Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Полигонални бројеви

Студент:
Миона Љубисављевић
1135/2020.

Ментор:
др Тања Стојадиновић

Februar, 2022.

Сажетак

Полигонални бројеви су ненегативни цели бројеви конструисани и представљени геометријским распоредима једнако распоређених тачака (или других објеката), које формирају правилне полигоне. Полигони се граде тако што се идентификује заједничка почетна тачка, од које се странице шире повећањем броја тачака, а затим се додају потребне додатне тачке између њих како би се формирао полигон. У раду су описана прва три полигонална броја. Алгебарски су изведене формуле за одређивање n-тог m-гоналног броја, а затим су те формуле геометријски интерпретиране. Изведене су везе између полигоналних бројева различитог реда.

Полигоналне бројеве је првобитно проучавао Питагора, а њихова дуга историја датира још из 570. године п.н.е. На њих се често позивају и грчки математичари. Током античког периода, полигонални бројеви су били описани јединицама које су биле изражене тачкама или каменчићима распоређеним тако да формирају геометријске полигоне. Полигонални бројеви су широко примењени и повезани са различитим математичким концептима. Основна сврха овог рада је да дефинише полигоналне бројеве и дискутује о њиховој примени у тим концепатима. На пример, између осталих тема, рад описује шта су троугаони бројеви и пружа многа занимљива својства и идентитете које они задовољавају. Збирови квадрата, укључујући Лагранжову теорему о четири квадрата, и Лежандрову теорему о три квадрата, такође су укључени у рад. Рад представља и доказује две важне теореме, Гаусову Еурека теорему и Кошијеву теорему полигоналног броја.

Садржај

1 Увод

Полигонални бројеви су ненегативни цели бројеви представљени геометријски једнако распоређеним тачкама (или другим објектима) које формирају правилне полигоне. Једна тачка означава јединицу, две двојку, три сложене у троугао тројку итд. Идентификује се заједничка почетна тачка од које се странице шире повећањем броја тачака, а затим се додају тачке између њих како би се формирао полигон. Величина полигона се повећава како збир еквидистантних тачака, које се користе за његово представљање, расте по уобичајеном обрасцу. Они бројеви који стварају правилне полигоне добили су назив полигонални бројеви. Најчешћи и основни типови полигоналних бројева су троугаони и квадратни бројеви.

Троугаони бројеви броје тачке на такав начин да се две тачке додају почетној тачки и формира једнакостранични троугао. Додавањем три тачке на претходне три тачке можемо добити већи једнакостранични троугао са шест тачака. Троугао са десет тачака се може направити додавањем четири тачке троуглу са шест тачака, итд. Даље повећање низа тачака, при чему су тачке добро распоређене формирајући проширени једнакостранични троугао са одговарајућим збиром тачака у сваком таквом троуглу, резултира низом бројева 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, ... који су познати као троугаони бројеви.

Слично, додавање бројева три, пет, седам, девет, ... формира низ квадратних бројева 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, ... са растом фигуре према споља.

За петоугаоне бројеве 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, ... треба додати четири, седам, десет, тринаест, ... тачака тачки распоређеној у петоугаоном облику.

Наставком овог поступка може се конструисати више полигоналних бројева. Тако за сваки позитиван цео број $k \geq 3$ можемо формирати низ k-гоналних бројева који одговарају сваком правилном полигону са бројем страна k.

Овај рад темељи се на карактеризацији полигоналних бројева, одређивању који бројеви су полигонални. Састоји се од представљања полигоналних бројева, описа и формула помоћу којих добијамо n-ти m-гонални број. Затим, описује везе између различитих типова полигоналних бројева. Коначно, у раду су доказане две главне теореме везане за полигоналне бројеве, Гаусова Еурека теорема и Кошијева теорема полигоналног броја.

1.1 Кратка историја полигоналних бројева

Прва појављивања полигоналних бројева сежу далеко у питагорејску школу (570 - 501. п.н.е), где су их Питагорејци користили како би повезали геометрију и аритметику. Питагора је био заслужан за оригинални рад на теорији полигоналних бројева. Он је покренуо концепт да су полигонални бројеви изведени из гномона (форма која, када се геометријски дода фигури, даје још једну проширену фигуру сличну оригиналу). Користећи појам полигоналних бројева, Питагора је дошао до своје добро познате теореме познате као Питагорина теорема. Открио је да је збир површина два квадрата постављена дуж суседних страница правоуглог троугла једнак површини квадрата постављеног дуж хипотенузе. Тако је установио своју познату и широко коришћену формулу да је $a^2 + b^2 = c^2$, где су a и b дужине катета, а c је дужина хипотенузе правоуглог троугла.

Нажалост, не постоји конкретан извор за Питагорине тврдње, јер сви списи о Питагорејцима који су преживели зуб времена потичу из каснијих векова. Многе друге математичке формулације имају дубоке корене у полигоналним бројевима и неколико познатих теорема је засновано на овим бројевима. Конкретно, природни бројеви као што су савршени бројеви, Мерсенови бројеви, Фермаови бројеви, Фибоначијеви и Лукасови бројеви, итд. су повезани са полигоналним бројевима.

Штавише, модерна примена полигоналних бројева види се у Паскаловом троуглу и биномној теореми. Коришћењем таквих бројева, коефицијенти који настају у биномним развојима (биномни коефицијенти) се приказују у облику троугла (познатог као Паскалов троугао), у коме се могу јасно уочити троугаони бројеви.

Један од грчких математичара, Хипсикле из Александрије, дао је прву општу дефиницију појма k-угаоног броја 170. године п.н.е, коју је потом Диофант цитирао у свом делу Полигонални бројеви, а гласи: "Ако постоји много бројева, почевши од 1 и повећавајући их за исту разлику, тада, ако је узастопна разлика 1, збир свих бројева је троугаони број, ако је разлика 2, квадратни број, када је 3, петоугаони број, итд". Током својих студија о полигоналним бројевима, Диофант је открио формулу за n-ти k-угаони број $P_n = \frac{(k-2)n^2-(k-4)n}{2}$.

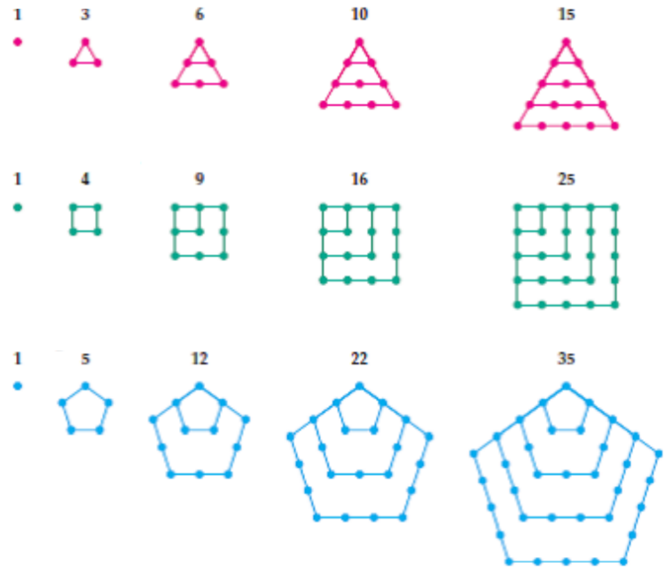
Други познати математичари заинтересовани за полигоналне бројеве били су између осталих и Никомах из Герасе (60 - 120), Теон из Смирне (70 - 135) и Леонардо Фибоначи (1170 - 1250). Никомах и Теон изнели су исте дефиниције за полигоналне бројеве и добили исти резултат. Два узастопна троугаона броја заједно дају квадратни број.

Савремено проучавање полигоналних бројева датира још од Пјера де Ферма (1601 - 1665), који је 1636. године објавио чувену теорему о полигоналним бројевима коју су математичари у великој мери користили. У својој теореми, Ферма тврди да се за било који $k \geq 3$ сваки цео број може изразити као збир највише k, k-угаоних бројева. Иако је тврдио да је доказао теорему, нико никада није нашао његов доказ. Лагранж (1770) је доказао да је сваки ненегативни цео број збир четири квадрата. Године 1796. Лежандр и Гаус су одредили бројеве који се могу представити као збир три квадрата, из чега се лако закључује да је сваки позитиван цео број збир највише три троугаона броја. Огистен Луј Коши је објавио (1813) први доказ теореме о полигоналном броју у целини. Стога се теорема понекад назива Фермаова теорема о полигоналном броју, а понекад и Кошијева теорема о полигоналном броју. Доказ теореме о полигоналном броју представићемо у овом раду.

1.2 Формула за k-угаоне бројеве

Полигонални бројеви се могу дефинисати геометријски пребројавањем броја тачака у правилном k-углу као што је приказано на слици 1. За $k \geq 3$, k-угаони број је укупан број тачака унутар једног од регуларних k-углова на слици.

Нека је $P_n = P_n(k)$ n-ти k-угаони број. Ради практичности ставићемо да је $P_0 = 0$, $P_1 = 1$. Када из контекста јасно закључимо да радимо са k-угаоним бројевима, избацујемо аргумент (k) из наше нотације. За мало k, полигонални бројеви се називају и троугаони



Слика 1: Бројеви $P_n(k)$, за $k \in \{3, 4, 5\}$ и $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$

бројеви ($k = 3$), квадратни бројеви ($k = 4$), петоугаони бројеви ($k = 5$), шестоугаони бројеви ($k = 6$), итд.

k-углови на слици и, последично, вредности P_n конструисани су рекурзивно на следећи начин. Почињемо означавањем тачке врха, која се назива базна тачка. Претпоставимо да је првих n правилних k-углова већ конструисано, тако да свака ивица најудаљенијег k-угла сада има дужину n тачака. Да бисмо конструисали $(n+1)$ k-угао, прво морамо да продужимо две ивице везане за основну тачку за по једну тачку, а затим додамо ивице паралелне претходним ивицама, тако да свака (спољна) ивица сада има $n+1$ тачку. Укупан број тачака који додајемо слици је $1 + (k-2)n$. Тако имамо однос,

$$P_{n+1} = P_n + (k-2)n + 1 \tag{1}$$

Примећујемо да претходна рекурзивна формула важи за $n = 0$, пошто је $1 = P_1 = P_0 + 0 + 1$. Понављање (слика 1) је задовољено квадратним полиномом $P_n = An^2 + Bn + C$ за неке константе A, B и C. Пошто је $P_0 = 0$, морамо имати $C = 0$. Даље, $P_1 = 1$ имплицира да је $1 = A + B$, док $P_2 = k$ имплицира да је $k = 4A + 2B$.

Решавањем линеарног система:

$$A + B = 1$$

$$4A + 2B = k;$$

добија се $A = \frac{2k-4}{4}$, $B = \frac{4-k}{2}$, а самим тим за $n \geq 0$,

$$P_n = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}. \tag{2}$$

2 Троугаони бројеви

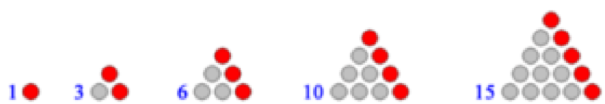
Троугаони бројеви (или троугласти бројеви) су 1, 3, 6, 10, 15, 21, 36, итд. Могу бити представљени тачкама у троуглу као што је приказано испод (слика 2).

Разлике између узастопних бројева троугла (укључујући 0) су природни бројеви 1, 2, 3, 4, ..., и стога се n-ти број троугла може посматрати као збир првих n природних бројева, као што је илустровано у наставку:

$$S_3(n) = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + n,$$

где се са $S_3(n)$ означава n-ти троугаони број.

Троугаони бројеви су најједноставнији полигонални бројеви, које геометријски у равни приказујемо тачкама распоређеним у облику троугла. Уколико једној тачки додамо две тачке добијамо једнакостраничан троугао. Затим, додајући три тачке претходном једнакостраничном троуглу добијамо трећи по реду троугаони број 6. Понављајући поступак видимо да се троугаони бројеви описују формулом помоћу које лако одређујемо n-ти по реду троугаони број.



Слика 2: Првих пет троугаоних бројева

Теорема 2.0.1. *За троугаоне бројеве важи:*

$$S_3(n) = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$S_3(1) = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.

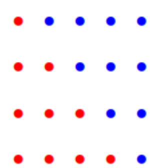
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Имамо

$$\frac{n(n+1)}{2} + n + 1 = \frac{n^2 + n + 2n + 2}{2} = \frac{n^2 + 3n + 2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2} = S_3(n+1).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n. $\square$

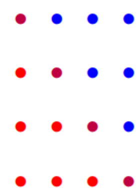
Низ првих неколико троугаоних бројева: 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, ... Осим горе приказаног начина добијања формуле (или израза за одређивање n-тог троугаоног броја), могли смо наведену формулу добити геометријском интерпретацијом коју приказујемо на слици 3 за $n = 4$. Тада видимо да је n-ти троугаони број половина правоугаоника са страницама n и $n+1$. За квадратне бројеве очигледно важи $S_4(n) = n^2$, али више о њима рећи ћемо касније. Сада ћемо показати везу између троугаоних бројева и квадрата.



Слика 3

2.1 Веза између троугаоних бројева и квадрата

Слика испод показује да је збир два узастопна троугаона броја квадрат: $S_3(n-1) + S_3(n) = n^2$

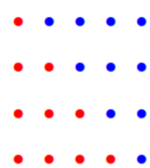


Слика 4

На слици 4 приказано је разбијање квадрата на два троугла која се преклапају, што нам омогућава да изведемо формулу за $S_3(n)$:

$n^2 = S_3(n) + S_3(n) - n \Rightarrow S_3(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n) = \frac{n(n+1)}{2}$

Директнији начин да се добије формула за $S_3(n)$ је да се правоугаоник разбије на два троугла као што је илустровано испод:



Слика 5

$$2S_3(n) = n(n+1) \Rightarrow S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}$$

Комбинација горе наведених запажања заједно даје доказ формуле за збир првих n природних бројева:

$$1 + 2 + 3 + ... + n = S_3(n) = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (3)$$

2.2 Када је број троугаони број

Теорема 2.2.1. *Позитиван цео број* n *је троугаони акко је* $8n + 1$ *савршен квадрат.*

Доказ. Претпоставимо да је n троугаони број. Тада је
$n = \frac{k(k+1)}{2}$ за неко $k \in \mathbb{N}$.

$$\Rightarrow 2n = k^2 + k$$

$$\Rightarrow 8n + 1 = 4k^2 + 4k + 1 = (2k+1)^2,$$

па је $8n + 1$ савршен квадрат.
Обрнуто, претпоставимо да је $8n + 1$ савршен квадрат. То значи да је $8n + 1 = m^2$, за неки непаран позитиван цео број m. Морамо показати да постоји $k \in \mathbb{N}$, такво да је $n = S_3(k)$, односно $n = \frac{k(k+1)}{2}$. Број m је непаран, па је $m = 2k + 1$, за неко $k \in \mathbb{N}$. Тада је

$$\begin{aligned} 8n &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 - 1 \\ &= 4k(k+1), \end{aligned}$$

што имплицира да је $n = \frac{k(k+1)}{2}$. Дакле, n је троугаони број.

□

2.3 Троугаони бројеви и Паскалов троугао

Троугаони бројеви 1, 3, 6, 10, 15, ... појављују се као трећа југозападна дијагонала у Паскаловом троуглу, као што се може видети на дијаграму испод. Подсетимо се да је сваки број у Паскаловом троуглу једнак збиру два броја изнад њега.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Бројеви на четвртој југозападној дијагонали, 1, 4, 10, 20, 35, 56,... називају се тетраедарски бројеви. n-ти тетраедарски број H_n је број тачака у 3-димензионалној пирамиди који се добија почевши од основе која је троугао који садржи $S(n)$ тачака, а затим слагањем троуглова са $S(n-1), S(n-2), ..., S(1)$ тачака, ка врху. Тако је

$$H(n) := S(1) + S(2) + ... + S(n).$$

Овај облик такође илуструје облик хокејашке палице за Паскалов троугао, који каже да је збир бројева низ дијагоналу Паскаловог троугла (почевши од 1) једнак броју у следећем реду помереном за једно место удесно (за дијагоналу југозапада).

Подсетимо се да се вредности у Паскаловом троуглу такође могу посматрати као биномни коефицијенти. Ако назовемо [1, 1] први ред троугла, [1, 2, 1] други ред и тако даље, елементи у n-том реду су коефицијенти у развоју $(x+y)^n$.

Да будемо прецизни, k-ти елемент у n-том реду је $\binom{n}{k-1}$, број начина избора $k-1$ објеката из колекције од n објеката. Бројеви троугла су биномни коефицијенти за $k=3$, и имамо $S(n) = \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n}{2}$. Тетраедарски бројеви су биномни коефицијенти за $k=4$, и имамо $H(n) = \binom{n+2}{3} = \frac{(n+2)(n+1)n}{6}$.

Теорема 2.3.1. $S(1) + ... + S(n) = \binom{n+2}{3}$.

Доказ. Директно следи из дефиниције $H(n)$ и чињенице да се $H(n)$ може представити као биномни коефицијент. Овде представљамо директан доказ помоћу индукције.

(база индукције): За $n=1$, идентитет је тривијалан

$$S(1) = 1 = \binom{3}{3}.$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да је тврђење тачно за n.

(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Желимо да покажемо да је

$H(n+1) = \binom{n+3}{3} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}$. Сада,

$$
\begin{aligned}
H(n+1) &= S(1)+S(2)+...+S(n)+S(n+1)\\
&= H(n)+S(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n+1)(n+2)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{3(n+1)(n+2)}{6}\\
&= \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

Дакле, $H(n+1) = \binom{n+3}{3}$.

$\square$

3 Квадратни бројеви

Кад једној тачки додајемо три тачке, а не две као у горе описаном поступку, добијамо квадрат. Квадрату додамо пет тачака, затим седам, и тако редом добијамо све квадратне бројеве, тј. бројеве које можемо приказати тачкама распоређеним у равни у облику квадрата. Већ нас сам назив "квадратни" упућује да се n-ти квадратни број добија као квадрат броја n.

Теорема 3.0.1. *За n-ти квадратни број важи:*

$$S_4(n) = 1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$S_4(1) = 1 = 1^2.$$

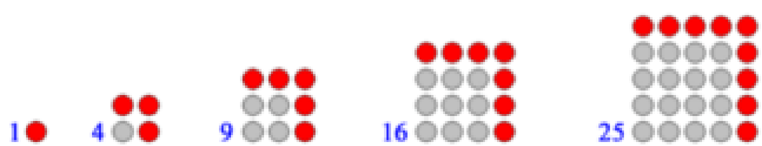
(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n + 1$. Имамо

$$n^2 + 2n + 1 = (n + 1)^2 = S_4(n + 1).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n.

□

Првих неколико квадратних бројева чине низ 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121,... што приказује слика 6.



Слика 6: Првих пет квадратних бројева

Формулу за одређивање n-тог квадратног броја доказали смо индукцијом, а аналогно ситуацији са троугаоним бројевима, постоје и други начини доказивања. Споменули смо већ како сума два узастопна троугаона броја даје квадратни број, а сада ћемо навести још нека својства квадратних бројева.

3.1 Збир два квадрата

Наш циљ у овом одељку је да окарактеришемо све целе бројеве који се могу изразити као збир два квадрата целих бројева.

Претпоставимо да је n збир квадрата, $n = a^2+b^2$. Пошто је сваки квадрат конгруентан са 0 или 1 $(mod\ 4)$, $n \equiv a^2 + b^2 \equiv 0$, 1 или 2 $(mod\ 4)$. Тако имамо неопходан услов да n буде збир два квадрата. Нажалост, ово није довољан услов. На пример, $6 \equiv 2\ (mod\ 4)$, $12 \equiv 0\ (mod\ 4)$ и $21 \equiv 1\ (mod\ 4)$, али 6, 12 и 21 нису збирови два квадрата. Проблем је у томе што 6, 12 и 21 имају прост фактор 3, који се не може изразити као збир квадрата. Ако ограничимо нашу пажњу на просте бројеве, онда је неопходан услов и довољан.

Теорема 3.1.1. *Нека је p непаран прост број. Тада је p збир два квадрата акко $p \equiv 1\ (mod\ 4)$.*

Доказ. Већ смо видели да је $p \equiv 1\ (mod\ 4)$ неопходан услов (јер је p непаран), па је потребно само доказати обрнуто.
Претпоставимо да је $p \equiv 1\ (mod\ 4)$. Тада је $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1\ (mod\ p)$, ако је $p = 4k+1$, $k \in \mathbb{N}$, па постоји $u \in \mathbb{Z}$ тако да је $u^2 \equiv -1\ (mod\ p)$.
Размотримо скуп целих бројева облика $x+uy$, где су $x, y \in [0, \sqrt{p}] \cap \mathbb{Z}$.
Пошто важи да је $([\sqrt{p}]+1)^2 > p$, морају постојати парови $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, такви да је
$x_1 + uy_1 \equiv x_2 + uy_2\ (mod\ p)$, па је, $(x_1 - x_2) \equiv u(y_2 - y_1)\ (mod\ p)$
Ставимо $a = (x_1 - x_2), b = (y_2 - y_1)$.
Тада је $|a| < \sqrt{p}, |b| < \sqrt{p}$ и $a \equiv ub\ (mod\ p)$.
Дакле, $a^2 + b^2 \equiv (1+u^2)b^2 \equiv 0\ (mod\ p)$ и
$a^2 + b^2 < 2p$. Даље, пошто је $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, $a^2 + b^2 > 0$,
то је, $a^2 + b^2 = p$. □

3.2 Збир три квадрата

Године 1797. Лежандр је установио следећи једноставан критеријум када је позитиван цео број збир три квадрата.

Теорема 3.2.1. *Позитиван цео број је збир три квадрата акко није облика* $4^k(8m+7)$ *за неке ненегативне целе бројеве* k, m.

Видимо да се ниједан број облика $4^k(8m+7)$ не може представити као збир три квадрата. Ако је $x^2+y^2+z^2$ дељиво са 4, тада сваки од бројева x, y, z мора бити паран. Одатле следи да се број n може представити као збир три квадрата акко то исто важи и за $4n$. Према томе, довољно је увидети да се ниједан број облика $8m+7$ не може приказати као збир три квадрата. Међутим, ово лако следи из чињенице да потпун квадрат може да даје остатке 0, 1, 4 по модулу 8.

Знатно тежи део доказа (који овде не наводимо) се састоји у томе да се покаже да сваки број који није наведеног облика заиста јесте збир три квадрата. Тешкоће на које се наилази у том доказу делимично потичу и од чињенице да скуп бројева који се могу представити као збир три квадрата није затворен за множење: $3 = 1^2+1^2+1^2$ и $5 = 2^2+1^2+0^1$ имају то својство, али то не важи и за $15 = 8 \cdot 1 + 7$.

3.3 Збир три троугаона броја

У овом одељку ћемо прво показати да је n збир три троугаона броја акко је $8n+3$ збир три квадрата. Затим, пошто је сваки позитиван цео број облика $8n+3$ збир три квадрата, према теореми 3.2.1 долазимо до следеће теореме, која се зове Гаусова теорема Еуреке.

Теорема 3.3.1 (Гаусова теорема Еуреке)**.** *Сваки позитиван цео број је збир три троугаона броја.*

Треба имати на уму да у исказу теореме нулу сматрамо троугаоним бројем. Алтернативно, могло би се рећи да је сваки позитиван цео број збир највише три троугаона броја ако не желимо да се нула сматра троугаоним бројем.

Лема 3.3.1. *Позитиван цео број n је збир три троугаона броја акко је $8n+3$ збир три квадрата.*

Доказ. Претпоставимо да је n збир три троугаона броја. Тада је

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{h(h+1)}{2},$$

где су k, h и m ненегативни цели бројеви. Желимо да покажемо да је $8n+3$ збир три непарна квадрата.
Сада, $n = \frac{k^2+k+m^2+m+h^2+h}{2} \Leftrightarrow 2n = k^2+k+m^2+m+h^2+h \Leftrightarrow 8n = 4k^2+4k+4m^2+4m+4h^2+4h \Leftrightarrow 8n+3 = 4k^2+4k+4m^2+4m+4h^2+4h+3$ $= (4k^2+4k+1)+(4m^2+4m+1)+(4h^2+4h+1) = (2k+1)^2+(2m+1)^2+(2h+1)^2$, збир три квадрата.
Обрнуто, претпоставимо да је $8n+3 = x^2+y^2+z^2$, за неке ненегативне целе бројеве x, y и z. Морамо да покажемо да постоје природни бројеви k, m и h, такви да је $n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{h(h+1)}{2}$, да би n било сума три троугаона броја. Пошто је $x^2+y^2+z^2 \equiv 3 \ (mod\ 8)$, x, y и z морају бити непарни, па је $x = 2k+1$, $y = 2m+1$ и $z = 2h+1$, за ненегативне целе бројеве k, m и h. Тада је $8n+3 = (2k+1)^2+(2m+1)^2+(2h+1)^2$. Користећи еквивалентност у првом пасусу, добијамо да је $n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{m(m+1)}{2} + \frac{h(h+1)}{2}$, што смо и желели да докажемо. □

3.4 Збир четири квадрата

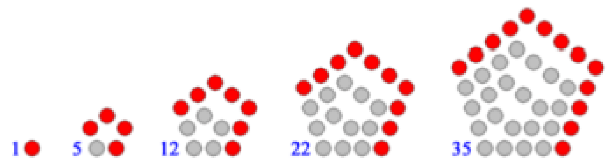
Године 1770. Лагранж је поставио теорему о четири квадрата:

Теорема 3.4.1. *Сваки позитиван цео број је збир 4 квадрата.*

Извођење Лагранжове теореме из теореме о три квадрата. Нека је n позитиван цео број. Ако n није облика $4^k(8m+7)$ за неке ненегативне целе бројеве k, m, онда знамо да је n збир три квадрата, а тиме и тривијално збир четири квадрата користећи нулу као четврти квадрат. Претпоставимо даље да је $n = 4^k(8m+7)$ за неке k, m. Тада је $n - 4^k = 4^k(8m+7) - 4^k = 4^k(8m+6)$, што није облика $4^{k_1}(8m_1+7)$ за било које целе бројеве k_1, m_1.
Дакле, $n - 4^k = a^2+b^2+c^2$ за $a, b, c \in \mathbb{Z}$, и $n = (2^k)^2+a^2+b^2+c^2$. □

4 Петоугаони бројеви

Аналогно добијању троугаоних и квадратних бројева, ако тачки додамо четири, затим седам, десет, итд. тачака добијамо низ петоугаоних бројева. Петоугаони бројеви су бројеви које можемо приказати тачкама распоређеним у равни тако да чине правилне петоуглове (слика 7). Првих неколико петоугаоних бројева чине низ 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92,...



Слика 7: Првих пет петоугаоних бројева

Теорема 4.0.1. *За n-ти петоугаони број важи:*

$$S_5(n) = 1 + 4 + 7 + ... + (3n - 2) = \frac{1}{2}n(3n - 1).$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$S_5(1) = 1 = \frac{1(3-1)}{2}.$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n + 1$. Имамо

$$\frac{1}{2}n(3n-1)+3n+1 = \frac{n(3n-1)+6n+2}{2} = \frac{3n^2-n+6n+2}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = S_5(n+1).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n. □

4.1 Веза између троугаоних и петоугаоних бројева

Теорема 4.1.1. *За* $n \in \mathbb{N}$ *важи:*

$$S_5(n) = \frac{1}{3} S_3(3n-1).$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 1$. Тада важи:

$$S_5(1) = 1 = \frac{1}{3} S_3(3-1).$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Имамо

$$S_5(n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{9n^2+15n+6}{6} =$$

$$\frac{1}{3}\frac{9n^2+15n+6}{2} = \frac{1}{3}\frac{(3n+2)(3n+3)}{2} = \frac{1}{3} S_3(3n+2).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n. □

4.2 Веза између троугаоних, квадратних и петоугаоних бројева

Теорема 4.2.1. *За* $n \in \mathbb{N}$ *важи:*

$$S_5(n) = S_4(n) + S_3(n-1).$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 2$. Тада важи:

$$S_5(2) = \frac{1}{2} 2(6-1) = \frac{1}{2} 10 = 5 = 4 + 1 = S_4(2) + S_3(1).$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Имамо

$$S_5(n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} = \frac{3n^2+5n+2}{2} = \frac{2n^2+4n+2}{2} + \frac{n^2+n}{2} =$$

$$\frac{2(n+1)^2}{2} + \frac{n(n+1)}{2} = (n+1)^2 + \frac{n(n+1)}{2} = S_4(n+1) + S_3(n).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n. □

5 Полигонални бројеви

Аналогно досад дефинисаним полигоналним бројевима, лако можемо добити и остале полигоналне бројеве: шестоугаоне, седмоугаоне, осмоугаоне, итд. За њих важе сличне дефиниције као и за претходне полигоналне бројеве. Ради лакшег разумевања, у таблици (табела 1) је приказано првих 20 полигоналних бројева, наведена су имена полигоналних бројева, општа формула за одређивање n-тог члана и првих неколико чланова низа.

Табела 1: Првих двадесет полигоналних бројева

Назив	Формула	Низ
Троугаони бројеви	$\frac{n(n+1)}{2}$	1, 3, 6, 10, 15, 21, ...
Квадратни бројеви	n^2	1, 4, 9, 16, 25, 36, ...
Петоугаони бројеви	$\frac{3n^2-n}{2}$	1, 5, 12, 22, 35, 51, ...
Шестоугаони бројеви	$\frac{4n^2-2n}{2}$	1, 6, 15, 28, 45, 66, ...
Седмоугаони бројеви	$\frac{5n^2-3n}{2}$	1, 7, 18, 34, 55, 81, ...
Осмоугаони бројеви	$\frac{6n^2-4n}{2}$	1, 8, 21, 40, 65, 96, ...
Деветоугаони бројеви	$\frac{7n^2-5n}{2}$	1, 9, 24, 46, 75, 111, ...
Десетоугаони бројеви	$\frac{8n^2-6n}{2}$	1, 10, 27, 52, 85, 126, ...
Једанаестоугаони бројеви	$\frac{9n^2-7n}{2}$	1, 11, 30, 58, 95, 141, ...
Дванаестоугаони бројеви	$\frac{10n^2-8n}{2}$	1, 12, 33, 64, 105, 156, ...
Тринаестоугаони бројеви	$\frac{11n^2-9n}{2}$	1, 13, 36, 70, 115, 171, ...
Четрнаестоугаони бројеви	$\frac{12n^2-10n}{2}$	1, 14, 39, 76, 125, 186, ...
Петнаестоугаони бројеви	$\frac{13n^2-11n}{2}$	1, 15, 42, 82, 135, 201, ...
Шеснаестоугаони бројеви	$\frac{14n^2-12n}{2}$	1, 16, 45, 88, 145, 216, ...
Седамнаестоугаони бројеви	$\frac{15n^2-13n}{2}$	1, 17, 48, 94, 155, 231, ...
Осамнаестоугаони бројеви	$\frac{16n^2-14n}{2}$	1, 18, 51, 100, 165, 246, ...
Деветнаестоугаони бројеви	$\frac{17n^2-15n}{2}$	1, 19, 54, 106, 175, 261, ...
Двадесетоугаони бројеви	$\frac{18n^2-16n}{2}$	1, 20, 57, 112, 185, 276, ...

Теорема 5.0.1. *Нека су n и m природни бројеви n, $m \geq 2$. Дефинишемо n-ти m-гонални број у ознаци $S_m(n)$ као суму првих n елемената аритметичког низа са почетним чланом 1 и разликом $m-2$:* $1, 1+(m-2), 1+2(m-2), 1+3(m-2)$*. Тада важи:*

$$S_m(n) = \frac{n}{2}(n(m-2) - m + 4).$$

Доказ. Сума аритметичког низа $a_1, a_2, ..., a_n$ је $\frac{n}{2}(a_1 + a_n)$, па имамо

$$S_m(n) = \frac{n}{2}(1+1+(n-1)(m-2)) = \frac{n}{2}(2+nm-2n-m+2) = \frac{n}{2}(n(m-2)-m+4)$$

Видимо да формуле дате у таблици одговарају овој формули за дате m, n. □

Теорема 5.0.2. *Сваки полигоналан број једнак је збиру претходног полигоналног броја са мањим бројем страница и истим индексом и троугаоног броја претходног индекса, односно*

$$S_m(n) = S_{m-1}(n) + S_3(n-1),$$

за m, $n \geq 1$.

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 2$. Тада важи:

$$S_{m-1}(2) + S_3(1) = (m-1) + 1 = m = S_m(2).$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Имамо

$$S_{m-1}(n+1) + S_3(n) = S_{m-1}(n) + (1 + (m-3)n) + S_3(n-1) + n =$$

$$S_m(n) + (1 + (m-2)n) = S_m(n+1).$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број $n \geq 1$. □

Теорема 5.0.3. *Сваки m-гонални број може се представити као линеарна комбинација два троугаона броја, односно важи:*

$$S_m(n) = S_3(n) + (m-3)S_3(n-1) = (m-2)S_3(n-1) + n.$$

Доказ. Математичком индукцијом:

(база индукције): Проверавамо формулу коју желимо да докажемо за $n = 2$. Тада важи:

$$S_m(2) = \frac{2}{2}(2(m-2) - m + 4) = 2m - 4 - m + 4 = m = 3 + (m-3)$$
$$= m - 2 + 2 = (m-2)S_3(1) + 2.$$

(индукцијска хипотеза): Претпоставимо да тврђење важи за неки природан број n.
(индукцијски корак): Докажимо сада да тврђење важи за $n+1$. Имамо

$$S_m(n+1) = \frac{n}{2}(n(m-2) - m + 4) + 1 + n(m-2)$$
$$= \frac{n^2(m-2) - nm + 4n + 2 + 2n(m-2)}{2} = \frac{n^2m - 2n^2 + nm + 2}{2}$$
$$= \frac{(m-2)(n^2+n)}{2} + \frac{2n+2}{2} = (m-2)S_3(n) + n + 1.$$

На основу математичке индукције, тврђење важи за сваки природан број n. □

5.1 Теорема о полигоналном броју

Ферма (1638) је претпоставио да за било које $k \geq 3$, сваки позитиван цео број може бити изражен као збир највише k, k-гоналних бројева. То је у потпуности доказао Коши (1813). Резултат ћемо назвати Теорема полигоналног броја, иако се често назива Кошијева теорема о полигоналном броју или Фермаова теорема о полигоналном броју.

Теорема 5.1.1. *За сваки позитиван цео број $k \geq 3$, сваки позитиван цео број се може изразити као збир највише k позитивних k-гоналних бројева.*

Пошто 0 називамо k-гоналним бројем, могли бисмо исто тако рећи да је сваки позитиван цео број збир тачно k, k-гоналних бројева. Доказ који овде дајемо прати Натансонов[2] рад. Почињемо са поставком теореме за мало N (број који се представља) у следећем одељку, а затим је утврђујемо за велики N у следећа два одељка.

Примећујемо да за било који $k \geq 3$ постоје вредности N које не могу бити представљене са мање од k, k-гоналних бројева, наиме $N = 2k-1$ (за $k \geq 3$) и $N = 5k-4$ (за $k \neq 4$), као што ћемо видети у наставку.

5.2 Доказ теореме о полигоналном броју

Подсећајући се формуле за n-ти k-гонални број

$$P_n = P_n(k) = \frac{(k-2)n^2 - (k-4)n}{2}$$

добијамо

$$P_1 = 1, P_2 = k, P_3 = 3k-3, P_4 = 6k-8, P_5 = 10k-15, ...$$

Користећи ове вредности, можемо представити мале целе бројеве као збир k k-гоналних бројева.
Пепин и Диксон направили су табеле које утврђују да се сваки позитивни број $N < 120k - 240$ може изразити као збир највише k k-гоналних бројева, од којих је највише четири различито од 0 или 1. Доказ Теореме полигоналних бројева ће бити изведен ако можемо утврдити исто за $N \geq 120k - 240$. Заправо ћемо утврдити у следећој теореми, да се свако $N \geq 120k - 240$ може изразити као збир од највише $k-1$, k-гоналних бројева, за $k \geq 5$. Можемо претпоставити да је за $k \geq 5$ пошто смо већ видели да тврђење важи за $k = 3$ и $k = 4$. Да бисмо формулисали теорему, згодно је ставити $m = k-2$, и дефинисати n-ти $(m+2)$-гонални број да буде:

$$p_n := \frac{m}{2}(n^2 - n) + n.$$

Већ смо проверили да теорема важи за троугаоне и квадратне бројеве, па можемо претпоставити да је $m \geq 3$.

Табеле Пепина и Диксона утврђују да се сваки позитиван цео број $N < 120m$ може изразити као збир највише $m+2$, $(m+2)$-гоналних бројева. Затим доказујемо много јачи резултат за $N \geq 120m$.

Теорема 5.2.1. *Нека је $m \geq 3$ и $N \geq 120m$. Тада је N збир $m+1$ $(m+2)$-гонална броја, од којих се највише четири разликују од 0 или 1.*

Доказ. Нека је $m \geq 3$ и N природан број за који важи $N \geq 120m$. Нека су s_1 и s_2 узастопни непарни цели бројеви. Скуп бројева облика $s+r$, где је $s \in \{s_1, s_2\}$ и $r \in \{0, 1, ..., m-3\}$, садржи комплетан скуп класа остатака по модулу m. Тако је $N \equiv s + r (mod\ m)$ за неке $s \in \{s_1, s_2\}$ и $r \in \{0, 1, ..., m-3\}$. Нека је

$$a := 2(\frac{N-s-r}{m}) + s = (1 - \frac{2}{m})s + 2(\frac{N-r}{m}).$$

Тада је a непаран цео број, а $ma = 2N - 2s - 2r + sm$. Ово имплицира да је $2N = ma + 2s + 2r - sm = m(a-s) + 2(s+r)$. Стога,

$$N = \frac{m}{2}(a-s) + s + r.$$

Сада ћемо ближе одредити s, да бисмо доказ наше теореме завршили применом следеће леме, коју само наводимо без доказа.

Лема 5.2.1 (Кошијева лема)**.** *Нека су k и s непарни позитивни цели бројеви, такви да је $s^2 < 4k$ и $3k < s^2+2s+4$. Тада постоји ненегативно целобројно решење (t, u, v, w) система:*

$$k = t^2 + u^2 + v^2 + w^2,$$

$$s = t + u + v + w.$$

Износимо следеће тврдње, које ће нам омогућити да применимо Кошијеву лему.

Тврђење 1: Ако је $0 < s < \frac{2}{3} + \sqrt{8\frac{N}{m} - 8}$, тада је $s^2 < 4a$.

Тврђење 2: Ако је $s > \frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{N}{m} - 3}$, тада је $s^2 + 2s + 4 > 3a$.

Дефинишимо квадратну функцију, како бисмо доказали прво тврђење

$$f(s) := s^2 - 4a = s^2 - 4(1 - \frac{2}{m})s - 8(\frac{N-r}{m}).$$

Графикон $f(s)$ је парабола која се отвара нагоре, па је $f(s) < 0$, односно $s^2 < 4a$, под условом да је s између нула функције f, које су дате са

$$\frac{4(1-\frac{2}{m}) \pm \sqrt{16(1-\frac{2}{m})^2 + 32(\frac{N-r}{m})}}{2}$$

$$= \frac{4(1-\frac{2}{m}) \pm 4\sqrt{(1-\frac{2}{m})^2 + 2(\frac{N-r}{m})}}{2}$$

$$= 2(1-\frac{2}{m}) \pm 2\sqrt{(1-\frac{2}{m})^2 + 2(\frac{N-r}{m})}.$$

Сада, за $m \geq 3$ имамо $2(1-\frac{2}{m}) \geq \frac{2}{3}$ и за $m > r$,

$$2\sqrt{(1-\frac{2}{m})^2 + 2(\frac{N-r}{m})} > 2\sqrt{2(\frac{N-r}{m})} > \sqrt{8\frac{N}{m} - 8},$$

самим тим и ако $0 < s < \frac{2}{3} + \sqrt{8\frac{N}{m} - 8}$, следи да је s између две нуле $f(s)$, одакле је $f(s) < 0$.

Да бисмо доказали друго тврђење дефинишимо

$$g(s) := s^2 + 2s + 4 - 3a = s^2 + (-1 + \frac{6}{m})s + 4 - 6(\frac{N-r}{m}),$$

чија је позитивна нула дата са

$$\frac{(1-\frac{6}{m}) + \sqrt{(1-\frac{6}{m})^2 - 4(-6(\frac{N-r}{m}) + 4)}}{2}$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{24(\frac{N-r}{m}) - 15} = \frac{1}{2} + \sqrt{6(\frac{N-r}{m}) - \frac{15}{4}}$$

$$< \frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{N}{m} - 3},$$

за $m \geq 3$.

Тако, за $s > \frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{N}{m} - 3}$, важи $g(s) > 0$, тј. $s^2 + 2s + 4 > 3a$.

Сада је дужина интервала $I := (\frac{1}{2} + \sqrt{6\frac{N}{m} - 3}, \frac{2}{3} + \sqrt{8\frac{N}{m} - 8})$ дата са

$$l(I) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \sqrt{8\frac{N}{m} - 8} - \sqrt{6\frac{N}{m} - 3} \geq \frac{1}{6} + \sqrt{8\frac{N}{m} - 8} - \sqrt{6\frac{N}{m} - 3} > 4$$

за $N \geq 120m$. Из тога следи да I садржи два узастопна непарна позитивна броја s_1 и s_2. Нека је $s \in \{s_1, s_2\}$ непаран цео број који задовољава $N \equiv s + r (mod\ m)$ где $r \in \{0, 1, ..., m-3\}$, тако да имамо $N = \frac{m}{2}(a-s) + s + r$.

Дакле, постоје непарни позитивни цели бројеви a и s који задовољавају услов $N = \frac{m}{2}(a-s) + s + r$ и неједначине $s^2 < 4a$,
$3a < s^2 + 2s + 4$. Кошијева лема имплицира да постоје t, u, v, w такви да је $a = t^2 + u^2 + v^2 + w^2$ и $s = t + u + v + w$. Дакле, имајући на уму нашу нотацију за n-ти $(m+2)$-гонални број $p_n := \frac{m}{2}(n^2 - n) + n$, имамо

$$N = \frac{m}{2}(a-s)+s+r = (\frac{m}{2}(t^2-t)+t)+(\frac{m}{2}(u^2-u)+u)+(\frac{m}{2}(v^2-v)+v)$$

$$+(\frac{m}{2}(w^2-w)+w)+r = p_t + p_u + p_v + p_w + r,$$

збир четири $(m+2)$-гонална броја и $m-3$ нуле или јединице, чиме је доказ завршен.

$\square$

6 Закључак

Полигонални бројеви су тема интересовања у математици још од античког времена Питагорејаца. Ферма и Коши са својом теоремом о полигоналном броју пионири су модерног рада са полигоналним бројевима. Касније је Леонард Ојлер, који је развио посебно интересовање за ове бројеве, између осталих открића везаних за полигоналне бројеве, дошао до експлицитне формуле за троугаоне бројеве који су такође савршени бројеви. Ови бројеви (полигонални бројеви) су били од велике користи у теорији бројева и другим гранама математике, јер се односе на формулисање различитих врста теорема, израчунавање вероватноћа, итд. У пракси, полигонални бројеви су играли виталну улогу у бројању и компјутерском програмирању, где се примењују на нумерисање итерација неких петљи компјутерског програмирања.

На почетку овог рада дата је детаљна дефиниција полигоналних бројева. Представљени су основни полигонални бројеви укључујући троугаоне, квадратне и петоугаоне бројеве и везе између њих. Рад даље истражује како су троугаони бројеви повезани са Паскаловим троуглом. Бавимо се збировима квадрата у одговарајућим поглављима, као и Лагранжовом теоремом о четири квадрата. Да би се добро разумело шта су полигонални бројеви, у раду смо анализирали њихова својства, међусобне везе и представили одговарајуће теореме са добро разрађеним доказима. Цео рад и Кошијева лема укључена у њега, постављају конкретну основу за формулацију и доказ главне теореме у нашој расправи о полигоналним бројевима, Коши-Фермаове теореме о полигоналном броју, која је представљена у последњем поглављу.

Литература

[1] P. L. Clark, Number Theory: A Contemporary Introduction, Online book http://math.uga.edu/pete/4400FULL.pdf

[2] M. B. Nathanson, A short proof of Cauchy's poligonal number theorem, Proc. Amer. Math. Soc. 99(1987), no. 1, 22-24.

[3] American Invitational Mathematics Examination, доступно на: https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php

[4] Conway J.H. (1996), The Book of Numbers, New York, Springer-Verlag

[5] Edwards A.W.F.(1987), Pascal's Arithmetical Triangle, London, Griffin

[6] Forhan.E. (2014), Polygonal Numbers and Finite Calculus, публикација

[7] Tattersal J. (1990), Elementary Number Theory in Nine Chapters, Cambrige University Press

[8] http://mathcenter.oxford.emory.edu

[9] Jurčević M.(2018), Poligonalni brojevi - Diplomski rad, Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet

[10] Chipatala O. (2016), Polygonal numbers - Master of science of Mathematics College of Arts and Sciences, Kansas State University

[11] Poligonalni broj, Wikipedia, https://hr2.wiki/wiki/Polygonal-number

[12] Figurativni broj, Wikipedia, https://sr.wikipedia.org/sr-el/Figurativni-broj