УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Милица Рашковић

ПЕРОН-ФРОБЕНИЈУСОВА ТЕОРЕМА И ПРИМЕНЕ

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Горан Ђанковић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Марко Радовановић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: ____________________

Родитељима, за неизмерну подршку и веру

Миги, за смиреност на сваком испиту

Ментору др Ђанковић Горану, с великим поштовањем и захвалношћу, за све смернице и савете током израде овог рада

Садржај

Глава 1

Увод

Перон-Фробенијусова теорема тврди да свака реална квадратна матрица са позитивним члановима има јединствену највећу реалну сопствену вредност, при чему се одговарајући сопствени вектор може изабрати тако да су му све координате позитивне. Ова теорема има многоструке примене. С тим у вези, како је Перон-Фробенијусова теорема једна од најважнијих теорема Линеарне алгебре која се не помиње на курсу на Математичком факултету, први задатак рада је да презентује ову теорему и више доказа исте. Други циљ је да презентује неколико њених репрезентативних примена.

1.1 Векторски простори

На почетку наводимо основне дефиниције о векторским просторима које ће нам бити потребне да разумемо доказе у наставку рада.

Дефиниција 1.1.1. [3] Нека је $(V,+)$ комутативна група, а $(F,+,\cdot)$ поље. V је векторски простор над пољем F, ако је дефинисано пресликавање $F \times V \to V$, при чему, слику пара (α, a) означавамо са αa, тако да $\forall \alpha, \beta \in F$ и $\forall a, b \in V$ важи:

i) $\alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b$,

ii) $(\alpha+\beta)a = \alpha a + \beta a$,

iii) $(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$,

iv) $1a = a$,

где је са 1 означен неутрални елемент за множење у пољу F.

Дефиниција 1.1.2. Нека је V векторски простор над пољем F. Подскуп W скупа V је потпростор векторског простора V, ако је W векторски простор над пољем F у односу на рестрикције сабирања вектора и множења вектора скаларом на W.

Дефиниција 1.1.3. У векторском простору $V(F)$ низ вектора $(a_1, ..., a_n)$ је линеарно зависан, ако постоје скалари $\alpha_1, ..., \alpha_n$, од којих је бар један различит од нуле, такви да је

$$\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n = 0.$$

Низ вектора који није линеарно зависан је линеарно независан.

Дефиниција 1.1.4. Ако је S непразан подскуп векторског простора $V(F)$ онда се скуп свих линеарних комбинација вектора из S назива линеал (или линеарни омотач) скупа S и означава се са $L(S)$. Дакле,

$$L(S) = \{\alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n |\, n \in \mathbb{N}, \alpha_i \in F, a_i \in S\}.$$

Дефиниција 1.1.5. Ако је S подскуп (низ вектора) векторског простора $V(F)$, онда кажемо да је потпростор $L(S)$ генерисан скупом (низом) S, а елементе S називамо генераторима потпростора $L(S)$.

У специјалном случају, ако је $L(S) = V$, онда S генерише V, а елементи S су генератори векторског простора V. Ако постоји низ или коначан скуп S такав да је $L(S) = V$, кажемо да је векторски простор V коначно генерисан.

Дефиниција 1.1.6. База коначно генерисаног векторског простора је низ вектора који је линеарно независан и који генерише векторски простор.

Дефиниција 1.1.7. Нека су $W_1, ..., W_n$ потпростори векторског простора $V(F)$. Сума потпростора $W_1, ..., W_n$ је следећи скуп вектора:

$$W = W_1 + ... + W_n = \{w_1 + ... + w_n | w_1 \in W_1, ..., w_n \in W_n\}.$$

Дефиниција 1.1.8. Нека су $W_1, ..., W_n$ потпростори векторског простора $V(F)$. Сума потпростора $W = W_1 + ... + W_n$ назива се директна ако и само ако је за свако $i \in \mathbb{N}$

$$W_i \cap (W_1 + ... + W_{i-1} + W_{i+1} + ... + W_n) = \{0\}$$

и означава се са $W = W_1 \oplus ... \oplus W_n$.

Дефиниција 1.1.9. Нека су V_1 и V_2 векторски простори над истим пољем F. Пресликавање $A : V_1 \longrightarrow V_2$ такво да је

$$(\forall a, b \in V_1) A(a+b) = A(a) + A(b),$$

$$(\forall \alpha \in F)(\forall a \in V_1) A(\alpha a) = \alpha A(a),$$

назива се линеарна трансформација или линеарно пресликавање векторског простора V_1 у V_2.

Дефиниција 1.1.10. Нека је U потпростор векторског простора V и нека је A линеарни оператор на векторском простору V. Кажемо да је U инваријантан у односу на оператор A, односно $A-$инваријантан ако важи да из $u \in U$ следи $A(u) \in U$. Дакле, инваријантни потпростори су они векторски простори који се деловањем оператора сликају сами у себе.

Дефиниција 1.1.11. Нека је $V(F)$ векторски простор са базом $(a_1, ..., a_n)$. Ако је $x \in V$ и

$$x = \alpha_1 a_1 + ... + \alpha_n a_n,$$

онда се матрица формата $n \times 1$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}$$

назива вектор колона x у односу на базу $(a_1, ..., a_n)$ и означава се са $[x]$.

Дефиниција 1.1.12. Нека је $V(F)$ векторски простор са базом $(a_1, ..., a_n)$ и A линеарна трансформација тог векторског простора. Ако је

$$A(a_1) = \alpha_{11} a_1 + \alpha_{21} a_2 + ... + \alpha_{n1} a_n,$$

$$A(a_2) = \alpha_{12} a_1 + \alpha_{22} a_2 + ... + \alpha_{n2} a_n,$$

$$\cdots$$

$$A(a_n) = \alpha_{1n} a_1 + \alpha_{2n} a_2 + ... + \alpha_{nn} a_n,$$

онда се матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

назива матрица линеарне трансформације A у односу на базу $(a_1, ..., a_n)$ и означава се са $[A]$.

Дефиниција 1.1.13. Линеарни омотач скупа вектора S, у ознаци $span\{S\}$ је најмањи векторски потпростор који садржи тај скуп.

1.2 Позитивне и ненегативне матрице

Дефиниција 1.2.1. [3] За матрицу $A = [a_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $m, n \in \mathbb{N}$ кажемо да је позитивна (ненегативна) ако су јој сви елементи позитивни (ненегативни), односно важи $a_{ij} > 0$ ($a_{ij} \geq 0$), за $i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$.

Позитивне матрице ћемо означавати са $A > 0$, док ће неједнакост $A > B$ неке две произвољне матрице истих димензија значити да је матрица $A - B$ позитивна. Аналогно, дефинишемо ознаку за ненегативну матицу A као $A \geq 0$. Када је матрица $-A$ позитивна, пишемо $A < 0$. Напоменимо да позитивна матрица није исто што и позитивно дефинитна матрица. У наредном тексту наводимо следеће дефиниције и примере како би се видела та разлика.

Дефиниција 1.2.2. [3] Матрица $A \in M_n(\mathbb{R}), \forall n \in \mathbb{N}$ је регуларна ако постоји матрица B таква да је

$$AB = BA = E.$$

Матрица B назива се инверзном матрицом матрице A. Квадратна матрица која није регуларна, назива се сингуларна.

Дефиниција 1.2.3. Са A^T означавамо транспоновану матрицу матрице A. Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица и $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ кофактор елемента a_{ij}, где је M_{ij} минор матрице A, тј. детерминанта подматрице добијена брисањем $i-$те врсте и $j-$те колоне. Тада се матрица $adjA = [A_{ij}]^T$ назива адјунгована матрица.

Дефиниција 1.2.4. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C}), \forall n \in \mathbb{N}$ назива се хермитска ако је $A = \overline{A}^T$, где је $\overline{A}$ конјугована матрица матрице A. Реална матрица A је хермитска ако је симетрична, тј. ако је $A = A^T$.

Дефиниција 1.2.5. Хермитска матрица A је позитивно дефинитна (семидефинитна) ако је $x^T Ax > 0$ ($x^T Ax \geq 0$), $x \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ ($x \in \mathbb{C}^n$), где је $\mathbb{C}^n$ $n-$димензиони комплексни векторски простор.

Позитивну дефинитност матрице најлакше проверавамо Силвестеровим критеријумом који каже да је хермитска матрица позитивно дефинитна ако и само ако су јој сви водећи главни минори позитивни.

Пример. [3]

а) Нека је дата следећа матрица:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Матрица A је очигледно позитивна јер су јој сви елементи позитивни. Израчунајмо главне миноре:

$$\nabla_1 = |2| = 2, \nabla_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -10, \nabla_3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -47$$

Из Силвестеровог критеријума закључујемо да матрица A није позитивно дефинитна.

б) Нека је дата следећа матрица:

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Матрица B није позитивна јер се у њој налазе негативни елементи. Израчунајмо и за њу главне миноре:

$$\nabla_1 = |2| = 2, \nabla_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 2, \nabla_3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 10$$

Ова матрица је позитивно дефинитна.

Дакле, овај пример нам показује како позитивност и позитивна дефинитност матрице нису ни у каквој вези, нити из једног својства следи оно друго.

Пропозиција 1.2.1. [1] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$ матрице и нека су x, u, v и z вектори из $\mathbb{C}^n$, $n \in \mathbb{N}$. Тада важе следећа тврђења:

i) Нека је A позитивна матрица и нека је x ненегативан вектор, који има бар један елемент различит од нуле. Тада је вектор Ax позитиван, тј. $A > 0, x \geq 0, x \neq 0 \Longrightarrow Ax > 0$.

ii) Нека је B ненегативна матрица, и нека су u и v ненегативни вектори, такви да су елементи вектора u већи или једнаки од одговарајућих елемената вектора v. Тада су елементи вектора Bu већи или једнаки од одговарајућих елемената вектора Bv, тј. $B \geq 0, u \geq v \geq 0 \Longrightarrow Bu \geq Bv$.

iii) Нека је B ненегативна матрица, и z позитиван вектор, такав да је вектор Bz нула вектор. Тада важи да је матрица B нула матица, тј. $B \geq 0, z > 0, Bz = 0 \Longrightarrow B = 0$.

iv) Нека је B позитивна матрица и нека су u и v ненегативни вектори, такви да су елементи вектора u већи од одговарајућих елемената вектора v. Тада су елементи вектора Bu већи од одговарајућих елемената вектора Bv, тј. $B > 0, u > v > 0 \Longrightarrow Bu > Bv$.

Доказ. i) Нека је $A = [a_{ij}]$ матрица и нека је $A_i = (a_{i1}...a_{ij}...a_{in})$ њена i-та врста. Како је $x \geq 0, x \neq 0$ постоји неко j за које је $x_j > 0$. Тада је i-ти елемент од $Ax : A_i x = a_{i1}x_1 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n$. Такође, како је $a_{ij}x_j > 0$ имамо да је $(Ax)_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{ij}x_j + ... + a_{in}x_n \geq a_{ij}x_j > 0$ за свако $i = 1, 2, ..., n$.

ii) Нека је $B = [b_{ij}]$. Нека су $u = (u_i)_i$ и $v = (v_i)_i$. Како је $u \geq v$ имамо да је $u_i \geq v_i$ за свако $i = 1, 2, ..., n$. Тада је $b_{ij}u_i \geq b_{ij}v_i$ што имплицира да је $b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + ... + b_{in}u_n \geq b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{in}v_n$. Одавде имамо да је $(Bu)_i \geq (Bv)_i$ за свако $i = 1, 2, ..., n$, што значи да је $Bu \geq Bv$.

iii) Нека је $B = [b_{ij}]$ и $z = (z_i)_i$. Како је $Bz = 0$, следи да је $(Bz)_i = 0$ за свако i. Знамо да је $(Bz)_i = b_{i1}z_1 + b_{i2}z_2 + ... + b_{in}z_n = 0$, а како су $z > 0$ и $B \geq 0$, мора бити $b_{ij} = 0$ за свако $j = 1, 2, ..., n$. Будући да је $b_{ij} = 0$, следи да је $B = 0$.

iv) Нека је $B = [b_{ij}]$. Нека су $u = (u_i)_i$ и $v = (v_i)_i$. Ако је $B > 0$ онда је $b_{ij} > 0$. Како је $u_i > v_i$ тада имамо $b_{i1}u_1 + b_{i2}u_2 + ... + b_{in}u_n > b_{i1}v_1 + b_{i2}v_2 + ... + b_{in}v_n$, одакле следи да је $Bu > Bv$.

□

1.3 Сопствене вредности матрице

Дефиниција 1.3.1. [1] Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ матрица. Сопствена вредност матрице A је број $\lambda \in \mathbb{C}$ који задовољава једначину $Ax = \lambda x$, где је $x \neq 0$ вектор колона. Вектор колону x називамо сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ.

Дефиниција 1.3.2. Спектар квадратне матрице $A \in M_n(\mathbb{R})$ означен са $\sigma(A)$ представља скуп свих сопствених вредности $\lambda \in \mathbb{C}$ матрице A.

Дефиниција 1.3.3. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ матрица. Скуп свих сопствених вектора који одговарају једној сопственој вредности матрице А, $\lambda \in \sigma(A)$,заједно са нула вектором чини векторски потпростор простора $\mathbb{C}^n$, који називамо сопствени потпростор и означавамо га са

$$V_A(\lambda) := \{x \in \mathbb{C}^n : Ax = \lambda x\}.$$

Димензија сопственог потпростора $V_A(\lambda)$ назива се геометријска вишеструкост сопствене вредности λ и означава се са $d_A(\lambda)$.

Дефиниција 1.3.4. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ матрица. Полином $k_A(\lambda) = det(A - \lambda I)$ назива се сопствени полином матрице A.

Дефиниција 1.3.5. Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ матрица и $\lambda_0 \in \sigma(A)$. Нека је сопствени полином облика

$$k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^l p(\lambda), p(\lambda_0) \neq 0, l \in \mathbb{N}.$$

Број l називамо алгебарском вишеструкошћу сопствене вредности λ_0 и означавамо је са $l_A(\lambda_0)$.

Дефиниција 1.3.6. [3] Нека је $A \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C}), n \in \mathbb{N}$ матрица. Језгро матрице, у ознаци $Ker(A)$, представља потпростор свих решења хомогеног система

$$AX = 0.$$

Скуп свих линеарних комбинација колона матрице A представља слику матрице A и означава се са $Im(A)$. Димензија слике матрице А назива се ранг матрице, тј. $dim(Im(A)) = rang(A)$.

Дефиниција 1.3.7. Квадратна матрица формата $n \times n$ је дијагонална ако је $a_{ij} = 0$ за свако $i \neq j$. Дијагонална матрица, чија је дијагонала $(a_{11}, ..., a_{nn})$, означава се са $diag(a_{11}, ..., a_{nn})$.

Дефиниција 1.3.8. Квадратна матрица формата $n \times n$ је горње (доње) троугаона ако је $a_{ij} = 0$ за свако $i > j$ $(i < j)$.

Дефиниција 1.3.9. Матрица $A \in M_n(\mathbb{C})$ се назива унитарном матрицом ако је $\overline{A}^T A = I$.

Сопствене вредности матрице $A \in M_n(\mathbb{C})$ и њене сличне матрице $B = S^{-1}AS$ су једнаке, што се види из следећег: Узмимо сопствену вредност λ и вектор који јој одговара $x \neq 0$ матрице B, дакле важи $Bx = \lambda x$. Из овога важи да је $S^{-1}ASx = \lambda x$. Дакле, имамо $ASx = \lambda Sx$, односно λ је сопствена вредност матрице A и одговара јој сопствени вектор $Sx \neq 0$. То је разлог зашто желимо да нађемо што једноставнију сличну матрицу B из које бисмо лако могли израчунати сопствене вредности матрице A.

Теорема 1.3.1. [2] Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$ матрица и нека су $\lambda_1, ..., \lambda_n$ њене сопствене вредности. Постоји унитарна матрица U и горње троугаона матрица $T = [t_{ij}]$ тако да важи $A = UTadjU$ и $t_{ii} = \lambda_i, i = 1, ..., n$. Запис $A = UTadjU$ зовемо Шурова декомпозиција матрице A, а матрица T се назива Шурова форма матрице A.

Доказ. Нека је x_1 јединични сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности λ_1. Дакле, $Ax_1 = \lambda_1 x_1$. Нека је $U_1 = \begin{bmatrix} x_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix}$ унитарна матрица чија је прва колона вектор x_1. Сада имамо

$$adjU_1AU_1 = adjU_1 \begin{bmatrix} Ax_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} = adjU_1 \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ u_2^* \\ \vdots \\ u_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1 & Au_2 & \cdots & Au_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 x_1^* x_1 & x_1^* Au_2 & \cdots & x_1^* Au_n \\ \lambda_1 u_2^* x_1 & & & \\ \vdots & & & \\ \lambda_1 u_n^* x_1 & & & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & A_1 \end{bmatrix}$$

Из $det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)det(A_1 - \lambda I_{n-1})$ следи да су $\lambda_2, ..., \lambda_n$ сопствене вредности подматрице $A_1 \in M_n(\mathbb{R})$.
Ако је $n = 2$ дошли смо до тражене декомпозиције.
Ако је $n > 2$ наставимо истим поступком за матрицу A_1. Дакле, нека је x_2 јединични сопствени вектор матрице A_1 који одговара сопственој вредности λ_2.
Одаберимо унитарну матрицу U_2 чија је прва колона вектор x_2 и тада имамо

$$adjU_2A_1U_2 = \begin{bmatrix} \lambda_2 & C \\ 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Нека је $V_2 = \begin{bmatrix} e_1 & U_2 \end{bmatrix}$, где је e_1 вектор који на првом месту има јединицу. Сада рачунамо:

$$adj(U_1V_2)AU_1V_2 = adjV_2adjU_1AU_1V_2 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & D & E \\ 0 & \lambda_2 & F \\ 0 & 0 & A_2 \end{bmatrix}.$$

Наставимо истим поступком, односно дефинисањем унитарних матрица $U_i \in M_{n-i+1}(\mathbb{R}), i = 1, ..., n-1$ и унитарних матрица $V_i \in M_n(\mathbb{R}), i = 2, ..., n-2$. Матрица $U = U_1V_2V_3...V_{n-2}$ је унитарна и матрица $adjUAU$ је горње троугаона са дијагоналним елементима $\lambda_1, ..., \lambda_n$. $\square$

1.4 Норма

Дефиниција 1.4.1. [3] Норма матрице је функција која слика скуп свих комплексних, квадратних матрица у скуп комплексних бројева, $\|*\| : M_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, која задовољава следеће услове:

(i) $\|A\| \geq 0$ за све $A \in M_n$ и $\|A\| = 0 \Longleftrightarrow A = 0$

(ii) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$ за све $\alpha \in \mathbb{C}, A \in M_n$

(iii) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$

(iv) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

Прво својство назива се дефинитност, друго хомогеност, треће неједнакост троугла, а четврто субмултипликативност.

Напомена 1.4.1. За сваку матричну норму $\|\cdot\|$, због субмултипликативности, постоји векторска норма $\|\cdot\|_v$ за коју важи

$$\|Ax\|_v \leq \|A\|\|x\|_v.$$

Најчешће матричне норме су:

1. Матрична 1-норма, тј. максимална сума апсолутних вредности по колонама матрице A
$$\|A\|_1 = \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1.1}$$

2. Матрична 2-норма, тј. спектрална[1] норма
$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(adjAA)}.$$

3. Матрична $\infty-$норма, тј. максимална сума апсолутних вредности по врстама матрице A
$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1.2}$$

4. Матрична Фробенијусова норма
$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}. \tag{1.3}$$

Напомена 1.4.2. Све норме на коначнодимензионалном простору су еквивалентне. Стога, свеједно је коју норму користимо.

1.5 Графови и матрице

Дефиниција 1.5.1. [4] Усмерен граф $G = \{G^0, G^1, r, s\}$ састоји се од коначног скупа чворова, $G^0 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, коначног скупа грана, $G^1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ и пресликавања $r, s : G^1 \longrightarrow G^0$, где је $r(e_i)$ долазни чвор гране e_i, а $s(e_i)$ полазни чвор гране e_i. Пут у G је низ грана код којих је крај једне једнак почетку друге, односно: $e = e_1e_2...e_n : r(e_i) = s(e_{i+1}), \forall 1 \leq i \leq n$ и тада дужину пута означавамо са $|e| = n$. Циклус је пут $e = e_1e_2...e_n$ такав да је $r(e_i) = s(e_i)$. Циклус је прост, ако се, сем првог и последњег чвора, ниједан други чвор не појављује два пута.

[1] Погледати део о спектру 1.6

Дефиниција 1.5.2. [4] Нека је G усмерен граф са скупом чворова $G^0 = \{v_1, v_2, ..., v_m\}$, и скупом грана $G^1 = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$. Тада је матрица инциденције $G(A) = [v_{ij}]$ графа G дата са $v_{ij} = 1$ ако је чвор v_i долазни или полазни чвор гране e_j, у супротном $v_{ij} = 0$.

Лема 1.5.1. [4] Нека је дата матрица $A \geq 0$, $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тада је $(A^k)_{ij} > 0$ ако и само ако постоји пут дужине k од v_i до v_j у $G(A)$.

Доказ. Нека је $A = [a_{ij}]$ и означимо са $a_{ij}^{(k)}$ унос (i, j) у матрици A^k. Тада је

$$a_{ij}^{(k)} = \sum_{h_1,...,h_{k-1}} a_{ih_1} a_{h_1 h_2} ... a_{h_{k-1} j} > 0$$

ако и само ако постоји индексни скуп $\{h_1, ..., h_{k-1}\}$ такав да је $a_{ih_1} > 0, a_{h_1 h_2} > 0, ..., a_{h_{k-1} j} > 0$. Будући да је $a_{st} > 0$, за произвољне s и t, следи да постоји пут дужине 1 од v_s до v_t у $G(A)$. Претходно закључивање је еквивалентно проналажењу пута дужине k од v_i до v_j. Дакле, постоји пут дужине k у $G(A)$ од v_i до v_j ако и само ако је $a_{ij}^{(k)} > 0$. $\square$

1.6 Спектар

Дефиниција 1.6.1. Нека је $A \in M_n(\mathbb{C})$ квадратна матрица. Спектрални радијус матрице A је максимална апсолутна вредност сопствених вредности матрице A, то јест:

$$\rho(A) = max\,\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Теорема 1.6.1. [1] *(Гелфанд)*

$$\rho(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.4}$$

Пропозиција 1.6.1. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ матрица и нека је $\|\cdot\|$ матрична норма на $M_n(\mathbb{R})$. Тада је

$$\rho(A) \leq \|A\|\ .$$

Доказ. Нека је λ нека сопствена вредност матрице A и нека је $x \neq 0$ њој одговарајући сопствени вектор. Нека је $X \in M_n(\mathbb{R})$ матрица која у свакој колони има вектор x. Како важи $Ax = \lambda x$, онда имамо да важи и:

$$AX = \lambda X.$$

Сада имамо

$$|\lambda|\|X\| = \|\lambda X\| = \|AX\| \leq \|A\|\|X\|.$$

Дељењем горњег израза са $\|X\|$ добијамо $|\lambda| \leq \|A\|$. Како је λ произвољна сопствена вредност, важи $\rho(A) \leq \|A\|$. □

Пропозиција 1.6.2. Нека су дати матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ и $\epsilon > 0$. Постоји матрична норма $\|\cdot\|$ за коју важи $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$.

Доказ. Нека је $UAadjU = T$ Шурова декомпозиција матрице A. Дакле, $U \in M_n(\mathbb{C})$ је унитарна, а $T = [t_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ је горње троугаона матрица. Дефинишемо матрицу $D_k := diag(k, k^2, ..., k^n)$ и рачунамо:

$$D_k T D_k^{-1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & k^{-1}t_{12} & k^{-2}t_{13} & \cdots & k^{-(n-1)}t_{1n} \\ 0 & \lambda_2 & k^{-3}t_{23} & \cdots & k^{-(n-2)}t_{2n} \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdots & k^{-(n-3)}t_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & k^{-1}t_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}.$$

За довољно велико k, сума апсолутних вредности свих елемената матрице $D_k T D_k^{-1}$ који се не налазе на дијагонали је мања од ϵ. Односно, важи $\|D_k T D_k^{-1}\|_1 \leq \rho(A) + \epsilon$, за довољно велико k. Дефинишимо норму $\|\cdot\|$ као

$$\|B\| := \|D_k adjUBUD_k^{-1}\|_1 = \|(D_k adjU)B(D_k adjU)^{-1}\|_1$$

за $B \in M_n(\mathbb{R})$. Ако изаберемо довољно велико k, онда смо конструисали матричну норму за коју важи $\|A\| \leq \rho(A) + \epsilon$. □

Пропозиција 1.6.3. [1] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативне матрице такве да је $A \leq B$. Тада важи да је $\rho(A) \leq \rho(B)$.

Доказ. Из $A \leq B$ индукцијом[2] следи да је $A^m \leq B^m$ за све $m \in \mathbb{N}$. Будући да су A и B ненегативне матрице и да је свеједно коју норму узимамо (на основу напомене 1.4.2), у овој неједнакости можемо узети на пример $1-$норму на основу чега важи $\|A^m\|_1 \leq \|B^m\|_1$ за све $m \in \mathbb{N}$.

---

[2](База) Важи да је $A \leq B$.
(Индукцијска хипотеза) Претпоставимо да важи да је $A^n \leq B^n, \forall n \in \mathbb{N}$.
(Индукцијски корак) Желимо да покажемо да тврђење важи за $n+1$. $A^{n+1} = A^n A \leq A^n B \leq B^n B = B^{n+1}$. Прва неједнакост следи на основу базе, а друга на основу индукцијске хипотезе.

Одавде имамо да је $\|A^m\|_1^{\frac{1}{m}} \leq \|B^m\|_1^{\frac{1}{m}}$ за све $m \in \mathbb{N}$. Када пустимо лимес у последњој једнакости, по теореми 1.6.1 добијамо да је $\rho(A) \leq \rho(B)$. □

Теорема 1.6.2. [1] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$. Тада је

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0$$

ако и само ако је $\rho(A) < 1$.

Доказ. Претпоставимо да важи

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\| = 0.$$

Нека је $x \neq 0$, $x \in \mathbb{C}^n$ сопствени вектор такав да је $Ax = \lambda x$. Нека је X матрица која у свакој колони има вектор x. Како важи $Ax = \lambda x$, онда имамо да важи и:

$$AX = \lambda X.$$

Тада важи да је $A^k X = \lambda^k X$, а из овога следи:

$$|\lambda^k| \|X\| = \|A^k X\| \leq \|A^k\| \|X\| \to 0, k \to \infty.$$

Израз $|\lambda^k| \|X\|$ тежи ка 0 ако и само ако је

$$\lim_{k\to\infty} |\lambda^k| = 0.$$

Одавде следи да је $|\lambda| < 1$. Како ова неједнакост важи за сваку сопствену вредност матрице A, закључујемо да је $\rho(A) < 1$.

Супротно, претпоставимо да важи $\rho(A) < 1$. Тада пропозиција 1.6.1 даје матричну норму $\|\cdot\|$ такву да је $\|A\| < 1$. Онда је $\|A^k\| \leq \|A\|^k$ и

$$\lim_{k\to\infty} \|A\|^k = 0.$$

То значи да $A^k \to 0$ када $k \to \infty$ у норми $\|\cdot\|$ (па онда и у свакој другој норми јер су све међусобно еквивалентне на коначнодимензионалном простору). □

Лема 1.6.3. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативна матрица. Тада је $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ и $\rho(A) \leq \|A\|_1$. Ако су суме по свим врстама матрице A једнаке, онда важи да је $\rho(A) = \|A\|_\infty$. Ако су све суме по колонама једнаке, тада је $\rho(A) = \|A\|_1$.

Доказ. Знамо да важи $|\lambda| \leq \rho(A) \leq \|A\|$ за произвољну сопствену вредност λ матрице A и произвољну матричну норму $\|\cdot\|$ (То следи из дефиниције спектралног радијуса и пропозиције 1.6.1).

Ако су суме по свим врстама матрице A једнаке, онда је вектор $e = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности $\lambda = \|A\|_\infty$ па важи $\|A\|_\infty = \lambda \leq \rho(A) \leq \|A\|_\infty$.

Ако су суме по свим колонама матрице A једнаке, понављамо поступак за матрицу A^T. Дакле, тада је вектор $e = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$ сопствени вектор матрице A^T који одговара сопственој вредности $\lambda = \|A^T\|_\infty = \|A\|_1$ па важи: $\|A\|_1 = \lambda \leq \rho(A^T) = \rho(A) \leq \|A\|_1$. $\square$

Теорема 1.6.4. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$ ненегативна матрица. Тада важи:

$$\min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij},$$

$$\min_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Доказ. Уведимо ознаку

$$\alpha = \min_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.$$

Ако је $\alpha = 0$, дефинишемо $B := 0$. Ако је $\alpha > 0$, тада дефинишемо $B = [b_{ij}]$ тако да је

$$b_{ij} := \alpha \frac{a_{ij}}{\sum_{k=1}^{n} a_{i_k}}, i, j = 1, ..., n.$$

Сада имамо $A \geq B \geq 0$ и

$$\alpha = \sum_{j=1}^{n} b_{ij}$$

за све $i = 1, ..., n$. Из леме 1.6.3 добијамо да је $\rho(B) = \alpha$, док из пропозиције 1.6.3 закључујемо да је $\rho(B) \leq \rho(A)$. Дакле, добили смо доњу границу. Горња граница за спектрални радијус следи директно из леме 1.6.3. $\square$

Напомена 1.6.1. Претходна теорема се може уопштити. Наиме, ако дефинишемо дијагоналну матрицу $S = diag(x_1, ..., x_n) \geq 0$, тада матрице $S^{-1}AS = [a_{ij}x_i^{-1}x_j] \geq 0$ и $A \geq 0$ имају једнаке спектралне радијусе, $\rho(S^{-1}AS) = \rho(A)$.

Када уврстимо матрицу $S^{-1}AS$ у теорему 1.6.4 добијамо нове границе за спектрални радијус:

$$\min_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,$$

$$\min_{1\leq j\leq n}\frac{1}{x_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq j\leq n}\frac{1}{x_j}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i.$$

Пропозиција 1.6.4. Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативна матрица и нека је $x \in \mathbb{R}^n$ позитиван реалан вектор. Ако $\exists \alpha, \beta \geq 0$ реални бројеви такви да важи да је $\alpha x \leq Ax \leq \beta x$, онда је $\alpha \leq \rho(A) \leq \beta$.
Додатно, важе и следеће импликације: За свако $\alpha > 0$ за које вежи да је $\alpha x < Ax$ следи да је $\alpha < \rho(A)$ и за свако $\beta > 0$ за које важи да је $Ax < \beta x$ следи да је $\rho(A) < \beta$.

Доказ. Ако је $\alpha x \leq Ax$, тада имамо да је $\alpha x_i \leq (Ax)_i$ и

$$\alpha \leq \min_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j.$$

Тада, на основу напомене 1.6.1, имамо да је $\alpha \leq \rho(A)$.

Ако је $Ax \leq \beta x$, тада имамо да је $(Ax)_i \leq \beta x_i$ и

$$\max_{1\leq i\leq n}\frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j \leq \beta.$$

Тада, на основу напомене 1.6.1, имамо да је $\rho(A) \leq \beta$.

Ако важи да је $\alpha x < Ax$, онда $\exists \alpha' > \alpha$ такво да је $\alpha x < \alpha' x \leq Ax$ па на основу првог дела доказа следи да је $\rho(A) \geq \alpha' > \alpha$. Ако важи да је $\beta x > Ax$ онда $\exists \beta' < \beta$ такво да је $\beta x > \beta' x \geq Ax$ па на основу претходног дела доказа следи да је $\beta > \beta' \geq \rho(A)$. $\square$

Глава 2

Перон-Фробенијусова теорема за позитивне матрице

2.1 Collatz-Wielandt формула

Напомена 2.1.1. Уводимо ознаку $[A]_i$ која означава $i-$ту врсту матрице A.

Теорема 2.1.1. [2]*(Collatz-Wielandt)* Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативна матрица. Ако матрица A има позитивне сопствене векторе, онда важе следеће једнакости:

$$\rho(A) = \max_{x>0} \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

$$\rho(A) = \min_{x>0} \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j,$$

где је

$$x \in \{z \in \mathbb{R}^n | z \geq 0, z \neq 0\}.$$

Доказ. Уведимо следеће ознаке:

$$f(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i}$$

и

$$g(x) = \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[Ax]_i}{x_i}.$$

Из напомене 1.6.1 следи

$$f(x) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq \rho(A) \leq \max_{1\leq i\leq n} \frac{1}{x_i}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = g(x)$$

за сваки позитиван вектор x. Из овога следи да је

$$\max_{x>0} f(x) \leq \rho(A) \leq \min_{x>0} g(x).$$

Нека је v дат сопствени вектор матрице A који одговара сопственој вредности $\lambda = \rho(A)$. Рачунамо:

$$f(v) = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[Av]_i}{v_i} = \min_{1\leq i\leq n} \frac{[\lambda v]_i}{v_i} = \lambda \min_{1\leq i\leq n} \frac{v_i}{v_i} = \lambda,$$

$$g(v) = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[Av]_i}{v_i} = \max_{1\leq i\leq n} \frac{[\lambda v]_i}{v_i} = \lambda \max_{1\leq i\leq n} \frac{v_i}{v_i} = \lambda.$$

Добили смо да важи

$$\lambda = f(v) \leq \rho(A) \leq g(v) = \lambda.$$

То значи да се у v постиже максимална, односно минимална вредност за функције $f(x)$ односно $g(x)$. Дакле, важе $Collatz - Wielandtove$ формуле за спектрални радијус. $\square$

2.2 Помоћне леме

Лема 2.2.1. [1] Нека је $A \in M_n(\mathbb{C}), A > 0$ матрица и нека су $x, y \in \mathbb{R}^n$ два различита вектора таква да важи $x \geq y$. Тада је $Ax > Ay$ и постоји $\epsilon > 0$ такво да је $Ax > (1+\epsilon)Ay$.

Доказ. Почнимо са доказом прве неједнакости тако што пребацимо Ay на леву страну:

$$[Ax - Ay]_i = [A(x-y)]_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - y_j).$$

Треба доказати да је горњи израз позитиван. То ћемо урадити тако што ћемо оценити произвољан елемент вектор колоне $A(x-y)$:

$$[Ax - Ay]_i \geq \sum_{j=1}^{n} \min_{i,j}(a_{ij})(x_j - y_j) = \min_{i,j}(a_{ij}) \sum_{j=1}^{n}(x_j - y_j) > 0.$$

Последњи израз је позитиван због позитивности матрице A ($a_{ij} > 0, \forall i, j = 1, ..., n$) и због $x \neq y$ и $x \geq y$ ($x_j - y_j > 0$, за неко $j = 1, ..., n$). То доказује прво тврђење леме.
Ако променимо вектор $A(x-y)$ за неку малу вредност, тада ће тај вектор и даље бити позитиван. Односно, имамо да постоји $\epsilon > 0$ такво да је $A(x-y) - \epsilon Ay > 0$. Дакле, важи $Ax > (1+\epsilon)Ay$, а тиме смо доказали и друго тврђење леме. □

Лема 2.2.2. [1] Ако су $z_1, z_2, ..., z_n \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ такви да је $|z_1 + z_2 + ... + z_n| = |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|$, онда постоји $\nu \in \mathbb{R}$ тако да је $e^{i\nu} z_j > 0, j = 1, ..., n$.

Доказ. Докажимо прво да за свако $z \in \mathbb{C}$ постоји $\theta \in \mathbb{R}$ тако да је $e^{-i\theta} z = |z|$. Ако је $z \neq 0$, тада узмемо да је $\theta = arg(z)$. Ако је $z = 0$, за θ можемо узети било који реалан број. Сада можемо узети $\theta \in \mathbb{R}$ тако да важи $e^{-i\theta}(z_1 + ... + z_n) = |z_1 + ... + z_n|$. Следи:

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2 + ... + z_n| &= Re(|z_1 + z_2 + ... + z_n|) \\ &= Re(e^{-i\theta}(z_1 + ... + z_n)) \\ &= Re(e^{-i\theta} z_1) + Re(e^{-i\theta} z_2) + ... + Re(e^{-i\theta} z_n) \\ &\leq |e^{-i\theta} z_1| + |e^{-i\theta} z_2| + ... + |e^{-i\theta} z_n| \\ &= |z_1| + |z_2| + ... + |z_n|. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Према претпоставци леме, у горњем распису важи једнакост. Дакле, важи $Re(e^{-i\theta} z_k) = |e^{-i\theta} z_k|, \forall k = 1, ..., n$. Из овога следи $z_k = e^{i\theta}|z_k|, \forall k = 1, ..., n$. На крају узмимо $\nu = -\theta$ и то је тражени број који задовољава тврђење леме. □

Лема 2.2.3. [1] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R}), A > 0$ матрица, $x \in \mathbb{C}^n$ вектор и x_j његова произвољна координата. Ако важи

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|x_j| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_j|,$$

онда постоји реалан број $\nu \neq 0$ тако да важи $e^{i\nu} x \geq 0$.

Доказ. Применимо претходну лему на координате $a_{ij} x_j$, $\forall i = 1, ..., n$. Добијамо да постоји $\nu \in \mathbb{R}$ такав да је $e^{i\nu} a_{ij} x_j > 0$, $\forall i = 1, ..., n$. Знамо да је $a_{ij} > 0, \forall i = 1, ..., n$ ($A > 0$) па мора да важи $e^{i\nu} x_j > 0$. Како је x_j произвољна координата вектора x следи да је тврђење тачно. □

2.3 Перон-Фробенијусова теорема

Теорема 2.3.1. [1] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ позитивна матрица. Тада важе следећа тврђења:

i) $\rho(A) > 0$,

ii) $\rho(A)$ је сопствена вредност матрице A и њој одговара позитиван сопствени вектор,

iii) $\rho(A)$ је јединствена сопствена вредност матрице A на кружници $|\lambda| = \rho(A)$,

iv) $\rho(A)$ има геометријску вишеструкост 1,

v) $\rho(A)$ има алгебарску вишеструкост 1.

Доказ. i) Применимо теорему 1.6.4 на позитивну матрицу A и добијамо:

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A).$$

ii) Доказујемо да постоји $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A којој одговара позитиван сопствени вектор.
Из дефиниције спектралног радијуса знамо да постоји сопствена вредност $\lambda \in \mathbb{C}$ матрице A и то таква да важи $|\lambda| = \rho(A)$. Нека је $x \in \mathbb{C}^n$ неки њој одговарајући сопствени вектор. Дефинишимо вектор p тако да важи $p_j = |x_j|, j = 1, ..., n$. Сада имамо:

$$(Ap)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}|x_j| \geq |\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j| = |(Ax)_i| = |\lambda x_i| = \rho(A)p_i, \tag{2.2}$$

$i = 1, ..., n$. Прва неједнакост следи из неједнакости троугла и чињенице да је A позитивна матрица ($A > 0 \Rightarrow A = |A|$), тј.

$$\begin{aligned}[|A|]_i|x| &= |a_{i1}||x_1| + |a_{i2}||x_2| + ... + |a_{in}||x_n| \\ &\geq |a_{i1}x_1| + |a_{i2}x_2| + ... + |a_{in}x_n| \\ &\geq |a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + ... + a_{in}x_n| \\ &= |(Ax)_i|.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Једнакост $|(Ax)_i| = |\lambda x_i|$ важи јер смо λ бирали као сопствену вредност матрице A којој одговара сопствени вектор x.

Одавде следи да је $A|x| \geq \rho(A)|x|$. Ако овде имамо једнакост, онда је доказ готов јер је тада $p = |x|$ тражени позитиван сопствени вектор.
Нека је $z = A|x|$. На основу првог дела пропозиције 1.2.1 знамо да је $z > 0$. Како је $z = A|x| \geq \rho(A)|x|$ имамо да је $y = z - \rho(A)|x| \geq 0$. Ако би у $A|x| \geq \rho(A)|x|$ важила строга неједнакост, вектор y би био позитиван, па бисмо на основу првог дела пропозиције 1.2.1 имали следеће:

$$0 < Ay = A(z - \rho(A)|x|) = Az - \rho(A)A|x| = Az - \rho(A)z,$$

одакле следи да је

$$Az > \rho(A)z.$$

Како је $\rho(A) > 0$, на основу пропозиције 1.6.4 имамо да је $\rho(A) > \rho(A)$, што је немогуће. Дакле, мора да важи $A|x| = \rho(A)|x|$, односно $p = |x| = x$. Закључујемо да је p такође сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\rho(A)$.

Он није само ненегативан (тако смо га дефинисали), него је и позитиван јер важи $p \neq 0$ и $p \geq 0$ па можемо користити лему 2.2.1 која нам даје да је $Ap > 0$. Како важи $Ap = \rho(A)p$, онда важи и да је $\rho(A)p > 0$. Из $\rho(A) > 0$ добијамо да је $p > 0$.

iii) Доказујемо да је $\rho(A)$ једина сопствена вредност матрице A на кружници $|\lambda| = \rho(A)$.
Претпоставимо супротно, односно да постоји још једна сопствена вредност δ на кружници $|\lambda| = \rho(A)$ ($\delta \neq \rho(A)$). Нека је $x \in \mathbb{C}^n$ неки њој одговарајући сопствени вектор. Дефинишимо вектор p тако да важи $p_j = |x_j|, j = 1, ..., n$. У претходном делу доказа смо показали да тада важи да је $Ap = \rho(A)p$ као и[1]

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}|x_j| = |\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j|, \ \forall 1 \leq j \leq n.$$

Како важе услови леме 2.2.3 следи да постоји $c \in \mathbb{C}$ ($c \neq 0$) такво да је $cx \geq 0$. То значи да важи:

$$\delta(cx) = c(\delta x) = c(Ax) = A(cx) \geq 0,$$

[1] Погледати неједнакост 2.2.

где друга једнакост важи јер смо δ бирали као сопствену вредност матрице A којој одговара сопствени вектор x, а крајња неједнакост важи због позитивности матрице A и чињенице да је $cx \geq 0$.
Дакле, имамо да је $\delta(cx) \geq 0$ из чега следи да је $\delta \geq 0$. Ово је контрадикција, будући да је $\rho(A)$ једини ненегативан број на кружници $|\lambda| = \rho(A)$.

iv) Претпоставимо да је x позитиван сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\rho(A)$ матрице A. Претпоставимо да постоји и још један сопствени вектор y који је линеарно независан са x и који такође одговара сопственој вредности $\rho(A)$.

Можемо претпоставити да је y реалан. У супротном, ако је y комплексан, можемо посматрати његов реалан и имагинаран део који су такође сопствени вектори матрице A јер су и A и $\rho(A)$ реални. Један од та два дела мора бити линеарно независан са x.

Нека је $c > 0$ такво да је вектор $x - cy$ ненегативан и тако да се барем на једној координати појављује 0. То није нула вектор јер су x и y линеарно независни. Како су оба вектора сопствени вектори који одговарају истој сопственој вредности $\rho(A)$ имамо да је:

$$A(x - cy) = Ax - cAy = \rho(A)x - c\rho(A)y = \rho(A)(x - cy).$$

Дакле, важи да је вектор $x - cy$ сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\rho(A)$.

На основу првог дела доказа закључујемо да тај вектор мора бити позитиван. Тиме смо дошли у контрадикцију са избором броја c, будући да $x - cy$ мора имати бар једну координату једнаку 0.

Дакле, закључујемо да не постоје два линеарно независна вектора сопствене вредности $\rho(A)$, а тиме и да $\rho(A)$ има геометријску вишеструкост 1.

v) Као и до сада, нека је x сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\rho(A)$. На основу до сада доказаног знамо да постоји само један позитиван сопствени вектор који одговара сопственој вредности $\rho(A)$ такав да важи $x_1 + x_2 + ... + x_n = 1$.

Посматрајмо матрицу A^T. Она је позитивна будући да је матрица A позитивна. Такође, оне имају исте сопствене вредности па тиме и исти спектрални радијус ($\rho(A) = \rho(A^T)$). Нека је v сопствени вектор матрице A^T који одговара сопственој вредности $\rho(A)$. Вектор v, на основу првог дела доказа, можемо скалирати тако да буде позитиван.

Према томе, дефинишимо сопствени вектор y матрице A^T на следећи начин:

$$y := \frac{v}{v^T x}.$$

Дакле, важи да је $A^T y = \rho(A)y$ и да вектор y^T задовољава следећу једнакост:

$$y^T A = \rho(A)y^T.$$

Овај пар сопствених вектора (x, y) даје нам декомпозицију простора $\mathbb{R}^n$ на директну суму.

Заиста, уочимо прво $(n-1)-$димензионални ортогонални комплемент вектора y у односу на скаларни производ на $\mathbb{R}^n : \Pi^\perp := \{z \in \mathbb{R}^n : y^T z = 0\}$. Он је инваријантан за A, што се лако види:
Нека је $z \in \Pi^\perp$ и сада имамо

$$y^T Az = (y^T A)z = \rho(A)y^T z = 0.$$

Имамо да важи да $x \notin \Pi^\perp$ јер је $yx = y^T x > 0$ (јер су вектори x и y позитивни). Тиме смо доказали да је $span\{x\} \cap \Pi^\perp = \{0\}$, што заједно са чињеницом да је $\Pi^\perp$ простор димензије $n-1$ даје да је $\mathbb{R}^n$ директна сума од $span\{x\}$ и $\Pi^\perp$.

Желимо да пронађемо што једноставнију матрицу помоћу које бисмо лако могли да трансформишемо матрицу A. Нека је $\{x_2, ..., x_n\}$ база простора $\Pi^\perp$. Тада је $\{x, x_2, ..., x_n\}$ база простора $\mathbb{R}^n$. Дефинишимо матрицу

$$B = \begin{bmatrix} x & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}.$$

Она је регуларна, па можемо одредити облик њеног инверза:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix} = I_n = B^{-1}B = \begin{bmatrix} \gamma^T \\ \Gamma^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^T x & \gamma^T X \\ \Gamma^T x & \Gamma^T X \end{bmatrix}.$$

Одавде добијамо следеће идентитете:

$$\gamma^T x = 1,\ \gamma^T X = 0,\ \Gamma^T x = 0,\ \Gamma^T X = I_{n-1}.$$

Можемо узети да је $\gamma = y$ јер он задовољава прва два идентитета. Овавком матрицом можемо матрицу A трансформисати у блок дијагоналну матрицу:

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} y^T \\ \Gamma^T \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} x & X \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^T Ax & y^T AX \\ \Gamma^T Ax & \Gamma^T AX \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y^T \rho(A)x & y^T \rho(A)X \\ \Gamma^T \rho(A)x & \Gamma^T AX \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix},$$

за неку произвољну матрицу $C \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

Матрица $B^{-1}AB$ је слична матрици A па оне имају исте сопствене вредности. Претпоставимо да $\rho(A)$ има алгебарску вишеструкост већу од 1. Тада $\rho(A)$ мора бити и сопствена вредност матрице C. Али тада C мора имати сопствени вектор који одговара сопсвеној вредности $\rho(A)$.

Ако је s сопствени вектор матрице C који одговара сопственој вредности $\rho(A)$, онда је $Cs = \rho(A)s$, па имамо да је:

$$B^{-1}AB \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Cs \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho(A)s \end{bmatrix} = \rho(A) \begin{bmatrix} 0 \\ s \end{bmatrix}.$$

Но, такође имамо

$$B^{-1}AB \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(A) \\ 0_{n-1} \end{bmatrix} = \rho(A) \begin{bmatrix} 1 \\ 0_{n-1} \end{bmatrix},$$

где 0_{n-1} представља вектор колону димензије $n-1\times 1$ чији су сви елементи нуле.

Дакле, имамо два независна сопствена вектора за $\rho(A)$, па $\rho(A)$ има геометријску вишеструкост $d_A(\rho(A)) \geq 2$. Тиме долазимо у контрадикцију са претходним делом доказа. Дакле, $\rho(A)$ има алгебарску вишеструкост 1.

$\square$

Напомена 2.3.1. Вектори x и y, из последњег дела доказа претходне теореме, називају се редом десни и леви Перонов вектор. То су јединствени вектори за које важи:

$$Ax = \rho(A)x, \;\; x_1 + ... + x_n = 1, \; x > 0,$$

$$y^T A = \rho(A)y^T, \;\; x_1y_1 + ... + x_ny_n = 1, \;\; y > 0.$$

Јединственост Перонових вектора за произвољну матрицу следи из теореме 2.3.1. У наставку размотримо шта још можемо закључити из претходног доказа.

Вратимо се на последњи део доказа где смо матрицу A транформисали у блок дијагоналну матрицу. Дакле,

$$B^{-1}AB = \begin{bmatrix} \rho(A) & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

Доказали смо да је $\rho(A)$ сопствена вредност чија је алгебарска вишеструкост 1 и да је она строго највећа. Сада закључујемо да је $\rho(C) < \rho(A)$, а из тога следи $\rho(\rho(A)^{-1}C) < 1$. Користећи теорему 1.6.2, како је $\rho(\rho(A)^{-1}C) < 1$, имамо да $(\rho(A)^{-1}C)^m \to O_{n-1}, \;\; m \to \infty$ (Јер је $\rho(A)^{-1}C$ матрица формата $n-1 \times n-1$.). То јест, имамо следеће:

$$(\frac{A}{\rho(A)})^m = B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (\rho(A)^{-1}C)^m \end{bmatrix} B^{-1} \longrightarrow B \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0_{n-1} \end{bmatrix} B^{-1} = xy^T, m \longrightarrow \infty.$$

Ово својство нам је битно јер се често јавља у разним применама. Запишимо доказано тврђење у облику теореме.

Теорема 2.3.2. [2] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ позитивна матрица. Ако су x и y десни и леви Перонов вектор матрице A, онда је

$$\lim_{m \to \infty} (\rho(A)^{-1}A)^m = xy^T.$$

Напомена 2.3.2. За други део Перонове теореме може се доказати и обрнуто тврђење, уз проширење да је матрица A ненегативна, које гласи: Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативна матрица. Ако је x позитиван сопствени вектор матрице A, онда је $\rho(A)$ сопствена вредност матрице A и одговара јој сопствени вектор x.

Доказ. Ако је $x > 0$ и $Ax = \lambda x$, важи да је $\lambda \geq 0$ и једнакост можемо записати као

$$\lambda x \leq Ax \leq \lambda x.$$

Из неједнакости $\lambda x \leq Ax$ следи да је $\lambda x_i \leq [Ax]_i$, $i = 1, ..., n$, а из овога следи да је

$$\lambda \leq \min_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{x_i} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j.$$

Напомена 1.6.1 нам даје да је $\lambda \leq \rho(A)$. Аналогно се доказује да је $\rho(A) \leq \lambda$, па имамо следећу неједнакост:

$$\lambda \leq \rho(A) \leq \lambda.$$

Дакле, доказали смо да је $\lambda = \rho(A)$. $\square$

Глава 3

Перон-Фробенијусова теорема за ненегативне матрице

3.1 Ненегативни сопствени парови

Чињеница које се треба присетити о спектралном радијусу јесте Гелфандова теорема, $\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}$ [2], и њу ћемо користити да докажемо наредну лему.

Лема 3.1.1. [2] Нека су $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ матрице. Ако је $|A| \leq B$ онда је $\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B)$, где је $|A|$ матрица са елементима $|a_{ij}|$.

Доказ. Користећи неједнакост троугла добијамо $|A^k| \leq |A|^k$, за сваки цео број k. Затим, из $|A| \leq B$ следи $|A|^k \leq B^k$. Тада имамо: $\|A^k\|_\infty = \||A^k|\|_\infty \leq \||A|^k\|_\infty \leq \|B^k\|_\infty$. Тада је,

$$\|A^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \||A|^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \|B^k\|_\infty^{\frac{1}{k}},$$

$$\lim_{k\to\infty} \|A^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to\infty} \||A|^k\|_\infty^{\frac{1}{k}} \leq \lim_{k\to\infty} \|B^k\|_\infty^{\frac{1}{k}},$$

$$\rho(A) \leq \rho(|A|) \leq \rho(B).$$

□

У наставку, прикажимо још један доказ $Collatz - Wielandt$ формуле.

Теорема 3.1.2. [2] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R}), n \in \mathbb{N}$, $A \geq 0$ матрица и нека је $r = \rho(A)$. Следећа тврђења су тачна:

(i) $r \in \sigma(A)$, али могуће је и $r = 0$

(ii) $Az = rz$ за неко $z \in \mathcal{N} = \{x \in \mathbb{R}^n | x \geq 0, x \neq 0\}$

(iii)

$$r = \max_{x \in \mathcal{N}} f(x),$$

где је

$$f(x) = \min_{1 \leq i \leq n, x_i \neq 0} \frac{[Ax]_i}{x_i}.$$

Доказ. Нека је $A_k = A + (\frac{1}{k})I > 0$, где је I матрица која садржи све 1 и $k = 1, 2, ..., n$. Тада је $A_k > 0$, на основу тога што је $A \geq 0$, $k > 0$ и $I > 0$. Нека су $r_k > 0$ и $p_k > 0$ Перон-Фробенијусова сопствена вредност и Перон-Фробенијусов сопствени вектор матрице A_k, редом. Знамо да је $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничен јер је

$$\{p_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 = 1\}.$$

Болцано-Вајерштрасова теорема тврди да сваки ограничен низ има конвергентан подниз. Дакле, како је $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничен, постоји његов конвергентан подниз и нека је z из $\mathbb{R}^n$ његова граница. Имамо да $\{p_{k_i}\}_{i=1}^{\infty} \longrightarrow z$ за неки растући низ k_i где је $z \geq 0$ и $z \neq 0$, пошто је $p_{k_i} > 0$ и

$$\|p_{k_i}\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |p_{k_i}| = 1.$$

Стога, како је $A_1 > A_2 > ... > A$ на основу леме 3.1.1 јасно је да је $r_1 \geq r_2 \geq ... \geq r$, па је $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ опадајући низ позитивних бројева, одоздо ограничен са r. Другим речима,

$$\lim_{k \to \infty} r_k = r^*$$

постоји и $r^* \geq r$. Посебно

$$\lim_{i \to \infty} r_{k_i} = r^*.$$

Али, из дефиниције A_k имамо да

$$\lim_{k \to \infty} A_k = A$$

одакле следи

$$\lim_{i \to \infty} A_{k_i} = A,$$

па је такође тачно и да је:

$$\begin{aligned}
Az &= \lim_{i\to\infty} A_{k_i} \lim_{i\to\infty} p_{k_i} \\
&= \lim_{i\to\infty} A_{k_i} p_{k_i} \\
&= \lim_{i\to\infty} r_{k_i} p_{k_i} \\
&= \lim_{i\to\infty} r_{k_i} \lim_{i\to\infty} p_{k_i} \\
&= r^* z.
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Како је $Az = r^* z$, имамо да $r^* \in \sigma(A)$ и, такође, $r^* \geq r$. Будући да је $r = \rho(A)$, знамо да ће r^* увек бити не већи од r јер је то максимална сопствена вредност, па је $r^* = r$.

Нека је q_k^T леви Перон-Фробенијусов сопствени вектор матрице A_k. Знамо да за свако $x \in \mathcal{N}$ и $k > 0$ имамо да је $q_k^T > 0$. Тада следи да је $0 \leq f(x)x \leq Ax \leq A_k x$. Затим, како је $f(x)x \leq A_k x$ имамо да је

$$q_k^T[f(x)x] \leq q_k^T(A_k x),$$

$$f(x)q_k^T x \leq (q_k^T A_k)x,$$

$$f(x)q_k^T x \leq r_k q_k^T x,$$

$$f(x) \leq r_k.$$

Како $r_k \longrightarrow r^* = r$ имамо да је $f(x) \leq r$. Будући да је $f(z) = r$ и $z \in \mathcal{N}$, директно следи да је

$$\max_{x\in\mathcal{N}} f(x) = r.$$

Дакле, $Collatz - Wieldant$ формула је задовољена. $\square$

Након што је Перон објавио своју теорему, Фробенијус ју је проширио на одређену класу ненегативних матрица и тиме се добило мноштво нових примена, будући да се врло често у применама појављују нуле у матрицама. Прва таква класа матрица које ћемо обрадити су несводљиве матрице.

3.2 Несводљивост ненегативних матрица

Дефиниција 3.2.1. Матрица пермутације представља квадратну матрицу која има тачно један ненула елемент у свакој врсти и свакој колони, а на свим осталим местима су нуле.

Дефиниција 3.2.2. [2] Кажемо да је квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ сводљива ако постоји матрица пермутације $P \in M_n(\mathbb{R})$ таква да је,

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},\ B \in M_r(\mathbb{R}),\ D \in M_{n-r}(\mathbb{R}),\ 1 \leq r \leq n-1.$$

У супротном, A је несводљива матрица.

Дефиниција 3.2.3. [2] Ненегативна квадратна матрица

$$A \in M_n(\mathbb{R})$$

назива се примитивном ако постоји цео број k такав да је A^k позитивна матрица.

Пропозиција 3.2.1. Свака примитивна матрица је несводљива.

Занимљиву и врло корисну аналогију са матрицама можемо пронаћи у теорији графова, поготово када је реч о несводљивим матрицама. Она ће нам бити корисна у применама, као и за доказ главне теореме. Граф $G(A)$ матрице $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ дефинишемо као усмерен граф са n чворова $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$, где постоји усмерена грана од чвора v_i до чвора v_j ако и само ако је $a_{ij} \neq 0$. Такође важи да је $G(P^T AP) = G(A)$ за произвољну матрицу пермутације P јер је у питању само измена ознака чворова. Усмерен граф $G(A)$ је јако повезан ако за свака два чвора v_i и v_j постоји пут који води од v_i до v_j, односно постоји низ различитих чворова $\{v_i, v_k, ..., v_j\}$ таквих да су свака два суседна чвора у том низу повезана усмереном граном.

Теорема 3.2.1. [4] Квадратна матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ је несводљива ако и само ако је граф $G(A)$ јако повезан.

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење: Матрица A је сводљива ако и само ако граф $G(A)$ није јако повезан.

Претпоставимо да је $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ сводљива матрица. Тада, по дефиницији, постоји матрица пермутације $P \in M_n(\mathbb{R})$ таква да важи

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},\ B \in M_r(\mathbb{R}),\ D \in M_{n-r}(\mathbb{R}),\ 1 \leq r \leq n-1.$$

Како важи $G(P^T AP) = G(A)$, можемо посматрати граф матрице $P^T AP$. Означимо чворове графа у складу са том матрицом. Уочимо да из скупа чворова $V_2 = \{v_{r+1}, ..., v_n\}$ не постоје директне усмерене гране према чворовима из скупа $V_1 = \{v_1, ..., v_r\}$, јер је $a_{ij} = 0$ за $r+1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq r$.

Наравно, скупови V_1 и V_2 су непразни јер је $1 \leq r \leq n-1$. Узмимо чвор $v_i \in V_2$ и чвор $v_j \in V_1$. Из чвора v_i можемо доћи само у чворове из скупа V_2 и ниједан чвор из V_2 нема грану усмерену према чвору из V_1, па ни из чвора v_i нема пут који води до v_j.

Дакле, нашли смо два чвора између којих не постоји пут, па по дефиницији граф $G(A)$ није јако повезан.

Обратно, претпоставимо да граф $G(A)$ није јако повезан. Тада постоје чворови v_p и v_q између којих не постоји пут.

Дефинишимо скуп чворова $V_1 = \{v_i : v_i = v_q$ или постоји пут у $G(A)$ од v_i до $v_q\}$ и нека је V_2 скуп свих чворова графа $G(A)$ који нису у V_1. Према томе како смо дефинисали скупове важи да је $V_1 \cup V_2 = \{v_1, ..., v_n\}$. Имамо да је $v_q \in V_1$ и да $v_p \in V_2$, па следи да су V_1 и V_2 непразни скупови.

Ако би постојао пут од неког чвора $v_i \in V_2$ до неког чвора $v_j \in V_1$, тада би по дефиницији скупа V_1 постојао пут од v_i до v_q, па би $v_i \in V_1$, а то није могуће. Због тога не постоје путеви из скупа V_2 до скупа V_1.

Означимо чворове на следећи начин: $V_1 = \{\overline{v_1}, ..., \overline{v_r}\}$, $V_2 = \{\overline{v_{r+1}}, ..., \overline{v_n}\}$.

Нека је P матрица пермутације која се слаже са новим ознакама чворова. Тако добијамо да је

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix},\ B \in M_r,\ D \in M_{n-r},$$

односно, да је матрица A сводљива, што је и требало доказати. $\square$

Напомена 3.2.1. Сада када имамо аналогију матрица са теоријом графова, врло је лако видети да су примитивне матрице уједно и несводљиве. Наиме, ако је $A \in M_n(\mathbb{R})$ примитивна матрица, тада постоји $m > 0$ такав да је $A^m > 0$, а то управо значи да се у матрици A од сваког чвора до сваког другог може доћи путем који има тачно или мање од m корака. Сада је јасно да је матрица A несводљива према карактеризацији несводљивости преко јаке повезаности графова.

Наведимо још једну карактеризацију несводљивости, али сада за ненегативне матрице.

Пропозиција 3.2.2. Ненегативна матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ је несводљива ако и само ако је $(I + A)^{n-1} > 0$

Доказ. Доказаћемо еквивалентно тврђење: A је сводљива ако и само ако матрица $(I + A)^{n-1}$ садржи барем једну нулу.

Претпоставимо да је A сводљива матрица и да за неку матрицу пермутације P имамо да је

$$P^T AP = \begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \tilde{A},\ B \in M_r,\ D \in M_{n-r},\ 1 \leq r \leq n-1$$

Уочимо да матрице $\tilde{A}^2, \tilde{A}^3, ..., \tilde{A}^{n-1}$ имају нуле у доњем левом $(n-r) \times r$ блоку. Распишимо:

$$\begin{aligned} P^T(I + A)^{n-1}P &= P^T(I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}A^2 + ... + A^{n-1})P \\ &= P^T P + (n-1)P^T AP + \binom{n-1}{2}P^T A^2 P + ... + P^T A^{n-1}P \\ &= I + (n-1)\tilde{A} + \binom{n-1}{2}\tilde{A}^2 + ... + \tilde{A}^{n-1}. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Приметимо да сваки сабирак има нуле у доњем левом $(n-r) \times r$ блоку. Из тога закључујемо да је матрица $(I + A)^{n-1}$ сводљива, а тиме и да има барем једну координату једнаку нули.

Претпоставимо да за индексе p, q матрица $(I+A)^{n-1}$ на месту (p, q) има нулу. Имамо да је

$$(I+A)^{n-1} = I + (n-1)A + \binom{n-1}{2}A^2 + ... + A^{n-1}.$$

Уочимо да су сви сабирци ненегативни, јер је A ненегативна матрица, па сваки сабирак на месту (p, q) има нулу.

Због тога што је један сабирак матрица I важи да је $p \neq q$. Сада закључујемо да у графу $G(A)$ не постоји пут од чвора v_p до чвора v_q, јер је $a_{pq} = 0$. То по дефиницији значи да граф $G(A)$ није јако повезан, па је на основу теореме 3.2.1 матрица A сводљива. □

Напомена 3.2.2. За произвољну ненегативну матрицу A не мора да важи да је спектрални радијус позитиван. Такође, сопствени вектор може садржати нуле и геометријска и алгебарска вишеструкост од $\rho(A)$ може бити већа од 1.

Лема 3.2.2. Нека су $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ сопствене вредности од $A \in M_n(\mathbb{R})$ којима одговарају сопствени вектори $x_1, ..., x_n$, редом. Тада су $\lambda_1+1, ..., \lambda_n+1$ сопствене вредности од $I + A$ и важи $\rho(I + A) \leq \rho(A) + 1$. Ако је A ненегативна матрица, тада важи једнакост.

Доказ. Расписујемо:

$$(I + A)x_k = x_k + Ax_k = x_k + \lambda_k x_k = (1 + \lambda_k)x_k.$$

Одавде следи да је $1+\lambda_k$ сопствена вредност матрице $I+A$ за све $k = 1, 2, ..., n$. Даље имамо да је

$$\begin{aligned} \rho(I + A) &= \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k + 1| \\ &\leq \max_{1\leq k\leq n} |\lambda_k| + 1 \\ &= \rho(A) + 1. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Задње тврђење следи из теореме 3.1.2. Наиме, како је A ненегативна матрица, тада је $\rho(A)$ сопствена вредност од A па је, по горе доказаном, $\rho(A)+1$ сопствена вредност матрице $I + A$. Користећи доказану неједнакост и чињеницу да ова сопствена вредност не сме бити већа од спектралног радијуса добијамо да је $\rho(I + A) = \rho(A) + 1$. □

Теорема 3.2.3. (Перон-Фробенијус) [2] Нека је $n \geq 2$ и $A \in M_n(\mathbb{R})$ несводљива и ненегативна матрица. Тада је

(i) $\rho(A) > 0$,

(ii) $\rho(A)$ има алгебарску вишеструкост 1,

(iii) Постоји јединствен десни Перонов вектор,

(iv) Постоји јединствен леви Перонов вектор.

Доказ. (i) Уочимо да матрица A нема ниједну врсту или колону чији су сви елементи нуле јер је она несводљива. У супротном, ако би A имала на пример једну врсту у којој су сви елементи 0 (нека је то, без умањења општости, n-та врста) тада из чвора v_n графа $G(A)$ не бисмо могли доћи ни до једног другог чвора. Због тога граф $G(A)$ не би био јако повезан, а то је контрадикција са теоремом 3.2.1. Дакле, важи

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} > 0$$

за све $i = 1, ..., n$. Из теореме 1.6.4 имамо да важи

$$0 < \min_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq \rho(A).$$

(ii) Претпоставимо да $\rho(A)$ има алгебарску вишеструкост већу од 1. Лема 3.2.2 нам даје да $1+\rho(A) = \rho(I+A)$ има алгебарску вишеструкост већу од 1 (као сопствена вредност матрице $I+A$). Зато $(1+\rho(A))^{n-1} = \rho((I+A)^{n-1})$ има алгебарску вишеструкост већу од 1 за матрицу $(I+A)^{n-1}$. Ово је у контрадикцији са теоремом 2.3.1 јер је по пропозицији 3.2.2 матрица $(I+A)^{n-1}$ позитивна.

(iii) Из пропозиције **??** знамо да постоји вектор $x \geq 0$ такав да је $Ax = \rho(A)x$. Како је A несводљива, онда је по пропозицији 3.2.2 матрица $(I+A)^{n-1}$ позитивна и користећи лему 3.2.2 добијамо да је

$$
\begin{aligned}
(I+A)^{n-1}x &= (I+(n-1)A+\binom{n-1}{2}A^2+...+A^{n-1})x \\
&= x+(n-1)Ax+\binom{n-1}{2}A^2x+...+A^{n-1}x \\
&= x+(n-1)\rho(A)x+\binom{n-1}{2}\rho(A)^2x+...+\rho(A)^{n-1}x \\
&= (1+\rho(A))^{n-1}x \\
&= \rho((I+A)^{n-1})x.
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Дакле, добили смо да је вектор x сопствени вектор позитивне матрице који одговара спектралном радијусу. На основу теореме 2.3.1 тај вектор је позитиван. На крају нормирамо вектор тако да важи $x_1+...+x_n=1$. Јединственост је такође осигурана теоремом 2.3.1.

(iv) Овај део се показује аналогно делу (iii) само што посматрамо матрицу A^T.

Дакле, теорема 3.1.2 нам даје да постоји вектор $y \geq 0$ такав да је $A^Ty = \rho(A)y$. Запишимо то на еквивалентан начин: $y^TA = \rho(A)y^T$. На аналоган начин закључујемо да је вектор y сопствени вектор позитивне матрице који одговара спектралном радијусу. Према теореми 2.3.1 знамо да је тај вектор позитиван. На крају нормирамо вектор тако да уместо y узмемо

$$\frac{y}{\sum_{i=1}^n x_iy_i}.$$

То нам гарантује идентитет $x_1y_1+...+x_ny_n=1$. Јединственост, такође, следи на основу теореме 2.3.1.

□

3.3 Примитивне матрице

Следећа класа ненегативних матрица су примитивне матрице.

Теорема 3.3.1. [2] Нека је $A \in M_n(\mathbb{R})$ примитивна матрица. Тада важе тврђења $(i)-(v)$ теореме 2.3.1.

Доказ. Нека су $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ сопствене вредности матрице A. Претпоставимо да је λ_1 највећа по апсолутној вредности. Тада су сопствене вредности од A^m управо $\lambda_1^m, ..., \lambda_n^m$, где је λ_1^m највећа по апсолутној вредности.

Како је A^m позитивна матрица, можемо искористити теорему 2.3.1. Она нам даје да је $\lambda_1^m > 0$ и да је одговарајући сопствени вектор позитиван, $x > 0$. Такође нам даје да су све остале сопствене вредности матрице A^m мање од λ_1^m по апсолутној вредности.

Али, ако важи $|\lambda_1|^m > |\lambda_k|^m, \forall k \geq 2$, тада важи и $|\lambda_1| > |\lambda_k|, \forall k \geq 2$. Из тога видимо да је λ_1 по апсолутној вредности највећа сопствене вредност матрице A. Она има алгебарску вишеструкост 1. Нека је y сопствени вектор који одговара сопственој вредности λ_1. Тада важи $Ay = \lambda_1 y$, односно $A^m y = \lambda_1^m y$. Дакле, $y = x$ је сопствени вектор сопствене вредности λ_1 и он је позитиван.

Како λ_1 има алгебарску вишеструкост 1, следи и да јој је геометријска вишеструкост такође 1 јер геометријска вишеструкост не може бити већа од алгебарске.

Приметимо још да је $\lambda_1 > 0$ будући да је она сопствена вредност ненегативне матрице којој одговара позитиван сопствени вектор. Дакле, доказали смо сва тврђења. $\square$

Глава 4

Примене Перон-Фробенијусове теореме

4.1 Фанова теорема

Сопствене вредности дијагоналне или матрице мале димензије је лако лоцирати, али шта радити када то није случај? У статистици или нумеричкој анализи, често је корисно доказати да су све сопствене вредности матрице позитивне. Прва примена Перон-Фробенијусове теореме је баш начин да се лоцирају сопствене вредности. Пре тога, потребно је дефинисати још неке појмове.

Дефиниција 4.1.1. [1] Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ матрица и

$$R_i(A) = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Дефинишемо *n Гершгоринових дискова* као

$$G_i(A) := \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}, \ i = 1, 2, ..., n.$$

Теорема 4.1.1. [1] Сопствене вредности матрице $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ налазе се у унији Гершгоринових дискова

$$G(A) = \bigcup_{i=1}^{n} G_i(A).$$

Доказ. Нека је $\lambda \in \mathbb{C}$ сопствена вредност матрице A и нека је њој одговарајући сопствени вектор $x = [x_i] \neq 0$, то јест, важи $Ax = \lambda x$. Нека је $p \in \{1, 2, ..., n\}$ индекс такав да је

$$|x_p| = \|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

Тада је $|x_i| \leq |x_p|$ за све $i = 1, 2, ..., n$ и $x_p \neq 0$ јер је $x \neq 0$. Ако у једнакости $Ax = \lambda x$ узмемо p-ту координату, добијамо

$$\lambda x_p = \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j.$$

Запишимо то на следећи начин:

$$\begin{aligned} x_p (\lambda - a_{pp}) &= \lambda x_p - x_p a_{pp} \\ &= \sum_{j=1}^{n} a_{pj} x_j - x_p a_{pp} \\ &= \sum_{j \neq p} a_{pj} x_j. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Користећи неједнакост троугла добијамо :

$$\begin{aligned} |x_p||\lambda - a_{pp}| &= |\sum_{j \neq p} a_{pj} x_j| \leq \sum_{j \neq p} |a_{pj} x_j| \\ &= \sum_{j \neq p} |a_{pj}||x_j| \leq |x_p| \sum_{j \neq p} |a_{pj}| \\ &= |x_p| R_p(A) \end{aligned} \tag{4.2}$$

Како је $x_p \neq 0$ закључујемо да је

$$|\lambda - a_{pp}| \leq R_p(A),$$

односно да се λ налази у кругу $\{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i(A)\}$, а самим тим и у скупу $G(A)$. Како је λ била произвољна сопствена вредност матрице A, закључујемо да се све сопствене вредности матрице A налазе у унији Гершгоринових дискова.

$\square$

Напомена 4.1.1. Нека је $D = diag\,(d_1, d_2, ..., d_n)$ дијагонална матрица са особином да је $d_i > 0$ за свако $i = 1, 2, ..., n$. Тада матрице $D^{-1}AD$ и A имају исте сопствене вредности, па се на основу претходне теореме све сопствене вредности матрице A налазе се у

$$G(D^{-1}AD) = \bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{d_i} \sum_{j \neq i} d_j |a_{ij}| \right\}.$$

Теорема 4.1.2. [5] *(Фанова теорема)* Нека је $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ и нека је $B = [b_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ ненегативна матрица таква да је $b_{ij} \geq |a_{ij}|$ за све $i \neq j$. Тада се сопствене вредности матрице A налазе у унији дискова:

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B) - b_{ii}\}.$$

Додатно, A је регуларна ако је $|a_{ii}| > \rho(B) - b_{ii}$ за све $i = 1, 2, ..., n$.

Доказ. Прво претпоставимо да је $B > 0$. Теорема 2.3.1 (ii) нам гарантује постојање позитивног сопственог вектора x таквог да је $Bx = \rho(B)x$, па следи да је

$$\begin{aligned} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| x_j &\leq \sum_{j \neq i} b_{ij} x_j \\ &= \sum_{1 \leq j \leq n} b_{ij} x_j - b_{ii} x_i \\ &= \rho(B) x_i - b_{ii} x_i,\ i = 1, 2, ..., n. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Сада имамо

$$\frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} |a_{ij}| x_j \leq \rho(B) - b_{ii},\ i = 1, 2, ..., n.$$

Када у напомени 4.1.1 ставимо да је $d_i = x_i$ за све $i = 1, ..., n$ добијамо тврђење за позитивну матрицу B, односно добијамо да се све сопствене вредности матрице A налазе у

$$\bigcup_{i=1}^{n} \left\{ z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \frac{1}{x_i} \sum_{j \neq i} x_j |a_{ij}| \right\}.$$

Ако је неки елемент матрице B једнак нули, узмимо да је $B_\epsilon = B + \epsilon J_n$ за $\epsilon > 0$, где је J_n матрица чији су сви елементи јединице. Тада је

$$b_{ij} + \epsilon > |a_{ij}|$$

за све $i \neq j$. Матрица B_ϵ је позитивна (јер смо је тако дефинисали) па се све сопствене вредности матрице A налазе у

$$G(B_\epsilon) = \bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B_\epsilon) - (b_{ii} + \epsilon)\}.$$

Тврђење за ненегативну матрицу B добијамо из чињенице да

$$\rho(B_\epsilon) - (b_{ii} + \epsilon) \ \to\ \rho(B) - b_{ii},\ \ \epsilon \to 0.$$

Ако је $|a_{ii}| > \rho(B) - b_{ii}$ за $i = 1, 2, ..., n$, тада $z = 0$ није у унији

$$\bigcup_{i=1}^{n} \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq \rho(B) - b_{ii}\} .$$

□

Пример. Погледајмо сада на конкретном примеру како функционише Фанова теорема. Без рачунања сопствених вредности матрице A одредићемо где се оне налазе.
Нека је дата матрица

$$A = \begin{bmatrix} -4 & -10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

Нека је

$$B = |A| = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

На почетку, приметимо да је за овако изабране матрице A и B услов Фанове теореме испуњен.
Затим одредимо спектрални радијус матрице B како бисмо лоцирали све сопствене вредности матрице A:

$$\begin{aligned} det(B - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 4-\lambda & 10 \\ 1 & 6-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (4-\lambda) \cdot (6-\lambda) - 10 \\ &= \lambda^2 - 10\lambda + 14. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Одавде следи да је

$$\sigma(B) = \{5 + \sqrt{11},\ 5 - \sqrt{11}\},$$

па имамо да је $\rho(B) = 5 + \sqrt{11} \approx 8.32$.
Сада на основу Фанове теореме знамо да се све сопствене вредности матрице A налазе у унији:

$$\{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 5 + \sqrt{11} - 4\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : |z - 6| \leq 5 + \sqrt{11} - 6\},$$

тј.

$$\sigma(A) \subseteq \{z \in \mathbb{C} : |z + 4| \leq 1 + \sqrt{11}\} \bigcup \{z \in \mathbb{C} : |z - 6| \leq \sqrt{11} - 1\}.$$

Како бисмо се уверили да Фанова теорема даје добро решење за матрицу малих димезија, као што је дата матрица A, можемо и преко дефиниције израчунати њене сопствене вредности и видети да ли се оне заиста налазе у добијеној унији. Сопствене вредности матрице A су следеће:

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{15} \approx 4.873,\ \lambda_2 = 1 - \sqrt{15} \approx -2.873,$$

и видимо да се оне налазе у добијеној унији.

4.2 Ланци Маркова

У математици ланац Маркова означава дискретни Марковљев случајни процес. Име је добио по Андреју Маркову, руском математичару. Имати својство Маркова значи да опис садашњости у потпуности садржи информацију која може утицати на будуће стање процеса.

Наведимо као пример случајну шетњу по бројевној правој, где се, при сваком кораку, позиција мења за 1 (у једном или другом смеру једнако вероватно). Са сваке позиције постоје два могућа прелаза: на следећи или на претходни цео број. Вероватноће прелаза тада зависе само од тренутног стања, а не од начина како се до њега дошло. На пример, ако је тренутна позиција -3, прелаз у -2 има вероватноћу 0.5, без обзира на претходне позиције.

У сваком тренутку систем, на основу дате расподеле случајне промењиве, може променити стање, или остати у истом. Промене стања називамо прелазима, а вероватноће, које се односе на различите промене стања, називамо вероватноћама прелаза.

У овом поглављу наводимо два резултата везана за ланце Маркова који се добијају помоћу Перон-Фробенијусове теореме. Први резултат је везан за произвољне несводљиве ланце Маркова и њихове стационарне расподеле, а други представља конкретан пример, ланац Маркова који описује Google PageRank алгоритам.

Дефиниција 4.2.1. Нека је S пребројив скуп који називамо скуп стања. Ланци Маркова представљају класу зависних случајних променљивих. Низ случајних променљивих $(X_n)_{n\geq 0}$ називамо ланцем Маркова, ако за сваку вредности x_i из скупа S важи својство Маркова, тј.:

$$Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n, ..., X_1 = x_1) = Pr(X_{n+1} = x | X_n = x_n),\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Дефиниција 4.2.2. Матрица преласка $P = [p_{ij}] \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ је свака матрица која задовољава следеће услове:

- $p_{ij} \geq 0,\ \forall i = 1, ..., m,\ j = 1, ..., n,$
- $\sum_j p_{ij} = 1,\ \forall i = 1, ..., m.$

Дефиниција 4.2.3. Дискретни хомогени ланац Маркова представља ланац Маркова са стационарним вероватноћама стања ако вероватноће прелаза не зависе од времена, тј:

$$Pr(X_{n+1} = j | X_n = i) = p_{ij},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Пример. Претпоставимо да то да ли ће сутра падати киша или не, не зависи од претходних услова, односно да зависи само од тога да ли данас пада киша или не. Такође претпоставимо да ако данас падне киша, падаће и сутра са вероватноћом 0.7, а ако данас не падне онда ће сутра падати са вероватноћом 0.4 .
Имамо ланац Маркова са два стања: 0-пада киша и 1-не пада киша.
Матрица преласка изгледа овако:

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 1 - 0.7 \\ 0.4 & 1 - 0.4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.4 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

Стационарна расподела

Нека је $X = (X_n : n \geq 0)$ ланац Маркова са скупом стања $S = \{s_1, s_2, ..., s_n\}$ и матрицом преласка $P = [p_{ij}]$. Величина p_{ij} означава вероватноћу преласка стања i у стање j. Дакле, матрица P је ненегативна. Уочимо да, ако се налазимо у стању i, у следећем кораку се морамо померити у неко стање из S, па је

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1,\ i = 1, 2, ..., n,$$

односно, сума сваке врсте матрице P је један. Такве матрице још називамо стохастичким матрицама.[1]

Узмимо вектор v_0 коме су све координате једнаке 1 и уочимо да је

$$Pv_0 = v_0.$$

Дакле, матрица P је ненегативна и пронашли смо један њен позитиван сопствени вектор. На основу напомене 2.3.2 знамо да је $\rho(P)$ сопствена вредност матрице P и да јој одговара сопствени вектор v_0. Из горње једнакости још можемо закључити да је $\rho(P) = 1$, јер важи $Pv_0 = \rho(P)v_0$.

Претпоставимо да је матрица P позитивна. Перонова теорема нам гарантује да је $\rho(P) = 1$ јединствено и да одговара вектору v_0. Штавише, посматрајмо матрицу

$$P^\infty = \lim_{n\to\infty} P^n,$$

која мора бити ранга 1. На основу напомене 2.3.1 знамо облик матрице P^∞, будући да је

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \lim_{n\to\infty} (\frac{P}{\rho(P)})^n = rq^T,$$

где су r и q десни и леви Перонов вектор матрице P. Важи да је $r = \frac{1}{n}v_0$, јер је

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = 1$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} v_{0_i} = n,$$

па можемо расписати лимес да видимо каквог је облика матрица P^∞ :

$$P^\infty = rq^T = \frac{1}{n}v_0q^T = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q_1 & \cdots & q_n\end{bmatrix} = \frac{1}{n}\begin{bmatrix}q_1 & q_2 & \cdots & q_n\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ q_1 & q_2 & \cdots & q_n\end{bmatrix}.$$

Ако означимо да је вектор $p = \frac{1}{n}q$ имамо да важи:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} q_i = \sum_{i=1}^{n} r_i q_i = 1.$$

Дакле, p_i су вероватноће да се члан у лимесу налази у стању s_i. Како је p скалирани леви Перонов вектор, за њега важи:

$$p^T P = p^T.$$

Напомена 4.2.1. [5] Расподела q на простору стања, за коју важи $qP = q$ назива се стационарна расподела ланца Маркова са матрицом преласка P.

4.3 Google PageRank

Претраживање интернета деведесетих година било је веома неефикасно. *Yahoo* или *AltaVista* би скенирали странице у потрази за траженим текстом унетим у претрагу и једноставно би навели резултате са највећим бројем понављања тих речи.
Лери Пејџ и Сергеј Брин изумели су начин рангирања страница према важности и основали *Google* на основу свог алгоритма. У наставку текста приказаћемо како тај алгоритам функционише.

Свака веб страница има придружену важност или ранг, који је позитиван број и одређује се следећим правилом:

Дефиниција 4.3.1. [3]*Правило важности:* Ако страница P води до n других страница $Q_1, ..., Q_n$, онда свака од тих n страница наслеђује $\frac{1}{n}$ важности странице P.

У пракси то значи следеће:

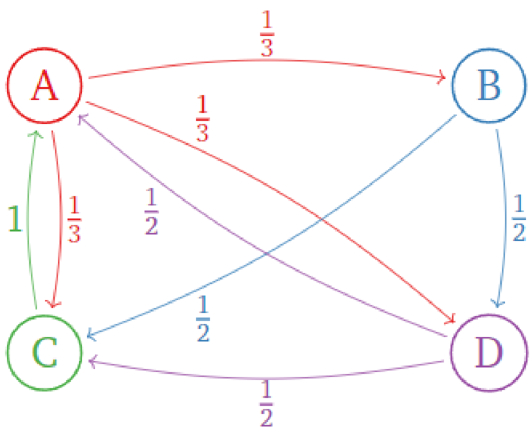
- Ако нека веома важна страница води до наше странице (а не и до много других), онда се и наша страница сматра важном.
- Ако много неважних страница воде до наше странице, онда је наша страница и даље важна.
- Ако само мали број непознатих (неважних) страница воде до наше странице, у том случају наша страница није важна.

Друга интерпретација је постојање насумичног сурфера (корисника интернета). Насумични сурфер само седи за својим рачунаром по цео дан и насумично кликће на странице.
Странице на којима проводи највише времена требало би да буду најважније. Дакле, важне (високо рангиране) странице су оне на којима ће случајни сурфер најчешће завршити.
Испоставља се да је ова мера еквивалентна рангу.

Дефиниција 4.3.2. [3]*Матрица важности:* Претпоставимо да интернет има n страница. Матрица важности представља $n \times n$ матрицу A на чијој се (i, j) координати налази важност коју страница i наслеђује од странице j.

Приметимо да је матрица важности једна стохастичка матрица, под претпоставком да свака страница садржи везу ка некој другој страници:
Ако страница i води до m других страница, онда $i-$та колона садржи број $\frac{1}{m}$, m пута, а на осталим местима су нуле.

Пример. Посматрајмо интернет са само четири странице A, B, C, D, где су везе означене стрелицама.



Правило важности даје нам следеће:

- Страница A има 3 везе, па странице B, C и D наслеђују по $\frac{1}{3}$ њене важности.
- Страница B има 2 везе, па странице C и D наслеђују по $\frac{1}{2}$ њене важности.
- Страница C има 1 везу, па страница A наслеђује сву њену важност.
- Страница D има 2 везе, па странице A и C наслеђују по $\frac{1}{2}$ њене важности.

Ако бисмо са $v = [a, b, c, d]$ означили вектор који садржи важности (рангове[1]) a, b, c и d, придружене страницама A, B, C и D, редом, онда бисмо имали следеће:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{3}a \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}d \\ \frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}.$$

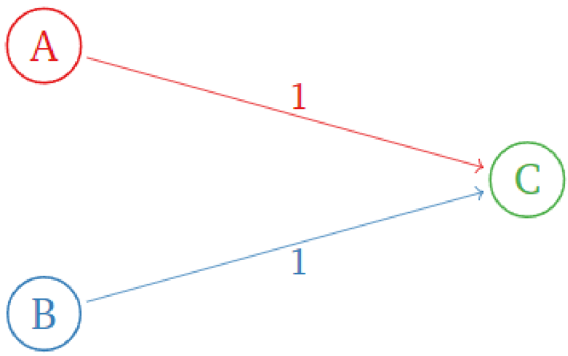
[1]Погледати дефиницију 4.3.1.

Матрица са леве стране представља матрицу важности, а крајња једнакост изражава правило важности.

Претходни пример илуструје кључно запажање:
Вектор важности (ранга) је сопствени вектор матрице важности који одговара сопственој вредности 1.

У светлу кључног запажања, желимо да користимо Перон-Фробенијусову теорему да пронађемо вектор ранга. Нажалост, матрица важности није увек позитивна стохастичка матрица. Погледајмо следеће примере:

Пример. *Страница која не води ни на једну другу страницу:* Посматрајмо интернет са три странице:



Матрица важности је:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

а њен сопствени полином је $-\lambda^3$. Видимо да 1 уопште није сопствена вредност матрице важности, самим тим не постоји вектор ранга.
Матрица важности није стохастичка јер страница C не води ни до једне друге странице.

Пример. *Неповезан интернет:* Посматрајмо следећи интернет:

Матрица важности је следећа:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}.$$

Она има два линеарно независна сопствена вектора:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и оба одговарају сопственој вредности 1.
Дакле, имамо више од једног вектора важности (ранга). Овде је матрица важности стохастичка, али није позитивна.

У наставку следи решење Пејџа и Брина.

Прво модификујемо матрицу важности тако што нула колону заменимо колоном у којој су сви елементи $\frac{1}{n}$, где је n број страница. Тако матрица A постаје матрица $\tilde{A}$:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \to \tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Модификована матрица важности $\tilde{A}$ је увек стохастичка.
Затим изаберемо број $p \in (0, 1)$, који називамо фактор пригушења. (Типична вредност је $p = 0.15$.)

Дефиниција 4.3.3. [3] *Google матрица:* Нека је A матрица важности за интернет са n страница и нека је $\tilde{A}$ њена модификација. *Google* матрица је матрица:

$$M = (1-p)\tilde{A} + pB,$$

где је B :

$$B = \frac{1}{n}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

У интерпретацији насумичног сурфера, ова матрица M нам даје следеће: Са вероватноћом p, наш сурфер ће сурфовати до потпуно насумичне странице; у супротном, он ће кликнути на насумичну везу на тренутној страници, осим ако тренутна страница нема везу ни према једној другој страници, у ком случају ће опет сурфовати до потпуно насумичне странице.

Можемо закључити да је *Google* матрица позитивна стохастичка матрица. Ако прогласимо да се важности (рангови) свих страница морају сумирати на 1, онда добијамо да је вектор *PageRank*−а стабилно стање *Google* матрице. Перон-Фробенијусова теорема нам гарантује да он постоји и да је позитиван.

4.4 Остале примене Перон-Фробенијусове теореме

Перон-Фробенијусова теорема има још много других примена у математици као што су компактни оператори и ненегативне матрице, у алгебарској теорији бројева (Перонови алгебарски бројеви), у спектралној теорији графова итд. Такође, има примене и у другим областима као што су моделирање раста становништва (Леслијев модел), моделирање промена цене у економији (Леонтијев улазно-излазни економски модел). Затим, занимљиву примену има и у спорту код моделирања рангирања тимова и вероватноће победе, итд.

Глава 5

Сажетак

У овом раду основни објекти су позитивне и ненегативне матрице, док су средишњи сопствене вредности и њима одговарајући сопствени вектори. У уводном делу, наведене су дефиниције, тврђења, неједнакости и формуле који представљају основ за даљу причу о самој теми овог рада.

Други и трећи део представљају детаљан и постепен доказ Перон-Фробенијусове теореме за позитивне и ненегативне матрице. Такође, доводимо у везу матрице са теоријом графова и наводимо карактеризације несводљивости.

Четврти и последњи део посвећен је разним применама ове теореме. Прво је обрађена Фанова теорема која даје алат за лоцирање сопствених вредности. Након тога, обрађене су примене у ланцима Маркова, те је објашњено како функционише Google PageRank алгоритам. На самом крају, наведено је још неколико репрезентативних примена Перон-Фробенијусове теореме.

Библиографија

[1] Roger A. Horn, Charles R. Johnson (2013) *The Matrix Analysis*, Cambridge University Press.

[2] Carl D. Meyer (2000) *Matrix analysis and applied linear algebra*, Siam

[3] Dan Margalit, Joseph Rabinoff (2019) *Interactive Linear Algebra*, School of Mathematics, Georgia Institute of Technology

[4] Gary Chartrand, Ping Zhang (2012) *Graph theory*, Western Michigan University

[5] C.R.MacCluer (2000) *The Many Proofs and Applications of Perron's Theorem*, Society for Industrial and Applied Mathematics

[6] Hau-Biao Li, Ting-Zhu Huang (2004) *An Improvement of Ky Fan Theorem for Matrix Eigenvalues*, School of Applied Mathematics, University of Electronic Science and Technology of China

[7] J.Li (2005) *Markov Chain Interpretation of Google Page Rank*, dostupno na $http://web.mst.edu/\ gosavia/page_rank_model.pdf$

Биографија аутора

Рођена сам 10.11.1998. године у Руми. Живим у Доњем Товарнику, месту у ком сам завршила основну школу *Слбодан Бајић Паја*, као носилац Вукове дипломе. Гимназију *Стеван Пузић*, завршила сам у Руми, на друштвено-језичком смеру, 2017. године. Исте године, уписала сам Природно-математички факултет у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике и дипломирала у року, 2021. године, са просечном оценом 8.33. Тренутно сам студент другог степена студија Математичког факултета, Универзитета у Београду, на смеру Теоријска математика и примене. Истовремено сам запослена у средњој техничкој школи *Миленко Веркић Неша*, у Пећинцима, као професор математике, програмирања и пословне информатике. Такође, имам тромесечно искуство рада у основној школи, коју сам и сама похађала. Своје слободно време проводим учећи разне програмске језике и у писању поезије, чији сам део, 2020. године, објавила у збирци *Болести једне душе*, у мањем тиражу, за породицу и пријатеље. За будућност имам амбицију да наставим да се школујем и бавим математиком на докторским студијама.