УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Сузана Милићевић

ГЕОМЕТРИЈА СФЕРНИХ ТРОУГЛОВА

мастер рад

Београд, 2022.

Ментор:

др Срђан Вукмировић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Мирослава Антић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Тијана Шукиловић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: септембар 2022.

Садржај

Увод

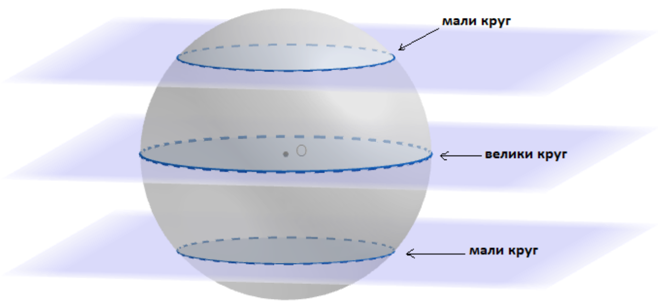
Геометрија сферних троуглова је област сферне геометрије која има велику примену у астрономији, навигацији, геодезији и стереометрији. Изучавање сферне геометрије, а самим тим и сферног троугла датира још из времена старе Грчке и њен развој је настављен до данашњих дана. Дуго је проучавана због својих практичних примена, сферна геометрија има многе сличности и повезнице, али и многе разлике у односу на еуклидску геометрију. У овом раду биће дати конкретни примери и сликовити прикази.
У првој глави уводимо важне појмове из сферне геометрије који ће нам требати у раду. У глави два уводимо појам сферног троугла, разматрамо какве врсте и какве особине поседују сферни троуглови, такође уводимо и појам поларног троугла. Глава три се бави подударношћу сферних троуглова, неједнакостима које важе за углове и странице и површином сферног троугла. У четвртој глави је дата тригонометрија, сферна Питагорина теорема, сферна синусна теорема, сферна косинусна теорема, синусно-косинусна теорема као и четвороелементни образац. Последњи део рада посвећен је решавању сферних троуглова како правоуглих тако и косуглих и видећемо неке конкретне рачунске примере везане за навигацију и астрономију.
Текст овог мастер рада је сложен у LaTeX-у, употребом платформе Overleaf [6], а слике су нацртане у Geogebri [7].

Глава 1

Дефиниције и основне особине сфере

Дефиниција 1.1. *Сфера је геометријско место тачака простора чије је растојање од дате тачке O једнако датој дужи r. Тачка O се назива **центар сфере**, а дата дуж r се назива полупречник сфере.*

Дефиниција 1.2. *Пресек сфере и равни која садржи центар сфере јесте **велики круг** сфере. Ако раван не садржи центар сфере, тада се тај пресек назива **мали круг** сфере (1.1).*



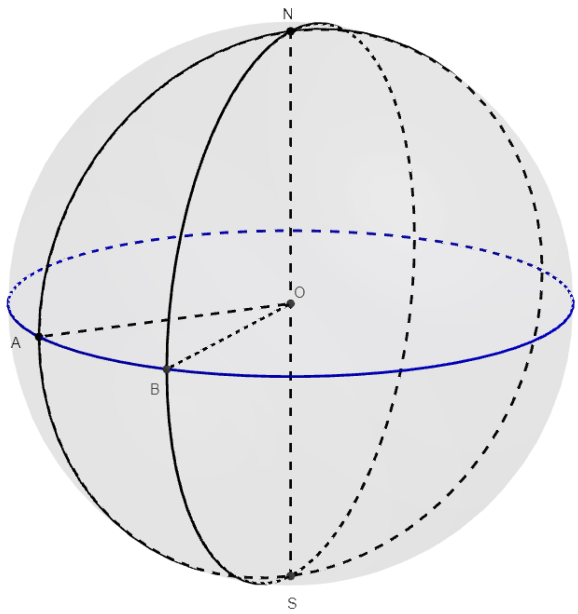
Слика 1.1: Сфера пресечена равнима на велики и мали круг

Дефиниција 1.3. *Оса било ког великог круга (или лука) сфере је пречник сфере који је нормалан на раван тог круга. Крајње тачке осе називају се **полови**.*

Дефиниција 1.4. *За две различите тачке на сфери кажемо да су* ***антиподалне*** *ако права која пролази кроз њих садржи центар сфере. Једна тачка је* ***антипода*** *друге.*

Ако је тачка A антиподална тачки B пишемо $A = B^a$ или $B = A^a$. Такође полови великог круга су антиподални.

Пропозиција 1.1. *Два различита велика круга секу се тачно у две тачке и оне су антиподалне. Те две тачке деле сваки велики круг на два велика полукруга.*

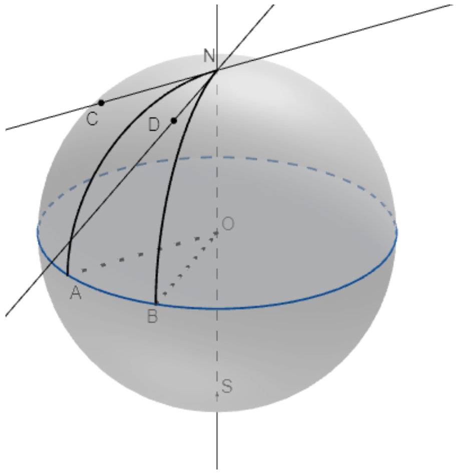


Слика 1.2: Велики кругови који се секу у антиподалним тачкама N и S. На слици су дати и велики полукруг NAS, лук $\overset{\frown}{AB}$, и кружни исечак NASBN.

Пропозиција 1.2. *Ако две различите тачке на сфери нису антиподалне тада постоји јединствени велики круг који пролази кроз њих.*

Две различите (неантиподалне) тачке A и B чине велики круг и деле га на два лука, већи и мањи. Када будемо говорили о луковима подразумеваћемо мањи лук и обележавати га са $\overset{\frown}{AB}$, где су A и B крајње тачке.

Сферну удаљеност између две тачке дефинисаћемо као меру дужине мањег лука великог круга између те две тачке. Ако имамо лук круга полупречника r и централног угла θ тада је његова дужина $r\theta$.
Велики полукруг има меру од π радијана ($180°$). Да бисмо избегли дилему да ли говоримо о радијанима или степенима, рећи ћемо да су две тачке удаљене за „полукруг" (rπ радијана (узимаћемо да је r=1), $180°$) или за „четвртину круга" ($\pi/2$ радијана, $90°$).



Слика 1.3: Мера сферног угла

Слика 1.3. нам показује како да разумемо меру угла између великих углова сфере. Велики кружни лукови $\overset{\frown}{NA}$ и $\overset{\frown}{NB}$ леже на странама сферног угла. Зракови $\overrightarrow{\mathrm{N}C}$ и $\overrightarrow{\mathrm{N}D}$ су тангенте тим луковима у N. Мера угла између тих зракова ($\angle$CND) је мера угла између тих лукова. Како је $\overrightarrow{\mathrm{O}A}$ паралелан са $\overrightarrow{\mathrm{N}C}$ и $\overrightarrow{\mathrm{O}B}$ паралелан са $\overrightarrow{\mathrm{N}D}$, мере углова $\angle$CND и $\angle$AOB су једнаке. Горе смо назначили да је мера лука $\overset{\frown}{AB}$ једнака мери угла $\angle$AOB. Тада $\overset{\frown}{AB} = \angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{CND}$ а то је мера сферног угла $\prec$ANB. Стога мера угла између два велика круга је мера угла између равни које их садрже у простору.

Пропозиција 1.3. ***Велики круг*** *сфере s је скуп свих тачака сфере s које леже на сферној удаљености четвртине круга од великог полукруга.*

Пропозиција 1.4. ***Мали круг*** *сфере је скуп тачака сфере које су на фиксној сферној удаљености ρ мањој од четвртине круга од једног његовог пола P.*

Дефиниција 1.5. *Тачка P из Пропозиције 1.4 се назива (сферни) центар малог круга, и вредност ρ се назива (сферни) полупречник малог круга.*

Глава 2

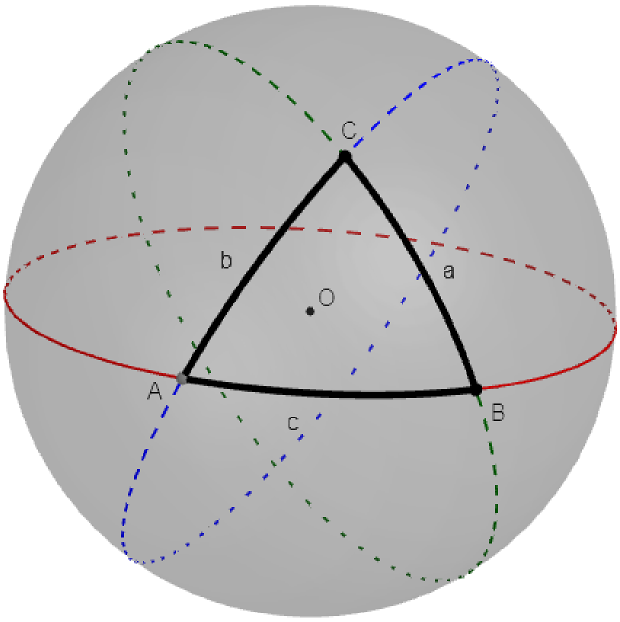
Сферни троуглови

У раванској геометрији, троугао настаје спајањем три неколинеарне тачке. Слично ћемо урадити и у сферној геометрији (уместо неколинеарних тачака имаћемо тачке које не леже на једном великом кругу, и спојићемо их луковима великог круга). Али пре него што то урадимо, јавиће се проблем. Ако три тачке не леже на великом кругу и чине јединствен сферни троугао, да ли је могуће да је неки пар од њих антиподалан - што би значило да не постоји јединствен лук великог круга који пролази кроз њих? Одговор је, на срећу, негативан.

2.1 Основна својства и врсте сферних троуглова

Дефиниција 2.1. *Нека су A, B, C три сферне тачке које не леже на једном великом кругу. Тада сферни троугао $\triangle^s ABC$ јесте унија лукова $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AC}$. Свака од ових тачака A, B, C се назива теме сферног троугла $\triangle^s ABC$. Лукови $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{BC}$,$\overset{\frown}{AC}$ се називају странице сферног троугла $\triangle^s ABC$, док су $\prec CAB$, $\prec ABC$, $\prec BCA$ или ($\prec A$,$\prec B$,$\prec C$) су углови сферног троугла $\triangle^s ABC$. Слика (2.1).*

Ниједна од тачака A, B, C није антиподална, па су три сферна лука из Дефиниције 2.1 добро дефинисана.
Дефинишимо сада неколико типова сферних троуглова.

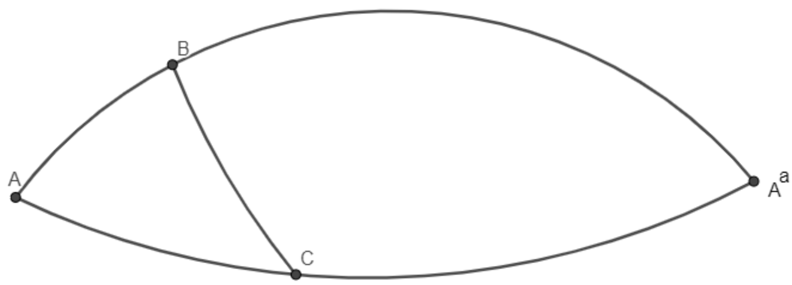


Слика 2.1: Сферни троугао $\triangle^s ABC$

Дефиниција 2.2. *Два троугла су* ***колунарна*** *ако имају два заједничка темена и један пар темена је антиподалан (слика 2.2).*

Колунарни троуглови су означени $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s A^a BC$ где су A и A^a антиподалне.

Приметимо да је унија два различита колунарна троугла кружни исечак (луна).



Слика 2.2: Колунарни троуглови $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s A^a BC$

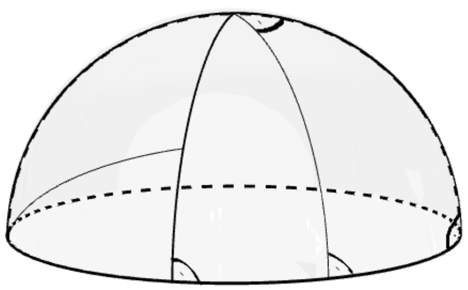
Пропозиција 2.1. *Нека је дат сферни троугао $\triangle^s ABC$ и A^a антиподална од A, тада три тачке A^a, B и C формирају сферни троугао где су лукови $\widehat{A^aB}$, $\widehat{A^aC}$ и углови $\prec A^aBC$, $\prec A^aCB$ суплементни луковима $\widehat{AB}$,$\widehat{AC}$ и угловима $\prec ABC$, $\prec ACB$, редом.*

Дефиниција 2.3. *Два троугла су* ***антиподална*** *ако се могу записати као $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s A^aB^aC^a$ где су A^a, B^a, C^a антиподалне са A, B, C респективно.*

Пропозиција 2.2. *Нека је $\triangle^s ABC$ сферни троугао, тада три антиподе A^a, B^a, C^a чине сферни троугао чије су странице и углови подударни страницама и угловима сферног троугла $\triangle^s ABC$.*

Ова пропозиција је последица чињенице да је „антиподално” пресликавање $A \to A^a$ централна рефлексија простора која је изометрија простора, па зато чува дужине и углове.

Дефиниција 2.4. *Сферни троугао је правоугли троугао ако је најмање један угао прав угао. Страница троугла насрам правог угла јесте хипотенуза правоуглог сферног троугла. Страница троугла која није хипотенуза назива се крак троугла.*



Слика 2.3: Сферни троуглови са једним, два и три права угла

Дефиниција 2.5. *Сферни троугао називамо* ***квадрантал*** *уколико је једна од његових страница $\frac{1}{4}$ круга. Страница која је $\frac{1}{4}$ круга назива се* ***права страница****.*

Дефиниција 2.6. *Сферни троугао $\triangle^s ABC$ је* ***једнакокраки*** *ако је $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}$. Углови код темена B и C су углови на основици тог троугла $\triangle^s ABC$. Троугао је* ***једнакостраничан*** *ако су му све странице подударне.*

Пропозиција 2.3. *Претпоставимо да у сферним троугловима $\triangle^s A_1B_1C_1$ и $\triangle^s A_2B_2C_2$, имамо $\overset{\frown}{A_1B_1}\cong\overset{\frown}{A_2B_2}$ и $\overset{\frown}{B_1C_1}\cong\overset{\frown}{B_2C_2}$. Тада $\prec A_1B_1C_1 \cong\prec A_2B_2C_2$ ако и само ако $\overset{\frown}{A_1C_1}\cong\overset{\frown}{A_2C_2}$.*

Теорема 2.1. *Код једнакокраког сферног троугла, углови наспрам подударних страница су такође подударни.*

Доказ. Претпоставимо да у сферном троуглу $\triangle^s ABC$, важи $\overset{\frown}{AB}\cong\overset{\frown}{AC}$. Упоредимо углове $\prec ABC$ и $\prec ACB$: $\overset{\frown}{AB}\cong\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{BC}\cong\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{AC}\cong\overset{\frown}{AB}$. На основу Пропозиције 2.3 $\prec ABC \cong\prec ACB$ као што је требало доказати. □

Докажимо сада неколико пропозиција у сферној геометрији које показују како се сферни простор разликује од еуклидског. Треба се навићи да у еуклидској геометрији троуглови могу имати само један прав угао док у сферној геометрији могу имати и више правих углова и следеће показује зашто.

Дефиниција 2.7. *Нормалне (праве) странице зовемо странице које су четвртине круга, оштрим страницама називамо оне које су мање од четвртине круга и тупе странице су оне које су веће од четвртине круга.*

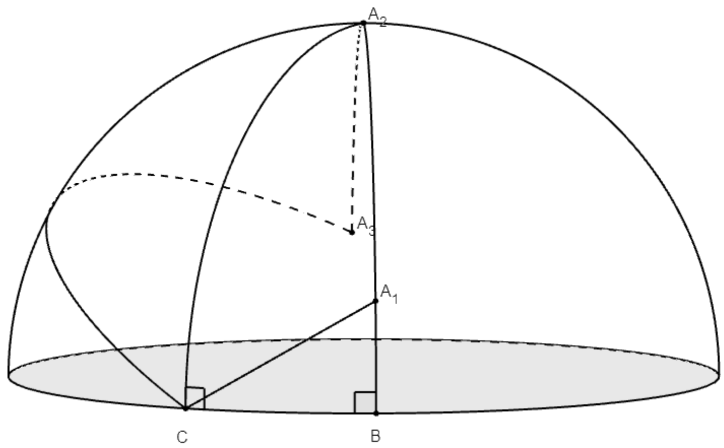
Пропозиција 2.4. *Пар углова у сферном троуглу су прави углови акко су наспрамне странице праве странице.*

Доказ. Претпоставимо да су у сферном троуглу $\triangle^s ABC$, углови $\prec B$ и $\prec C$ оба права. Тада су велики кругови $\bigcirc AB$ и $\bigcirc AC$ оба нормална на $\bigcirc BC$, јер пролазе кроз полове $\bigcirc BC$ (а знамо да ако велики круг пролази кроз пол другог великог круга онда су они нормални један на други). Како су $\bigcirc AB$ и $\bigcirc AC$ различити, они се секу само у две тачке које морају бити полови $\bigcirc BC$. Како је A једна од тих тачака, то је пол од $\bigcirc BC$, па су $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ обе праве странице јер свака тачка великог круга лежи на $\frac{1}{4}$ круга од сваког пола.

Обрнуто, претпоставимо да су $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ праве странице. Према Теореми сферне геометрије (ако су A,B,C три тачке сфере, $\overset{\frown}{BA}$ и $\overset{\frown}{BC}$ су оба четвртине круга и A и C нису исте тачке нити антиподалне тада је B пол великог круга $\bigcirc AC$) A је пол од $\bigcirc BC$. Према раније поменутом $\bigcirc AB$ и $\bigcirc AC$ су оба нормална на $\bigcirc BC$, па сферни троугао $\triangle^s ABC$ има праве углове код B и C. $\square$

У раванској геометрији ако троугао има један прав угао остали морају бити оштри, у сферној геометрији то није случај.

Пропозиција 2.5. *Нека је код темена B прав угао сферног троугла $\triangle^s ABC$. Тада су остали углови тог сферног троугла оштри, тупи или прави акко су наспрамне странице оштре,тупе или праве, респективно.*



Слика 2.4: Пропозиција 2.5 , случај $A = A_1, A_2, A_3$

Доказ. Како имамо прав угао код темена B онда $\bigcirc AB$ пролази кроз полове $\bigcirc BC$. Нека је A' пол од $\bigcirc BC$ са исте стране круга $\bigcirc BC$ као A. Тада су $\vec{BA}$ и $\vec{BA'}$ обе нормалне на круг $\bigcirc BC$ у B, и A, A' су на истој страни $\bigcirc BC$ па важи $\vec{BA} \cong \vec{BA'}$. Ако је страница $\overset{\frown}{BA}$ права страница, тада $A = A'$. Важи и да $\bigcirc AC$ је нормалан на $\bigcirc BC$, па је и $\prec C$ прав угао, што смо и желели да покажемо.

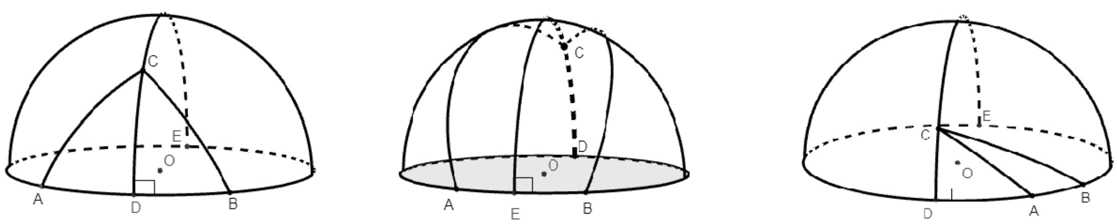
Ако је страница $\overset{\frown}{BA}$ оштра, тада је A између B и A' јер $\overset{\frown}{BA}<\overset{\frown}{BA'}=\frac{\pi}{2}$. Закључујемо да је A у унутрашњости $\prec A'CB$ и важи $\prec ACB<\prec A'CB=\frac{\pi}{2}$, па је $\prec ACB$ оштар.

Ако је $\widehat{BA}$ тупа страница, тада је A' између B и A (како $\widehat{BA} > \widehat{BA'} = \frac{\pi}{2}$). Закључујемо да је A' у унутрашњости $\prec ACB$ и $\prec ACB > \prec A'CB = \frac{\pi}{2}$, па је $\prec ACB$, па је $\prec ACB$ туп. □

Аналогно еуклидској геометрији, код сферне геометрије лук између темена троугла и тачке на наспрамној страници сферног троугла се назива **чевијана троугла**. Ако је тачка на средини наспрамне странице чевијану зовемо **тежишна дуж** и чевијана која полови угао код темена троугла се назива **симетрална дуж**. Лук између темена троугла и великог круга који садржи наспрамну страницу тог троугла и који је нормалан на велики круг назива се **висина** троугла. Како у еуклидској геометрији, висина из темена троугла која сече наспрамну страницу, дели угао на два оштра угла код темена, варијација овог тврђења важи и код сфере.

Пропозиција 2.6. *Нека у сферном троуглу $\triangle^s ABC$, углови $\prec A$ и $\prec B$ нису прави углови, тада тачка C није пол од $\bigcirc AB$. Нека су D и E тачке подножја краће и дуже висине из тачке C на $\bigcirc AB$, респективно. Можемо утврдити положај тачака D и E као што следи:*

1. *D је на ивици $\widehat{AB}$ ако и само ако $\prec A$ и $\prec B$ су оба оштра.*
2. *E је на ивици $\widehat{AB}$ ако и само ако $\prec A$ и $\prec B$ су оба тупа.*
3. *Ни D ни E нису на ивици $\widehat{AB}$ ако и само ако $\prec A$ је оштар и $\prec B$ туп (и обратно $\prec A$ туп,а $\prec B$ оштар).*



Слика 2.5: Пропозиција 2.6 , случајеви 1, 2 и 3.

Доказ. Ако је C пол од $\bigcirc AB$, тада су лукови $\overset{\frown}{CA}$ и $\overset{\frown}{CB}$ нормалне странице па према Пропозицији 2.4 $\prec A$ и $\prec B$ су прави углови, што је контрадикција са претпоставком. Тако да C није пол од $\bigcirc AB$. Ако ни $\prec A$ ни $\prec B$ нису прави углови тада D и E су различите од тачака A и B (ако би D било једнако са A, нпр, тада $\prec A$ би био прав). Приметимо још да D и E не могу бити истовремено на ивици $\overset{\frown}{AB}$ јер су D и E антиподалне. Према томе :

1. D је на ивици $\overset{\frown}{AB}$ а E није;
2. E је на ивици $\overset{\frown}{AB}$ а D није;
3. Ни D ни E нису на ивици $\overset{\frown}{AB}$.

Размотримо сваки случај:

1. Претпоставимо да је D на страници $\overset{\frown}{AB}$. Тада $\prec CAB$ је исти као $\prec CAD$ и $\prec CBA$ је исти као $\prec CBD$. Примењујући претходну Пропозицију 2.5 на троуглове $\triangle^s CAD$ и $\triangle^s CBD$, како је $\overset{\frown}{CD}$ оштра страница онда су $\prec A$ и $\prec B$ такође оштри.

2. Претпоставимо да је E на страници $\overset{\frown}{AB}$. Аналогно доказу под (1) заменимо D са E и „оштар" са „туп" закључујемо да су $\prec A$ и $\prec B$ тупи.

3. Претпоставимо да ни D ни E нису на страници $\overset{\frown}{AB}$. Применимо претходну пропозицију на $\triangle^s CAD$ и $\triangle^s CBD$ закључујемо да $\prec CAD$ и $\prec CBD$ су оштри. Тада су A и B са исте стране $\bigcirc CD = \bigcirc CE$ јер да су са различитих страна, лук $\overset{\frown}{AB}$ би секао велики круг а то би могло само у случају пресека кругова $\bigcirc AB$ и $\bigcirc CD$ - што би било или D или E, а то није могуће по претпоставци. Према томе важи да је $\vec{DA} = \vec{DB}$. Ако је A између D и B тада $\vec{AD} = \vec{AB}$ су супротне па углови $\prec CAB$ и $\prec CAD$ су суплементни. Штавише, $\vec{BA} = \vec{BD}$ па $\prec CBA = \prec CBD$. Затим $\prec CAB$ је туп и $\prec CBA$ је оштар. Ако је B између D и A тада $\prec CAB$ је једнак са $\prec CAD$ и $\prec CBA$ је суплементан са $\prec CBD$. Тада $\prec CBA$ је туп, а $\prec CAB$ оштар.

   У обрнутом смеру, претпоставимо да су $\prec A$ и $\prec B$ оба оштра угла. Ако је E између A и B тада према малопре доказаном, $\prec A$ и $\prec B$ су оба тупа што то је контрадикција. Уколико ни E ни D нису између A и B тада према малопре доказаном, један од углова $\prec A$ или $\prec B$ је туп, контрадикција. Јединa могућност која остаје јесте да је D између A и

B.

Исти аргументи важе ако су $\prec A$ и $\prec B$ оба тупа, или ако је један туп а други оштар.

$\square$

2.2 Поларни троугао

Морамо увести нотације које немају еквивалент у еуклидској геометрији, а које ће бити корисне за разумевање многих релација у сферним троугловима. Рецимо, посматрајмо сферни троугао $\triangle^s ABC$, тачка A се не налази на великом кругу $\bigcirc BC$. Према томе тачка A мора бити у једној од две хемисфере на које је тај $\bigcirc BC$ поделио сферу. Означимо пол те хемисфере са A'. Дакле, уколико је велики круг кроз B и C екватор, а теме A на северној хемисфери, онда је A' Северни пол, а слично можемо дефинисати тачке B' и C'. За нови троугао A'B'C' кажемо да је **поларан** троуглу ABC, што нам даје и следећа дефиниција.

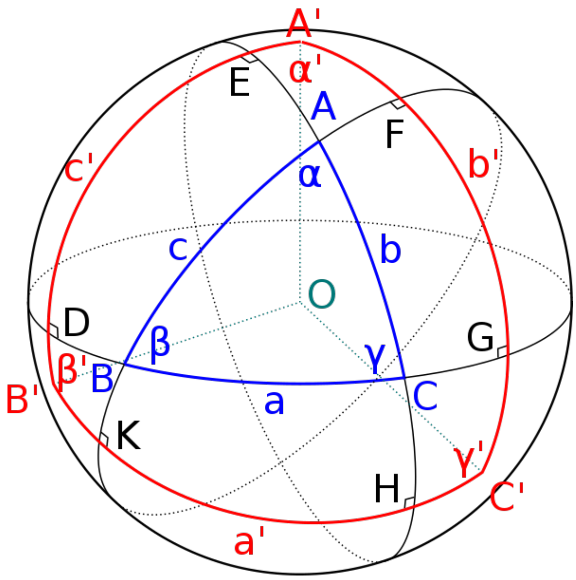
Дефиниција 2.8. *Нека је $\triangle^s ABC$ сферни троугао. Дефинишемо **поларни троугао** $\triangle^s A'B'C'$ троугла $\triangle^s ABC$ (такође зовемо некад и суплементни или дуални троугао) на следећи начин :*
Нека је A' пол $\bigcirc BC$ који лежи са исте стране од $\bigcirc BC$ као A. Дефинишемо B' и C' аналогно, B' је пол $\bigcirc AC$ који лежи са исте стране од $\bigcirc AC$ као B, C' је пол $\bigcirc AB$ који лежи са исте стране од $\bigcirc AB$ као C.

Треба проверити да ли је троугао $\triangle^s A'B'C'$ добро дефинисан.

Теорема 2.2. *Ако је $\triangle^s ABC$ добро дефинисан сферни троугао, $\triangle^s A'B'C'$ је такође, тј. тачке A', B', C' не леже на великом кругу.*

Пре доказа ове теореме даћемо лему која ће нам бити од помоћи у доказу:

Лема 2.3. *Велики круг је скуп свих тачака сфере које су на сферној удаљености једне четвртине круга од његових полова.*



Слика 2.6: Сферни троугао $\triangle^s ABC$ и његов поларни троугао $\triangle^s A'B'C'$ [10]

Доказ Теореме 2.2. Претпоставимо да A',B',C' све леже на великом кругу Γ са половима N, S. Према Леми 2.3 тачке на $\bigcirc BC$ су скуп свих тачака на Γ на удаљености $\frac{1}{4}$ круга од A'. Како N и S су на сферној удаљености $\frac{1}{4}$ круга од A', N и S леже на кругу $\bigcirc BC$. Слично закључујемо да N и S припадају $\bigcirc AB$ и $\bigcirc AC$. Како A,B,C не леже на истом великом кругу, $\bigcirc AB$ и $\bigcirc BC$ морају бити различити. Према томе, ова два круга секу се у само две тачке (према пропозицији од раније) и то су N и S. С обзиром да кругови $\bigcirc AB$ и $\bigcirc BC$ такође имају заједничку тачку B, па B мора бити иста као N или S. Слични аргументи показују да је A иста са N или S, и C такође иста са N или S. Међутим, тада A, B, C леже на једном великом кругу (било који велики круг који пролази кроз N и S, садржи A, B, C). Ово је контрадикција, претпоставка је погрешна, и A',B',C' не могу припадати једном истом великом кругу. □

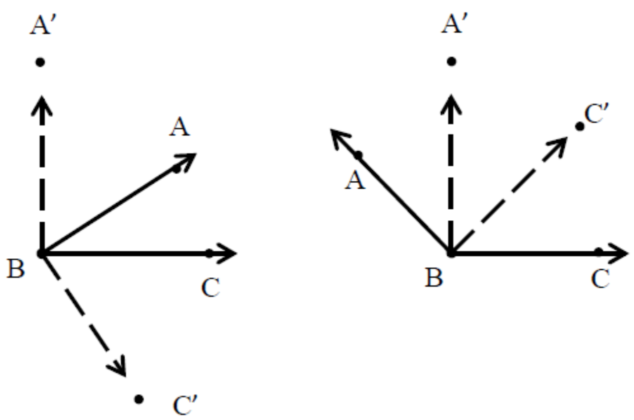
Следећа теорема је један од разлога зашто се поларни троугао још назива и *дуални*.

Теорема 2.4. *Поларни троугао сферног* $\triangle^s A'B'C'$ *је* $\triangle^s ABC$.

Доказ. Како су C и C' са исте стране $\bigcirc AB$, и C' је пол од $\bigcirc AB$, растојање између C и C' је строго мање од $\frac{\pi}{2}$. Како је A' пол од $\bigcirc BC$, A' је на растојању $\frac{\pi}{2}$ од C. Како је B' пол од $\bigcirc AC$, B' је на растојању $\frac{\pi}{2}$ од C. Тачке A' и B' су темена сферног троугла, оне нису идентичне и нису антиподалне. Према томе закључујемо (према Дефиницији 2.1) да је $\bigcirc A'B'$ добро дефинисан. Како су A’ и B’ обе на растојању $\frac{\pi}{2}$ од C, значи да је и свака тачка круга $\bigcirc A'B'$ је на растојању $\frac{\pi}{2}$ од C и тачка C је један од полова $\bigcirc A'B'$. Како су C и C’ једна од друге на растојању мањем од $\frac{\pi}{2}$, и C је пол од $\bigcirc A'B'$, C’ мора бити са исте стране круга $\bigcirc A'B'$ као C. Стога је C пол $\bigcirc A'B'$ са исте стране круга $\bigcirc A'B'$ као C’. Слично, можемо показати да је B пол од $\bigcirc A'C'$ са исте стране круга $\bigcirc A'C'$ као B’, и A да је пол од $\bigcirc B'C'$ са исте стране $\bigcirc B'C'$ као и A’. Према дефиницији, ово показује да је $\triangle^s ABC$ поларан троугао од $\triangle^s A'B'C'$. □

Следећа Теорема 2.5 показује зашто се поларни троугао још назива и *суплементни троугао*, али због њеног доказа требаће нам помоћна пропозиција из опште сферне геометрије.

Пропозиција 2.7. *Нека су тачке A,B,C тачке на сфери које не леже на истом великом кругу. Нека је A’ пол великог круга $\bigcirc BC$ која је са исте стране круга као тачка A. Нека је C’ пол великог круга $\bigcirc AB$ која је са исте стране круга као тачка C. Тада је* $\widehat{A'C'} = \prec A'BC' = \pi - \prec ABC$.



Слика 2.7: Пропозиција 2.7

Теорема 2.5. *Ако је $\triangle^s ABC$ сферни троугао и $\triangle^s A'B'C'$ његов поларни троугао, тада важе следеће једнакости:*

$$\prec A' = \pi - (\widehat{BC}),\ \prec B' = \pi - (\widehat{AC}),\ \prec C' = \pi - (\widehat{AB}), \tag{2.1}$$

$$\widehat{A'B'} = \pi - (\prec C),\ \widehat{A'C'} = \pi - (\prec B),\ \widehat{B'C'} = \pi - (\prec A). \tag{2.2}$$

Доказ. Једначине (2.2) следе директно из Пропозиције 2.7 опште сферне геометрије. Да бисмо добили прве три једначине, применимо оно што смо малопре доказали за $\triangle^s A'B'C'$, користећи се Теоремом 2.4 знамо да поларни троугао од $\triangle^s A'B'C'$ је $\triangle^s ABC$. То нам даје (2.1). $\square$

Глава 3

Подударност

У овом поглављу дискутујемо о томе који ће услови бити потребни за странице и углове два сферна троугла да би били подударни. Прво ћемо навести дефиницију, која је аналогна карактеризацији појма подударних троуглова у еуклидској геометрији.

Дефиниција 3.1. *Два сферна троугла* $\triangle^s ABC$ *и* $\triangle^s DEF$ *кажемо да су подударна ако* $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DF}$, $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$, $\prec A \cong \prec D$, $\prec B \cong \prec E$, $\prec C \cong \prec F$. *Такође кажемо да су одговарајуће странице и углови сви подударни.*

Одговарајуће странице и углови из Дефиниције 3.1 су одређене 1-1 коренсподенцијом темена у сваком троуглу: A $\leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$, $C \leftrightarrow F$. Према томе $\triangle^s ABC \cong \triangle^s DEF$ је различито од $\triangle^s ACB \cong \triangle^s DEF$.

Треба се подсетити из еуклидске геометрије ставова подударности, скраћено ставова СУС, ССС, УСУ.

СУС: Два троугла су подударна ако и само ако су две странице једног троугла и угао захваћен њима једнаки одговарајућим страницама и углу другог троугла.

ССС: Два троугла су подударна ако и само ако су странице једног троугла једнаке одговарајућим страницама другог.

УСУ: Два троугла су подударна ако и само ако имају једнаку по једну страницу и оба одговарајућа угла налегла на ту страницу.

Ова три става подударности ће важити и у сферној геометрији. Међутим, ове ставове ћемо посматрати као теореме и главно оруђе за њихов доказ биће Пропозиција 2.3.

Теорема 3.1. ***(ССС подударност)*** *Нека су дати сферни троуглови* $\triangle^s A_1B_1C_1$ *и* $\triangle^s A_2B_2C_2$ *за које имамо:*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \cong \overset{\frown}{A_2B_2},$$
$$\overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2},$$
$$\overset{\frown}{A_1C_1} \cong \overset{\frown}{A_2C_2}\ .$$

Тада је $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$.

Доказ. Из Пропозиције 2.3 закључујемо да $\prec A_1B_1C_1 \cong \prec A_2B_2C_2$. Заменом слова A,B,C закључујемо аналогно за остале одговарајуће углове, па важи $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$. □

Теорема 3.2. ***(СУС подударност)*** *Нека су дати сферни троуглови* $\triangle^s A_1B_1C_1$ *и* $\triangle^s A_2B_2C_2$ *за које имамо:*

$$\overset{\frown}{A_1B_1} \cong \overset{\frown}{A_2B_2},$$
$$\overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2},$$
$$\prec B_1 \cong \prec B_2.$$

Тада је $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$.

Доказ. На основу Пропозиције 2.3 закључујемо да странице наспрам подударних углова су подударне. Тада имамо ССС подударност па на основу Теореме 3.1 закључујемо да су $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$. □

Теорема 3.3. ***(УСУ подударност)*** *Нека су дати сферни троуглови* $\triangle^s A_1B_1C_1$ *и* $\triangle^s A_2B_2C_2$ *за које имамо:*

$$\overset{\frown}{B_1C_1} \cong \overset{\frown}{B_2C_2},$$
$$\prec B_1 \cong \prec B_2,$$
$$\prec C_1 \cong \prec C_2.$$

Тада је $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$.

Доказ. Нека је $\triangle^s A_i'B_i'C_i'$ поларни троугао троугла $\triangle^s A_iB_iC_i$ за i=1,2. Према Теореми 2.4

$$\prec A_1' = \pi - (\overset{\frown}{B_1C_1}) = \pi - (\overset{\frown}{B_2C_2}) = \prec A_2'$$

(па је $\prec A_1' \cong \prec A_2'$)

$$\overset{\frown}{A_1'B_1'} = \pi - (\prec C_1) = \pi - (\prec C_2) = \overset{\frown}{A_2'B_2'}$$

(важи $\overset{\frown}{A_1'B_1'} \cong \overset{\frown}{A_2'B_2'}$) и

$$\overset{\frown}{A_1'C_1'} = \pi - (\prec B_1) = \pi - (\prec B_2) = \overset{\frown}{A_2'C_2'}$$

(и важи $\overset{\frown}{A_1'C_1'} \cong \overset{\frown}{A_2'C_2'}$).
Добијамо СУС подударност за $\triangle^s A_1'B_1'C_1'$ и $\triangle^s A_2'B_2'C_2'$. Према Теореми 3.2 имамо $\triangle^s A_1'B_1'C_1' \cong \triangle^s A_2'B_2'C_2'$. Како важи да одговарајуће странице и углови $\triangle^s A_1'B_1'C_1'$ и $\triangle^s A_2'B_2'C_2'$ имају исте дужине, користећи Теорему 2.4 у обрнутом смеру можемо показати да одговарајуће странице и углови сферног троугла $\triangle^s A_1B_1C_1$ и $\triangle^s A_2B_2C_2$ су подударни, па је $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$. □

Користећи се истим триком као малопре са поларним троуглом примењујући на ССС подударност долазимо до теореме која не постоји у геометрији еуклидске равни.

Теорема 3.4. *(**УУУ подударност**) Нека су дати сферни троуглови $\triangle^s A_1B_1C_1$ и $\triangle^s A_2B_2C_2$ за које имамо:*

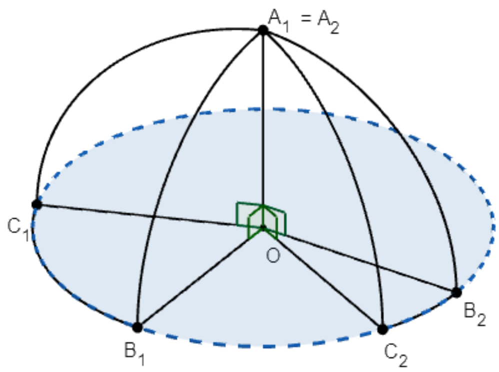
$$\prec A_1 \cong \prec A_2,$$
$$\prec B_1 \cong \prec B_2,$$
$$\prec C_1 \cong \prec C_2.$$

Тада је $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$.

Доказ. Нека је $\triangle^s A_i'B_i'C_i'$ поларни троугао троугла $\triangle^s A_iB_iC_i$ за i=1,2. Према Теореми 2.4 $(\overset{\frown}{B_1'C_1'}) = \pi - \prec A_1 = \pi - \prec A_2 = (\overset{\frown}{B_2'C_2'})$, па $(\overset{\frown}{B_1'C_1'}) \cong (\overset{\frown}{B_2'C_2'})$. Аналогно за остале добијамо да $(\overset{\frown}{A_1'B_1'}) \cong (\overset{\frown}{A_2'B_2'})$ и $(\overset{\frown}{A_1'C_1'}) \cong (\overset{\frown}{A_2'C_2'})$. Према ССС ставу за сферне троуглове имамо $\triangle^s A_1'B_1'C_1' \cong \triangle^s A_2'B_2'C_2'$ (Теорема 3.1). Према томе одговарајуће странице и углови $\triangle^s A_i'B_i'C_i'$ су подударни. Користећи Теорему 2.4 поново долазимо до првобитног $\triangle^s A_iB_iC_i$, и слично закључујемо да су одговарајуће странице и углови подударни. Према дефиницији $\triangle^s A_1B_1C_1 \cong \triangle^s A_2B_2C_2$ што је и требало доказати. □

Постоје још два случаја за разматрање: Можемо ли закључити подударност сферних троуглова у случају ССУ и СУУ подударности за одговарајуће странице и углове?
У раванској геометрији, сетимо се да став СУУ даје подударност троуглова. Ако су два угла троугла подударна, мора и трећи бити подударан са одговарајућим јер је збир углова у троуглу једнак π. Према томе имамо став УСУ између троуглова из чега следи и њихова подударност. Овај аргумент за сферу неће важити према Теореми (3.6) (коју ћемо видети у наставку) јер је збир углова у сферном троуглу већи од π и збир углова није исти за све сферне троуглове. Међутим, теорема о збиру углова троугла у еуклидској геометрији зависи од постулата паралелности (V Еуклидов постулат), а СУУ подударност у еуклидској не зависи од паралелности. За доказ овог става СУУ користи се спољашњи угао троугла у раванској геометрији (спољашњи угао троугла је већи од сваког наспрамног унутрашњег угла тог троугла). Показало се да сферна аналогија ове теореме је нетачна. У еуклидској геометрији ССУ подударност не подразумева подударност троуглова осим под посебним условима када знамо величине страница (нпр. код правоуглог троугла знамо да је хипотенуза највећа страница троугла).
Код сферне геометрије : или оба става ССУ и СУУ гарантују подударност троуглова или ниједан неће то доказати. Разлог је тај да ако један доказује подударност, тада можемо доказати да и други то доказује користећи се поларним троуглом из доказа УСУ и УУУ подударности. На пример, претпоставимо да имамо теорему СУУ подударности. Да докажемо да ССУ став гарантује подударност, разматраћемо два троугла који имају ССУ подударност. Њихови поларни троуглови би имали СУУ подударност према Теореми 2.4 и били би подударни. Подударност поларних троуглова дало би и подударност првобитних троуглова. Слично размишљање омогућило би нам да користимо и ССУ подударност за доказивање СУУ подударности. Испоставило се да на сфери ни ССУ ни СУУ ставови не гарантују подударност троуглова уопште. Један контрапример ће дискредитовати оба.
Контрапример: Нека је $A_1 = A_2$ пол неког великог круга.
Изаберимо тачке B_1, B_2, C_1, C_2 на том великом кругу тако да $\overset{\frown}{B_1C_1} \neq \overset{\frown}{B_2C_2}$. Према дефиницији полова, $\overset{\frown}{A_1B_1}$, $\overset{\frown}{A_1C_1}$, $\overset{\frown}{A_2B_2}$ и $\overset{\frown}{A_2C_2}$ су сви четвртине круга. Штавише, $\prec A_1B_1C_1$, $\prec A_1C_1B_1$, $\prec A_2B_2C_2$, $\prec A_2C_2B_2$ су сви прави углови. Тада троуглови $\triangle^s A_1B_1C_1$ и $\triangle^s A_2B_2C_2$ су подударни према и ССУ и СУУ

ставу, али нису подударни јер $\overset{\frown}{B_1C_1} \not\cong \overset{\frown}{B_2C_2}$.



Слика 3.1: Илустрација за контрапример

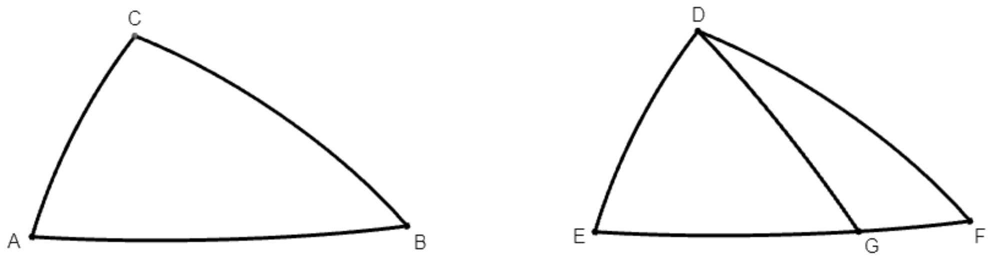
Уколико троуглови немају више од једног правог угла, ситуација је сличнија као у еуклидској геометрији. Ако троуглови имају тачно један прав угао, добијамо теореме подударности. Ако немамо праве углове, тада постоје две могућности за троугао где две странице и угао наспрам једне од њих (или два угла и страница наспрам једног од њих) су познати.

Теорема 3.5. *(**ССУУ подударност**)*

1. *Претпоставимо да $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s DEF$ задовољавају $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DF}$ и $\prec B \cong \prec E$ и $\prec C$ није суплементан углу $\prec F$. Тада $\triangle^s ABC \cong \triangle^s DEF$.*

2. *Претпоставимо да за $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s DEF$ важи: $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$ и $\prec C \cong \prec F$, $\prec B \cong \prec E$ и $\overset{\frown}{AC}$ није суплементна страници $\overset{\frown}{DF}$. Тада $\triangle^s ABC \cong \triangle^s DEF$.*

Доказ. Доказаћемо под (1). Ако $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$ тада $\triangle^s ABC \cong \triangle^s DEF$ према ССС ставу, а ако то није случај онда је један од лукова $\overset{\frown}{BC}$ или $\overset{\frown}{EF}$ је дужи од другог. Без умањења општости нека је $\overset{\frown}{EF}$ дужи лук. Тада постоји тачка G на луку $\overset{\frown}{EF}$ различита од E и F таква да $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EG}$ и према ставу СУС је $\triangle^s ABC \cong \triangle^s DEG$. Тада $\prec DGE$ је подударан са $\prec ACB$ и $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DG}$. Како $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{DF}$ имамо да је и $\overset{\frown}{DG} \cong \overset{\frown}{DF}$. Тада је $\triangle^s DGF$ једнакокрак и углови $\prec DFE \cong \prec ACB$, али $\prec DFE$ је суплементан углу $\prec ACB$ што је контрадикција. Према томе мора важити $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$. □



Слика 3.2: Пропозиција 3.5, део (1)

Ова теорема показује да ако је дат пар страница у сферном троуглу и наспрамни угао - тада трећа страница и угао могу бити одређени. Ово је лако одредити у еуклидској геометрији али није тако лако у сферној.

Дефиниција 3.2. *За два сферна троугла $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s DEF$ кажемо да су* ***хипотенуза-крак*** *подударни ако имају прав угао у B и E, наспрамне хипотенузе подударне и један одговарајући крак подударан.*

Последица 3.2.1. ***(Хипотенуза-крак теорема)*** *Два троугла која имају хипотенуза-крак подударност су подударни.*

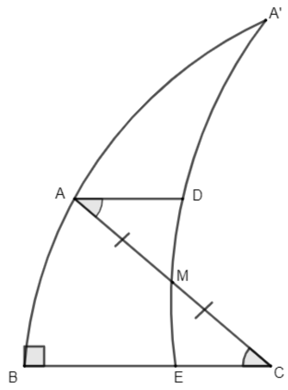
Дефиниција 3.3. *Два сферна троугла $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s DEF$ кажемо да су* ***хипотенуза-угао*** *подударни ако имају прав угао у B и E, наспрамне хипотенузе подударне и пар одговарајућих углова (који нису прави) подударан.*

Последица 3.3.1. ***(Хипотенуза-угао теорема)*** *Два троугла која имају хипотенуза-угао подударност су подударни.*

3.1 Неједнакости

Једна од главних разлика између еуклидске и сферне геометрије јесте та што у еуклидској геометрији збир унутрашњих углова троуглова износи π радијана (180°), али то не важи и за сферну геометрију. Испитајмо овај случај за правоугли троугао.

Пропозиција 3.1. *У правоуглом сферном троуглу, збир његових углова је већи од π (180°).*



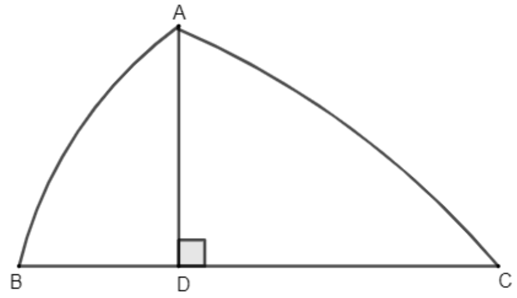
Слика 3.3: илустрација уз Пропозицију 3.1

Доказ. Без умањења општости претпоставимо да $\triangle^s ABC$ има прав угао у B. Ако је један од углова код A или C прав или туп, доказ је готов. Претпоставимо да су углови код A и C оба оштра. Према Пропозицији 2.5, наспрамне странице $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$ су обе оштре. Нека је A' пол круга $\bigcirc BC$ са исте стране круга $\bigcirc BC$ као A. Како је $\overset{\frown}{AB}$ оштра, а A је између A' и B. Тада је $\prec A'AC$ је туп, јер је његова мера суплементна са углом $\prec A$. Угао $\prec C$ је оштар, па је $\prec C <\prec A'AC$.

Постоји зрак $\overrightarrow{r}$ из темена A који прави угао са $\overrightarrow{AC}$ исте мере као угао $\prec C$, и да је $\overrightarrow{r}$ са исте стране $\bigcirc AC$ као A'. Све тачке $\overrightarrow{r}$ су у унутрашњости $\prec A'AC$ (осим A). Нека је M средиште од $\overset{\frown}{AC}$. Тада $\overrightarrow{r}$ сече $\overset{\frown}{A'M}$ у тачки D која лежи између A' и M. Како су A и A' са истих страна круга $\bigcirc BC$, све тачке $\overset{\frown}{CA}$ (осим C) леже са исте стране круга $\bigcirc BC$ као A (па и са исте стране $\bigcirc BC$ као и A'); тако да имамо да је M са исте стране $\bigcirc BC$ као A', па је $\overset{\frown}{A'M}$ оштра. Како је D између M и A', $\overset{\frown}{A'D}$ је такође оштра. Како је M између A и C, M је у унутрашњости $\prec AA'C$, па је $\overrightarrow{A'M}$ такође у унутрашњости $\prec AA'C$ и сече $\overset{\frown}{BC}$ у тачки E између B и C. Како $\overrightarrow{A'M}$ пролази кроз пол A' од $\overset{\frown}{BC}$, сече $\overset{\frown}{BC}$ под правим углом. Тада важи да је угао $\prec MEC$ прав. Како је $\overset{\frown}{AM}\cong\overset{\frown}{MC}$ (према дефиницији M), $\prec AMD \cong\prec CME$ (унакрсни) и $\prec MAD \cong\prec MCE$ (по дефиницији D), имамо $\triangle^s AMD \cong \triangle^s CME$ према сферној УСУ подударности. Како $\triangle^s CME$ има прав угао у E, $\triangle^s AMD$ има прав угао у D, тада $\triangle^s A'DA$ има прав угао у D такође. Како је $\overset{\frown}{A'D}$ оштра, према Пропозицији 2.5 примењеној на $\triangle^s A'AD$ и $\prec A'AD$ је оштар угао, али тада $\prec BAD$ је туп угао. Како је $\prec BAC$ оштар онда $\prec BAC <\prec BAD$. Сада је цео зрак $\overrightarrow{A'M}$ је са исте стране круга $\bigcirc AB$ осим за A', па D и M су са исте стране $\bigcirc AB$. Тада M је у унутрашњости $\prec BAD$. Имамо $\prec BAD = \prec BAC + \prec CAD = \prec A + \prec C$. Што значи да је збир угла $\prec A$ и $\prec C$ већи од $\frac{\pi}{2}$ (90 °). Како је $\prec B$ прав угао, збир углова $\prec A$, $\prec B$, $\prec C$ је бар π (180°). □

Теорема 3.6. *Збир углова у сферном троуглу је већи од* π *(180°).*

Доказ. Ако је дати троугао правоугли, применимо претходну теорему и доказ је готов.



Слика 3.4: Илустрација за Теорему 3.6

Ако је дат троугао са само једним оштрим углом, тада је збир преостала два угла (оба тупа) већи од π, доказ је готов. Сада претпоставимо да $\triangle^s ABC$ има два оштра угла (рецимо у B и C). Нека је подножје нормале из A на $\bigcirc BC$ тачка D између B и C. Збир углова који нису прави у троуглу $\triangle^s ADB$ је већи од $\frac{\pi}{2}$. Исто важи и за $\triangle^s ADC$. Али збир углова у $\triangle^s ABC$ је $\prec A + \prec B + \prec C = \prec BAD + \prec CAD + \prec B + \prec C$ како је D између B и C. Тада је збир : $(\prec B + \prec BAD) + (\prec C + \prec CAD)$, већи је од $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, као што смо требали доказати. □

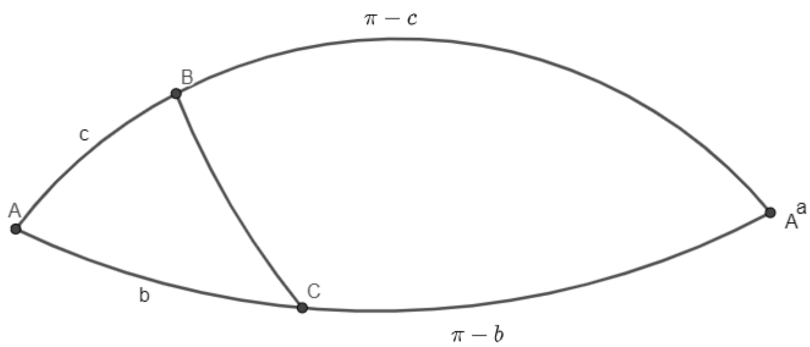
Ова теорема има доста последица које добијамо користећи се колунарним и поларним троуглом на сфери.

Теорема 3.7. *У сваком сферном троуглу, збир дужина страница је мањи од* 2π.

Доказ. Нека је дат троугао $\triangle^s ABC$ и нека је његов поларни троугао $\triangle^s A'B'C'$. Према претходној Теореми 3.6 $\prec A' + \prec B' + \prec C' > \pi$. Према Теореми 2.5

$\prec A' = \pi - \overset{\frown}{BC}$, $\prec B' = \pi - \overset{\frown}{AC}$, и $\prec C' = \pi - \overset{\frown}{AB}$. Заменимо у горњу неједнакост $(\pi - \overset{\frown}{BC}) + (\pi - \overset{\frown}{AC}) + (\pi - \overset{\frown}{AB}) > \pi$ или $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BC} < 2\pi$. $\square$

Теорема 3.8. *Збир две странице сферног троугла је већи од треће странице.*[1]



Слика 3.5: илустрација за Теорему 3.8

Доказ. Нека је дат троугао $\triangle^s ABC$. Нека је $\triangle^s A^a BC$ колунарни троугао троугла $\triangle^s ABC$. Тада $\overset{\frown}{A^aB} = \pi - \overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A^aC} = \pi - \overset{\frown}{AC}$.
Применимо Теорему 3.7 на $\triangle^s A^a BC$, имамо $(\pi - \overset{\frown}{AB}) + (\pi - \overset{\frown}{AC}) + (\overset{\frown}{BC}) < 2\pi$, или $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AC}$. Остале две неједнакости добијамо када заменимо остале тачке. $\square$

Теорема 3.9. *Ако су A,B,C три различите тачке на сфери, тада $d(A,C) \leq d(A,B) + d(B,C)$, једнакост настаје ако и само ако је B између A и C или $A = C^a$.*

Доказ. Ако A,B,C не леже на једном великом кругу, оне формирају сферни троугао и доказ је директна последица Теореме 3.8 (где B није између A и C јер три тачке не леже на великом кругу и A није антиподална тачки C по Дефиницији 2.1). $\square$

Последица 3.9.1. *Нека су $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ различите тачке на сфери. Тада је $d(A_1, A_n) \leq d(A_1, A_2) + d(A_2, A_3) + ... + d(A_{n-1}, A_n)$.*

[1] Ова теорема је позната као неједнакост троугла интуитивно је јасна већини читалаца јер је слична теореми из еуклидске геометрије.

Доказ. Доказаћемо индукцијом. За $n = 3$ тврђење је неједнакост троугла (база). Претпоставимо да тврђење важи за $n-1$ тачака. Тада је $d(A_1, A_n) < d(A_1, A_{n-1}) + d(A_{n-1}, A_n) < d(A_1, A_2) + ... + d(A_{n-2}, A_{n-1}) + d(A_{n-1}, A_n)$ где последња неједнакост важи по индукцијској претпоставци. □

Ова последица показује да ако је низ тачака одређен на сфери, тада је збир сферних удаљености од једне тачке до друге увек већи или једнак растојању од прве до последње тачке тог низа. Наравно, ова последица није једина која се бави питањем растојања тачака на луку великог круга. Користићемо се поларним троуглом како бисмо доказали још две теореме које нам омогућавају да нађемо релације међу мерама угла сферног троугла.

Теорема 3.10. *У сферном троуглу $\triangle^s ABC$, важи:*

$$\prec A + \prec B < \pi + \prec C, \tag{3.1}$$

$$\prec B + \prec C < \pi + \prec A, \tag{3.2}$$

$$\prec A + \prec C < \pi + \prec B, \tag{3.3}$$

$$\pi < \prec A + \prec B + \prec C < 3\pi. \tag{3.4}$$

Доказ. Нека је $\triangle^s A'B'C'$ поларни троугао сферног троугла $\triangle^s ABC$. Према Теореми 3.8 имамо да $\overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{A'C'} > \overset{\frown}{A'B'}$. Према Теореми 2.5 имамо (2.2) тј.

$$\overset{\frown}{A'B'} = \pi - (\prec C),$$

$$\overset{\frown}{A'C'} = \pi - (\prec B),$$

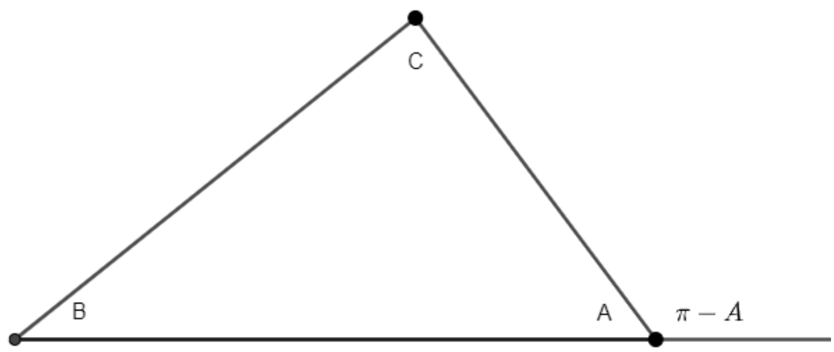
$$\overset{\frown}{B'C'} = \pi - (\prec A).$$

Заменимо у горњу неједнакост и добијамо: $(\pi - \prec A) + (\pi - \prec B) > \pi - \prec C$ $\pi + \prec C > \prec A + \prec B$ што је (3.1). Замењујући варијабле истим принципом добијамо и (3.2), (3.3). Први део неједнакости у (3.4) је сама Теорема 3.6. Други део неједнакости у (3.4) је резултат чињенице да ниједан угао не може бити већи од π, према томе збир ова три угла је мањи од 3π. □

Да резимирамо Теореме 3.7 и 3.10: У сваком произвољном сферном троуглу, збир дужина страница је између 0 и 2π, а збир углова је између π и 3π. Неко би се могао запитати да ли можемо да побољшамо ове тврдње или да ли постоје троуглови чији се збир страница и збир углова приближава овим крајњим вредностима. Заправо, може се показати да постоје троуглови који се приближавају екстремима којим желимо. Троугао са веома мале све три странице ће јасно имати збир његових страница близу нуле (али и даље позитивне). Пошто је такав троугао веома близу еуклидском, збир његових углова ће бити близу π (али и даље мало већи). За други екстреман троугао, изаберимо било који велики круг на сфери са полом P, а затим изаберимо тачке A, B и C са исте стране великог круга и веома близу њему, све приближно подједнако размакнуте. Тада ће све странице троугла бити веома близу датом великом кругу. Као резултат тога, збир дужина страница ће бити веома близу 2π (обим великог круга). Како су велики кругови одређени страницама које су веома близу датом кругу, углови између тих страница имају меру веома близу π, стога збир свих углова је произвољно близу 3π.

Дефиниција 3.4. *Нека је $\triangle^s ABC$ сферни троугао. Нека су A^a, B^a, C^a антиподалне тачке тачкама A,B,C, респективно. Тада спољашњи углови код A су $\prec BAC^a$ и $\prec CAB^a$. Насрамни унутрашњи углови углова $\prec BAC^a$ и $\prec CAB^a$ су углови $\prec ABC$ и $\prec ACB$.*

Теорема 3.11. ***(Теорема о спољашњем углу сферног троугла)*** *Спољашњи угао сферног троугла је мањи од збира насрамних унутрашњих углова и већи од (апсолутне вредности) њихове разлике.*

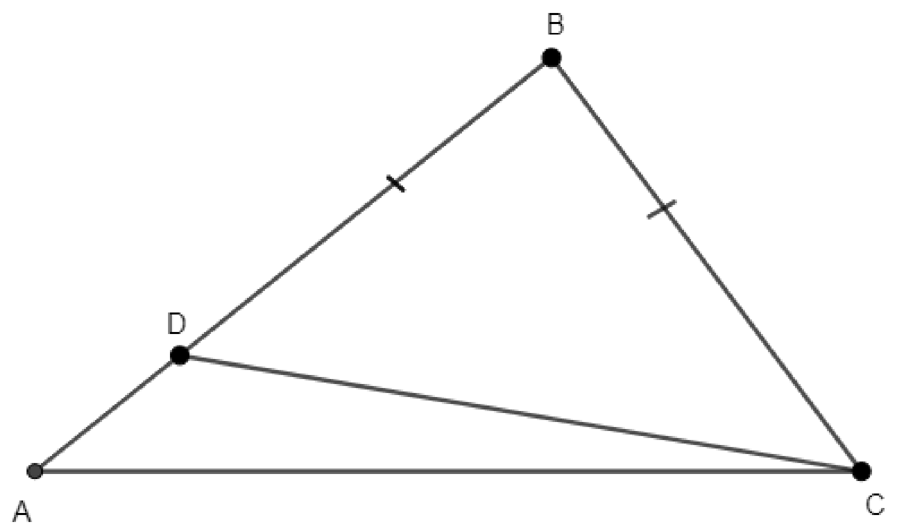


Слика 3.6: илустрација за Теорему 3.11: $|B - C| < \pi - A < B + C$

Доказ. Нека је дат сферни троугао $\triangle^s ABC$ и посматрајмо спољашњи угао код темена A. Према Теореми 3.6, $\pi < \prec A + \prec B + \prec C$, па је $\pi - \prec A < \prec B + \prec C$.

Како спољашњи угао код А је једнак $\pi - \prec A$, ово показује да је спољашњи угао мањи од збира углова $\prec B$ и $\prec C$. Из неједнакости (3.1) и (3.3) имамо $\pi - \prec A > \prec B - \prec C$ и $\pi - \prec A > \prec C - \prec B$, респективно. Дакле, $\pi - \prec A$ је веће од $| \prec B - \prec C|$. Неједнакости спољашњих углова код B и C су сличне. □

Теорема 3.12. *Ако су дате две странице сферног троугла различитих дужина и два угла насрам њих, тада мере углова нису једнаке и већи је онај угао који се налази насрам дуже странице троугла. Слично, ако су дата два различита угла сферног троугла, њихове насрамне странице нису истих дужина и дужа је она страница насрам већег угла.*



Слика 3.7: илустрација за Теорему 3.12

Доказ. Претпоставимо да је дат $\triangle^s ABC$ и $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$. Изаберимо тачку D на $\overset{\frown}{AB}$ такву да је $\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{BC}$. Према Теореми 2.1 $\prec BDC = \prec BCD$. Сада је $\prec BDC$ спољашњи за $\triangle^s ADC$, према теореми о спољашњем углу сферног троугла $\prec BDC > | \prec BAC - \prec DCA| \geq \prec BAC - \prec DCA$. Тада $\prec BDC + \prec DCA > \prec BAC$. Како $\prec BDC = \prec BCD$, $\prec BCD + \prec DCA > \prec BAC$. Према Пропозицији 10.9 $\prec BCD + \prec DCA = \prec BCA$, па $\prec BCA > \prec BAC$, што смо и желели. Према Теореми 2.1, ако су наспрамне странице једнаке и углови наспрам њих су једнаки. Стога ако су наспрамне стране различитих дужина, и према првој реченици, већи је угао наспрам дуже странице. □

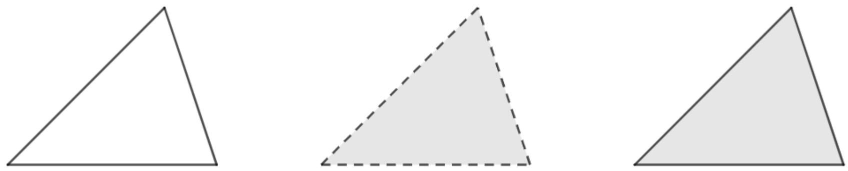
Пропозиција 3.2. *Нека сферни троугао* $\triangle^s ABC$ *има прав угао у* C. *Тада је страница* $\overset{\frown}{BC}$ *мања, једнака или дужа од хипотенузе* $\overset{\frown}{AB}$ *ако и само ако је* $\overset{\frown}{BC}$ *оштра, права или тупа, респективно. Више, ако* $\overset{\frown}{BC}$ *није права страница, дужина* $\overset{\frown}{AB}$ *је између дужина* $\overset{\frown}{BC}$ *и* $\pi - \overset{\frown}{BC}$.

Доказ. Знамо из Пропозиције 2.4 да $\overset{\frown}{BC}$ је оштра, права или тупа акко $\prec BAC$ је оштар, прав или туп, респективно. Према Теореми 3.12, Теореми 2.1 ово се дешава акко је страница наспрам $\prec BAC$ мања, једнака или дужа од наспрамне странице угла $\prec ACB$, респективно - ако је $\overset{\frown}{BC}$ краћа, једнака или дужа од хипотенузе $\overset{\frown}{AB}$. Размотримо $\triangle^s A^a BC$. Ако је $\overset{\frown}{BC}$ прав, $\prec BAC$ је прав, према томе $\prec BA^aC$ је оштар. Зато, $\overset{\frown}{A^aB} > \overset{\frown}{BC}$, и $\pi - \overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$ и важи $\overset{\frown}{AB} < \pi - \overset{\frown}{BC}$. Како већ имамо $\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{BC}$, закључујемо $\overset{\frown}{BC} < \overset{\frown}{AB} < \pi - \overset{\frown}{BC}$. Случај када је $\overset{\frown}{BC}$ тупа страница је сличан. □

Пропозиција 3.3. *Нека су* $\triangle^s ABC$ *и* $\triangle^s DEF$ *сферни троуглови такви да је* $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{DE}$ *и* $\overset{\frown}{BC} \cong \overset{\frown}{EF}$. *Тада* $\prec ABC < \prec DEF$ *акко* $\overset{\frown}{AC} < \overset{\frown}{DF}$.

3.2 Површина

Површином ликова на сфери сматрамо њихову површину у амбијентном еуклидском простору. Знамо да је површина сфере полупречника r једнака $4r^2\pi$. Како цела сфера одговара углу од 2π, из пропорционалности добијамо да је површина луне (чији је угао θ) једнак $2r^2\theta$. Приметимо да је антиподално пресликавање (централна симетрија простора) изометрија, па је зато површина троугла једнака површини њему антиподалног троугла.
Претпостављајући да је површина сфере $4\pi r^2$ успоставићемо да је сферна површина јединица мере по којој ће се упоређивати сви остали, на исти начин као што је површина квадрата узета за јединицу мере за површину у еуклидској геометрији.
Како је површина сферног лука 0 површина, површина самог троугла (троугаоне линије) је 0, али његова унутрашњост има позитивну површину. Тако да је површина унутрашњости троугла једнака површини уније троугла са његовом унутрашњости. Када будемо говорили о троуглу, мислићемо на троугао са његовом унутрашњости.



Слика 3.8: Троугао, његова унутрашњост, унија троугла и његове унутрашњости

Теорема 3.13. *Површина ограничена сферним троуглом* $\triangle^s ABC$ *је дата:*

$$P(\triangle^s ABC) = (\prec A + \prec B + \prec C - \pi)r^2.$$

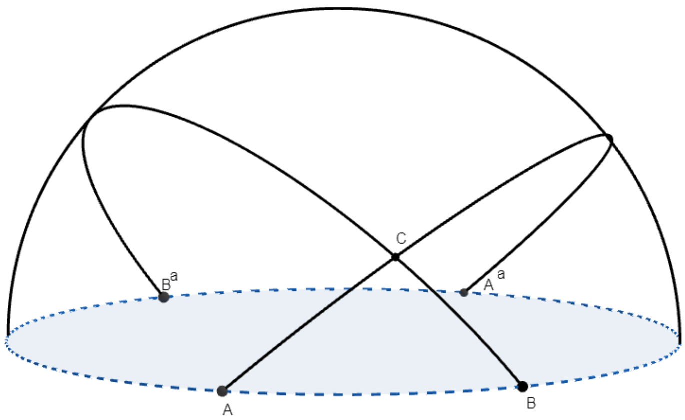
У сферној геометрији, сферни троугао је јединствено одређен његовим угловима (УУУ подударност) тако да је његова површина јединствено одређена.

Доказ. Нека су A^a, B^a, C^a антиподе од A,B,C, редом. Велики круг $\bigcirc AB$ дели сферу на две хемисфере, C је у једној од тих хемисфера а C^a у другој. Узмимо за овај доказ да је C у „горњој” хемисфери, а C^a у „доњој”. На кругу $\bigcirc AB$, имамо тачке A, B, A^a, B^a у том редоследу. Тада се „горња” хемисфера може представити као унија области ограничена са четири троугла: $\triangle^s ABC$, $\triangle^s BA^aC$, $\triangle^s A^aB^aC$, и $\triangle^s B^aAC$. Унија области ограничена са прва два троугла ($\triangle^s ABC$ и $\triangle^s BA^aC$) је луна ABA^aCA, њен угао има меру $\prec A$ и површина је $2(\prec A)r^2$.
Унија првог и четвртог троугла ($\triangle^s ABC$ и $\triangle^s B^aAC$) је луна BAB^aCB, њен угао има меру $\prec B$ и површина је $2(\prec B)r^2$. Унија троуглова $\triangle^s ABC$ и $\triangle^s ABC^a$ је луна CAC^aBC, њен угао има меру $\prec C$ и површина је $2(\prec C)r^2$. Како смо навели три луне свака је унија две непреклапајуће области троугла, можемо записати површину сваке луна као збир површина троуглова који чине ту луну:

$$2(\prec A)r^2 = P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s BA^aC), \quad (3.5)$$

$$2(\prec B)r^2 = P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s B^aAC), \quad (3.6)$$

$$2(\prec C)r^2 = P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s BAC^a). \quad (3.7)$$



Слика 3.9: илустрација за доказ Теореме 3.13

Приметимо да је $\triangle^s A^a B^a C$ антиподалан са $\triangle^s BAC^a$ па ћемо заменити јер имају исте површине :

$$2(\prec C)r^2 = P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s A^a B^a C). \tag{3.8}$$

Саберимо сада све три (3.5), (3.6), (3.8)

$$\begin{aligned} (2 \prec A + 2 \prec B + 2 \prec C)r^2 &= \\ 3P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s BA^a C) & \\ +P(\triangle^s B^a AC) + P(\triangle^s A^a B^a C). & \end{aligned} \tag{3.9}$$

Десна страна од (3.9) је састављена од четири троугла који се не преклапају и њихова унија прекрива целу „горњу” хемисферу. Како је површина горње хемисфере $2\pi r^2$, можемо записати да је збир површина ова четири троугла : $2\pi r^2 = P(\triangle^s ABC) + P(\triangle^s BA^a C) + P(\triangle^s B^a AC) + P(\triangle^s A^a B^a C)$ ако ово заменимо у (3.9) добијамо :

$$\begin{aligned} (2 \prec A + 2 \prec B + 2 \prec C)r^2 &= 2P(\triangle^s ABC) + 2\pi r^2 \\ \cancel{2}(\prec A + \prec B + \prec C)r^2 &= \cancel{2}P(\triangle^s ABC) + \cancel{2}\pi r^2 \\ P(\triangle^s ABC) &= (\prec A + \prec B + \prec C - \pi)r^2 \end{aligned}$$

као што је и требало доказати. $\square$

Дефиниција 3.5. *У сферном троуглу $\triangle^s ABC$, сферни ексцес је угао који представља разлику између збира углова и π, означава се са ε где је*

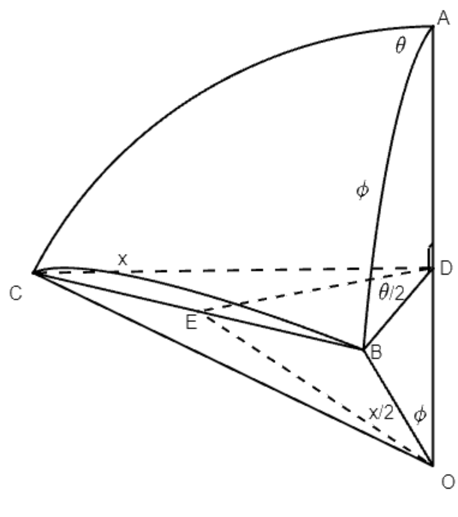
$$\varepsilon = \prec A + \prec B + \prec C - \pi.$$

Глава 4

Тригонометрија

4.1 Сферна Питагорина теорема и сферна синусна теорема

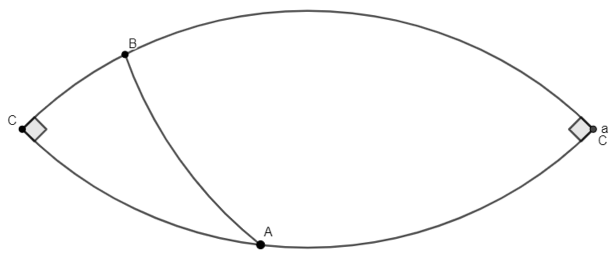
Сферна тригонометрија је кључ у одређивању веза између дужина и углова на сфери. Главно ће бити одређивање везе растојања и углова у троуглу. Али у чему је разлика тих веза у односу на раванску геометрију? Основна геометријска разлика између равни и сфере је наравно у томе што је сфера „закривљена”.



Слика 4.1: Пропозиција 4.1

Пропозиција 4.1. *Претпоставимо да два зрака формирају угао мере θ. Нека је x сферна растојање између две тачке (једна на сваком зраку) на сферном растојању ϕ од темена. Тада је $\sin\frac{x}{2} = \sin\phi\sin\frac{\theta}{2}$ (Слика 4.1).*

Пропозиција 4.2. *Ако је $\triangle^s ABC$ правоугли сферни троугао са правим углом код темена C, тада $\sin(\prec A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$ (Слика 4.2).*



Слика 4.2: Пропозиција 4.2

Доказ. Претпоставимо прво да је $\prec A$ оштар. Тада $\triangle^s ABC$ може се сматрати као половина једнакокраког троугла $\triangle^s ABD$ где је C средина лука $\widehat{BD}$. У овом случају, наш резултат директно произилази из претходне Пропозиције 4.1. Ако је $\prec A$ прав, тада по Пропозицији 2.4 праве су и странице $\widehat{AB}$ и $\widehat{BC}$, тада је тврђење доказано. Ако $\prec A$ је туп, посматрајмо онда колунарни троугао $\triangle^s ABC^a$. Тада $\prec BAC^a$ је оштар величине $\pi - A$, $\widehat{BC^a}= \pi - A$ па је $\sin(\pi - A) = \frac{\sin(\pi - A)}{\sin(c)}$ што нам даје доказ. □

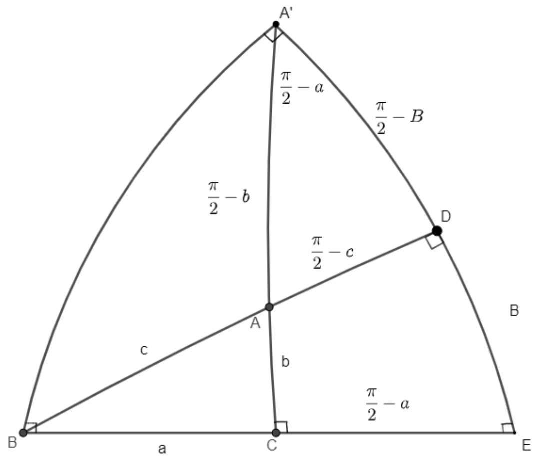
Теорема 4.1. *Нека сферни троугао $\triangle^s ABC$ има прав угао у темену C, тада важи:*

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) \tag{4.1}$$

$$\cos(\prec B) = \sin(\prec A)\cos(b). \tag{4.2}$$

*Једначина (4.1) се назива **Сферна Питагорина теорема** и једначина (4.2) се понекад назива и **Геберова теорема (Geber's theorem)**.*

Доказ. (Слика 4.3) Прво претпоставимо да су $\prec A$ и $\prec B$ оштри углови (што значи да су $\widehat{AC}$ и $\widehat{BC}$ такође оштре странице). Изаберимо D и E на $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{BC}$ на сферној удаљености $\frac{\pi}{2}$ од B. Тада $\widehat{DE}= B$. Нека је A' пол од круга $\bigcirc BC$ са исте стране круга $\bigcirc BC$ као A.



Слика 4.3: Теорема 4.1

Тада је B пол круга $\bigcirc DE$ и $\overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{BE}=\overset{\frown}{A'C}=\overset{\frown}{A'E}=\frac{\pi}{2}$. Како $\overset{\frown}{AC}$ је оштра и $\overset{\frown}{A'C}$ је права страница, A је између A' и C. Како $\overset{\frown}{BA'}=\frac{\pi}{2}$ и $\overset{\frown}{BC}<\frac{\pi}{2}$. Фокусирајмо се на $\triangle^s A'AD$, који има прав угао код D. Имамо да је $\overset{\frown}{A'A}=\frac{\pi}{2}-b$, $\overset{\frown}{AD}=\frac{\pi}{2}-c$ и $\overset{\frown}{A'D}=\frac{\pi}{2}-B$. Даље, $\overset{\frown}{CE}=\frac{\pi}{2}-a$ па је $\prec AA'D=\frac{\pi}{2}-a$. Применимо Пропозицију 4.2 на $\triangle^s A'AD$ два пута. Прво,
$\sin(\prec AA'D)=\frac{\sin(\overset{\frown}{AD})}{\sin(\overset{\frown}{A'A})}$ што нам даје $\sin(\frac{\pi}{2}-a)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-c)}{\sin(\frac{\pi}{2}-b)}$ и стога (4.1). Друго,
$\sin(\prec AA'D)=\frac{\sin(\overset{\frown}{AD})}{\sin(\overset{\frown}{A'A})}$ или $\sin(\prec A)=\frac{\sin(\frac{\pi}{2}-B)}{\sin(\frac{\pi}{2}-b)}$ и стога (4.2).
За случајеве када $\prec A$ и $\prec B$ нису оштри размотримо колунарне троуглове. Ако је $\prec B$ прав, тада су и $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{AC}$ према Пропозицији 2.4 праве странице, па је $\prec B=\prec C=b=c=\frac{\pi}{2}$ што даје обе (4.1) и (4.2). Исто важи и када је $\prec A$ прав. Сада претпоставимо да је $\prec A$ оштар и да је $\prec B$ туп. Тада по проп 2.5 $\overset{\frown}{BC}$ је оштра а $\overset{\frown}{AC}$ је тупа. Узмимо у разматрање колунарни прав троугао $\triangle^s A^aBC$, где оба угла која нису права су оштра. Тада применимо (4.1) и (4.2) за оштре углове и добијамо $\cos(\pi-c)=\cos(a)\cos(\pi-b)$ и $\sin(\prec A)\cos(\pi-b)=\cos(\pi-B)$ што нам даје оно што смо желели. Слично важи и када је $\prec A$ туп, а $\prec B$ оштар.
Ако су $\prec A$ и $\prec B$ оба тупа, тада посматрајмо колунарни троугао $\triangle^s ABC^a$ где оба угла која нису права су оштра. Тада применимо (4.1), (4.2) за оштре углове и добијамо $\cos(c)=\cos(\pi-a)\cos(\pi-b)$ и $\sin(\pi-A)\cos(\pi-b)=\cos(\pi-B)$ што је и требало показати. □

На великој сфери, мали сферни троугао је скоро исти као равански, како

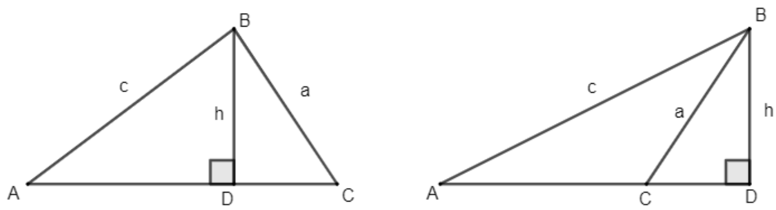
онда да се Питагорина теорема толико разликује за раванску и сферну геометрију? Одговор лежи у Тејлоровом развоју за косинус. Имамо
$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$
Ако заменимо то у $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$, имамо

$$1 - \frac{c^2}{2!} + \frac{c^4}{4!} - ... = (1 - \frac{a^2}{2!} + \frac{a^4}{4!} - ...)(1 - \frac{b^2}{2!} + \frac{b^4}{4!} - ...)$$

За мале вредности a, b и c, већи степени су много мањи него квадратни стога је $c^2 = a^2 + b^2$ добра апроксимација једнака $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$.

Теорема 4.2. ***(Сферна синусна теорема)*** *У било каквом сферном троуглу $\triangle^s ABC$, важи:*

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\prec A)} = \frac{\sin(b)}{\sin(\prec B)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\prec C)}. \tag{4.3}$$



Слика 4.4: Теорема 4.2

Доказ. Доказаћемо

$$\frac{\sin(a)}{\sin(\prec A)} = \frac{\sin(c)}{\sin(\prec C)}. \tag{4.4}$$

Тада се (4.3) добија пермутацијом темена. Ако $\triangle^s ABC$ има прав угао у C, тада је $\sin(c) = 1$ и према Пропозицији 4.2, $\frac{\sin(\prec A)}{\sin(c)} = \sin(\prec A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$, што нам даје (4.4). Слично ће важити и ако је прав угао у A. Ако углови у A и C нису прави, тада постоје две висине из B на $\bigcirc AC$. Оне су антиподалне, једна од њих (назовимо је D) лежи на $\overset{\frown}{AC}$. Тада је D различита од A и C. Нека је $h = \overset{\frown}{BD}$. Троуглови $\triangle^s ADB$ и $\triangle^s CDB$ имају праве углове у D, према Пропозицији 4.2, $\sin(\prec A) = \frac{\sin(h)}{\sin(c)}$ и $\sin(\prec C) = \frac{\sin(h)}{\sin(a)}$. Преуређивањем фактора и дељењем добијамо (4.4). $\square$

4.2 Сферна косинусна теорема и синусно-косинусна теорема

Сада имамо довољно знања да докажемо сферну косинусну теорему. Као и у еуклидској геометрији косинусна теорема повезује дужине страница троугла са једним од углова тог троугла.

Теорема 4.3. ***(Сферна косинусна теорема)*** *У сваком сферном троуглу $\triangle^s ABC$ важи:*

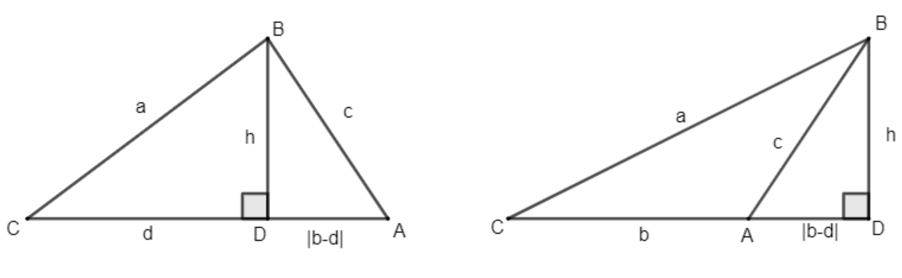
$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\prec C). \tag{4.5}$$

Заменом ознака имамо и :

$$\cos(b) = \cos(a)\cos(c) + \sin(a)\sin(c)\cos(\prec B), \tag{4.6}$$

$$\cos(a) = \cos(b)\cos(c) + \sin(b)\sin(c)\cos(\prec A). \tag{4.7}$$

Доказ. Нека је тачка D на $\overrightarrow{CA}$ таква да $\bigcirc BD$ је нормалан на $\bigcirc AC$. Ако је D=C, $\prec C$ је прав угао, $\cos(\prec C) = 0$, па (4.5) је последица Теореме 4.1. Ако $D \neq C$, нека је $d = \overset{\frown}{CD}$ и $h = \overset{\frown}{DB}$. Тврдимо да $\cos(c) = \cos(h)\cos(b-d)$. Ако D=A тада b=d и c=h и добијамо аутоматски нашу тврдњу. А ако $D \neq C$ тада $\overset{\frown}{AD} = \pm(b-d)$, зависно од тога да ли је b или d веће. У сваком случају, $\triangle^s ADB$ има прав угао у D и $\cos(c) = \cos(h)\cos(b-d)$, користећи $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.



Слика 4.5: Теорема 4.3

Слично, $\triangle^s CDB$ има прав угао у D, стога
$\cos(a) = \cos(d)\cos(h)$ и $\cos(\prec C) = \cos(h)\cos(\prec CBD) = \frac{\cos(h)\sin(d)}{\sin(a)}$ (према

Теореми 4.1 и Пропозицији 4.2). Тада важи и :

$$\begin{aligned} cos(c) &= \cos(b)\cos(d)\cos(h) + \sin(b)\sin(d)\cos(h) \\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\frac{\sin(d)\cos(h)}{\sin(a)} \\ &= \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\prec C). \end{aligned}$$

□

*Ако је $\prec C$ прав угао, $\cos(\prec C) = 0$, па је други сабирак у (4.5) једнак 0, што даље даје да $\cos(c) = \cos(a)\cos(b)$. Према томе косинусна (сферна) теорема је уопштење Питагорине теореме.

Теорема 4.4. *(**Синусно-косинусна теорема**) У сваком сферном троуглу $\triangle^s ABC$ важи:*

$$\sin(c)\cos(\prec B) = \cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a)\cos(\prec C). \tag{4.8}$$

Заменом ознака имамо и :

$$\sin(a)\cos(\prec B) = \cos(b)\sin(c) - \sin(b)\cos(c)\cos(\prec A), \tag{4.9}$$

$$\sin(a)\cos(\prec C) = \cos(c)\sin(b) - \sin(c)\cos(b)\cos(\prec A), \tag{4.10}$$

$$\sin(b)\cos(\prec C) = \cos(c)\sin(a) - \sin(c)\cos(a)\cos(\prec B), \tag{4.11}$$

$$\sin(c)\cos(\prec A) = \cos(a)\sin(b) - \sin(a)\cos(b)\cos(\prec C), \tag{4.12}$$

$$\sin(b)\cos(\prec A) = \cos(a)\sin(c) - \sin(a)\cos(c)\cos(\prec B). \tag{4.13}$$

Доказ. Почнимо од (4.6) и решимо $\sin(a)\sin(c)\cos(\prec B)$:
$\sin(a)\sin(c)\cos(\prec B) = \cos(b) - \cos(a)\cos(c)$
и заменимо у (4.5) да добијемо следеће:

$$\begin{aligned} &\sin(a)\sin(c)\cos(\prec B) = \cos(b) - \cos(a)(\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos(\prec C)) \\ &= \cos(b) - \cos^2(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(\prec C) \\ &= \cos(b)(1 - \cos^2(a)) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(\prec C) \\ &= \cos(b)\sin^2(a) - \cos(a)\sin(a)\sin(b)\cos(\prec C) \\ &= \sin(a)(\cos(b)\sin(a) - \cos(a)\sin(b)\cos(\prec C)). \end{aligned}$$

Како $\sin(a) \neq 0$ за све a између 0 и π, можемо поделити једнакост са $\sin(a)$ и добијамо тражено. □

4.3 Четвороелементни образац и формуле за полуугао

У овом одељку изводимо неколико других формула које изражавају тригонометријске везе између страница и углова сферног троугла. Све оне ће бити последице сферне синусне и косинусне теореме и синусно-косинусне теореме (која је и сама по себи изведена из сферне косинусне теореме). Прву формулу коју будемо разматрали чини се да је астрономи преферирају, назива се *четвороелементни образац*, јер повезује четири од шест делова a, b, c, A, B и C тј. која садржи две стране и два угла.

Теорема 4.5. ***(Четвороелементни образац)***
У сваком сферном троуглу $\triangle^s ABC$, важи:

$$\sin(\prec C)\operatorname{ctg}(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(\prec C). \tag{4.14}$$

Заменом слова у (4.35) *добијамо и :*

$$\sin(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec C) = \operatorname{ctg}(c)\sin(b) - \cos(b)\cos(\prec A), \tag{4.15}$$
$$\sin(\prec B)\operatorname{ctg}(\prec C) = \operatorname{ctg}(c)\sin(a) - \cos(a)\cos(\prec B), \tag{4.16}$$
$$\sin(\prec C)\operatorname{ctg}(\prec A) = \operatorname{ctg}(a)\sin(b) - \cos(b)\cos(\prec C), \tag{4.17}$$
$$\sin(\prec B)\operatorname{ctg}(\prec A) = \operatorname{ctg}(a)\sin(c) - \cos(c)\cos(\prec B), \tag{4.18}$$
$$\sin(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(c) - \cos(c)\cos(\prec A). \tag{4.19}$$

Доказ. Почнимо од синусно-косинусне формуле (4.8)
$\sin(c)\cos(\prec B) = \cos(b)\sin(a) - \sin(b)\cos(a)\cos(\prec C)$ и поделимо са $\sin(b)$, добијамо:

$$\frac{\sin(c)}{\sin(b)}\cos(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(\prec C). \tag{4.20}$$

Из сферне синусне теореме (4.3) имамо $\frac{\sin(c)}{\sin(b)} = \frac{\sin(\prec C)}{\sin(\prec B)}$ и ако то заменимо у (4.20) имаћемо:
$\frac{\sin(\prec C)}{\sin(\prec B)}\cos(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(\prec C)$, што је даље
$\sin(\prec C)\operatorname{ctg}(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(a) - \cos(a)\cos(\prec C)$ тј. (4.14). □

За сваки сферни троугао са страницама a, b, c обим је збир $a + b + c$ и означимо са $s = \frac{a+b+c}{2}$ његов полуобим.

Теорема 4.6. ***(Формула за полуугао)***
У сваком сферном троуглу $\triangle^s ABC$, *важи:*

$$\sin\left(\frac{\prec C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}}, \tag{4.21}$$

$$\cos\left(\frac{\prec C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s)\sin(s-c)}{\sin(a)\sin(b)}}, \tag{4.22}$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\prec C}{2}\right) = \sqrt{\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(s)\sin(s-c)}}. \tag{4.23}$$

Доказ. Кренимо од сферне косинусне теореме (4.5) и изразимо $\cos(\prec C)$:

$$\cos(\prec C) = \frac{\cos(c) - \cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)} \tag{4.24}$$

из формуле $\sin^2(\frac{C}{2}) = \frac{1-\cos(\prec C)}{2}$ имамо

$$\begin{aligned} \sin^2\left(\frac{C}{2}\right) &= \frac{1 - \frac{\cos(c)-\cos(a)\cos(b)}{\sin(a)\sin(b)}}{2} \\ &= \frac{\sin(a)\sin(b) + \cos(a)\cos(b) - \cos(c)}{2\sin(a)\sin(b)} \\ &= \frac{\cos(a-b) - \cos(c)}{2\sin(a)\sin(b)}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Користећи формуле збир-производ имамо :

$$\cos(a-b) - \cos(c) = -2\sin\left(\frac{a-b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b-c}{2}\right),$$

што је $2\sin(\frac{a-b+c}{2})\sin(\frac{b+c-a}{2})$, јер је синус непаран. А то је заправо :
$2\sin(s-b)\sin(s-a)$ заменом у (4.25) имамо:

$$\sin^2\left(\frac{\prec C}{2}\right) = \frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{\sin(a)\sin(b)}. \tag{4.26}$$

Како је $\prec C$ угао троугла, $0 < C < \pi$, па је $0 < \frac{C}{2} < \frac{\pi}{2}$, и за такво $\frac{C}{2}$ је синус увек позитиван, што значи да имамо жељену формулу када извадимо корен у (4.26) и добијамо (4.21). Слично се добија и за $\prec A$ и $\prec B$ само се пермутују темена. $\square$

Глава 5

Решавање сферних троуглова

Сваки сферни троугао се састоји од шест елемената: три странице и три угла. Решити сферни троугао значи пронаћи све његове елементе при чему је познато мање од шест елемената сферног троугла. Слично као у раванској тригонометрији, и у сферној је потребно познавати три елемента сферног троугла како би се могла решити преостала три, што ћемо видети у наставку.

5.1 Правоугли троуглови

У еуклидској тригонометрији се учи читава серија формула које повезују мере угла и странице у правоуглом троуглу. Сферни троугао може имати један, два или три права угла. Ако су сва три угла права онда из сферне косинусне теореме следи да су све три странице $\frac{\pi}{2}$. Уколико су два угла права онда су њихове наспрамне стране једнаке $\frac{\pi}{2}$, а трећа страница има онолико степени колико има трећи угао, што опет следи из сферне косинусне теореме. Стога, посматраћемо сферне троуглове који имају један прав угао и наћи ћемо формуле које су аналогне формулама из раванске геометрије у следећим редовима:

Теорема 5.1. *Нека је $\triangle^s ABC$ је сферни троугао са правим углом код темена C. Тада важи следећих десет једнакости:*

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b), \tag{5.1}$$

$$\cos(c) = \operatorname{ctg}(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec B), \tag{5.2}$$

$$\sin(a) = \sin(\prec A)\sin(c), \tag{5.3}$$

$$\operatorname{ctg}(c) = \operatorname{ctg}(b)\cos(\prec A), \tag{5.4}$$

$$\operatorname{ctg}(\prec A) = \operatorname{ctg}(a)\sin(b), \tag{5.5}$$

$$\cos(\prec B) = \sin(\prec A)\cos(b), \tag{5.6}$$

$$\sin(b) = \sin(\prec B)\sin(c), \tag{5.7}$$

$$\operatorname{ctg}(c) = \operatorname{ctg}(a)\cos(\prec B), \tag{5.8}$$

$$\operatorname{ctg}(\prec B) = \operatorname{ctg}(b)\sin(a), \tag{5.9}$$

$$\cos(\prec A) = \sin(\prec B)\cos(a). \tag{5.10}$$

Такође може се изразити и у следећем облику када су функције дефинисане:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b), \tag{5.11}$$

$$\cos(c) = \operatorname{ctg}(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec B), \tag{5.12}$$

$$\sin(\prec A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}, \tag{5.13}$$

$$\cos(\prec A) = \frac{\operatorname{tg}(b)}{\operatorname{tg}(c)}, \tag{5.14}$$

$$\operatorname{tg}(\prec A) = \frac{\operatorname{tg}(a)}{\sin(b)}, \tag{5.15}$$

$$\sin(\prec A) = \frac{\cos(\prec B)}{\cos(b)}, \tag{5.16}$$

$$\sin(\prec B) = \frac{\sin(b)}{\sin(c)}, \tag{5.17}$$

$$\cos(\prec B) = \frac{\operatorname{tg}(a)}{\operatorname{tg}(c)}, \tag{5.18}$$

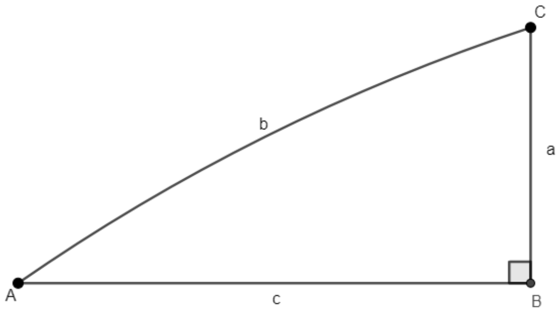
$$\operatorname{tg}(\prec B) = \frac{\operatorname{tg}(b)}{\sin(a)}, \tag{5.19}$$

$$\sin(\prec B) = \frac{\cos(\prec A)}{\cos(a)}. \tag{5.20}$$

Доказ. Једначине (5.1) и (5.6) су доказане у Теореми 4.1. Једначине (5.3) и (5.13) су доказане у Пропозицији 4.2 . Напоменимо да (5.3) никада није 0 јер вредност синуса у троуглу никад није 0. Према томе, можемо (5.6) да поделимо са (5.3) и добијамо :

$$\frac{\cos(\prec B)}{\sin(a)} = \frac{\cos(b)}{\sin(c)} / \cdot \cos(a)$$
$$\frac{\cos(a)\cos(\prec B)}{\sin(a)} = \frac{\cos(a)\cos(b)}{\sin(c)}$$
$$\operatorname{ctg}(a)\cos(\prec B) = \frac{\cos(a)\cos(b)}{\sin(c)}$$

а то је заправо $\operatorname{ctg}(c) = \frac{\cos(c)}{\sin(c)}$ према (5.1) и даје нам (5.8) тј. $\operatorname{ctg}(a)\cos(\prec B) =$



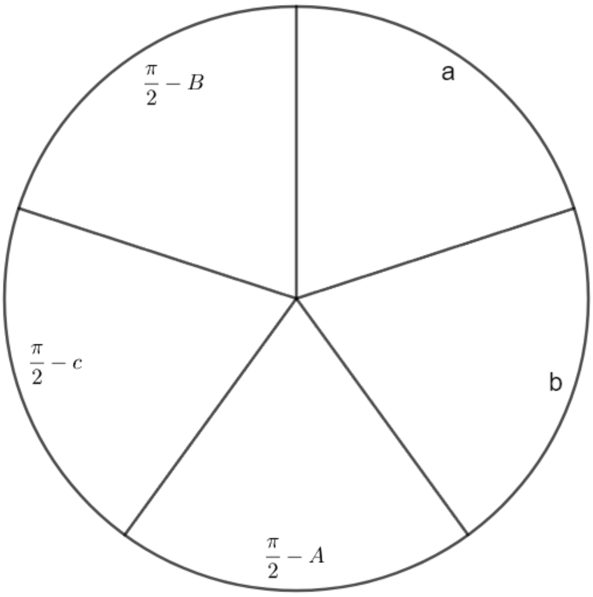
Слика 5.1: Теорема 5.1

$\operatorname{ctg}(c)$. Једначине (5.7), (5.10) и (5.4) добијамо када улоге A,a и B,b се обрну у (5.3), (5.6) и (5.8) редом. Како је $\cos(\prec A) = \sin(\prec B)\cos(a) = \frac{\sin(b)\cos(a)}{\sin(c)}$ и $\sin(\prec A) = \frac{\sin(a)}{\sin(c)}$ добијамо (5.5) њиховим дељењем. Даље, ако узмемо (5.5) и заменимо парове A, a са B, b добијамо (5.9). Ако помножимо (5.5) и (5.9), имамо $\operatorname{ctg}(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec B) = \operatorname{ctg}(a)\sin(b)\operatorname{ctg}(b)\sin(a) = \cos(a)\cos(b)$ што је $\cos(c)$ према (5.1) и добијамо $\operatorname{ctg}(\prec A)\operatorname{ctg}(\prec B) = \cos(c)$ а то је (5.2). Ово нам даје свих десет формула из прве групе, друга група следи из прве групе формула по одговарајућим заменама и дељењем (где немамо дељење са нулом). □

Како постоји много формула за правоугли сферни троугао, природно се намеће питање да ли постоји лакши начин за њихово памћење. На ову идеју је дошао шкотски математичар Џон Непер [1], осмислио је начин за њихово лакше

[1]John Napier (1550-1617) са надимком Величанствени Мерчистон, је био шкотски математичар, физичар, астроном и осми лорд од Мерчистона.

памћење и изложио у свом делу „Mirific Logarithmorum Canonis Descript", 1614.године. Дакле, све ове формуле можемо добити из **Неперовог правила**: Претпоставимо да је дат сферни троугао $\triangle^s ABC$ са правим углом у С. Нека су А,В,С мере углова тог троугла, а a, b, c дужине наспрамних страница. Узмимо две странице које чине угао С, то су a, b, комплемент хипотенузе $\frac{\pi}{2} - c$ и углове комплементне осталим угловима сферног троугла $\frac{\pi}{2} - A$, $\frac{\pi}{2} - B$ и поређајмо их у круг поштујући њихов редослед у сферном троуглу. Ако изаберемо један од тих пет елемената круга онда њега називамо *средњи*



Слика 5.2: Неперово правило

елемент, елементе који се налазе поред изабраног (средњег) елемента јесу *суседни елементи* и преостала два елемента се називају *супротни елементи*. Сада, Неперово правило гласи:

1. синус средњег елемента једнак је производу тангенса два суседна елемента
2. синус средњег елемента једнак је производу косинуса супротних елемената.

На пример,

$$\sin(a) = \operatorname{tg}(b)\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - B) = \operatorname{tg}(b)\operatorname{ctg}(\prec B) = \frac{\operatorname{tg}(b)}{\operatorname{tg}(\prec B)}$$

што је исто као (5.19)

$$\sin(a) = \cos(\frac{\pi}{2} - A)\cos(\frac{\pi}{2} - c) = \sin(\prec A)\sin(c)$$

а то је исто као (5.3), и тако даље за остале формуле.

5.2 Решавање косоуглих сферних троуглова

У овој секцији дискутујемо о томе како наћи све елементе сферног троугла уколико су дате неке од мера страница и углова. Углавном се ови проблеми решавају слично као у раванској геометрији, али постоје и неке разлике. Највећа разлика је у томе што збир углова у сферном троуглу зависи од тога какав је троугао. Такође, ако су нам позната два угла сферног троугла то не значи да одмах знамо и вредност трећег угла. Неколико посебних питања се јављају, које вреди размотрити. Прво, уколико су нам дати одређени елементи троугла, да ли постоји троугао са таквим елементима? Друго, ако такав троугао постоји, да ли је јединствен? Треће, обзиром да знамо неке елементе троугла, како ћемо наћи остале?

1. (СУС) (Дате су две странице сферног троугла и њима захваћен угао) Овај проблем може бити решен под условом да две странице и дати угао имају мере између 0 и π. Као и у раванској геометрији, паметно би било искористити (сферну) косинусну теорему да нађемо трећу страницу. Затим поново можемо применити сферну косинусну теорему на неку од страница да бисмо нашли остале углове. Још један од начина за решавање овог проблема јесте да искористимо четвороелементни образац да бисмо нашли један од углова, а за остале непознате елементе можемо искористити синусну теорему.

2. (УСУ) (Дата је једна страница и два налегла угла) Из Теореме 2.5 ово се своди на дате две странице и укључени угао у поларном троуглу. Тако можемо решити другу страницу и углове у поларном троуглу, што нам даје други угао и странице у датом троуглу по Теореми 2.5. Поново, четвороелементни образац је пречица у решавању овог проблема.

3. (ССС) (Дате су све три странице троугла) Један од начина јесте да користимо сферну косинусну теорему, да бисмо дошли до углова тог троугла. Друга алтернатива јесте да искористимо формуле за полуугао.

4. (УУУ) (Дата су сва три угла сферног троугла) Овај задатак поларно одговара претходном. Можемо га решити тако да уместо задатог троугла решавамо његов поларни троугао којем су познате све три странице, што се своди на претходно.

5. (ССУ) (Дате су две странице и угао наспрам једне од њих) Алгоритам за решавање овог случаја: Претпоставимо да су познате странице a и b сферног троугла и угао код темена А. Помоћу сферне синусне теореме $\sin(\prec B) = \frac{\sin(b)\sin(\prec A)}{\sin(a)}$, израчунаћемо две суплементне вредности за угао $\prec B$, или ниједну. Могућности су следеће:

   5.1 $\sin(b)\sin(\prec A) = \sin(a) \Rightarrow \sin(\prec B) = 1, \prec B = 90°$, а то значи да је заданим елементима одређен правоугли сферни троугао којем је страница b хипотенуза.

   5.2 $\sin(b)\sin(\prec A) > \sin(a) \Rightarrow \sin(\prec B) > 1 \Rightarrow$ задатак нема решење.

   5.3 $\sin(b)\sin(\prec A) < \sin(a) \Rightarrow \sin(\prec B) < 1 \Rightarrow$ две суплементне вредности за угао код B. Помоћу Неперових једначина израчунамо страницу c и угао код C.

6. (УУС) Задатак поларно одговара претходном.

5.3 Примена сферне тригонометрије

Сада ћемо дати конкретне примере из сферне тригонометрије који су примењиви у геодезији, навигацији, наутици и астрономији.

Примена сферне тригонометрије у геодезији

Положај тачака на Земљиној сфери одређен је **географском ширином** φ_M $(-90° \leq \varphi_M \leq 90°)$ и **географском дужином** λ_M $(-180° \leq \lambda_M \leq 180°)$. Екватор се налази на $0°$ географске ширине и све тачке северно од њега су изражене позитивним бројевима, а све тачке јужно од екватора су изражене негативно. Основни меридијан (Гринич) је на $0°$ географске дужине. Тачке на истоку изражавају се позитивним бројевима, а тачке према западу негативним бројевима. **Азимут** правца на Земљиној сфери (нпр. правац лета авиона) јесте угао који образује дати правац (нпр. правац авиона) и правац север-југ, рачунат од севера у смеру казаљке на сату.

1. Авион лети најкраћим путем из Београда ($\varphi_1 = 44°49'$, $\lambda_1 = 20°27'$) до Њујорка ($\varphi_2 = 40°42'$, $\lambda_2 = -74°$).

   1.1 Колики пут ће авион прећи?

   1.2 У којој тачки свог пута је авион најближи Северном полу? Колика је тада удаљеност авиона од Северног пола?

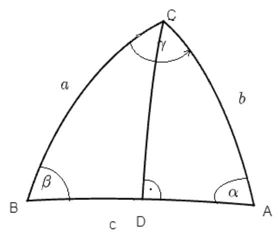
   Решење 1.1 У троуглу ABC (означимо: A- Београд, B- Њујорк C-Северни пол) Слика 5.3

$$a = 90° - \varphi_2 = 49°18' = 0,860\, rad$$
$$b = 90° - \varphi_1 = 45°11' = 0,789\, rad$$
$$\gamma = \lambda_1 - \lambda_2 = 94°27' = 1,649\, rad.$$

Решавањем тог троугла добијамо из косинусне теореме:

$$\cos(c) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)\cos\gamma = 0,41766\, rad$$
$$c = 1,1399\, rad = 65°18'$$
$$d = R \cdot c(rad) = 6370 \cdot 1,1399 = 7261,6\, km.$$

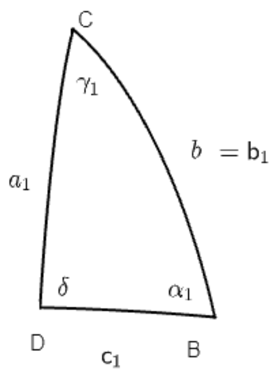
Дакле авион прелази 7261,6 километара.



Слика 5.3:

1.2 Нека је D тачка у којој је авион најближи Северном полу (слика 5.4). Посматрајмо троугао $\triangle ADC$ где је позната страница $b_1 = b = 90° - \varphi_1 = 45°11' = 0,789\ rad$ и из косинусне теореме опет можемо добити углове $\alpha_1 = \alpha$

$$\cos\alpha = \frac{\cos(a) - \cos(b)\cos(c)}{\sin(b)\sin(c)} = 0,5555\, rad$$
$$\alpha = 0,982\, rad = 56°16'$$
$$\prec D = \delta = 90°.$$



Слика 5.4:

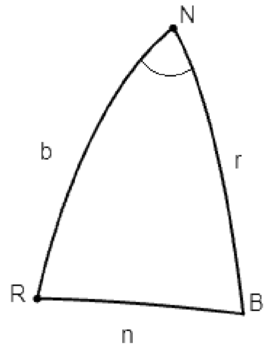
Решавањем троугла добијамо:

$$\begin{aligned}
\sin(a_1) &= \sin(\alpha_1)\sin(b_1) = 0,59\,rad \\
a_1 &= 0,631\,rad = 36°9' \\
\cos(\gamma_1) &= \frac{\cos(c_1) - \cos(a_1)\cos(b_1)}{\sin(a_1)\sin(b_1)} \\
&= \frac{\frac{\cos(b_1)}{\cos(a_1)} - \cos(a_1)\cos(b_1)}{\sin(a_1)\sin(b_1)} \\
&= \operatorname{tg}(a_1)\operatorname{ctg}(b_1) = 0,736\,rad \\
\gamma_1 &= 0,74365\,rad = 42°36'.
\end{aligned}$$

Тачка D има географске координате: $\varphi_D = 90° - a_1 = 53°57'$ и $\lambda_D = \lambda_1 - \gamma_1 = -46°52'$. а удаљеност од Северног пола је $d = 6370 \cdot 0,631 \approx 4019\,km$.

2. Наћи сферну раздаљину између Рима и Беча, ако је географска ширина Рима $\varphi_1 = 41°53'$, а Беча $\varphi_2 = 48°12'$, географска дужина Рима је $\lambda_1 = 12°28'$, а Беча је $\lambda_2 = 16°22'$, рачунајући од граничног меридијана.
Решење Ако је Северни пол (N), Рим (R), Беч (B) они дају сферни троугао NRB, онда је :

$$\begin{aligned}
b = NR &= 90° - \varphi_1 = 0,8396\,rad = 48°6' \\
r = NB &= 90° - \varphi_2 = 0,7294\,rad = 41°47' \\
\prec N &= \lambda_2 - \lambda_1 = 0,068\,rad = 3°53'.
\end{aligned}$$



Слика 5.5:

Слично као и у претходном примеру, примењујемо косинусну теорему:

$$\cos(n) = \cos(b)\cos(r) + \sin(b)\sin r \cos(\prec N)$$
$$\cos(n) = 0,9928 \Rightarrow n = 0,1202$$
$$RB = 6370 \cdot 0,12023 = 765,8\,km.$$

Сада ћемо дати пример који је везан за **астрономију**:

1. На Месецу су постављена три возила (ровера) за истраживање, зовимо их A,B,C, редом. Треба наћи раздаљину између ровера A и C, ако знамо следеће: Полупречник Месеца је 1737 km, раздаљина између C и B (дужина a) је 10 km, угао код ровера B је $\frac{3\pi}{4}$, угао код ровера A је $\frac{\pi}{6}$.

Решење Применимо сферну синусну теорему:

$$\frac{\sin\left(\frac{a}{r}\right)}{\sin(\prec A)} = \frac{\sin\left(\frac{b}{r}\right)}{\sin(\prec B)}.$$

Када заменимо вредности добијамо да је $b = 14.22\,km$.

Глава 6

Закључак

У раду смо видели да постоје многе сличности, али и разлике између сферне и еуклидске геометрије.
Сферну геометрију градимо на коначној површи, за разлику од равни која је бесконачна. Неке од главних разлика између ове две геометрије јесте:

- мерење удаљености две тачке - у равни удаљеност меримо дуж правца који спаја те две тачке и постоји једна удаљеност коју можемо мерити, а на сфери удаљеност меримо дуж велике кружнице која повезује задате тачке и постоје две удаљености које можемо мерити;
- паралелност - два правца без заједничких тачака зовемо паралелним правцима у равни док на сфери две велике кружнице никад не могу бити паралелне и увек имају тачно две тачке у којима се секу;
- збир углова у троуглу - збир у еуклидском троуглу је увек 180 степени, док је збир у сферном између 180 степени и 540 степени;
- број правих углова у троуглу - еуклидски троугао може имати само један, а сферни може имати до три права угла;
- став УУУ - доказали смо да ако два сферна троугла задовољавају услове УУУ става онда су ти троуглови подударни, што у еуклидској геометрији не важи.

На крају, желела бих да се захвалим ментору и члановима комисије на корисним саветима и примедбама који су допринели бољем квалитету овог рада.

Библиографија

[1] Marshall A. Whittlesey: *Spherical geometry and its applications / Marshall A. Whittlesey*: Boca Raton : CRC Press, Taylor and Francis Group, 2020.

[2] Стево Шеган, Надежда Пејовић: *Основи астрономије- уџбеник за студенте*, Vesta Co, Београд, 2006.

[3] I.Todhunter: *Spherical trigonometry*, Cambridge, 1886.

[4] Franka Miriam Brückler: *Povijest matematike II*, Универзитет у Осијеку, 2009.

[5] Rob Johnson: *Spherical Trigonometry*, West Hills Institute of Mathematics,2018.

[6] Надежда Пејовић: *Сферна тригонометрија*, Математички факултет, Београд, 2006.

[7] Kelly Lynch: *Spherical Trigonometry*, Saint Mary's College of California, Moraga, 2016.

[8] *www.overleaf.com*

[9] *www.geogebra.org*

[10] Wikimedia Commons contributors, *File:Polar triangle simple.svg*, Wikimedia Commons, the free media repository, `https://commons.wikimedia.org/w/index.php?title=File:Polar_triangle_simple.svg&oldid=442922943`