

UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET



Vladislav Grozdanović

**RAZLIČITI PRISTUPI ZA REŠAVANJE
KOŠIJEVIH PROBLEMA OBIČNIH
DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA**

master rad

Beograd, 2022.

Mentor:

dr Marija Mikić, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Jelena Katić, vanredni profesor
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Zorica Dražić, docent
Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane:

Naslov master rada:

RAZLIČITI PRISTUPI ZA REŠAVANJE KOŠIJEVIH PROBLEMA OBIČNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Sažetak:

Diferencijalne jednačine su jedna od najprimenjenijih grana matematike. Mnoge od njih se ne mogu rešiti analitički ili je njihovo rešavanje veoma teško, stoga su neophodne alternativne metode kojima se može ispitati postojanje i jedinstvenost rešenja, skicirati grafik rešenja ili odrediti njihovo približno rešenje. U ovom radu će biti posmatrani različiti pristupi u rešavanju Košijevih problema običnih diferencijalnih jednačina, uglavnom prvog reda, mada se većina metoda o kojima će biti reči može koristiti i za jednačine višeg reda, kao i za sisteme diferencijalnih jednačina.

U radu će najpre biti objašnjeni osnovni pojmovi vezani za diferencijalne jednačine. Nakon toga će biti formulisani osnovni pojmovi i teoreme kvalitativne analize, na osnovu kojih će biti ispitana egzistencija i jedinstvenost rešenja, ali i biti rešeno nekoliko primera Košijevih problema. Zatim će na nekoliko primera biti ilustrovan značaj geometrijskog pristupa, gde se skiciranjem polja pravaca može, u nekim slučajevima, sasvim dobro proceniti izgled integralne krive, odnosno skicirati grafik rešenja. Najveći deo rada je posvećen aproksimativnim metodama, koje se u praksi najčešće i koriste. Prvo će biti obrađene analitičke aproksimativne metode i to: Pikarova metoda, Tejlorova metoda i metoda stepenih redova. Ovim metodama dobijamo približna, a u nekim slučajevima i tačna rešenja Košijevih problema. Međutim, zbog njihove nepogodnosti za realizaciju na računaru, prednost se uglavnom daje numeričkim metodama. Prva numerička metoda koju ćemo ovde opisati je Ojlerova metoda, koja je najstarija i najjednostavnija numerička metoda za rešavanje Košijevih problema. Nakon toga biće opisane metode tipa Runge-Kuta, koje su zapravo generalizacija Ojlerove metode i koje su nešto efikasnije. Biće obrađene i metode konačnih razlika, koje su najefikasnije od pomenutih. Na kraju će biti reči i o stabilnosti navedenih numeričkih metoda. Sve opisane metode biće praćene odgovarajućim primerima i ilustracijama, a neki primeri Košijevih problema biće rešeni različitim metoda, da bi na njima bila upoređena njihova efikasnost.

Ključne reči:

diferencijalne jednačine, Košijev problem, analitičke metode, numeričke metode

Title:**DIFFERENT APPROACHES FOR SOLVING INITIAL VALUE PROBLEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS****Summary:**

Differential equations are one of the most applicable fields of mathematics. Many of them cannot be solved analytically, or their solution is very difficult to get, therefore alternative methods are needed, which could be used to determine existence and uniqueness of the solution, to sketch the graph of the solution or to find the approximate solution. In this thesis, we will observe different approaches for solving initial value problems of ordinary differential equations, mostly of first order, although most of the methods discussed in this thesis can be used for higher order differential equations and systems of differential equations.

At the beginning of this thesis we will explain basic notions of differential equations. After that we will formulate basic notions and theorems of qualitative analysis and use them to determine the existence and uniqueness of solutions, and also to solve several examples of initial value problems. Then, through several examples we will illustrate the significance of the geometric approach, where by sketching the slope field we can, in some cases, very well assess the integral curve, or sketch the graph of the solution. The largest part of this thesis will be dedicated to approximative methods, which are the most commonly used in practice. First we will describe analytical approximative methods, such as Picard's method, Taylor's method and power series method. These methods give us approximate, and in some cases exact solutions. However, because they are unsuited for computer calculation, advantage is mostly given to numerical methods. First numerical method described here is Euler's method, which is the oldest and the simplest numerical method for solving initial value problems. Then we will move on to Runge-Kutta methods, which are a generalization of Euler's method, and are somewhat more efficient. After that we will describe finite differences methods, the most efficient methods of the ones mentioned. Lastly, we will discuss the stability of these numerical methods. All described methods will be accompanied by adequate examples and illustrations, and some examples of initial value problems will be solved by different methods, in order to compare their effectiveness.

Key words:

differential equations, initial value problems, analytical methods, numerical methods

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Kvalitativna analiza	4
3	Geometrijski pristup	9
4	Analitičke metode	13
4.1	Metoda uzastopnih aproksimacija (Pikarova metoda)	13
4.2	Metoda Tejlorovog razvoja	16
4.3	Metoda stepenih redova	18
5	Numeričke metode	23
5.1	Ojlerova metoda	23
5.2	Metode tipa Runge-Kuta	31
5.3	Metode konačnih razlika	36
5.3.1	Milnova metoda	37
5.3.2	Adamsove formule	39
5.4	Stabilnost numeričkih algoritama	41
6	Zaključak	43
	Literatura	44

1 Uvod

Diferencijalne jednačine su jedna od grana matematike sa najširoom primenom koja se ogleda u gotovo svim sferama svakodnevnog života. Mnoge diferencijalne jednačine se ne mogu rešiti analitički, stoga se javila potreba da se odredi približno rešenje ili približno skicira grafik rešenja. Čak i kada se mogu rešiti analitički, mogu imati rešenje u obliku koje je toliko računski zahtevno da se i u tom slučaju pribegava računanju približnog rešenja. U ovom radu će biti posmatrani različiti pristupi u rešavanju Košijevih problema: analitički, geometrijski, kvalitativnom i numeričkom analizom. Pre toga, uvedimo neke osnovne pojmove. Sledeće definicije mogu se naći u [1, 2].

Definicija 1.1. Neka je $D \subset \mathbb{R}^{n+2}$, D otvoren skup i neka je data funkcija $f : D \rightarrow \mathbb{R}$. Jednačina:

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1.1)$$

gde je $y = y(x)$ nepoznata funkcija i u kojoj figuriše bar jedan izvod nepoznate funkcije y , jeste **obična diferencijalna jednačina**. Red diferencijalne jednačine određen je redom najvišeg izvoda nepoznate funkcije koji se u njoj pojavljuje.

Iako se neke od metoda o kojima će biti reči u ovom radu mogu primeniti i na diferencijalne jednačine višeg reda, kao i na sisteme diferencijalnih jednačina, ovde ćemo se uglavnom baviti diferencijalnim jednačinama prvog reda, a možemo ih videti u dva oblika:

- opšti oblik diferencijalne jednačine prvog reda

$$F(x, y, y') = 0; \quad (1.2)$$

- normalni oblik diferencijalne jednačine prvog reda

$$y' = f(x, y). \quad (1.3)$$

Definicija 1.2. Funkcija $y = \varphi(x)$ jeste **rešenje diferencijalne jednačine** (1.3) na intervalu (a, b) ako je diferencijabilna na (a, b) i zadovoljava jednačinu (1.3) na tom intervalu. Kriva u ravni xOy koja je grafik rešenja jednačine (1.3) jeste njena **integralna kriva**.

Definicija 1.3. Neka su S i T otvoreni intervali u $\mathbb{R}$. Familija funkcija

$$y = \varphi(x, c),$$

gde je $c \in C \subset \mathbb{R}$, jeste **opšte rešenje** diferencijalne jednačine (1.3) u oblasti $S \times T$ ako za svaku tačku $(x_0, y_0) \in S \times T$ postoji jedinstveno $c_0 \in C$ takvo da je $y = \varphi(x, c_0)$ rešenje diferencijalne jednačine (1.3) koje zadovoljava uslov $y(x_0) = y_0$.

Definicija 1.4. Partikularno rešenje diferencijalne jednačine (1.3) jeste njeno rešenje koje se dobija iz opšteg rešenja za neku fiksiranu (dopustivu) vrednost parametra c .

Definicija 1.5. Rešenje diferencijalne jednačine (1.3) je **singularno rešenje** ako je narušena jedinstvenost rešenja u svakoj njegovoj tački. **Singularna tačka** je tačka u kojoj je narušena jedinstvenost rešenja.

Definicija 1.6. Košijev problem (zadatak)

$$y' = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0$$

predstavlja zadatak u kojem treba odrediti ono rešenje diferencijalne jednačine (1.3) koje zadovoljava uslov $y(x_0) = y_0$. Odnosno, naći integralnu krivu koja prolazi kroz tačku (x_0, y_0) .

Primer 1.1. Jednačina

$$y' = 2\sqrt{y}$$

je jedna diferencijalna jednačina prvog reda u normalnom obliku. Ako njoj pridodamo i uslov da njeno rešenje prolazi kroz zadatu tačku, recimo $(1, 0)$, dobijamo Košijev problem

$$y' = 2\sqrt{y},$$

$$y(1) = 0.$$

Ovde vidimo da imamo trivijalno rešenje, $y(x) = 0$. Ono zadovoljava i diferencijalnu jednačinu i uslov. Treba videti da li postoji još neko rešenje, stoga rešavamo jednačinu:

$$y' = 2\sqrt{y},$$

tj.

$$y^{-1/2}y' = 2.$$

Kada integralimo obe strane, dobijamo

$$\frac{y^{1/2}}{1/2} = 2x + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

odnosno

$$y^{1/2} = x + c_1, \quad c_1 = c/2,$$

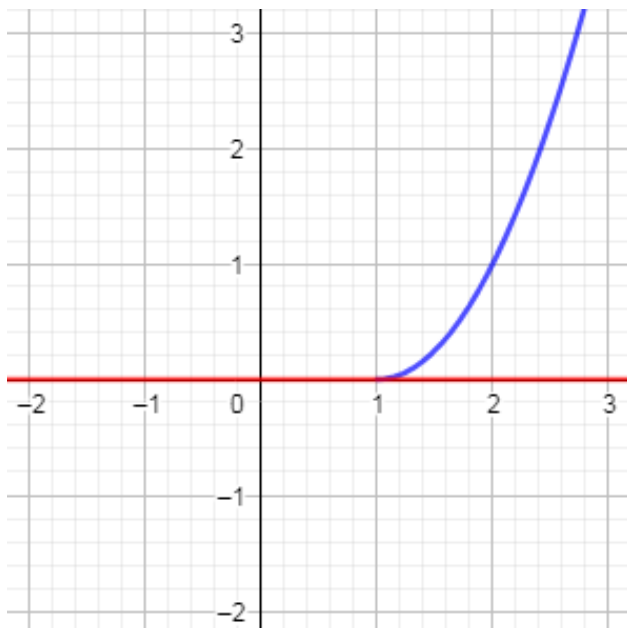
$$y(x) = (x + c_1)^2,$$

što je opšte rešenje ove diferencijalne jednačine, uz uslov da x mora biti veće ili jednako $-c_1$, jer $y^{1/2}$ mora biti nenegativno. Ubacivanjem koordinata tačke $(1, 0)$ umesto x i y dobijamo da je $0 = (1 + c_1)^2$, stoga je $c_1 = -1$. Zamenom ove vrednosti umesto c_1 u opšte rešenje, dobijamo jedno partikularno rešenje

$$y(x) = (x - 1)^2, \quad x \geq 1,$$

koje je rešenje ovog Košijevog problema. Rešenje $y(x) = 0$, koje smo uočili na početku je takođe Košijevo rešenje, te zaključujemo da posmatrani Košijev problem nema jedinstveno

rešenje. Posmatrano rešenje je i singularno rešenje diferencijalne jednačine, jer je narušena jedinstvenost rešenja u svakoj njegovoj tački. Naime, posmatrajmo proizvoljnu tačku $(x_0, 0)$ integralne krive $y(x) = 0$. Ako zamenimo njene koordinate u opšte rešenje, dobijamo da je $0 = (x_0 - c)^2$, odakle sledi da je $c = x_0$, pa kroz tačku $(x_0, 0)$ integralne krive $y(x) = 0$ prolazi integralna kriva $y(x) = (x - x_0)^2$, gde je $x \geq x_0$, čime je narušena jedinstvenost rešenja u tački $(x_0, 0)$ integralne krive $y(x) = 0$. Osim toga, svaku od integralnih krivih iz opšteg rešenja možemo lepljenjem produžiti sa leve strane duž prave $y(x) = 0$, pa tako kroz tačku $(x_0, 0)$ prolazi beskonačno mnogo integralnih krivih ove diferencijalne jednačine.



Slika 1.1: Singularno i partikularno rešenje jednačine $y' = 2\sqrt{y}$

Na slici 1.1 prikazano je singularno rešenje, prava $y(x) = 0$, kao i jedno od partikularnih rešenja ovog Košijevog problema, kriva $y(x) = (x - 1)^2$, $x \geq 1$.

2 Kvalitativna analiza

Posmatrajmo sledeći Košijev problem:

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{2.1}$$

Za rešavanje ovog problema značajna su nam sledeća tri pitanja:

- Egzistencija rešenja: da li postoji rešenje Košijevog problema?
- Jedinstvenost rešenja: ako rešenje postoji, da li je jedinstveno?
- Interval egzistencije: na kom maksimalnom intervalu je definisano rešenje?

U potrazi za odgovorima na ova pitanja pomoći će nam sledeća tvrđenja, koja su preuzeta iz [1, 3].

Lema 2.1. (O ekvivalenciji) Neka je funkcija f definisana na otvorenom skupu D , gde je $D \subset \mathbb{R}^2$ i neka $(x_0, y_0) \in D$. Funkcija $y = \varphi(x)$, gde je $\varphi \in C^1(a, b)$, jeste rešenje Košijevog problema ako i samo ako je funkcija $y = \varphi(x)$, gde je $\varphi \in C(a, b)$, rešenje integralne jednačine

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.\tag{2.2}$$

Neka je G otvoren skup i $(x_0, y_0) \in G$ proizvoljna tačka. Tada postoje $a, b > 0$ takvi da je $P = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| \leq a, |y - y_0| \leq b\} \subset G$.

Teorema 2.1. (Peanova teorema) Neka je $f \in C(P)$. Tada za svako $(x_0, y_0) \in P$, postoji rešenje $y = \varphi(x)$ Košijevog problema (2.1) koje je definisano u nekoj okolini tačke x_0 .

Definicija 2.1. Neka je $f : D \rightarrow \mathbb{R}, D \subset \mathbb{R}^2$. Funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov na D u odnosu na promenljivu y ako postoji konstanta $L > 0$ takva da za sve $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ važi

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|.$$

Tada pišemo $f \in Lip(D; L)$.

Teorema 2.2. Neka su $f, f'_y \in C(D)$. Tada funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov u odnosu na promenljivu y na svakom konveksnom kompaktu u D .

Teorema 2.3. (Pikarova teorema) Neka je $f \in C(P)$ i neka je f Lipšicova u odnosu na y , tj. $f \in Lip(P; L)$. Tada za svako $(x_0, y_0) \in P$ postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema (2.1) na intervalu $I = [x_0 - h, x_0 + h]$, gde je $0 < h < \min\{a, \frac{b}{M}, \frac{1}{L}\}$,

$$M = \max_{(x, y) \in P} |f(x, y)|.$$

Dokaz: Posmatrajmo ovakav prostor:

$$X_h = \{y \in C[x_0 - h, x_0 + h] : |x - x_0| \leq h, |y(x) - y(x_0)| \leq b\};$$

$$d(y_1, y_2) = \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y_1(x) - y_2(x)|, \quad y_1, y_2 \in X_h.$$

Prostor (X_h, d) je kompletan metrički prostor, jer je X_h zatvoren podskup kompletnog metričkog prostora neprekidnih funkcija na intervalu $[x_0 - h, x_0 + h]$. Definišimo operator $A : X_h \rightarrow X_h$. Za svako y iz skupa X_h i svako x iz intervala $[x_0 - h, x_0 + h]$:

$$A(y)(x) := y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Za svako y iz X_h sledi da i $A(y)$ pripada X_h jer je za svako $x \in I$

$$|A(y)(x) - y_0| = \left| \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt \right| \leq \int_{x_0}^x |f(t, y(t))| dt \leq M|x - x_0| \leq Mh < b,$$

iz čega sledi da $A(y)$ pripada X_h . Za $\forall y_1, y_2 \in X_h$:

$$\begin{aligned} d(A(y_1), A(y_2)) &= \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt - \int_{x_0}^x f(t, y_2(t)) dt \right| \\ &= \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| \int_{x_0}^x (f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))) dt \right| \\ &\leq \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| \int_{x_0}^x |f(t, y_1(t)) - f(t, y_2(t))| dt \right| \\ &\leq \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} \left| \int_{x_0}^x L \cdot |y_1(t) - y_2(t)| dt \right| \\ &\leq L \cdot h \cdot \max_{x \in [x_0 - h, x_0 + h]} |y_1(t) - y_2(t)| \\ &= L \cdot h \cdot d(y_1, y_2) = q \cdot d(y_1, y_2). \end{aligned}$$

Kako je $q = L \cdot h < 1$, preslikavanje A je kontrakcija, pa po Banahovoj teoremi o fiksnoj tački sledi da postoji tačno jedna fiksna tačka tog preslikavanja. Ta tačka je jedino rešenje integralne jednačine (2.2), pa na osnovu Leme o ekvivalenciji sledi da je to i jedinstveno rešenje Košijevog problema (2.1). Ipak, nije očigledno da je svako rešenje Košijevog problema (2.1) koje je definisano na $[x_0 - h, x_0 + h]$ sadržano u $(y_0 - b, y_0 + b)$. Neka je y_1 rešenje Košijevog problema (2.1) koje je definisano na $[x_0 - h, x_0 + h]$. Pretpostavimo da ne važi $y_1 \in (y_0 - b, y_0 + b)$ za svako x (bez umanjenja opštosti pretpostavićemo da to ne važi za neko $x \in (x_0, x_0 + h)$). Neka je $x_1 \in (x_0, x_0 + h)$ prvi trenutak takav da $y_1(x_1)$ ne pripada $(y_0 - b, y_0 + b)$. Kako već znamo da je $y = y(x)$ jedinstveno rešenje Košijevog problema (2.1), takvo da $x \in [x_0 - h, x_0 + h]$, $y \in (y_0 - b, y_0 + b)$, to je $y(x) = y_1(x)$, za svako $x \in [x_0, x_1]$, a iz neprekidnosti rešenja sledi da je $y_1(x_1) = y(x_1) = y_0 + b$ (ili je jednako $y_0 - b$, ali bez narušavanja opštosti možemo uzeti $y_0 + b$). Međutim, kako $y(x_1) \in (y_0 - b, y_0 + b)$, dolazimo do kontradikcije.

Posmatrajmo sada neke primere Košijevih problema, jer želimo da korišćenjem navedenih teorema dođemo do odgovora na pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja.

Primer 2.1. Neka je dat Košijev problem

$$y' = |y|,$$

$$y(1) = 0.$$

Funkcija $y(x) = 0$ je očigledno rešenje, pa možemo proveriti da li je funkcija f lokalno Lipšicova u odnosu na promenljivu y :

$$|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq L \cdot |y_2 - y_1|$$

$$||y_2| - |y_1|| \leq L \cdot |y_2 - y_1|,$$

što važi za $L = 1$ za svako $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, stoga funkcija $f(x, y) = |y|$ zadovoljava Lipšicov uslov u odnosu na promenljivu y , a kako je i neprekidna, na osnovu Pikarove teoreme sledi da ovaj Košijev problem ima jedinstveno rešenje.

Primer 2.2. Neka je dat Košijev problem

$$y' = y^2,$$

$$y(1) = 0.$$

Ponovo imamo $y(x) = 0$ kao očigledno rešenje, pa proveravamo da li je jedinstveno:

$$|y_2^2 - y_1^2| \leq L \cdot |y_2 - y_1|,$$

tj. da li postoji $L > 0$ takvo da

$$|y_2 + y_1| \leq L,$$

što će važiti u okolini tačke $(1, 0)$, recimo na pravougaoniku $[0, 2] \times [-1, 1]$, za $L = 2$. Prema tome, na osnovu Pikarove teoreme, postoji jedinstveno rešenje ovog Košijevog problema. Možemo pokazati da funkcija $f(x, y) = y^2$ lokalno zadovoljava Lipšicov uslov po y i na drugi način, tako što ćemo naći njen parcijalni izvod po promenljivoj y , $f'_y(x, y) = 2y$, i videti da su i on i funkcija f neprekidni u $\mathbb{R}^2$, pa na osnovu teoreme 2.2. ta funkcija zadovoljava Lipšicov uslov u odnosu na promenljivu y na svakom konveksnom kompaktu u $\mathbb{R}^2$.

Primer 2.3. Neka je dat Košijev problem

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}},$$

$$y(1) = 0.$$

I ovde imamo trivijalno rešenje $y(x) = 0$, međutim, ovde ne možemo da dokažemo da funkcija $f(x, y) = 3y^{\frac{2}{3}}$ zadovoljava Lipšicov uslov u odnosu na promenljivu y u okolini tačke $(1, 0)$. Ako to pokušamo da uradimo po definiciji, treba da postoji pozitivna konstanta L tako da važi nejednakost

$$|3y_2^{\frac{2}{3}} - 3y_1^{\frac{2}{3}}| \leq L \cdot |y_2 - y_1|,$$

a ovde ne možemo naći takvo L koje bi obezbedilo da nejednakost važi u nekoj okolini tačke $(1, 0)$. Takođe, parcijalni izvod funkcije f po y

$$(3y^{2/3})'_y = \frac{2}{\sqrt[3]{y}}$$

teži beskonačnosti kada $y \rightarrow 0$, stoga nije neprekidan u $y = 0$, pa ne možemo iskoristiti teoremu 2.2. te ćemo jednačinu rešiti analitički:

$$y' = 3y^{2/3}$$

$$\frac{1}{3}y^{-2/3}y' = 1$$

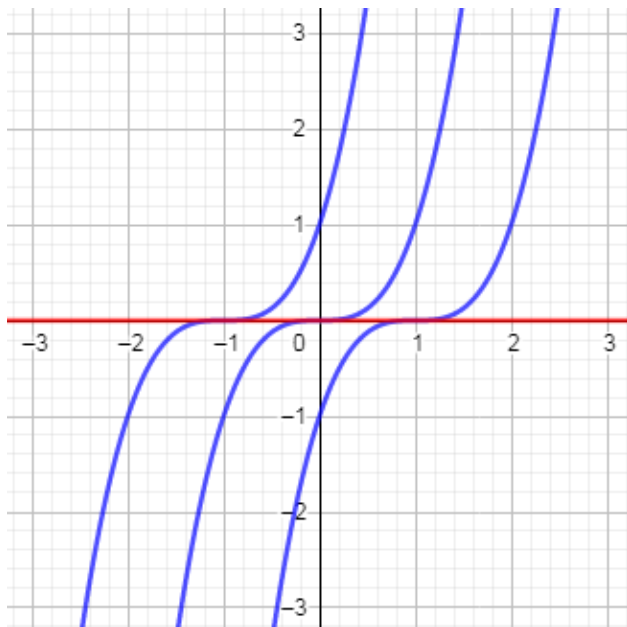
$$y^{1/3} = x + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = (x + c)^3, \quad c \in \mathbb{R}$$

Za $(x, y) = (1, 0)$, $c = -1$, te dobijamo partikularno rešenje

$$y(x) = (x - 1)^3,$$

koje zadovoljava početni uslov. Zaključujemo da posmatrani Košijev problem ima više rešenja. Uzmimo sada proizvoljnu tačku $(x_0, 0)$ na pravoj $y(x) = 0$. Ako koordinate te tačke zamenimo u opšte rešenje, imamo da je $0 = (x_0 + c)$, odnosno $c = -x_0$, pa kroz tačku $(x_0, 0)$ prolazi i integralna kriva partikularnog rešenja $y(x) = (x - x_0)^3$.



Slika 2.1: Singularno i partikularna rešenja diferencijalne jednačine $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$

Na slici 2.1 prikazano je singularno rešenje $y(x) = 0$, kao i partikularna rešenja $y(x) = (x + 1)^3$, $y(x) = x^3$ i $y(x) = (x - 1)^3$. Slično kao u primeru 1.1. od svake integralne krive iz opšteg rešenja lepljenjem možemo praviti beskonačno mnogo novih integralnih krivih. Prema tome, rešenje $y(x) = 0$ nije jedinstveno, već jedno singularno rešenje Košijevog

problema, jer kroz svaku njegovu tačku prolazi beskonačno mnogo različitih integralnih krivih. Na primer, kroz tačku $(1, 0)$ prolazi integralna kriva rešenja $y(x) = (x - 1)^3$, ali i integralna kriva rešenja

$$y(x) = \begin{cases} (x - 1)^3 & , x \leq 1 \\ 0 & , x > 1, \end{cases}$$

kao i

$$y(x) = \begin{cases} x^3 & , x \leq 0 \\ 0 & , x \in (0, 1) \\ (x - 1)^3 & , x \geq 1 \end{cases}$$

i sva tri rešenja zadovoljavaju uslov $y(1) = 0$. Jasno je da na taj način možemo „napraviti” beskonačno mnogo rešenja čije integralne krive prolaze kroz istu tačku, tj. posmatrani Košijev problem ima beskonačno mnogo rešenja.

3 Geometrijski pristup

U nekim slučajevima kada je diferencijalnu jednačinu teško rešiti analitički, možemo koristiti i geometrijski pristup. Recimo da imamo diferencijalnu jednačinu prvog reda zadatu u normalnom obliku

$$y' = f(x, y).$$

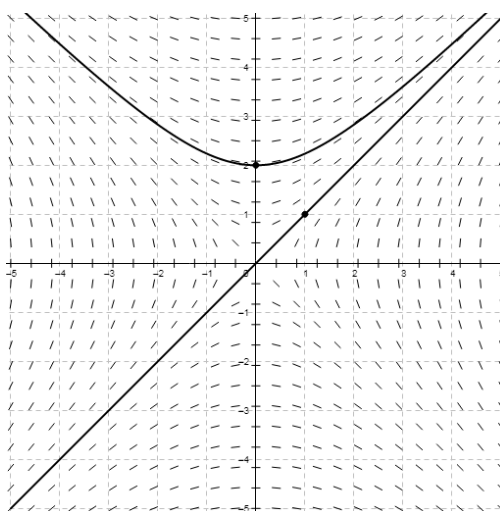
Primetimo da je vrednost funkcije $f(x_0, y_0) = y'(x_0)$ nagib tangente integralne krive u tački (x_0, y_0) . Uređenu trojku $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ nazivamo **linijski element** i predstavljamo ga na crtežu kao mali deo tangente krive rešenja u tački (x_0, y_0) . Duži koje predstavljaju linijske elemente ne mogu da se seku, jer je nagib tangente u svakoj tački jedinstveno određen. Skup svih linijskih elemenata zovemo **polje pravaca**. Krivu na kojoj svi linijski elementi imaju isti nagib zovemo **izoklina**. Na crtežu sa dovoljno linijskih elemenata, u nekim slučajevima, možemo sasvim dobro proceniti izgled integralne krive i na osnovu toga skicirati integralnu krivu rešenja jednačine, odnosno Košijevog problema.

Slike sa poljima pravaca u ovom poglavlju izrađene su u GeoGebri, u programu [4]. O primeni ovog softvera u skiciranju polja pravaca i rešavanju diferencijalnih jednačina generalno može se pročitati ovde [5, 6].

Primer 3.1. Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = \frac{x}{y}.$$

Jednačine izoklina će u ovom slučaju biti $\frac{x}{y} = c$, $c \in \mathbb{R}$. Fiksiranjem parametra c dobijamo geometrijska mesta tačaka (u ovom slučaju prave) u kojima polje pravaca ima datu vrednost: $c = 0$, $x = 0$; $c = 1$, $y = x$; $c = -1$, $y = -x$; $c \rightarrow \infty$, $y \rightarrow 0$; $c = 2$, $y = \frac{1}{2}x$; $c = -2$, $y = -\frac{1}{2}x$.



Slika 3.1: Polje pravaca za primer 3.1.

Sa slike 3.1 se na osnovu linijskih elemenata vidi da će rešenja ove diferencijalne jednačine biti hiperbole čija je jednačina $y^2 - x^2 = c$, $c \neq 0$ i poluprave $y = \pm x$, za $x > 0$ i $x < 0$.

Na slici su prikazane i integralne krive Košijevih problema koje dobijamo ako posmatranoj diferencijalnoj jednačini dodamo početni uslov $y(1) = 1$, odnosno $y(0) = 2$. I zaista, ako jednačinu rešimo analitički, videćemo da je skup rešenja:

$$y' = \frac{x}{y}$$

$$yy' = x$$

$$\frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c, \quad c \in \mathbb{R}$$

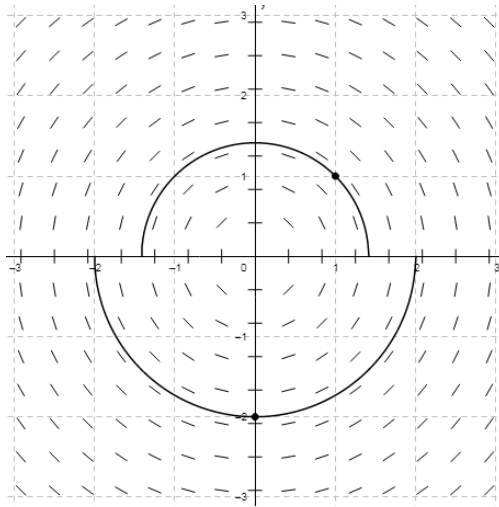
$$x^2 - y^2 = c_1, \quad c_1 \in \mathbb{R}.$$

Ako je $(x, y) = (1, 1)$, onda je $c_1 = 0$, pa je rešenje poluprava $y(x) = x, x > 0$. Ako je $(x, y) = (0, 2)$, onda je $c_1 = -4$, pa je rešenje kriva $y(x) = \sqrt{x^2 + 4}$. Vidimo na slici da obe integralne krive prate linijske elemente.

Primer 3.2. Neka je data diferencijalna jednačina

$$y' = -\frac{x}{y}.$$

Jednačine izoklina su $-\frac{x}{y} = c, c \in \mathbb{R}$. Fiksiranjem vrednosti parametra c dobijamo: $c = 0, x = 0$; $c = 1, y = -x$; $c = -1, y = x$; $c = 2, y = -\frac{1}{2}x$; $c = -2, y = \frac{1}{2}x$; $c \rightarrow \infty, y \rightarrow 0$.



Slika 3.2: Polje pravaca za primer 3.2.

Na slici 3.2 linijski elementi daju obrise kružnica. Dakle, zaključujemo da će integralne krive biti polukružnice čije su jednačine $y = \pm\sqrt{c - x^2}, c \in \mathbb{R}^+$, što se lako može pokazati i analitički, slično kao u prethodnom primeru. Ako ovoj diferencijalnoj jednačini dodamo početni uslov $y(1) = 1$, onda imamo da je $c = 2$, pa je rešenje tog Košijevog problema polukružnica $y(x) = \sqrt{2 - x^2}, x \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$. Za početni uslov $y(0) = -2$, imamo da je $c = 4$, pa je rešenje polukružnica $y(x) = -\sqrt{4 - x^2}, x \in [-2, 2]$. Kao i u prethodnom primeru, vidimo da obe integralne krive prate linijske elemente.

Primer 3.3. Neka je data diferencijalna jednačina

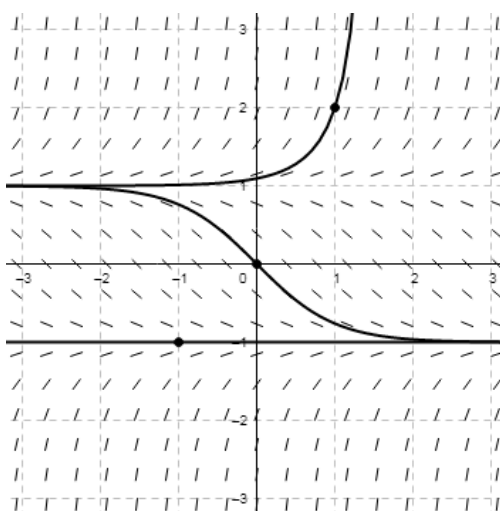
$$y' = y^2 - 1.$$

Jednačine izoklina su $y^2 - 1 = c$. Fiksiranjem vrednosti parametra c dobijamo:

$$c = 0, y = \pm 1; \quad c = 1, y = \pm\sqrt{2}; \quad c = -1, y = 0; \quad c = 2, y = \pm\sqrt{3}.$$

Za $c < -1$ jednačina $c = y^2 - 1$ nema realnih rešenja. U slučaju kada u funkciji $f(x, y)$ figuriše samo jedna promenljiva, ponekad je lakše umesto zamene vrednosti za konstantu c , zameniti vrednosti za tu promenljivu, pa računati c . Zamenom određenih vrednosti za y , videćemo koji nagib imaju integralne krive na određenoj horizontalnoj pravoj, tj.

$$y = \pm 1, c = 0; \quad y = \pm 2, c = 3; \quad y = \pm 4, c = 15; \quad y = \pm \frac{1}{2}, c = -\frac{3}{4}.$$



Slika 3.3: Polje pravaca za primer 3.3.

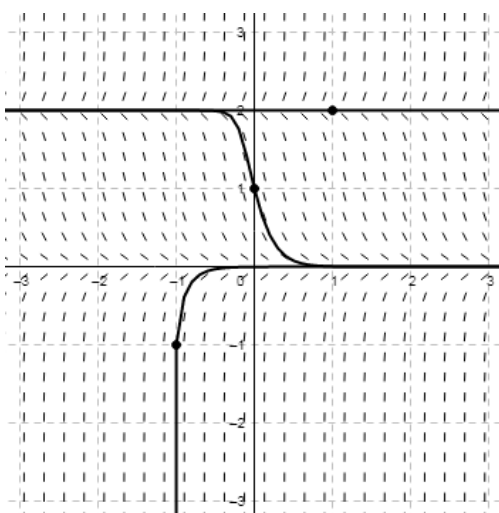
Na slici 3.3 na osnovu linijskih elemenata zaključujemo da su u poluravnima $y > 1$ i $y < -1$, integralne krive rastuće funkcije, čije su asimptote prave $y = 1$ i $y = -1$ respektivno, koje su i same rešenja. U delu između te dve prave, integralne krive su opadajuće funkcije čije su asimptote iste prave. Znamo da nijedna integralna kriva ne preseca prave $y = 1$ i $y = -1$, jer je funkcija $f(x, y) = y^2 - 1$ lokalno Lipšicova u odnosu na y , pa na osnovu Pikarove teoreme, kroz svaku tačku može proći samo jedno rešenje, te prave $y = -1$ i $y = 1$ moraju biti asimptote (jer se integralne krive ne mogu ni seći ni dodirivati). Na slici su prikazane i integralne krive koje prolaze kroz tačke $(0, 0)$, $(1, 2)$ i $(-1, -1)$.

Primer 3.4. Posmatrajmo sada diferencijalnu jednačinu

$$y' = y(y^2 + 3)(y - 2).$$

Ovde su jednačine izoklina $c = y(y^2 + 3)(y - 2)$ i vrlo je teško zamenom vrednosti konstante c računati y , pa ćemo menjati y i računati c .

$$y = -2, c = 56; \quad y = -1, c = 12; \quad y = 0, c = 0; \quad y = 0.5, c \approx -2.4; \quad y = 1, c = -4; \\ y = 1.5, c \approx -3.9; \quad y = 2, c = 0; \quad y = 3, c = 36.$$



Slika 3.4: Polje pravaca za primer 3.4.

Na osnovu jednačine izokline imamo da je nagib c jednak nuli kada je $y = 0$ ili $y = 2$, pa će te prave biti integralne krive rešenja jednačine. Za $y \in (0, 2)$, c je negativno, pa će integralne krive između pravih $y = 0$ i $y = 2$ biti opadajuće funkcije. Što je y koordinata neke tačke bliža pomenutim pravama, to će nagib integralne krive u toj tački biti bliži nuli, pa će te prave biti asimptote integralnih krivih. Za $y \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, c je pozitivno, pa su integralne krive u tom delu rastuće i takođe se smanjuje nagib u blizini pravih $y = 0$ i $y = 2$, a dalje od njih se povećava. Sve ovo se može zaključiti i posmatranjem linijskih elemenata na slici 3.4. Na slici su prikazane i integralne krive koje prolaze kroz tačke $(0, 1)$, $(1, 2)$ i $(-1, -1)$.

Kao i u prethodnom primeru, funkcija $f(x, y) = y(y^2 + 3)(y - 2)$ i njen parcijalni izvod $f'_y(x, y) = 4y^3 - 6y^2 + 6y - 6$ su neprekidni u $\mathbb{R}^2$, pa na osnovu Pikarove teoreme u okolini svake tačke u $\mathbb{R}^2$ postoji jedinstveno rešenje, tako da se integralne krive ne seku i zato smo znali da su prave $y = 0$ i $y = 2$ asimptote.

4 Analitičke metode

Za Košijevе probleme koji se ne mogu rešiti analitički, ili je za praktične svrhe njihovo rešavanje previše komplikovano, koristimo aproksimativne metode, kojima nalazimo njihova približna rešenja. U pojedinim slučajevima, one mogu dati i tačna rešenja Košijevog problema. Aproksimativne metode mogu biti analitičke i numeričke. Analitičkim metodama rešenje Košijevog problema, ukoliko je to moguće, dobijamo kao graničnu vrednost niza funkcija $y_n(x)$, pri čemu se funkcije $y_n(x)$ izražavaju elementarnim funkcijama i njihovim integralima. Ako se zadržimo na nekom konačnom n , dobijamo približnu vrednost rešenja u nekoj okolini tačke iz početnog uslova. U nastavku ćemo navesti neke od njih i primeniti ih na nekim primerima. Teorijski deo ovog poglavlja najvećim delom je preuzet iz [7].

4.1 Metoda uzastopnih aproksimacija (Pikarova metoda)

Neka je dat Košijev problem

$$\begin{aligned}y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Ako je funkcija f neprekidna i ako je y rešenje Košijevog problema, onda na osnovu leme o ekvivalenciji važi

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y(t)) dt.$$

Na osnovu ove jednačine, definišemo niz funkcija $y_n(x)$ rekurentnom formulom

$$\begin{aligned}y_0(x) &= y_0, \\ y_{n+1}(x) &= y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_n(t)) dt, \quad n \in \mathbb{N}_0.\end{aligned}$$

Ukoliko funkcija f zadovoljava Lipšicov uslov po promenljivoj y , na osnovu Pikarove teoreme sledi da niz funkcija y_n konvergira ka tačnom rešenju Košijevog problema u dovoljno malom intervalu oko tačke x_0 . Zaustavljanjem na nekom n dobijamo približno rešenje u nekoj okolini tačke x_0 . Greška tog približnog rešenja na traženom intervalu $[a, b]$ (gde se obično uzima da je $a = x_0$) određena je sa

$$|y_n(x) - y(x)| \leq \max_{x \in [a, b]} |y_n(x) - y_{n-1}(x)|.$$

Naravno, ovu metodu ima smisla koristiti samo ako se integrali u rekurentnoj formuli mogu rešiti analitički. Čak i tada, problem nastaje zbog toga što sa porastom n , podintegralne funkcije postaju sve složenije. Zbog toga se u praksi ova metoda uglavnom koristi za nalaženje približnih vrednosti u prvim nekoliko čvorova potrebnih za neke numeričke metode o kojima će biti reči kasnije.

Primer 4.1. Neka je dat Košijev problem

$$y' = 2x(y + 1),$$

$$y(0) = 0.$$

Ovde su funkcije $f(x, y) = 2x(y + 1)$ i $f'_y(x, y) = 2x$ neprekidne u $\mathbb{R}^2$, pa funkcija f lokalno zadovoljava Lipšicov uslov i možemo primeniti Pikarovu metodu. Niz funkcija dobijenih rekurentnom formulom će biti sledeći:

$$\begin{aligned} y_0(x) &= 0, \\ y_1(x) &= \int_0^x 2t dt = x^2, \\ y_2(x) &= \int_0^x 2t(1 + t^2) dt = x^2 + \frac{x^4}{2}, \\ y_3(x) &= \int_0^x 2t \left(1 + t^2 + \frac{t^4}{2}\right) dt = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6}, \\ &\vdots \\ y_n(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{x^{2k}}{k!}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Znamo da je Maklorenov razvoj funkcije e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots$$

stoga je

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots$$

odnosno

$$e^{x^2} - 1 = x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \dots$$

pa će niz funkcija $y_n(x)$ u okolini tačke $x_0 = 0$ konvergirati ka funkciji

$$y(x) = e^{x^2} - 1,$$

što je rešenje ovog problema.

Primer 4.2. Vratimo se na primer 1.1.

$$y' = 2\sqrt{y},$$

$$y(1) = 0.$$

Prvo treba proveriti da li funkcija $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ zadovoljava Lipšicov uslov u okolini tačke $(1, 0)$. Vidimo da izvod $f'_y(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y}}$ nije neprekidan u okolini tačke $(1, 0)$, pa ne možemo primeniti teoremu 2.2. Ako probamo po definiciji, tada treba da važi

$$|2\sqrt{y_1} - 2\sqrt{y_2}| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$$

$$2|\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2}| \leq L \cdot |(\sqrt{y_1} - \sqrt{y_2})(\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2})|$$

$$2 \leq L \cdot |\sqrt{y_1} + \sqrt{y_2}|,$$

a ovde ne postoji takva konstanta L za koju će ova nejednakost važiti za svako y_1 i y_2 u okolini nule, pa funkcija ne zadovoljava Lipšicov uslov. Dakle, ovde ne znamo da li ćemo ovom metodom dobiti niz funkcija koji konvergira ka tačnom rešenju, ali pogledajmo ipak šta će se desiti ako pokušamo da je primenimo. Prva funkcija u nizu je $y_0(x) = 0$. Ostale dobijamo po rekurentnoj formuli:

$$y_1(x) = 0 + \int_1^x 0 \cdot dt = 0$$

i odmah vidimo da će svaka funkcija u nizu imati oblik $y_n(x) = 0, \forall n \in \mathbb{N}_0$, pa je rešenje upravo funkcija $y(x) = 0$. Kao što smo videli ranije, ovo jeste rešenje ovog Košijevog problema, ali singularno, te postoji i beskonačno mnogo drugih rešenja koja zadovoljavaju početni uslov, što iz ovog postupka ne bismo saznali, tako da primena ove metode na ovom konkretnom primeru nema smisla.

Primer 4.3. Neka je dat Košijev problem

$$y' = x^2 y - 1,$$

$$y(0) = 1.$$

Vidimo da su funkcije $f(x, y)$ i $f'_y(x, y) = x^2$ neprekidne u $\mathbb{R}^2$, pa primenjujemo Pikarovu metodu. Niz funkcija će biti sledeći:

$$y_0(x) = 1,$$

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x (t^2 - 1) dt = 1 - x + \frac{x^3}{3},$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x \left(t^2 \left(1 - t + \frac{t^3}{3} \right) - 1 \right) dt = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{18},$$

$$\vdots$$

Ovde ne možemo tačno odrediti analitički izraz funkcije kojoj ovaj niz funkcija konvergira, ali zaustavljanjem na nekom n , u zavisnosti od toga koja nam tačnost odgovara, možemo dobiti približno rešenje problema u nekoj okolini tačke iz početnog uslova. Na primer, recimo da se traži približno rešenje na intervalu $[0, 1]$, sa tačnošću $\epsilon = 0.2$. Zaustavljanjem na prvoj iteraciji, dobijamo ocenu greške

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| 1 - x + \frac{x^3}{3} - 1 \right| \approx 0.67,$$

dok je posle druge iteracije ocena greške

$$\max_{x \in [0, 1]} \left| 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^6}{18} - 1 + x - \frac{x^3}{3} \right| \approx 0.19,$$

tako da nam približno rešenje $y_2(x)$ u ovom slučaju odgovara.

4.2 Metoda Tejlorovog razvoja

Ideja ove metode je da rešenje Košijevog problema (4.1) tražimo u vidu Tejlorovog razvoja funkcije y . Ovu metodu koristimo ukoliko je funkcija $f(x, y)$ analitička u tački (x_0, y_0) .

Definicija 4.1. Funkcija $f(x, y)$ je analitička u tački (x_0, y_0) ako se u nekoj njenoj okolini može predstaviti konvergentnim stepenim redom.

Teorema 4.1. Ako je funkcija $f(x, y)$ analitička u tački (x_0, y_0) , tada Košijev problem (4.1) ima jedinstveno rešenje koje je analitička funkcija u nekoj okolini tačke x_0 .

Pretpostavimo da je funkcija $f(x, y)$ analitička u tački (x_0, y_0) . Tada možemo naći sve izvode funkcije y u okolini tačke x_0 :

$$\begin{aligned}y'(x_0) &= f(x_0, y_0), \\y''(x_0) &= f'_x(x_0, y_0) + f'_y(x_0, y_0)y'(x_0), \\y'''(x_0) &= f''_{xx}(x_0, y_0) + 2f''_{xy}(x_0, y_0)y'(x_0) + f''_{yy}(x_0, y_0)(y'(x_0))^2 + f'_y(x_0, y_0)y''(x_0), \\&\vdots\end{aligned}$$

Te izvode možemo iskoristiti da nađemo približno rešenje y_n (oblika Tejlorovog razvoja funkcije y)

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k,$$

za $|x - x_0| < R$, gde je R poluprečnik konvergencije reda

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

Na osnovu teoreme 4.1. ovo će biti jedinstveno rešenje Košijevog problema (4.1). Greška kod ove metode se ocenjuje greškom odsecanja Tejlorovog razvoja.

Primer 4.4. Neka je dat Košijev problem

$$y' = y^2,$$

$$y(0) = 1.$$

Funkcija $f(x, y) = y^2$ je analitička u $\mathbb{R}^2$, dakle ovde je opravdano koristiti ovu metodu. Tražimo vrednosti izvoda funkcije y u tački $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned}y' = y^2 &\Rightarrow y'(0) = 1, \\y'' = 2yy' &\Rightarrow y''(0) = 2, \\y''' = 2y'^2 + 2yy'' &\Rightarrow y'''(0) = 6, \\y^{(4)} = 6y'y'' + 2yy''' &\Rightarrow y^{(4)}(0) = 24, \\&\vdots\end{aligned}$$

Kada ove vrednosti uvrstimo u Tejlorov razvoj funkcije y , dobijamo

$$y(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} x^n.$$

Kako je ovo geometrijski red, koji konvergira za $|x| < 1$, dobićemo i analitički oblik rešenja Košijevog problema

$$y(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Primer 4.5. Posmatrajmo ponovo Košijev problem ilustrovan u primeru 4.3.

$$y' = x^2 y - 1,$$

$$y(0) = 1.$$

Funkcija $f(x, y) = x^2 y - 1$ je analitička u $\mathbb{R}^2$, stoga možemo koristiti metodu Tejlorovog razvoja. Tražimo vrednosti izvoda funkcije y u tački $x_0 = 0$.

$$\begin{aligned} y' &= x^2 y - 1 &\Rightarrow & y'(0) = -1, \\ y'' &= 2xy + x^2 y' &\Rightarrow & y''(0) = 0, \\ y''' &= 2y + 4xy' + x^2 y'' &\Rightarrow & y'''(0) = 2, \\ y^{(4)} &= 6y' + 6xy'' + x^2 y''' &\Rightarrow & y^{(4)}(0) = -6, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Kada uvrstimo ove vrednosti u Tejlorov razvoj funkcije y , dobijamo

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Dakle, zaustavljanjem na ovom koraku, dobijamo isto približno rešenje u okolini tačke $x_0 = 0$ kao i Pikarovom metodom. Recimo da će kriterijum zaustavljanja biti kada je maksimum poslednjeg elementa u razvoju na posmatranom segmentu manji od ϵ . Ako se zaustavimo na četvrtom koraku, poslednji element u razvoju je $\frac{x^4}{4}$ a njegov maksimum na $[0, 1]$ je 0.25. U slučaju da je $0.25 < \epsilon$, bilo bi opravdano da se zaustavimo na ovom koraku. U protivnom, pokušali bismo sa sledećim korakom.

Primer 4.6. Vratimo se na Košijev problem iz primera 2.3.

$$y' = 3y^{2/3},$$

$$y(1) = 0.$$

Kako funkcija $f(x, y) = 3y^{2/3}$ nije analitička u tački $(1, 0)$, na osnovu teoreme 4.1. ne možemo ništa zaključiti metodom Tejlorovog razvoja na ovom primeru. U takvim situacijama kada god je moguće treba pokušati analitički rešiti jednačinu ili skicirati polje pravaca i integralne krive geometrijskom metodom.

4.3 Metoda stepenih redova

Ovu metodu koristimo za rešavanje Košijevih problema koji su definisani linearnom diferencijalnom jednačinom, kada se koeficijenti jednačine mogu razviti u stepene redove. Najčešće se primenjuje na linearne diferencijalne jednačine drugog reda, pa zato posmatramo sledeći Košijev problem:

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \quad (4.2)$$

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1. \quad (4.3)$$

Navedimo prvo jednu teoremu koja nam garantuje da rešenje možemo da tražimo u obliku stepenog reda.

Teorema 4.2. Ako su funkcije $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ analitičke u oblasti $|x - x_0| < R$, onda će svako rešenje diferencijalne jednačine (4.2) biti analitička funkcija u oblasti $|x - x_0| < R$.

Pod pretpostavkama teoreme funkcije $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ možemo razviti u stepene redove na posmatranom intervalu. Pretpostavimo, bez umanjavanja opštosti, da je $x_0 = 0$. Tada funkcije $p(x)$, $q(x)$ i $f(x)$ možemo predstaviti u obliku

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Rešenje diferencijalne jednačine tražimo u intervalu u kojem konvergiraju prethodna tri stepena reda i tražimo ga u obliku

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tada je

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

i

$$y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Ako je $x_0 \neq 0$, problem možemo svesti na prethodni uvođenjem smene $x - x_0 = t$.

Kada sve ove razvoje uvrstimo u jednačinu (4.2), dobijamo

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + \left(\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \right) \left(\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n x^n.$$

Kada izjednačimo koeficijente uz odgovarajuće stepene x na obe strane, dobijamo rekurentne veze za koeficijente a_n , pa tako možemo doći do (približnog) opšteg rešenja diferencijalne jednačine.

Primer 4.7. Neka je dat Košijev problem

$$(1 - x^2)y'' - 6xy' - 4y = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Prvo transformišimo diferencijalnu jednačinu u oblik u kojem prepoznamo analitički izraz funkcija $p(x)$ i $q(x)$, tj.

$$y'' - \frac{6x}{1-x^2}y' - \frac{4}{1-x^2}y = 0.$$

Funkcije $p(x) = \frac{-6x}{1-x^2}$ i $q(x) = \frac{-4}{1-x^2}$ su analitičke u oblasti $|x| < 1$, dakle ispunjeni su uslovi teoreme 4.2. Kada funkcije y'' , y' i y u diferencijalnoj jednačini zamenimo odgovarajućim stepenim redovima, dobijamo

$$\begin{aligned} (1-x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - 6x \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} 6n a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} 4a_n x^n &= 0 \\ 2a_2 + 6a_3x + \sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - 6a_1x - & \\ - \sum_{n=2}^{\infty} 6n a_n x^n - 4a_0 - 4a_1x - \sum_{n=2}^{\infty} 4a_n x^n &= 0 \\ 2a_2 - 4a_0 + 6a_3x - 6a_1x - 4a_1x + & \\ + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n)x^n &= 0. \end{aligned}$$

Kada izjednačimo koeficijente kod odgovarajućih stepena sa nulom, dobijamo

$$2a_2 - 4a_0 = 0 \iff a_2 = 2a_0, \quad a_0 \in \mathbb{R}$$

$$6a_3 - 6a_1 - 4a_1 = 0 \iff a_3 = \frac{5}{3}a_1, \quad a_1 \in \mathbb{R}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 6na_n - 4a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n(n-1) + 6n + 4)a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = (n^2 + 5n + 4)a_n = (n+4)(n+1)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$(n+2)a_{n+2} = (n+4)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$$

$$a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{1\},$$

što će biti rekurentna formula za određivanje svih ostalih koeficijenata.

n	a_n	$a_{n+2} = \frac{n+4}{n+2}a_n$
2	$a_2 = 2a_0$	$a_4 = 3a_0$
3	$a_3 = \frac{5}{3}a_1$	$a_5 = \frac{7}{3}a_1$
4	$a_4 = 3a_0$	$a_6 = 4a_0$
5	$a_5 = \frac{7}{3}a_1$	$a_7 = \frac{9}{3}a_1$

Kada uvrstimo ove koeficijente u rešenje, dobijamo

$$\begin{aligned}
 y &= a_0 + a_1x + 2a_0x^2 + \frac{5}{3}a_1x^3 + 3a_0x^4 + \frac{7}{3}a_1x^5 + 4a_0x^6 + \frac{9}{3}a_1x^7 + \dots = \\
 &= a_0(1 + 2x^2 + 3x^4 + 4x^6 + \dots) + a_1\left(\frac{3}{3}x + \frac{5}{3}x^3 + \frac{7}{3}x^5 + \frac{9}{3}x^7 + \dots\right) = \\
 &= a_0 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n} + a_1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{3}x^{2n+1}.
 \end{aligned}$$

Kada uvrstimo početne uslove, dobijamo da je $a_0 = 1$ i $a_1 = 0$, pa je rešenje Košijevog problema

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n}.$$

Radijus konvergencije ovog reda je

$$R = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n+1}{n+2} \right| = 1.$$

Red očigledno divergira za $x = \pm 1$, dakle konvergira za $x \in (-1, 1)$, što smo već znali na osnovu teoreme 4.2. Na ovom intervalu možemo diferencirati red član po član, pa ćemo to iskoristiti da nađemo sumu reda:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)x^{2n} = \frac{1}{(1-x^2)^2},$$

što će biti analitički oblik rešenja ovog Košijevog problema.

Primer 4.8. Primenimo ovu metodu na primeru linearne diferencijalne jednačine prvog reda koju smo već posmatrali u primerima 4.3. i 4.5. Neka je dat Košijev problem

$$y' = x^2y - 1,$$

$$y(0) = 1.$$

Funkcije $q(x) = -x^2$ i $f(x) = -1$ su analitičke u $\mathbb{R}$, dakle uslovi teoreme 4.2. su ispunjeni, stoga rešenje diferencijalne jednačine tražimo u obliku

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Tada je

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Kada to uvrstimo u jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} x^2 a_n x^n + 1 &= 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 1 &= 0 \\ \sum_{n=-2}^{\infty} (n+3) a_{n+3} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 1 &= 0 \\ a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=0}^{\infty} (n+3) a_{n+3} x^{n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+2} + 1 &= 0 \\ 1 + a_1 + 2a_2 x + \sum_{n=0}^{\infty} ((n+3) a_{n+3} - a_n) x^{n+2} &= 0. \end{aligned}$$

Pošto koeficijent a_0 ne postoji u ovoj jednačini, on može biti proizvoljan, pa ćemo reći da je $a_0 = c$, $c \in \mathbb{R}$. Kada izjednačimo ostale koeficijente kod odgovarajućeg stepena x sa nulom, dobijamo

$$a_1 + 1 = 0 \iff a_1 = -1,$$

$$a_2 = 0,$$

$$(n+3)a_{n+3} - a_n = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

odnosno

$$a_{n+3} = \frac{a_n}{n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}_0,$$

što će biti rekurentna formula za računanje svih ostalih koeficijenata.

n	a_n	$a_{n+3} = \frac{a_n}{n+3}$
0	$a_0 = c$	$a_3 = \frac{c}{3}$
1	$a_1 = -1$	$a_4 = -\frac{1}{4}$
2	$a_2 = 0$	$a_5 = 0$
3	$a_3 = \frac{c}{3}$	$a_6 = \frac{c}{18}$
4	$a_4 = -\frac{1}{4}$	$a_7 = -\frac{1}{28}$

Kada uvrstimo ove koeficijente u rešenje, dobijamo

$$y(x) = c - x + c \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Ako primenimo početne uslove, dobijamo da je $c = 1$, stoga je približno rešenje, u nekoj okolini tačke iz početnog uslova, ponovo funkcija

$$y(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}.$$

Primer 4.9. Neka je data diferencijalna jednačina

$$x^2 y'' + y = 0.$$

Prvo transformišimo jednačinu u željeni oblik (pri uslovu $x \neq 0$)

$$y'' + \frac{1}{x^2} y = 0.$$

Funkcija $q(x) = \frac{1}{x^2}$ nije analitička u $x_0 = 0$, tako da nisu ispunjeni uslovi teoreme 4.2. Pogledajmo ipak šta će se desiti ako primenimo ovu metodu. Kada odgovarajuće stepene redove uvrstimo u jednačinu, dobijamo

$$\begin{aligned} x^2 \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n + a_1 x + a_0 &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} (n(n-1)a_n + a_n) x^n + a_1 x + a_0 &= 0. \end{aligned}$$

Ovde vidimo da će svi koeficijenti biti jednaki nuli, pa dobijamo samo trivijalno rešenje $y(x) = 0$, iako bi trebalo da dobijemo beskonačno mnogo rešenja, jer nismo fiksirali početne uslove.

5 Numeričke metode

U praktičnoj primeni traženja rešenja Košijevih problema, najčešće se koriste upravo numeričke metode. Kada je problem nemoguće rešiti analitički, neophodno je naći približno rešenje, a za razliku od analitičkih aproksimativnih metoda, numeričke su pogodnije za realizaciju na računaru, jer problem svode na osnovne računске operacije i evaluacije vrednosti nekih funkcija u određenim tačkama. Čak i kada je moguće odrediti tačno rešenje, u praksi se često daje prednost numeričkim metodama zbog lakoće njihove primene i velike tačnosti koja se njima postiže. Numeričke metode se koriste za računanje približnih vrednosti rešenja $y = y(x)$ Košijevog problema na nekoj unapred zadatoj mreži tačaka x_n , pri čemu se rešenje dobija u obliku tabele. Za primenu ovih metoda neophodno je da Košijev problem ima jedinstveno rešenje i da bude dobro uslovljen. Dobra uslovljenost podrazumeva da male promene ulaznih parametara treba da dovode do malih promena rešenja. U protivnom, računске greške koje se neminovno javljaju u realizaciji numeričkog algoritma, koje mogu da budu tretirane kao male promene ulaznih parametara, mogu znatno da izmene približno rešenje. U sledećem primeru prikazaćemo jedan loše uslovljen Košijev problem koji je preuzet iz [7].

Primer 5.1. Neka je dat Košijev problem

$$y' = y - x,$$

$$y(0) = 1.$$

Opšte rešenje diferencijalne jednačine je $y(x) = 1 + x + ce^x$, $c \in \mathbb{R}$, dok je Košijevo rešenje $y(x) = 1 + x$. Za $x = 100$, vrednost tog rešenja je $y(100) = 101$. Ako početni uslov zamenimo sa $y(0) = 1.000001$, rešenje će biti funkcija $y(x) = 1 + x + 10^{-6}e^x$, čija je vrednost u tački $x = 100$ jednaka $2.7 \cdot 10^{37}$. Dakle, za vrlo malu promenu početnog uslova, dobijamo drastičnu promenu rešenja u određenoj tački.

Teorijski deo ovog poglavlja uglavnom je preuzet iz [7], a korišćeni su i izvori [8, 9, 10, 11, 12, 13]

5.1 Ojlerova metoda

Ojlerova metoda je najstarija i najjednostavnija numerička metoda za rešavanje Košijevih problema. Osmislio ju je švajcarski matematičar Leonard Ojler i opisao u svojoj knjizi [14] davne 1768. godine. Njom se određuju približne vrednosti rešenja $y = y(x)$ Košijevog problema u konačnom nizu ekvidistantnih tačaka x_n , $n \in \mathbb{N}_0$, sa korakom h između dve tačke. Čvorove definišemo sa $x_i = x_0 + ih$, $i = 1, 2, \dots$. Ova metoda se može primeniti i na Košijeve probleme za diferencijalne jednačine višeg reda, međutim ovde ćemo se baviti samo diferencijalnim jednačinama prvog reda, odnosno Košijevim problemom

$$y'(x) = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0.$$

Kako je h mali broj, izvod funkcije $y = y(x)$ možemo da aproksimiramo sa

$$y'(x) = f(x, y) \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}.$$

Ako promenljivu x zamenimo sa nekim od čvorova x_i , a $x+h$ sa x_{i+1} , dobijamo

$$f(x_i, y(x_i)) = \frac{y(x_{i+1}) - y(x_i)}{h}.$$

Sa y_i ćemo označiti približnu vrednost rešenja u čvoru x_i . Kada to uvrstimo umesto $y(x_i)$ u prethodnoj jednačini, dobijamo formulu za eksplicitnu Ojlerovu metodu

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \quad (5.1)$$

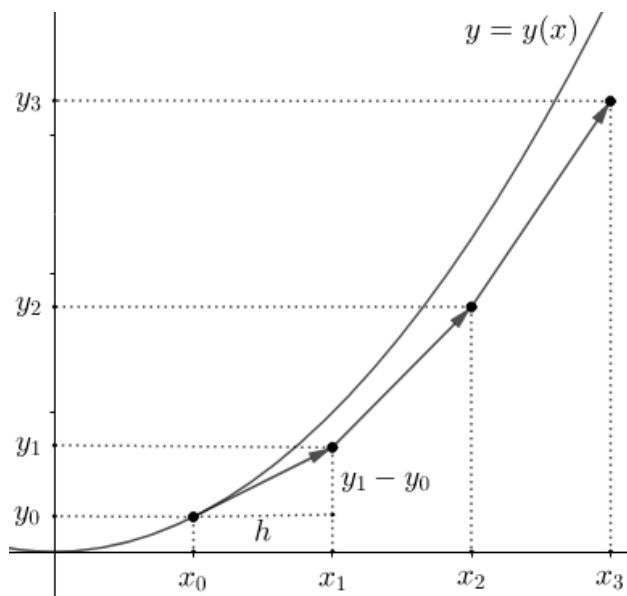
Na sledećoj slici možemo videti geometrijsku interpretaciju Ojlerove metode. Strelice predstavljaju tangente približnog rešenja redom u tačkama x_0 , x_1 i x_2 . Nagib tangente u tački (x_0, y_0) , koja prolazi i kroz tačku (x_1, y_1) , je

$$y'(x_0) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h},$$

na osnovu čega dobijamo

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0),$$

što upravo predstavlja formulu Ojlerove metode na prvom koraku.



Slika 5.1: Geometrijska interpretacija Ojlerove metode

Pronađimo sada grešku metode u čvoru x_1 . Pretpostavimo da je funkcija $f(x, y)$ neprekidno diferencijabilna. Iz Tejlorovog razvoja

$$y(x_1) = y(x_0 + h) = y(x_0) + hy'(x_0) + \frac{h^2}{2}y''(c_1), \quad c_1 \in (x_0, x_0 + h),$$

sledi da je razlika između tačne i približne vrednosti na prvom koraku

$$y(x_1) - y_1 = \frac{h^2}{2}y''(c_1) = O(h^2),$$

jer je $y''(c_1)$ ograničeno za $c_1 \in (x_0, x_0 + h)$. Dakle, greška Ojlerove metode na jednom koraku je reda $O(h^2)$. Za drugi korak potrebno je da koristimo razvoj

$$y(x_2) = y(x_1) + hy'(x_1) + \frac{h^2}{2}y''(c_2), \quad c_2 \in (x_1, x_2).$$

Primenom Lagranžove teoreme o srednjoj vrednosti dobijamo

$$\begin{aligned} y(x_2) - y_2 &= y(x_1) - y_1 + h(f(x_1, y(x_1)) - f(x_1, y_1)) + \frac{h^2}{2}y''(c_2) \\ &= y(x_1) - y_1 + hf'_y(x_1, \alpha_1)(y(x_1) - y_1) + \frac{h^2}{2}y''(c_2) \\ &= (1 + hf'_y(x_1, \alpha_1))(y(x_1) - y_1) + \frac{h^2}{2}y''(c_2) \\ &= \frac{h^2}{2}y''(c_1) + \frac{h^2}{2}y''(c_2) + O(h^3) = h^2y''(c) + O(h^3), \end{aligned}$$

gde c pripada najmanjem intervalu kojem pripadaju c_1 i c_2 . U opštem slučaju imaćemo

$$y(x_i) - y_i = (1 + hf'_y(x_{i-1}, \alpha_{i-1}))(y(x_{i-1}) - y_{i-1}) + \frac{h^2}{2}y''(c_i), \quad c_i \in (x_{i-1}, x_i).$$

Neka je $M = \max_{x \in [x_{i-1}, \alpha_{i-1}]} |y''(x)|$ i $N = \max_{x \in [x_{i-1}, x_i]} |f'_y(x)|$. Iz prethodne jednakosti dobijamo

$$|y(x_i) - y_i| \leq (1 + Nh)|y(x_{i-1}) - y_{i-1}| + \frac{Mh^2}{2}.$$

Rekurzijom dobijamo

$$\begin{aligned} |y(x_i) - y_i| &\leq (1 + Nh)^i |y(x_0) - y_0| + \frac{Mh^2}{2}(1 + (1 + Nh) + \dots + (1 + Nh)^{i-1}) \\ &= \frac{Mh^2}{2}(1 + (1 + Nh) + \dots + (1 + Nh)^{i-1}). \end{aligned}$$

Na ovaj način, pri fiksiranom koraku h , ne možemo da garantujemo ograničenost greške kada $i \rightarrow \infty$. Neka je sada x_* fiksirana tačka različita od x_0 i neka je korak $h = h_i = (x_* - x_0)/i$. Ocenimo grešku $y(x_*) - y_i$, gde je y_i približna vrednost rešenja u čvoru $x_i = x_0 + ih_i = x_*$. Na osnovu prethodnog važi

$$|y(x_*) - y_i| \leq \frac{Mh_i^2}{2} \frac{(1 + Nh_i)^i - 1}{(1 + Nh_i) - 1} = \frac{Mh_i}{2N} ((1 + Nh_i)^i - 1)$$

i

$$(1 + Nh_i)^i = \left(1 + \frac{(x_* - x_0)N}{i}\right)^i \leq e^{(x_* - x_0)N} = \text{const},$$

iz čega sledi da je

$$|y(x_*) - y_i| \leq \frac{Mh_i}{2N} e^{(x_* - x_0)N} = O(h_i) = O(1/i).$$

Ojlerovu metodu možemo dobiti i integraljenjem diferencijalne jednačine $y'(x) = f(x, y)$ u granicama od x do $x + h$, čime dobijamo

$$y(x + h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt.$$

Ako integral aproksimiramo kvadraturnom formulom levog pravougaonika, dobijamo

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y) + O(h^2).$$

Tačnost metode možemo da povećamo ako integral aproksimiramo nekom preciznijom kvadraturnom formulom. Recimo, ako primenimo trapeznu formulu dobijamo

$$y(x + h) = y(x) + \frac{h}{2}[f(x, y) + f(x + h, y(x + h))] + O(h^3).$$

Ako zamenimo x sa x_i i izostavimo ostatak $O(h^3)$ dobijamo modifikaciju Ojlerove metode

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})], \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ova formula je implicitna, jer se vrednost y_{i+1} nalazi i sa desne strane jednakosti, tako da njom ne možemo direktno da računamo vrednosti y_i za svako i . Međutim, ako y_{i+1} na desnoj strani jednakosti zamenimo originalnom formulom Ojlerove metode (5.1), dobijamo

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_i + hf(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1}^*)], \quad i = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Ako primenimo formulu centralnog pravougaonika za aproksimaciju integrala, dobijamo

$$y(x + h) = y(x) + hf\left(x + \frac{h}{2}, y\left(x + \frac{h}{2}\right)\right) + O(h^3).$$

Zamenama $x = x_i$, $y(x_i) = y_i$, $x + \frac{h}{2} = x_{i+1/2}$ i $y(x + \frac{h}{2}) = y_{i+1/2}$ dobijamo drugu implicitnu modifikaciju Ojlerove metode

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Slično kao u prethodnoj modifikaciji, u paru sa Ojlerovom metodom (5.1) dobijamo prediktor-korektor metodu

$$\begin{aligned} y_{i+1/2} &= y_i + \frac{h}{2}f(x_i, y_i), \\ y_{i+1} &= y_i + hf(x_{i+1/2}, y_{i+1/2}). \end{aligned}$$

Greška na jednom koraku ovih metoda je reda $O(h^3)$, a numerički napor je otprilike duplo veći nego kod Ojlerove metode, jer se na svakom koraku vrednost funkcije f računa dva puta. Ova formula spada u grupu prediktor-korektor metoda, koje se sastoje od po dve formule. Prvom (prediktor) se dobija gruba aproksimacija rešenja, a drugom (korektor) se ta aproksimacija popravljja.

Modifikacije Ojlerove metode ilustrovane su primerima u narednom poglavlju, a u nastavku su primeri sa primenom obične Ojlerove metode (5.1).

Primer 5.2. Neka je dat Košijev problem

$$y' = 2x(y + 1),$$

$$y(0) = 0.$$

Primetimo da smo ovakav Košijev problem već posmatrali u primeru 4.1. Potražimo približnu vrednost Košijevog problema Ojlerovom metodom na segmentu $[0, 0.5]$ sa korakom $h = 0.1$. Početnim uslovima je dato da je $x_0 = 0$ i $y_0 = 0$. Ostali čvorovi su $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.4$ i $x_5 = 0.5$. Vrednost približnog rešenja u tački x_1 tražimo po formuli

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0),$$

odnosno

$$y_1 = 0 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0 \cdot (0 + 1) = 0.$$

Na isti način određujemo:

$$y_2 = 0 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot (0 + 1) = 0.02$$

$$y_3 = 0.02 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0.2 \cdot (0.02 + 1) = 0.0608$$

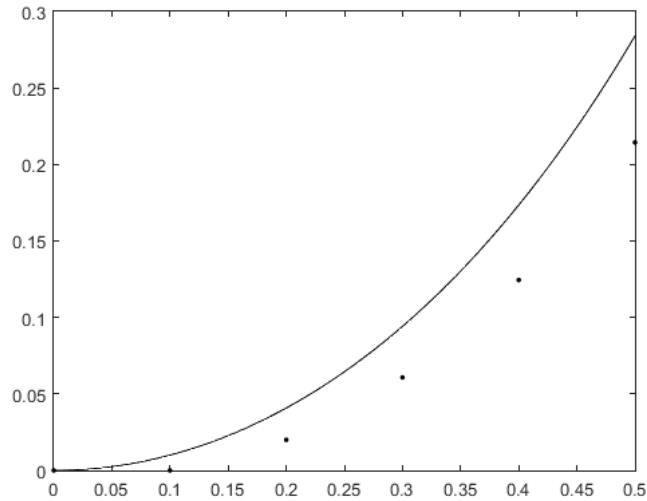
$$y_4 = 0.0608 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0.3 \cdot (0.0608 + 1) = 0.1244$$

$$y_5 = 0.1244 + 0.1 \cdot 2 \cdot 0.4 \cdot (0.1244 + 1) = 0.2144.$$

Uporedimo ove vrednosti sa vrednostima tačnog rešenja ovog Košijevog problema $y(x) = e^{x^2} - 1$ u istim tačkama, zaokruženim na četiri decimale. U sledećoj tabeli prikazane su vrednosti približnih rešenja i tačnih rešenja u čvorovima, kao i apsolutna i relativna greška za svaki čvor. Apsolutna greška je apsolutna vrednost razlike tačnog i približnog rešenja, dok je relativna greška količnik apsolutne greške i tačnog rešenja.

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Približno rešenje	0	0	0.0200	0.0608	0.1244	0.2144
Tačno rešenje	0	0.0101	0.0408	0.0942	0.1735	0.2840
Apsolutna greška	0	0.0101	0.0208	0.0334	0.0491	0.0696
Relativna greška	0%	100%	51%	35.5%	28.3%	24.5%

Iz tabele vidimo da se apsolutna greška uvećava sa svakim korakom, dok se relativna greška smanjuje, jer zavisi od veličine tačne vrednosti funkcije, a funkcija je rastuća. Sa slike 5.2 vidimo da aproksimacija prati grafik funkcije, a da li je zadovoljavajuća, zavisi od toga kolika tačnost nam je tražena. Kada nemamo tačno rešenje, što je najčešće slučaj, grešku Ojlerove metode ocenjujemo kao razliku dobijenih približnih rešenja i približnih rešenja dobijenih sa duplo većim korakom (videćemo da je to specijalan slučaj Rungeove ocene greške, o kojoj će biti reči kasnije). Računanjem sa korakom $h = 0.2$, u tačkama $x = 0$, $x = 0.2$ i $x = 0.4$ dobijamo redom rešenja 0, 0 i 0.08. Dakle, najveća razlika približnih rešenja u ovim čvorovima je 0.02 i u slučaju da je ona veća od zadate tačnosti, tačnost možemo da poboljšamo smanjivanjem koraka.

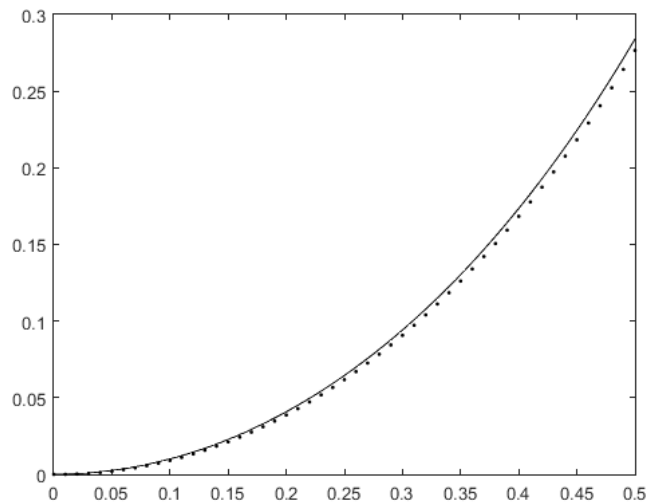


Slika 5.2: Integralna kriva i aproksimacije rešenja za primer 5.2. za $h = 0.1$

Pokušajmo sada da dobijemo bolju aproksimaciju sa korakom $h = 0.01$. U tabeli ćemo prikazati samo čvorove iz prethodne tabele, da bismo uporedili grešku.

x_n	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
Približno rešenje	0	0.0090	0.0387	0.0907	0.1683	0.2766
Tačno rešenje	0	0.0101	0.0408	0.0942	0.1735	0.2840
Apsolutna greška	0	0.0011	0.0021	0.0035	0.0052	0.0074
Relativna greška	0%	10.9%	5.1%	3.7%	3%	2.6%

Ovde su apsolutne i relativne greške u svim čvorovima otprilike deset puta manje, tako da je aproksimacija znatno bolja, što se vidi i sa slike 5.3.



Slika 5.3: Integralna kriva i aproksimacije rešenja za primer 5.2. za $h = 0.01$

Primer 5.3. Pogledajmo šta će se desiti kada pokušamo ovu metodu da primenimo na Košijev problem koji nema jedinstveno rešenje, a koji smo već posmatrali u primerima 1.1. i 4.2.

$$y' = 2\sqrt{y},$$

$$y(1) = 0.$$

Funkcija $f(x, y) = 2\sqrt{y}$ nije neprekidno diferencijabilna te nam nije zagarantovana uspešnost ove metode, što ne znači obavezno da se ona ne može primeniti. Nađimo aproksimacije rešenja na segmentu $[1, 2]$ sa korakom $h = 0.1$. Vrednost približnog rešenja za prvi čvor $x_0 = 1$ nam je data početnim uslovom i to je $y_0 = 0$. Približne vrednosti rešenja za ostale čvorove tražimo po formuli

$$y_{i+1} = y_i + 0,1 \cdot 2\sqrt{y_i}, \quad i = 0, 1, \dots, 10,$$

međutim, lako vidimo da je približno rešenje jednako nuli u svim izabranim tačkama segmenta. Jasno je da bi se isto desilo za bilo koji drugi korak ili interval. Dakle, Ojlerova metoda nam ovde „daje samo singularno rešenje“, iako znamo da ima beskonačno mnogo rešenja ovog Košijevog problema, te je u ovom slučaju nema smisla koristiti.

Primer 5.4. Neka je dat Košijev problem koji smo već posmatrali u primerima 4.3, 4.5. i 4.8.

$$y' = x^2y - 1,$$

$$y(0) = 1.$$

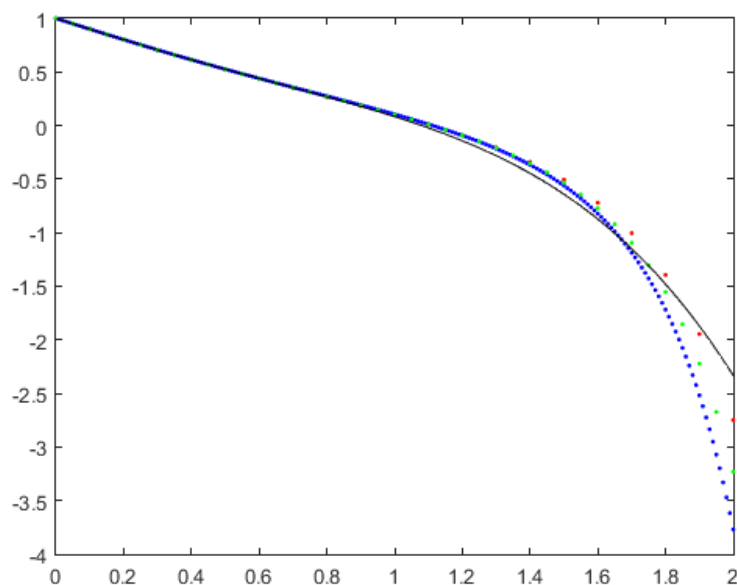
Ojlerovom metodom odredićemo vrednost približnog rešenja u tačkama segmenta $[0, 2]$ sa koracima $h = 0.1$, $h = 0.05$ i $h = 0.01$ i uporediti ih sa vrednostima približnog rešenja tog Košijevog problema

$$y_p(x) = 1 - x + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4},$$

koje smo prethodno našli analitičkim metodama.

x_n	0	0.4	0.8	1.2	1.6	2
$h = 0.1$	1	0.6104	0.2659	-0.0916	-0.7197	-2.7483
$h = 0.05$	1	0.6127	0.2708	-0.0918	-0.7711	-3.2309
$h = 0.01$	1	0.6146	0.2748	-0.0926	-0.8221	-3.7697
$y_p(x_n)$	1	0.6149	0.2683	-0.1424	-0.8731	-2.3333

Na slici 5.4. vidimo da su sve aproksimacije koje smo dobili Ojlerovom metodom jako bliske približnom rešenju y_p na intervalu $[0, 1]$, jer na tom intervalu veći stepeni koji nedostaju u približnom rešenju y_p ne utiču puno na rezultat. Za $x > 1$ razlika se postepeno povećava. Pošto znamo da Ojlerova metoda sa manjim korakom daje aproksimacije bliže tačnom rešenju, a vidimo da se smanjivanjem koraka aproksimacija udaljava od rešenja y_p , možemo da zaključimo da smo Ojlerovom metodom dobili bolju aproksimaciju na ovom intervalu.



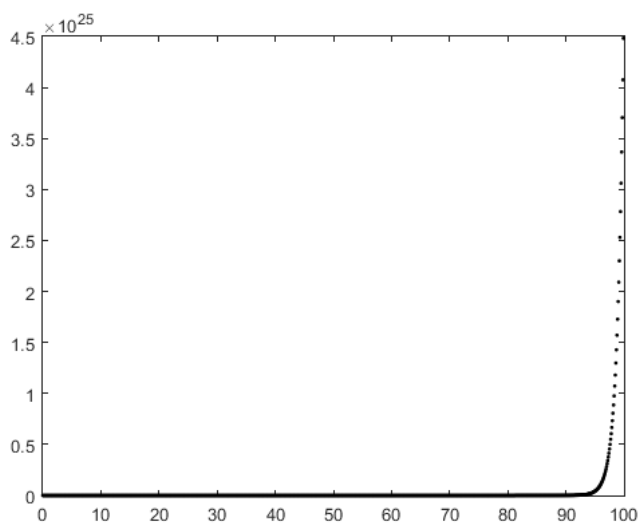
Slika 5.4: Aproksimacije rešenja za primer 5.4.

Primer 5.5. Posmatrajmo ponovo Košijev problem iz primera 5.1.

$$y' = y - x,$$

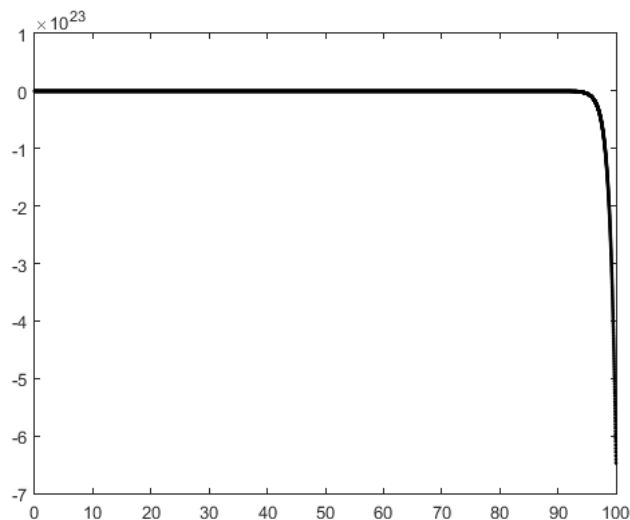
$$y(0) = 1.$$

Već smo objasnili zašto je ovaj problem loše uslovljen, a sada ćemo to ilustrovati tako što ćemo na njega da primenimo jednu numeričku metodu. Primenom Ojlerove metode sa korakom $h = 0.1$ na segmentu $[0, 100]$ dobijamo niz približnih vrednosti rešenja koja posle nekog koraka počinju veoma brzo da rastu, što se vidi na slici 5.5.



Slika 5.5: Aproksimacije rešenja sa korakom $h = 0.1$

Ako računamo sa korakom $h = 0.01$ na istom segmentu, dobijamo niz približnih vrednosti rešenja koja posle nekog koraka počinju veoma brzo da opadaju, što je prikazano na slici 5.6.



Slika 5.6: Aproksimacije rešenja sa korakom $h = 0.01$

U oba slučaja, niz aproksimacija znatno odstupa od tačnog rešenja $y(x) = 1 + x$.

5.2 Metode tipa Runge-Kuta

Ovim metodama, kao i Ojlerovom metodom, na osnovu poznatih vrednosti rešenja Košijevog problema u tački x , određujemo približnu vrednost rešenja u tački $x + h$. Štaviše, pokazaćemo i da su ove metode uopštenje Ojlerove metode. Rešavamo Košijev problem

$$y'(x) = f(x, y),$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Pod uslovom da je funkcija $f(x, y)$ neprekidna, možemo da integralimo diferencijalnu jednačinu u granicama od x do $x + h$, te dobijamo

$$y(x + h) = y(x) + \int_x^{x+h} f(t, y(t)) dt.$$

Ako zamenimo integral nekom kvadraturenom formulom, dobijamo aproksimaciju

$$y(x + h) \approx y(x) + h \sum_{i=1}^n c_i f(\gamma_i, y(\gamma_i)),$$

gde su c_i koeficijenti i $\gamma_i \in (x, x+h)$ čvorovi kvadraturene formule. Pošto vrednosti $y(\gamma_i)$ nisu poznate, aproksimiraćemo ih pomoću već određenih aproksimacija rešenja u prethodnim čvorovima, te dobijamo

$$y(x + h) \approx y(x) + \sum_{i=1}^n c_i k_i(h),$$

gde je za $y = y(x)$ i $x_i = x + \alpha_i h$, $0 = \alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \dots \leq \alpha_n \leq 1$,

$$\begin{aligned} k_1(h) &= hf(x, y), \\ k_2(h) &= hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} k_1(h)), \\ k_3(h) &= hf(x + \alpha_3 h, y + \beta_{31} k_1(h) + \beta_{32} k_2(h)), \\ &\vdots \\ k_n(h) &= hf(x + \alpha_n h, y + \beta_{n1} k_1(h) + \dots + \beta_{n,n-1} k_{n-1}(h)). \end{aligned}$$

Različitim izborom parametara α_i , β_{ij} i c_i , $i, j \in \mathbb{N}$, dobijamo različite metode tipa Runge-Kuta. Broj n predstavlja red metode. Što je veće n , to će biti bolja aproksimacija rešenja. Kada je $n = 1$, onda je

$$y(x + h) \approx y(x) + c_1 hf(x, y).$$

Pod pretpostavkom da je funkcija f neprekidno diferencijabilna, na osnovu Tejlorove formule važi

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(\theta), \quad \theta \in (x, x + h),$$

odnosno

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y) + O(h^2),$$

na osnovu čega mora biti $c_1 = 1$, da bismo dobili aproksimaciju sa greškom $O(h^2)$, pa tako, ako x zamenimo sa x_i , $y(x)$ sa y_i i zanemarimo ostatak, dobijamo Ojlerovu metodu.

Za $n = 2$, imamo da je

$$y(x + h) \approx y(x) + c_1 k_1(h) + c_2 k_2(h),$$

odnosno

$$y(x + h) \approx y(x) + c_1 hf(x, y) + c_2 hf(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} hf(x, y)).$$

Iz Tejlorovog razvoja

$$f(x + \alpha_2 h, y + \beta_{21} hf(x, y)) = f(x, y) + \alpha_2 hf'_x(x, y) + \beta_{21} hf(x, y) f'_y(x, y) + O(h^2)$$

i grupisanjem uz odgovarajući stepen koraka h dobijamo da je

$$y(x + h) = y(x) + (c_1 + c_2) hf(x, y) + c_2 h^2 (\alpha_2 f'_x(x, y) + \beta_{21} f(x, y) f'_y(x, y)) + O(h^3).$$

Iz prethodnog izraza i Tejlorovog razvoja

$$y(x + h) = y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2} y''(x) + O(h^3),$$

tj.

$$y(x + h) = y(x) + hf(x, y) + \frac{h^2}{2} (f'_x(x, y) + f(x, y) f'_y(x, y)) + O(h^3),$$

izjednačavanjem odgovarajućih koeficijenata dobijamo sledeće uslove za koeficijente c_1 , c_2 , α_2 i β_{21} :

$$c_1 + c_2 = 1, \quad c_2 \cdot \alpha_2 = \frac{1}{2}, \quad c_2 \cdot \beta_{21} = \frac{1}{2}.$$

Odabirom koeficijenata koji ispunjavaju ove uslove, dobijamo različite metode tipa Runge-Kuta drugog reda. Na primer, za $c_1 = c_2 = 1/2$ i $\alpha_2 = \beta_{21} = 1$, to je modifikovana Ojlerova metoda sa trapeznom formulom. Ako je $c_1 = 0$, $c_2 = 1$ i $\alpha_2 = \beta_{21} = 1/2$, onda je to modifikovana Ojlerova metoda sa formulom centralnog pravougaonika. Kod ovih metoda numerički napor je duplo veći nego kod Ojlerove metode, jer se vrednost funkcije f računa dva puta na svakom koraku, ali se bolja preciznost postiže sa manjim brojem koraka. Za metode višeg reda se uslovi za parametre pronalaze na sličan način, međutim postupak je znatno duži pa ćemo ovde samo prikazati najčešće korišćene formule.

Najčešće korišćena formula tipa Runge-Kuta trećeg reda je

$$\begin{aligned}k_1(h) &= hf(x, y), \\k_2(h) &= hf(x + h/2, y + k_1(h)/2), \\k_3(h) &= hf(x + h, y - k_1(h) + 2k_2(h)), \\y(x + h) &\approx y(x) + \frac{1}{6}(k_1(h) + 4k_2(h) + k_3(h)).\end{aligned}$$

Najčešće korišćena formula četvrtog reda je

$$\begin{aligned}k_1(h) &= hf(x, y), \\k_2(h) &= hf(x + h/2, y + k_1(h)/2), \\k_3(h) &= hf(x + h/2, y + k_2(h)/2), \\k_4(h) &= hf(x + h, y + k_3(h)), \\y(x + h) &\approx y(x) + \frac{1}{6}(k_1(h) + 2k_2(h) + 2k_3(h) + k_4(h))\end{aligned}$$

i ova metoda je u literaturi obično podrazumevana pod metodom Runge-Kuta. Tačnost ove metode je $O(h^5)$, a numerički napor četiri puta veći nego kod Ojlerove metode. U slučaju kada funkcija f ne zavisi od promenljive y , pomenute formule trećeg i četvrtog reda svode se na Simpsonovu kvadraturu formulu:

$$y(x + h) \approx y(x) + \frac{h}{6}[f(x) + 4f(x + h/2) + f(x + h)].$$

U ovom radu se nećemo baviti metodama tipa Runge-Kuta višeg reda, a o njima se može pročitati ovde [15].

Grešku kod metoda tipa Runge-Kuta ocenjujemo **Rungeovim kriterijumom**

$$y(x + 2h) - y_h^*(x + 2h) \sim \frac{y_h^*(x + 2h) - y_{2h}^*(x + 2h)}{2^p - 1},$$

gde su $y(x + 2h)$ tačne vrednosti rešenja u svakom drugom čvoru, $y_h^*(x + 2h)$ približne vrednosti rešenja u svakom drugom čvoru dobijene sa korakom h , $y_{2h}^*(x + 2h)$ približne vrednosti u svakom drugom čvoru dobijene sa korakom $2h$, a p je red metode. Dakle, možemo da ocenimo grešku u svakoj drugoj tački, tako što uporedimo te vrednosti sa vrednostima koje dobijemo računanjem sa duplo većim korakom. Ako je vrednost u zadovoljavajućim

granicama, možemo da izvršimo popravku po formuli

$$y(x+2h) \approx y_h^*(x+2h) + \frac{y_h^*(x+2h) - y_{2h}^*(x+2h)}{2^p - 1}.$$

U tačkama u kojima ne postoji ocena greške, približnom rešenju dodaje se aritmetička sredina grešaka u susednim tačkama. Ako greška prelazi dozvoljene granice, treba smanjiti korak h . Korak se obično smanjuje za polovinu, jer se tako ponovo mogu koristiti vrednosti iz prethodnog računa za svaki drugi korak.

Primer 5.6. Neka je dat Košijev problem koji smo već posmatrali u primerima 4.1. i 5.2.

$$y' = 2x(y+1),$$

$$y(0) = 0.$$

Naći ćemo približne vrednosti rešenja ovog problema na segmentu $[0, 0.5]$ primenom modifikovane Ojlerove metode sa trapeznom formulom, sa korakom $h = 0.1$ i uporediti to sa vrednostima tačnog rešenja. Iz početnog uslova imamo da je $y_0 = 0$. Tada y_1 računamo po formuli

$$y_1 = y_0 + \frac{1}{2}(k_1(h) + k_2(h)).$$

Prvo računamo k_1 i k_2 :

$$k_1 = hf(x_0, y_0) = 0.1 \cdot 2 \cdot 0 \cdot (0 + 1) = 0,$$

$$k_2 = hf(x_0 + h, y_0 + k_1(h)) = 0.1 \cdot 2 \cdot 0.1 \cdot (0 + 0 + 1) = 0.02.$$

Dakle,

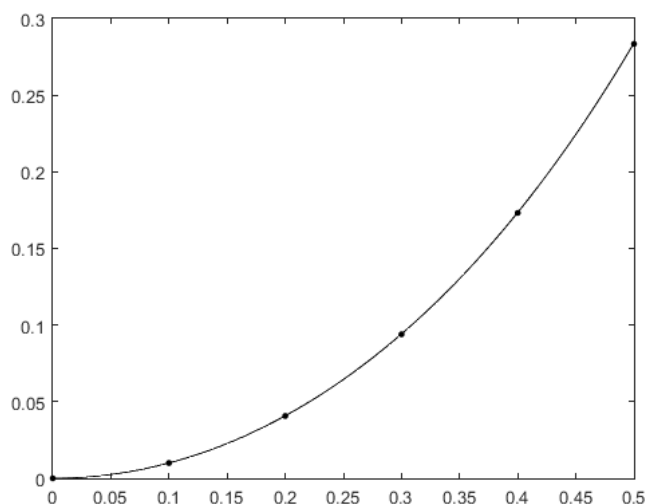
$$y_1 = 0 + \frac{1}{2} \cdot (0 + 0.02) = 0.01.$$

Vrednosti u ostalim čvorovima su date u tabeli.

x	y	k_1	k_2	Tačno reš.	Aps. greška	Rel. greška
0	0	0	0.0200	0	0	0%
0.1	0.0100	0.0202	0.0412	0.0101	0.0001	1%
0.2	0.0407	0.0416	0.0649	0.0408	0.0001	0.2%
0.3	0.0940	0.0656	0.0928	0.0942	0.0002	0.2%
0.4	0.1732	0.0939	0.1267	0.1735	0.0003	0.2%
0.5	0.2835			0.2840	0.0005	0.2%

Vidimo da je aproksimacija koju smo sada dobili znatno bolja od aproksimacije Ojlerovom metodom, što je ilustrovano i na slici 5.7. Čak i sa deset puta manjim korakom, ona da je veću tačnost, što znači da je „ekonomičnija”, bez obzira na duplo veći numerički napor na jednom koraku. Kada ne bismo znali tačno rešenje problema, što je najčešće slučaj, tačnost približnih rešenja bismo proverili Rungeovim kriterijumom. Kontrolnim računanjem sa dvostrukim korakom, dobijamo da su približne vrednosti u čvorovima $x = 0$, $x = 0.2$ i $x = 0.4$ redom jednake 0, 0.0400 i 0.1715. Kako je ovde korišćena metoda reda 2, razlike

vrednosti iz tabele u istim tačkama i ovih vrednosti delimo sa $2^2 - 1 = 3$, te dobijamo da su ocene greške redom 0, 0.0002 i 0.0006. U slučaju da su te vrednosti veće od zadate tačnosti, prepolovili bismo korak h i računali ponovo.



Slika 5.7: Integralna kriva i aproksimacije rešenja za primer 5.6.

Primenimo sada na isti problem metodu Runge-Kuta četvrtog reda.

x	y	k_1	k_2	k_3	k_4	Tačna vrednost
0	0	0	0.1000	0.0101	0.0202	0
0.1	0.0101	0.0202	0.0306	0.0308	0.0416	0.0101
0.2	0.0408	0.0416	0.0531	0.0534	0.0657	0.0408
0.3	0.0942	0.0657	0.0789	0.0794	0.0939	0.0942
0.4	0.1735	0.0939	0.1098	0.1106	0.1284	0.1735
0.5	0.2840					0.2840

Vidimo da se na četiri decimale približna i tačna rešenja potpuno poklapaju, tako da je tačnost ovog približnog rešenja najmanje 10^{-4} .

Primer 5.7. Neka je dat Košijev problem koji smo već posmatrali u primeru 3.3.

$$y' = y^2 - 1,$$

$$y(0) = 0.$$

Rešenje ovog problema je

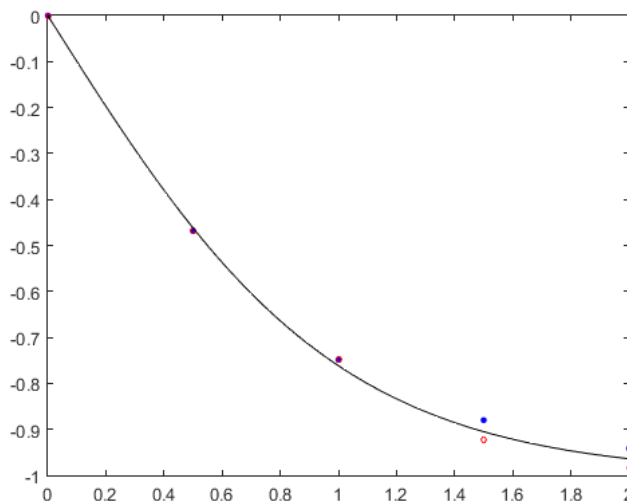
$$y(x) = \frac{1 - e^{2x}}{1 + e^{2x}}.$$

Sada ćemo odrediti njegova približna rešenja na segmentu $[0, 2]$ modifikovanom Ojlerovom metodom sa formulom centralnog pravougaonika, sa korakom $h = 0.5$, a zatim oceniti grešku Rungeovim kriterijumom i izvršiti korekciju približnih rešenja, pa to sve uporediti

sa tačnim rešenjem. Kako ova metoda drugog reda, ocenu greške dobijamo tako što razliku približnih vrednosti za korak $h = 0.5$ i duplo veći korak $h = 1$ delimo sa 3.

x	$h = 1$	$h = 0.5$	Ocena greške	Nova vrednost	Tačna vrednost
0	0	0	0	0	0
0.5		-0.4688		-0.4686	-0.4621
1	-0.7500	-0.7484	0.0005	-0.7479	-0.7160
1.5		-0.8800		-0.9229	-0.9051
2	-0.8115	-0.9416	-0.0434	-0.9850	-0.9640

Vidimo na osnovu vrednosti iz tabele, da su korigovane vrednosti nešto bliže tačnim vrednostima nego približne vrednosti za korak $h = 0.5$.



Slika 5.8: Integralna kriva i aproksimacije rešenja za primer 5.7.

Na slici 5.8 plavom bojom su prikazane približne vrednosti dobijene sa korakom $h = 0.5$, a crvenom bojom vrednosti korigovane pomoću Rungeovog kriterijuma.

5.3 Metode konačnih razlika

Metode tipa Runge-Kuta spadaju u grupu dvoslojnih metoda, jer njima na osnovu vrednosti rešenja u tački x određujemo rešenje u tački $x + h$. Osim njih postoje i višeslojne metode, kod kojih koristimo vrednosti rešenja u više prethodnih čvorova da bismo odredili vrednost rešenja u narednom čvoru. Višeslojne metode su oblika

$$\sum_{i=0}^n a_i y_{j+1-i} - h \sum_{i=0}^n b_i f(x_{j+1-i}, y_{j+1-i}) = 0,$$

gde su a_i i b_i , $i = 0, \dots, n$, konstante. Ako je $a_0 \neq 0$ i $b_0 = 0$ metode su ekstrapolacione (eksplicitne), a ako je $a_0 \neq 0$ i $b_0 \neq 0$ one su interpolacione (implicitne). Najpopularnije

višeslojne metode se dobijaju pomoću kvadrature formula. Pod uslovom da je funkcija $f(x, y)$ neprekidna, možemo da integralimo diferencijalnu jednačinu $y' = f(x, y)$ u granicama od x_{i+1-k} do x_{i+1} , te dobijamo

$$y(x_{i+1}) = y(x_{i+1-k}) + \int_{x_{i+1-k}}^{x_{i+1}} f(x, y(x)) dx. \quad (5.2)$$

Aproksimacijom podintegralne funkcije interpolacionim polinomom određenim čvorovima $x_{i+1-n}, \dots, x_{i+1}$, dobijamo približno rešenje u tački x_{i+1}

$$y_{i+1} = y_{i+1-k} + h \sum_{j=0}^n c_j f_{i+1-j},$$

gde su c_j koeficijenti i $f_{i+1-j} = f(x_{i+1-j}, y_{i+1-j})$.

5.3.1 Milnova metoda

Pretpostavimo da su nam poznate približne vrednosti rešenja Košijevog problema u prva četiri čvora: y_0 , koje je dato početnim uslovom i y_1, y_2 i y_3 , koje možemo odrediti nekom od analitičkih metoda ili metoda tipa Runge-Kuta. Na osnovu jednačine (5.2), uzevši da je $y(x_i) = y_i$, imamo da je

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+4h} f(x, y(x)) dx.$$

Ako funkciju $f(x, y)$ aproksimiramo I Njutnovim interpolacionim polinomom trećeg stepena sa konačnim razlikama na čvorovima x_0, x_1, x_2 i x_3 , dobijamo

$$y_4 = y_0 + \int_{x_0}^{x_0+4h} \left(f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2!} \Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} \Delta^3 f_0 \right) dx,$$

gde je $q = (x - x_0)/h$ a konačne razlike definišemo kao

$$\begin{aligned} \Delta f_i &= f_{i+1} - f_i, \\ \Delta^k f_i &= \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i, \quad f_i = f(x_i, y_i), \end{aligned}$$

te dobijamo

$$\begin{aligned} \Delta f_0 &= f_1 - f_0, \\ \Delta^2 f_0 &= f_2 - 2f_1 + f_0, \\ \Delta^3 f_0 &= f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0. \end{aligned}$$

Uvodimo sledeću smenu $x = x_0 + qh \Rightarrow dx = h dq$. Tada se menjaju i granice integracije, pa je za $x = x_0, q = 0$, a za $x = x_0 + 4h, q = 4$, te dobijamo

$$y_4 = y_0 + h \int_0^4 \left(f_0 + q\Delta f_0 + \frac{q(q-1)}{2} \Delta^2 f_0 + \frac{q(q-1)(q-2)}{6} \Delta^3 f_0 \right) dq.$$

Rešavanjem integrala dobijamo eksplicitnu prediktor formulu

$$y_4^* = y_0 + \frac{4h}{3}(2f_1 - f_2 + 2f_3).$$

Korektor formulu dobijamo tako što integral u formuli (5.2) aproksimiramo Simpsonovom kvadraturnom formulom i dobija se

$$y_4 = y_2 + \frac{h}{3}(f_4 + 4f_3 + f_2),$$

gde f_4 nalazimo uz pomoć prediktor formule, tako što je

$$f_4 = f_4^* = f(x_4, y_4^*).$$

Ako zamenimo y_0 sa y_{i-3} , odnosno f_0 sa f_{i-3} i ostale indekse respektivno, lako se može pokazati da ove formule važe i u opštem slučaju, što nam daje Milnovu metodu

$$\begin{aligned} y_{i+1}^* &= y_{i-3} + \frac{4h}{3}(2f_i - f_{i-1} + 2f_{i-2}), \\ y_{i+1} &= y_{i-1} + \frac{h}{3}(f_{i+1}^* + 4f_i + f_{i-1}). \end{aligned}$$

Greška prediktor formule je

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = \frac{28}{90}h^5 y^{(5)}(\delta), \quad \delta \in (x_{i-3}, x_{i+1}),$$

dok je greška korektor formule

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} = -\frac{1}{90}h^5 y^{(5)}(\epsilon), \quad \epsilon \in (x_{i-1}, x_{i+1}).$$

Na osnovu Rungeove ocene greške dobijamo da je približna ocena greške metode

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} \approx -\frac{1}{29}(y_{i+1} - y_{i+1}^*).$$

Primer 5.8. Primenimo Milnovu metodu na Košijev problem koji smo već posmatrali u primerima 4.1, 5.2 i 5.6.

$$y'(x) = 2x(y + 1),$$

$$y(0) = 0,$$

na segmentu $[0, 1]$ sa korakom $h = 0,1$. Možemo da iskoristimo približne vrednosti u tačkama x_1 , x_2 i x_3 koje smo već odredili metodom Runge-Kuta za $n = 4$: $y_1 = 0.0101$, $y_2 = 0.0408$ i $y_3 = 0.0942$. Nakon toga tražimo vrednosti funkcije f u tim tačkama: $f_0 = f(0, 0) = 0$, $f_1 = f(x_1, y_1) = 0.202$, $f_2 = 0.4163$ i $f_3 = 0.6565$. Koristimo prediktor formulu da odredimo y_4^* :

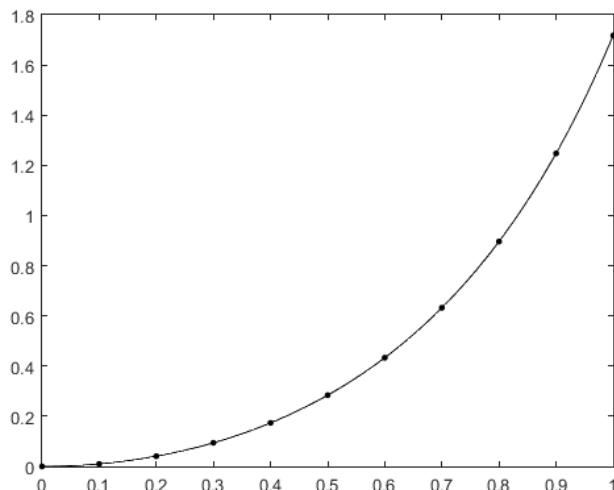
$$y_4^* = 0 + \frac{4 \cdot 0.1}{3}(2 \cdot 0.202 - 0.4163 + 2 \cdot 0.6565) = 0.1734.$$

Zatim, imamo da je $f_4^* = f(0.4, 0.1734) = 0.9387$, pa to ubacujemo u korektor formulu

$$y_4 = 0.0408 + \frac{0.1}{3}(0.9387 + 4 \cdot 0.6565 + 0.4163) = 0.1735.$$

Ostale vrednosti su prikazane u tabeli.

x	y^*	y	Tačna vrednost	Aps. greška	Rel. greška
0.5	0.2839	0.2840	0.2840	0.0000	0.00%
0.6	0.4331	0.4333	0.4333	0.0000	0.00%
0.7	0.6319	0.6323	0.6323	0.0000	0.00%
0.8	0.8958	0.8964	0.8965	0.0001	0.01%
0.9	1.2469	1.2477	1.2479	0.0002	0.02%
1	1.7166	1.7178	1.7183	0.0005	0.03%



Slika 5.9: Integralna kriva i aproksimacije rešenja za primer 5.8.

5.3.2 Adamsove formule

Recimo da analitičkim metodama, ili metodama tipa Runge-Kuta, možemo odrediti približne vrednosti rešenja $y_{-3} = y(x_{-3}) = y(x_0 - 3h)$, $y_{-2} = y(x_{-2}) = y(x_0 - 2h)$ i $y_{-1} = y(x_{-1}) = y(x_0 - h)$ Košijevog problema, dok je $y_0 = y(x_0)$ dato početnim uslovom. Na osnovu jednačine (5.2), zamenom odgovarajućih koeficijenata, približnu vrednost u čvoru $x_1 = x_0 + h$ dobijamo po formuli

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} f(x, y) dx.$$

Ako funkciju $f(x, y)$ aproksimiramo II Njutnovim interpolacionim polinomom trećeg stepena sa konačnim razlikama u čvorovima x_0, x_{-1}, x_{-2} i x_{-3} dobijamo

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(f_0 + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 f_{-3} \right) dx,$$

gde je $q = (x - x_0)/h$, a konačne razlike su

$$\Delta f_{-1} = f_0 - f_{-1},$$

$$\Delta^2 f_{-2} = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2},$$

$$\Delta^3 f_{-3} = f_0 - 3f_{-1} + 3f_{-2} - f_{-3}, \quad f_i = f(x_i, y_i).$$

Uvodimo smenu $x = x_0 + qh \Rightarrow dx = h dq$. Tada se menjaju i granice integracije, tako da za $x = x_0$ sledi da je $q = 0$, a za $x = x_0 + h$, $q = 1$, te dobijamo

$$y_1 = y_0 + h \int_0^1 \left(f_0 + q\Delta f_{-1} + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 f_{-2} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 f_{-3} \right) dq,$$

odnosno

$$y_1 = y_1^* = y_0 + \frac{h}{24}(55f_0 - 59f_{-1} + 37f_{-2} - 9f_{-3}),$$

što će biti prediktor formula za određivanje približne vrednosti rešenja y_1 . Korektor formulu nalazimo tako što podintegralnu funkciju $f(x, y)$ aproksimiramo ponovo II Njutnovim interpolacionim polinomom, ali ovoga puta u čvorovima x_1, x_0, x_{-1} i x_{-2} , te dobijamo

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x_1} \left(f_1 + q\Delta f_0 + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 f_{-2} \right) dx,$$

gde je $q = (x - x_0)/h$ i

$$\begin{aligned}\Delta f_0 &= f_1 - f_0, \\ \Delta^2 f_{-1} &= f_1 - 2f_0 + f_{-1}, \\ \Delta^3 f_{-2} &= f_1 - 3f_0 + 3f_{-1} - f_{-2}.\end{aligned}$$

Uvodimo smenu $x = x_1 + qh \Rightarrow dx = h dq$. Menjaju se granice integracije, pa je za $x = x_0$, $q = -1$, a za $x = x_0 + h$, $q = 0$, te dobijamo

$$y_1 = y_0 + \int_{-1}^0 \left(f_1 + q\Delta f_0 + \frac{q(q+1)}{2}\Delta^2 f_{-1} + \frac{q(q+1)(q+2)}{6}\Delta^3 f_{-2} \right) dq,$$

odnosno

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{24}(9f_1 + 19f_0 - 5f_{-1} + f_{-2}),$$

gde f_1 nalazimo uz pomoć prediktor formule, tako što je

$$f_1 = f_1^* = f(x_1, y_1^*).$$

Ako zamenimo y_1 sa y_{i+1} , y_0 sa y_i i dalje redom, dobijamo metodu tipa prediktor-korektor

$$\begin{aligned}y_{i+1}^* &= y_i + \frac{h}{24}(55f_i - 59f_{i-1} + 37f_{i-2} - 9f_{i-3}), \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{h}{24}(9f_{i+1}^* + 19f_i - 5f_{i-1} + f_{i-2}).\end{aligned}$$

Prediktor formula ove metode naziva se **Adams-Bašfortova formula**, dok se korektor formula naziva **Adams-Multonova formula**.

Greška Adams-Bašfortove formule je

$$y(x_i) - y_i = \frac{251}{720}h^5 y^{(4)}(\delta), \quad \delta \in (x_{i-3}, x_{i+1}),$$

dok je greška Adams-Multonove formule

$$y(x_i) - y_i = -\frac{19}{720}h^5 y^{(4)}(\epsilon), \quad \epsilon \in (x_{i-2}, x_{i+1}).$$

Primenom Rungeove ocene greške dobijamo da je približna ocena greške metode

$$y(x_{i+1}) - y_{i+1} \approx \frac{19}{270}(y_{i+1} - y_{i+1}^*).$$

Primer 5.9. Ako na isti problem iz primera 5.7. primenimo Adamsove formule, a prethodno iskoristimo iste aproksimacije za prva tri čvora, dobijamo nešto preciznije približne vrednosti.

x	y^*	y	Tačna vrednost	Aps. greška	Rel. greška
0.4	0.1734	0.1735	0.1735	0.0000	0.00%
0.5	0.2839	0.2840	0.2840	0.0000	0.00%
0.6	0.4331	0.4333	0.4333	0.0000	0.00%
0.7	0.6319	0.6323	0.6323	0.0000	0.00%
0.8	0.8959	0.8965	0.8965	0.0000	0.00%
0.9	1.2469	1.2479	1.2479	0.0000	0.00%
1	1.7167	1.7181	1.7183	0.0002	0.01%

Više primera Košijevih problema rešenih numeričkim metodama, može se naći ovde [11].

5.4 Stabilnost numeričkih algoritama

Da bismo koristili numeričke metode za rešavanje Košijevog problema, već smo pomenuli da on mora biti korektno postavljen i dobro uslovljen. Međutim, i tada se dešava da, usled neminovnih numeričkih grešaka na svakom koraku, dolazi do velikog nagomilavanja greške, tako da dobijeno približno rešenje znatno odstupa od tačnog. Takvi numerički algoritmi nazivaju se nestabilni algoritmi. Kod nestabilnih algoritama korak h mora da bude dovoljno mali, da bi greška ostala u dozvoljenim granicama.

Primer 5.10. Neka je dat Košijev problem

$$y' = ay, \quad a \in \mathbb{R},$$

$$y(0) = 1.$$

Njegovo rešenje je

$$y(x) = e^{ax}. \quad (5.3)$$

Ojlerovom metodom, približno rešenje y_i u tački x_i dobijamo iz jednačine

$$y_i = y_{i-1} + h(ay_{i-1}) = (1 + ah)y_{i-1},$$

odnosno

$$y_i = (1 + ah)^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Ako je $a < 0$, rešenje (5.3) opada i teži nuli kada $x \rightarrow \infty$, dok približno rešenje može neograničeno da raste i osciluje u znaku ako je korak h takav da je

$$1 + ah < -1,$$

odnosno

$$h > \frac{2}{|a|}.$$

Dakle, ako je $|a|$ veliko, neophodno je da korak h bude vrlo mali.

Ako primenimo modifikaciju Ojlerove metode sa trapeznom formulom na isti problem, približno rešenje dobijamo po formuli

$$y_i = y_{i-1} + \frac{ah}{2}(y_{i-1} + y_i),$$

odnosno

$$y_i = \frac{1 + \frac{ah}{2}}{1 - \frac{ah}{2}} y_{i-1} = \left(\frac{1 + \frac{ah}{2}}{1 - \frac{ah}{2}} \right)^i, \quad i = 0, 1, \dots$$

Ako je $a < 0$, približno rešenje y_i opada i teži nuli kada $i \rightarrow \infty$, kao i tačno rešenje. Dakle, približno rešenje se ponaša isto kao i tačno rešenje bez obzira na veličinu koraka h , što znači da je ova metoda stabilna.

Ako na isti problem primenimo metodu Runge-Kuta, približno rešenje dobijamo formulama

$$\begin{aligned} k_1^{i-1}(h) &= ah y_{i-1}, \\ k_2^{i-1}(h) &= ah \left(1 + \frac{ah}{2} \right) y_{i-1}, \\ k_3^{i-1}(h) &= ah \left(1 + \frac{ah}{2} + \frac{a^2 h^2}{4} \right) y_{i-1}, \\ k_4^{i-1}(h) &= ah \left(1 + ah + \frac{a^2 h^2}{2} + \frac{a^3 h^3}{4} \right) y_{i-1}, \\ y_i &= \left(1 + ah + \frac{a^2 h^2}{2} + \frac{a^3 h^3}{6} + \frac{a^4 h^4}{24} \right) y_{i-1}, \end{aligned}$$

pa je približno rešenje u tački x_i

$$y_i = \left(1 + ah + \frac{a^2 h^2}{2} + \frac{a^3 h^3}{6} + \frac{a^4 h^4}{24} \right)^i.$$

Ako je $a = -100$, a $h = 0.03$, onda je $y_i = \left(\frac{11}{8} \right)^i$, pa je u tački $x = 3$ približna vrednost rešenja $y(3) = 6.8 \cdot 10^{13}$. Ako je $h = 0.02$, u istoj tački dobijamo približnu vrednost rešenja $y(3) = 2.7 \cdot 10^{-72}$, što odgovara ponašanju tačnog rešenja. Dakle, i kod ove metode je neophodno izabrati odgovarajući korak h , ako se primenjuje na probleme sa brzo opadajućim rešenjima.

6 Zaključak

U ovom radu su opisane neke alternativne metode za rešavanje Košijevih problema običnih diferencijalnih jednačina, koje se koriste kada se ne može analitički doći do rešenja ili je njihovo rešavanje tim putem dosta komplikovano.

Kvalitativnom analizom možemo utvrditi da li rešenje nekog Košijevog problema postoji i ukoliko postoji, da li je jedinstveno i na kom intervalu je definisano. Videli smo kroz primere da je taj pristup koristan u problemima u kojima je neko rešenje očigledno, ali treba dokazati njegovu jedinstvenost. Rezultati kvalitativne analize koriste se i pre primene numeričkih metoda, koje zatim primenjujemo tek ako postoji jedinstveno rešenje Košijevog problema. Geometrijskim pristupom, tj. skiciranjem polja pravaca sa dovoljno gustim linijskim elementima, može se, u nekim slučajevima, sasvim dobro proceniti izgled integralne krive, odnosno skicirati grafik rešenja. I kod ovog pristupa možemo koristiti teoreme o egzistenciji i jedinstvenosti rešenja, da bismo bolje razumeli prirodu rešenja koje naslućujemo. Naravno, nedostaci ova dva pristupa su u tome što se njima rešenje Košijevog problema samo pogađa, odnosno procenjuje, ili se utvrđuje njegovo postojanje i jedinstvenost, a ne može se izračunati, niti aproksimirati.

Analitičkim aproksimativnim metodama možemo odrediti približno, a u nekim slučajevima i tačno rešenje Košijevog problema. Problem ovih metoda je što nisu pogodne za realizaciju na računaru, zbog komplikovanosti njihovih algoritama. Na primer, kod Pikarove metode, potrebno je rešavati integrale koji iz koraka u korak postaju sve kompleksniji. Takođe, lakoća i uopšte mogućnost rešavanja Košijevog problema ovim metodama, dosta zavisi i od kompleksnosti diferencijalne jednačine. Sa druge strane, numeričkim metodama problem svodimo samo na osnovne računске operacije i evaluacije vrednosti funkcija u nekim tačkama, što je vrlo jednostavno realizovati na računaru. Videli smo kroz primere da se njima može postići izuzetna tačnost, gde su nam se približna rešenja gotovo poklapala sa tačnim rešenjima problema. Ojlerova metoda je najstarija i najjednostavnija numerička metoda, a takođe je i najgrublja. Metode tipa Runge-Kuta, koje su generalizacija Ojlerove metode, su malo komplikovanije i iziskuju veći numerički napor, ali i daju dosta bolju tačnost približnog rešenja. Što je veći red metode, veći je numerički napor, ali je veća i tačnost. Najefikasnije metode koje su ovde obrađene su metode konačnih razlika, tj. Milnova i Adamsova metoda. One spadaju u grupu višeslojnih metoda, gde koristimo poznate približne vrednosti u prvim nekoliko čvorova da izračunamo približnu vrednost u narednom čvoru. Za izračunavanje tog početnog odsečka koristimo metode tipa Runge-Kuta ili neku od analitičkih metoda, u čemu se najviše i ogleda njihova korist.

Literatura

- [1] Lažetić N. Diferencijalne jednačine A. Matematički fakultet; 2016.
- [2] Zill D. A First Course in Differential Equations with Modeling Applications. Brooks/Cole, Cengage Learning; 2012.
- [3] Adkins W, Davidson M. Ordinary Differential Equations. Springer; 2012.
- [4] Jannetta A. Slope field plotter. URL: <https://www.geogebra.org/m/W7dAdgqc>
- [5] Kontrová L, Šusteková D. Teaching with GeoGebra versus Traditional Method. University of Žilina; 2020.
- [6] Sari P, Hadiyan A, Antari D. Exploring Derivates by Means of GeoGebra. International Journal on Emerging Mathematics Education; 2018.
- [7] Jovanović B, Radunović D. Numerička analiza. Matematički fakultet; 2003.
- [8] Iserles A. A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations. Cambridge University Press; 2009.
- [9] Zill D, Cullen M. Differential Equations with Boundry-Value Problems. Brooks/Cole, Cengage Learning; 2016.
- [10] Bulirsch R, Stoer J. Introduction to Numerical Analysis. Springer; 1991.
- [11] Radunović D, Samardžić A, Marić F. Numeričke metode, zbirka zadataka kroz C, Fortran i Matlab. Akademska misao; 2005.
- [12] Radunović D. Numeričke metode. Akademska misao; 2004.
- [13] Biswas BN, Chatterjee S, Mukherjee SP, Pal S. A discussion on Euler Method: a Review. Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications; 2013.
- [14] Euler L. Institutionum calculi integralis volumen primum. Euler Archive - All Works; 1768.
- [15] Butcher JC. On Runge-Kutta Processes of High Order. University of Canterbury, New Zealand; 1963.