1)$ тако да:

$$\|E(\Delta_t^{(k)})\| \leq C\rho^k,$$

за $C > 0$ скоро сигурно. Односно када се замени $\Delta_t^{(k)}$ са одговарајућим изразом добија се:

$$\|E(vektor(|H_t^{(k)} - H_t^{(k-1)}|))\| \leq C\rho^k,$$

$$\|E(|\omega + A^{(1)} vektor(X_{t-1}^{(k-1)}(X_{t-1}^{(k-1)})^T) - (\omega + A^{(1)} vektor(X_{t-1}^{(k-2)}(X_{t-1}^{(k-2)})^T))|)\| \leq C\rho^k,$$

$$\|A^{(1)}\| \|E(vektor(|X_{t-1}^{(k-1)}(X_{t-1}^{(k-1)})^T - X_{t-1}^{(k-2)}(X_{t-1}^{(k-2)})^T|))\| \leq C\rho^k,$$

$$\|A^{(1)}\| \|E(vektor(|H_{t-1}^{(k-1)})^{1/2} e_{t-1} e_{t-1}^T ((H_{t-1}^{(k-1)})^T)^{1/2} -$$

$$-(H_{t-1}^{(k-2)})^{1/2} e_{t-1} e_{t-1}^T ((H_{t-1}^{(k-2)})^T)^{1/2}|))\| \leq C\rho^k.$$

Очекивање може да замени место са оператором vektor зато што је очекивање матрице једнако матрици очекивања сваког њеног елемента.

$$\|A^{(1)}\| \|vektor(|E((H_{t-1}^{(k-1)})^{1/2}((H_{t-1}^{(k-1)})^T)^{1/2}) -$$

$$-E((H_{t-1}^{(k-2)})^{1/2}((H_{t-1}^{(k-2)})^T)^{1/2})|E|e_{t-1} e_{t-1}^T|)\| \leq C\rho^k.$$

Норма матрице $A^{(1)}$ је константна и већа од 0. С обзиром да је матрица H_t дефинисана рекурзивно преко ω и $A^{(1)}$, њени елементи не зависе од k, па је матрица H_t једнака својој граничној вредности када $k \to +\infty$. Како је сваки елемент вектора e_{t-1} случајна величина из стандардне нормалне расподеле, множењем са својим транспонатом добија се сума 3 случајне величине која има Хи-квадрат расподелу са 3 степена слободе, који уједно представља и *очекивање овог вектора. Носач ове случајне величине је строго позитиван па апсолутна вредност не утиче на резултат. Из претходних тврдњи следи:*

$$3\|A^{(1)}\|\|vektor(|E(H_{t-1}^{1/2}(H_{t-1}^{T})^{1/2}) - E(H_{t-1}^{1/2}(H_{t-1}^{T})^{1/2})|)\| \leq C\rho^k,$$

$$3\|A^{(1)}\|\|vektor(|0|)\| \leq C\rho^k,$$

$$3\|A^{(1)}\|\|0\| \leq C\rho^k \, / \lim_{k\to+\infty},$$

$$0 \leq 0,$$

што важи увек јер је $\lim_{k\to+\infty}\rho^k = 0$ *када је* $\rho \in (0,1)$. *Тако се на основу теореме добија да је дати векторски GARCH модел (слабо) стационаран и ергодичан.*

3.2 Стационарност модела константних условних корелација

Уводећи да је $\tilde{e}_t = R^{1/2}e_t$, добија се:

$$\bar{X}_t = \Upsilon_t \bar{h}_t,$$

при чему је $\Upsilon_t = diag(\tilde{e}_{1t}^2, ..., \tilde{e}_{mt}^2)$ дијагонална матрица димензије $m \times m$ Када се једнакост за $\bar{h}_t$ из дефиниције CCC - GARCH(p, q) модела помножи са Υ_t добија се:

$$\bar{X}_t = \Upsilon_t \bar{h}_t = \Upsilon_t \bar{\omega} + \Upsilon_t \sum_{i=1}^{q} A_i \bar{X}_{t-i} + \Upsilon_t \sum_{j=1}^{p} B_j \bar{h}_{t-j}.$$

Циљ је добити векторску репрезентацију ових модела, тако да се уместо сумирања врши множење матрица и вектора. Реформулација ће имати следећи облик:

$$\bar{z}_t = \bar{b}_t + A_t \bar{z}_{t-1},$$

где је:

$$\bar{b}_t = \begin{pmatrix} \Upsilon_t\bar{\omega} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \bar{\omega} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m(p+q)}, \;\; \bar{z}_t = \begin{pmatrix} \bar{X}_t \\ \vdots \\ \bar{X}_{t-(q-1)} \\ \bar{h}_t \\ \vdots \\ \bar{h}_{t-(p-1)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m(p+q)},$$

$$A_t = \begin{pmatrix} \Upsilon_t A_1 & \Upsilon_t A_2 & ... & \Upsilon_t A_{q-1} & \Upsilon_t A_q & \Upsilon_t B_1 & \Upsilon_t B_2 & ... & \Upsilon_t B_{p-1} & \Upsilon_t B_p \\ \mathbf{I}_m & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{I}_m & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{I}_m & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 \\ A_1 & A_2 & ... & A_{q-1} & A_q & B_1 & B_2 & ... & B_{p-1} & B_p \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & \mathbf{I}_m & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I}_m & ... & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & \mathbf{I}_m & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{m(p+q)} \times \mathbb{R}^{m(p+q)}.$$

Дефиниција 3.3. *Нека је $\{A_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$ произвољан, строго стационаран и ергодичан низ матрица такав да је $E(log\|A_t\|) < +\infty$. Тада је:*

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{E(log\|A_tA_{t-1}...A_1\|)}{t} = \gamma = \inf_{t\in\mathbb{N}/\{0\}} \frac{E(log\|A_tA_{t-1}...A_1\|)}{t},$$

где γ представља горњи Љапуновљев експонент а e^γ спектрални радијус низа матрица $\{A_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$. Важи и да $\frac{log\|A_tA_{t-1}...A_1\|}{t} \to \gamma$ скоро сигурно, када $t \to +\infty$.

Напомена. *Норма матрице $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ је дефинисана као $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|$*

Следећа теорема обезбеђује (строгу) стационарност модела константних условних корелација (погледати [2] у литератури):

Теорема 3.2. *Строго стационарно решење за GARCH модел константних условних корелација постоји ако и само ако је $\gamma < 0$, где је γ горњи Љапуновљев експонент низа матрица $\{A_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$, који је претходно одређен. Овако дефинисано стационарно решење је јединствено и ергодично.*

Последица. *Нека је γ горњи Љапуновљев експонент низа матрица $\{A_t \,|\, t \in \mathbb{Z}\}$ које су претходно дефинисане. Нека је матрични полином дефинисан са: $B(z) = \boldsymbol{I}_m - zB_1 - ... - z^p B_p, z \in \mathbb{C}$ и:*

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & B_3 & ... & B_p \\ \boldsymbol{I}_m & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \boldsymbol{I}_m & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & \boldsymbol{I}_m & 0 \end{pmatrix}.$$

Тада, ако је $\gamma < 0$, следећа два еквивалентна својства важе:

- *Корени $det(B(z))$ су по норми већи од 1*
- *$\rho(\mathbb{B}) < 1$, где је ρ спектрални радијус матрице.*

Последица. *Нека је горњи Љапуновљев експонент $\gamma < 0$. Нека је X_t строго стационарно решење модела константних условних корелација. Тада постоји $s > 0$ такво да $E\|\bar{h}_t\|^s < +\infty$ и $E\|X_t\|^{2s} < +\infty$.*

Ова последица заправо говори да из строге стационарности модела следи егзистенција маргиналних момената, што ће бити од користи приликом одређивања својстава оцена параметара.

Глава 4

Оцена параметара вишедимензионих GARCH модела

Оцене за вишедимензионе моделе су базиране на методи квази максималне веродостојности - QMLE. Она се заснива на максимизовању логаритмоване функције веродостојности (као код обичне MLE методе), с тим што је дозвољено да условна расподела не буде коректно претпостављена. Оно што карактерише ову методу јесте да је логаритмована функција веродостојности најчешће поједностављена претпоставком о независности компоненти грешки, иако она не мора бити задовољена (под условом да независност није од суштинског значаја у моделу). То ће олакшати процес оптимизације функције веродостојности, јер ће се проблем рачунања парцијалних извода производа свести на рачунање парцијалних извода суме, што је значајно једноставније. Такође, не може доћи до експлозије односно нестајања вредности функције веродостојности, што је чест случај приликом множења великог броја великих односно малих вредности. Ова метода је значајна за GARCH моделе, зато што обезбеђује постојане и асимптотски нормалне оцене за строго стационарне GARCH процесе. Насупрот томе неке друге методе оцене могу захтевати сложеније услове, што компликује сам процес одређивања оцене.

Нека је матрица условне коваријације задата параметарски $H_t = H_t(\theta_0)$, где је θ_0 непознати параметар димензије d. Нека је са Θ означен компактан (самим тим ограничен и затворен) простор параметара који садржи θ_0. Нека

$\forall\,\theta = (\theta_1, ..., \theta_d)^T \in \Theta$ важи да је $H_t(\theta) = H(X_{t-1}, X_{t-2}, ...\,|\,\theta)$ добро дефинисана симетрична позитивно дефинитна матрица која представља функцију вредности из прошлости. За модел који задовољава овај услов се каже да је инвертибилан у тачки θ.
Могуће је представити H_t као мерљиву функцију у односу на филтрацију генерисану са $\sigma\{e_u\,|\,u < t\}$, што обезбеђује да X_t задовољава услове стационарности и ергодичности. Како би било могуће вршити прогнозе, неопходно је да модел са параметром θ_0 буде инверибилан у тачки θ_0. Како би било могуће оценити параметар θ_0, неопходно је да модел задовољава услов инвертибилности $\forall\theta \in \Theta$. Разлог за то јесте што ће се у том поступку упоређивати $e_t e_t^T$ и $H_t(\theta)$ за све e_t и $\forall\theta \in \Theta$.
Нека је дато $\tilde{H}_t(\theta) = H(X_{t-1}, ..., X_1, \tilde{X}_0, \tilde{X}_{-1}, ...\,|\,\theta)$, где су X_t вредности процеса у тренутку t а $\tilde{X}_i$, $i \leq 0$ произвољне константне вредности.
Оцена квази максималном методом веродостојности параметра θ_0 је дефинисана као мерљиво решење $\hat{\theta}_n$, такво да:

$$\hat{\theta}_n = arg\,min_{\theta\in\Theta} \sum_{t=1}^{n} \tilde{l}_t(\theta),$$

где је :

$$\tilde{l}_t(\theta) = X_t^T \tilde{H}_t^{-1}(\theta) X_t + log|\tilde{H}_t(\theta)|.$$

Овај метод би се свео на обичан метод максималне веродостојности уколико би условна расподела процеса била нормална са очекивањем 0 и дисперзијом H_t тј. $X_t \sim \mathcal{N}(0, H_t)$.

4.1 Асимптотска својства оцене методом QMLE

На самом почетку уводе се следеће ознаке:

$$l_t(\theta) = X_t^T H_t^{-1}(\theta) X_t + log|H_t(\theta)|,$$

$$\mathbf{I}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t(\theta),\ \tilde{\mathbf{I}}_n(\theta) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \tilde{l}_t(\theta).$$

Нека је $\rho \in [0, 1)$ константа , K позитивна константа или позитивна случајна величина мерљива у односу на филтрацију генерисану са $\sigma\{e_u\,|\,u < 0\}$.

Услови који не зависе од норме су следећи:

- $\sup_{\theta\in\Theta}||H_t^{-1}(\theta)|| \leq K$, $\sup_{\theta\in\Theta}||\tilde{H}_t^{-1}(\theta)|| \leq K$ скоро сигурно. За $m = 1$ овај услов захтева да условна дисперзија буде одвојена од нуле (у односу на одговарајућу метрику) униформно на скупу Θ. За стандардни GARCH модел за који важи да је $\omega > 0$ и Θ компактан скуп овај услов је задовољен.

- $\sup_{\theta\in\Theta}||\tilde{H}_t^{-1}(\theta) - H_t^{-1}(\theta)|| \leq K\rho^t$ скоро сигурно. Овај услов обезбеђује инвертибилност из чега следи да је статистика $\tilde{H}_t(\theta)$ добра оцена за $H_t(\theta)$, када $t \to +\infty$.

- $E||X_t^s|| < +\infty$ и $E||H_t(\theta_0)||^s < +\infty$ за неко $s > 0$. Већ је показано да из строге стационарности следи егзистенција маргиналних момената (на основу последице теореме о строго стационарном решењу модела константних условних корелација).

- За $\theta \in \Theta$ из $H_t(\theta) = H_t(\theta_0)$ скоро сигурно, следи да је $\theta = \theta_0$, што представља услов одредивости.

- За било који низ вектора $x_1, x_2, ...$ из $\mathbb{R}^m$, функција $\theta \to H(x_1, x_2, ... \,|\, \theta)$ је непрекидна на скупу Θ.

- θ_0 припада унутрашњости скупа Θ, што је неопходно за асимптотску нормалност.

- За било који низ вектора $x_1, x_2, ...$ из $\mathbb{R}^m$, функција $\theta \to H(x_1, x_2, ... \,|\, \theta)$ има непрекидне изводе другог реда.

- За неку околину $V(\theta_0)$ тачке θ_0 важи:

$$\sup_{\theta\in V(\theta_0)} \sqrt{n}|\frac{\partial \mathbf{I}_n(\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial \tilde{\mathbf{I}}_n(\theta)}{\partial\theta}| = o(1),$$

  што је неопходно како би се показало да су почетне вредности за $\tilde{X}_t$ асимптотски неважне.

- За неку околину $V(\theta_0)$ тачке θ_0, $\forall i,j \in \{1, ..., m\}$ и за $p > 1, q > 2, r > 2$ такве да је $\frac{2}{q} + \frac{2}{r} = 1$ и $\frac{1}{p} + \frac{2}{r} = 1$ важи:

$$E \sup_{\theta\in V(\theta_0)} ||H_t^{-1/2}(\theta)\frac{\partial^2 H_t(\theta)}{\partial\theta_i\partial\theta_j}(H_t^{-1/2})^T(\theta)||^p < +\infty,$$

$$E \sup_{\theta \in V(\theta_0)} ||H_t^{-1/2}(\theta) \frac{\partial H_t(\theta)}{\partial \theta_i} (H_t^{-1/2})^T(\theta)||^q < +\infty,$$

$$E \sup_{\theta \in V(\theta_0)} ||H_t^{-1/2}(\theta) H_t^{1/2}(\theta_0)||^r < +\infty.$$

- $E||e_t||^4 < +\infty$. Заједно са претходном претпоставком дају егзистенцију информационих матрица $\mathbf{I}$ и $\mathbf{J}$, које се користе за представљање асимптотске дисперзије облика $\mathbf{J}^{-1}\mathbf{I}\mathbf{J}^{-1}$.

- Матрице $\{\frac{\partial H_t(\theta_0)}{\theta_i} \,|\, i = 1, ..., d\}$ су линеарно независне, са вероватноћом строго већом од нуле. Овај услов обезбеђује инвертибилност матрице $\mathbf{J}$.

Следећа теорема обезбеђује постојаност оцене добијене методом квази максималне веродостојности (погледати [15] у литератури):

Теорема 4.1. *Нека је X_t стационарни векторски GARCH процес дат стандардном репрезентацијом. Нека је $H_t(\theta) = H(X_{t-1}, X_{t-2}, ... \,|\, \theta)$, $\forall \theta \in \Theta$ добро дефинисана симетрична позитивно дефинитна матрица, која представља функцију вредности из прошлости и нека је $H_t(\theta) = H_t(\theta_0)$ мерљива функција у односу на филтрацију генерисану са $\sigma\{e_u \,|\, u < t\}$. Нека је $(\hat{\theta}_n)$ низ оцена квази максималне веродостојности, који задовољавају услов $\hat{\theta}_n = arg\,min_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^{n} \tilde{l}_t(\theta)$ где је $\tilde{l}_t(\theta) = X_t^T \tilde{H}_t^{-1}(\theta) X_t + log|\tilde{H}_t(\theta)|$.*

Уколико је задовољено првих пет услова који су претходно дати тада важи да $\hat{\theta}_n \to \theta_0$ скоро сигурно када $n \to +\infty$.

Под условима 6-10 који су претходно наведени постоји квадратна матрица димензије $d \times d$, дата са:

$$\boldsymbol{J} = E\Delta_t^T (H_t^{-1}(\theta_0) \otimes H_t^{-1}(\theta_0))\Delta_t, \;\; \Delta_t = \frac{\partial \widetilde{vektor}(H_t(\theta_0))}{\partial \theta^T},$$

и матрице $\boldsymbol{I}$ димензије $d \times d$ чији је облик дат са:

$$\boldsymbol{I}(i,\, j) = tr(KE(C_{i,t}C_{j,t}^T)),$$

где је са $tr(\cdot)$ означен траг матрице а

$$K = E(\widetilde{vektor}(\boldsymbol{I}_m - e_t e_t^T)\widetilde{vektor}^T(\boldsymbol{I}_m - e_t e_t^T)),$$

и

$$C_{i,j} = (H_t^{-1/2}(\theta_0) \otimes H_t^{-1/2}(\theta_0))\widetilde{vektor}(\frac{\partial H_t(\theta_0)}{\partial \theta_i}).$$

Под додатном претпоставком 11, $\boldsymbol{J}$ је инвертибилна матрица и важи:

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \to \mathcal{N}(0, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{-1}), n \to +\infty.$$

Такође постоји и Бахадурова репрезентација:

$$\hat{\theta}_n - \theta_0 = \boldsymbol{J}^{-1}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\Lambda_t \widetilde{vektor}(e_t e_t^T - \boldsymbol{I}_m) + o(n^{-1/2}),$$

$$\Lambda_t = \Delta_t^T((H_t^{-1/2})^T(\theta_0) \otimes (H_t^{-1/2})^T(\theta_0)).$$

Ова теорема, на основу одређених услова, обезбеђује постојаност и асимптотску нормалност оцене добијене квази максималном методом веродостојности.

4.2 Оцењивање параметара GARCH модела константних условних корелација

Пре приступања оцени параметара, неопходно је направити увод. Нека је дат GARCH модел константних условних корелација:

$$X_t = H_t^{1/2} e_t,$$
$$H_t = D_t R D_t,\ D_t^2 = diag(\bar{h}_t),$$
$$\bar{h}_t = \bar{\omega} + \sum_{i=1}^{q} A_i \bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j \bar{h}_{t-j},$$

где је $\bar{X}_t = (X_{1t}^2, ..., X_{mt}^2)^T$, R корелациона матрица, $\bar{\omega}$ је вектор димензије $m \times 1$ са позитивним елементима а A_i и B_j су матрице димензије $m \times m$ са ненегативним елементима, e_t представља компоненту грешке.
Параметри које треба оценити су елементи матрице $\bar{\omega}$, A_i, B_j као и елементи доњетроугаоног дела матрице $R = (\rho_{ij})$, не укључујући дијагоналу. Тако је број параметара s_0 које је потребно оценити једнак: m (број елемената вектора $\bar{\omega}$) + qm^2 (број елемената матрица A_i за $i = 1, ..., q$) + pm^2 (број елемената матрица B_j за $j = 1, ..., p$) + $\frac{m(m-1)}{2}$ (број елемената матрице $R = (\rho_{ij})$ испод дијагонале). Вектор параметара је дат са:

$$\theta = (\theta_1, ..., \theta_{s_0})^T = (\bar{\omega}^T, \alpha_1^T ..., \alpha_q^T, \beta_1^T ..., \beta_p^T, \rho^T)^T = (\bar{\omega}^T, \alpha^T, \beta^T, \rho^T)^T,$$

где је $\widetilde{:\ \rho^T} = (\rho_{21}, ..., \rho_{m1}, \rho_{32}, ..., \rho_{m2}, ..., \rho_{m,m-1})$, $\alpha_i = \widetilde{vektor}(A_i), i = 1, ..., q$, $\beta_j = \widetilde{vektor}(B_j), j = 1, ..., p$. Простор параметара је потпростор Θ од:

$$(0, +\infty)^m \times (0, +\infty)^{(p+q)m^2} \times (-1, 1)^{\frac{m(m-1)}{2}}.$$

Стварна вредност параметра који се оцењује је дата са:

$$\theta = (\bar{\omega}_0^T, \alpha_{01}^T ..., \alpha_{0q}^T, \beta_{01}^T ..., \beta_{0p}^T, \rho_0^T)^T = (\bar{\omega}_0^T, \alpha_0^T, \beta_0^T, \rho_0^T)^T.$$

Сада је неопходно увести услове за матрице A_i и B_j како би параметризација била јединствена.

Нека је $\mathcal{A}_\theta(z) = \sum_{i=1}^q A_i z^i$ и $\mathcal{B}_\theta(z) = \mathbf{I}_m + \sum_{j=1}^p B_j z^j$. Нека је $\mathcal{A}_\theta(z) = 0$ када је $q = 0$ и $\mathcal{B}_\theta(z) = \mathbf{I}_m$ када је $p = 0$. Ако је $\mathcal{B}_\theta(z)$ инвертибилна матрица, тада се из израза $\mathcal{B}_\theta(B)\bar{h}_t = \bar{\omega} + \mathcal{A}_\theta(B)\bar{X}_t$, множењем инверзом $\mathcal{B}_\theta^{-1}(B)$ са десне стране, добија: $\bar{h}_t = \mathcal{B}_\theta^{-1}(B)\bar{\omega} + \mathcal{B}_\theta^{-1}(B)\mathcal{A}_\theta(B)\bar{X}_t$. У векторском случају није довољно само претпоставити да полиноми $\mathcal{A}_{\theta_0}$ и $\mathcal{B}_{\theta_0}$ немају дефинисане корене за неко θ_0, како не би постојао још један уређени пар $(\mathcal{A}_\theta, \mathcal{B}_\theta)$ са истим параметрима $(p,\ q)$ такав да:

$$\mathcal{B}_\theta(B)^{-1}\mathcal{A}_\theta(B) = \mathcal{B}_{\theta_0}(B)^{-1}\mathcal{A}_{\theta_0}(B).$$

Овај услов је еквивалентан са постојањем оператора $U(B)$ таквог да важи:

$$\mathcal{A}_\theta(B) = U(B)\mathcal{A}_{\theta_0}(B); \;\; \mathcal{B}_\theta(B) = U(B)\mathcal{B}_{\theta_0}(B).$$

Полином $U(B)$ је унимодуларан уколико је његова детерминанта константа различита од нуле. Када из $P(B) = U(B)P_1(B)$ и $Q(B) = U(B)Q_1(B)$ следи да је детерминанта $U(B)$ константна, тада су једина решења полинома $P(B)$ и $Q(B)$ унимодуларна и тада су $P(B)$ и $Q(B)$ међусобно (лево) копрости.

Пример 4.1. *Нека је дат најједноставнији вишедимензиони случај за $m = 2$, тада су $\mathcal{A}_\theta$, $\mathcal{B}_\theta$ и U дефинисане као:*

$$\mathcal{A}_\theta = \begin{pmatrix} a_{11}(B) & a_{12}(B) \\ a_{21}(B) & a_{22}(B) \end{pmatrix}; \;\; \mathcal{B}_\theta = \begin{pmatrix} b_{11}(B) & b_{12}(B) \\ b_{21}(B) & b_{22}(B) \end{pmatrix}; \;\; U = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ B & 1 \end{pmatrix},$$

где су степени полинома a_{21} и a_{22} једнаки q а степени полинома a_{11} и a_{12} мањи од q, слично степени полинома b_{21} и b_{22} су једнаки p а степени полинома b_{11} и b_{12} мањи од p. Сада важи да је полином $\mathcal{A}(B) = U(B)\mathcal{A}_{\theta_0}(B)$ истог степена q као и $\mathcal{A}_{\theta_0}$, а $\mathcal{B}(B) = U(B)\mathcal{B}_{\theta_0}(B)$ је истог степена p као и $\mathcal{B}_{\theta_0}$. Такође $U(B)$ има детерминанту различиту од нуле која је константна, па самим *тим не зависи од B, што овај оператор чини унимодуларним. На основу дефиниције важи да је $\mathcal{A}(0) = \mathcal{A}_{\theta_0}(0) = 0$ и $\mathcal{B}(0) = \mathcal{B}_{\theta_0}(0) = \boldsymbol{I}_m$. Постоји θ такво да је $\mathcal{A}(B) = \mathcal{A}_\theta(B)$, $\mathcal{B}(B) = \mathcal{B}_\theta(B)$ и $\bar{\omega} = U(1)\bar{\omega}_0$. За параметре θ и θ_0 добијају се исте репрезентације, па модел није једнозначно одређен. Овај пример показује да ни то што су оператори P и Q копрости није довољан услов да модел буде једнозначан у вишедимензионом случају.*

Како би се обезбедили услови за једнозначност потребно је увести следеће ознаке: Нека је за сваку колону j матричних оператора $\mathcal{A}_\theta(B)$ и $\mathcal{B}_\theta(B)$ дефинисан максимални степен $q_j(\theta)$ и $r_j(\theta)$. Нека постоје максималне вредности за ове елементе по колонама: $(\forall\theta \in \Theta)(\forall j \in \{1, ..., m\})\, q_j(\theta) \leq q_j$ и $p_j(\theta) \leq p_j$ при чему су ове вредности ограничене $q_j \leq q$ и $p_j \leq p$ где су q, p константни цели бројеви. Нека је са $a_{q_j}(j)$ ($b_{p_j}(j)$) означена колона вектора коефицијената B^{q_j} (B^{p_j}) у j-тој колони од $\mathcal{A}_{\theta_0}(B)$ ($\mathcal{B}_{\theta_0}(B)$). Сада је могуће дефинисати услов једнозначности.

Тврђење. *Ако за матрицу колона важи да:*

$$\mathcal{M}(\mathcal{A}_{\theta_0}, \mathcal{B}_{\theta_0}) = [a_{q_1}(1), ..., a_{q_m}(m), b_{p_1}(1), ..., b_{p_m}(m)]$$

има све колоне линеарно независне, тада су параметри α_0 и β_0 дефинисани као раније при чему је $q_j = q_j(\theta_0)$ и $p_j = p_j(\theta_0)$ за сваку вредност j.

Нека је сада $(X_1, ..., X_n)$ опсервација дужине n, јединственог и строго стационарног решења (X_t) GARCH модела константних условних корелација. Када су дате почетне вредности $X_0, ..., X_{1-q}, \bar{h}_0, ..., \bar{h}_{1-p} \geq 0$ тада се Гаусова квази максимална функција веродостојности за параметар θ, на основу узорка димензије n, може се записати као:

$$L(\theta) = L(\theta, X_1, ..., X_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{(2\pi)^{m/2}|\tilde{H}_t|^{1/2}} e^{-\frac{X_t^T \tilde{H}_t^{-1} X_t}{2}},$$

где је $\tilde{H}_t$ дефинисано као у конструкцији модела константних условних корелација односно:

$$\tilde{H}_t = \tilde{D}_t R \tilde{D}_t, \;\; \tilde{D}_t = (diag(\tilde{h}_t))^{1/2},$$
$$\tilde{h}_t = \tilde{h}_t(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i \bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j \tilde{h}_{t-j}.$$

Сада је оцена параметра методом квази максималне веродостојности: $\hat{\theta} = arg \max_{\theta\in\Theta} L(\theta) = arg \min_{\theta\in\Theta} \tilde{I}_n(\theta)$

Почетне вредности могу се одабрати на више начина. На пример могу бити фиксиране тако да:

$$\bar{X}_0 = ... = \bar{X}_{1-q} = \tilde{h}_0 = ... = \tilde{h}_{1-p} = 0$$

или одабране тако да буду функције од θ:

$$\bar{X}_0 = ... = \bar{X}_{1-q} = \tilde{h}_0 = ... = \tilde{h}_{1-p} = \bar{\omega}$$

или пак одабране тако да представљају случајне функције опсервација:

$$\tilde{h}_t = \bar{X}_t = \begin{pmatrix} X_{1t}^2 \\ \vdots \\ X_{mt}^2 \end{pmatrix}, \quad i = 0, ..., 1-r; \;\; r = max\{p, q\}.$$

Нека је са $\gamma(A_0)$ означен горњи Љапуновљев коефицијент низа матрица $A_0 = A_{0t}$ дефинисан на истоветан начин као приликом дискусије стационарности модела константних условних корелација када је $\theta = \theta_0$. Сада је неопходно дефинисати услове који ће обезбедити строгу постојаност оцене добијене методом квази максималне веродостојности:

- $\theta_0 \in \Theta$, где је Θ компактан скуп.
- За Љапуновљев коефицијент низа матрица важи $\gamma(A_0) < 0$ и $(\forall \theta \in \Theta)\, det(\mathcal{B}(z)) = 0 \Rightarrow |z| > 1$
- Елементи компоненте грешке e_t су независни и њихови квадрати имају недегенерисану расподелу вероватноћа.
- Ако је $p > 0$ тада су $\mathcal{A}_{\theta_0}(z)$ и $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ (лево) копрости и матрица $M_1(\mathcal{A}_{\theta_0}, \mathcal{B}_{\theta_0})$ има све колоне линеарно независне.

  Нека у простору Θ важи услов $(\forall \theta \in \Theta)(\forall i \in \{1, ..., m\}) q_j(\theta) \leq q_j$ и $p_j(\theta) \leq p_j$ при чему су ове вредности ограничене $q_j \leq q$ и $p_j \leq p$, где су q, p константни цели бројеви, односно ако постоје максимални редови за $\bar{X}_t$ и $\bar{h}_t$ у свакој једначини. Тада се ова тврдња може уопштити тако да важи:

  Ако је $p > 0$ тада су $\mathcal{A}_{\theta_0}(z)$ и $\mathcal{B}_{\theta_0}(z)$ (лево) копрости и матрица $M(\mathcal{A}_{\theta_0}, \mathcal{B}_{\theta_0})$ има све колоне линеарно независне.
- R је позитивно дефинитна корелациона матрица $\forall \theta \in \Theta$

Како би спровођење поступка било изводљиво, низ $(\tilde{l}_t(\theta))$ треба апроксимирати ергодичним и стационарним низом, што је могуће учинити јер је простор низова у ком се ради довољно густ. Нека је са $(\bar{h}_t) = (\bar{h}_t(\theta))$ означено строго стационарно и ергодично решење за $\tilde{h}_t = \tilde{h}_t(\theta) = \omega + \sum_{i=1}^{q} A_i \bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_j \tilde{h}_{t-j}$. Нека је $D_t = (diag(\bar{h}_t))^{1/2}$ и $H_t = D_t R D_t$. Сада је могуће дефинисати:

$$\mathbf{I}_n(\theta) = \mathbf{I}_n(\theta | X_n, X_{n-1}, ...) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} l_t,$$

где је:

$$l_t = l_t(\theta) = X_t^T H_t^{-1} X_t + log|H_t|.$$

Пре формулације теореме неопходно је још увести следеће ознаке: $H_t^{1/2} = D_t R^{1/2}$ и $\tilde{H}_t^{1/2} = \tilde{D}_t R^{1/2}$, где је $R^{1/2}$ симетрични и позитивно дефинитни квадратни корен матрице R. Такође треба увести и инверзе: $H_t^{-1/2} = R^{-1/2} D_t^{-1}$ и $\tilde{H}_t^{-1/2} = R^{-1/2} \tilde{D}_t^{-1}$.

Теорема 4.2 (Јака постојаност)**.** *Нека је $(\hat{\theta}_n)$ низ оцена квази максималном методом веродостојности такав да важи $\hat{\theta} = arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = arg\min_{\theta \in \Theta} \tilde{I}_n(\theta)$. Уколико су задовољени услови строге постојаности, тада $\hat{\theta}_n \to \theta_0$, $n \to +\infty$ скоро сигурно.*

Сада је потребно видети под којим условима ће бити постигнута асимптотска нормалност оцене. За следећу теорему, поред услова строге постојаности, неопходна су још два услова за асимптотску нормалност:

- θ_0 припада унутрашњости скупа Θ
- $E||e_t e_t^T||^2 < +\infty$

Теорема 4.3 (Асимптотска нормалност)**.** *Нека је $(\hat{\theta}_n)$ низ оцена квази максималном методом веродостојности, такав да важи $\hat{\theta} = arg\max_{\theta \in \Theta} L(\theta) = arg\min_{\theta \in \Theta} \tilde{I}_n(\theta)$. Уколико важе услови строге постојаности и асимптотске нормалности, тада $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta_0) \to \mathcal{N}(0, \boldsymbol{J}^{-1}\boldsymbol{I}\boldsymbol{J}^{-1})$ у расподели, када $n \to +\infty$, где је $\boldsymbol{J}$ позитивно дефинитна а $\boldsymbol{I}$ позитивно семидефинитна матрица, дефинисане са:*

$$\boldsymbol{I} = E(\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta}\frac{\partial l_t(\theta_0)}{\partial \theta^T}), \quad \boldsymbol{J} = E(\frac{\partial^2 l_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta^T})$$

Пример 4.2. *Како би својства претходних теорема била уочена, потребно је симулирати одређени GARCH модел константних условних корелација* *велики број пута. Тада је могуће оценити густину расподеле оцењених параметара и упоредити их са теоријски дефинисаним вредностима.*

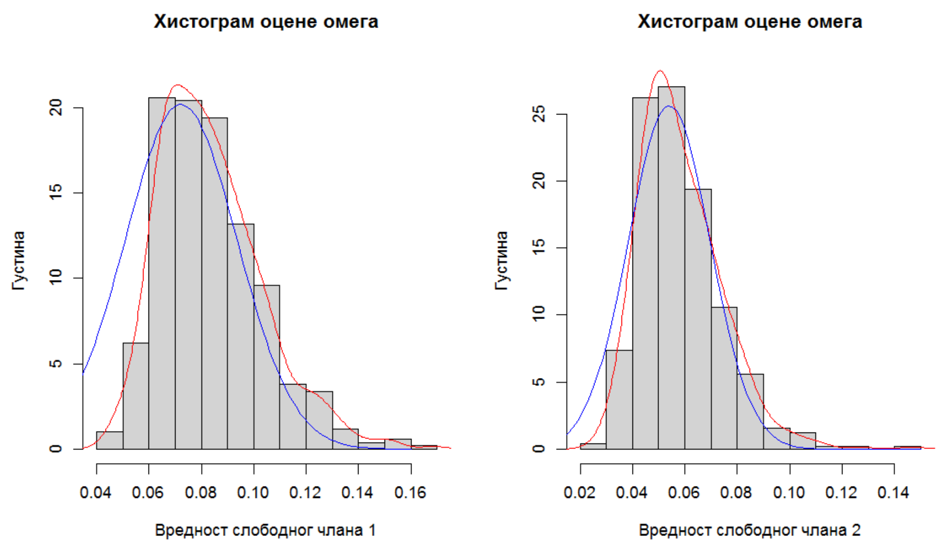
Нека је дат GARCH модел константних условних корелација са параметрима $m = 2$, $p = 1$, $q = 1$ и следећим вредностима коефицијената:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.079 \\ 0.054 \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} 0.145 & \\ & 0.105 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0.833 & \\ & 0.875 \end{pmatrix}; R = \begin{pmatrix} 1 & 0.668 \\ 0.668 & 1 \end{pmatrix}$$

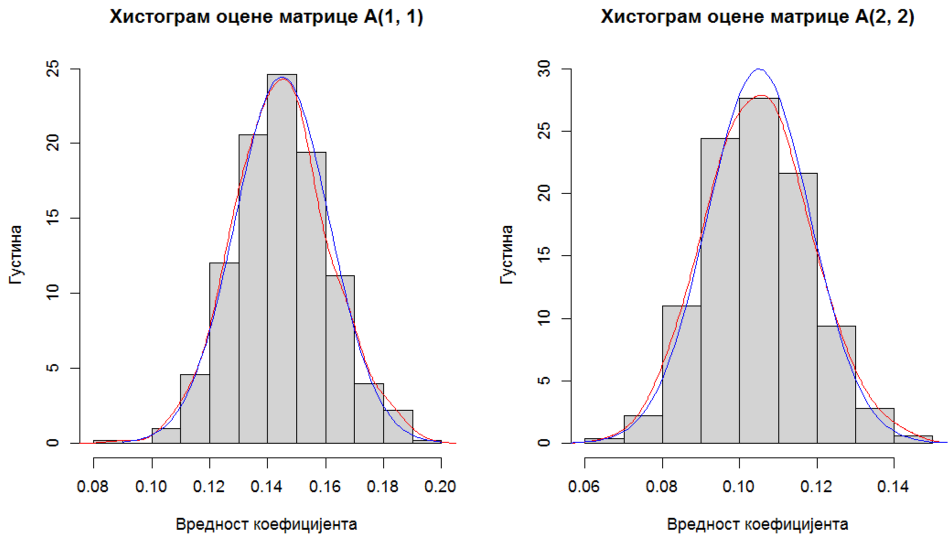
Користећи одговарајући пакет у програмском језику R, генерише се 2000 случајних вредности из овако дефинисаног процеса, на основу којих се оцењују вредности параметара. Овај поступак се понавља 1000 пута како би било могуће дискутовати асимптотска својства добијених резултата. Након спроведеног поступка, добијене су следеће просечне вредности коефицијената:

$$\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} 0.086 \\ 0.086 \end{pmatrix}; \hat{A} = \begin{pmatrix} 0.146 & \\ & 0.105 \end{pmatrix}; \hat{B} = \begin{pmatrix} 0.828 & \\ & 0.872 \end{pmatrix}; \hat{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0.667 \\ 0.667 & 1 \end{pmatrix}$$

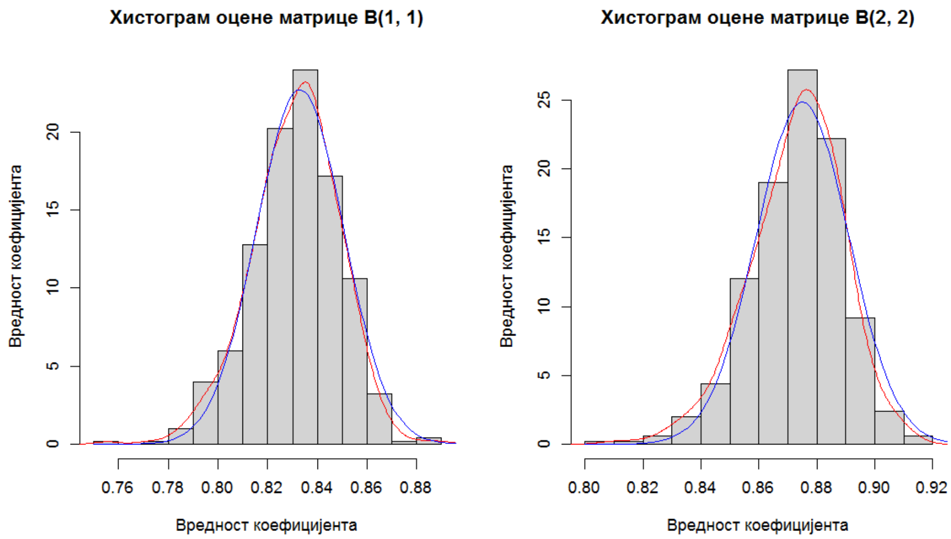
Примећује се да су добијене просечне оцењене вредности након 1000 понављања блиске стварним вредностима. Прецизност повећава како расте број понављања (с тим што се повећава и време извршавања самог кôд-а), што је у складу са претходно доказаним теоријским асимптотским својствима оцена.



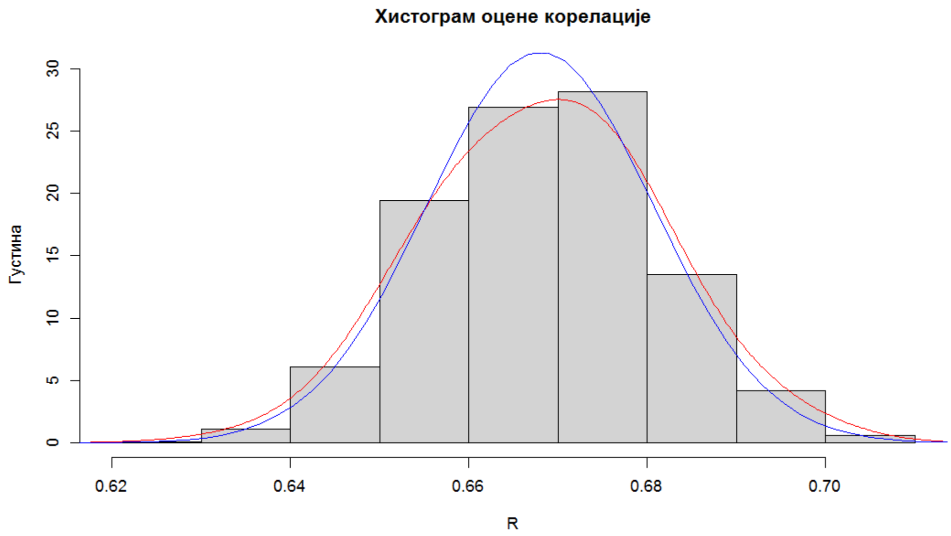
Слика 4.1: Хистограм оцена за вектор омега



Слика 4.2: Хистограм оцена за матрицу A



Слика 4.3: Хистограм оцена за матрицу A



Слика 4.4: Хистограм оцена за коефицијент корелације

На самим хистограмима (Слике 4.1, 4.2, 4.3, 4.4) дате су расподеле вредности оцена добијених претходно дефинисаним поступком. Црвеном линијом приказана је оцена густине, а плавом оцена асимптотске густине расподеле оцена. Примећује се нормална расподељеност вредности оцењеног параметра. Код параметара омега постоји издужени реп са једне стране, али то не представља значајан проблем у структури модела, јер је реч о слободном члану. Оцене су утолико прецизније, што се више пута поступак оцењивања понови, што одговара теоријском услову да $n \to +\infty$.

4.3 Алтернативне методе за оцењивање параметара

Иако метода квази максималне веродостојности пружа одређене предности у погледу примене у односу на класичну методу максималне веродостојности, проблеми ипак постоје. Они су значајније изражени с порастом димензионалности (проблем клетве димензионалности), па се самим тим број елемената условне коваријационе матрице повећава. То може изазвати нестабилност добијеног резултата приликом примене метода за оцену параметара, нарочито када се над том матрицом врше трансформације. Иако је могуће нумерички спровести одређени поступак, битно да добијено решење буде стабилно тј. да се за мале промене у подацима не добијају значајно другачија решења.

Оцењивање параметара циљањем дисперзије

Оцењивање параметара циљањем дисперзије (погледати [12] у литератури) се врши у два корака. Прво се матрица коваријације (обична а не условна) вредности векторске временске серије оцени методом момената. Ова метода је заснована на репараметризацији векторског GARCH модела, при чему се матрица слободних чланова у једнакости за условну дисперзију замењује (обичном) коваријационом матрицом.

Нека је дат GARCH модел константних условних корелација:

$$X_t = H_t^{1/2} e_t,$$

$$H_t = D_t R_0 D_t,\ D_t^2 = diag(\bar{h}_t),$$

$$\bar{h}_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^{q} A_{0i}\bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_{0j}\bar{h}_{t-j},$$

где је $\bar{X}_t = (X_{1t}^2, ..., X_{mt}^2)^T$, R_0 је корелациона матрица а A_{0i} и B_{0j} матрице димензије $m \times m$ са позитивним елементима. Овако дефинисан модел има слабо стационарно решење X_t када је спектрални радијус од $\sum_{i=1}^{q} A_{0i} + \sum_{j=1}^{p} B_{0j}$ строго мањи од 1. Под овим условима важи и:

$$E\bar{X}_t = E\bar{h}_t = (\mathbf{I}_m - \sum_{i=1}^{r}(A_{0i} + B_{0i}))^{-1}\omega_0 := h_0.$$

Из претходне једнакости следи да је:

$$\bar{h}_t = \omega_0 + \sum_{i=1}^{q} A_{0i}\bar{X}_{t-i} + \sum_{j=1}^{p} B_{0j}\bar{h}_{t-j} \iff \bar{h}_t - h_0 = \sum_{i=1}^{q} A_{0i}(\bar{X}_{t-i} - h_0) + \sum_{j=1}^{p} B_{0j}(\bar{h}_{t-j} - h_0).$$

Сада се вредност параметра састоји од елемената вектора h, елемената матрица A_i и B_j (праве вредности су дате са h_0, A_{0i}, B_{0j}) и елемената доње-троугаоног дела (без дијагонале) матрице корелације $R = (\rho_{ij})$. Једна од предности ове параметризације јесте у томе што се параметар h_0 може врло лако оценити узорачком средином: $\hat{h}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} \bar{X}_t$.

Сада је јасно да се ова метода користи тако што се у првом кораку емпиријски одреди оцена за h, па се потом остали параметри оцењују методом квази максималне веродостојности у другом кораку. Под одговарајућим дефинисаним претпоставкама ове оцене су постојане и асимптотски нормалне.

Оваква метода оцењивања је рачунски бржа од стандардне методе квази максималне веродостојности, а при томе се не губи на квалитету оцене. Такође, битно је да су овако добијене оцене робусне у погледу маргиналних дисперзија компоненти (када оне постоје). Оцена дисперзије овом методом конвергира ка теоријски добијеној вредности када је временска серија стационарна, ергодична и има дефинисане моменте другог реда. Оно што оцењивању параметара циљањем дисперзије даје кључну предност над квази максималном методом веродостојности је то што су оцене дисперзије појединачних компоненти постојане, што је од великог значаја за практичне примене.

Оцењивање параметара једначина по једначина

Један од начина да се превазиђе проблем високе димензионалности приликом оцене параметара вишедимензионог GARCH модела јесте метода једначина по једначина (погледати [14] у литератури). Ова метода састоји се из два везана корака. У првом се оцењују појединачне условне дисперзије па се потом, у наредном кораку, оцењују остали параметри.

Нека је дат m-димензиони процес (X_t) који има условно очекивање 0 и позитивно дефинитну матрицу условне корелације H_t. Репрезентација овог модела је следећа:

$$X_t = H_t^{1/2} e_t, \quad E(e_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = 0, \quad cov(e_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = \mathbf{I}_m,$$
$$H_t = H(X_{t-1}, X_{t-2}, ...) = D_t R_t D_t,$$

где је $\mathcal{F}_{t-1}$ филтрација генерисана као $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_u \,|\, u < t\}$, $D_t = (diag(H_t))^{1/2}$ и $R_t = cor(X_t, X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})$. Нека је са σ_{kt}^2 дат k-ти елемент дијагоналне матрице H_t што представља условну дисперзију за X_{kt}. Уколико σ_{kt}^2 зависи од параметра $\theta_0^{(k)} \in \mathbb{R}^{d_k}$ из компактног скупа параметара Θ_k, тада важи:

$$X_{kt} = \sigma_{kt} e_{kt}^*,$$

$$\sigma_{kt} = \sigma_k(X_{t-1}, X_{t-2}, ... \,|\, \theta_0^{(k)}),$$

где је σ_k позитивна функција. За $e_t^* = (e_{1t}^*, ..., e_{mt}^*) = D_t^{-1}X_t = (\frac{X_{1t}}{\sigma_{1t}}, ..., \frac{X_{mt}}{\sigma_{mt}})^T$ важи да је $E(e_t^* \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ и $cov(e_t^* \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = R_t$. Из $E(e_{kt}^* \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = 0$ и $D(e_{kt}^* \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) = 1$ може се закључити да e_t^* представља компоненту грешке. Претходно дефинисани модел, иако можда личи, није обичан једнодимензиони GARCH модел. Условна дисперзија σ_{kt} зависи од свих прошлих вредности од X_t, не само од X_{kt}. Такође, грешке e_{kt}^* нису независне и једнако расподељене, осим у специјалном случају када је матрица условне корелације $R_t = R = const$. На пример параметарска репрезентација σ_{kt} која личи на стандардни GARCH(1, 1) модел има облик:

$$\sigma_{kt}^2 = \omega_k + \sum_{l=1}^{m} \alpha_{k,l} X_{l,\,t-1}^2 + \beta_k \sigma_{k,\,t-1}^2, \;\; \omega_k > 0, \, \alpha_{k,l} \geq 0, \, \beta_k \geq 0.$$

Додатно, за овај модел се може одредити и динамика условне корелационе матрице R_t. У моделу променљивих условних корелација матрица R_t има облик:

$$R_t = (Q_t^*)^{-1/2} Q_t (Q_t^*)^{-1/2}, \;\; Q_t = (1 - \alpha - \beta)S + \alpha e_{t-1}^* (e_{t-1}^*)^T + \beta Q_{t-1},$$

где су $\alpha, \beta \geq 0$, $\alpha + \beta < 1$, S је позитивно дефинитна матрица а Q_t^* дијагонална матрица са истим елементима као Q_t на дијагонали. Како би се уопштила репрезентација потребно је да матрица R_t зависи од параметра $\rho_0 \in \mathbb{R}^n$, заједно са параметром условне дисперзије θ_0:

$$R_t = R(X_{t-1}, X_{t-2}, ... | \, \theta_0, \rho_0) = \mathcal{R}(e_{t-1}^*, e_{t-2}^*, ... | \, \rho_0)$$

За опсервације $X_1, ..., X_n$ и произвољне почетне вредности $\tilde{X}_i$ за $i \leq 0$ дефинише се $\tilde{\sigma_{kt}}(\cdot) = \sigma(X_{t-1}, X_{t-2}, ..., X_1, \tilde{X}_0, \tilde{X}_{-1}, ... | \cdot)$ за $k = 1, ..., m$. Процедура оцењивања параметара је дата у два корака:

- Одређивање параметара условне дисперзије $\theta_0^{(k)}$:

  $$\hat{\theta}_n^{(k)} = arg \min_{\theta^{(k)} \in \Theta_k} \tilde{Q}_n^{(k)}(\theta^{(k)}), \;\; \tilde{Q}_n^{(k)}(\theta^{(k)}) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} log(\tilde{\sigma}_{kt}^2(\theta^{(k)})) + \frac{X_{kt}^2}{\tilde{\sigma}_{kt}^2(\theta^{(k)})}$$

  и вектора резидуала $\hat{e}_t^* = (\hat{e}_{1t}^*, ..., \hat{e}_{mt}^*)^T$ где је $\hat{e}_{kt}^* = \tilde{\sigma}_{kt}^{-1}(\hat{\theta}^{(k)}) X_{kt}$.

- Одређивање условне матрице корелације ρ_0, методом квази максималне веродостојности, решавањем једначине:

  $$arg \min_{\rho \in \Lambda} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} (\hat{e}_t^*)^T \hat{R}_t^{-1} \hat{e}_t^* + log|\hat{R}_t|,$$

где је $\Lambda \subset \mathbb{R}^r$ компактан скуп, $\hat{R}_t = \mathcal{R}(\hat{e}^*_{t-1}, \hat{e}^*_{t-2}, ..., \hat{e}^*_1, \hat{e}^*_0, \hat{e}^*_{-1}, ...|\rho)$, а $\hat{e}^*_{-i}$ представљају почетне вредности.

4.4 Провера квалитета формираног модела

Без обзира на то који се модели користе, неопходно је одредити параметре од којих ће зависити колико добро модел описује податке. Наравно, значајан утицај на квалитет имаће и сам одабир модела, с обзиром да се конфигурацијом параметара не може достићи пожељан квалитет уколико сам модел није одговарајући. Приликом оптимизације параметара, треба водити рачуна да се не зађе у било коју од две крајности. Односно да модел не одговара подацима чиме излаз модела није од користи или да је преприлагођен чиме се губи могућност генерализације и предвиђања нису релевантна. Један од начина за одређивање одговарајућих параметара јесте оптимизационим алгоритмима пронаћи минимум функције грешке излаза модела. С обзиром да је реч о вишедимензионим моделима, проблем одређивања минимума грешке се усложњава и захтева рачунање хесијана, што може бити временски захтевно. Иако је ова градијентна техника изводљива, постоји већи проблем. Наиме вишедимензиони GARCH модели дају оцену коваријације и корелације одређених финансијских инструмената за које није доступна стварна вредност, тако да није познато у односу на које вредности се рачуна функција грешке коју је потребно оптимизовати. Стога се прибегава употреби једноставнијих за примену а довољно прецизних метода за одређивање квалитета које користе информационе критеријуме.

Акаике[1] информациони критеријум (скраћено AIC), базиран је на теорији информације (погледати [26] у литератури). Када се статистички модел користи за описивање података, добијена репрезентација никада неће перфектно одговарати процесу из кога су подаци настали, односно одређени део информације ће бити изгубљен приликом моделовања. AIC процењује релативни губитак информације приликом описивања одређеног процеса моделом. Стога мања вредност AIC-а указује на бољи модел, што омогућава поређење. Вредност критеријума се дефинише на следећи начин:

$$AIC = 2k - 2log(\hat{L})$$

[1]Hirotugu Akaike (1927 - 2009) - јапански статистичар

где k представља број параметара који су оцењени у моделу, $\hat{L}$ максималну вредност функције веродостојности модела. Из саме формуле могуће је закључити да је вредност критеријума нижа уколико модел боље одговара подацима, док се његова вредност повећава додавањем нових параметара који доводе до преприлагођавања. Осим AIC-а важно је напоменути и Бајесов информациони критеријум (скраћено BIC) који је врло сличан осим што има строжи начин кажњавања преприлагођавања. Такође је модел утолико бољи уколико је вредност BIC-а мања. Вредност критеријума се дефинише на следећи начин:

$$BIC = log(n)k - 2log(\hat{L})$$

где k представља број параметара који су оцењени у моделу, n обим узорка на основу кога се креира модел а $\hat{L}$ максималну вредност функције веродостојности модела.

4.5 Прогнозирање вредности вишедимензионих GARCH модела

Након формирања модела задовољавајућег квалитета, потребно је размотрити на који начин је могуће предвиђати будуће вредности временских серија. Такође је битно оптимизовати сам процес у односу на грешку прогнозе, која представља разлику између стварних и прогнозираних вредности, чиме се у одређеној мери побољшава њен квалитет. Уколико је са X_t дата вредност временске серије, при чему су у временским тренуцима $\{1, ..., t-1\}$ реализоване вредности а са $\hat{X}_t = f(X_s,\, s \in \{1, ..., t-1\})$ прогноза вредности временске серије у тренутку t. Тада се методом најмањих квадрата може одредити $\hat{X}_t$, тако да израз $E((X_t - f(X_s,\, s \in \{1, ..., t-1\}))^2)$ има минималну вредност. Функција која задовољава овај оптимизациони израз јесте $\hat{X}_t = E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})$, где је $\mathcal{F}_{t-1}$ филтрација генерисана као $\mathcal{F}_{t-1} = \sigma\{X_1, ..., X_{t-1}\}$. То је могуће показати на следећи начин:

$$E(X_t - f)^2 = E(X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) + E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)^2 =$$

$$E(X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}))^2 + E(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)^2 + 2E((X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}))(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)),$$

а како за последњи члан суме важи:

$$E(E((X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}))(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f) \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) =$$

$$E((E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)E(X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) =$$

$$E((E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - E(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) =$$

$$E((E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - f)(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}) - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = 0.$$

Добија се да је функција f заиста минимум датог израза. Како грешку није могуће одредити експлицитно, с обзиром да стварне вредности у тренутку предвиђања нису познате, неопходно је да се она оцени. У том случају се добија да је оцена грешке $\hat{e}_t = X_t - \hat{X}_t = X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})$.
Овако добијена оцена има следеће особине:

- Оцена $\hat{X}_t = E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})$ је непристрасна јер је $E(\hat{X}_t) = E(E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = E(X_t)$ па из тога следи да је $E(\hat{e}_t) = 0$ јер је $E(\hat{X}_t) = E(X_t)$.

- Грешка $\hat{e}_t$ је некорелисана са сваким X_s, $s \in \{1, ..., t-1\}$ што се једноставно добија:
  $cov(\hat{e}_t, X_s) = E(\hat{e}_t X_s) - E(\hat{e}_t)E(X_s) = E(\hat{e}_t X_s) = E((X_t - E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}))X_s) =$
  $E(X_t X_s - X_s E(X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = E(X_t X_s - E(X_s X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1})) = E(X_t X_s) - E(E(X_s X_t \,|\, \mathcal{F}_{t-1}))$
  $= E(X_t X_s) - E(X_t X_s) = 0$, јер се искористи својство да је X_s мерљиво у односу на $\mathcal{F}_{t-1}$.

Након опште приче о прогнозирању моделима временских серија, неопходно је применити претходно на конкретне вишедимензионе GARCH моделе. То ће бити учињено за 1 корак у напред ради једноставности, с обзиром да се овакве процедуре обично спроводе користећи одговарајући софтверски алат. Треба водити рачуна о кораку, јер када хоризонт предвиђања тежи бесконачности условне корелације ће тежити ка обичним корелацијама, чиме се губи смисао разматрања ових модела.

За модел промењљивих условних корелација коваријациона матрица се може прогнозирати на следећи начин:

$$\hat{H}_{t+1} = \hat{D}_{t+1}\hat{R}_{t+1}\hat{D}_{t+1}$$

при чему се матрице D и R морају оценити засебно. Сада, примењујући претходно дискутовани поступак оцењује се редом:

$$\hat{D}_{t+1} = E(D_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t) = diag(\sqrt{E(h_{11,\,t+1} \,|\, F_t)},\, ...,\, \sqrt{E(h_{mm,\,t+1} \,|\, F_t)}),$$

где је F_t филтрација генерисана као $F_t = \sigma\{X_1, ..., X_t\}$.
Следећи корак је оцењивање вредности матрице корелација:

$$\hat{R}_{t+1} = E(R_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t) \approx diag(\hat{Q}_{t+1})^{-1/2}\hat{Q}_{t+1}diag(\hat{Q}_{t+1})^{-1/2}.$$

Сада се прогнозирана вредност матрице коваријација добија уврштавањем добијених вредности у одговарајући израз за $\hat{H}_{t+1} = \hat{D}_{t+1}\hat{R}_{t+1}\hat{D}_{t+1}$. У случају модела са константним условним корелацијама, матрица R је константна па је поступак истоветан, осим што није потребно израчунавати оцену за R, већ се она директно уврштава у формулу. Како би прогнозе биле непристрасне, неопходно је да се претпостави $E(e^*_{t+1}(e^*_{t+1})^T \,|\, \mathcal{F}_t) \approx E(Q_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t)$, зато што је $E(diag(Q_t)^{-1/2}Q_t diag(Q_t)^{-1/2})$ непознато па није могуће директно вршити прогнозу (погледати [23] поглавље 6.1 у литератури).

За BEKK модел предвиђања се врше слично, тада је прогноза матрице корелација дата са:

$$\hat{H}_{t+1} = \hat{C}\hat{C}^T + \hat{A}E(X_tX_t^T)\hat{A}^T + \hat{B}H_t\hat{B}^T.$$

Битно је напоменути да се за GARCH моделе не сматра да имају велику прецизност приликом прогнозирања, због квадрирања које је присутно у самим изразима што ће убрзати акумулирање грешке. Свакако, у општем случају важи да ће прогноза губити на прецизности с повећањем хоризонта. Када се вредности предвиђају на дужи временски период, корисно је вршити ревизију прогнозе, односно користити пристигле реализоване вредности за побољшање предиктивних способности самог модела.

Пример 4.3. *Користећи претходно дефинисани поступак биће спроведена прогноза вредности GARCH модела константних условних корелација за један корак у напред. Нека су параметри модела дати са $m = 2$, $p = 0$, $q = 1$, тада модел има следећи облик:*

$$X_t = H_t^{1/2}e_t;\; X_{k,\,t} = h_{kk,\,t}^{1/2}e_{k,\,t},$$

$$H_t = D_tRD_t;\; D_t = diag(h_{11,\,t}^{1/2},\, h_{22,\,t}^{1/2}),$$

$$h_{kk,\,t} = \omega_k + a_{kk,\,1} X^2_{k,\,t-1},\; k \in \{1,\,2\},$$

при чему су коефицијенти $\omega_k > 0$ *и* $a_{k,\,1} \geq 0$. *Сада је потребно прогнозирати вредност матрице* H_t *за један корак у напред на следећи начин:*

$$\hat{H}_{t+1} = \hat{D}_{t+1} R \hat{D}_{t+1}.$$

Како је матрица R *константна она се не оцењује, већ се само користи у прогнози. Матрица* D_{t+1} *оцењује се на следећи начин:*

$$\hat{D}_{t+1} = E(D_{t+1} \,|\, \mathcal{F}_t) = diag(\sqrt{E(h_{11,\,t+1} \,|\, F_t)},\, \sqrt{E(h_{22,\,t+1} \,|\, F_t)}),$$

где је F_t *филтрација генерисана као* $F_t = \sigma\{X_1, ..., X_t\}$. *Дакле, сам проблем се своди на одређивање* $E(h_{kk,\,t+1} \,|\, F_t)$, $k \in \{1,\,2\}$.

$$E(\omega_k + a_{kk,\,1} X^2_{k,\,t} \,|\, F_t) = \omega_k + a_{kk,\,1} E(X^2_{k,\,t} \,|\, F_t) =$$

$$\omega_k + a_{kk,\,1} E(h_{kk,\,t} e^2_{k,\,t} \,|\, F_t) = \omega_k + a_{kk,\,1} h_{kk,\,t} E(e^2_{k,\,t} \,|\, F_t).$$

Како је грешка e_t *некорелисана са свим* X_t, ..., X_{t-1}, *то ће на условно очекивање од целе сигма алгебре утицати једино вредност* X_t.

$$\hat{D}_{t+1} = diag(\sqrt{\omega_1 + a_{11,\,1} h_{11,\,t} E(e^2_{1,\,t} \,|\, X_t)},\, \sqrt{\omega_2 + a_{22,\,1} h_{22,\,t} E(e^2_{2,\,t} \,|\, X_t)})$$

Једноставном заменом вредности $\hat{D}_{t+1}$ *у формулу за* $\hat{H}_{t+1}$ *добија се прогноза за један корак у напред.*

Глава 5

Примене

Пре саме примене GARCH модела у финансијама, потребно је превазићи проблем типа параметарског скупа (који представља временски тренутак). Код ових модела он је дискретан, док је код финансијских временских серија непрекидан. Модели са непрекидним временом су кључни за вредновање опција и фјучерса (посматрано са теоријске стране), док се модели са дискретним временом чешће користе у применама. Стога је природан развој финансијске математике водио ка успостављању везе између поменута два параметарска простора. Идеја је да се дефинишу одређени услови под којима би стохастичка диференцна једначина у расподели тежила ка стохастичкој диференцијалној једначини. Тако би разлике између дискретних временских тренутака тежиле ка нули, чиме би се успоставила веза између два параметарска скупа. На тај начин би примена GARCH модела на финансијске временске серије била могућа.

Пре практичне примене GARCH модела неопходно је дефинисати неколико појмова који чине основу за даљи рад:

Дефиниција 5.1. *Нека је на простору вероватноћа* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *дефинисан* m*-димензиони процес* $\{W_t \,|\, t \in [0, +\infty)\}$ *са параметарским скупом из* $\mathbb{R}$*. Уколико су задовољени следећи услови:*

- $W_0 = 0$ *скоро сигурно*
- *За* $s \leq t,\ s, t \in [0, +\infty)$ *прираштаји* $W_t - W_s$ *су независни од* $\sigma\{W_u \,|\, u \leq s\}$ *и имају расподелу* $\mathcal{N}(0, (t-s)\boldsymbol{I}_m)$*, где је* $\boldsymbol{I}_m$ m*-димензиона јединична матрица.*

Тада се овај процес назива стандардним Винеровим процесом (или Брауновим кретањем).

Дефиниција 5.2. *Стохастичка диференцијална једначина у простору* $\mathbb{R}^m$ *јесте једначина облика:*

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ \ 0 \le t < +\infty,\ \ X_0 = x_0,$$

где је $x_0 \in \mathbb{R}^p$, $\mu : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p, \sigma : \mathbb{R}^p \to \mathcal{M}_{p\times m}$ *су мерљиве функције. Подразумева се да су овако дефинисане стохастичке диференцијалне једначине временски хомогене тј. да функције* μ *и* σ *не зависе од* t.

Дефиниција 5.3. *Случајни процес* $\{X_t \,|\, t \in [0,T]\}$ *је решење стохастичке диференцијалне једначине и назива се процесом дифузије уколико важи:*

$$X_t = x_0 + \int_o^t \mu(X_s)ds + \int_o^t \sigma(X_s)dW_s.$$

Јединственост и егзистенција решења захтева да функције μ *и* σ *задовољавају одређене услове (погледати [22] поглавље 5.2 у литератури).*

5.1 Вредновање финансијских опција

Деривати представљају важну класу финансијских инструмената, чији је принос изведен из основног инструмента (акције, обвезнице, ...) и дефинисан у уговору. Један од најзначајнијих деривата јесу финансијске опције. Оне купцу дају право али не и обавезу да купи (кол опције) или прода (пут опције) одређену количину одабраног финансијског инструмента S (акције, обвезнице, ...) од продавца/продавцу опције у дефинисаном тренутку T по унапред уговореној цени K. За стицање овог права купац плаћа одређену премију продавцу која представља цену опције. Најчешће коришћене су Европске опције које се могу активирати само у тренутку T и које ће се подразумевати од сада па надаље. Поред њих значајне су још и Америчке опције које се могу активирати у било ком тренутку који је мањи или једнак T.

За кол опције купац по истеку остварује право на профит у износу $max\{S_T - K, 0\}$. За пут опције купац по истеку остварује право на профит у износу $max\{K - S_T, 0\}$. Купац не може остварити губитак јер опција неће

бити активирана уколико не доноси профит. Вредновање опција се односи на одређивање цене опције у тренутку t, где t припада непрекидном скупу тако да $t < T$.
Нека су дата два финансијска инструмента, један од интереса, а други безризичан са константном каматном стопом r. Блек[1] - Шолс[2] модел (погледати [3] у литератури) претпоставља да је цена финансијског инструмента од интереса описана динамиком геометријског Брауновог кретања:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

где су μ и σ константе, а (W_t) стандардно Брауново кретање. Трансформацијом овог израза методама стохастичке анализе и интеграљењем на интервалу од $t-1$ до t, добија се дискретизована верзија претходне једнакости:

$$log(\frac{S_t}{S_{t-1}}) = \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma e_t, \;\; e_t \sim \mathcal{N}(0,1),$$

где су случајне величине e_t независне и једнако расподељене. Оваква претпоставка константне волатилности није примењива у реалности. Ипак то је могуће уопштити. Оно што је кључно у ово процедури јесте да се добија експлицитна формула за вредновање опција. Како би она била комплетна, неопходно је да одређени услови (из којих следи да није могуће остварити безризични профит) буду задовољени. Они обезбеђују да је решење једначине јединствено, односно у овом случају цена опције. Након одређених трансформација цена опције је дата са:

$$C(S,t) = e^{-r(T-t)} E_p(g(S_T) \,|\, S_t),$$

где је са $g(S_T)$ дата исплата у тренутку T истека опције ($max\{S_T - K,\, 0\}$ у случају кол опције или $max\{K - S_T,\, 0\}$ у случају пут опције), а са p вероватноћа у односу на коју се рачуна очекивање које одговара једначини:

$$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

где је са W_t дато стандардно Брауново кретање. Вероватноћа p се назива вероватноћом неутралном од ризика, јер је за њу очекивање приноса финансијског инструмента за који је опција везана заправо безризична каматна

[1]Fischer Black (1938 - 1995), Амерички економиста
[2]Myron Scholes (1941 -), Канадско-Амерички економиста

стопа r. Битно је напоменути да овако дефинисана вероватноћа није иста као она која је коришћена у формули $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$, којом се објашњава промена цене. Када се у Блек-Шолс формули замени исплата у тренутку истека опције за нпр. кол опцију, добија се експлицитан израз:

$$C(S,t) = S_t \Phi(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - e^{-r(T-t)} K \Phi(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}),$$

где је Φ функција расподеле $\mathcal{N}(0,1)$. Претходно разматрање се може уопштити и ако функције μ и σ нису константне. Уколико је S_t решење стохастичке диференцијалне једначине, тада ће она имати следећи облик:

$$dS_t = \mu(t, S_t)dt + \sigma(t, S_t)dW_t,$$

при чему функције μ и σ морају да задовољавају одређене услове.

Једини параметар који је непознат у Блек-Шолс формули јесте волатилност σ. Постоје два приступа за добијање њене оцене. Уколико се за оцену волатилности у тренутку t користе цене $S_0, ..., S_{t-1}$, тада је реч о историјској волатилности. Како су у случају геометријског Брауновог кретања логаритмовани приноси $log(\frac{S_t}{S_{t-1}})$ независни и једнако расподељени са нормалном $\mathcal{N}(\mu - \frac{\sigma^2}{2}, \sigma^2)$ расподелом могу се применити стандардне методе оцењивања, као што су метод момената и метода максималне веродостојности. Алтернатива оваквом методу би била имплицирана волатилност, која оцењује очекивану волатилност у тренутку t ослањајући се на цену опције на финансијском тржишту. Уколико се посматра Европска кол опција, њена цена у тренутку t је дата са C_t, а са S_t је означена цена финансијског инструмента за који је опција везана. Тада се имплицирана волатилност израчунава тако што се из једначине:

$$C(S,t) = S_t \Phi(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}) - e^{-r(T-t)} K \Phi(\frac{log(\frac{S_t}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}),$$

израчуна вредност σ_t, када су познате вредности C_t и S_t. Већ из саме једнакости је јасно да не постоји аналитички приступ који ће довести до решења, него је неопходно користити нумеричке методе. Ово решење је јединствено, зато што је функција C_t монотона по параметру σ.

Мотивацију за коришћење GARCH модела приликом рада са финансијским временским серијама најбоље је уочити на једнодимензионом случају. Из саме Блек-Шолс формуле за одређивање цене јасно се види да је параметар волатилности константан и не зависи од временске компоненте. То није реалистично, нарочито када је временски период до истека опције дугачак. Такође, оцене параметра σ добијене поменутим методама не морају нужно бити квалитетне. Финансијска временска серија може да промени своја статистичка својства у будућности, што смањује употребљивост оцене историјске волатилности. Са друге стране, метод имплициране волатилности захтева цену финансијске опције доступну на финансијским тржиштима. GARCH модели пружају могућност да се на основу креираног модела волатилности (на подацима који су доступни) предвиђају њене будуће вредности, што у одређеној мери може дати боље резултате, који се могу потом применити у Блек-Шолс формули.

Имплементација Блек-Шолс формуле у програмском језику *R* врши се на следећи начин:

```
# S - cena finansijskog instrumenta za koji je opcija vezana
# K - cena prilikom isteka opcije
# r - bezrizicna kamatna stopa
# T - vreme do isteka opcije
# sigma - volatilnost prinosa finansijskog instrumenta
# tip_opcije - da li je opcija call ili put

Black_Scholes <- function(S, K, r, T, sigma, tip_opcije){

  if(tip_opcije == "Call"){
    d1 <- (log(S/K) + (r + (sigma^2)/2)*T) / (sigma*sqrt(T))
    d2 <- d1 - sigma*sqrt(T)

    cena <- S*pnorm(d1) - K*exp(-r*T)*pnorm(d2)
    return(cena)
    }

  if(tip_opcije == "Put"){
    d1 <- (log(S/K) + (r + (sigma^2)/2)*T) / (sigma*sqrt(T))
    d2 <- d1 - sigma*sqrt(T)

    cena <- (K*exp(-r*T)*pnorm(-d2) - S*pnorm(-d1))
    return(cena)
```

```
    }
}
```

Пример 5.1. *Финансијски инструмент за који ће опција бити везана су акције компаније Apple (симбол: AAPL). Разматра се вредност (Европске) кол опције на дан 01. априла 2022. године која истиче 30. априла 2022. године, са назначеном ценом од 160 долара за акцију. Приликом одређивања цене опције доступни су подаци са берзе у периоду од 31. марта 2021. године до 31. марта 2022. године, што ће се сматрати историјски релевантним периодом. Нека је дата безризична каматна стопа од 5%.*

Потребно је учитати податке са финансијског тржишта путем библиотеке quantmod[3]

```
# ucitava se biblioteka za rad sa finansijskim podacima
library(quantmod)

# podesava se pocetni i krajnji datum za ucitavanje podataka sa finansijskog trzista
pocetni_datum <- as.Date("2021-01-31")
krajnji_datum <- as.Date("2022-03-31")

# preuzimaju se podaci za zadatu kompaniju u datom vremenskom intervalu
getSymbols("AAPL", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)

# u posebne promenljive smestaju se dnevni prinosi akcije kao i prosecna dnevna cena
AAPL_returns <- dailyReturn(AAPL)
AAPL_price <- (AAPL$AAPL.High + AAPL$AAPL.Low)/2
colnames(AAPL_price) <- c("Price")
```

Потом је потребно одредити параметре који фигуришу у Блек-Шолс формули:

Цена финансијског инструмента за који је опција везана (S) на дан 01. априла 2022. године износи 173.41 USD

Назначена цена опције (K) износи 160 USD

Безризична каматна стопа (r) износи 5% односно 0.05

Време до истека опције (T) износи 1 месец односно прерачунато у године износи 0.0833

[3]Опис пакета: `https://cran.r-project.org/web/packages/quantmod/quantmod.pdf`

Волатилност финансијског инструмента (сигма) биће израчуната коришћењем доступних историјских података, како не би била употребљена вредност опција на тржишту. Рачунањем стандардног одступања приноса акција помножених са кореном из 294, што представља број радних дана финансијског тржишта у периоду доступних података, добија се оцена волатилности. Једноставним увршавањем вредности у направљену функцију, добија се цена кол опције:

```
# racuna se standardno odstupanje i transformise u prosecnu godisnju volatilnost mnozenjem sa korenom iz 294, sto predstavlja broj radnih dana trzista u dostupnom vremenskom intervalu
standardno_odstupanje <- sd(AAPL_returns, na.rm = TRUE)
prosecna_volatilnost <- standardno_odstupanje * sqrt(294)

# racuna ce cena kol opcije na osnovu datih parametara
kol_opcija <- Black_Scholes(S = 173.41, K = 160, r = 0.05, T = 0.0833,
    sigma = prosecna_volatilnost, tip = "Call")
```

Цена кол опције добијене овако израчунатом волатилношћу је 15.017 USD. Како су сви остали параметри детерминистички, побољшање поступка вредновања опције се своди на побољшање оцене за σ.

Алтернативни приступ је да се доступни подаци уклопе у GARCH модел и да се онда на основу њега предвиђају вредности у будућности. Тиме се уместо вредности из прошлости или коришћења већ доступних цена опција са тржишта, моделира проблем промене условне дисперзије чиме се добија одређена параметризована форма. Тако је могуће смислено предвиђати вредности у будућности, с напоменом да прецизност опада са повећањем хоризонта предвиђања. За рад са GARCH моделима користи се пакет rmgarch[4].

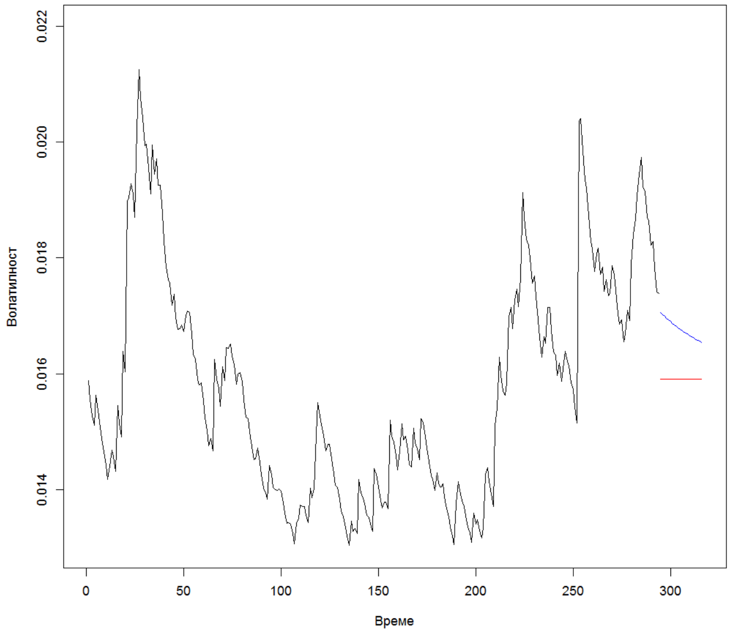
```
# ucitava se biblioteka za rad sa GARCH modelima
library(rmgarch)

# zadaje se specifikacija jednodimenzionog GARCH modela
# model za opisivanje srednje vrednosti ce biti ARMA(1, 1), dok ce model za opisivanje dinamike uslovne disperzije biti standardni GARCH(1, 1) model
jednodimenziona_specifikacija <- ugarchspec(mean.model = list(
    armaOrder = c(1,1), include.mean = TRUE), variance.model = list(
```

[4] Опис пакета: https://cran.r-project.org/web/packages/rmgarch/rmgarch.pdf

```
    model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)), distribution.model = "norm")

# uklapa se model sa zadatom specifikacijom nad dostupnim podacima
garch_model <- ugarchfit(spec = jednodimenziona_specifikacija, data = AAPL_returns)

# vrsi se predvidjanje modelom za period od mesec dana, odnosno 22 radna dana trzista
predikcija <- ugarchforecast(garch_model, n.ahead = 22)
```

Сада је неопходно нацртати график волатилности како би се виделе разлике између два приступа, што се једноставно може учинити на следећи начин:

```
# iscrtava se grafik volatilnosti dostupnih podataka
plot(1:294, sqrt(garch_model@fit$var), type = "l", xlim = c(1, 316), ylim = c(0.013, 0.022))

# na glavni grafik se dodaje predvidjena volatilnost GARCH modelom oznacena plavom bojom
lines(295:316, predikcija@forecast$sigmaFor, col = "blue")

# na grafik se dodaje i istorijska volatilnost oznacena crvenom bojom
lines(295:316, rep(standardno_odstupanje, 22), col = "red")
```



Слика 5.1: Предвиђена волатилност временске серије

На графику (Слика 5.1) је црном бојом означена волатилност у периоду за који су подаци доступни, црвеном бојом је означен просек историјских вредности волатилности док је плавом бојом означена волатилност предвиђена одговарајућим GARCH моделом. Јасно се види да оцена моделом предвиђа да ће се волатилност смањивати у назначеном периоду, иако није савршена ова оцена је знатно смисленија од просека који представља константу. Како у Блек-Шолс формули није могуће користити σ које зависи од времена, неопходно је трансформисати вектор од 22 вредности у само једну. Један једноставан начин би био израчунати њихов просек и потом ту вредност уврстити у Блек-Шолс једначину.

```
# izracunava se prosek predvidjenih vrednosti volatilnosti
prosecna_volatilnost_garch <- mean(predikcija@forecast$sigmaFor)

# izracunava se cena kol opcije na osnovu ovako dobijene volatilnosti
kol_opcija_garch <- Black_Scholes(S = 173.41, K = 160, r = 0.05, T =
    0.0833, sigma = prosecna_volatilnost_garch, tip = "Call")
```

Вредност кол опције добијене коришћењем историјске волатилности је 15.017 USD док је коришћењем GARCH модела за оцену волатилности добијено

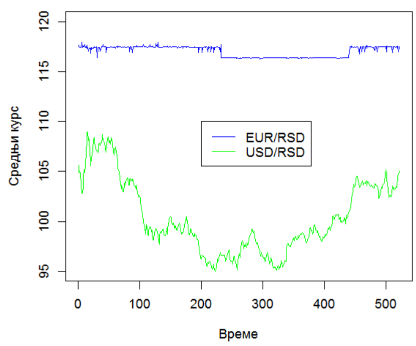
14.075 USD. Разлика између добијених вредности коришћењем ова два принципа представља додатни простор за остваривање профита, што је и главни циљ. Још боља оцена би се добила уколико је могуће уврстити волатилност која зависи од времена. То захтева реформулацију Блек-Шолс модела коришћењем софистицираних математичких метода, које одступају од теме рада.

5.2 Условне корелације финансијских инструмената

За разлику од једнодимензионих GARCH модела који описују условну дисперзију (волатилност) финансијских инструмената, уопштењем димензионалности постиже се и више. Вишедимензионим моделима поред условне дисперзије могуће је описати динамику корелација више временских серија, што је од значаја приликом вредновања деривата, конструкције портфолија, процене и контроле ризика. Наиме, чест је случај да на вредност различитих финансијских инструмената утичу исти или слични фактори (гео-политички, економски, ...), што ће довести до промене њихове вредности. У одређеној мери, због своје природе, те промене ће бити међусобно зависне. Како их није могуће емпиријски квантификовати, потребно је пронаћи механизам којим могу да се опишу овакве везе као и јачине истих. Тиме би се постигло да приликом вредновања одређеног финансијског инструмента, није неопходно ослањати се само на релевантне податке већ и на његове корелације са другим инструментима. То може бити корисно како за вредновање инструмента, тако и за ревизију већ одређених вредности. Такође, једна од примена јесте у конструкцији портфолија. Одређивањем међусобних корелација финансијских инструмената који га чине, могуће је прецизније одредити волатилност целокупног портфолија, што представља основ за контролу и смањење ризика. У зависности од тога који вишедимензиони модел се користи и оцене ће се у одређеној мери разликовати, као и њихове перформансе. Зато се у наставку, на реалне податке, примењују модели који су претходно теоријски описани у глави 2.

За податке, који ће бити описани моделима, су одабрани валутни курсеви за евро (EUR) и Амерички долар (USD) изражени у динарима (RSD), посматрани у периоду од 01. марта 2020. године до 01. марта 2022. године. Вредност курса за одређени дан је добијен упросечавањем дневних вредности, тако да подаци представљају дискретне временске серије. Условне коваријације и корелације ових временских серија имају утемељење у томе што су оба средња курса базирана на динару. Стога ће се економски важни фактори који се мењају на нивоу државе Србије одражавати на курс са евром и доларом. То не мора да значи да ће овакве појаве једнако утицати на оба курса. Економија која је везана за динар далеко је мања, могло би се рећи чак и занемарљива у односу на ону која се одвија користећи евро или долар. То ће се одразити на трговинску размену која утиче на валутни курс. Тако да има смисла посматрати и моделовати овакве везе, нарочито приликом анализирања финансијских инструмената са фиксним приходом који су везани за одређену валуту.

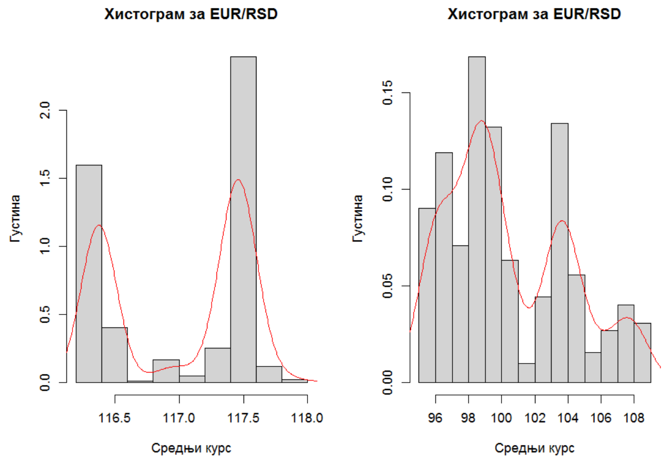
Пре самог приступања моделовању неопходно је урадити прелиминарну анализу. За почетак, пожељно је графички приказати саме податке, како би се лакше увидела евентуална својства која би помогла при моделовању.



Слика 5.2: Средњи курс за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.2) је приказано дневно кретање средњег курса евра и долара током две године. Јасно се уочава да вредност долара изражена у динарима значајно више варира током времена него вредност евра. Такође, током периода посматрања, вредност се смањује али се потом враћа приближно на ниво са почетка, што је и очекивано с обзиром на шок финансијских тржишта насталог услед пандемије корона вируса.

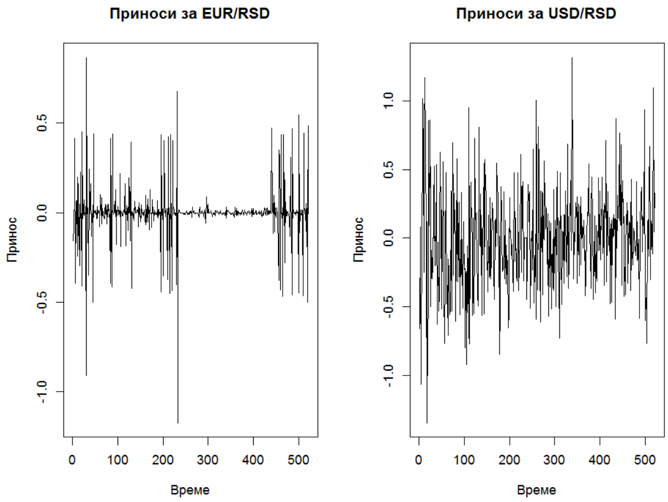
Сама природа финансијских података лако је уочљива са хистограма густина:



Слика 5.3: Хистограми за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.3) су дати хистограми за појединачне финансијске временске серије средњих дневних курсева за евро и долар, црвеном линијом дата је оцена густине ових података. Код средњег курса за евро се примећује да је густина расподеле углавном сконцентрисана око вредности 116 и 117.5. Код средњег курса за долар примећује се да је густина већа за вредности између 96 и 102, док опада како се вредност повећава.

Како би се остварио увид у волатилност, корисно је графички приказати логаритмоване приносе.



Слика 5.4: Логаритмовани дневни приноси за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.4) су приказани дневни приноси евро и долар. Јасно се уочава велика волатилност, при чему је код долара она израженија. У случају евра, постоји одређени период мале волатилности након половине периода посматрања.

Примена модела променљивих условних корелација

Узимајући у обзир прелиминарну анализу података са којима се ради, долази се до закључка да коефицијенти корелације између два средња курса немају исту вредност током периода посматрања. Из тог разлога, корисније је употребити модел са променљивим условним корелацијама. На тај начин биће могуће да се оне оцене из података који су доступни, при чему ће матрица корелација зависити од времена. Након одабира модела којим ће се описати условне корелације, неопходно је приступити његовој конфигурацији.

Због репрезентације у рачунару поступак моделовања ће се незнатно разликовати од теоријски дефинисаног модела. Све са циљем побољшања перформанси приликом примене на реалне податке. С обзиром да параметара може бити доста и њихово оцењивање ће бити рачунски захтевно. Из тог разлога неопходно је спровести следеће кораке:

- Да се одреди модел који ће описивати средњу вредност временске серије. Под тиме се подразумева дефинисање да ли је средња вредност константна или се мења током времена и треба је моделовати. У случају променљиве средње вредности неопходно је одредити ред AR и MA компоненти ARMA модела који ће је описивати. Не постоји детерминистички приступ за одређивање реда модела, али је препоручљиво користити мале вредности. Тако ће модел бити довољно сложен да може да опише кретање временске серије. Притом, не треба претеривати, јер може доћи до преприлагођавања, при чему ће постојати више параметара које треба оценити, док сам квалитет модела неће бити задовољавајући.

- Да се одреди модел који ће описивати дисперзију временске серије. То се односи на спецификацију једнодимензионог GARCH модела тј. на редове p и q. У случајевима када сама расподела података има специфична својства корисно је прибећи модификацијама GARCH модела. Оне постоје у различитим облицима и имају за циљ да се што боље очува информација коју подаци носе.
- Да се одреди расподела компоненте грешке модела (случајног шума). Углавном се користи нормална расподела, мада добре перформансе показује и Студентова расподела. Нарочито када су у временској серији која се моделује присутне екстремне вредности.

Потом се приступа дефинисању спецификације за модел променљивих условних корелација, ослањајући се на спецификације појединачних једнодимензионих модела. У том кораку је неопходно дефинисати редове p, q вишедимензионог модела и одредити вишедимензиону расподелу за компоненту грешке. На крају се за дату конфигурацију и податке конструише модел.

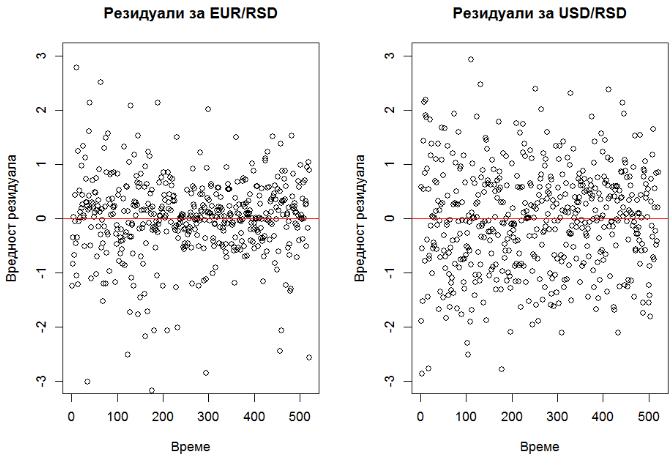
Претходно дефинисани поступак једноставно се преводи у кôд на следећи начин:

```
# ucitava se biblioteka za rad sa finansijskim podacima
library(quantmod)
# ucitava se biblioteka za rad sa GARCH modelima
library(rmgarch)

# podesava se pocetni i krajnji datum za ucitavanje podataka sa
   finansijskog trzista
```

```r
pocetni_datum <- as.Date("2020-03-01")
krajnji_datum <- as.Date("2022-03-01")

# ucitavaju se trzisne vrednosti 1 USD izrazene u RSD za zadati period
getSymbols("RSD=X", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)
USD_RSD = `RSD=X`

# ucitavaju se trzisne vrednosti 1 EUR izrazene u RSD za zadati period
getSymbols("EURRSD=X", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)
EUR_RSD = `EURRSD=X`

# izracunava se srednja dnevna vrednost odnosno kurs
USD_RSD = (USD_RSD$`RSD=X.High` + USD_RSD$`RSD=X.Low`)/2
EUR_RSD = (EUR_RSD$`EURRSD=X.High` + EUR_RSD$`EURRSD=X.Low`)/2

# podaci se smestaju u data frame
podaci <- data.frame(EUR_RSD, USD_RSD)
colnames(podaci) <- c("EUR_RSD", "USD_RSD")

# izracunavaju se prinosi za oba finansijska instrumenta i izrazavaju se u procentima
returns1 <- c()
returns2 <- c()

for(i in 2:522){
  returns1[i] <- log(podaci$EUR_RSD[i]/podaci$EUR_RSD[i-1])*100
  returns2[i] <- log(podaci$USD_RSD[i]/podaci$USD_RSD[i-1])*100
}

# izracunati prinosi se cuvaju kao data frame
returns <- data.frame(returns1[2:522], returns2[2:522])
colnames(returns) <- c("EUR_RSD", "USD_RSD")
```

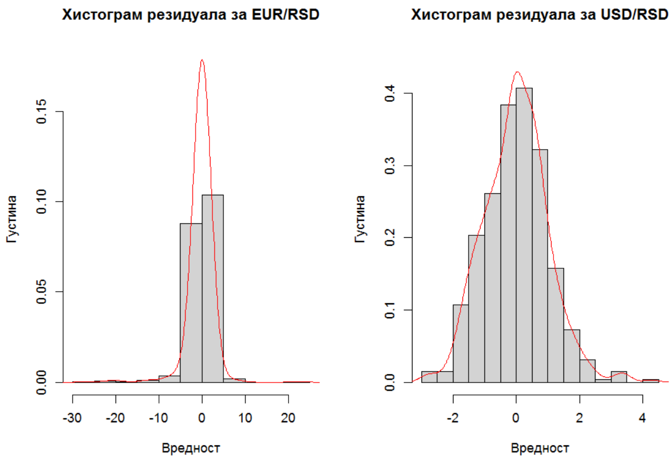
Након припреме података за моделовање, потребно је на основу анализе података који су дати одредити параметре који ће бити коришћени. Прво се приступа моделовању појединачних временских серија. С обзиром да се на основу графичког приказа наслућује да две временске серије које се моделују немају сличне компоненте, већ да се значајно разликују, има смисла формирати две одвојене конфигурације. Редове компоненти AR и MA могуће одабрати формирањем више модела за различите вредности редова, а потом изабрати најбоље у односу на неки од информационих критеријума. Будући да је ово споредан корак у формирању вишедимензионог GARCH модела, није неопходно изванредно поклапање већ само оквирно описивање средње вредности временске серије. Из тог разлога, а и због спречавања преприлагођавања будући да је посматрани период пратио кризу у свету и да постоји доста кластерованих екстремних вредности, користиће се мали редови 0 и 1. Код приноса за евро најбоље резултате даје модел ARMA(1, 1), док је код приноса за долар то AR(1) модел. Добијени редови су у сагласности са реалним стањем, будући да је тржиште за евро доста заступљеније у Републици Србији, самим тим и ликвидније па је подложно вештачкој стабилизацији од стране Народне банке, што је могуће уочити на графику приноса. Зато има смисла користити обе компоненте, док код приноса за долар то није случај. Велика дисперзија у приносима би приликом коришћења MA компоненте само акумулирала грешку, при чему би се добио модел скромнијих квалитета. Што се тиче модела дисперзије, највише смисла има узети GARCH(1, 1) конфигурацију. Наиме, искључивањем друге суме добија се скромнији ARCH модел, док повећавањем редова компоненти долази до предвиђања веће волатилности него што она заправо јесте услед недостатка формулације модела. За расподелу компоненте грешке је интуитивно би било узети нормалну расподелу. Због екстремних вредности потребно је да репови нормалне расподеле имају већу густину како би оне биле обухваћене, стога се користи Студентова расподела.

Како би се проверио квалитет једнодимензионих модела потребно је анализирати резидуале добијених модела. Због тога их је корисно графички приказати, чиме се може стећи утисак о њиховој корелисаности и расподели. Потом се на основу прелиминарних закључака лакше приступа тестирању, чиме се постиже формализација уочених својстава. Изведене закључке могуће је искористити за ревизију направљеног модела, како би коначни резултат био квалитетнији.



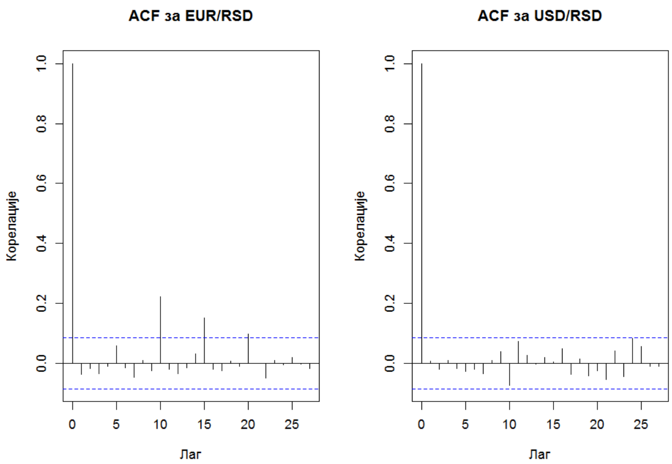
Слика 5.5: Резидуали за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.5) приказане су вредности резидуала приликом моделовања једнодимензионих GARCH модела. Могуће је увидети да су вредности релативно равномерно расподељене око нуле, што указује на то да грешке нису корелисане у времену и да су хомоскедастичне, мада се у случају евра назиру благе корелације. Што се тиче расподеле самих резидуала у случају евра они су више концентрисани око нуле, док су у случају долара они равномерније распоређени.



Слика 5.6: Хистограм резидуала за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.6) приказан је хистограм вредности резидуала приликом моделовања једнодимензионих GARCH модела, при чему је црвеном линијом дата оцена густине. На основу добијених густина може се закључити да су у складу са претпоставкама, што указује на добро уклапање модела. Потребно је још формално испитати корелације самих резидуала коришћењем графика аутокорелационе функције:



Слика 5.7: Корелације резидуала за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.7) приказане су корелације са задатим кораком (лаг), док испрекидана плава линија представља праг значајности корелација. У случају долара сви резидуали су некорелисани, док у случају евра постоје одређене благе позитивне корелације за кораке 10 и 15. Оне не морају нужно значити лош одабир модела већ могу бити последица природе података.

```
# specifikacija jednodimenzionih GARCH modela
jednodimenziona_specifikacija_1 <- ugarchspec(mean.model = list(
    armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE), variance.model = list(
    model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)), distribution.model = "std"
    )

jednodimenziona_specifikacija_2 <- ugarchspec(mean.model = list(
    armaOrder = c(1, 0), include.mean = TRUE), variance.model = list(
    model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)), distribution.model = "std"
    )

# visestruka specifikacija jednodimenzionih modela
visedimenziona_specifikacija <- multispec(c(jednodimenziona_
    specifikacija_1, jednodimenziona_specifikacija_2))

```

```r
# fitovanje vise jednodimenzionih GARCH modela
multi_fit <- multifit(visedimenziona_specifikacija, returns)
```

На крају се задаје ред DCC GARCH модела. Како се информациони критеријум не мења значајно за веће вредности, најприродније је узети DCC(1, 1) модел, при чему ће бити задовољено својство добре генерализације. Као што је претходно дискутовано и у спецификацији DCC модела биће коришћена Студентова расподела.

```r
# specifikacija DCC GARCH modela
dcc_specifikacija <- dccspec(uspec = visedimenziona_specifikacija,
    dccOrder = c(1, 1), distribution = 'mvt')

# fitovanje DCC GARCH modela na osnovu zadate specifikacije
dcc_model <- dccfit(spec = dcc_specifikacija, returns, fit.control =
    list(eval.se = TRUE), fit = multi_fit)
```

Сада када је формирање модела завршено, могуће је имати увид у конкретне вредности оцењених коефицијената као и мера квалитета овако добијеног модела.

```
*---------------------------------*
*          DCC GARCH Fit          *
*---------------------------------*

Distribution         :  mvt
Model                :  DCC(1,1)
No. Parameters       :  17
[VAR GARCH DCC UncQ] : [0+13+3+1]
No. Series           :  2
No. Obs.             :  521
Log-Likelihood       :  588.6731
Av.Log-Likelihood    :  1.13

Optimal Parameters
-----------------------------------
                   Estimate  Std. Error   t value Pr(>|t|)
[EUR_RSD].mu      -0.000009    0.000501 -0.017933 0.985692
[EUR_RSD].ar1      0.042717    0.103108  0.414296 0.678657
[EUR_RSD].ma1     -0.375706    0.108743 -3.454981 0.000550
[EUR_RSD].omega    0.000321    0.000152  2.114034 0.034512
[EUR_RSD].alpha1   0.730764    0.086490  8.449120 0.000000
[EUR_RSD].beta1    0.268236    0.137098  1.956522 0.050404
[EUR_RSD].shape    2.523390    0.076338 33.055685 0.000000
[USD_RSD].mu      -0.003720    0.018252 -0.203832 0.838484
[USD_RSD].ar1      0.201916    0.044376  4.550126 0.000005
[USD_RSD].omega    0.003789    0.003308  1.145388 0.252048
[USD_RSD].alpha1   0.045843    0.024710  1.855234 0.063563
[USD_RSD].beta1    0.921200    0.045596 20.203412 0.000000
[USD_RSD].shape   10.798224    4.015025  2.689453 0.007157
[Joint]dcca1       0.000000    0.000021  0.002766 0.997793
[Joint]dccb1       0.904759    0.130471  6.934583 0.000000
[Joint]mshape      4.000000    0.410289  9.749229 0.000000

Information Criteria
---------------------

Akaike       -2.1945
Bayes        -2.0557
Shibata      -2.1966
Hannan-Quinn -2.1401
```

Слика 5.8: Извештај модела променљивих условних корелација

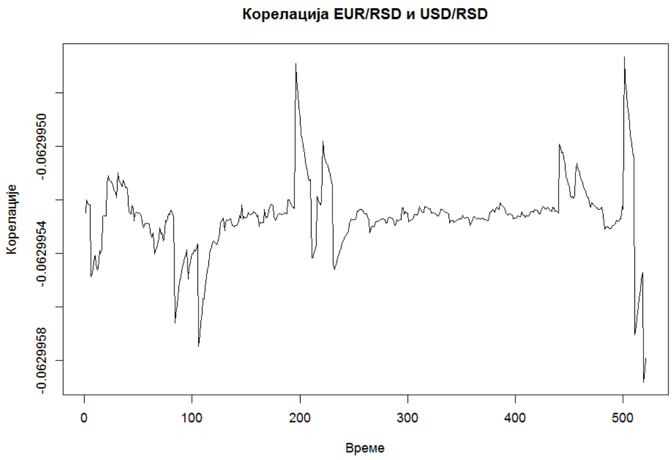
На Слици 5.8 дат је извештај формираног модела, где се поред кратке спецификације модела могу очитати вредности оцењених параметара као и стандардне грешке, значајности параметара и квалитет модела изражен кроз информационе критеријуме. На основу информационих критеријума могуће је утврдити да је модел релативно добар у односу на друге разматране конфигурације. Иако су моделоване корелације само две временске серије, уочава се да модел има 17 параметара, што може бити временски и рачунски захтевно када се примењује на реалне портфолије финансијских инструмената. На основу формираног модела могуће је добити оцене коваријације (матрица H) и корелације (матрица R) финансијских инструмената који су моделовани. Параметри mu (слободни члан), ar (AR компонента), ma (MA компонента) односе се на моделовање средње вредности временских серија и немају директних веза са GARCH моделима. На основу P вредности теста значајности закључује се да слободни члан није значајан те се може изоставити. Ниску значајност показује још и компонента AR за вредност евра, па је пожељно редуковати ARMA(1, 1) на MA(1) модел, што у овом случају неће допринети квалитету али ће побољшати временску ефикасност моделирања (која због малог броја параметара промена неће бити осетна). Параметар $shape$ је везан за Студентову расподелу и представља број степени слободе. Иако је P вредност једнака нули, на основу информационог критеријума се долази до закључка да је Студентова расподела адекватнија од нормалне.

Запис параметара вишедимензионог GARCH модела у облику који је коришћен приликом теоријске дефиниције и конструкције модела је дат на следећи начин:

$$\begin{pmatrix} X_{11,t} \\ X_{22,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.000321 \\ 0.003789 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.730764 & \\ & 0.045843 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^2_{1,t-1} \\ X^2_{2,t-1} \end{pmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 0.268236 & \\ & 0.921200 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11,t-1} \\ h_{22,t-1} \end{pmatrix}.$$

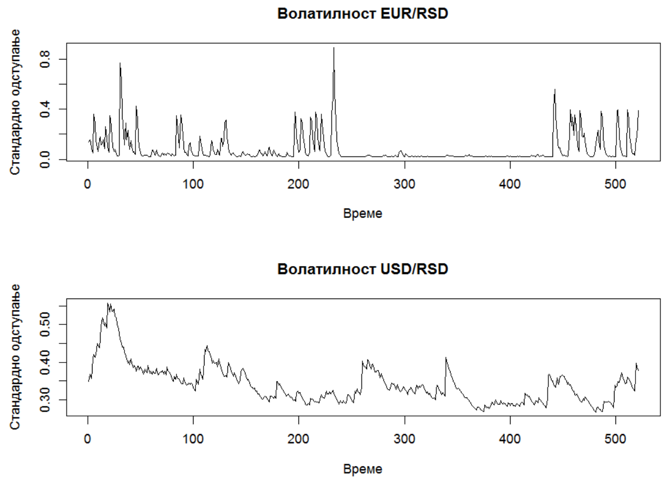
На основу P вредности теста значајности параметара, једино се параметар $omega$ за долар сматра безначајним у односу на стандардне нивое значајности. С обзиром да је реч о слободном члану, то што није значајан не представља велики проблем у спецификацији, већ значи да га можда треба изузети. Параметри $dcca1 = 0$ и $dccb1 = 0.904759$ служе за спецификацију променљивих корелација, конкретно фигуришу као параметри α и β у дефиницији матрице Q_t преко које се дефинише матрица корелација R_t. У разматраном случају, ови параметри дају информацију да условне корелације опадају током времена и асимптотски теже ка $(1 - dccb1)/dccb1$. То одговара природи података, с обзиром да финансијске временске серије не могу остварити корелације са великим кораком у пракси. P вредности теста за значајност коефицијената потврђују запажање да је само коефицијент $dccb1$ значајан, што уједно оправдава коришћење променљивих условних корелација наспрам константних. Параметар $mshape$ је везан за Студентову расподелу и представља број степени слободе. Иако је P вредност једнака нули, на основу информационог критеријума се долази до закључка да је Студентова расподела адекватнија од нормалне.

Пошто су у овом примеру коришћена два финансијска инструмента, њихове корелације је могуће приказати графички.



Слика 5.9: График корелација у току времена

На графику (Слика 5.9) приказане су корелације између временских серија. Насупрот почетној идеји да ће два средња дневна курса бити високо корелисана, с обзиром да су оба рачуната у односу на динар, из података то није могуће закључити. Заправо корелација незнатно варира током времена око вредности -0.063 што представља корелисаност од око 6.3%. Мале варијације у корелацијама су последица стабилности валута које се моделују, као и изузетно ликвидног тржишта.



Слика 5.10: Појединачна волатилности средњег дневног курса за EUR/RSD и USD/RSD

Такође, на основу матрице коваријације добијене из модела, могуће је приказати појединачне оцене волатилности (Слика 5.10). Како би добијени подаци били интерпретабилни, условну дисперзију је корисно приказати као условно стандардно одступање. На основу ових информација, могуће је пратити колико варирају приноси током времена за оба средња дневна курса. Примећује се да евро има веће појединачне промене у волатилност али такође значајне периоде у којима је волатилност приближно једнака нули. Код долара волатилност је константно строго већа од нуле али са мање драстичним променама током времена.

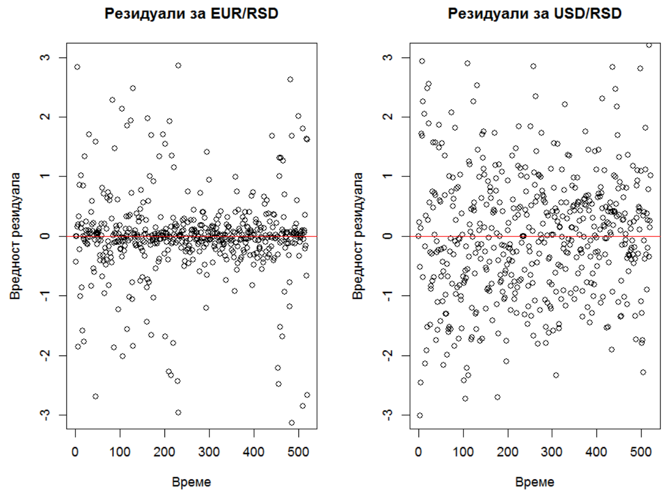
Примена BEKK модела

Поред великог броја сличности са моделима променљиве условне корелације разлике ипак постоје, стога има смисла вршити анализу одвојено. У више наврата се постављало питање да ли је неопходно разматрати оба модела приликом примене, с обзиром на заједнички проблем који описују. Разлика је у перформансама и квалитету самих информација које модел пружа, у зависности од карактеристика финансијских података на којима се примењују. Суштински концепт који раздваја ове две врсте модела јесте што BEKK претпоставља константну условну корелацију између финансијских инструмената (као код CCC модела). Тако на пример, промена коваријације два финансијска инструмента као узрок има промену дисперзије појединачних временских серија, док условна корелација остаје константна. Статистичка својства која су остварена конструкцијом, чине их погоднијим за практичну употребу од стандардних модела константне условне корелације. Један од проблема везаних за BEKK моделе јесте клетва димензионалности. Број параметара које треба оценити, се експоненцијално повећава с порастом броја финансијских инструмената који се моделују. Овакви модели се најчешће користе приликом моделовања инфлације, валутног курса, инструмената са фиксним приходом будући да њихова корелација мање варира током времена и не одступа много од константне оцене.

За моделовање података BEKK моделом биће коришћен пакет *mgarch*, у коме је имплементирана функција за одређивање коефицијената овог модела. Због комплексности своје конструкције није пожељно (а у датој имплементацији ни могуће) моделовати више од три финансијска инструмента. За то се користе одређене модификације овог модела које су развијане последњих деценија. У овом примеру биће коришћен стандардни BEKK(q, p) модел, који припада класи модела константних условних корелација. За спецификацију модела над подацима средњег дневног курса евра и долара израженим у динарима, биће коришћен ред $(q, p) = (1, 1)$. Поступак креирања модела спроводи се на следећи начин:

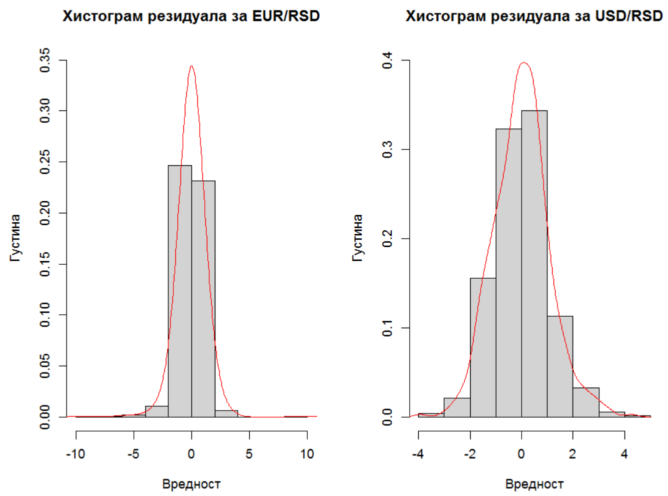
```
# ucitava se biblioteka za rad sa BEKK - GARCH modelima
library(mgarch)

# na osnovu zadate specifikacije (q, p) = (1, 1) i data frame-a sa
    dnevnim prinosima kursa za evro i dolar kreira se model
bekk_model <- mvBEKK.est(returns, order = c(1, 1))
```

Сада следи провера квалитета модела, која укључује анализу резидуала и информационих критеријума. Прелиминарну анализу могуће је извршити на основу графичког приказа резидуала.



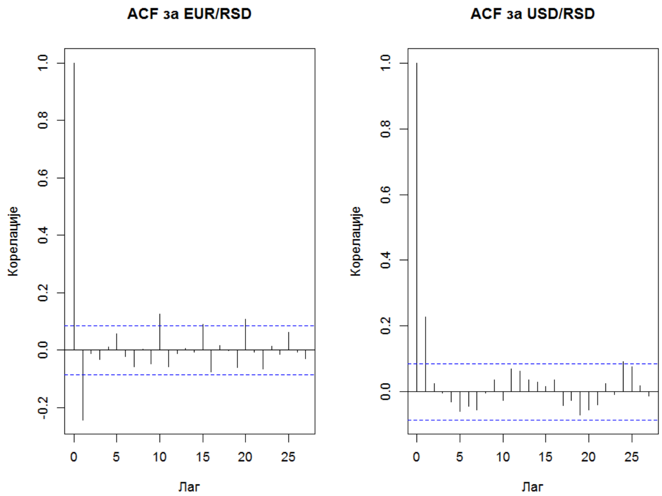
Слика 5.11: Резидуали за EUR/RSD и USD/RSD

Са графика (Слика 5.11) могуће је закључити нешто више о самој расподели и статистичким својствима резидуала. Наиме, вредности су равномерно распоређене око нуле и равномерно варирају без уочљивог правила. Тако се може закључити да је расподела резидуала хомоскедастична, при чему је код евра већа густина нагомилана око нуле док је код долара она равномерније распоређена.



Слика 5.12: Хистограм резидуала за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.12) приказани су хистограми резидуала, при чему је црвеном бојом представљена оцена густине. Могуће је закључити да расподеле резидуала нису баш у складу са теоријски предвиђеним резултатима. Код хистограма за евро већина густине је сконцентрисана око нуле, док се код долара примећују сличност са Студентовом расподелом, мада и даље постоје одступања. Све се ово може приписати неодговарајућој спецификацији модела и претпоставци константне условне корелације, која у датим временским серијама очигледно није испуњена.



Слика 5.13: Корелације резидуала за EUR/RSD и USD/RSD

Са графика (Слика 5.13) могуће је закључити да постоје одређене корелације међу резидуалима и то са задршком (лаг) 1. Код евра постоје још две значајне аутокорелације, али оне минимално излазе изван прага значајности. Узрок оваквог резултата могуће је објаснити самом конструкцијом ВЕКК модела, који подразумевају константне условне корелације, што узимајући у обзир догађања у свету која су утицала на динамику посматраних временских серија сигурно не може бити испуњено. Такође, присутне су одређене корекције вредности од стране централних банака, како би вредности остале стабилне и чије ефекте није могуће описати датим моделима.

Вредност AIC критеријума која износи -253.36 је изузетно ниска и представља минималну вредност која се може добити приликом варирања параметара модела. На основу тога се закључује да није могуће даље повећати квалитет модела.

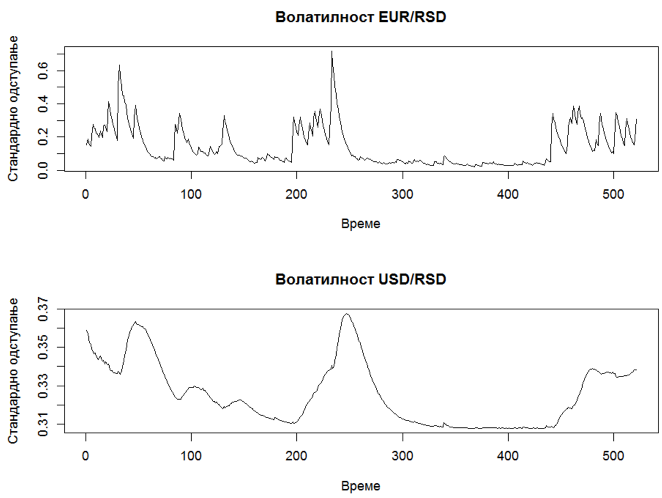
Оцењене вредности коефицијената модела могуће је записати у облику који је коришћен приликом теоријске дефиниције. Матрице Ω, A, B које фигуришу као параметри у формулацији BEKK модела су оцењене на следећи начин:

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0.0005048449 & -0.04433016 \\ 0 & 0.06032616 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0.53016655 & 0.03058548 \\ 0.06415272 & 0.03031463 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} -0.892765197 & 0.04404188 \\ -0.001153798 & -0.97019702 \end{pmatrix}.$$

Параметри BEKK модела нису интерпретабилни, стога нема смисла рачунати њихову значајност појединачно, а с обзиром да могу бити корелисане, анулирањем одређених коефицијената не мора да значи добијање бољег модела. Такође, јасно се уочава висока димензионалност, будући да за само две финансијске временске серије постоји 12 параметара који директно утичу на модел, при чему би се овај број експоненцијално повећавао.

Сада је могуће графички приказати волатилност ових временских серија током времена. За разлику од модела промењљивих условних корелација, у којем је матрица корелација експлицитно дата, овде то није случај. Наиме директно је могуће добити само матрицу коваријација, из које се потом одговарајућим трансформацијама могу добити корелације, које носе интерпретабилнију информацију.



Слика 5.14: Појединачна волатилности средњег дневног курса за EUR/RSD и USD/RSD

На графику (Слика 5.14) приказане су волатилности средњег дневног курса у посматраном периоду изражене као стандардно одступање, због интерпретабилности. Примећује се велика сличност са вредностима добијеним коришћењем модела променљивих условних корелација, што потврђује тезу о сличностима ових модела, ипак резултати су далеко од идентичних.

5.3 Израчунавање VaR-а портфолија

Вредност при ризику (енг. Value at Risk, скраћено VaR) представља једну од широко примењених мера за контролу потенцијалних губитака приликом инвестирања. Она заправо процењује могући губитак током одређеног временског периода са задатом вероватноћом. На пример, уколико портфолио има једнодневни 99% VaR од милион долара, то значи да губитак портфолија у једном дану може да буде милион долара или више са вероватноћом 0.01 (1%). Неформално, може се рећи да се у 100 дана трговања очекује један дан са губитком од милион или више долара. Постоји неколико приступа за рачунање ове мере, она која је у овом случају од интереса јесте параметарска (базирана на коваријацији/корелацији).

Дефиниција 5.4. *Вредност при ризику (VaR) је она вредност за коју, са нивоом значајности* $1-\alpha$*, важи једнакост:*

$$p(R_P \leq -VaR) = \alpha,$$

где је R_P *принос посматраног портфолија са нормалном* $\mathcal{N}(\mu_P, \sigma_P^2)$ *расподелом.*

За претходно дефинисану формулу важи да:

$$p(R_P \leq -VaR_\alpha) = \alpha \iff p\left(\frac{R_P - \mu_P}{\sigma_P} \leq \frac{-VaR_\alpha - \mu_P}{\sigma_P}\right) = \alpha,$$

$$\frac{-VaR_\alpha - \mu_P}{\sigma_P} = q_\alpha \iff VaR_\alpha = -\mu_P - \sigma_P q_\alpha,$$

где је q_α квантил стандардне нормалне расподеле.

Очекивана вредност приноса портфолија је задата на следећи начин:

$$\mu_P = \sum_{i=1}^{k} w_i \mu_i,$$

где су $w_i, i = 1, ..., k$ тежине а $\mu_i, i = 1, ..., k$ очекивани приноси појединачних финансијских инструмената у портфолију. Они се могу одредити коришћењем одговарајућих модела али ће се у наставку, ради једноставности, полазити од претпоставке да ће вредност приноса у будућности бити једнака просеку вредности приноса из прошлости. Грешка добијена на овај начин неће имати значајан утицај на модел али ће поједноставити поступак.

Стандардно одступање приноса портфолија финансијских инструмената задато је на следећи начин:

$$\sigma_P = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{k} w_i w_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j},$$

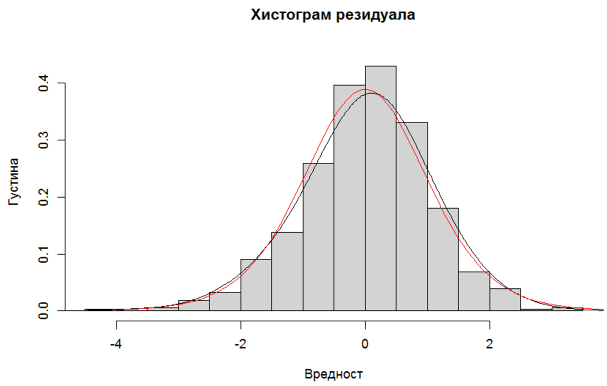
где су $w_i, i = 1, ..., k$ тежине појединачних финансијских инструмената у портфолију, $\rho_{ij}, i, j = 1, ..., k$ корелација финансијских инструмената i и j, $\sigma_i, i = 1, ..., k$ стандардно одступање приноса финансијског инструмента i. У складу са обрађеном темом, корелације и стандардно одступање у датој формули могу се моделирати одговарајућим вишедимензионим GARCH моделом.

Пример 5.2. *Нека је дат портфолио од 3 индексна фонда: S&P 500 (симбол: GSPC), Dow Jones Industrial (симбол: DJI) и NASDAQ (симбол: IXIC) посматраних у периоду од 15. јануара 2019. године до 30. новембра 2019. године. Нека је капитал равномерно уложен у ове фондове. Циљ је проценити потенцијални дневни губитак са вероватноћама 1% и 5%, за првих 10 дана у децембру 2021. године независно. Такав проблем биће решен коришћењем вредности при ризику (VaR). Волатилност у формули биће оцењена GARCH моделом променљивих условних корелација. Претходно дефинисани поступак се ради једноставности рачуна преводи у кôд на следећи начин:*

Учитавају се подаци са финансијског тржишта и рачунају се дневни приноси за одабране фондове. На основу њих се оцењује волатилност која фигурише у формули вредности при ризику:

```r
# ucitava se biblioteka za rad sa finansijskim podacima
library(quantmod)

# ucitava se biblioteka za rad sa GARCH modelima
library(rmgarch)

# podesava se pocetni i krajnji datum za ucitavanje podataka sa
    finansijskog trzista
pocetni_datum <- as.Date("2019-01-15")
krajnji_datum <- as.Date("2019-11-30")

# ucitavaju se cene akcija indeksnih fondova S&P500, Dow Jones
    Industrial i NASDAQ u zadatom periodu
# takodje se izracunavaju dnevni prinosi ovih akcija
getSymbols("^GSPC", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)
SP500_returns <- dailyReturn(GSPC)
colnames(SP500_returns) <- c("SP500")

getSymbols("^DJI", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)
DJI_returns <- dailyReturn(DJI)
colnames(DJI_returns) <- c("DJI")

getSymbols("^IXIC", from = pocetni_datum, to = krajnji_datum)
NASDAQ_returns <- dailyReturn(IXIC)
colnames(NASDAQ_returns) <- c("NASDAQ")

# podaci se smestaju u data frame
podaci <- data.frame(SP500_returns, DJI_returns, NASDAQ_returns)
```

Сада је потребно моделовати волатилност коришћењем одговарајућег GARCH модела. Индексне фондове чини скуп акција компанија које су одабране по неком критеријуму. Обично су оне доминантне на тржишту и стабилно послују. Стога има смисла моделовати их истоветним једнодимензионим моделима. За описивање средње вредности временске серије приноса користи се ARMA(1, 1) модел, док се за описивање условне дисперзије користи GARCH(1, 1). Разлог за овако одабране параметре је већ дискутован а циљ је довољно добро описати податке, а да се при томе не придаје велики значај појединостима временских серија које нису од суштинског значаја. Како се у пракси најбоље показао модел променљивих условних корелација DCC(1, 1), исти ће бити примењен у овом случају (погледати [16] у литератури). И за једнодимензионе и за DCC модел биће коришћена Студентова расподела, како *би грешка допуштала шири спектар вредности, с обзиром да је у овом периоду приметна појава екстремних вредности међу приносима. Да би се ова тврдња оправдала, потребно је приказати хистограм резидуала формираног модела.*



Слика 5.15: Хистограм резидуала модела променљивих условних корелација

На графику (Слика 5.15) приказан је хистограм резидуала формираног модела, црвеном линијом је дата густина Студентове расподеле са 10 степени слободе док је црном линијом приказана оцена густине. Како је одступање минимално употреба наведене конфигурације модела је оправдана.
Сада је могуће предвиђати вредности корелације и коваријације за одређени хоризонт, у овом случају 10 дана.

```
# specifikacija jednodimenzionih GARCH modela
jednodimenziona_specifikacija <- ugarchspec(mean.model = list(armaOrder = c(1, 1), include.mean = TRUE), variance.model = list(model = "sGARCH", garchOrder = c(1, 1)), distribution.model = "std")

# visestruka specifikacija jednodimenzionih modela
visedimenziona_specifikacija <- multispec(replicate(3, jednodimenziona_specifikacija))

# fitovanje vise jednodimenzionih GARCH modela
multi_fit <- multifit(visedimenziona_specifikacija, podaci)

# specifikacija DCC GARCH modela
dcc_specifikacija <- dccspec(uspec = visedimenziona_specifikacija, dccOrder = c(1, 1), distribution = 'mvt')
```

```

# fitovanje DCC GARCH modela na osnovu zadate specifikacije
dcc_model <- dccfit(spec = dcc_specifikacija, podaci, fit.control =
    list(eval.se = TRUE), fit = multi_fit)

# definise se horizont predvidjanja h
h = 10

# vrsi se predvidjanje na osnovu konstruisanog modela i definisanog
    horizonta
predvidjanja <- dccforecast(dcc_model, n.ahead = h)

# cuvaju se korelacije i kovarijacije dobijene predvidjanjem
korelacije <- list()
kovarijacije <- list()

for(i in 1:h){
korelacije[[i]] <- predvidjanja@mforecast$R[[1]][, , i]
kovarijacije[[i]] <- predvidjanja@mforecast$H[[1]][, , i]
kovarijacije[[i]] <- sapply(kovarijacije[[i]], sqrt)
kovarijacije[[i]] <- matrix(kovarijacije[[i]], nrow = 3, ncol = 3)
}
```

Како стандардизацију приноса ради провере нормалности није било могуће урадити због дисперзије која није позната, корисно је употребити формирани GARCH модел. Стандардизовани приноси ће имати приближно нормалну расподелу уз допустива одступања, што испуњава услов за примену мере ризика. Сада када је прогнозирана (условна) коваријација и корелација финансијских инструмената које чине портфолио, приступа се израчунавању вредности при ризику према дефинисаној формули.

```
# definise se vektor tezina za kreiranje portfolija
w <- c(0.33, 0.33, 0.33)

# prosecni prinosi za svaki finansijski instrument
prinosi_prosek <- c(mean(podaci$SP500), mean(podaci$DJI), mean(podaci$
    NASDAQ))

# racuna se ocekivanje prinosa portfolija
ocekivanje <- sum(prinosi_prosek * w)

# racuna se volatilnost portfolija po definisanoj formuli
```

```
suma <- rep(0, h)
for(k in 1:h){
  for(i in 1:3){
    for(j in 1:3){
      suma[k] <- suma[k] + w[i]*w[j]*korelacije[[k]][i, j]*sqrt(
    kovarijacije[[k]][i, i])*sqrt(kovarijacije[[k]][j, j])
        }
    }
}

# korenuje se suma kako bi se dobilo standardno odstupanje portfolija
sigma_p <- sapply(suma, sqrt)

# formiraju se vrednosti pri riziku za verovatnocu 5% i 1% za svaki
    dan horizonta predvidjanja nezavisno
VaR_95 <- - ocekivanje - sigma_p * qnorm(0.05)
VaR_99 <- - ocekivanje - sigma_p * qnorm(0.01)
```

На основу израчунатог ризика могуће је приказати губитке који могу уследити са задатим вероватноћама:

Дан	VaR 95%	VaR 99%
1	12.1 %	17.1 %
2	12.3 %	17.4
3	12.5 %	17.7 %
4	12.7 %	18.0 %
5	12.8 %	18.2 %
6	13.0 %	18.4 %
7	13.1 %	18.6 %
8	13.3 %	18.8 %
9	13.4 %	18.9 %
10	13.5 %	19.1 %

Табела 5.1: Вредности при ризику конструисаног портфолија за 95% и 99%

У Табели 5.1 налазе се конкретне минималне вредности губитака (изражене у процентима) за конструисани портфолио које могу уследити са вероватноћама 5% и 1% редом.

Глава 6

Закључак

Рад је мотивисан проблемом описивања динамике волатилности финансијских инструмената. Полазна тачка јесте једнодимензиони GARCH модел који представља прву параметризовану форму за решавање овог проблема. Иако је могућа практична примена на (једну) конкретну временску серију, то не одговара захтевима модерне финансијске математике. У пракси се увек посматра портфолио који садржи већи број финансијских инструмената, чију је динамику волатилности потребно описати. Дата формулација GARCH модела тада није одговарајућа, те је потребно модификовати је односно уопштити. У наставку је представљено уопштење димензионалности GARCH модела као и његове варијанте, које су прилагођене специфичним односима финансијских инструмената који чине портфолио. Предност овакве модификације јесте у количини информација коју је модел способан да обради. Тако је поред оцене појединачних условних дисперзија могуће оценити и условне коваријације-/корелације, односно међузависности унутар портфолија. Овакав помак има посебан значај у практичној примени, нарочито приликом вредновања финансијских деривата и процене ризика. Такође, неке инвестиционе стратегије почивају на међусобној корелацији више финансијских инструмената, зарад чега GARCH модели могу служити као њихов темељ. Могућности који су оваквим приступом остварене са собом повлаче одређену математичку комплексност. Дискутовање стационарности је од великог значаја, јер ће се наметањем услова које репрезентација модела треба да задовољи, омогућити стабилније понашање приликом примене као и прецизније резултате прогнозе будућих вредности. Саме услове за стационарност није лако изразити, те се наводи неколико критеријума за испитивање овог својства, при чему је један за теоријски док су остали применљивији у пракси. Централни део рада базиран је на оцени параметара претходно дефинисаних модела. Због природе проблема, за оцену параметара користи се алгоритам квази максималне веродостојности. Приказан је поступак оцене параметара модела, као и услови које оцена треба да задовољи како би се постигле асимптотска нормалност и постојаност. Висока димензионалност је честа приликом коришћења овако дефинисаних модела, те су представљени и алтернативни начини оцењивања параметара циљањем дисперзије и метода једначина по једначина како би добијени резултати били нумерички стабилни. Посебну пажњу потребно је посветити провери квалитета добијеног модела. Критеријуми који се користе базирани су на теорији информације и процени релативног губитка исте, чиме се добија мера која је адекватна за поређење доступних модела. Постизањем жељеног квалитета отвара се могућност прогнозирања вредности корелације/коваријације у будућности. Иако добијене вредности нису високе прецизности, уз дефинисане услове, могуће је добити непристрасне и употребљиве прогнозе, које се приликом примене показују довољно добрим. На самом крају, уз осврт на теоријска својства, приказана је практична примена ових модела. Нереалистичан услов константне волатилности у Блек-Шолс моделу замењен је вредношћу формираном на основу прогноза GARCH модела, услед чега се остварила прецизнија оцена вредности финансијске опције. У наставку, уз уопштење димензионалности, поред волатилности на валутним курсевима за Евро и Долар изражених у Динарима, приказано је и моделовање условних корелација. Тиме је представљена суштинска предност у односу на стандардни једнодимензиони модел. Последњи пример односи се на контролу ризика приликом изградње портфолија, уз употребу мере вредност при ризику (VaR), базиране на волатилности и условним корелацијама оцењеним вишедимензионим GARCH моделима. На тај начин се добија прецизно дефинисан поступак, којим је могуће одредити максималне губитке са унапред задатим вероватноћама (најчешће 95% или 99%) у будућности. Постоји пуно простора за наставак истраживања у овој области. За практичну употребу од значаја би било успоставити услове стационарности који су једноставнији за проверу, с обзиром да је експлозија коефицијената чест случај приликом примене. Такође, представљени модели су већ дуго у оптицају, док се свет финансија мењао. Стога има смисла разматрати могуће модификације ових модела које би одговарале модерној тржишној динамици.

Литература

[1] Gian Piero Aielli. Dynamic conditional correlation: On properties and estimation. *Journal of Business & Economic Statistics*, 31(3):282–299, 2013.

[2] Alexander Aue, Siegfried, Hörmann Lajos Horváth, and Matthew Reimherr. Break detection in the covariance structure of multivariate time series models. *The Annals of Statistics*, 37(6B):4046—-4087, 2009.

[3] Fischer Black and Myron Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *The Journal of Political Economy*, 81(3):637–654, 1973.

[4] Tim Bollerslev. Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31(3):307–327, 1986.

[5] Tim Bollerslev. Modelling the coherence in short-run nominal exchange rates: A multivariate generalized arch model. *The Review of Economics and Statistics*, 72(3):498–505, 1990.

[6] Farid Boussama, Florian Fuchs, and Robert Stelzer. Stationarity and geometric ergodicity of bekk multivariate garch models. *Stochastic Processes and their Applications*, 121(10):2331–2360, 2011.

[7] Piermarco Cannarsa and Teresa D'Aprile. *Introduction to Measure Theory and Functional Analysis*. Springer, 2008.

[8] Ngai Hang Chan. *Time Series: Applications to Finance*. John Wiley & Sons, 2002.

[9] Robert F. Engle. Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of united kingdom inflation. *Econometrica*, 50(4):987–1007, 1982.

[10] Robert F. Engle. Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business & Economic Statistics*, 20(3):339–350, 2002.

[11] Robert F. Engle and Kenneth F. Kroner. Multivariate simultaneous generalized arch. *Econometric Theory*, 11(1):122–150, 1995.

[12] Christian Francq, Lajos Horváth, and Jean-Michel Zakoïan. Variance targeting estimation of multivariate garch models. *Journal of Financial Econometrics*, 14(2):353–382, 2016.

[13] Christian Francq and Jean-Michel Zakoian. *GARCH models: structure, statistical inference and financial applications*. John Wiley & Sons, 2019.

[14] Christian Francq and Jean-Michel Zakoïan. Estimating multivariate volatility models equation by equation. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Statistical Methodology)*, 78(3):613–635, 2016.

[15] Thierry Jeantheau. Strong consistency of estimators for multivariate arch models. *Econometric Theory*, 14(1):70–86, 1998.

[16] Ming-Chih Lee, Jer-Shiou Chiou, and Cho-Min Lin. A study of value-at-risk on portfolio in stock return using dcc multivariate garch. *Applied Financial Economics Letters*, 2(3):183—-188, 2006.

[17] Aleksandar T. Lipkovski. *Linearna algebra i analitička geometrija*. Zavod za udžbenike, 2007.

[18] Jovan Mališić. *Vremenske serije*. Matematički fakultet, 2002.

[19] Bojana Milošević and Slobodanka Janković. *Elementi finansijske matematike*. Matematički fakultet, 2017.

[20] Pavle Mladenović. *Verovatnoća i statistika*. Matematički fakultet, 4th edition, 2008.

[21] Sheldon Natenberg. *Option Volatility and Pricing: Advanced Trading Strategies and Techniques*. McGraw Hill, 2nd edition, 2014.

[22] Bernt Oksendal. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer, 5th edition, 2003.

[23] Elisabeth Orskaug. Multivariate dcc-garch model: - with various error distributions. Institutt for matematiske fag, 2009.

[24] Mohsen Pourahmadi. Joint mean-covariance models with applications to longitudinal data: unconstrained parameterisation. *Biometrika*, 86(3):677—-690, 1999.

[25] Mohsen Pourahmadi and Petros Dellaportas. Cholesky-garch models with applications to finance. *Statistics and Computing*, 22(4):849–855, 2012.

[26] Petre Stoica and Yngve Selen. Model-order selection: a review of information criterion rules. *IEEE Signal Processing Magazine*, 21(4):36–47, 2004.

[27] Ruey S. Tsay. *Analysis of Financial Time Series*. John Wiley & Sons, 3rd edition, 2010.

[28] Yiu K. Tse and Albert K. C. Tsui. A multivariate garch model with time-varying correlations. *Journal of Business and Economic Statistics*, 20(3):351–362, 2002.

Биографија аутора

Илија - Петар Милић рођен је 21. јануара 1999. године у Београду. Ту је завршио ОШ „Јосиф Панчић” и Тринаесту београдску гимназију, природно-математички смер. У јулу 2017. године уписује Математички факултет Универзитета у Београду на смеру Математика - модул : Статистика, актуарска и финансијска математика. Основне академске студије завршава у септембру 2021. године и уписује мастер академске студије на истом смеру и модулу. Области од интересовања су му: вероватноћа и статистика, машинско учење и финансијска математика.