Универзитет у Београду

Математички факултет

Јелена Павловић

Крамерово правило за решавање правоугаоних система линеарних једначина

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Бранислав Првуловић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

проф. др Марко Радовановић, ванредни професор

Универзитет у Београду, Математички факултет

др Биљана Вујошевић, доцент

Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 26. 9. 2022.

Садржај

1. Увод 3
2. Крамерово правило 4
3. Проширење Крамеровог правила 8
4. Крамерово правило за матричне једначине 19
5. Литература 23

1. Увод

Габријел Крамер је швајцарски математичар рођен у Женеви 1704. године. Већ са османаест година одбранио је свој докторат а са двадесет почео да предаје математику на Женевској Акедемији делећи место са Каландринијем. Крамер је предавао геометрију и механику а Каландрини алгебру и астрономију. Како би проширио своје знање доста је путовао и имао прилику да ради са бројним математичарима, укључујући Ојлера и Јохана Бернулија. Предложио је велику измену, коју је Академија прихватила, а то је да се предавања држе на француском језику а не само на латинском. Бавио се разним гранама математике и објављивао радове у научним часописима. Године 1750. Крамер објављује *Увод у анализу алгебарских кривих*, у четири тома. То дело садржи Крамерово правило, у коме се говори о решавању система линеарних једначина, као и Крамеров парадокс. Годину дана касније Крамер доживљава несрећу падом са кочије. Умире 4. јануара 1752. године.

Крамерово правило, по чему је Габријел Крамер данас најпрепознатљивији, користи се за решавање квадратних система линеарних једначина. Проширење овог правила на решавање правоугаоних система, 2017. године, урадили су Azamat Akhtyamov, Meirav Amram, Miriam Dagan и Artour Mouftahkov, и то је тема овог мастер рада.

Слика 1 Габријел Крамер

2. Крамерово правило

Посматрајмо систем од n линеарних једначина са n непознатих:

$$(1)\quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = a_{2,n+1} \\ \ldots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = a_{n,n+1} \end{cases}$$

Овде је $a_{i,j} \in$ К , где је К неко поље, а $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n.n} \end{bmatrix}$

несингуларна матрица система. Нека је

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \ldots & a_{n.n} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$$

проширена $n \times (n+1)$ матрица система. Може се записати: $A \in K^{n \times n}, \bar{A} \in K^{n \times (n+1)}$.

Проширена матрица има миноре реда n:

$$M_{j_1, j_2, \ldots, j_n} = \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \ldots & a_{1,j_n} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \ldots & a_{2,j_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n,j_1} & a_{n,j_2} & \ldots & a_{n.j_n} \end{vmatrix},$$

где је $j_1, j_2, \ldots, j_n \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$.

Теорема (Крамерово правило): Нека је $\overline{\mathrm{A}}$ проширена $n \times (n+1)$ матрица система линеарних једначина (1). Ако је њен минор $M_{1,2,\ldots,n} \neq 0$ онда је решење система:

$$x_i = \frac{M_{1,2,\ldots,i-1,n+1,i+1,\ldots,n-1,n}}{M_{1,2,\ldots,n}} \text{ где } i \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

У доказу ове теореме користићемо следеће дефиниције.

Дефиниција: Матрице су еквивалентне уколико од једне можемо добити другу применом елементарних трансформација (замена места врста или колона, множење врсте или колоне скаларом различитим од нуле, додавање једне врсте (колоне) помножене скаларом другој врсти (колони)).

Дефиниција: Уколико елементарним трансформацијама врста (колона) од једне матрице можемо добрити другу онда су те две матрице еквивалентне по врстама (колонама).

Напомена: Еквивалентне матрице имају исти ранг. Исто важи за матрице еквивалентне по врстама и матрице еквивалентне по колонама.

Лема: Нека су A и $\tilde{A}$ $m \times n$ матрице $(m \leq n)$, а $M_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ и $\widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ њихови минори. Ако су A и $\tilde{A}$ еквивалентне по врстама онда постоји $t \neq 0$, које не зависи од избора $m-$торке $i_1, i_2, \dots, i_m$, тако да важи: $M_{i_1,i_2,\dots,i_m} = t \cdot \widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$.

Доказ леме: На основу дефиниције о еквивалентним матрицама, постоји несингуларна $m \times m$ матрица S тако да је $A = S \cdot \tilde{A}$. Означимо $t = \det S$. Важи да је $t \neq 0$ јер је S несингуларна. Може се онда закључити и да је $A_{i_1,i_2,\dots,i_m} = S \cdot \tilde{A}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, где су $A_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ и $\tilde{A}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ подматрице матрица A и $\tilde{A}$ које се састоје од колона $i_1, i_2, \dots, i_m$. Затим важи: $M_{i_1,i_2,\dots,i_m} = \det\left(S \cdot \tilde{A}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right) = \det S \cdot \det\left(\tilde{A}_{i_1,i_2,\dots,i_m}\right) = t \cdot \widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ што је и требало доказати. ■

Доказ Крамеровог правила: Нека је $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n.n} & a_{n,n+1} \end{bmatrix}$ проширена $n \times (n+1)$ матрица система линеарних једначина. Из услова теореме важи да је $M_{1,2,\dots,n} \neq 0$, што значи да, применом елементарних операција над врстама матрице $\overline{\mathrm{A}}$, добијамо матрицу која је са њом еквивалентна по врстама: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1,n+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{n,n+1} \end{bmatrix}$.

Према претходној леми важи $M_{i_1,i_2,\dots,i_n} = t \cdot \widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$, где је $\widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_n}$ одговарајући минор претходне матрице. Ако је $(i_1, i_2, \dots, i_n) = (1, 2, \dots, n)$ онда је $M_{1,2,\dots,n} = t \cdot \widetilde{M}_{1,2,\dots,n}$ па је $t = \frac{M_{1,2,\dots,n}}{\widetilde{M}_{1,2,\dots,n}} = \frac{M_{1,2,\dots,n}}{1} = M_{1,2,\dots,n}$. Такође, може се закључити да је:

$\widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_n} = \frac{M_{i_1,i_2,\dots,i_n}}{t} = \frac{M_{i_1,i_2,\dots,i_n}}{M_{1,2,\dots,n}}$. Решење система је онда:

$x_i = \tilde{a}_{i,n+1} = \widetilde{M}_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,n-1,n} = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,n-1,n}}{M_{1,2,\dots,n}}$, где је $i \in \{1, 2, \dots, n\}$. ■

Овај доказ је помало нестандардан, међутим њега наводимо због уопштења које следи касније, јер је он погодан за то уопштење. Стандардни доказ Крамеровог правила користи мултилинеарност детерминанте и заправо се на тај начин доказује и наредни облик Крамеровог правила, који дајемо у следећем тврђењу, где није потребна претпоставка да је $M_{1,2,\dots,n} \neq 0$.

Тврђење: Ако је уређена $n-$ торка $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ решење система линеарних једначина (1) онда за свако $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ важи: $x_i \cdot M_{1,2,\dots,n} = M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,n-1,n}$.

Последица: Ако је $M_{1,2,\dots,n} = 0$, а бар један од минора $M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,n-1,n} \neq 0$, за $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ онда систем линеарних једначина (1) нема решење.

Пример 1: Решити систем једначина применом Крамерове методе:

$$x + 3y - z = -3$$

$$-4y + z = 0$$

$$5x + y + 2z = -1$$

Проширена матрица овог система је $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -4 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, њен ранг је 3, а минор

$M_{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ 5 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$, па можемо користити Крамерово правило. Биће нам потребни следећи минори: $M_{4,2,3} = \begin{vmatrix} -3 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 28$, $M_{1,4,3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -14$

и $M_{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -3 \\ 0 & -4 & 0 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -56$. Решење система је: $x = x_1 = \frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}} = \frac{28}{-14} = -2$,

$y = x_2 = \frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}} = \frac{-14}{-14} = 1$, $z = x_3 = \frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}} = \frac{-56}{-14} = 4$, односно решење је уређена тројка $(x, y, z) = (-2, 1, 4)$.

Пример 2: У зависности од параметра a решити систем једначина:

$$x + ay + z = 1$$

$$x + y + az = 1$$

$$x + a^2y + z = a$$

Проширена матрица овог система је $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & a^2 & 1 & a \end{bmatrix}$, а минор

$M_{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a^2 & 1 \end{vmatrix} = -a(a-1)^2$. Биће нам потребни следећи минори:

$M_{4,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{vmatrix} = (a-1)^2$, $M_{1,4,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix} = -(a-1)^2$ и

$M_{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & a^2 & a \end{vmatrix} = -(a-1)^2$. Да бисмо могли да употребимо Крамерово правило

треба да важи $M_{1,2,3} \neq 0$, односно $a \neq 0$ и $a \neq 1$. У том случају решења су:

$x = x_1 = \frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}} = \frac{(a-1)^2}{-a(a-1)^2} = -\frac{1}{a}$, $y = x_2 = \frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}} = \frac{-(a-1)^2}{-a(a-1)^2} = \frac{1}{a}$,

$z = x_3 = \frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}} = \frac{-(a-1)^2}{-a(a-1)^2} = \frac{1}{a}$, односно решење је уређена тројка

$(x, y, z) = \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$, где важи $a \neq 0$ и $a \neq 1$. Треба испитати шта се дешава ако је

$a = 0$ или $a = 1$ јер Крамерова метода важи само за несингуларне матрице.

Ако је $a = 0$, онда је $M_{1,2,3} = 0$, а $M_{4,2,3}, M_{1,4,3}, M_{1,2,4} \neq 0$ што значи да систем нема решење.

Ако је $a = 1$ онда је $M_{1,2,3} = M_{4,2,3} = M_{1,4,3} = M_{1,2,4} = 0$ што значи да се добијени систем мора решити неком другом методом јер Крамерово правило даје решење само за несингуларне матрице. Ако је $a = 1$ све једначине почетног система ће бити исте:

$$x + y + z = 1$$

У овом случају систем ће имати бесконачно много решења која зависе од неких нових параметара $b, c \in \mathbb{R}$ тако да је $y = b$, $z = c$. Тада је $x = 1 - y - z = 1 - b - c$, односно, скуп решења је скуп уређених тројки $\{(1 - b - c, b, c) \mid b, c \in \mathbb{R}\}$.

3. Проширење Крамеровог правила

До сада је било речи о системима од n линеарних једначина са n непознатих, чија је матрица система несингуларна, тачније ранга n. Желимо да проширимо Крамерово правило на решавање система који има више непознатих него што има једначина. Посматрајмо систем од m линеарних једначина са n непознатих, где је $m < n$, $(m, n \in \mathbb{N})$ и чија матрица има ранг m:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = a_{1,n+1} \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = a_{2,n+1} \\ \dots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \cdots + a_{m,n}x_n = a_{m,n+1} \end{cases}$$

Овде је $a_{i,j} \in$ K, где је K неко поље, а $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $j \in \{1, 2, \dots, n+1\}$ и

$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m.n} \end{bmatrix}$ $m \times n$ матрица система ранга m. Нека је

$$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m.n} & a_{m,n+1} \end{bmatrix}$$

проширена $m \times (n+1)$ матрица система. Може се записати: $A \in K^{m\times n}, \bar{A} \in K^{m\times(n+1)}$.

Проширена матрица, има миноре реда m:

$$M_{j_1, j_2, \dots, j_m} = \begin{vmatrix} a_{1,j_1} & a_{1,j_2} & \dots & a_{1,j_m} \\ a_{2,j_1} & a_{2,j_2} & \dots & a_{2,j_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,j_1} & a_{m,j_2} & \dots & a_{m.j_m} \end{vmatrix},$$

где је $j_1, j_2, \dots, j_m \in \{1,2,\dots, n+1\}$.

За почетак, посматраћемо случај када је $M_{1,2,\dots,m} \neq 0$.

Теорема (Проширење Крамеровог правила): Нека је $\overline{\mathrm{A}}$ проширена $m \times (n+1)$ матрица система линеарних једначина (2), $m < n$, и нека је њен минор $M_{1,2,\dots,m} \neq 0$. Онда је решење система скуп свих $n-$торки $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ где су $x_{m+1}, \dots, x_n$ произвољни елементи из скупа K, а за $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ важи:

$$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j\,=\,m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j.$$

Доказ: Пошто је $M_{1,2,\dots,m} \neq 0$, применом основних елементарних операција над врстама проширене $m \times (n+1)$ матрице $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m.n} & a_{m,n+1} \end{bmatrix}$ система линеарних једначина, добијамо матрицу која је са њом еквивалентна по врстама:

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1,m+1} & \tilde{a}_{1,m+2} & \dots & \tilde{a}_{1,n} & \tilde{a}_{1,n+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2,m+1} & \tilde{a}_{2,m+2} & \dots & \tilde{a}_{2,n} & \tilde{a}_{2,n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{m,m+1} & \tilde{a}_{m,m+2} & \dots & \tilde{a}_{m,n} & \tilde{a}_{m,n+1} \end{bmatrix}$. Као и у доказу Крамеровог правила, користићемо лему према којој важи $M_{i_1,i_2,\dots,i_m} = t \cdot \widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$, где је $\widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m}$ одговарајући минор претходне матрице. Ако је $(i_1, i_2, \dots, i_m) = (1, 2, \dots, m)$ онда је $M_{1,2,\dots,m} = t \cdot \widetilde{M}_{1,2,\dots,m}$, па је $t = \frac{M_{1,2,\dots,m}}{\widetilde{M}_{1,2,\dots,m}} = \frac{M_{1,2,\dots,m}}{1} = M_{1,2,\dots,m}$. Такође, може се закључити да је: $\widetilde{M}_{i_1,i_2,\dots,i_m} = \frac{M_{i_1,i_2,\dots,i_m}}{t} = \frac{M_{i_1,i_2,\dots,i_m}}{M_{1,2,\dots,m}}$. За $j \in \{m+1, m+2, \dots, n+1\}$ и $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ важи: $\tilde{a}_{i,j} = \widetilde{M}_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m} = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m}}{M_{1,2,\dots,m}}$. Такође, из претходне матрице, можемо закључити да је $x_i = \tilde{a}_{i,n+1} - \sum_{j\,=\,m+1}^{n} \tilde{a}_{i,j} x_j$. Заменом одговарајућих коефицијената добија се:

$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j\,=\,m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j$, где је $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, што је и требало доказати. ■

Напомена: Формула проширеног Крамеровог правила може се користити и за системе $n \times n$, заменом $m = n$ у одговарајућим формулама. У том случају $j \in \emptyset$, и добијамо стандардно Крамерово правило.

У претходној теореми користили смо да $M_{1,2,\dots,m} \neq 0$, али то не мора увек да буде тако. Али пошто је ранг матрице A једнак m, онда је бар један њен минор реда m различит од нуле. На основу тога треба прилагодити формулу, па долазимо до следеће теореме:

Теорема (Проширење Крамеровог правила 2): Нека је $\overline{\mathrm{A}}$ проширена $m \times (n+1)$ матрица система линеарних једначина (2), $m < n$, и нека је

$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ било која пермутација при којој је минор $M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)} \neq 0$. Онда је решење система скуп свих $n-$торки $(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(n)})$ где су $x_{\sigma(m+1)}, \dots, x_{\sigma(n)}$ произвољни елементи из поља K, а за $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ важи:

$$x_{\sigma(i)} = \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1),n+1,\sigma(i+1),\dots,\sigma(m-1),\sigma(m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1),\sigma(j),\sigma(i+1),\dots,\sigma(m-1),\sigma(m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)}} x_{\sigma(j)}.$$

Пример 3: Крамеровом методом решити систем линеарних једначина:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 3$$

У овом примеру имамо две једначине ($m = 2$), са три непознате ($n = 3$). Проширена матрица система је $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 3 & -5 & 5 & 3 \end{bmatrix}$. Прво треба пронаћи минор реда 2 који је различит од нуле. Провериćемо да ли је то баш $M_{1,2}$.

$$M_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$$

Можемо применити формулу:

$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j$ где ће j моћи да буде само 3, а $i \in \{1, 2\}$ па важи: $x_1 = \frac{M_{4,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_3$, $x_2 = \frac{M_{1,4}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_3$, а $x_3 = t \in \mathbb{R}$.

Потребни су нам минори: $M_{4,2} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = -1$, $M_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 5 & -5 \end{vmatrix} = 10$,

$M_{1,4} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $M_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 7$, па добијамо: $x_1 = 1 + 10t$, $x_2 = 7t$, $x_3 = t$, односно скуп свих решења је скуп уређених тројки: $\{(10t + 1, 7t, \ t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Пример 4: Крамеровом методом решити систем линеарних једначина:

$$8x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$

$$6x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1$$

У овом примеру такође имамо две једначине ($m = 2$), са три непознате ($n = 3$).

Проширена матрица система је $\bar{A} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & -1 & -5 \\ 6 & 3 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Међутим овде је $M_{1,2} = \begin{vmatrix} 8 & 4 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0$ па треба пронаћи пермутацију колона при којој главни минор неће бити 0. На пример $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $M_{1,3} = \begin{vmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 22 \neq 0$ Можемо применити формулу:

$$x_{\sigma(i)} = \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i-1),n+1,\sigma(\,i+1),\ldots,\sigma(m-1),\sigma(\,m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(m)}}$$

$$- \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i-1),\sigma(j),\sigma(\,i+1),\ldots,\sigma(m-1),\sigma(\,m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(m)}} x_{\sigma(j)}$$

где ће j моћи да буде само 3, а , $i \in \{1, 2\}$ па важи:

$$x_1 = \frac{M_{4,3}}{M_{1,3}} - \frac{M_{2,3}}{M_{1,3}} x_2\,,\ x_3 = \frac{M_{1,4}}{M_{1,3}} - \frac{M_{1,2}}{M_{1,3}} x_2,\ x_2 = t \in \mathbb{R}.$$

Потребни су нам минори: $M_{4,3} = \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -11$, $M_{2,3} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 11$,

$M_{1,4} = \begin{vmatrix} 8 & -5 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} = 22$, па добијамо: $x_1 = \frac{-1-t}{2}$, $x_2 = t$, $x_3 = 1$, односно решење је скуп уређених тројки: $\left\{\left(\frac{-1-t}{2},\ t,\ 1\right) \middle|\ t \in \mathbb{R}\right\}$.

Пример 5: Крамеровом методом решити систем линеарних једначина:

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 - x_5 = 3$$

$$2x_1 \qquad - x_3 + x_4 + 2x_5 = 10$$

$$x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 8$$

У овом примеру постоје три једначине ($m = 3$), са пет непознатих ($n = 5$). Проширена матрица система је $\bar{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 & -4 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 & 10 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 8 \end{bmatrix}$. Прво треба пронаћи минор реда

3 који је различит од нуле. Проверићемо да ли је то баш $M_{1,2,3}$.

$$M_{1,2,3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

У случају да је $M_{1,2,3} = 0$ пронашли бисмо пермутацију, слично као у претходном примеру али пошто је $M_{1,2,3} \neq 0$ можемо применити формулу:

$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j$, где ће j моћи да буде 4 или 5, а , $i \in \{1, 2, 3\}$ па важи:

$$x_1 = \frac{M_{6,2,3}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{5,2,3}}{M_{1,2,3}} x_5 \, , x_2 = \frac{M_{1,6,3}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{1,5,3}}{M_{1,2,3}} x_5,$$

$$x_3 = \frac{M_{1,2,6}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{1,2,5}}{M_{1,2,3}} x_5, \;\; x_4 = t \in \mathbb{R}, x_5 = v \in \mathbb{R}$$

Потребни су нам минори: $M_{6,2,3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 10 & 0 & -1 \\ 8 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 31$, $M_{4,2,3} = \begin{vmatrix} -4 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -3$,

$M_{5,2,3} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, $M_{1,6,3} = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 2 & 10 & -1 \\ 0 & 8 & 1 \end{vmatrix} = 64$, $M_{1,4,3} = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6$,

$M_{1,5,3} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$, $M_{1,2,6} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 10 \\ 0 & 1 & 8 \end{vmatrix} = -8$, $M_{1,2,4} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -13$ и

$M_{1,2,5} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -10$, па добијамо:

$x_1 = \frac{31+3t-2v}{7}$, $x_2 = \frac{64-6t-3v}{7}$, $x_3 = \frac{-8+13t+10v}{7}$, односно скуп решења је скуп уређених петорки:

$$\left\{ \left(\frac{31+3t-2v}{7}, \frac{64-6t-3v}{7}, \;\; \frac{-8+13t+10v}{7}, t, v \right) \middle| \; t, v \in \mathbb{R} \right\}.$$

Пример 6: Крамеровом методом решити систем линеарних једначина:

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 = 2$$

$$4x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 2$$

Јасно се види да је овај систем немогућ, односно да нема решење. Видећемо како то можемо закључити помоћу минора. Проширена матрица система је

$\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ и њен ранг је 2. Неопходно је да главни минор буде различит од нуле. Међутим, какву год пермутацију увели, главни минор ће бити једнак нули што значи да не можемо применити Крамерово правило. Али, можемо приметити да иако је главни минор нула, други минори који би нам били потребни нису сви једнаки нули, па на основу тврђења и његове последице из 2. главе можемо закључити да систем нема решење. Уколико би и главни и помоћни минори били једнаки нули онда бисмо систем морали да решавамо на неки други начин.

Пример 7: Крамеровом методом решити систем линеарних једначина:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1$$

$$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + x_4 = -3$$

Проширена матрица система је $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -4 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$. Пошто постоје три једначине потребно је наћи минор ранга 3 различит од нуле. Међутим, лако се проверава да су сви минори ранга 3 једнаки нули. То значи да матрица $\overline{\mathrm{A}}$ има линеарно зависне врсте, или да систем нема решење. Потребно је одредити ранг матрице $\overline{\mathrm{A}}$ и из система једначина елиминисати једну или више једначина тако да број једначина буде једнак рангу матрице $\overline{\mathrm{A}}$, тачније да преостале једначине буду линеарно независне. Лако се добије да је ранг матрице $\overline{\mathrm{A}}$ два. Довољно је избацити последњу једначину и решавати систем:

$$x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = -2$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 1$$

Проширена матрица новог система је $\overline{\mathrm{A}}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. Ранг ове матрице је 2 и онда треба пронаћи минор ранга 2 који је различит од нуле.

Пошто је $M_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$ можемо применити формулу:

$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j$ где је $m = 2$ (број линерно независних једначина), $n = 4$ (број променљивих), $j \in \{3, 4\}$ а $i \in \{1, 2\}$.

Важи: $x_1 = \frac{M_{5,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_3 - \frac{M_{4,2}}{M_{1,2}} x_4$, $x_2 = \frac{M_{1,5}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_3 - \frac{M_{1,4}}{M_{1,2}} x_4$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$ и $x_4 = v \in \mathbb{R}$. Потребни су нам следећи минори:

$M_{5,2} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$, $M_{3,2} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = 7$, $M_{4,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 7$, као и

$M_{1,5} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7$, $M_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 7$, $M_{1,4} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -7$, па добијамо:

$x_1 = t + v,\ x_2 = -1 + t - v, x_3 = t, x_4 = v,$ односно скуп решења је скуп уређених четворки: $\{(t + v, -1 + t - v,\ \ t,\ \ v) \mid t, v \in \mathbb{R}\}$.

Пример 8: У зависности од параметра a решити систем једначина:

$$3x_1 - x_2 - ax_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Проширена матрица система је $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -a & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ и њен ранг је 2, па је један њен минор ранга 2 на пример $M_{1,2} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$. У овом примеру $m = 2$ (број линерно независних једначина), $n = 3$ (број променљивих), $j \in \{3\}$ а $i \in \{1, 2\}$. Важи:

$x_1 = \frac{M_{4,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_3$, $x_2 = \frac{M_{1,4}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_3$, $x_3 = t \in \mathbb{R}$. Потребни су нам следећи минори:

$M_{4,2} = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $M_{3,2} = \begin{vmatrix} -a & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - a$, $M_{1,4} = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$, и

$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + a$, па добијамо: $x_1 = 1 - \frac{1-a}{4} t, x_2 = -1 - \frac{3+a}{4} t, x_3 = t,$ односно,

за било које $a \in \mathbb{R}$ решење је скуп уређених тројки: $\left\{\left(1 - \frac{1-a}{4} t, -1 - \frac{3+a}{4} t,\ \ t\right) \middle| \ t \in \mathbb{R}\right\}$.

2. начин

Главни минор $M_{1,2}$ није зависио од a, па је систем могао да се реши на исти начин као у претходним примерима. Међутим, уколико уведемо пермутацију $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ онда је главни минор $M_{2,3} = \begin{vmatrix} -1 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1$, који је различит од нуле уколико је

$a \neq 1$. Под тим условом решења добијамо формулама:

$x_2 = \frac{M_{4,3}}{M_{2,3}} - \frac{M_{1,3}}{M_{2,3}} x_1$, $x_3 = \frac{M_{2,4}}{M_{2,3}} - \frac{M_{2,1}}{M_{2,3}} x_1$, $x_1 = t \in \mathbb{R}$. Потребни су нам следећи минори:

$M_{4,3} = \begin{vmatrix} 4 & -a \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 4$, $M_{1,3} = \begin{vmatrix} 3 & -a \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 + a$, $M_{2,4} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -4$, и

$M_{2,1} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -4$, па добијамо:

$x_2 = \frac{4}{a-1} - \frac{3+a}{a-1} t$, $x_3 = \frac{-4}{a-1} - \frac{-4}{a-1} t$, $x_1 = t$, односно, за $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ скуп решења

је скуп уређених тројки: $\left\{ \left(t,\ \frac{4}{a-1} - \frac{3+a}{a-1} t,\ \frac{-4}{a-1} - \frac{-4}{a-1} t \right) \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$.

Ово није крај задатка јер треба испитати шта се дешава са системом уколико је $a = 1$. Крамерово правило можемо користити само када је главни минор различит од нуле.

Ако је $a = 1$ систем изгледа овако:

$$3x_1 - x_2 - x_3 = 4$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Овај систем можемо решити Крамеровом методом користећи минор $M_{1,2}$, или у овом случају лакшом Гаусовом методом. Ако саберемо једначине лако се добије да је $x_1 = 1$, $x_2 = -1 - v$ и $x_3 = v \in \mathbb{R}$, односно, за $a = 1$ скуп решења је скуп уређених тројки: $\{(1, -1 - v,\ v) |\ v \in \mathbb{R}\}$.

Коначно, решење је унија претходна два:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{ \left(t,\ \frac{4}{a-1} - \frac{3+a}{a-1} t,\ \frac{-4}{a-1} - \frac{-4}{a-1} t \right) \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}, \text{ када је } a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

или $(x_1, x_2, x_3) \in \{(1, -1 - v,\ v) |\ v \in \mathbb{R}\}$ када је $a = 1$.

Да ли смо добили иста решења првим и другим начином?

Да. Уколико је $a = 1$, заменом у решење које смо добили у првом случају добија се исто што је и решење у другом. За $a \neq 1$, да бисмо проверили да ли су нам решења добијена на први и други начин иста, узећемо смену $\frac{-4}{a-1} - \frac{-4}{a-1}t = p$ одакле се добија $t = 1 + \frac{a-1}{4}p$. Онда би се скуп решења добијен на други начин могао записати:

$$(x_1, x_2, x_3) \in \left\{ \left(1 + \frac{a-1}{4}p, -1 - \frac{3+a}{4}p,\ p \right) \middle| \, p \in \mathbb{R} \right\}$$

што је исто као и скуп решења добијен на први начин.

Шта би било да смо за главни минор узели нешто друго?

Решење система једначина мора да буде исто без обзира на то на који се начин ради. Уколико је могуће, лакше је одабрати да главни минор не зависи од параметра. Уколико зависи од параметра, постојаће услови под којима смемо да применимо Крамерово правило. Уколико не можемо применити Крамерово правило, не значи да решења у том случају нема, него да треба проверити неком другом методом.

Пример 9: Решити систем у пољу $\mathbb{Z}_5$.

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$$

$$3x_1 + x_2 + 4x_3 = 3$$

Проширена матрица система је $\bar{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ и ако је она ранга 2 онда је $m = 2$, а

$n = 3$ пошто постоје три непознате. Прво треба пронаћи минор реда 2 који је различит од нуле. Проверићемо да ли је то баш $M_{1,2}$.

$$M_{1,2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \equiv_5 1 \ \neq 0$$

Пошто је $M_{1,2} \neq 0$ матрица $\bar{\mathrm{A}}$ јесте ранга 2 и можемо применити формулу:

$x_i = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+1,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\dots,i-1,j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}} x_j$ где ће j моћи да буде

само 3, а $i \in \{1, 2\}$ па важи: $x_1 = \frac{M_{4,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_3$, $x_2 = \frac{M_{1,4}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_3$, а $x_3 = t \in \mathbb{Z}_5$.

Потребни су нам минори: $M_{4,2} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4 \equiv_5 1$, $M_{3,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -7 \equiv_5 3$,

$M_{1,4} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$, $M_{1,3} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5 \equiv_5 0$, па добијамо: $x_1 = 1 - 3t$, $x_2 = 0$, $x_3 = t$,

односно скуп свих решења је скуп уређених тројки:

$\{(1-3t, 0, \ t) |\ t \in \mathbb{Z}_5\} = \{(1,0,0), (3,0,1), (0,0,2), (2,0,3), (4,0,4)\}$

Пример 10: Решити систем у пољу $\mathbb{Z}_3$.

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 \qquad\quad + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 &= 1 \\ 2x_1 \qquad + x_3 + x_4 \qquad &= 0 \end{aligned}$$

Проширена матрица овог система је $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. Потребно је проверити да ли постоји минор реда 3 који је различит од нуле.

Пошто је $M_{1,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \equiv_3 2 \neq 0$ можемо применити формулу:

$x_i = \frac{M_{1,2,\ldots,i-1,n+1,i+1,\ldots,m-1,m}}{M_{1,2,\ldots,m}} - \sum_{j=m+1}^{n} \frac{M_{1,2,\ldots,i-1,j,i+1,\ldots,m-1,m}}{M_{1,2,\ldots,m}} x_j$ где је $m = 3$ (број линерно независних једначина), $n = 5$ (број променљивих), $j \in \{4, 5\}$ а , $i \in \{1, 2, 3\}$.

Важи: $x_1 = \frac{M_{6,2,3}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{5,2,3}}{M_{1,2,3}} x_5$, $x_2 = \frac{M_{1,6,3}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{1,5,3}}{M_{1,2,3}} x_5$,

$x_3 = \frac{M_{1,2,6}}{M_{1,2,3}} - \frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}} x_4 - \frac{M_{1,2,5}}{M_{1,2,3}} x_5$ и $x_4 = t \in \mathbb{Z}_3, x_5 = v \in \mathbb{Z}_3$. Потребни су нам следећи минори: $M_{6,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \equiv_3 2$, $M_{4,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \equiv_3 2$,

$M_{5,2,3} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -3 \equiv_3 0$, $M_{1,6,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \equiv_3 0$,

$M_{1,4,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \equiv_3 0$, $M_{1,5,3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \equiv_3 1$,

$M_{1,2,6} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $M_{1,2,4} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 7 \equiv_3 1$, $M_{1,2,5} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 6 \equiv_3 0$, па добијамо: $x_1 = 1 + 2t\ , x_2 = v,\ x_3 = 1 + t,\ x_4 = t, \quad x_5 = v$, односно скуп решења је скуп уређених петорки:

$$\{(1 + 2t, v,\ 1 + t,\ t,\ v) |\ t, v \in \mathbb{Z}_3\} = \{(1, 0, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0, 1), (1, 2, 1, 0, 2),$$

$$(0, 0, 2, 1, 0), (0, 1, 2, 1, 1), (0, 2, 2, 1, 2), (2, 0, 0, 2, 0), (2, 1, 0, 2, 1), (2, 2, 0, 2, 2)\}.$$

4. Крамерово правило за матричне једначине

Посматраћемо матричну једначину $AX = B$ у пољу K, где је $A \in K^{m\times n}$, $X \in K^{n\times k}$, $B \in K^{m\times k}$, $m \leq n$, и матрица A је ранга m. Поменута матрична једначина се може записати и као k система линеарних једначина $AX_l = B_l$, где је $l \in \{1, 2, \dots, k\}$, $X_l \in K^n$ је $l-$ та колона матрице X, а $B_l \in K^m$ је $l-$ та колона матрице B.

У следећој теореми претпоставићемо да је $m = n$ и у том случају она је последица Крамеровог правила.

Теорема: Нека је $\bar{A}$ проширена $n \times (n+k)$ матрица матричне једначине $AX = B$. Ако је њен минор $M_{1,2,\dots,n} \neq 0$ онда је решење:

$$x_{i,j} = \frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+j,i+1,\dots,n-1,n}}{M_{1,2,\dots,n}} \text{ где } i \in \{1,2,\dots,n\},\ j \in \{1,2,\dots,k\}.$$

У следећој теореми претпоставићемо да је $m < n$ и у том случају она је последица проширеног Крамеровог правила 2.

Теорема: Нека је $\bar{A}$ проширена $m \times (n+k)$ матрица матричне једначине $AX = B$, и нека је $m < n$. Нека је $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$ било која пермутација при којој је минор $M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)} \neq 0$. Онда је решење матричне једначине скуп свих $n \times k$ матрица чије су колоне $(x_{\sigma(1),j}, x_{\sigma(2),j}, \dots, x_{\sigma(n),j})^T$ тако да су $x_{\sigma(m+1),j}, \dots, x_{\sigma(n),j}$ произвољни елементи из поља K, а за $i \in \{1,2,\dots,m\}$ и $j \in \{1,2,\dots,k\}$ важи:

$$x_{\sigma(i),j} = \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1),n+j,\sigma(i+1),\dots,\sigma(m-1),\sigma(m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)}} - \sum_{s=m+1}^{n} \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(i-1),\sigma(s),\sigma(i+1),\dots,\sigma(m-1),\sigma(m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\dots,\sigma(m)}} x_{\sigma(s),j}.$$

Напомена: Ако је ранг матрице A мањи од m, онда пермутација σ, поменута у претходној теореми, не постоји.

Пример 11: Решити Крамеровом методом следећу матричну једначину:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} \\ x_{2,1} & x_{2,2} \\ x_{3,1} & x_{3,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 14 & 17 \end{bmatrix}$$

Проширена матрица система је $\overline{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 14 & 17 \end{bmatrix}$. Пробаћемо да нађемо минор

различит од нуле. На пример: $M_{1,2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, па можемо да користимо формулу

$$x_{\sigma(i),j} = \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i-1),n+j,\sigma(\,i+1),\ldots,\sigma(m-1),\sigma(\,m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(m)}} -$$

$\sum_{s\,=\,m+1}^{n} \frac{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(i-1),\sigma(s),\sigma(\,i+1),\ldots,\sigma(m-1),\sigma(\,m)}}{M_{\sigma(1),\sigma(2),\ldots,\sigma(m)}} x_{\,\sigma(s),j}$ из претходне теореме, где је $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, односно пермутација није ни потребна, $m = 2$, $n = 3$, j је 1 или 2, $s = 3$. Добијамо следеће:

$$x_{1,1} = \frac{M_{4,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_{3,1}\,, x_{1,2} = \frac{M_{5,2}}{M_{1,2}} - \frac{M_{3,2}}{M_{1,2}} x_{3,2},\ x_{2,1} = \frac{M_{1,4}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_{3,1},$$

$x_{2,2} = \frac{M_{1,5}}{M_{1,2}} - \frac{M_{1,3}}{M_{1,2}} x_{3,2}$, а $x_{3,1} = t_1 \in \mathbb{R}$, $x_{3,2} = t_2 \in \mathbb{R}$. Потребни су нам следећи минори:

$M_{4,2} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 14 & 5 \end{vmatrix} = -3$, $M_{3,2} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = 3$, $M_{5,2} = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 17 & 5 \end{vmatrix} = 6$, $M_{1,4} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 14 \end{vmatrix} = -6$,

$M_{1,3} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -6$, $M_{1,5} = \begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & 17 \end{vmatrix} = -15$ па добијамо:

$x_{1,1} = 1 + t_1, x_{1,2} = -2 + t_2,\ x_{2,1} = 2 - 2t_1, x_{2,2} = 5 - 2t_2\,, x_{3.1} = t_1, x_{3,2} = t_2,$ односно скуп решења је скуп матрица:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 + t_1 & -2 + t_2 \\ 2 - 2t_1 & 5 - 2t_2 \\ t_1 & t_2 \end{bmatrix} \middle|\, t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Пример 12: Решити Крамеровом методом следећу матричну једначину у пољу $\mathbb{Z}_2$:

$$\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&1\\1&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{1,1}&x_{1,2}&x_{1,3}\\x_{2,1}&x_{2,2}&x_{2,3}\\x_{3,1}&x_{3,2}&x_{3,3}\\x_{4,1}&x_{4,2}&x_{4,3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&1\\1&1&1\end{bmatrix}$$

Проширена матрица система је $\overline{\mathrm{A}}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1&0&1\\0&1&0&1&0&1&1\\1&1&0&1&1&1&1\end{bmatrix}$. Потребно је наћи минор различит од нуле. На пример: $M_{1,2,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\equiv_2 1\neq 0$ па можемо да користимо формулу

$$x_{i,j}=\frac{M_{1,2,\dots,i-1,n+j,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}}-\sum_{s\,=\,m+1}^{n}\frac{M_{1,2,\dots,i-1,s,i+1,\dots,m-1,m}}{M_{1,2,\dots,m}}x_{s,j}$$

где је $m=3$, $n=4$, $j\in\{1,2,3\}$, $s=4$. Добијамо следеће:

$$x_{1,1}=\frac{M_{5,2,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,1},\ x_{1,2}=\frac{M_{6,2,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,2},\ x_{1,3}=\frac{M_{7,2,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{4,2,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,3},$$

$$x_{2,1}=\frac{M_{1,5,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,1},\ x_{2,2}=\frac{M_{1,6,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,2},\ x_{2,3}=\frac{M_{1,7,3}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,4,3}}{M_{1,2,3}}x_{4,3},$$

$$x_{3,1}=\frac{M_{1,2,5}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}}x_{4,1},\ x_{3,2}=\frac{M_{1,2,6}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}}x_{4,2},\ x_{3,3}=\frac{M_{1,2,7}}{M_{1,2,3}}-\frac{M_{1,2,4}}{M_{1,2,3}}x_{4,3},$$

а $x_{4,1}=t_1\in\mathbb{Z}_2$, $x_{4,2}=t_2\in\mathbb{Z}_2$, $x_{4,3}=t_3\in\mathbb{Z}_2$. Потребни су нам следећи минори:

$$M_{5,2,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\equiv_2 1,\ M_{4,2,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0,\ M_{6,2,3}=\begin{vmatrix}0&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{7,2,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0,\ M_{1,5,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&0\\1&1&0\end{vmatrix}=0,\ M_{1,4,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\equiv_2 1,$$

$$M_{1,6,3}=\begin{vmatrix}1&0&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\equiv_2 1,\ M_{1,7,3}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&0\end{vmatrix}=-1\equiv_2 1,\ M_{1,2,5}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\1&1&1\end{vmatrix}=0,$$

$$M_{1,2,4}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0,\ M_{1,2,6}=\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=1,\ M_{1,2,7}=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&1\\1&1&1\end{vmatrix}=0$$

па добијамо:

$x_{1,1} = 1,\ x_{1,2} = 0,\ \ x_{1,3} = 0,\ \ x_{2,1} = t_1,\ x_{2,2} = 1 + t_2,\ \ x_{2,3} = 1 + t_3,\ \ x_{3,1} = 0,\ x_{3,2} = 1,$ $x_{3,3} = 0$, $x_{4,1} = t_1$, $x_{4,2} = t_2$, $x_{4,3} = t_3$, односно скуп решења је скуп матрица:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ t_1 & 1 + t_2 & 1 + t_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ t_1 & t_2 & t_3 \end{bmatrix} \middle| \, t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{Z}_2 \right\} =$$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

5. Литература

1. A. Akhtyamov, M. Amram, M. Dagan, A. Mouftahkov, *The teaching of mathematics* , Vol XX, 1, pp. 13-19, 2017.
2. Г. Калајџић, *Линеарна алгебра*, Математички факултет, Београд, 1994.
3. А. Липковски, *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Завод за уџбенике, Београд, 2007.
4. https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Cramer/