УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Познате математичке константе

– Мастер рад –

Ментор:
проф. др Небојша Икодиновић

Студент:
Јелена Шашић

Београд, 2022.

Предговор

Математичке константе су веома моћан алат, не само када је математика у питању. Њихов шири значај присутан је у различитим научним дисциплинама. Неке од њих, попут броја π [1], Ојлеровог броја e [2] и златног пресека ϕ [3, 4], су веома познате. Међутим, постоје и многе друге константе, итекако значајне, али не тако присутне у литератури или у свакодневном животу. [5] Због чега математичке константе уопште постоје? Зашто су важне и како настају? Ово су главна питања на која би овај рад требало да да одговор.

Рад је подељен у неколико целина, а у сваком поглављу је описана једна од константи. У уводном делу рада дат је кратак преглед основних појмова, лема, теорема и последица које се користе приликом доказа приказаних у раду.

Након увода, у другом поглављу је представљена Питагорина константа $\sqrt{2}$ [6]. Приказан је доказ ирационалности $\sqrt{2}$ [7], апроксимација ове константе Њутновим итеративним поступком и Тејлоровим редом [8], као и њене репрезентације преко бесконачне суме, производа, верижних разломака [5].

У трећем поглављу је обрађена Архимедова константа, број π [1]. Ова константа је приказана преко Вијетовог [9] бесконачног производа. Доказана је ирационалност [10] броја π и приказана је њена примена у неким законима физике [11].

У четвртом поглављу је дефинисан златни пресек и дате су његове различите репрезентације [12], као и приказ његове геометријске конструкције [4], његова примена у архитектури, уметности и у опису природних феномена. Приказана је веза са Фибоначијевим бројевима и доказ његове ирационалности [13].

У наредном поглављу је описан Ојлеров број e (база природног логаритма). Приказана је експоненцијална функција $f(x) = e^x$ [1]. Поред доказа ирационалности, овде су приказане и примене Ојлеровог броја и експоненцијалне функције при опису пораста или опадања неке популације, као и примене у опису физичких закона [1].

У шестом поглављу представљене су неке значајне константе које нису познате у истој мери као претходне. Дефинисана је Аперијева константа преко Риманове зета функције [14], приказани су начини израчунавања и показана је њена ирационалност [15]. Представљене су и Ојлер-Маскеронијева и Каталанова константа.

На крају, захваљујем се свим наставницима и професорима на труду, саветима, подршци и пренетом знању током свих година школовања. Посебну захвалност дугујем ментору др Небојши Икодиновићу на издвојеном времену, сугестијама и стручним саветима приликом писања рада. Захваљујем се и комисији на сугестијама.

Највише се захваљујем блиским људима на неизмерној подршци, помоћи и разумевању током трајања студија.

Садржај

1 Увод

Појам скупа је основни појам математике, не дефинише се, тј. не своди се на још једноставније појмове. Сваки скуп чине његови елементи и скуп је њима одређен. Изјаву „x је елемент скупа S" бележимо симболички $x \in S$, а негацију те изјаве бележимо $x \notin S$. Међу скупове убрајамо и тзв. празан скуп $\varnothing$, који је без елемената. У раду ће бити коришћене стандардне ознаке за основне скупове бројева:

-скуп природних бројева $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...n, n+1, ...\}$;

-скуп целих бројева $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$;

-скуп рационалних бројева $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$;

-скуп реалних бројева $\mathbb{R}$;

-скуп ирационалних бројева $\mathbb{I}$;

-скуп комплексих бројева $\mathbb{C} = \{x + iy | x, y \in \mathbb{R}\}, i = \sqrt{-1}$.

Често скупу реалних бројева придодајемо још два фиктивна елемента, $-\infty$ и $+\infty$, који су на следећи начин повезани са реалним бројевима:

1. $-\infty < x < +\infty$ за сваки реални број x;
2. за $x > -\infty$ важи: $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$,
   за $x < +\infty$ важи: $x + (-\infty) = x - (+\infty) = -\infty$,
   за $x > 0$ важи: $x(+\infty) = +\infty, x(-\infty) = -\infty$,
   за $x < 0$ важи: $x(+\infty) = -\infty, x(-\infty) = +\infty$,
   $1/(+\infty) = 0$ и $1/(-\infty) = 0$.

Скуп реалних бројева коме су придодати фиктивни елементи зовемо проширени скуп реалних бројева и означавамо га са $\overline{\mathbb{R}}$.

Појам природног, целог и рационалног броја је у доброј мери познат већ ученицима основних школа. При крају основног образовања ученици се сусрећу са бројевима као што су $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, па онда са бројем π, као размером дужине кружнице и пречника. Дакле, сусрећу се већ и са ирационалним бројевима, чиме се упознају и са реалним бројевима на интуитивно прихватљивом нивоу. У средњој школи се манипулише реалним бројевима и на том нивоу за многе најчешће престају било каква питања о томе шта се заправо дешава у теорији и колико добро би требало познавати аксиоматику реалних бројева, а самим тим и природних, целих и рационалних бројева. И у модерној математици појам реалног броја има веома значајну улогу. Природни, цели и рационални бројеви, како су претходно дефинисани, не исцрпљују све бројеве. На пример, не постоји рационалан број r, такав да $r^2 = 2$. Ту чињеницу су већ познавали старогрчки математичари и тумачили је у смислу да дијагонала јединичног квадрата није самерљива са страницом квадрата. Под претпоставком да читалац има основно знање из елементарне математике када су у питању релације, функције, да добро познаје алгебарске структуре основних скупова бројева, даље ће бити наведене дефиниције и теореме које су неопходне за разумевање овог рада.

Дефиниција 1.1 Сви реални бројеви који нису рационални називају се **ирационални бројеви**. Скуп свих ирационалних бројева означава се са $\mathbb{I}$. Дакле, $\mathbb{I} = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Ирационални бројеви који су решења једначине облика

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0,$$

$$a_i \in \mathbb{Q}\ , i = 0, 1, ..., n$$

називају се **алгебарски**. Трансцедентан број је појам којим се у математици означава број који није решење ниједне алгебарске једначине са рационалним коефицијентима. Трансцедентни бројеви су подскуп ирационалних бројева, тј. сви трансцедентни бројеви су ирационални, али нису сви ирационални бројеви трансцедентни. На пример, e и π су трансцедентни (и ирационални) док је $\sqrt{2}$ ирационалан али не и трансцедентан, јер је решење једначине $x^2 - 2 = 0$.

Дефиниција 1.2 Реална функција једне реалне променљиве је свака функција $f : A \to \mathbb{R}$, где је $A \subseteq \mathbb{R}$. У случају $A \subseteq \mathbb{R}^n$ f је реална функција n реалних променљивих.

Појам функција у даљем тексту односи се на реалну функцију једне реалне променљиве, осим ако није другачије наглашено.

Дефиниција 1.3 Функција $y = f(x)$ је **алгебарска** ако задовољава алгебарску једначину

$$a_n(x)y^n + a_{n-1}(x)y^{n-1} + ... + a_1(x)y + a_0(x) = 0, \tag{1.1}$$

где су $a_i(x), i = 0, 1, ..., n, n \in \mathbb{N}$ полиноми по x произвољног степена.

Полином n-тог степена, $n \in \mathbb{N}_0$ је функција облика:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0, \tag{1.2}$$

$a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup 0$, $a_i \in \mathbb{R}$, $i = 0, 1, ..., n$.

Природни домен полинома је цео скуп $\mathbb{R}$. Специјално, полином нултог степена је константна функција, полином првог степена линеарна функција, полином другог степена квадратна функција, итд. Очигледно, и сами полиноми су алгебарске функције, јер су коефицијенти полинома константне функције тј. полиноми нултог степена.

Све функције променљиве x које нису алгебарске називају се **трансцедентне**. Такве су рецимо функције:

$$f(x) = \sin x,\ \ f(x) = \log x,\ \ f(x) = \operatorname{arctg} x \text{ итд.}$$

Тачка $c \in \mathbb{R}$ је **тачка нагомилавања скупа** A, $A \subseteq \mathbb{R}$, ако свака околина тачке c садржи бар једну тачку скупа A различиту од c , тј. за свако $\epsilon > 0$ важи:

$$A \cap ((c - \epsilon, c + \epsilon) \setminus c) \neq \varnothing\,.$$

Појам граничне вредности уведен је у циљу испитивања понашања функције у околини неке тачке без обзира да ли је функција у тој тачки дефинисана или не.

Дефиниција 1.4 Нека је $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}$ и $a \in \overline{\mathbb{R}}$ тачка нагомилавања скупа A. Кажемо да је $b \in \overline{\mathbb{R}}$ **гранична вредност (лимес) функције** f у тачки a и пишемо

$$\lim_{x \to a, x \in A} f(x) = b$$

тј. $f(x) \to b$, $x \to a$ $x \in A$ ако за сваку околину V која припада скупу свих околина тачке b, што записујемо $V \in \nu(b)$, постоји $U \in \nu(a)$ таква да је

$$f((U \setminus \{a\}) \cap A) \subseteq V. \tag{1.3}$$

Напомена: Пошто тачка нагомилавања неког скупа не мора да припада том скупу, функција f не мора бити дефинисана у тачки a. Ако је функција f и дефинисана у тачки a, вредност $f(a)$ не утиче на граничну вредност функције али зато очигледно утиче скуп A на коме се она тражи.

Нека је $f : X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{X}$ тачка нагомилавања скупа X. Пошто је функција сада дефинисана и у тачки x_0 испитаћемо њена понашања у некој околини те тачке у односу на вредност $f(x_0)$.

Дефиниција 1.5 Функција $f : X \to \mathbb{R}$ је **непрекидна у тачки** $x_0 \in X$ која је тачка нагомилавања скупа X ако је

$$\lim_{x \to x_0, x \in X} f(x) = f(x_0). \tag{1.4}$$

Овај услов, по дефиницији граничне вредности на "$\epsilon - \delta$" језику, значи да

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in X)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon).$$

Дефиниција 1.6 Основне елементарне функције су константне функције, степене функције, експоненцијалне функције, логаритамске функције, тригонометријске функције и инверзне тригонометријске функције.

Дефиниција 1.7 Елементарне функције су оне које се из основних елементарних функција добијају **коначном** применом алгебарских операција $+, \cdot, -, :$ и операције слагања (композиције) функција.

Теорема 1.1 Све елементарне функције су непрекидне на свом природном домену.

Дефиниција 1.8 Бројни низ (низ) је функција $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Уместо $a(n)$ најчешће пишемо a_n. При томе се a_n назива **општи члан** низа. Низ чији је општи члан a_n, записујемо у облику $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ или краће са $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Шта више, домен функције a не мора бити цео скуп $\mathbb{N}$ природних бројева, него и неки његов бесконачан подскуп.

Примери:

1. $a_n = a_1 + (n-1)d$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, d \in \mathbb{R}$ (аритметички низ)
2. $b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, $b_1, q \in \mathbb{R}$, (геометријски низ)
3. $c_n = c$, $n \in \mathbb{N}$ (стационаран низ)

Дефиниција 1.9 Број a је **гранична вредност** (граница, лимес) низа $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ако за свако $\epsilon > 0$ постоји природан број n_0 који зависи од ϵ такав да за све природне бројеве $n \geq n_0$ важи

$$|a_n - a| < \epsilon. \tag{1.5}$$

Пишемо $\lim_{n \to \infty} a_n = a$ или $a_n \to a, n \to \infty$. У случају да $a \in \mathbb{R}$ кажемо да низ $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ конвергира. За низ који не конвергира кажемо да дивергира.

Дефиниција 1.10 Нека је $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ низ реалних бројева. Израз облика

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$$

или краће

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

назива се **бројни ред** (ред) са општим чланом a_n. $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ n \in \mathbb{N}$, назива се $n-$та парцијална сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, а ред

$$a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k} + ...$$

остатак $n-$тог реда и означава са r_n. Дакле, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$.

Дефиниција 1.11 Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **конвергира** ако конвергира низ $\{s_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ парцијалних сума тог реда. За ред који не конвергира кажемо да **дивергира**. Ако је $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, број s се назива сума реда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и пише $s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Овај назив и запис користи се и у случају $s = +\infty(-\infty)$.

Теорема 1.2 Кошијев потребан и довољан услов за конвергенцију редова: Ред $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира ако и само ако

$$(\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N})(\forall n, p \in \mathbb{N})(n \geqslant n_0 \Rightarrow |a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \epsilon)\,.$$

Последица 1.2.1 Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ конвергира, тада је $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Последица 1.2.2 Ако $a_n \not\to 0, n \to \infty$, ред дивергира.

Низ чији су елементи функције, дефинисане на неком скупу $X \subseteq \mathbb{R}$, назива се **функционални низ** и записује у облику

$$f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x), ...x \in X, \tag{1.6}$$

или краће, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Слично, ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in X, \tag{1.7}$$

где су $u_n, n \in \mathbb{N}$ функције дефинисане на $X \subseteq \mathbb{R}$ назива се **функционални ред**.

Дефиниција 1.12 Скуп $E \subseteq X$ свих вредности променљиве x за коју фукционални низ 1.6 (односно функционални ред 1.7) конвергира назива се **област конвергенције низа (реда)**. У том случају пишемо

$$f_n(x) \to f(x), x \in E,$$

где је $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), x \in E$

$$(s_n(x) \to s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), x \in E, s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_n(x), x \in E).$$

Функција f назива се **граница низа**, а функција s **сума реда**.

Дефиниција 1.13 Функционални ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \tag{1.8}$$

$x_0 \in \mathbb{R}, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_{\not\vee}$, назива се **степени (потенцијални) ред**.

Сменом сваки степени ред може се свести на степени ред облика

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1.9}$$

Очигледно, сваки степени ред тог облика конвергира за $x = 0$ што значи да његова област конвергенције E никад није празан скуп.

За сваки степени ред 1.9 постоји $0 \leq P \geq +\infty$ тако да ако је $P \in (0, +\infty)$ за све x са особином $|x| < P$ ред апсолутно конвергира а за X са особином $|x| > P$ дивергира. За $P = 0$ ред конвергира само за $X = 0$ а за $P = +\infty$ конвергира на целом скупу реалних бројева . У случају $P > 0$ интервал $(-P, +P)$ назива се **интервал конвергенције** а P **полупречник конвергенције** степеног реда.

Дефиниција 1.14 Функција f је **реална аналитичка** у тачки x_0 ако постоје бројеви $r > 0$ и $a_n, n \in \mathbb{N}_{\nvdash}$, такви да за све $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ важи да је

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{1.10}$$

Сваки степени ред $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ за $P > 0$ је реална аналитичка функција у тачки x_0. Збир и разлика две реалне аналитичке функције у тачки x_0 је реална аналитичка функција у тачки x_0.

Дефиниција 1.15 Нека је функција f дефинисана у некој околини тачке x_0 и нека у x_0 има изводе произвољног реда (тј. неограничено пута је диференцијабилна у x_0), Тада се ред

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \tag{1.11}$$

назива се **Тејлоров ред** функције f у тачки x_0. Специјално за $x_0 = 0$ добија се **Маклоренов ред** функције f.

Теорема 1.3 Ако се функција f може представити степеним редом $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ у интервалу $(x_0 - r, x_0 + r), r > 0$, тада се то може урадити само на један начин и то формулом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \tag{1.12}$$

Таблица степених редова:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} = 1 + x + x^2 + x^3 + ...$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ...$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ...$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ...$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + ...$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + ...$$

$$(1+x)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k}{n} x^n = 1 + kx + \frac{k(k-1)}{2!}x^2 + \frac{k(k-1)(k-2)}{3!}x^3 + ...$$

Подела интервала $[a,b], a < b$, је сваки коначан скуп тачака $x_i \in [a,b], i = 0,1,...,k$, такав да је

$$a = x_0 < x_1 < ... < x_{k-1} = b.$$

Уводимо ознаку

$$P = \{x_i\}_{i=0}^k.$$

Тачке x_i називају се **деобне тачке**, сваки интервал облика $[x_i, x_{i+1}], i = 1,2,...,k$ **интервал поделе**, а његова дужина означава се са $\triangle x_i$, тј.

$$\triangle x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1,2,...,k.$$

Означавамо са

$$\delta_P = \max\{\triangle x_i \text{ тако да } i = 1,2,...,k\}.$$

Нека је даље функција f дефинисана на интервалу $[a,b]$, $P = \{x_i\}_{i=0}^k$ нека подела интервала $[a,b]$ и нека су c_i произвољно изабране тачке из интервала $[x_{i-1}, x_i]$ тј. нека

$$c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,2,...,k.$$

Сума

$$\sigma_P(f) = \sigma_P(f; c_1, ..., c_k) = \sum_{i=1}^{k} f(c_i) \cdot \triangle x_i$$

назива се **Риманова интегрална сума** функције на интервалу $[a,b]$.

Дефиниција 1.16 Број I је гранична вредност (лимес) Риманових интегралних сума функције $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ кад $\delta_P \to 0$, ако за свако $\epsilon > 0$ постоји $\delta = \delta(\epsilon)$ тако да за сваку поделу $P = \{x_i\}_{i=0}^k$ интервала $[a,b]$ за коју је $\delta_P = \delta$ и сваки избор тачака $c_i \in [x_{i-1}, x_i], i = 1,...,k$ важи да је

$$\left| \sum_{i=1}^{k} f(c_i) \cdot \triangle x_i - I \right| < \epsilon.$$

У том случају пишемо $\lim_{\delta_P \to 0} \sigma_P(f) = I$ и кажемо да је f **Риман интеграбилна** на интервалу $[a,b]$. Број I назива се **одређени интеграл** функције f и означава са

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

При томе се a и b називају доњом и горњом границом интеграла, респективно, функција f назива се подинтегрална функција, а израз $f(x)dx$ подинтегрални израз.

Верижни разломак је израз који је добијен итеративним поступком и он представља неки број као суму целог броја и разломка чији се именилац исто може представити као је сума целог броја и неког другог разломка, итд. Верижни разломци већ стотинама година имају широку примену. Брзо конвергирају па се користе и за апроксимацију реалних бројева разломком. Сваки рационалан број се може записати као коначан верижни разломак. Важи и обрнуто, коначан верижни разломак одговара рационалном броју. Бесконачни верижни разломци представљају ирационалне бројеве. Сваки број облика $\sqrt{n}$, $n \in \mathbb{N}$ може се приказати као бесконачан периодични верижни разломак.

Познато је да за сваки реалан број x постоји јединствен цео број a тако да $a \leqslant x \leqslant a+1$. Нека је x ирационалан број и нека је $a = \lfloor x \rfloor$, где са $\lfloor x \rfloor$ означавамо цео део броја x, тј. највећи цео број који није већи од x. Број $n = x - a$ задовољава $0 < n < 1$. Ово је први корак у развоју броја x у верижни разломак. Ако се претпостави да је x ирационалан број, такав да

$$a_0 \leqslant x \leqslant a_0 + 1,\ a_0, a_0 + 1 \in \mathbb{Z} \tag{1.13}$$

тада је $a_0 = \lfloor x \rfloor$ и можемо записати

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1}, \quad 0 < \frac{1}{x_1} < 1. \tag{1.14}$$

Из релације $\frac{1}{x_1} < 1$, следи да је $x_1 > 1$ и ако се узме да је $a_1 = \lfloor x_1 \rfloor$, тада важи

$$x_1 = a_1 + \frac{1}{x_2}, \quad 0 < \frac{1}{x_2} < 1.$$

Аналогно за $a_2 = \lfloor x_2 \rfloor$, важи:

$$\begin{gathered} x_2 = a_2 + \frac{1}{x_3}, \quad 0 < \frac{1}{x_3} < 1 \\ . \\ . \\ . \\ x_{k-1} = a_{k-1} + \frac{1}{x_k}, \quad 0 < \frac{1}{x_k} < 1 \end{gathered} \tag{1.15}$$

где су $a_0, a_1, ..., a_{k-1}, ... \in \mathbb{Z}$, а бројеви $x_0, x_1, ..., x_{k-1}, ... \in \mathbb{I}$. Уврштавањем израза 1.15 у израз 1.14 добија се након k корака једноставан бесконачан верижни разломак

$$x = a_0 + \frac{1}{x_1} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{x_2}} = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{x_3}}} = ... \tag{1.16}$$

који се може краће записати као $x = [a_0; a_1, ..., a_{k-1}, a_k ...]$. Ако се из бесконачног верижног разломка 1.16 одабере коначно много чланова $[a_0; a_1, a_2, a_3, ..., a_k]$, онда се такав израз зове k-та конвергента бесконачног разломка x.

2 Питагорина константа, $\sqrt{2}$

$\sqrt{2}$ је врло стара математичка константа, прва ирационална која се учи у школским клупама. У историји математике, веома је рано запажен однос однос између дијагонале и странице квадрата. Откриће саме константе приписује се грчком математичару и филозофу Питагори (328. п.н.е). [6]

2.1 Доказ ирационалности $\sqrt{2}$

Питагора и његови следбеници веровали су да се дужина сваке дужи може изразити рационалним бројем. Другим речима, да се размера сваке две дужи може изразити као количник два природна броја. То би значило да је целобројни умножак дијагонале једнак неком другом целобројном умношку странице квадрата. То уверење је нарушено када је доказано да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, односно да се не може записати као a/b,где су a и b природни бројеви. Откриће да је $\sqrt{2}$ ирационалан број приписује се Хипасу. [6] Постоји више доказа да је $\sqrt{2}$ ирационалан број, а у наставку ће бити издвојена два доказа. Први доказ заснован је на својствима дељивости целих бројева, а други на основу уређења.

-Први доказ: Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{2}$ рационалан број. То значи да је

$$\frac{p}{q} = \sqrt{2},$$

где су p и q узајамно прости бројеви. Ако квадрирамо и леву и десну страну, добијамо $\frac{p^2}{q^2} = 2$, што даље значи да је $p^2 = 2q^2$. Закључујемо да је број p дељив бројем 2, јер је његов квадрат дељив бројем 2, па га можемо записати као $p = 2r$. Сада имамо $4r^2 = 2q^2$, односно $2r^2 = q^2$. Добили смо да је и q дељив са 2, као и p, што је контрадикција са претпоставком да су узајамно прости. Полазна претпоставка није тачна, $\sqrt{2}$ није рационалан број.

-Други доказ: Претпоставимо супротно, да је $\sqrt{2}$ рационалан број. Тада постоји најмањи позитиван цео број s, такав да је $s\sqrt{2}$ цео број. Пошто је $1 < 2$ следи и $1 < \sqrt{2}$ и тако је $t = s(\sqrt{2} - 1)$ цео број. Помножимо једнакост са $\sqrt{2}$, $t\sqrt{2} = s(\sqrt{2} - 1)\sqrt{2}$. Добићемо да $t\sqrt{2} = 2s - s\sqrt{2}$ је цео број и $t < s$. Али то је контрадикција са полазном претпоставком, да је s најмањи такав цео број. $\sqrt{2}$ није рационалан број. $\square$

2.2 Начини представљања Питагорине константе

2.2.1 Апроксимација Питагорине константе Њутновим итеративним поступком

Квадратни корен позитивног броја c може да се израчуна као нула функције $f(x) = x^2 - c$. Апроксимација те нуле може се добити Њутновим итеративним поступком. У овом случају Њутнов итеративни поступак гласи:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - c}{2x_k} = \frac{1}{2}(x_k + \frac{c}{x_k}), \text{ за } k \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Ако је $c = 2$ тада су $f(x) = x^2 - 2$, и $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^2 - 2}{2x_k}$, [8] односно:

$$\begin{aligned} x_k &= x_{k-1} - \frac{x_{k-1}^2 - 2}{2x_{k-1}} \\ &= \frac{2x_{k-1}^2 - x_{k-1}^2 - 2}{2x_{k-1}} \\ &= \frac{x_{k-1}^2 - 2}{2x_{k-1}} \\ &= \frac{x_{k-1}}{2} - \frac{1}{x_{k-1}}. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Њутнов метод решавања једначина даје рекурентни алгоритам за добијање Питагорине константе, који већ у почетним итерацијама доноси врло прецизно решење:

$$x_0 = 1,\ x_k = \frac{x_{k-1}}{2} + \frac{1}{x_{k-1}},\ \text{за } k \geqslant 1 \qquad \lim_{k\to\infty} x_k = \sqrt{2}. \tag{2.3}$$

Када је у питању реципрочна вредност $\sqrt{2}$, имамо:

$$y_0 = \frac{1}{2},\ y_k = y_{k-1}\left(\frac{3}{2} - y_{k-1}^2\right),\ \text{за } k \geqslant 1 \qquad \lim_{k\to\infty} y_k = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.4}$$

2.2.2 Питагорина константа као бесконачна сума

Биномни развој,

$$(1+x)^k = 1 + \frac{kx}{1!} + \frac{k(k-1)x^2}{2!} + \frac{k(k-1)(k-2)x^3}{3!} + ...$$

који је такође дао Њутн, пружа две интересантне суме за $k = 1/2$ и $x = 1$ [5]:

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n}\cdot(2n-1)}\binom{2n}{n} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6} - + ... = \sqrt{2}, \tag{2.5}$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{2^{2n}}\binom{2n}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} + - ... = \frac{1}{\sqrt{2}}. \tag{2.6}$$

2.2.3 Питагорина константа као бесконачни производ

Питагорина константа се може представити и бесконачним производом:

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{(-1)^k}{2k-1}\right) = (1+\frac{1}{1})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})... = \sqrt{2}. \tag{2.7}$$

Ово следи из Ојлер-Вајерштрасове факторизације за синус. За сваки реалан број x важи [5]:

$$\frac{\sin x}{x} = \prod_{j\geq 1}\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 j^2}\right). \tag{2.8}$$

Одвајајући парне и непарне чиниоце, производ се даље може расписати:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{P} &= \prod_{k\geq 1}\left(1-\frac{(-1)^k}{2k-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\prod_{k\geq 0}\left(1-\frac{1}{4k-1}\right)\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\prod_{k\geq 0}\frac{16k^2-4}{16k^2-1}\\
&= 2\prod_{k\geq 1}\frac{16k^2-4}{16k^2-1}\\
&= 2\prod_{k\geq 1}\frac{\left(1-(\frac{1}{2})^2/k^2\right)}{\left(1-(\frac{1}{4})^2/k^2\right)}\\
&= 2\cdot\frac{\sin\frac{1}{2}\pi}{\frac{1}{2}\pi}\Big/\frac{\sin\frac{1}{4}\pi}{\frac{1}{4}\pi}\\
&= 2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\\
&= \sqrt{2}\,.
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Још један развој за Питагорину константу преко бесконачног производа је дат као [5]:

$$
\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4(2n-1)^2}\right)=\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\cdot\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\cdot\frac{9\cdot 11}{10\cdot 10}\cdot\frac{13\cdot 15}{14\cdot 14}\ldots=\frac{1}{\sqrt{2}}\,. \tag{2.10}
$$

2.2.4 Питагорина константа у облику верижног разломка

Питагорина константа $\sqrt{2}$ може бити представљена и у облику верижног разломка. Применом алгоритма 1.14 - 1.16 на $x=\sqrt{2}$, добија се:

$$
1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=\sqrt{2}. \tag{2.11}
$$

Уколико се и левој и десној страни једнакости дода број 1, добија се следећи израз:

$$
2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ldots}}}=1+\sqrt{2} \tag{2.12}
$$

који је повезан са Пеловим низом:

$$
a_0=0, a_1=1, \qquad a_n=2a_{n-1}+a_{n-2} \text{ за } n\geqslant 2 \tag{2.13}
$$

преко граничне формуле

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1+\sqrt{2}. \tag{2.14}
$$

2.2.5 Питагорина константа преко Тејлоровог реда

Тејлоров ред може да се користи за апроксимацију неког броја преко полинома који даје приближну вредност траженог броја:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + ... \tag{2.15}$$

Тејлоров ред је веома моћан алат за апроксимирање вредности функција које се иначе тешко одређују, а може се користити и за израчунавање бесконачних сума и интеграла. Да би се искористио Тејлоров образац 2.15 потребно је наћи погодну функцију. У овом случају пошто се тражи апроксимација за $\sqrt{2}$ потпуно је логично да ће се користити функција $\sqrt{x}$, а за x се узима број 2. Потребно је одабрати и вредност за a која би требало да је приближна траженом броју 2, а да при томе функција $f(a)$ буде лака за израчунавање. [8] У овом случају најпогодније је одабрати $a = 1$.

За $f(x) = \sqrt{a}$ следи: $f'(a) = \frac{1}{2}a^{-1/2},\ f''(a) = -\frac{1}{4}a^{-3/2},\ f'''(x) = \frac{3}{8}a^{-5/2}, ...$

Уврштавањем извода функције $\sqrt{x}$ у Тејлоров развој 2.15 следи:

$$\sqrt{x} = \sqrt{a} + \frac{\frac{1}{2}a^{-1/2}}{1!}(x-a) - \frac{\frac{1}{4}a^{-3/2}}{2!}(x-a)^2 + \frac{\frac{3}{8}a^{-5/2}}{3!}(x-a)^3 - ... \tag{2.16}$$

Одабиром $x = 2$ и $a = 1$ добија се:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} - \frac{15}{384} + \frac{7}{256} - ... \tag{2.17}$$

Данас је могуће, захваљујући ефикасним алгоритмима и веома брзим компјутерима, израчунавање овог броја са великим бројем цифара. Вредност $\sqrt{2}$ била је израчуната 1997. године до 137 438 953 444 децималних места. Ово је објавио тим јапанског научника Јасумаса Канаде. Фебруара 2006. године рекорд за $\sqrt{2}$ оборен је коришћењем једног кућног рачунара. Јапански инжењер система Кондо је израчунао константу са 200 000 000 000 цифара за нешто мање од 13 дана и 14 часова рада користећи један 3.6 Hz PC са 16 GB меморије.

2.3 Логичка занимљивост

Очигледно да постоје рационални бројеви x и y такви да је x^y ирационалан (на пример $x = 2$ и $y = 1/2$). Поставља се питање да ли постоје ирационални x и y такви да је x^y рационално.

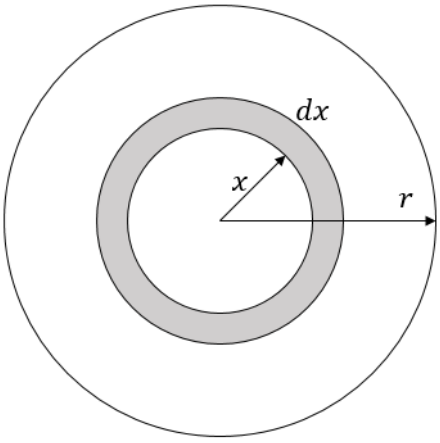
Нека је $z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$. Ако узмемо да је $x = z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ и $y = \sqrt{2}$, израчунавањем вредности броја x^y се добија резултат $x^y = 2$. Дакле, добили смо потврдан одговор на постављено питање, без удубљивања у аритметичку природу броја z. Заправо, z је по Гелфонд Шнајдеровој теореми из 1934. трансцедентан број, а одатле следи да је z и ирационалан. Постоје многи нерешени проблеми у овој математичкој области. На пример, не зна се да ли је

$$\sqrt{2}^z = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$$

ирационално, а камоли да ли је трасцедентно.

3 Број π

Број π је ирационалан број који је једнак односу обима и пречника круга $\pi = O/d$. Такође, број пи се може изразити и преко односа површине круга и квадрата његовог полупречника, $\pi = P/r^2$. Овај однос је једнак за све кругове, што је Еуклид и доказао у својој књизи у 3. веку п.н.е. Овде се намеће питање због чега је број π заступљен у формулама помоћу којих се рачуна обим и површина круга. На слици 1 је приказан круг полупречника r. Сивом бојом је обојен прстен, радијуса x и дебљине dx, који припада кругу. Ако је дебљина овог прстена бесконачно мала тада његова површина може да се израчуна преко формуле $2\pi x \cdot dx$, где је $2\pi x$ обим кружнице прстена. [1] Интеграљењем ове формуле преко свих полупречника од 0 до r добија се израз који описује површину круга: $P = \int_0^r 2\pi x\, dx = \pi r^2$.



Слика 1. Веза између формула за обим и површину круга

3.1 Историјски осврт на број π

Многе древне цивилизације су успеле да приближно одреде вредности површина и обима круга иако нису знали за постојање броја π. Месопотамци су своје математичке калкулације писали на воштаним таблицама и користили су нумерички систем заснован на броју 60. Пронађени су њихови прорачуни у којима је одређен однос обима правилног шестоугла и обима његовог описаног круга. Ако је полупречник описаног круга r, тада су странице правилног шестоугла, око којег је описан круг, такође r. Однос њихових обима Месопотамци су приказали сексагезималним [1] бројем 0;57,36, односно:

$$\frac{6r}{2\pi r} = \frac{57}{60} + \frac{36}{3600}\,. \tag{3.1}$$

Одавде следи да је $\pi = 3\frac{1}{8} = 3,125$. Ова процена броја π се разликује за мање од 1 % од његове стварне вредности. Египћани су апроксимирали површину круга пречника d тако што су умањили пречник за $\frac{1}{9}$ његове дужине, након чега су ту новодобијену вредност квадрирали:

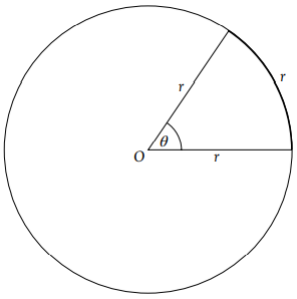
$$P = \left(d - \frac{1}{9}d\right)^2 = \left(\frac{8}{9}d\right)^2 = \frac{64}{81}d^2\,. \tag{3.2}$$

[1] Сексагезимални бројевни систем је систем са базом 60. Настао је у древном Сумеру у трећем миленијуму п.н.е. Касније су га наследили Вавилонци, а и данас је у употреби за мерење времена, углова и географских координата.

Непознато је како су открили овај метод. Постоје различите теорије, а као највероватније објашњење се намеће да су ову формулу открили путем искуства. Из овог метода следи да је $\pi = 3,16$ и ова вредност се од стварне такође разликује за мање од једног процента. Остале апроксимације које су користили древни народи нису биле прецизне као апроксимације Египћана и Месопотамаца. У Библији се броју π додељује вредност 3. Ова апроксимација није довољно прецизна као остале, али је лака за коришћење. Индијци су користили две различите апроксимације броја π. Да би се приближно одредила површина круга може се узети $\frac{13}{15}$ његовог пречника и конструисати квадрат чија је страница једнака овој вредности. Ова апроксимација не даје најбоље резултате јер из ње следи да је $\pi = 3,004$. По другој апроксимацији површина датог квадрата је једнака површини круга чији је полупречник једнак збиру половине странице квадрата и трећине разлике полудијагонале и полустранице квадрата. Ова апроксимација даје вредност $\pi = 3,088$. Једноставнија апроксимација која се користила у Кини је $\pi = \sqrt{10} = 3.162$. [1]

3.2 Радијан

Број π омогућава увођење још једног интуитивног начина за мерење углова. На слици 2 је приказан круг и у његовом центру је конструисан угао θ који је једнак једном радијану (око 57,3°). Угао је једнак једном радијану када је кружни лук, који се види над тим углом, исте дужине као и полупречник круга. У општем случају сваки угао се може описати бројем радијана једнаким односу дужине кружног лука, који се види под датим углом, и полупречника круга. То значи да је полукруг кружни лук који се види под углом од π радијана. Заслуге за увођење ове мере је добио енглески математичар Роџер Котес. Радијан је често погоднији начин за описивање мере угла јер је дефинисан преко односа кружног лука и полупречника круга, док је број степени 360, произвољно одабран. Ово се може приметити и у многим математичким резултатима који су поједностављени и елегантнији уколико су углови приказани у радијанима. [1]

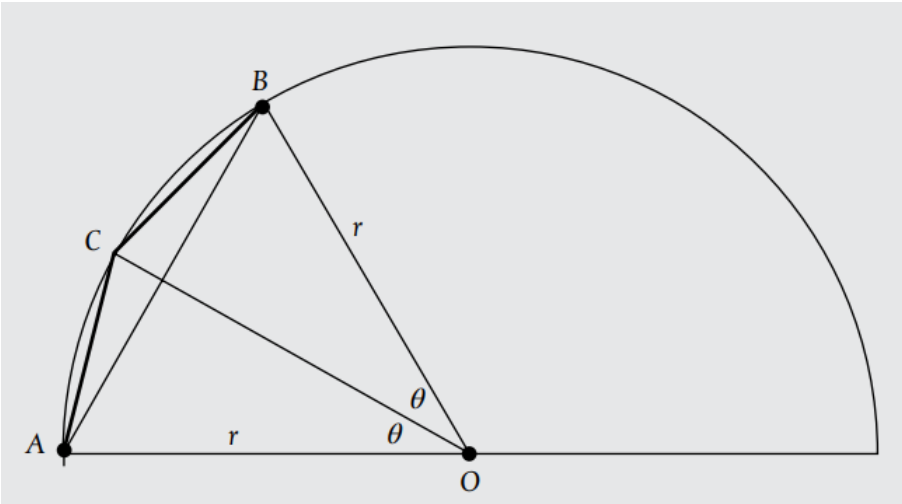


Слика 2. Дефиниција радијана као мере угла

3.3 Бесконачни изрази броја π

3.3.1 Вијетов бесконачни производ

Већина начина који су коришћени за описивање броја π су биле грубе апроксимације. Нови приступ је увео Франсоа Вијет. Извео је тачан израз, који се састоји од беконачно много чинилаца, помоћу којег се може одредити број π. До поменутог производа дошао је тако што је упоређивао површине многоуглова који су уписани у круг радијуса r. Површина сваког троугла се може представити изразом $P = \frac{1}{2}ab\sin\theta$, где су a и b странице троугла,



Слика 3. Многоугао уписан у круг

а θ је угао између њих. Следи да је површина троугла AOB на слици 3 је једнака $P = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta$.

Нека је са $A(n)$ означена површина многоугла са n страница, тада је:

$$A(n) = n \cdot P_{AOB} = n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin 2\theta = nr^2 \sin\theta \cos\theta. \tag{3.3}$$

Површина многоугла са $2n$ страница са слике 3 се може израчунати као:

$$A(2n) = 2n \cdot P_{AOC} = 2n \cdot \frac{1}{2}r^2 \sin\theta = nr^2 \sin\theta. \tag{3.4}$$

Дељењем ове две површине добија се:

$$A(n)/A(2n) = \cos\theta. \tag{3.5}$$

Аналогно се може показати да је: $A(2n)/A(4n) = \cos\theta/2$ и $A(4n)/A(8n) = \cos\theta/4$. Множењем ових односа добија се:

$$A(n)/A(8n) = [A(n)/A(2n)] \cdot [A(2n)/A(4n)] \cdot [A(4n)/A(8n)] = \cos\theta \cdot \cos\theta/2 \cdot \cos\theta/4. \tag{3.6}$$

После k оваквих корака добија се однос:

$$A(n)/A(2^k n) = \cos\theta \cdot \cos\theta/2 \cdot \cos\theta/4 \cdot ... \cdot \cos\theta/2^k\,. \tag{3.7}$$

За довољно велико k површина $A(2^k n)$ тежи површини круга πr^2, па је:

$$A(n) = \pi r^2 \cdot \cos\theta \cdot \cos\theta/2 \cdot \cos\theta/4 \cdot \cos\theta/8 \cdot ... \tag{3.8}$$

Ако је $n = 4$ и угао $\theta = \pi/4$ тада је:

$$2r^2 = \pi r^2 \cdot \cos\pi/4 \cdot \cos\pi/8 \cdot \cos\pi/16 \cdot \cos\pi/32 \cdot ... \tag{3.9}$$

одавде следи да је

$$2/\pi = \cos\pi/4 \cdot \cos\pi/8 \cdot \cos\pi/16 \cdot \cos\pi/32 \cdot ... \tag{3.10}$$

имајући на уму да је: $\cos\pi/4 = \sqrt{2}/2$, $\cos\pi/8 = \sqrt{2+\sqrt{2}}/2...$ добија се:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdot ... \tag{3.11}$$

Узимањем све већег броја чланова овог производа добија се све боља апроксимација за број π. Вијетов производ, иако даје добру апроксимацију, је незгодан за коришћење јер се састоји из великог броја квадратних корена броја два. [1, 9]

3.3.2 Апроксимације броја π помоћу функције $\operatorname{arctg} x$

У 18. и 19. веку откривен је нови метод за одређивање броја π уз помоћ функције $\operatorname{arctg} x$, која је инверзна функција од $\operatorname{tg} x$. На слици 4. је приказан квадрат $ABCD$ чија је страница дужине 2. Нека су AC и DB дијагонале овог квадрата и нека је тачка F тачка њиховог пресека. Нека кроз тачку F пролази дуж EF која је паралелна са страницама AB и DC и која полови странице квадрата AD и BC. Троугао CDE је правоугли троугао са катетама $ED = 1$ и $CD = 2$. Угао $\angle ECD$ овог троугла је означен са α. Тада је $\operatorname{tg}\alpha = 1/2$, а одатле следи да је $\alpha = \operatorname{arctg} 1/2$. Из правоуглог троугла HFC следи да је $\beta = \operatorname{arctg}\frac{HF}{FC}$. FC и DF су половине дијагонала квадрата и стога су једнаке. Из троугла ADC следи да су DF и EC његове тежишне линије и оне се секу у тачки H. То значи да је $HF : DF = 1/3$ тј. $HF : FC = 1/3$. Одавде следи да је $\beta = \operatorname{arctg} 1/3$. Пошто дијагонала квадрата полови прав угао, следи да је $\alpha + \beta = \pi/4$, што се другачије може записати као:

$$\operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3 = \pi/4. \tag{3.12}$$

Из адиционе формуле за функцију $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y} \tag{3.13}$$

следи један интересантан израз. Ако се искористе смене $u = \operatorname{tg} x$ и $v = \operatorname{tg} y$ добија се:

$$\operatorname{arctg} u + \operatorname{arctg} v = \operatorname{arctg}\frac{u+v}{1-uv}. \tag{3.14}$$

Ако се узме да је $u = 1/2$ и $v = 1/3$ добија се:

$$\operatorname{arctg} 1/2 + \operatorname{arctg} 1/3 = \operatorname{arctg} 1 = \pi/4. \tag{3.15}$$

Многе функције се могу развити у бесконачан ред, те се и $\operatorname{arctg} x$ може представити као:

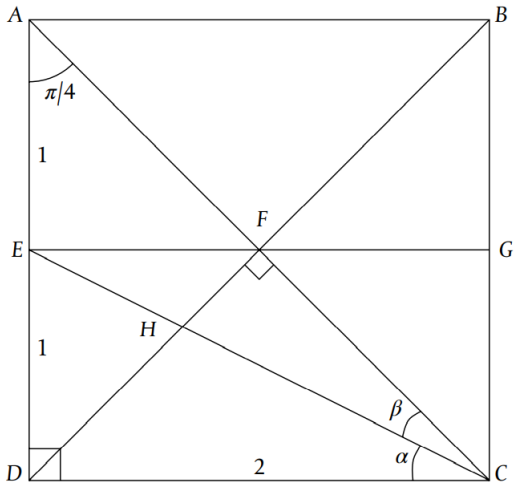
$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \frac{1}{9}x^9 - ... \tag{3.16}$$

За $x = 1$ следи:

$$\pi/4 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - ... \tag{3.17}$$

На сличан начин се аркустангенси из једначине 3.12 могу развити у ред и на тај начин се добија нова репрезентација $\pi/4$:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{4} &= \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + ...\right\} + \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5 - \frac{1}{7}\left(\frac{1}{3}\right)^7 + ...\right\} \\ &= \left\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2^3\cdot 3} + \frac{1}{2^5\cdot 5} - \frac{1}{2^7\cdot 7} + ...\right\} + \left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3^3\cdot 3} + \frac{1}{3^5\cdot 5} - \frac{1}{3^7\cdot 7} + ...\right\}.\end{aligned} \tag{3.18}$$



Слика 4. Збир два аркустангенса

Ова два развоја у ред конвергирају брзо због растућих степена бројева 2 и 3 који се налазе у имениоцима чланова ових развоја. Помоћу ових развоја су Леман и Потсдам 1861. године одредили број π на 261 децималу. [1]

3.4 Ирационалност броја π

Постоје различити докази да је π ирационалан број. Овде је приказан доказ који је извео Иван Нивен и који може да стане на свега пола странице. Иако је Нивенов доказ кратак, он и није баш тако једноставан како га је он представио. У оригиналном доказу су многи међукораци прескочени или остављени читаоцу да сам докаже.

Нивен пошао од претпоставке да је π рационалан и дошао је до контрадикције из које следи да π мора бити ирационалан. Уколико је π рационалан он се може записати као $\pi = \frac{a}{b}$ при чему су a и b узајамно прости цели бројеви различити од нуле. Даље је дефинисана функција степена $2n$ која зависи од a и b:

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}\,, \tag{3.19}$$

при чему је n цео број. Ова интересантна функција има одређене особине које ће бити веома корисне у даљем доказу. За њу важи да је $f(0) = 0$, а такође се може и показати да је $f(x) = f(\pi - x)$:

$$\begin{aligned} f(\pi - x) &= f(a/b - x) \\ &= \frac{(a/b-x)^n(a-b(a/b-x))^n}{n!} \\ &= \frac{(a/b-x)^n(bx)^n}{n!} \\ &= \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = f(x) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Још једна особина ове функције је да је $f^{(k)}(0)$ цео број. Ова тврђење на први поглед и није очигледно. Из 3.19 следи $n!f(x) = x^n(a-bx)^n$. По биномној теореми, члан $(a-bx)^n$ се може развити у полином са целобројним коефицијентима са степенима који се крећу од

0 до n. Сваки од полиномних чланова се тада множи са x^n. То значи да је полином $n!f(x)$ једнак суми чланова чији се степени крећу од n до $2n$. Узмимо k-ти извод фунцкије $f(x)$ и нека је $1 < k < n$, тада $f^{(k)}(x)$ нема константан члан те је $f^{(k)}(0) = 0$. Исто важи и за $k > 2n$. Уколико се $f(x)$ диференцира k пута и важи $n < k < 2n$ тада ће $f^{(k)}(x)$ имати један члан који није помножен са x. Овај члан ће бити облика $(k!/n!) \cdot c$ где је c целобројна константа. Пошто је $k > n$ овај члан ће припадати скупу целих бројева, тј. $f^{(k)}(0)$ припада скупу целих бројева.
Пошто је $f(x) = f(\pi - x)$ следи $f'(x) = -f'(\pi - x)$, $f^{(2)}(x) = f^{(2)}(\pi - x)$... и у општем облику важи $f^{(k)}(x) = (-1)^k f^{(k)}(\pi - x)$. Такође из чињенице да $f^{(k)}(0)$ припада скупу целих бројева и да је $f^{(k)}(0) = (-1)^k f^{(k)}(\pi)$ следи да $f^{(k)}(\pi)$ припада скупу целих бројева.

Сада ћемо дефинисати још једну функцију:

$$g(x) = f(x) - f^{(2)}(x) + f^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n)}(x) \tag{3.21}$$

И ова функција има неколико корисних и интересантних особина. Ако се посматра функција $g(x)$ у тачки 0 може се уочити да је $g(0)$ цео број, па ће и $g(\pi)$ такође бити цео. Ове особине следе из особине функције $f(x)$ где су за $x = 0$ и $x = \pi$ поједини изводи функције једнаки 0, а остали припадају скупу целих бројева. Функција $g(x)$ за $x = 0$ и $x = \pi$ је сума управо тих целих бројева па и сама припада том скупу у поменутим тачкама.

Поред тога важи и $g(x) + g^{(2)}(x) = f(x)$, што није тешко показати. Други извод функције $g(x)$ је је једнак $g^{(2)}(x) = f^{(2)}(x) - f^{(4)}(x) + ... + (-1)^n f^{(2n+2)}(x)$. Можемо приметити да последњи члан $(-1)^n f^{(2n+2)}(x)$ мора бити једнак нули, јер смо рекли да је сваки извод функције $f(x)$ реда већег од $2n$ једнак нули. Остали чланови функција $g(x)$ и $g^{(2)}(x)$ су исти, али су супротног знака те се након сабирања пократе и једини члан који преостаје је једнак $f(x)$. Стога следи $g(x) + g^{(2)}(x) = f(x)$. Посматрајмо сада први извод функције $g'(x)\sin x - g(x)\cos x$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(g'(x)\sin x - g(x)\cos x) &= g^{(2)}(x)\sin x + g'(x)\cos x - g'(x)\cos x + g(x)\sin x \\ &= g^{(2)}(x)\sin x + g(x)\sin x \\ &= (g^{(2)}(x) + g(x))\sin x = f(x)\sin x\,,\end{aligned} \tag{3.22}$$

при чему смо користили да је $g(x) + g^{(2)}(x) = f(x)$. Пошто је $(g'(x)\sin x - g(x)\cos x)' = f(x)\sin x$ следи да је и $\int f(x)\sin x dx = g'(x)\sin x - g(x)\cos x$. Посматрајмо сада поменути интеграл на интервалу $[0, \pi]$:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi f(x)\sin x dx &= g'(x)\sin x - g(x)\cos x|_0^\pi \\ &= g'(\pi)\sin\pi - g(\pi)\cos\pi - (g'(0)\sin 0 - g(0)\cos 0) \\ &= g(\pi) + g(0)\,.\end{aligned} \tag{3.23}$$

Пошто смо већ показали да ако је π цео број важи да су $g(\pi)$ и $g(0)$ такође цели бројеви, следи да је и интеграл $f(x)\sin x$ на интервалу од 0 до π једнак целом броју. Уколико покажемо да овај интеграл није увек целобројан на том интервалу дођићемо до контрадикције и тиме ћемо показати да је π ирационалан број. Посматрајмо x које је између 0 и π. Знамо да је тада функција $f(x)\sin x$ позитивна, јер су $\sin x$ и $f(x)$ позитивни на том интервалу. Пошто је $\pi = a/b$ следи да је $a - bx > a - b\pi = 0$, а одатле следи да је и $f(x)$ позитивно. Пошто је $0 < \sin x < 1$ за $0 < x < \pi$ можемо закључити да важи $f(x)\sin x < f(x)$. Подсетимо се сада да је $f(x) = x^n(a - bx)^n/n!$. Можемо приметити да је $a - bx < a$ када

је x између 0 и π следи да је и $(a-bx)^n < a^n$. Слично важи и $0 < x^n < \pi^n$ за $0 < x < \pi$. Када све ово узмемо у обзир добијамо:

$$0 < f(x)\sin x < \frac{a^n\pi^n}{n!} \tag{3.24}$$

Интеграцијом претходне неједнакости добијамо:

$$0 < \int_0^\pi f(x)(\sin x)dx < \frac{a^n\pi^{n+1}}{n!} \tag{3.25}$$

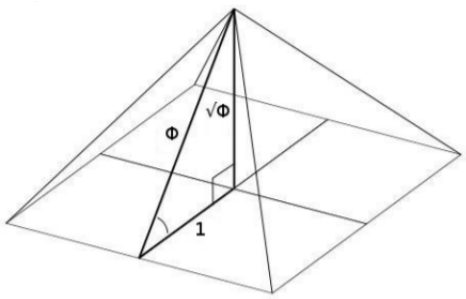
Уколико пустимо да n тежи бесконачности добијамо да ће средњи члан тежити ка некој коначној вредности која је ограничена чланом са десне стране. Члан са десне стране неједнакости ће тежити нули када n тежи бесконачности. Један од начина да се ово покаже је да се посматра вредност $\pi e^{a\pi}$ која се може развити у Тејлоров ред. Чланови овог развоја су облика $a^n\pi^{n+1}/n!$. Пошто ред конвергира ка $\pi e^{a\pi}$, његови чланови морају тежити нули када n тежи бесконачности. Другим речиима $a^n\pi^{n+1}/n!$ мора бити мање од 1. Пошто је интеграл позитиван, а може да буде и произвољно мали, интеграл ће у некој тачки бити једнак некој вредности између 0 и 1 чиме смо дошли до контрадикције. [16]

4 Златни пресек

ДНК, цвет сунцокрета, шишарка, ананас и још штошта из природе повезује једна математичка нит. Најзначајнији сликари ренесансе (15. век) и композитори класицизма и романтизма (18. и 19. век) повезани су једном математичком константом. Реч је о "златном пресеку" - савршеној пропорцији која се налази свуда око нас. Још од старог века филозофи су трагали за идеалном формом. Идеалне форме су пратили и архитекте, математичари, естетичари, сликари - сви они којима је била потребна савршена пропорција из које ће настати њихово дело. Грци су сматрали да је круг савршена форма, немачки естетичар Винкелман да је "елипса линија лепоте", енглески сликар Хогарт да је најлепша змијаста линија, а архитекта Волф да је најпријатнија пропорција 1:1. Поред њих и велики број естетичара је сматрао да се идеална форма налази у геометријским облицима као што је једнакостранични троугао, дијагонала коцке, пентагон итд. Златни пресек је дакле кроз читаву људску историју привлачио пажњу свим уметницима, а шта он заправо представља? Посматрајући одувек облике у природи, човек је схватио да постоје одређени правилни односи делова и склад облика и да се они налазе у природном, односно Богом даном савршеном - идеалном односу и пропорцијама, који су због тога названи божански. Леонардо да Винчи га је назвао "златни однос", а пресек који одваја целину на идеалне делове "златни пресек". Златни (божански) пресек представља најсавршенију пропорцију растућих облика у природи, а њихов однос се добија ако се једна дуж подели тако да је однос већег дела према целом исти као и однос мањег дела према већем. Тај однос износи 1,6180339887... Ознака златног пресека је грчко слово фи (ϕ), тако назван по грчком вајару и архитекти Фидији. [17] Дакле, у зависности од контекста, појам златног пресека може означавати тачку, која дели дуж тако да се већи део односи према мањем као цела дуж према већем делу, или може означавати управо описани однос, пропорцију, поделу или пак број. [13]

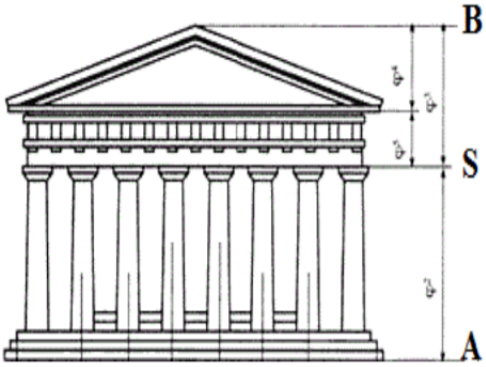
4.1 Златни пресек кроз историју

Постоје они који тврде да су још стари Египћани знали за златни пресек и да су га користили приликом изградње пирамида. Не постоје писани трагови који доказују ову тврдњу, мада је однос дужине странице Велике пирамиде и њене висине приближно једнак златном пресеку. Грци су још у петом веку пре нове ере комплетан изглед Партенона зас-



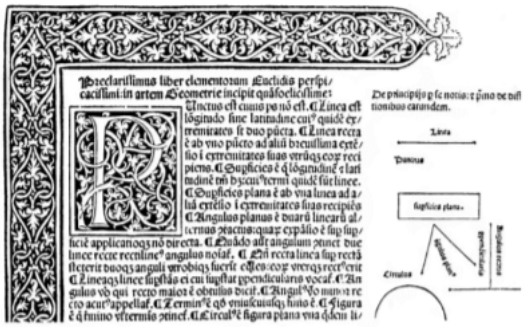
Слика 5. Однос висине и странице Велике пирамиде у Гизи

новали на божанској пропорцији. Грчки скулптор Фидија је проучавао златни пресек и примењивао га приликом израде украсних скулптура. Питагора и његови следбеници су на основу знања о златном пресеку конструисали пентаграм који су користили као симбол свог братства. Ипак, прву јасну дефиницију онога што је касније названо златни пресек дао је Еуклид, око 300 година пре нове ере у свом делу „Елементи“. Он је дефин-



Слика 6. Храм Партенон у Грчкој $AB : AS = AS : SB$

исао пропорцију која произилази из једноставне поделе дужи. Ту поделу дужи назива "поделом у средњој и крајњој размери". Захваљујући овој подели Еуклид је у четвртој књизи „Елемената", успео да конструише „златни троугао" као једнакокраки троугао чији је сваки угао на основи, два пута већи од трећег угла. Фибоначи објављивањем „Књиге



Слика 7. Део стране из првог издања Еуклидових "Елемената" из 1482. године

о абакусу" 1202. год. знатно проширује опсег примене златног пресека. [18] Ренесансни математичар, фра Лука Пачоли (око 1445-1517), рођен је у Тоскани. Многи га његова дела не сматрају баш оригиналним, али и поред тога, оставио је значајан траг иза себе нашавши се на правом месту у право време. Како је Пачоли живео у доба проналаска штампе, његова дела су небројано пута поново штампана и дуго су служила као основни уџбеник. Прва његова књига, под називом "Сума знања из аритметике, геометрије, учење о пропорцијама и пропорционалности", одштампана је 1494. године. Писана је на италијанском језику и објављена је у Венецији. У њој је фра Лука Пачоли описао дотадашња знања из аритметике, алгебре и тригонометрије. Ово Пачолијево дело било је заправо прерађено издање Фибоначијеве "Књиге о абакусу". [13] По свему судећи, највероватније је појам златни пресек, тек у првој половини деветнаестог века, увео професор Берлинског универзитета Мартин Ом у другом издању свог уџбеника „Чиста елементарна математика". Мартин Ом у својој књизи јасно оставља утисак да није он измислио термин златни пресек, већ да је прихватио опште коришћено име. Чињеница да овај појам није користио у првом издању своје књиге објављене 1826, указује на то да је назив златни пресек стекао своју популарност око 1830. године. Могуће је да се, пре тога, ово име користило усмено, највероватније у нематематичким круговима. На почетку двадесетог века амерички математичар Марк Бар за означавање златног пресека уводи симбол ϕ од првог слова

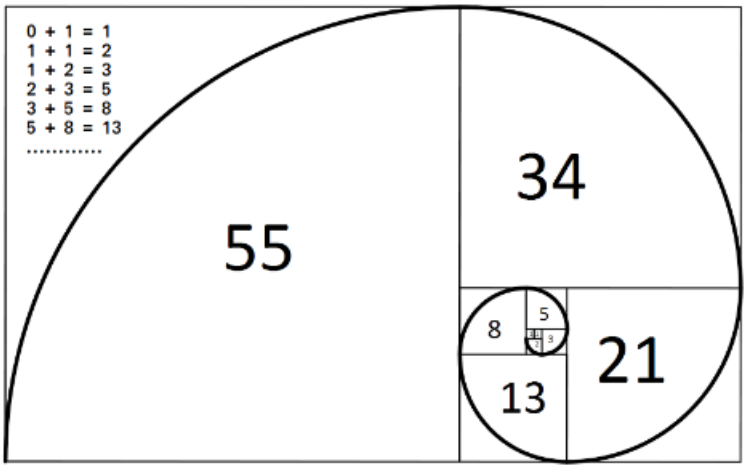
имена грчког скулптора Фидије.

4.2 Дефиниција златног пресека

Кажемо да су две величине u и v, за које важи да је $u > v$ и да је $u, v > 0$, у односу златног пресека када се збир ове две величине односи према већој величини, као што се већа величина односи према мањој. Математички изражено:

$$\frac{u+v}{u} = \frac{u}{v}$$

Ако се узме да је $\phi = u/v$ и ако се то уврсти у претходни израз добија се:



Слика 8. Тајна златног пресека

$$1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{v}{u} = \frac{u+v}{u} = \frac{u}{v} = \phi$$

Позитивни корен квадратне једначине $\phi^2 - \phi - 1 = 0$ је:

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.6180339887...$$

и назива се Златни или Божански пресек.

4.3 Златни пресек и Фибоначијеви бројеви

Број ϕ познат је у математици као златни број. Док златни пресек има загонетну историју, опште је познато да је Фибоначијев низ открио Леонардо из Пизе, звани Фибоначи (Fibonacci, 1170–1240). Овај средњовековни математичар је у свом делу "Књига о абакусу" (1202) дошао до специфичног бројчаног низа: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Овај низ назива се Фибоначијев низ. Полазећи од бројева 1 и 2 сваки следећи број је једнак збиру претходна два. [18]

До овог низа Фибоначи је наводно дошао решавајући „проблем зечева“.Претпоставља се да зечеви започињу размножавање кад достигну старост од два месеца и имају принове једном месечно. Увек добију близанце који никад не умиру и који настављају да се размножавају на исти начин. Број парова зечева након n месеци износи f_n.

$$f_0 = 0,\ f_1 = 1,\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ за } n \geqslant 2.$$

Бројеви парова зечева чине низ: 1,1,2,3,5,8,13,... Лако је закључити да је било који број овог низа једнак суми претходна два члана. Према томе, следећи чланови низа су: 21,34,55,89,144,233,... Више од шест векова овај проблем и његово решење уопште нису привлачили пажњу. Почетком деветнаестог века француски математичар Едуар Лика (*Edouard Lucas*, 1842 – 1891.) почео је са изучавањем особина горњег низа бројева које је назвао „Фибоначијеви бројеви“. После ових првих истраживања број радова о Фибоначијевим бројевима почео је да расте великом брзином. Чак је покренут и часопис „Fibonacci Quarterly“ (1963. године) који објављује најновија достигнућа о Фибоначијевим бројевима и њима сродним темама. Фибоначијев низ је сродан са златним пресеком, јер се дељењем сваког његовог броја са следећим бројем низа, добија отприлике 0,618..., док се дељењем сваког броја са претходним добија приближно 1,618... Количници узастопних Фибоначијевих бројева називају се Фибоначијеви разломци:

$\frac{1}{1} = 1$
$\frac{2}{1} = 2$
$\frac{3}{2} = 1.5$
$\frac{5}{3} = 1.6666666667$
$\frac{8}{5} = 1.6$
$\frac{13}{8} = 1.625$
$\frac{21}{13} = 1.6153846154$
$\frac{34}{21} = 1.619047619$

Низ Фибоначијевих разломака тежи (приближава се) златном броју ϕ (1,6180339887499...).

4.4 Репрезентације Златног пресека

4.4.1 Златни пресек као верижни разломак

Да би се дошло до репрезентације броја ϕ преко верижног разломка потребно је кренути од релације:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0 \tag{4.1}$$

односно,

$$\phi^2 = \phi + 1. \tag{4.2}$$

Дељењем овог израза са ϕ добија се:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \tag{4.3}$$

Уколико се израз 4.3 уврсти у самог себе добија се:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} \tag{4.4}$$

Овај поступак се може понављати до бесконачности и на овај начин се добија верижни разломак за број ϕ:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}}}} \tag{4.5}$$

Може се рећи да израз 4.5 конвергира броју ϕ ако он може да се запише у коначном облику, са довољно великим бројем чланова, тако да је његова вредност произвољно блиска са ϕ. Овде неће бити доказана конвергенција израза 4.5, али ће бити показано како се његова вредност приближава броју ϕ додавањем неколико нових чланова.

$$1 = \frac{1}{1} = 1.0$$

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1} = 2.0$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}} = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}} = \frac{5}{3} = 1.67$$

Може се приметити да се сваки наредни облик верижног разломка може записати преко свог претходног облика, тј.

$$c_n = 1 + \frac{1}{c_{n-1}} \tag{4.6}$$

$$1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} = 1.67$$

$$1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5} = 1.6$$

$$1 + \frac{5}{8} = \frac{13}{8} = 1.625$$

$$1 + \frac{8}{13} = \frac{21}{13} = 1.615$$

Даље се може приметити да се сваки наредни облик израза 4.5, наизменично од горе па од доле, све више приближава броју ϕ .

4.4.2 Златни пресек представљен преко Тејлоровог и биномног реда

Да би се број $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ представио преко бесконачног реда, потребно је кренути од Тејлорове формуле за развој у ред:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \,. \tag{4.7}$$

Ако се узме да је $\phi = \frac{f(x)+1}{2}$ може се одредити репрезентација златног пресека помоћу функције $f(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$ која се развија у Тејлоров ред за $x = 5$. Овај приступ подразумева развијање функције $f(x)$ у Тејлоров ред око тачке $a = 4$. Одређивањем сукцесивних извода функције $f(x)$ у тачки $a = 4$, рекурзивним приступом се може одредити општи израз за n-ти извод при чему је $n \geq 2$ у тачки $a = 4$:

$$f^n(a) = \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \frac{1}{2^{2n-1}} \,. \tag{4.8}$$

За $n = 0$ се добија: $f^0(a) = f(a) = \sqrt{4} = 2$, аналогно за $n = 1$ следи $f^1(a) = \frac{1}{2}(4)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4}$. Тејлоров развој за $f(x) = \sqrt{x}$ у тачки $a = 4$ следи из израза 4.7:

$$f(x) = 2 + \frac{x-4}{4} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{n!}(x-4)^n \,. \tag{4.9}$$

До развоја за златни пресек се може доћи израчунавањем функције $f(x)$ за $x = 5$ у изразу 4.9:

$$\phi = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(2 + \tfrac{1}{4}) + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \frac{(2n-3)!}{2^{n-2}(n-2)!} \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{1}{n!}. \tag{4.10}$$

После краћег сређивања и подешавањем индекса, како би ред започео од $n = 0$ (n се замени са $n + 2$ дуж целог развоја), коначно следи [12]:

$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(n+2)!\, n!\, 4^{2n+3}} \,. \tag{4.11}$$

До развоја 4.11 се може доћи и манипулацијом биномног развоја. Корен из 5 се може записати и као:

$$\sqrt{5} = \sqrt{4\left(\frac{5}{4}\right)} = 2\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = 2\left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}} \,. \tag{4.12}$$

Уврштавањем овог израза за $\sqrt{5}$ у израз $\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ добија се:

$$\phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{1 + 2(1 + \frac{1}{4})^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1}{2} + (1 + \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}}. \tag{4.13}$$

Биномна серија за реалне бројеве m где је $|x| < 1$ се може записати као:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}x^3 + ... \tag{4.14}$$

Ако се узме да је $m = 1/2$, тада се израз 4.14 може записати као:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}. \tag{4.15}$$

Узимањем да је $x = 1/4$ и уврштавањем развоја 4.15 у израз 4.13 добија се:

$$\phi = \frac{1}{2} + (1 + \tfrac{1}{4})^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{2} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n+1}} \frac{(2n+1)!}{n!} \frac{(\frac{1}{4})^{n+2}}{(n+2)!} \tag{4.16}$$

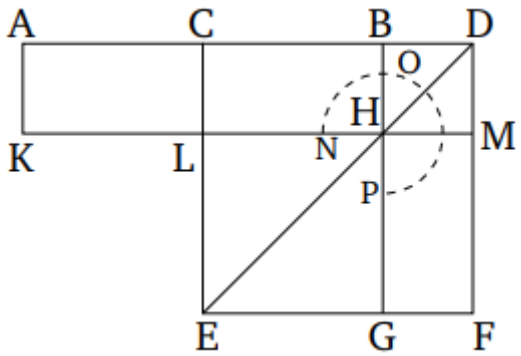
који се лако своди на [12]:

$$\phi = \frac{13}{8} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2n+1)!}{(n+2)!\, n!\, 4^{2n+3}}. \tag{4.17}$$

4.5 Конструкција златног пресека

У [4] су приказани Еуклидови Елементи геометрије. Овде ће бити разматран предлог 6 из другог поглавља ове референце: Нека је дата дуж AB преполовљена тачком C и нека је продужена кроз B до тачке D. Тада је збир површина правоугаоника, коме једна страница одговара дужи AD, а дужина друге је једнака дужини дужи BD, и квадрата коме су станице једнаке са CB, одговара површини квадрата над CD, тј. "$AKMD + LEGH = CEFD$" (слика 9).

Да би се ова тврдња доказала потребно је прво конструисати квадрат $CEFD$ над CD. Нека је дуж BG конструисана из тачке B повлачењем паралеле са DF и нека је пресек дужи BG и DE означен са H. Нека је кроз H повучена паралела KM са AD тако да су $KM = AD$ и $AK = DM$. Пошто је $AC = CB$ тада су подударни правоугаоници $ACLK$ и $CBHL$. Пошто је правоугаоник $CBHL$ подударан са правоугаоником $HMFG$, тада из транзитивности следи да је и правоугаоник $ACLK$ подударан са правоугаоником $HMFG$. Додавањем правоугаоника $CDML$ правоугаонику $HMFG$ добија се гномон[2] NOP, а додавањем истог тог правоугаоника правоугаонику $ACLK$ добија се правоугаоник $AKMD$. Пошто су правоугаоници $ACLK$ и $CBHL$ подударни, а правоугаоник $CDML$ припада и гномону NOP и правоугаонику $AKMD$ тада гномон NOP и правоугаоник $AKMD$ имају једнаке површине. Додавањем квадрата $LHGE$, сваком од њих добијају се фигуре једнаких површина. Гномон NOP и квадрат $LHGE$ граде квадрат $CEFD$. Следи да је "$AKMD + LEGH = CEFD$".



Слика 9.

У предлогу 2.11 из [4] је приказана Еуклидова конструкција тачке која дату дуж дели на две дужи тако да је однос веће дужи према мањој дужи једнак односу дате дужи према већој. Еуклид је овај проблем поставио тако што је дату дуж AB поделио тачком H тако

[2] Гномон је фигура у облику латиничног слова Л која се добија када се из угла неког паралелограма уклони мањи паралелограм који му припада.

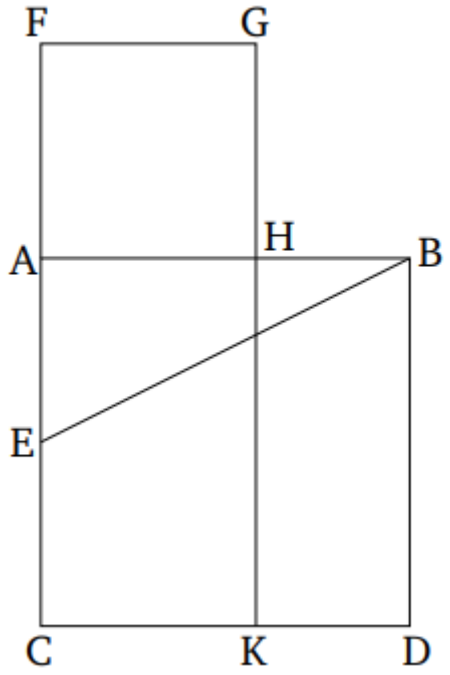
да је површина квадрата конструисаног над AH једнака површини правоугаоника који је конструисан над BH, при чему је друга страница овог правоугаоника једнака дужини почетне дужи AB (слика 10). Из једнакости површина квадрата и правоугаоника следи:

$$AH \cdot AH = HB \cdot AB \text{ тј.}$$

$$AH : HB = AB : AH\,.$$

Уколико се конструише тачка H тако да површине поменутих четвороуглова буду једнаке, тада ће и дата дуж AB бити подељена у односу златног пресека.

Конструкција: Нека је дата дуж AB и нека је над њом конструисан квадрат $ABDC$. Нека је конструисана тачка E која полови страницу AC и нека су тачке B и E спојене. Нека је дуж CA продужена кроз тачку A до тачке F тако да је $BE = EF$. Над FA се конструише квадрат $AFGH$. Нека је страница овог квадрата GH продужена кроз H до тачке K која се налази на дужи CD. Тада је дата дуж AB пресечена у тачки H тако да је површина правоугаоника $HBDK$ једнака површини квадрата $AFGH$ на слици 10.



Слика 10.

Доказ: По предлогу 2.6 који је већ детаљно описан у овом поглављу збир површина квадрата над дужи AE и површина правоугаоника $FGKC$ је једнака површини квадрата над EF. Пошто је EF једнако са EB, следи да је и површина квадрата над EB једнака збиру површина квадрата над дужи AE и правоугаоника $FGKC$. Пошто је троугао ABE правоугли, површина квадрата конструисаних над његовим катетама је једнака површини квадрата конструисаног над његовом хипотенузом. Односно, збир квадрата над AE и AB ($ABDC$) једнак квадрату над EB. Одавде следи да је површина правоугаоника $FGKC$ једнака површини квадрата $ABDC$. Правоугаоник $AHKC$ припада квадрату $ABDC$, као и правоугаонику $FGKC$. Његовим одузимањем од обе фигуре добија се да је површина квадрата $AFGH$ једнака површини правоугаоника $HBDK$. Квадрат $AFGH$ је квадрат конструисан над AH, а правоугаоник $HBDK$ је конструисан над HB и њихове површине

су једнаке. Одавде следи да је задата дуж AB подељена на две дужи тачком H тако да је површина квадрата над AH једнака правоугаонику над HB што је и требало показати. [4]

Предлог 13.5 из [4] гласи: Ако је дата дуж подељена у размери златног пресека и ако јој се дода њен већи део, тада ће нова дуж такође бити подељена у размери златног пресека, а полазна дуж ће бити њен већи део.

Конструкција: Ако је дата дуж AB подељена тачком C у размери златног пресека и ако је AC већи део дужи AB тада важи однос $AC : CB = AB : AC$. Нека је дуж AB продужена преко A до тачке D тако да је $AD = AC$. Тада је дуж DB подељена тачком A у размери златног пресека и дуж AB је већи део дужи DB

Доказ: Из пропорције $AC : CB = AB : AC$ следи:

$$AC^2 = CB^2 + AC \cdot CB \tag{4.18}$$

Десна страна једначине 4.18 се може допунити до квдрата бинома додавањем $AC \cdot CB$ и AC^2:

$$2AC + AC \cdot CB = CB^2 + 2AC \cdot CB + AC^2\,, \tag{4.19}$$

$$AC(2AC + CB) = (AC + CB)^2\,. \tag{4.20}$$

Одавде следи пропорција:

$$(2AC + CB) : (AC + CB) = (AC + CB) : AC\,, \tag{4.21}$$

тј.

$$DB : AB = AB : DA. \tag{4.22}$$

Овим је доказано да је дуж AD разложена тачком B на две дужи AB и BD, тако да се цела дуж (AD) односи према већем делу (AB) онако како се већи део (AB) односи према мањем делу BD. Овакву поделу дужи Еуклид је називао *"подела у средњој и крајњој размери"*.

Ојлеров оригиналан доказ је сложенији и може се наћи у [4].

4.6 Број Φ у Еуклидовој конструкцији

Описом Еуклидове конструкције пресека у средњој и крајњој размери, можемо запазити и начин на који за задату дуж AC можемо конструисати тачку H, такву да је разлагање дужи HC тачком A златни пресек. За задату дуж AC, описану тачку H можемо пронаћи тако што конструишемо тачку B која припада нормали на AC кроз тачку A, и за коју важи да је $AB = AC$. Нека се тачка E налази на дужи AC и нека је полови. Нека је конструисан крук са центром у тачки E и нека кружница овог круга садржи B. Пресек ове кружнице и продужетка дужи AC преко тачке A даје тражену тачку H.

Доказ: Пошто је троугао ABE правоугли следи:

$$AB^2 + AE^2 = BE^2\,. \tag{4.23}$$

Пошто је E средиште дужи AC, а тачке B и H се налазе на кружници са центром у E, може се записати:

$$AB^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = EH^2\,. \tag{4.24}$$

Даље следи:

$$\begin{aligned} AC^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 &= \Big(AE + AH\Big)^2 \\ AC^2 + \left(\frac{AC}{2}\right)^2 &= \left(\frac{AC}{2} + AH\right)^2 \\ AC^2 + \frac{AC^2}{4} &= \frac{AC^2}{4} + 2 \cdot \frac{AC}{2} \cdot AH + AH^2\,. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Пребацивањем свих вредности на леву страну добија се:

$$AC^2 - AC \cdot AH - AH^2 = 0\,. \tag{4.26}$$

Дељењем леве и десне стране израза 4.26 са AH^2 добија се квадратна једначина:

$$\left(\frac{AC}{AH}\right)^2 - \frac{AC}{AH} - 1 = 0\,. \tag{4.27}$$

Позитивни корен ове квадратне једначине је:

$$\frac{AC}{AH} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,6180 \tag{4.28}$$

Из израза 4.28 се јасно види да је дуж HC тачком а подељена у односу у средње и крајње размере.

4.7 Златни правоугаоник и златна спирала

За правоугаоник чије су странице у односу $1 : \phi$ се каже да је златни правоугаоник. Почевши од једног златног правоугаоника, постоји природан низ златних правоугаоника који су смештени један до другог унутар почетног правоугаоника. Дељењем златног правоугаоника на квадрат и нови правоугаоник, странице новодобијеног правоугаоника ће бити у односу $(\phi - 1) : 1$. Као што је већ раније речено, ϕ задовољава једначину:

$$\phi^2 - \phi - 1 = 0\,, \tag{4.29}$$

одакле следи да је

$$\phi - 1 - \frac{1}{\phi} = 0\,, \tag{4.30}$$

тј.

$$\phi - 1 = \frac{1}{\phi}, \tag{4.31}$$

односно

$$\frac{\phi - 1}{1} = \frac{1}{\phi}, \tag{4.32}$$

одакле следи да је и новодобијени правоугаоник златни правоугаоник, јер су поменути правоугаоници слични, односно, јер су и странице новодобијеног правоугаоника у односу $1 : \phi$. Као што је раније речено, Еуклид је још око 300 година пре нове ере, дао дефиницију златног пресека користећи термин подела у средњој и крајњој размери, тј. говорио је о подели дужи таквој да је: "правоугаоник обухваћен целом дужи и једним одсечком једнак квадрату на другом одсечку", мисливши на поделу за коју важи:

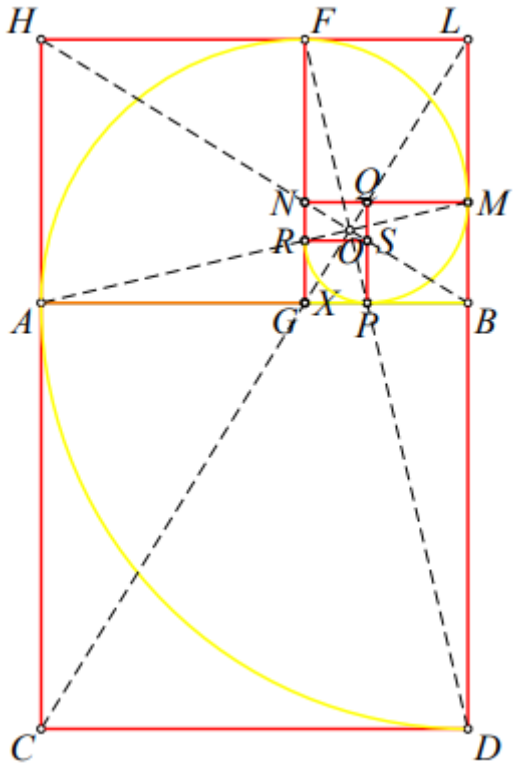
$$GB \cdot AB = AG^2\,, \tag{4.33}$$

тј,

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AB}{AG}. \tag{4.34}$$

Ако је $GB = 1 (AG = \phi)$ онда из претходне једнакости следи да је

$$\phi = \frac{\phi + 1}{\phi}. \tag{4.35}$$



Слика 11. Логаритамска спирала уписана у златне правоугаонике

те се после кражег срећивања добија иста једначина као раније: $\phi^2 - \phi - 1 = 0$. Уколико се у Еуклидовој конструкцији златног пресека тачкама H, C и D придружи тачка L таква да је $HCDL$ правоугаоник, може се приметити да је:

$$\frac{HC}{CD} = \frac{HC}{AC} \tag{4.36}$$

а како је доказано да тачка A дели дуж HC у размери златног пресека, тада је и

$$\frac{HC}{CD} = \phi\,, \tag{4.37}$$

тј. однос веће ивице овог правоугаоникапрема мањој је ϕ, па је правоугаоник $HCDL$ златни правоугаоник. Дуж AB разлаже златни правоугаоник на квадрат $ABCD$ и правоугаоник $ABLH$ којем је однос веће ивице према мањој једнак:

$$\frac{AB}{AH} = \frac{AB}{AG} = \phi\,, \tag{4.38}$$

па је и правоугаоник $ABLH$ златни правоугаоник. Слично, дуж GF разлаже $ABLH$ на квадрат $ABFH$ и златни правоугаоник $GBLF$, а дуж MN правоугаоник $GBLF$ на квадрат $MNFL$ и златни правоугаоник $GBMN$, итд. [13] Ширина и дужина n-тог златног правоугаоника се може записати помоћу линеарног израза $a + b\phi$, где су коефицијенти a и b увек Фибоначијеви бројеви.

У ове златне правоугаонике се може уписати логаритамска спирала. Логаритамске спирале се често могу наћи у природи, на пример шкољке наутилуса су облика логаритамске спирале, заступљене су и на кљовама слонова, у шаблонима сунцокрета.

4.8 Ирационалност броја ϕ

4.8.1 Кратак алгебарски доказ ирационалности ϕ

Претпоставимо да је дуж подељена златним пресеком, тј. тако да се дужи део према целини односи на исти начин као краћи према дужем. Поменути однос је једанк

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}. \tag{4.39}$$

Претпоставимо да је овај број рационалан, те да се може представити разломком $\frac{m}{n}$, где су m и n узајамно прости цели бројеви.Нека је n дужина целине, а m дужина већег дела. Тада је дужина краћег дела $n-m$. Следи да је тада

$$\frac{n}{m} = \frac{m}{n-m}. \tag{4.40}$$

Ово значи да је могуће поједноставити разломак који, по претпоставци, није могао бити поједностављен, што је контрадикција. Тиме смо показали да претпоставка, да је ϕ рационалан број, није тачна. [13]

4.8.2 Геометријски доказ несамерљивости

Можемо геометријским путем доказати да нека дуж, и било који њен део, добијен њеним разлагањем златним пресеком, нису самерљиве, односно њихова размера није рационалан број.

Нека је тачка G златни пресек дужи AB. Ако је AG већа дуж у тој подели, уочимо тачку H централносиметричну тачки G у односу на тачку A.Како је

$$AB^2 = AB \cdot (AG + GB) = AB \cdot AG + AB \cdot GB\,, \tag{4.41}$$

а с обзиром на то да је G тачка златног пресека дужи AB, и да важи

$$AG^2 = AG \cdot GB\,, \tag{4.42}$$

биће и

$$AB^2 = AB \cdot AG + AG^2 = (AB + AG) \cdot AG\,. \tag{4.43}$$

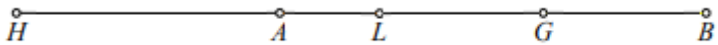
Како је

$$AG = AH$$

биће и

$$AB^2 = (AB + AH) \cdot AH = BH \cdot AH\,, \tag{4.44}$$

одакле следи да је разлагање дужи HB тачком A златни пресек.



Слика 12. Геометријски доказ несамерљивости

На исти начин, ако је L тачка централносиметрична тачки B у односу на G, разлагање дужи AG тачком L биће златни пресек. Како је G златни пресек дужи AB важи

$$\begin{aligned} AG^2 &= AB \cdot GB \\ (AL + LG)^2 &= (AG + LG) \cdot LG \\ AL^2 + 2 \cdot AL \cdot LG + LG^2 &= AG \cdot LG + LG^2 \\ AL \cdot (AL + LG) + AL \cdot LG &= AG \cdot LG \\ AL \cdot AG &= LG \cdot (AG - AL) \\ AL \cdot AG &= LG^2 \end{aligned} \tag{4.45}$$

одакле следи да је тачка L златни пресек дужи AG.

Овај поступак можемо наставити у недоглед јер је већа дуж, већа од половине целе дужи, а мања од двоструке мање дужи. Како је описани поступак исти као при тражењу највеће заједничке мере двеју дужи, можемо закључити да су дужи AB и AG несамерљиве.

4.9 Златни пресек у природи

Златни пресек и Фибоначијеви бројеви су све до 19. века били посматрани искључиво као геометријски и математички проблеми. Тада је Адолф Цајзинг (1810-1876, немачки психолог, чија су главна интересовања везана за математику и филозофију) научним анализама почео да истражује испољавање тих феномена у различитим областима природе и уметности. Дошавши до закључка да су поједине биљке, делови људске анатомије, као и одређени примери класичне скулптуре заправо уређене према принципу златног пресека, Цајзинг је у својим студијама поставио теорију о томе да је читав универзум изграђен у складу с том пропорцијом. Под његовим утицајем је теза о златном пресеку као божанском, космичком и метафизичком закону постала готово општеприхваћена.

Уметност било ког доба се пре свега увек угледала на природу, стога златни пресек представља можда и најбољу везу између природе и уметности.

Посматрамо цвет сунцокрета. Бројеви семених плодова поређаних по спирално увијеним линијама одговарају вишим члановима Фибоначијевог низа.У глави сунцокрета семена су размештена у два низа спирала. У једном низу, семена су у смеру кретања казаљке на сату, а у другом у супротном смеру. Оно што је посебно занимљиво јесте следеће: колико год да су семена велика, размак између њих је увек исти, тако да једни друге не ометају у упијању сунчеве светлости.

Исти је случај и са шишаркама. Ако учимо спирале, видимо да њихов број одговара члановима Фибоначијевог низа.

Листови на грани расту у међусобној удаљености која одговара Фибоначијевом низу. У кошници је увек мањи број мужјака од женки пчела; када би поделили број женки са бројем мужјака, увек би добили број ϕ. Шкољка пужа Наутилус у својој конструкцији има спирале, када бисмо израчунали однос сваког спиралног односа према следећем, добили бисмо број ϕ. Златни пресек се налази и код човека и то у пропорцијама лица, ритму откуцаја срца, па чак и у структури ДНК.

4.10 Златни пресек у уметности

Цајзинг је сложени систем златног пресека формулисао сводећи га на архитектуру. Тако примере златног пресека налазимо већ у старом Египту и то у Кеопсовој пирамиди. Кроз историју правоугаоник страница $1 : 1,6180339887...$ сматран је најпријатнијим за очи. Грчки вајар Фидија изградио је Партенон, и многе фигуре на њему, тако да је пропорција

златног пресека пронађена на свим његовим радовима у Атини. У готској архитектури је био нашироко заступљен, а фасада зграде Зграфито одговара правоугаонику конструисаном по златном пресеку, *Divina proportione*, како још називају златни пресек, посебну улогу има у ликовном стваралаштву. Налазимо га у најпознатијим делима ликовне уметности. Уметници старе Грчке су били добро упознати са златним пресеком те су стога створили дела савршене класичне лепоте на коју су се касније угледали ренесансни сликари. Свакако најпознатији примери су у делима Леонарда да Винчија "Мона Лиза", "Тајна вечера", "Богородица на стенама" која су настала крајем 15 и почетком 16. века. У 20. веку златни пресек је препознат и у музици. Најпознатији италијански градитељ виолина Антонио Страдивари користио је златни пресек при изради својих инструмената. Руски композитор Себанев је рекао да се генијална дела великих композитора разликују по највишем проценту заступљености златног пресека. Посматрајући ову појаву у композицијама закључио је да се највећи број композиција базираних на златном пресеку налази код следећих композитора: Бетовен и Хајдн Арсенски, Шопен, Моцарт и Шуберт. По узору на Цајзинга и друге теоретичаре, научници 20. и 21. века наставили су са изучавањем златног пресека и Фибоначијевог низа, те су утврдили да принцип те пропорције, односно нумеричког низа, регулише изузетно велики број различитих односа у свету који нас окружује. Последњих деценија разматрана је и у оквиру ужих научних области као што су психологија међуљудских односа, теорија хаоса, анализа ДНК, квантна механика и др.

5 База природног логаритма е

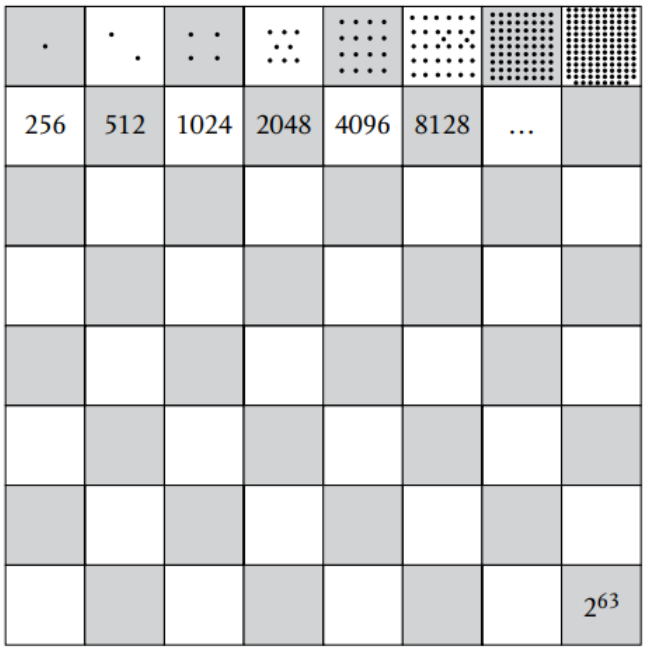
У литератури се често сусрећемо са термином ,,експоненцијални раст" који имплицира да нешто расте веома брзо. Међутим, људи најчешће немају представу колико брзо нешто расте ако расте експоненцијалним растом.

,,Највећи недостатак људске врсте је наша неспособност да разумемо експоненцијалну функцију" Проф. Алберт Бартлет Универзитет Колорадо у Болдеру

Као сликовит пример експоненцијалног раста би се могла навести легенда о настанку игре шах. Шах је изумео мудрац у древна времена да би показао свом краљу да су његови поданици главни разлог за његову моћ и славу и да би требало више да их уважава. Краљ је био импресиониран игром и хтео је да награди мудраца тако што ће му испунити било коју жељу. Међутим, његова жеља је била немогућа чак и за једног од најмоћнијих владара тог времена. Мудрац је од краља тражио да му да једно зрно жита за прво поље на шаховској табли, два за друго поље, четири за треће и тако даље. Краљ је у почетку био забезекнут зашто мудрац има тако малу и тривијалну жељу, али, када су његови математичари израчунали укупну количину жита коју би требао да поклони мудрацу, схватио је да је његову жељу немогуће испунити. Укупан број зрна жита би био:

$$1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + ... + 2^{63} = 2^{64} - 1 = 18446744073709551615.$$

Овај број је огроман, али и даље је јако тешко замислити колико је он заправо велик. Уколико би неко поседовао оволику количину жита могао би да направи брдо од жита висине Монт Евереста, које би се протезало до звезде *Alpha Centauri* и назад. Иначе ова звезда је Земљи најближа звезда после Сунца.



Слика 13. Зрна жита на шаховској табли

Врло је интересантан начин на који је број *е* откривен. Средином седамнаестог века швајцарски математичар Јакоб Бернули се заинтересовао за орочену штедњу у банкама и

колику своту новца би могао да заради током година. Уколико би постојала банка која би давала каматну стопу од 100% на годину орочене штедње, онда би Бернули за годину дана зарадио један динар за сваки динар који би орочио. Уколико би камата била 50% и ако би се обрачунавала на шест месеци, Бернули би за годину дана зарадио 2.25 динара за сваки орочен динар. уколико би банка понудила 8.3% (1/12 од 100%) на сваких месец дана, Бернули би зарадио 2.61 динара на сваки динар који би уложио за годину дана. Ако би банка обрачунавала камату на недељном нивоу и ако би она износила 1.9% (1/52 од 100%) тада би зарада била 2.69 пута већа од уложеног новца за годину дана. Анализирањем

Улог [дин]	Камата [%]	временски период исплаћивања	зарада [дин]
1	100	годишње	$1 \times (1 + \frac{1}{1})^1 = 2$
1	50	полугодишње	$1 \times (1 + \frac{1}{2})^2 = 2.25$
1	8.3	месечно	$1 \times (1 + \frac{1}{12})^{12} = 2.61$
1	1.9	недељно	$1 \times (1 + \frac{1}{52})^{52} = 2.69$

Табела 1. Орочена штедња

табеле 1. може се уочити шаблон по којем се обрачунава зарада за различите каматне стопе које се исплаћују у различитим временским интервалима. Зарада се може обрачунати изразом:

$$(1 + \frac{1}{n})^n. \tag{5.1}$$

Из табеле 1 се може уочити да ће се зарада увећавати уколико се камата буде што чешће обрачунавала. Камата која се обрачунава у сваком бесконачно малом тренутку износи:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n = 2.718281828459045235360... \tag{5.2}$$

Број који се добија је ирационалан и његове децимале се понављају до бесконачности.

5.1 Особине броја *e*

Највећи допринос у испитивањима логаритамске и експоненцијалне функције и њихове везе је дао Леонард Ојлер почетком 18. века. Ојлер је испитао главне особине броја e, израчунао је првих осамнаест цифра овог броја и доказао је његову ирационалност. Њему у част је овај број назван Ојлеров број и обележава се са e. Поред тога Ојлер је детаљно испитао и особине функције $y = e^x$. Број e је већ записан преко лимеса у изразу 5.2, а слично се преко лимеса може записати и функција $y = e^x$:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{x}{n})^n \tag{5.3}$$

Исак Њутн је такође дао свој допринос броју e тако што је показао да се он може записати као сума бесконачног реда:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + ... \tag{5.4}$$

Аналогно се може представити и функција e^x:

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + ... \tag{5.5}$$

Веза између израза 5.3 и 5.5 се може релативно једноставно приказати помоћу биномног развоја за $(1+a)^n$:

$$(1+a)^n = 1 + \frac{n}{1!}a + \frac{n(n-1)}{2!}a^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^3 + ... \tag{5.6}$$

Ако се узме да је $a = k/n$, добија се:

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1 + \frac{n}{1!}(\frac{x}{n}) + \frac{n(n-1)}{2!}(\frac{x}{n})^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}(\frac{x}{n})^3 + ... \tag{5.7}$$

што се може још записати као:

$$(1+\frac{x}{n})^n = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}(1-\frac{x}{n})x^2 + \frac{1}{3!}(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})x^3 + ... \tag{5.8}$$

Уколико се узме да n тежи бесконачности добија се да лева страна тежи e^x, док на десној страни свака вредност у загради облика $(1-k/n)$ тежи 1. Добија се:

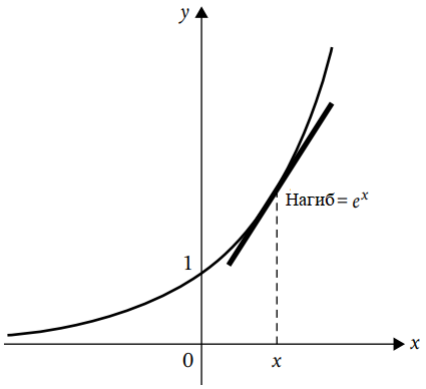
$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... \tag{5.9}$$

5.1.1 График и особине функције $y = e^x$

График функције $y = e^x$ је приказан на слици 14. Експоненцијална функција је реална функција једне променљиве, дефинисана за све реалне бројеве, која је увек позитивна и растућа. Никада не додирује x-осу, мада јој је x-оса једина асимптота. Њена инверзна функција, природни логаритам, је дефинисана само за позитивне вредности променљиве x. Једна од најважнијих особина функције $y = e^x$ је да је њен нагиб у било којој тачки x је једнак e^x. Функција e^x се може развити у ред као што је приказано у 5.9. Диференцирањем овог развоја по x се добија:

$$\frac{de^x}{dx} = 0 + \frac{1}{1!}(1) + \frac{1}{2!}(2x) + \frac{1}{3!}(3x^2) + \frac{1}{4!}(4x^2)... = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + ... = e^x. \tag{5.10}$$

Одавде следи да је нагиб у свакој тачки функције $y = e^x$ једнак e^x. На језику диференцијалног рачуна може се рећи да је $y = e^x$ решење диференцијалне једначине $dy/dx = y$. Решење ове једначине у општем облику је $y = Ce^x$, где је C константа. То значи да су функција $y = e^x$ и њени умношци једина решења диференцијалне једначине $dy/dx = y$.



Слика 14 . График функције $y = e^x$

5.1.2 Ирационалност броја e

Ојлер је 1737. године успео да докаже ирационалност броја e тј. да он не може да се запише у виду разломка a/b, где су a и b природни бројеви. Рационални бројеви могу да се запишу у виду коначних, верижних разломака. Ојлер је најпре показао да се помоћу бесконачних верижних разломака могу представити ирационални бројеви, а након тога и да се преко њих може представити број e.

$$e = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \ldots}}}}}}}} \tag{5.11}$$

Пошто је овај верижни разломак једнак e и бесконачан је следи да је број e ирационалан. Још један доказ ирационалности броја e дао је и француски математичар и физичар Жозеф Фурије. Доказ је базиран на претпоставци да је $e = a/b$, при чему су a и b природни бројеви и добијању контрадикције.

Фуријеов доказ: Нека је e рационалан број који може да се развије у ред:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{b!} + \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \ldots \tag{5.12}$$

Нека је N број који се може записати као:

$$\begin{aligned} N &= b! \cdot \left\{ e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{b!} \right) \right\} \\ &= b! \cdot \left\{ a/b - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{b!} \right) \right\} \\ &= (b-1)!a - \left(b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \frac{b!}{4!} + \ldots + \frac{b!}{b!} \right). \end{aligned} \tag{5.13}$$

Сваки члан низа у другој загради је природан број те је и N природан број. N је строго веће од 0 јер је $e > 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{b!}$. Пошто је

$$e - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \ldots + \frac{1}{b!} \right) = \frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \ldots$$

следи да је

$$\begin{aligned} N &= b! \cdot \left(\frac{1}{(b+1)!} + \frac{1}{(b+2)!} + \frac{1}{(b+3)!} + \ldots \right) \\ &= \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3) + \ldots} \\ &< \frac{1}{b+1} + \frac{1}{(b+1)^2} + \frac{1}{(b+1)^3} + \ldots = 1/b. \end{aligned} \tag{5.14}$$

Пошто е није природан број, може се узети да је $b > 1$, те је $1/b < 1$. Одавде следи да је N природан број који је строго између 0 и 1, што је немогуће. Из ове контрадикције следи да је e ирационалан број.

5.2 Експоненцијални раст и опадање

Експоненцијална функција и број e се могу наћи у математичком опису природних појава и различитих физичких закона. Ова чињеница указује да e није само математичка константа него да игра веома битну улогу у креацији универзума и реалности.

5.2.1 Раст популације

Нека је дата одређена популација јединки и нека је њихова бројност у тренутку t једнака $N(t)$. Ако се број јединки увећава константном стопом k и ако је пораст броја јединки сразмеран њиховим тренутним бројем, тада се може поставити диференцијална једначина

$$dN/dt = kN \tag{5.15}$$

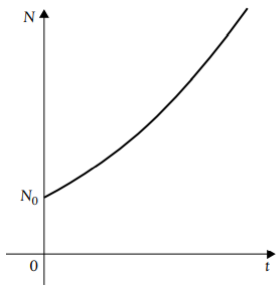
која описује промену броја јединки током времена. Решавањем диференцијалне једначине добија се решење облика:

$$N(t) = Ce^{kt}, \tag{5.16}$$

где је C константа. Ако је N_0 број јединки у почетном тренутку $t = 0$ тада је $N_0 = Ce^{0k}$. Одавде следи да је $C = N_0$ и број јединки у тренутку t се може записати као:

$$N(t) = N_0 e^{kt}. \tag{5.17}$$

На слици 15. је приказан график промене броја јединки одређене популације у зависности од времена.



Слика 15. Ескпоненцијални пораст популације јединки

5.2.2 Њутнов закон хлађења

Њутнов закон хлађења описује хлађење тела која су окружена флуидом (ваздухом) у гравитационом пољу Земље. Као пример може се навести шољица топлог чаја који се хлади у ваздуху. Температура чаја је виша од температуре ваздуха и из тог разлога отпушта одређену количину топлоте услед чега долази до опадања његове температуре. Услед ове размене топлоте успоставља се градијент температуре како у чају који посматрамо тако и у ваздуху који га окружује. Температура чаја је највиша у његовом центру, а најнижа у површинским слојевима. Овај пад температуре је мали и може се сматрати да сви слојеви чаја имају исту температуру T. Температура ваздуха је највиша у слојевима који су у непосредном контакту са шољицом чаја и она опада што је посматрани слој ваздуха даље од шољице чаја. На довољно далеком растојању температура ваздуха је

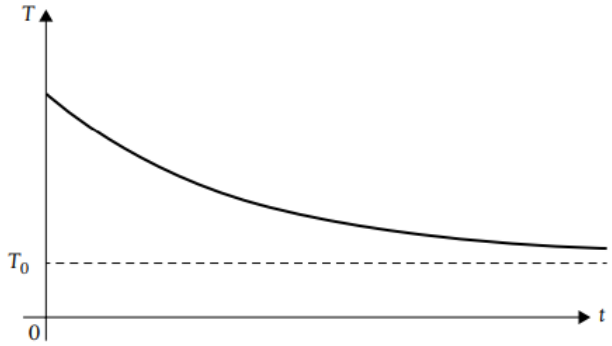
једнака температури околине T_0. По Њутновом закону хлађења, брзина хлађења тела је пропорционална разлици температуре тела T и температуре околине T_0.

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0), \tag{5.18}$$

где је k фактор пропорционалности који се назива константа хлађења. Решавањем ове диференцијалне једначине добија се:

$$T(t) = T_0 + Ce^{-kt}\,, \tag{5.19}$$

где је C константа која се може одредити ако је позната почетна температура чаја. Овде је потребно напоменути да Њутнов закон хлађења важи за температуре околине које су приближне собним температурама и за мале разлике у температури посматраног тела и околине. На слици 16 је приказана промена температуре чаја у функцији од времена.



Слика 16. Њутнов закон хлађења

5.2.3 Закон радиоактивног распада

Радиоактивни распад је спонтана трансформација језгара нестабилног изотопа једног хемијског елемента у изотопе другог елемента уз емисију радиоактивног зрачења (α-честица, β-честица или γ-кваната). Радиоактивност која се сусреће у природи, најчешће код најтежих елемената, се назива природном радиоактивношћу. Независно од механизма распада, радиоактивна језгра се трансформишу у стабилнија језгра независно једна од других и независно од спољашњих утицаја. Радиоактивни распади имају случајни карактер јер зависе од квантно-механичких процеса који се одигравају унутар самог језгра. Узорак радиоактивног елемента се састоји од N нестабилних језгара, која се неће распасти истовремено. Немогуће је предвидети тачан тренутак распада одређеног језгра, али се распад великог броја језгара може посматрати као статистички процес и на тај начин се описати промена броја језгара током времена. Према закону радиактивног распада брзина распада dN/dt је сразмерна броју нераспаднутих језгара:

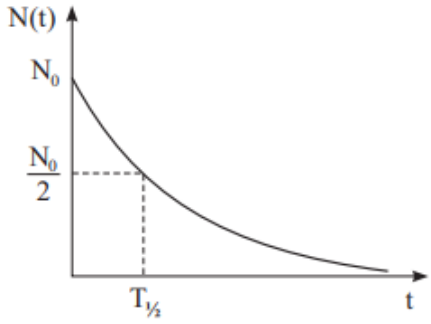
$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N\,. \tag{5.20}$$

Знак минус указује на чињеницу да се број радиоактивних језгара посматраног елемента смањује током времена. Грчким словом λ је означена константа распада и она представља вероватноћу распада језгра у јединици времена. Сваки хемијски елемент поседује своју

карактеристичну константу распада која не може да се промени ни под којим условима. Решавањем диференцијалне једначине 5.20 добија се:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}\,, \tag{5.21}$$

где је N_0 број језгара у почетном тренутку $t = 0$, а $N(t)$ је број преосталих језгара у тренутку t. График функције 5.21 је приказан на слици 17.



Слика 17. Експоненцијална зависност броја нераспаднутих језгара од времена

5.2.4 Барометарска формула

Атмосферски притисак или притисак ваздуха је притисак на било којем делу Земљине атмосфере. Атмосферски притисак зависи од висине на којој се мери и он потиче од тежине слојева атмосфере изнад ове висине. Барометарска формула приказује експоненцијалну зависност атмосферског притиска од висине. При извођењу ове формуле занемарена је промена јачине гравитационог поља са висином, сматра се да је ваздух идеалан гас и да је његова температура константна дуж свих слојева атмосфере. Атмосфера се може изделити на бесконачно много танких слојева. У сваком делу једног слоја је исти атмосферски притисак, али је он различит у сваком слоју. Такође се сматра да се у сваком слоју ваздух налази у стању термодинамичке равнотеже. На висини h изнад површине земље атмосферски притисак је једнак p. Уколико се посматра слој атмосфере који је за dh на вишој висини од првобитног слоја, може се уочити промена притиска у односу на почетни слој:

$$dp = -\rho g dh. \tag{5.22}$$

Знак минус означава негативну промену притиска, тј. притисак ваздуха опада са висином. У изразу 5.22. ρ означава густину ваздуха, а g гравитационо убрзање. Густина ваздуха се мења у зависности од висине и може се изразити у функцији од притиска помоћу једначине стања идеалног гаса:

$$pV = \frac{m}{M} RT. \tag{5.23}$$

Пошто је $\rho = m/V$ из једначине стања се добија да је густина једнака:

$$\rho = \frac{pM}{RT}. \tag{5.24}$$

Уврштавањем израза за густину 5.24 у израз 5.22 добија се израз:

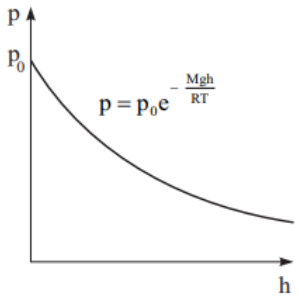
$$dp = -\frac{pMg}{RT} dh. \tag{5.25}$$

Интеграљењем овог израза добија се израз који описује ескпоненцијално опадање притиска са висином, тј. барометарска формула.

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} \int_{0}^{h} dh, \tag{5.26}$$

$$p = p_0 e^{-\frac{Mgh}{RT}}. \tag{5.27}$$

У изразу 5.27. је атмосферски притисак на површини земље представљен са p_0, када се за висину узима да је $h = 0$. Зависност атмосферског притиска од висине је графички приказана на слици 18.



Слика 18. Експоненцијална зависност атмосферског притиска од висине

6 Још неке занимљиве константе

6.1 Аперијева константа

Риманова зета функција $\zeta(s)$, названа по Бернарду Риману, је функција комплексне променљиве s и дефинисана је бесконачном сумом:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \tag{6.1}$$

за $Re(s) > 1$. Има кључну улогу у теорији бројева због везе са дистрибуцијом простих бројева и има примене у физици, теорији вероватноће и примењеној статистици. Један од најпознатијих редова је хармонијски ред

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + 1/2 + 1/3... \tag{6.2}$$

Међутим, како се теорија бројева базира на природним бројевима, није ни чудно да је овај ред јако занимљив многим теоретичарима. Овај ред дивергира. Да би хармонијски ред конвергирао, без губљења битних својстава за теорију бројева, ставља се $\frac{1}{n^s}$ уместо $\frac{1}{n}$. То нам даје Риманову зета функцију дефинисану на следећи начин:

Дефиниција: Ако $s \in C$, и ако је његов реални део $Re(s) > 1$, онда се дефинише функција $\zeta(s)$ као ред

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + ... \tag{6.3}$$

Теорема : Ред $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^s}$ конвергира за све реалне $s > 1$ и дивергира за све реалне $s \leq 1$.

Доказ: Груписањем чланова у блокове величине $1, 2, 4, 8, ...$ добија се

$$\zeta(s) = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{7^s}\right) + \left(\frac{1}{8^s} + ... + \frac{1}{15^s}\right) + ... \tag{6.4}$$

Сада следи

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} &\leq \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s} = \frac{2}{2^s} = 2^{1-s} \\ \frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{7^s} &\leq \frac{1}{4^s} + ... + \frac{1}{4^s} = \frac{4}{4^s} = (2^{1-s})^2 \\ \frac{1}{8^s} + ... + \frac{1}{15^s} &\leq \frac{1}{8^s} + ... + \frac{1}{8^s} = \frac{8}{8^s} = (2^{1-s})^3 \end{aligned} \tag{6.5}$$

и тако даље. Ред се сада може упоредити са геометријским редом

$$1 + 2^{1-s} + (2^{1-s})^2 + (2^{1-s})^3 + ... \tag{6.6}$$

Ово конвергира јер $0 < 2^{1-s} < 1$. Следи да је $1 \leq \zeta(s) \leq f(s)$ за сваки $s > 1$, где је

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{1-s})^n = \frac{1}{1 - 2^{1-s}}. \tag{6.7}$$

Ако s тежи $+\infty$ тада 2^{1-s} тежи 0 и $f(s)$ тежи 1, даје

$$\lim_{s\to\infty} \zeta(s) = 1. \tag{6.8}$$

Може се показати да 6.3 дивергира за $s \leq 1$. Ово је очито ако је $s \leq 0$, будући да $\frac{1}{n^s} \not\to 0$ када $n \to \infty$, следи претпоставка да је $s > 0$. Груписањем чланова реда 6.3 у блокове величине 1,1,2,4,... добија се:

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + (\frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s}) + (\frac{1}{5^s} + ... + \frac{1}{8^s}) + ... \tag{6.9}$$

Ако $s \leq 1$ тада

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^s} &\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} &\geq \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{5^s} + ... + \frac{1}{8^s} &\geq \frac{1}{8} + ... + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{6.10}$$

и тако даље. Види се да ред дивергира кад се упореди са дивергентним редом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + ... \tag{6.11}$$

Специјално, за $s = 1$ добија се хармонијски ред $\sum 1/n$ који такође дивергира. □

Иако је ова функција названа по Риману, који је и описао њена својства 1859, открио ју је Ојлер, 120 година раније. Ојлер је показао и да се може представити као производ

$$\zeta(s) = \prod_p \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right), \tag{6.12}$$

где p пролази по скупу простих бројева и $Re(s) > 1$. Овај резултат омогућава аналитички приступ проучавању теорије бројева. Ојлер је сматрао да је $\zeta(s)$ функција реалне променљиве s, док је Риман пуно допринео тиме што је s сматрао комплексном променљивом. [14]

Следи доказ формуле 6.12 за $s \in \mathbb{R}$. Сваки фактор с десне стране једначине може се проширити као геометријски ред

$$\frac{1}{1 - p^{-s}} = 1 + p^{-s} + p^{-2s} + ... = \sum_{e=0}^{\infty} p^{-es}. \tag{6.13}$$

Овај ред конвергира будући да је $|p^{-s}| = p^{-s} < 1$ за свако $s > 0$. Кошијева теорема о конвергенцији производа редова гласи: Ако редови $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ конвергирају ка a и b респективно и при томе бар један од њих и апсолутно конвергира, онда и ред $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$, који је производ ова два реда, конвергира и при томе је $\sum_{n=1}^{\infty} c_n = a \cdot b$. На основу ове теореме знамо да производ из 6.12 конвергира. Ако помножимо све факторе заједно тада је њихов производ облика

$$p_1^{-e_1 s} \cdots p_k^{-e_k s} = \frac{1}{n^s}, \tag{6.14}$$

где су $p_1, ..., p_k$ различити прости бројеви, свако $e_i > 0$ и $n = p_1^{e_1} \cdots p_k^{e_k}$. Из тога следи $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. □

6.1.1 Израчунавање Аперијеве константе $\zeta(3)$

Аперијева константа, $\zeta(3)$ је дефинисана као вредност Риманове зета функције

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}, \quad s > 1\,, \tag{6.15}$$

када је $s = 3$.

Полилогаритамска функција

$$Li_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^s} = x + \frac{x^2}{2^s} + \frac{x^3}{3^s} + ..., s, x \in \mathbb{C}, |x| < 1 \tag{6.16}$$

има значајну улогу у многим областима теорије бројева; порекло води од дилогаритамске функције $Li_2(x)$ која датире још од Абела, Ојлера, Кумера итд.

За $0 \leq x \leq 1$, дилогаритамска функција дефинисана је

$$Li_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}. \tag{6.17}$$

Посебно, за $x = 1$ имамо

$$Li_2(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.$$

Дилогаритамска функција дефинисана је и преко интеграла:

$$Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy. \tag{6.18}$$

Развијањем логаритамске функције у Тејлоров ред може се добити израз 6.17.

Трилогаритамска функција, за $0 \leq x \leq 1$, дефинисана је

$$Li_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}. \tag{6.19}$$

Ако је $x = 1$, имамо

$$Li_3(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \zeta(3).$$

Израчунавање Аперијеве константе се може започети трилогаритмом:

$$Li_3(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}, \tag{6.20}$$

где је $0 \leq x \leq 1$. Уколико диференцирамо по x и леву и десну страну, добијамо

$$x\frac{d}{dx}Li_3(x) = Li_2(x) = -\int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy \tag{6.21}$$

Интеграљењем леве и десне стране се добија да је:

$$\zeta(3) = Li_3(1) = -\int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy\,. \tag{6.22}$$

Даље је:

$$\zeta(3) = -\int_0^1 \frac{dx}{x} \int_0^x \frac{\ln(1-y)}{y} dy = -\iint\limits_D \frac{\ln(1-y)}{xy} dx\, dy\,. \tag{6.23}$$

где је домен дводимензионалне интеграције троугао $D = \{(x,y) : 0 \le x \le 1,\ y \ge 0,\ y \le x\}$. Заменом редоследа интеграције у изразу 6.23, добија се:

$$\zeta(3) = -\int_0^1 \frac{\ln(1-y)}{y} dy \int_y^1 \frac{dx}{x}\,. \tag{6.24}$$

Овај израз се може трансформисати у:

$$\zeta(3) = \int_0^1 \frac{\ln(1-y)\ln y}{y} dy = -\int_0^1 \ln y\, dy \int_0^1 \frac{dx}{1-xy} = -\iint\limits_{D_k} \frac{\ln y}{1-xy} dx\, dy\,, \tag{6.25}$$

где је домен дводимензионалне интеграције квадрат $D_k = \{(x,y) : 1 \ge x \ge 0,\ 1 \ge y \ge 0\}$.

Може се показати да важи:

$$\iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-xy} dx\, dy \ + \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1+xy} dx\, dy \ = 2 \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-x^2y^2} dx\, dy \tag{6.26}$$

и

$$\iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-xy} dx\, dy \ - \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1+xy} dx\, dy \ = \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-xy} dx\, dy \tag{6.27}$$

при чему 6.27 следи из:

$$\iint\limits_{D_k} \frac{2xy\ln(xy)}{1-x^2y^2} dx\, dy = \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} \frac{\ln\left(x^2y^2\right)}{1-x^2y^2} d(x^2)\, d(y^2) = \frac{1}{4} \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-xy} dx\, dy\,. \tag{6.28}$$

Сабирањем израза 6.26 и 6.27 се добија:

$$\zeta(3) = -\frac{4}{7} \iint\limits_{D_k} \frac{\ln(xy)}{1-x^2y^2} dx\, dy\,. \tag{6.29}$$

Увођењем смене $x = \frac{\sin u}{\cos v}$ и $y = \frac{\sin v}{\cos u}$, добија се јакобијан:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\cos u}{\cos v} & \frac{\sin v \sin u}{\cos^2 u} \\ \frac{\sin u \sin v}{\cos^2 v} & \frac{\cos v}{\cos u} \end{vmatrix} = 1 - \frac{\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 v \cos^2 u} = 1 - x^2y^2\,. \tag{6.30}$$

Након увођења смене израз 6.29 се може записати као:

$$\zeta(3) = -\frac{4}{7} \iint\limits_{D_t} \ln(\operatorname{tg} u \operatorname{tg} v)\, du\, dv = -\frac{8}{7} \iint\limits_{D_t} \ln(\operatorname{tg} u)\, du\, dv\,, \tag{6.31}$$

где је домен дводимензионе интеграције троугао $D_t = \{(u,v) : u \ge 0,\ v \ge 0,\ u+v \le \pi/2\}$ следи:

$$\zeta(3) = -\frac{8}{7} \int_0^{\pi/2} du \ln(\operatorname{tg} u) \int_0^{\pi/2-u} dv = -\frac{8}{7} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\pi}{2} - u\right) \ln(\operatorname{tg} u)\, du\,, \tag{6.32}$$

Након увођења нове смене $x = \frac{\pi}{2} - u$ добија се:

$$\zeta(3) = -\frac{8}{7} \int_0^{\pi/2} x \ln(\operatorname{ctg} x)\, dx = \frac{8}{7} \int_0^{\pi/2} x \ln(\operatorname{tg} x)\, dx\,. \tag{6.33}$$

Пошто је:

$$\int_0^{\pi/2} x\ln(\operatorname{tg} x)\,dx = -\int_{\pi/2}^{0} \ln(\operatorname{ctg} u)du = -\int_0^{\pi/2} \ln(\operatorname{tg} u)\,du = 0\,, \tag{6.34}$$

следи да се израз 6.33 може записати као:

$$\zeta(3) = \frac{8}{7}\int_0^{\pi/2}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\ln(\operatorname{tg} x)\,dx = \frac{8}{7}\int_0^{\pi/2}\ln(\operatorname{tg} x)\frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{\pi}{4}x\right)\,dx\,. \tag{6.35}$$

Након парцијалне интеграције се коначно добија [19]:

$$\zeta(3) = \frac{1}{7}\int_0^{\pi}\frac{x(\pi-x)}{\sin x}\,dx\,. \tag{6.36}$$

6.1.2 Ирационалност Аперијеве константе

У овом поглављу ће бити дат Аперијев доказ ирационалности Риманове зета функција за непаран цео број 3. Пре доказа ирационалности биће наведена нека прелиминарна израчунавања неопходна за сам доказ.

Почињемо са навођењем идентитета који укључује најмањи заједнички садржалац првих n природних бројева.

Лема 6.1

$$d_n = \prod_{p\le n,\ p \text{ jeprost}} p^{\left\lceil \frac{\log n}{\log p}\right\rceil}, \tag{6.37}$$

где је d_n најмањи заједнички садржалац за бројеве $1, 2, ..., n$, у ознаци $NZS\{1, 2, ..., n\}$.

Доказ: Претпоставимо да је p прост и x реалан број. Из $n = p^x$ следи да је $x = \frac{\log n}{\log p}$, па је $\lceil x\rceil = \left\lceil\frac{\log n}{\log p}\right\rceil$ највећи целобројни степен од p за који је $p^{\lceil x\rceil} < n$.

Нека је $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ скуп позитивних целих бројева где је

$$A_i = p_1^{y_{i_1}} p_2^{y_{i_2}} ... p_\alpha^{y_{i_\alpha}}$$

за $i = 1, 2, ..., n$ и p_i прост, док y_i може бити 0, за многе i.

$$NZS\{A_1, A_2, ..., A_n\} = p_1^{m_1} p_2^{m_2} ... p_\alpha^{m_\alpha},$$

где је $m_j = \max\{y_i, i = 1, 2, ..., n\}$. Специјално, за $A_i = i$ имамо $m_j = \left\lceil\frac{\log n}{\log p_j}\right\rceil$, чиме је лема доказана. □

Лема 6.2 За дато n важи

$$\prod_{p\le n, pjeprost} p^{\left\lceil\frac{\log n}{\log p}\right\rceil} = \prod_{n\in\mathbb{N}} n. \tag{6.38}$$

Доказ: Да бисмо доказали лему, довољно је показати да важи

$$\prod_{p\le n, pjeprost} p^{\frac{\log n}{\log p}} = \prod_{n\in\mathbb{N}} n.$$

Нека је $p^{\frac{\log n}{\log p}} = y$. Даље следи $\frac{\log n}{\log p}\log p = \log y \Rightarrow \log n = \log y \Rightarrow n = y$. Дакле,

$$p^{\frac{\log n}{\log p}} = n.$$

□

Дефиниција: Број простих бројева који су мањи или једнаки n је дефинисан са $\pi(n)$.

Лема 6.3 За довољно велико n важи:

$$n^{\pi(n)} < 3^n, \tag{6.39}$$

где је n позитиван цео број.

Доказ: На основу теореме о простим бројевима знамо да се функција $\pi(n)$ може апроксимирати на следећи начин $\pi(n) \sim \frac{n}{\log n}$. Следи да за дато $\varepsilon > 0$ постоји позитиван цео број N, такав да за свако $n > N$ важи:

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n} + \frac{\varepsilon n}{\log n} \tag{6.40}$$

Одабиром $\varepsilon = \log 3 - 1$ тада постоје позитивни цели бројеви N' такви да за $n > N'$ важи:

$$\pi(n) < \frac{n}{\log n} + \frac{n \log 3}{\log n} - \frac{n}{\log n} = \frac{n \log 3}{\log n}. \tag{6.41}$$

Даље следи:

$$n^{\pi(n)} < n^{\frac{n \log 3}{\log n}}. \tag{6.42}$$

Ако је $X = n^{\frac{n \log 3}{\log n}}$, тада $\log X = \frac{n \log 3}{\log n} \log n$. Одавде следи $\log X = \log 3^n$, тј. $X = 3^n$. Одавде коначно имамо да је:

$$n^{\pi(n)} < 3^n \tag{6.43}$$

за довољно велико n. □

Последица 6.3.1 За дат цео број n важи: $d_n < 3^n$

У следећој леми $\zeta(3)$ је изражена преко биномних коефицијената. Коришћењем овог израза добија се двоструки низ који конвергира ка $\zeta(3)$.

Лема 6.4

$$\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}. \tag{6.44}$$

Доказ: Лему ћемо доказати корак по корак. Корак 1: Показаћемо да важи једнакост

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{a_1 a_2 ... a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 ... a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_K)}, \tag{6.45}$$

где су a_k цели бројеви, $k \in \{1, 2, ..., K\}, K \in \mathbb{N}$. Нека је

$$A_k = \frac{a_1 a_2 ... a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_{k-1})}.$$

Тада је

$$A_{k-1} - A_k = \frac{a_1 a_2 ... a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)}.$$

Даље имамо

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{a_1 a_2 ... a_{k-1}}{(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)} = \sum_{k=1}^{K} A_{k-1} - A_k = (A_0 - A_1) + (A_1 - A_2) + (A_2 - A_3) + ... + (A_{k-1} - A_k) =$$

$$= A_0 - A_k = \frac{1}{x} - \frac{a_1 a_2 ... a_K}{x(x+a_1)(x+a_2)...(x+a_k)}.$$

Корак 2: У израз који смо претходно показали, убацујемо $x = n^2$ и $a_k = -k^2$, $1 \leq K \leq n-1$. Тада је

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{-1^2 \cdot (-2^2) \cdot ... \cdot (-(k-1)^2)}{(n^2-1^2)...(n^2-k^2)} = \sum_{k=1}^{K} \frac{(-1)^{k-1} 1^2 2^2 ... (k-1)^2}{(n^2-1^2)...(n^2-k^2)}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)...(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2 n 2n}{n^2 (2n)!^2} =$$

$$= \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1} 2n! n!}{n^2 (2n)!} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1} 2}{n^2 \binom{2n}{n}}.$$

Уколико израз $\frac{1}{2}\frac{(k!)^2(n-k)!}{k^3(n+k)!}$ означимо са $\epsilon_{n,k}$, еквивалентним трансформацијама добијамо да важи једнакост

$$(-1)^k n(\epsilon_{n,k} - \epsilon_{n-1,k}) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(n^2-1^2)...(n^2-k^2)}.$$

Даље

$$\sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k n(\epsilon_{n,k} - \epsilon_{n-1,k}) = \sum_{k=1}^{N} (-1)^k n(\epsilon_{N,k} - \epsilon_{k,k}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{2k^3 \binom{N+k}{k} \binom{N}{k}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}}.$$

што смо добили уврштавањем претходне формуле. Уколико приметимо да је лева страна једнакости заправо једнака првој формули са почетка другог корака, следи да је десна страна такође једнака:

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}.$$

Стога

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2 \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{2k^3 \binom{N+k}{k} \binom{N}{k}} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}}.$$

Када пустимо $N \to \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3 \binom{2k}{k}}.$$

□

Сада можемо да дефинишемо двоструки низ:

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} \tag{6.46}$$

Лема 6.5 Вредност:

$$2d_n^3 c_{n,k} \begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$$

припада скупу целих бројева, при чему $d_n = NZS(1, 2, 3...n)$.

Доказ: Довољно је показати да је:

$$2c_{n,k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$$

рационалан број, чији именилац дели d_n^3. Да би се ово показало, довољно је показати да за било који дати прост број p важи да дели именилац од $2c_{n,k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$ мањи број пута него што дели d_n^3. Нека је $ord_p(x)$ највећи степен p који дели x. Посматрајмо:

$$\frac{\binom{n+k}{k}}{\binom{n+m}{m}} = \frac{\binom{n+k}{k-m}}{\binom{k}{m}}. \tag{6.47}$$

Сада,

$$\begin{aligned} ord_p\binom{n}{m} &= ord_p\left[\frac{n(n+1)...(n-m+1)}{m!}\right] \leq ord_p(\frac{n!}{m!}) \\ &= ord_p(n!) - ord_p(m!) \leq ord_p(d_n) - ord_p(m) \\ &= \left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil - ord_p(m). \end{aligned} \tag{6.48}$$

Израз $2c_{n,k}\begin{pmatrix} n+k \\ k \end{pmatrix}$ записујемо у облику збира два сабирка, и након тога проверавамо да ли именилац сваког сабирка дели d_n^3.

$$2c_{n,k}\binom{n+k}{k} = 2\binom{n+k}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3} + 2\binom{n+k}{k}\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}} \tag{6.49}$$

Како је

$$2\binom{n+k}{k}\sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3} = 2\frac{(n+k)!}{n!k!}(1+\frac{1}{2^3}+...+\frac{1}{n^3}),$$

закључујемо да именилац првог сабирка дели d_n^3. Исто проверавамо и за други сабирак чији је именилац:

$$\frac{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}{\binom{n+k}{k}} = \frac{2m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}{\binom{n+k}{k-m}}$$

Следи

$$\begin{aligned} ord_p\left(\frac{m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}{\binom{n+k}{k}}\right) = ord_p\left(\frac{m^3\binom{n}{m}\binom{k}{m}}{\binom{n+k}{k-m}}\right) &\leq 3ord_p(m) + \left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil - ord_p(m) + \\ &+ \left\lceil \frac{\log k}{\log p} \right\rceil - ord_p(m) - ord_p\left(\binom{n+k}{k-m}\right) \\ &\leq \left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil + \left\lceil \frac{\log k}{\log p} \right\rceil + ord_p(m). \end{aligned} \tag{6.50}$$

Пошто је $m \leq k \leq n$

$$ord_p(m) \leq ord_p(d_m) \leq ord_p(d_k) \leq ord_p(d_n), \tag{6.51}$$

даље следи:

$$\left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil + \left\lceil \frac{\log k}{\log p} \right\rceil + ord_p(m) \leq \left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil + \left\lceil \frac{\log k}{\log p} \right\rceil + ord_p(d_m). \tag{6.52}$$

На крају се добија:

$$ord_p(d_m) = \left\lceil \frac{\log m}{\log p} \right\rceil \leq 3 \left\lceil \frac{\log n}{\log p} \right\rceil = ord_p(d_n^3). \tag{6.53}$$

□

Последица 6.5.1 Именилац a_n $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$, дели d_n^3.

Доказ: Из дефиницији a_n и $c_{n,k}$ и из претходне леме следи да именилац $c_{n,k}$ дели d_n^3, а одатле следи да именилац a_n дели d_n^3. □

Лема 6.6 Једначина

$$n^3 u_n + (n-1^3) u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}, \quad n \geq 2, \tag{6.54}$$

је еквивалентна једначини

$$(n+1)^3 u_{n+1} - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) u_n + n^3 u_{n-1} = 0, \quad n \geq 1, \tag{6.55}$$

Доказ: Рекурентна релација 6.55, се добија заменом n са $n+1$ у једначини 6.54. □

Лема 6.7 $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 c_{n,k}$ и $b_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2$ задовољвају рекурентну релацију:

$$n^3 u_n + (n-1)^3 u_{n-2} = (34n^3 - 51n^2 + 27n - 5) u_{n-1}, \quad n \geq 2\,.$$

Доказ: Да бисмо доказали да a_n задовољава рекурентну релацију, прво ћемо дефинисати низ:

$$B_{n,k} = 4(2n+1)[k(2k+1) - (2n+1)^2] \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2. \tag{6.56}$$

Корак 1: Приметимо да је:

$$\begin{aligned} B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3 \binom{n+1}{k}^2 \binom{n+1+k}{k}^2 - (34n^3 + 51n^2 + 27n + 5) \binom{n}{k}^2 \binom{n+k}{k}^2 + \\ + n^3 \binom{n-1}{k}^2 \binom{n-1+k}{k}^2. \end{aligned} \tag{6.57}$$

Корак 2: Треба показати да је:

$$c_{n,k} - c_{n-1,k} = \frac{(-1)^k k!^2 (n-k-1)!}{n^2 (n+k)!}. \tag{6.58}$$

Почевши од дефиниције за $c_{n,k}$, израчунаћемо $c_{n,k} - c_{n,k-1}$ на следећи начин:

$$\begin{aligned} c_{n,k} - c_{n-1,k} &= \sum_{m=1}^{n} \frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n}{m} \binom{n+m}{m}} - \sum_{m=1}^{n-1} \frac{1}{m^3} - \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m-1}}{2m^3 \binom{n-1}{m} \binom{n-1+m}{m}} \\ &= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m (m-1)!^2 (n-m-1)!}{(n+m)!}. \end{aligned} \tag{6.59}$$

Разломак $\frac{(-1)^m(m-1)!^2(n-m-1)!}{(n+m)!}$ се може представити:

$$\begin{aligned}\frac{(-1)^m(m-1)!^2(n-m-1)!}{(n+m)!} &= \frac{(-1)^m(m-1)!^2(n-m-1)!(m^2+n^2-m^2)}{n^2(n+m)!}\\ &= \frac{(-1)^m m!^2(n-m-1)! - (-1)^{m+1}(m-1)!^2(n-m)!(n+m)}{n^2(n+m)!}\\ &= \frac{(-1)^m m!^2(n-m-1)!}{n^2(n+m)!} - \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!^2(n-m)!}{n^2(n+m-1)!}.\end{aligned} \tag{6.60}$$

Следи:

$$\begin{aligned}c_{n,k} - c_{n-1,k} &= \frac{1}{n^3} + \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^m m!^2(n-m-1)!}{n^2(n+m)!} - \sum_{m=1}^{k} \frac{(-1)^{m+1}(m-1)!^2(n-m)!}{n^2(n+m-1)!}\\ &= \frac{1}{n^3} - \frac{(n-1)!}{n^2 n!} + \frac{(-1)^k k!^2(n-k-1)!}{n^2(n+k)!} = \frac{(-1)^k k!^2(n-k-1)!}{n^2(n+k)!}.\end{aligned} \tag{6.61}$$

Корак 3: Ако је $b_{n,k} = \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$ дефинишимо $B_{n,k} = 4(2n-1)(k(2k+1)-(2n+1)^2)b_{n,k}$ тада је:

$$(B_{n.k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + (n+1)^3 b_{n-1,k}(c_{n-1,k} - c_{n,k}) - n^3 b_{n-1,k}(c_{n,k} - c_{n-1,k}) = A_{n,k} - A_{n,k-1}, \tag{6.62}$$

где је:

$$A_{n,k} = B_{n,k}c_{n,k} + \frac{5(2n+1)(-1)^{k-1}k}{n(n+1)}\binom{n}{k}\binom{n+k}{k}. \tag{6.63}$$

Корак 4: Коришћењем дефиниција за a_n и $c_{n,k}$ показаћемо да a_n задовољава израз 6.54. Из Леме 6.6 следи да је претходни израз еквивалентан са 6.55. Уколико u_n заменимо са a_n добијамо:

$$(n+1)^3\sum_{k=1}^{n} b_{n+1,k}c_{n+1,k} - P(n)\sum_{k=1}^{n} b_{n,k}c_{n.k} + n^3\sum_{k=1}^{n} b_{n-1,k}c_{n-1,k} = 0, \quad n \geq 1, \tag{6.64}$$

где су $b_{n,k} = \binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2$ и $P(n) = 34n^3 + 51n^2 + 27n + 5$. За $r > n$, $\binom{n}{r} = 0$, претходни израз се може записати као:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\{(n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n+1,k} - P(n)b_{n,k}c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}c_{n-1,k}\} = 0, \quad n \geq 1. \tag{6.65}$$

Ово је потребно и доказати. Из корака 1 имамо да је:

$$B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3 b_{n+1,k} - P(n)b_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}.$$

Стога следи:

$$-P(n)b_{n,k}c_{n,k} = (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} - (n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n,k} - n^3 b_{n-1,k}c_{n,k}. \tag{6.66}$$

Заменом у 6.65 имамо:

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+1}\left\{(n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n+1,k} + (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} - (n+1)^3 b_{n+1,k}c_{n,k} - n^3 b_{n-1.k}c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}c_{n-1,k}\right\}\\ &\qquad = \sum_{k=0}^{n+1}\{(n+1)^3 b_{n+1,k}(c_{n+1,k} - c_{n,k}) + (B_{n,k} - B_{n,k-1})c_{n,k} + n^3 b_{n-1,k}(c_{n-1,k} - c_{n,k})\}.\end{aligned} \tag{6.67}$$

Применом леме 6.6 овај израз можемо записати као:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(A_{n,k} - A_{n,k-1}) \tag{6.68}$$

Сада имамо да је:

$$\sum_{k=0}^{n+1}(A_{n,k} - A_{n,k-1}) = A_{n,n+1} - A_{n,-1}. \tag{6.69}$$

али имамо и да је:

$$A_{n,n+1} = B_{n,n+1}c_{n,n+1} + \frac{5(2n+1)(-1)^n(n+1)\binom{n}{n+1}\binom{2n+1}{n+1}}{n(n+1)} = 0, \tag{6.70}$$

при чему $B_{n,n+1}$ има фактор $\binom{n}{n+1}$. Слично се може показати и да је $A_{n,-1} = 0$. Одавде следи да a_n задовољава рекурентну релацију 6.54.

Корак 5: Коначно показујемо да

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 = \sum_{k=0}^{n} b_{n,k} \tag{6.71}$$

задовољава рекурентну релацију 6.54. Од раније имамо да је

$$B_{n,k} = 4(2n+1)(k(2k+1) - (2n+1)^2)\binom{n}{k}^2\binom{n+k}{k}^2 = 4(2n+1)(k(2k+1) - (2n+1)^2)b_{n,k}$$

Из корака (1) имамо да је

$$B_{n,k} - B_{n,k-1} = (n+1)^3 b_{n+1,k} - P(n)b_{n,k} - n^3 b_{n-1,k} = Gn, k. \tag{6.72}$$

па је:

$$B_{n,k} = G_{n,k} + B_{n,k-1} = G_{n,k} + G_{n,k-1} + B_{n,k-2} = G_{n,k} + G_{n,k-1} + G_{n,k-2} + ... \tag{6.73}$$

Ако наставимо овај поступак и искористимо чињеницу да је $B_{n,r} = 0$, за $r < 0$ добијамо:

$$B_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} G_{n,i}. \tag{6.74}$$

Следи:

$$\begin{aligned} B_{n,n+1} = \sum_{i=0}^{n+1} G_{n,i} &= \sum_{i=0}^{n+1}((n+1)^3 b_{n+1,i} - P(n)b_{n,i} - n^3 b_{n-1,i}) \\ &= (n+1)^3\sum_{i=0}^{n+1} b_{n+1,i} - P(n)\sum_{i=0}^{n+1} b_{n,i} - n^3\sum_{i=0}^{n+1} b_{n-1,i} \\ &= (n+1)^3\sum_{i=0}^{n+1} b_{n+1,i} - P(n)\sum_{i=0}^{n} b_{n,i} - n^3\sum_{i=0}^{n11} b_{n-1,i}. \end{aligned} \tag{6.75}$$

Пошто је $b_{n,n+1} = 0$, $b_{n-1,n+1} = 0$, $b_{n-1,n} = 0$,

$$B_{n,n+1} = (n+1)^3 b_{n+1} - P(n)b_n - n^3 b_{n-1}. \tag{6.76}$$

Али пошто је $B_{n,r} = 0$, за $r > n$ имамо:

$$(n+1)^3 b_{n+1} - P(n)b_n - n^3 b_{n-1} = 0 \tag{6.77}$$

Одавде следи да b_n задовољава рекурентну релацију. □

Лема 6.8 Пошто a_n и b_n задовољавају рекурентну релацију

$$n^3u_n - (n-1)^3u_{n-2} = P(n)u_{n-1}, n \geq 2$$

где је $P(n) = 34n^3 - 51n^2 + 27n - 5$ следи

$$a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = \frac{6}{n^3}$$

Доказ: Пошто је у претходној леми показано да a_n и b_n задовољавају рекурентну релацију можемо у њу уврстити a_n и b_n, тада добијамо

$$n^3a_n + (n-1)^3a_{n-2} = P(n)a_{n-1}, \tag{6.78}$$

$$n^3b_n + (n-1)^3b_{n-2} = P(n)b_{n-1}, \tag{6.79}$$

Ако помножимо једначину 6.78 са b_{n-1} и једначину 6.79 са a_{n-1} и одузмемо их, добијамо:

$$n^3(a_nb_{n-1} - b_na_{n-1}) = -(n-1)^3(a_{n-2}b_{n-1} - b_{n-2}a_{n-1}). \tag{6.80}$$

$$\begin{aligned} a_nb_{n-1} - b_na_{n-1} &= \frac{(n-1)^3}{n^3}(a_{n-1}b_{n-2} - b_{n-1}a_{n-2}) \\ &= \frac{(n-1)^3}{n^3}\frac{(n-2)^3}{(n-1)^3}(a_{n-2}b_{n-3} - a_{n-3}b_{n-2}) \\ &= ... \\ &= \frac{(n-(n-1))^3}{n^3}(a_{n-(n-1)}b_{n-n} - a_{n-n}b_{n-(n-1)}) \\ &= \frac{1}{n^3}(a_1b_0 - a_0b_1) \\ &= \frac{1}{n^3}. \end{aligned} \tag{6.81}$$

Из дефиниције имамо да је $a_1 = 6$, $b_0 = 1$, $a_0 = 0$, $b_1 = 5$ па је $a_1b_0 - a_0b_1 = 6$. Одавде следи

$$a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = \frac{6}{n^3}. \tag{6.82}$$

□

Лема 6.9 Ако

$$c_{n,k} = \sum_{m=1}^{n}\frac{1}{m^3} + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}, k \leq n$$

тада $c_{n,k} \to \zeta(3)$ за $n \to \infty$ униформно у k.

Доказ:

$$|c_{n,k} - \zeta(3)| = \left|-\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^3} - \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right| \leq \left|\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\right| + \left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right|. \tag{6.83}$$

Пошто је $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{m^3}$ конвергентно, следи да за дато $\epsilon > 0$, $\forall n > N_1$,

$$\left|\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{m^3}\right| < \epsilon. \tag{6.84}$$

Даље следи

$$\left|\sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^{m-1}}{2m^3\binom{n}{m}\binom{n+m}{m}}\right| \leq \frac{k}{2n(n+1)} \leq \frac{n}{2n(n+1)} = \frac{1}{2(n+1)} \leq \frac{1}{2n} < \epsilon, \forall n > \frac{1}{\epsilon}. \tag{6.85}$$

Нека је $N_2 = \frac{1}{2\epsilon}$, при чему је $N = \max(N_1, N_2)$. Тада за $n > N$ имамо

$$|c_{n,k} - \zeta(3)| \leq 2\epsilon + \epsilon = 3\epsilon. \tag{6.86}$$

Пошто је ова конвергенција независна од k, конвергенција је униформна. □.

Последица 6.9.1

$$\frac{a_n}{b_n} \to \zeta(3), n \to \infty.$$

Доказ: Ако искористимо чињеницу да су $a_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}c_{n,k}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} b_{n,k}$ и чињеницу да $x_{n,k}, y_{n,k} \in \mathbb{R}$ и $y_{n,k} \to L$ ако $N \to \infty$(униформно у n) тада:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} x_{n,k}y_{n,k}}{\sum_{k=1}^{n} x_{n,k}} \to L, n \to \infty. \tag{6.87}$$

Добијамо да

$$\frac{a_n}{b_n} \to \zeta(3), n \to \infty. \tag{6.88}$$

□

Лема 6.10 Ако је $a_nb_{n-1} - a_{n-1}b_n = \frac{6}{n^3}$, тада:

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{6}{k^3b_kb_{k-1}}.$$

Доказ: Имамо да је

$$\frac{a_n}{b_n} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} = \frac{6}{n^3b_nb_{n-1}}. \tag{6.89}$$

Нека $\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = x_n$ тада је

$$x_n - x_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{b_{n+1}} - \frac{a_n}{b_n} = \frac{6}{(n+1)^3b_{n+1}b_n}. \tag{6.90}$$

Следи

$$\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} = \frac{6}{(n+1)^3b_{n+1}b_n} + x_{n+1}. \tag{6.91}$$

Ако наставимо овај поступак добијамо

$$\begin{aligned}\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} &= \frac{6}{(n+1)^3b_{n+1}b_n} + \frac{6}{(n+2)^3b_{n+2}b_{n+1}} + ... + \frac{6}{(n+m)^3b_{n+m}b_{n+m-1}} + x_{m+n} \\ &= \sum_{k=n+1}^{m}\frac{6}{k^3b_kb_{k-1}} + x_{n+m}.\end{aligned} \tag{6.92}$$

Сада, за $\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} \to 0$ када $n \to \infty$ имамо да је

$$\left|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}\right| = \sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{6}{k^3b_kb_{k-1}}. \tag{6.93}$$

□

Теорема 6.11 Ако је дат реалан број ω и ако су дати цели бројеви p_n и q_n такви да је за произвољно $\varepsilon > 0$:

$$0 < |\omega q_n - p_n| < \varepsilon \tag{6.94}$$

тада је ω ирационално.

Доказ: Претпоставимо да је ω рационално, тада постоје a и b који су такви да је $\omega = \frac{a}{b}$. Тада имамо да је:

$$0 < \left|\frac{a}{b}q_n - p_n\right| < \varepsilon \tag{6.95}$$

Множењем са $|b|$ добијамо:

$$0 < |aq_n - p_n| < \varepsilon|b| \tag{6.96}$$

Пошто је ε произвољно, можемо га одабрати рако да важи $\varepsilon|b| < 1$. Пошто су a, b, q_n и q_n цели бројеви и важи $|aq_n - p_n| > 0$, тада је $|aq_n - p_n| > 1$, што је контрадикција. □

Теорема 6.12 $\zeta(3)$ је ирационално.

Доказ: Лема 6.10 даје релацију:

$$|\zeta(3) - \frac{a_n}{b_n}| = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}}\,. \tag{6.97}$$

Даље следи

$$\begin{aligned} 0 < \zeta(3) - \frac{a_n}{b_n} &= \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3 b_k b_{k-1}} \\ < \frac{1}{b_n^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{6}{k^3} &< \frac{1}{b_n^2} T, \end{aligned} \tag{6.98}$$

где је $T = 6\zeta(3)$. Уколико помножимо са b_n, имамо

$$0 < b_n\zeta(3) - a_n < \frac{T}{b_n}. \tag{6.99}$$

Пошто знамо да иманилац a_n дели d_n^3, где је $d_n = NZS(1, 2, ..., n)$, a_n можемо записати као $a_n = \dfrac{p_n}{q_n}$ и $r_n q_n = d_n^3$,, где су p_n, q_n, r_n цели бројеви. Сада 6.98 постаје

$$0 < b_n\zeta(3) - \frac{p_n r_n}{d_n^3} < \frac{T}{b_n}.$$

Када поделимо све са d_n^3 добијамо

$$0 < d_n^3 b_n \zeta(3) - p_n r_n < \frac{T d_n^3}{b_n}. \tag{6.100}$$

Из 6.3.1 имамо да је $d_n^3 < 27^n$ и d_n је цео број, сада неједнакост 6.100 постаје

$$0 < X_n\zeta(3) - Y_n < \frac{T 27^n}{b_n},$$

где су X_n и Y_n цели бројеви. Користећи чињеницу да је $b_n > \frac{28^n}{n^3}$, за $n > 2$, која се може показати математичком индукцијом, претходна неједнакост се сада може записати

$$0 < X_n\zeta(3) - Y_n < \frac{T27^n n^3}{28^n},$$

што за довољно велико n даје

$$0 < X_n\zeta(3) - Y_n < \epsilon.$$

Из теореме 6.11 следи да је $\zeta(3)$ ирационалан број. $\square$

6.2 Ојлер-Маскеронијева константа

Ојлер-Маскеронијева константа γ је дефинисана лимесом

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right) = 0,5772156649... \tag{6.101}$$

Другим речима γ мери за колико се парцијалне суме хармонијских низова разликују од логаритамске функције, тј од интеграла који представља апроксимацију логаритамске функције [5]. Још увек није познато да ли је γ ирационалан, а камоли да ли је трансцедентан број. Природа броја γ представља једну од највећих математичких мистерија. Познати енглески математичар Г.Х. Харди је чак понудио своју позицију на Оксфордском универзитету било коме, ко успе да покаже да је γ ирационалан број. Број γ је први у метематику увео Ојлер тридесетих година 18. века у раду под називом ,,Опсервације хармонијских редова" који је током година приказан у више публикација. У свом раду Ојлер је показао да лимес:

$$\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln(n)) \tag{6.102}$$

постоји и означио га је са C, и одредио га је до шесте децимале $C = 0,577218$. Маскерони се надовезао на Ојлеров рад и посветио се испитивању функције $\int \frac{dz}{ln(z)}$, коју је назвао хиперлогаритамска функција. У свом раду одредио константу γ на 32 децимална места. Касније му је Гаус пронашао грешку на 29. децимали. Данас се уз помоћ компјутера може одредити више од 7000 цифара константе γ [20].

У теорији бројева постоји мноштво примера у којима се појављује константа γ као решење проблема. Ови проблеми се углавном баве асимптотским апроксимацијама функција које имају примену у теорији бројева.

6.3 Каталанова константа G

Каталанова константа, која носи ознаку G, названа је по математичару Јуџину Чарлсу Каталану, иако се првим важним истраживањима која су везана за ову константу бавио Џејмс Глајшер. Непознато је да ли је G ирационалан или трансцедентан број, иако се сумња да јесте. Ова константа се често појављује у комбинаторици и у изводима полигама функције[3]. Каталанова константа се дефинише као:

$$G = \beta(2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} - ... \tag{6.103}$$

где је β Дирихлеова бета функција . Уобичајено је да се Дирихлеова бета функција дефинише се као:

$$\beta(s) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(k-1)}}{(2k-1)^s} = \frac{1}{1^s} - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - ... \tag{6.104}$$

где је $Re(s) > 0$. Ова константа има примену у топологији, где је једнака 1/4 запремине идеалног хиперболичког октахедрона[4], комбинаторици и статистичкој механици. Поред тога ова константа се јавља и у теорији бројева, а појављује се и у калкулацијама масене дистрибуције спиралних галаксија.

[3]Полигама функција реда m је функција комплексних бројева која је дефинисана као $(m+1)$-ви извод логаритма гама функције.

[4]Хиперболички октахедрон је хиперболичка верзија Еуклидског октахедрона, који је спеијалан случај астроидалног елипсоида код кога је $a = b = c = 1$.

7 Закључак

Све математичке константе које су приказане у раду имају кључну улогу у опису природних појава и у решавању комплексних математичких прорачуна. Многи математичари су их откривали постепено покушавајући да реше проблеме како математичке, тако и животне.

Константа π се математичарима наметнула превасходно приликом изучавања круга. Многи су дали своје апроксимације овог трансцедентног броја. Константу e, која се појављује у разним законима физике, је открио Бернули покушавајући да од банке извуче најбољу зараду на орочену штедњу. Ово је био један од првих показатеља значаја математичких константи у људском животу. Неки аутори сматрају да су настале са настанком универзума, да су одувек биле ту и да ће увек и бити ту, а да је на нама да их откријемо.

У овом раду су приказане само неке од многобројних константи, које имају огромну примену. Приказани су начини њиховог открића и разни алгоритми, попут Тејлоровог развоја и верижних разломака, помоћу којих их је могуће одредити. Константе су углавном ирационални трансцедентни бројеви, тј. имају бесконачно много цифара, те је до њихове праве вредности немогуће доћи. Данас постоје разни компјутерски програми који омогућавају лако и брзо одређивање ових константи са великим бројем цифара. У овом раду су приказани докази о ирационалности и трансцедентности за неке константе попут константи e и π, а за неке константе као што је Каталанова константа ирационалност још увек није доказана. Поред математичких доказа у раду је приказана и њихова примена у опису физичких закона, попут закона радиоактивног распада и Њутновог закона хлађења.

8 Литература

[1] Wilson, Robin. Euler′s Pioneering Equation : The most beautiful theorem in mathematics. Oxford University Press, 2018.

[2] Euler, Leonhard. Mechanica Sive Motus Scientia Analytice Exposita : Instar Supplementi Ad Commentar. Acad. Scient. Imper. Ex typographia academiae scientiarum, 1736.

[3] Huntley, Herbert Edwin. The divine proportion. Courier Corporation, 2012.

[4] Fitzpatrick, Richard. Euclid′s elements of geometry. Euclidis Elementa, 2007.

[5] Finch, Steven R. Mathematical constants. Cambridge university press, 2003.

[6] Duško Letić, Nenad Cakić, Branko Davidivić. Enciklopedija matematičkih konstanti 2011.

[7] Real numbers as infinite decimals and irrationality of $\sqrt{2}$ Klazar, Martin. arXiv preprint arXiv : 0910.5870 2009.

[8] Herceg, Dragoslav and Herceg, Đorđe. Numerička matematika. Stylos, 2003.

[9] Berggren, Lennart and Borwein, Jonathan and Borwein, Peter. Π : A Source Book. Variorum de Rebus Mathematicis Reponsorum Liber VII (1593). Springer, 1997.

[10] АВ Жуков. Вездесущее число «пи». *М.: Едиториал УРСС*, 2004.

[11] Brown, James Ward and Churchill, Ruel V. Complex variables and applications. 2009.

[12] Roselle, B. Development of an Infinite Series Representation for ϕ (the Golden Mean or Golden Ratio), 1999.

[13] Јелена Милојковић. *Златни пресек.* Мастер рад, Математички факултет, Универзитет у Београду, 2009.

[14] Goran Šimić. Riemannova zeta funkcija. Diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku, 2011.

[15] Chaubey, Sneha. The irrationality of $\zeta(3)$ and Apery numbers, PhD thesis. National Institute of Science Education and Research Bhubaneswar, 2012.

[16] Niven, Ivan. A Simple Proof that π is Irrational. Biscuits of Number Theory, 34:111, 2009.

[17] https : //www.iserbia.rs/da − li − ste − znali/tajna − zlatnog − preseka − 2212).

[18] http : //stari.etspupin.edu.rs/files/zlatni − presek.pdf.

[19] Silagadze, ZK. Sums of generalized harmonic series for kids from five to fifteen arXiv preprint arXiv : 1003.3602. 2010.

[20] Bushaw, D and Saunders, Sam C. The Third Constant. Northwest science., 59(2), 1985.

9 Биографија

Јелена Шашић је рођена 20.10.1994. у Шапцу. Основну школу ,,Стојан Новаковић" је завршила у Горњој Врањској 2009. Исте године је уписала Шабачку гимназију, природно-математички смер, коју завршава 2013. године. По завршетку гимназије, 2013. године, уписала је основне академске студије на Природно-математичком факултету у Новом Саду, смер Дипломирани професор математике, а дипломирала је 2020. године. Исте године уписује мастер академске студије, смер Теоријска математика и примене, на Математичком факултету у Београду. Од 2020. године ради као наставник математике у Основној школи ,,Лаза К. Лазаревић" у Варни.