Математички факултет

Универзитет у Београду

„Примена нових технологија на савладавање одређених елемената алгебре у условима рада на даљину“

Мастер рад

Ментор:

Проф. Александар Липковски

Студент:

Душица Ђукић

Београд, 2022.

Садржај:

ПРЕДГОВОР

Математика је један од најважнијих алата за развој вештина размишљања, међутим са друге стране математика се углавном сматра једним од најтежих предмета током школовања.

Основни разлог због ког ученици сматрају да је математику тешко разумети је тај што се састоји од специфичне мреже апстрактних односа, а алгебра је једна од области која највише укључује ове односе. Теорија и пракса су показале да ученици имају велике потешкоће са разумевањем алгебре у вишим разредима.

Кроз овај рад бавимо се раном алгебром и неким елеметарним областима из алгебре као и начином представљања истих у току онлајн наставе.

Рад се састоји од пет глава. Прва глава је уводна и у њој је дат кратак историјат алгебре и разматрање узрока проблема који настају при преласку са аритметике на алгебру. Друга глава је једна од области математике која се учи на самом почетку преласка ученика у више разреде, односно у другој глави су представљени скупови и неки важни појмови које ученици треба да савладају током петог разреда, као и начин на који ова област може да се предстви током онлајн наставе. У трећој глави се уводи појам „Разломци“ такође један од кључних појмова у основношколском образовању. У овом делу рада сам представила неке од особина разломака попут сабирања и одузимања разломака, множење и дељење, скраћивање разломака и слично. Код овог дела градива представљам други начин приказивања лекција деци у време пандемије, за приказивање разломака одабрала сам апликацију Google презентација где сам објаснила како се она користи и представила један кратак пример часа. Што се тиче четврте главе ту се обрађује нова област математике која је такође сама по себи веома важна за ученике основних школа, а и за њихов даљи рад, то је област линеарне једначине и неједначине. Овде сам поред неких основних дефиниција и особина представила неколико примера на којима ученици најлакше схватају суштину градива и поступак рада. За презентовање ове области у условима школовања какви су били у претходном периоду изабрала сам апликацију Zoom и представила пример како да након испредаваног градива саставите један тест из области једначине и неједначине. За крај односно пету и последњу главу овог рада дала сам анализу успеха ученика основне школе из Новог Сада за време пандемије, односно кроз упитник који је попуњавао одређен број ученика седмог и осмог разреда дошли смо до закључака о постигнућима и мишљењима ученика о онлајн настави математике.

1.УВОД

1.1 Појам алгебра

На питање „Шта је алгебра?“ добили бисмо различите одговоре у зависности од тога кога питамо.

Ученици би вероватно алгебру дефинисали као једну од грана математике у којој треба пронаћи тачну вредност непознате x или y, док за разлику од ученика математичари би приликом тог питања одмах поменули прстене и поља.

Корени алгебре се могу пратити од древних Вавилонаца, који су развили напредни аритметички систем са којим су могли да изврше прорачуне на алгоритамски начин. Вавилонци су развили формуле за израчунавање решења за проблеме који се данас типично решавају коришћењем линеарних једначина, квадратних једначина и неодређених линеарних једначина.

Насупрот Вавиловњана, Египћани, Грци и Кинези су такве једначине решавали геометријским методама. У почетку су се алгебарски проблеми писали текстуално, а не симболима, па је било јако тешко формулисати проблем.

До времена Платона Грчка математика је доживела драстичну промену. Грци су креирали геометријску алгебру. Диофант је био грчки математичар и аутор серије књига зване Arithmetica. Ти текстови се баве решавањем алгебарских једначина и водили су у теорију бројева у модерној нотацији Диофантске једначине.

Хеленистички математичари Херон и Диофант као и индијски математичари наставили су традиције Египта и Вавилона кроз Диофантово дело Arithmetica и књигу Brahmasphutasiddhanta на вишем нивоу. На пример прво комплетно аритметичко решење квадратне једначине је описао Брамагупта у својој књизи Brahmasphutasiddhanta. Касније су персијски и арапски математичари развили методе са знатно вишим степеном софистикације.

Диофант је направио велике промене у алгебри уводећи симболику. Алгебарски симболи су убрзо заменили писање алгебре у прози, у вербалном облику познатом као реторичка алгебра, односно алгебра у којој су једначине записане речима. Осим тога, проучавао је алгебарске једначине и њихова рационална решења, размотрио је низ задатака о представљању бројева у одређеном облику и још општије проблеме решавања неодређених једначина са целим и позитивним рационалним бројевима.

Само порекло назива алгебра се везује за књигу арапског математичара al-Khwarizmi-a (математичар, астроном, географ и астролог из IX века) „The Compendious Book on Calculation by Completion and Balancing” што у преводу значи „Сажета књига о прорачунима комплетирањем и балансирањем“.

Израз алгебра је изведен из назива једне од основних операција са једначинама al-jabr, што значи обнављање, а односи се на поступак успостављања баланса додавањем истог броја са обе стране једнакости.

У свом најпознатијем делу al-Khwarizmi пише о решавању линеарних и квадратних једначина и даје општу методу за њихово решавање користећи само речи. Књига садржи многе практичне свакодневне проблеме тог времена као што су расподела земљишта, плаћање радника или подела наследства.

1.2. Рана алгебра и рано алгебарско мишљење

У многим земљама ученици се са алгебром сусрећу у вишим разредима основне школе, алгебра се подучава након аритметике када се процени да ученици владају неопходним вештинама у раду са аритметичким структурама и да су развили способности које омогућавају прихватање алгебарског резоновања [3].

Моћ математике лежи у релацијама и трансформацијама које настају уочавањем правилности и њиховом генерализацијом. Међутим разумевање математике није меморисање алгоритама који могу бити корисни приликом израчунавања, самим тим треба снажити ученике у разумевању математичких проблема и осмишљавању начина решавања проблема.

Апстрактност алгебре је један од главних разлога због ког ученици имају проблема са разумевањем градива, алгебарске идеје повезују све области математике и због тога је потребно дубље ангажовање ученика.

Најједноставније речено под раном алгебром се подразумева процес убацивања алгебарских садржаја заједно са уобичајеним аритметичким садржајима у наставни план и програм за ниже разреде основне школе.

Истраживања су показала да ученици имају потешкоћа приликом схватања да слово k или било које друго слово, може означавати било који број. Разлог је најчешће тај што су у настави аритметике навикли да се баве конкретним случајевима. Сложеност алгебре се приписује синтатичким недостацима нпр слова се бирају произвољно, невидљиви знак множења.

Алгебра је језик, а како бисмо га разумели морамо пре свега разумети оно што променљиве представљају. Тај језик подразумева способност читања и писања бројевним и симболичким репрезентацијама у изразима, формулама, једначинама и неједначинама.

Оно што је такође веома важно да ученици савладају током ране алгебре јесте флексибилност, односно да уоче да је запис 5x исто што и запис x5, само је питање који је запис коме лакши.

За увођење алгебарског мишљења у наставни план и програм најзаслужнији је математичар Јамес Ј. Капут (1952-2005) који описује коришћење симбола и њихово значење.

1.3. Алгебра у школској настави

Како се математика временом развијала област алгебре је постала шира па се почела делити на апстрактну алгебру и на школску алгебру. Главна разлика између ове две врсте алгебре је баш у том нивоу апстракције.

Школска алгебра представља полазну тачку за развијање алгебарског мишљења које је основа за напредну алгебру.

Током упознавања са алгебром најпроблематичнија подручја су алгебарски изрази, алгебарске једначине и текстуални задаци. Знање аритметике је основни предуслов за разумевање алгебре, због тога ученицима треба пружити прилику да виде односе између те две гране математике. Потребне су активности које се фокусирају на прелазак са аритметичких на алгебарске проблеме.

Постоји фаза у настави када увођење алгебре може једноставне ствари учинити компликованим, али исто тако без алгебре није могуће компликоване ствари учинити простим.

Као једно од решења за проблем прелаза са аритметике на алгебру у нижим разредима основне школе препоручује се истраживање шаблона и правилности. Такав вид истраживања би се могао осмислити у различитим облицима попут сликовног, геометријског приказа, правилности које се понављају и слично.

1.4. Појам, врсте и сврха визуализације

Модерне технологије су у толикој мери присутне у нашим свакодневним активностима тако да је постало потпуно природно да кућном биоскопу команде задајемо гласом или да додиривањем сличице на телефону поручујемо гардеробу, обућу, књиге, храну и слично.

Истраживачи центра PARC (engl. Palo Alto Research Center) су допринели свеприсутности модерне технологије, јер су заслужни за креирање WIMP (Windows Icons Menus Pointer), графичког интерфејса без кога се не могу замислити савремени рачунарски оперативни системи.

Очигледно је да се због толике заступљености рачунарства наша комуникација преусмерила примарно на графичка окружења у којима визуелни елементи као што су слике, боје и анимације битно обогаћују вербални материјал којим размењујемо информације. Имајући у виду чињеницу да свакодневно примимо више података кроз визуелне канале него кроз сва друга чула заједно, употреба визуелних елемената често је начин да се ефикасније споразумемо и успешније изборимо са великом количином информација које загађују нашу комуникацију.

Иако многи ове промене сматрају негативним, чињеница је да једним знаком (емотиконом) можемо да заменимо читаве реченице и да на најбржи начин можемо другој особи да саопштимо како се осећамо.

- ***Визуелно мишљење***
  Амерички неуропсихолог Роџер Спери једном приликом је написао да образовни систем у савременом друштву запоставља десну мождану хемисферу. Овакав закључак је донео на основу истраживања пацијената којима је због честих епилептичних напада прекинут сноп нервних влакана који повезује мождане хемисфере. Спери је са својим сарадницима уочио да овакви пацијенти нису у стању да прочитају реч која им се приказује у левом визуелном пољу. Са друге стране исти пацијенти су успешно решавали задатке када су користили десно око. Спери је на основу тога дошао до закључка да је лева хемисфера специјализована за језичке функције, док су центри десне хемисфере задужени за извршење невербалних задатака као што су на пример цртање, препознавање лица итд.
  Спери је био свестан да су резултати његових истраживања често погрешно интерпретирани. Слично се десило и са Сперијевом тврдњом да класично образовање

које се у највећој мери базирало на читању, писању и аритметици, потенцира употребу леве мождане хемисфере. Као одговор на ову критику јавља се велики број стручних програма образовања којима се код деце наводно развија креативност и стимулише развој десне хемисфере. Ова потреба постаје све израженија у времену у коме се о младим људима говори као о „дигиталним уређајима“ који се од најранијег узраста сусрећу са визуелним формама комуникације, па самим тим уче, размишљају и обрађују информације на потпуно другачији начин у односу на раније генерације.
Ако прихватимо чињеницу да је вербална комуникација доминантна форма размене информација, следи питање у којој мери је то утицало на начин на који учимо? Асиметричност можданих хемисфера најизраженија је управо у зонама које су специјализоване за разумевање говора, па су тако код већине особа, Брокаова говорна зона и планум темпорале леве мождане хемифере неколико пута већи од аналогних подручја десне хемисфере. Јачање ове асиметрије повезује се са порастом значаја вербалне комуникације и стицањем језичких компетенција.

- ***Визуелна комуникација***

  Најновија истраживања применом функционалне магнетне резонанце показују да је унутрашњи говор готово увек праћен визуелним представама објеката и догађаја о којима размишљамо. На пример, ако добијете задатак да у себи формулишете реченицу која садржи појмове учионица и ђаци највероватније ћете замислити слику неке учионице са више детаља него што реченица може да опише. При томе ће ментални приказ бити заснован на неком вашем претходном искуству. Објашњење једног оваквог феномена може се пронаћи у теорији двојаког кодирања (TDK), оно представља постојање два ментална система, вербалног и невербалног, који функционишу као сложена асоцијативна мрежа језичких и визуелних представа. Ово кодирање повећава ефикасност учења новог материјала и присећање већ наученог када је нпр усмено предавање праћено сликом. Чак и да само предавање или неки текст није праћен сликом, ове визуелне представе ћемо сами формирати да бисмо олакшали разумевање и памћење прочитаног.

  Најшире схваћено, визуелна комуникација представља процес преношења информација у форми која се претежно ослања на визуелну перцепцију и употребу цртежа, анимација и слично.

  У времену рачунарства употреба визуелног језика постаје готово неизбежна. Графички симболи које виђамо на кућним апаратима, у аутомобилима, ресторанима само су додатни корак у евалуацији потребе човека да бића, објекте и догађаје из своје околине представи на ефикасан и једноставан начин.

  Постоје најмање две битне предности представљања објеката одговарајућим визуелним кодовима у односу на употребу речи. Прва предност је та што се визуелно кодирање базира на универзално разумљивим симболима који за разлику од вербалних најчешће нису произвољни јер имају перцептивне карактеристике стварних обејаката. Међутим говорници различитих језика ће тај објекат визуелно представити на свима препознатљив начин. Док је друга предност оваквог кодирања што се тиме омогућава паралелно процесирање информација, за разлику од говора и текста који се обрађују реч по реч.

Упоредите на пример ситуацију када вам неко диктира успех ученика на крају школске године у процентима и ситуацију када вам неко исте податке приказује графички колико је одличних, врло добрих, добрих, довољних и недовољних ученика.

- ***Визуелна писменост***

  Термин визуелна писменост осмислио је Џон Дебес још 1969. године, његова првобитна дефиниција је гласила: „Визуелна писменост представља групу способности које појединац развија гледањем док истовремено интегрише остала чулна искуства. Развој ових особина је од фундаменталне важности за нормално људско учење. Када су развијене, оне омогућавају визуелно писменој особи да бира и интерпретира видљиве поступке, предмете и симболе који га окружују“. Међутим данашња дефиниција се разликује од првобитне због развоја технологије и дигиталних могућности. Мезарис објашњава овај термин као стицање знања и искуства о функционисању визуелних медија уз повећану свесност о значењу њиховог функционисања.

  Идеја о употреби слика за представљање техничких предмета, није нова. Још од раније слике из многих земаља показују да су визуелне интерпретације већ дуго важан фактор у комуникацији о свету и његовом функционисању. На пример, читање мапа и икс зрака су увек били значајни у људском животу.

  Историјат визуелне писмености може се посматрати у односу на развој рачунарске писмености. Током 1990. године рачунар постаје толико интегрисан у универзитетске и академске активности да су многи курсеви садржали и део који је извођен уз помоћ технолошке компоненте. У наредној деценији свакодневни раст коришћења технологије води до тога да се све већи делови наставе обављају уз помоћ рачунара. Јасан показатељ је учење на даљину. Визуелна писменост може пратити исти пут као рачунарска писменост, али уз много бржи развој.

  Слике могу бити веома моћан фактор у људској свести. Визуелна писменост укључује критичко мишљење и осмишљавање решења који се могу користити током свих периода учења. Импликације учења визуелне писмености су следеће:

  - развијање критичког мишљења у односу на визуелне информације;
  - побољшавање вербалне и писмене комуникације;
  - побољшавање креативности;
  - охрабривање ученика да уочавају скривене поруке које су уграђене у значење слике;
  - интегрисање визуелене писмености са свим пољима учења.

2.СКУПОВИ

2.1. О скуповима

До појма скупа се може врло лако доћи посматрајући разне групе, скупине, мноштва неке врсте објеката, ствари, живих бића и слично. Тако имамо скуп становника неког града, скуп књига у библиотеци, скуп столова у ресторану итд.

Творац теорије скупова је Георг Кантор, немачки математичар који је засновао теорију скупова око 1870. године. Он је дефинисао скупове на следећи начин: Под скупом ћемо подразумевати било коју колекцију. Бесконачни скуп се обично специфицује навођењем особине свих његових чланова. Оштре критике су праћене каснијим похвалама. Године 1904. Крељевско друштво га је наградило Силвестер медаљом, што је највиша част која се може доделити за математички рад.

Данас, по савременом схватању појам скупа се не дефинише већ се усваја интуитивно као целина неких различитих објеката. Предмети из којих је скуп састављен зову се елементи скупа. Тако постоје скупови са коначно много елемената па њих називамо коначним скуповима (тада можемо пребројати његове чланове). На пример скуп {1, 5, 16} је скуп који се састоји од три члана, бројеви 1, 5, 16 чине елементе тог скупа. Редослед навођења чланова скупа није битан. За веће скупове за које је образац навођења јасан могу се користити тачкице... На пример скуп свих непарних целих бројева између 10 и 70 би се могао означити са: {11, 13, 15, ..., 69}. Насупрот коначним скуповима имамо бесконачне скупове који се обично специфицује навођењем особине свих његових чланова. Уобичајена нотација користи променљиву која означава члан скупа и услов изражен преко те променљиве. На пример, скуп свих парних бројева већих од 0 могао би се спецификовати са A={x | x је паран и x је већи од 0}, а чита се: „A је скуп свих бројева x, тако да су парни и већи од 0.“ Тако на пример скуп столица у биоскопу представља један коначан скуп, док скуп свих целих бројева садржи бесконачно много елемената.

Скупове најчешће обележавамо великим латиничним словима A,B ,..., а елементе скупа малим латиничним словима a,b,... Ако је a елемент скупа A то бисмо обележили овако a∈A, а ако не припада скупу A онда то записујемо a∉A. Овакве записе читамо a припада скупу A (a је елемент скупа A) и a не припада скупу A (a није елемент скупа A). За скуп који нема ниједан елемент кажемо да је празан и означавамо га ∅ [1].

Такође желим да дефинишем једнаке скупове, као оне где су сви елементи једног скупа уједно елементи другог скупа и обрнуто, сви елементи другог скупа су и елементи првог скупа. Записујемо: A=B ако и само ако (∀x)(x∈A ⇔ x∈B), на пример по дефиницији би било {a,a,a,b,b,c}={a,b,b,c,c,c}={a,b,c}. Дакле, сваки члан скупа је присутан једним појављивањем, а сва остала његова појављивања уколико их има нису важна и уз то ни редослед навођења чланова није битан.

2.2. Појам скупа

Да би скуп био добро дефинисан мора бити јасно шта су му чланови, на пример скуп свих планина није добро дефинисан све док се не утврди критеријум шта је планина, а шта је брдо као и шта је планина са два врха, а шта су две планине.

Енглески филозоф Бертранд Расел је 1901.године открио парадокс који је настао од наизглед прихватљиве особине којом се специфицира скуп. Расел је први уочио да ако се скупови дефинишу преко особина својих чланова неки скупови ће бити сами себи чланови док други неће. Можемо дефинисати скуп A као скуп свих оних скупова који сами себи нису члан: A={x | x∉x}, тада се можемо запитати да ли је A сам себи члан или не. Ако A није сам себи члан, онда он задовољава услов који је потребан да би нешто било члан скупа A тј. x∉x и према томе јесте члан од A, односно јесте сам себи члан. Ако је ипак A сам себи члан он не задовољава услов да буде члан скупа A па према томе није члан од A тј. самог себе. Пошто се из обе претпоставке изводи супротно тврђење, добија се логички закључак да овакав скуп A не може да постоји.

Други начин да се дефинишу бесконачни скупови је увођење неког правила за рекурзивно генерисање елемената скупа из неке коначне основе. На пример скуп M= {1, 3, 5, 7,..} може се спецификовати и навођењем особина свих његових елемената на следећи начин, M={x | x је непаран и x је већи од 0}. Сви елементи овог скупа могу се генерисати применом следећих правила:

a) 1 ϵ M;
b) ако x ϵ M, онда и x+2 ϵ M.

Првим делом правила се утврђује да је 1 елемент скупа M, док се другим правилом утврђује да су сви цели непарни бројеви елементи скупа M, односно пошто је 1 елемент, онда је и 3, па и 5 и тако даље. У општем случају код правила за генерисање скупова прво се наводи коначан број чланова за које се експлицитно наводи да су чланови скупа E, најмање један, а може их бити и више. Затим се наводи коначан број исказа који дефинишу неки однос између чланова, тако да се до сваког члана скупа може доћи следећи ланац.

Пример: Нека скуп A садржи следеће чланове A={8, 18, 28, 38,...}, он се може дефинисати, навођењем особина свих његових елемената на следећи начин A={x | x је природан број и x + 2 је дељив са 10} или A={x | x је природан број чија је последња цифра 8}.

Пример: Нека је B={1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16,...}, он се може дефинисати на следећи начин B={x | x=1/2к, а к је ненегативан цео број}. Навођењем правила за генерисање чланова скупа, исти скуп се може спецификовати на следећи начин:

a) 1 ϵ B;
b) ако је x ϵ B онда је и $\frac{x}{2}$ ϵ B.

2.3. Операције са скуповима

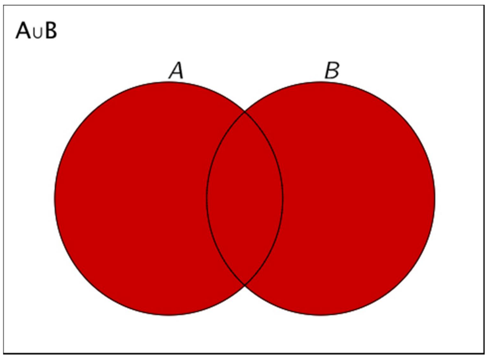
Операције са скуповима које ће у наставку бити дефинисане су:

1) унија;
2) пресек;
3) разлика;

4) симетрична разлика;
5) партитивни скуп;
6) декартов производ;
7) комплемент скупа.

2.3.1. Унија скупова

Скуп свих елемената који се налазе у барем једном од задатих скупова A или B, зове се унија скупова A и B и означава се са A∪B (Слика 1.). Ако посматрамо дефиницију записану симболима то би изгледало овако: A∪B={x I x∈ A V x∈ B}.



Слика 1. Унија скупова

Пример: Нека је A={1,2,3,4,5}, а B={6,7,8}, тада је A∪B={1,2,3,4,5,6,7,8}, односно сви елементи који се налазе и у скупу A и у скупу B.

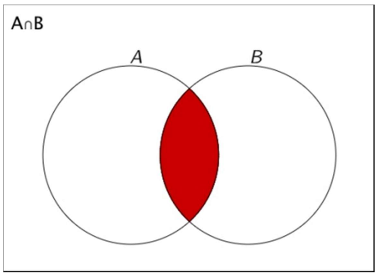
Теорема: За било која два скупа A и B важи A∪B = B∪A.

Помоћу Веновог дијаграма лако се може доћи до закључка да се број елемената уније два скупа рачуна помоћу n(A∪B)=n(A)+n(B)−n(A∩B). Ако су скупови A и B дисјунктни (односно њихов пресек је празан скуп, тј нема ниједан елеменат) тада је n(A∩B)=0, па у том случају важи n(A∪B)=n(A)+n(B).

Ако је A неки произвољан скуп који је подскуп неког скупа B, A⊂B, тада је њихова унија скуп B, тј. A∪B=B.

2.3.2. Пресек скупова

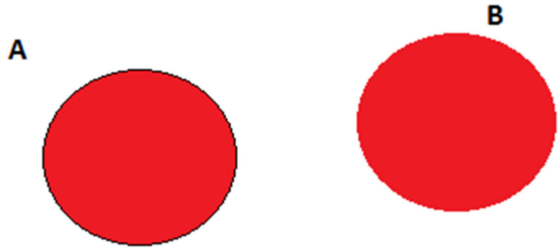
Скуп свих елемената који су елементи скупа A и скупа B зове се пресек скупова A и B и обележава се са A∩B (Слика 2.). Ако посматрамо дефиницију записану симболима то би изгледало овако: A∩B={x I x∈ A Λ x∈ B}.



Слика 2. Пресек скупова

За скупове чији је пресек празан скуп кажемо

да су дисјунктни скупови, односно за њих се још каже да немају заједничких елемената (Слика 3.).



Слика 3. Пресек скупова је празан скуп

Пример: Одредити пресек задатих скупова:

a) A је скуп свих непарних бројева, а B је скуп свих парних бројева;
b) M је скуп свих делитеља броја 12, а K је скуп свих делитеља броја 18.

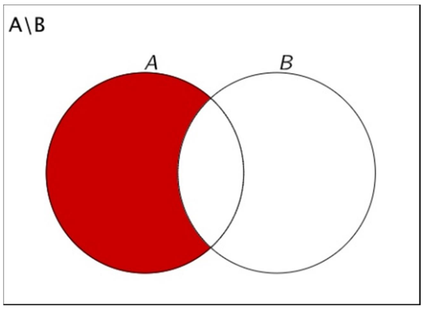
Решење:

a) A и B су дисјунктни скупови, односно немају ни један заједнички елемент, па је самим тим њихов пресек празан скуп тј. $A \cap B = \emptyset$;
b) Делитељи броја 12 су 1, 2, 3, 4, 6, 12, па је $M=\{1,2,3,4,6,12\}$, а делитељи броја 18 су 1,2,3,6,9,18, па је $K=\{1,2,3,6,9,18\}$ одакле следи да су њихови заједнички елементи односно њихов пресек $M \cap K=\{1,2,3,6\}$.

Теорема: За свака два скупа A и B важи: $A \cap B = B \cap A$.

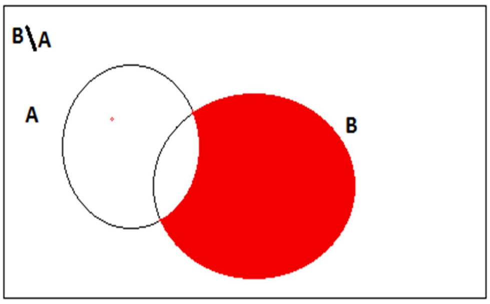
2.3.3. Разлика скупова

Скуп свих елемената који су елементи скупа A, али нису елементи скупа B зове се разлика скупова A и B и означава се A\B. Ако посматрамо дефиницију записану симболима то би изгледало овако: $A \setminus B=\{x | x \in A \land x \notin B\}$.



Слика 4. Разлика скупова A\B

Наравно, можемо посматрати и скуп B\A, то би били сви елементи скупа B који се не налазе у скупу A, односно записано симболима $B \setminus A=\{x | x \in B \land x \notin A\}$ (Слика 5.). Помоћу Веновог дијаграма то изгледа овако:



Слика 5. Разлика скупова B\A

Приметимо да је скуп A\B различит од скупа B\A. Другим речима, разлика скупова није комутативна операција тј. A\B≠B\A.

На темељу дефиниције разлике два скупа, може се закључити да су скупови A\B и B\A дисјунктни скупови тј. (A \B)∩(B\A)=∅.

Поред већ описаних својстава за ову операцију скупова важи и следеће:

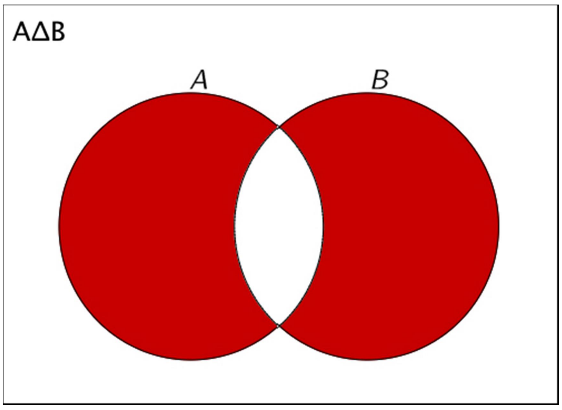
1. разлика једнаких скупова је празан скуп: A\A=∅;
2. разлика неког скупа и празног скупа је: A\∅=A , ∅\A=∅;
3. разлика скупова није асоцијативна операција: A\(B\C)≠(A\B)\C.

Као и до сада и код разлике скупова можемо помоћу Веновог дијаграма доћи до закључка да важи: n(A\B)=n(A)−n(A∩B), односно број елемената разлике скупа A\B једнака је разлици броја елемената скупа A и броја елемената пресека скупова A и B.

2.3.4. Симетрична разлика

Скуп (A\B)∪(B\A) назива се симетрична разлика (Слика 6.) и најчешће се обележава са Δ, односно AΔB=(A\B)∪(B\A).

Другим речима, симетрична разлика скупова A и B је скуп свих елемената који су елементи скупа AUB, а нису елементи скупа A∩B.



Слика 6. Симетрична разлика

Пример:

Одредити симетричну разлику скупова A и B, ако је A скуп свих делитеља броја 60, а B скуп свих делитеља броја 36.

Решење:

Елементи скупова: A и B су A={1,2,3,4,6,9,12,18,36}, B={1,2,3,4,5,6,10,12,15,20,30,60}.

Разлике скупова су: A\B={5,10,15,20,30,60}, а B\A={9,18,36}.

Симетрична разлика је: A∆B={5,9,10,15,18,20,30,36,60}.

2.3.5. Партитивни скуп

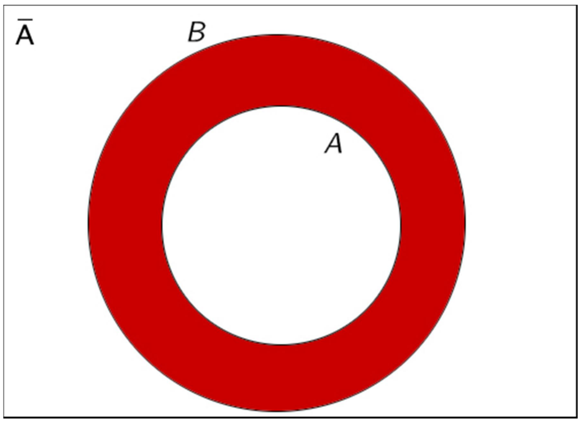
Партитивни скуп је скуп свих подскупова скупа A и обележава се са P(A). Број чланова партитивног скупа A који има коначан број елемената к јесте управо $2^{к}$.

Пример: Ако је A={1,2,3) , онда је P(A)={∅, {1},{2},{3},{1,2},{1,3},{2,3},{1,2,3}}.

2.3.6. Комплемент скупа

Унија, пресек и разлика су бинарне скуповне операције, док је комплемент скупа унарна операција. Комплемент скупа је скуп свих елемената који нису садржани у посматраном скупу. Комплемент најчешће обележавамо са Ā. Ако посматрамо запис помоћу симбола то изгледа овако: Ā={x I x∊B ∧ x∉A} (Слика 7.).

Када комплемент скупа представљамо Веновим дијаграмом добијамо:



Слика 7. Комплемент скупа

Пример:

Ако је A={1,3,7} и B={1,2,3,4,5,6,7} онда је : Ā={2,4,5,6}.

2.3.7. Декартов производ

Чувени француски филозоф и математичар Рене Декарт је у математику увео појам правоуглог координатног система који се и данас у његову част назива Декартовим координатним системом.

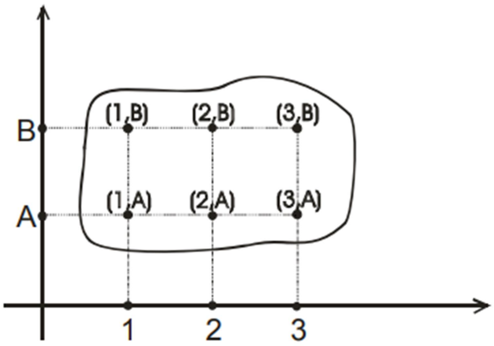
У том систему свакој тачки равни одговара један уређен пар реалних бројева (x,y) и обрнуто, сваком уређеном пару бројева (x,y) одговара тачно једна тачка у координатној равни. Први број x у том пару називамо првом координатом (апсцисом), а други y другом координатом (ординатом).

За уређене парове је карактеристична особина: (x,y)=(a,b) ако и само ако x=a ∧ y=b.

Декартов производ (Слика 8.) скупова A и B је скуп свих могућих уређених парова код којих је први члан елемент из скупа A, а други члан елемент из скупа B. Декартов производ се обележава са A×B, тако да ако дефиницију посматрамо помоћу симбола добијамо: A×B={(x,y)Ixϵ A Λ yϵB}.

Теорема: У Декартовом производу A×B≠B×A.

Пример: Ако је M={1,2,3} и K={A,B} онда је: M×K={(1,A),(1,B),(2,A),(2,B),(3,A),(3,B)}.



Слика 8. Декартов производ

Подскуп скупа

Ако су сви елементи скупа A истовремено и елементи скупа B, онда је скуп A подскуп скупа B и то записујемо A⊂B. У том случају за скуп B кажемо да је надскуп скупа A, односно B⊃A.

Пример: Нека је скуп A={2,4,6}, а скуп B је скуп свих целих природних, парних бројева, односно B={2,4,6,8,10,...}, одатле видимо да је скуп A подскуп скупа B.

Такође што треба да знамо јесте да су два скупа једнака ако имају исте елементе то јест ако је сваки елемент првог скупа елемент и другог скупа, као и сваки елемент другог скупа јесте елемент и првог скупа.

2.4. Бројевни скупови

Када је реч о бројевима скупови поређани од најмањег ка највећем су:

1) скуп природних бројева;
2) скуп целих бројева;
3) скуп рационалних бројева;
4) скуп реалних бројева;
5) скуп ирационалних бројева.

2.4.1. Скуп природних бројева

Скуп природних бројева се означава великим латиничним словом N, скраћеница од латинске речи naturalis = природно, а записује се: N={1,2,3,...,n,...}. Скуп N има бесконачно много елемената, па из тог разлога не постоји највећи природан број, зато када набрајамо елементе скупа природних бројева на крају стављамо три тачке.

Дефиниција: За скуп A кажемо да је бесконачан ако постоји инјективно пресликавање f: A → A такво да је f(A)≠A.
Ова дефиниција говори о томе да само бесконачни скупови могу бити инјективно пресликани на један од својих правих подскупова. Ову дефиницију је дао Дедекинд у својој књизи „Was

sind und was sollen die Zahlen?". Уместо израза инјективно пресликавање Дедекинд је користио „пресликавање сличности".

Дефиниција: Природан број a је дељив природним бројем b ако постоји природан број к такав да важи a=bк.

Теорема: Ако су природни бројеви a_1 и a_2, $a_1>a_2$, дељиви природним бројем к, онда су њихов збир и њихова разлика, односно a_1+a_2 и a_1-a_2 дељиви бројем к.

Теорема: Ако су a_1 и a_2 природни бројеви , $a_1>a_2$ и један од њих је дељив природним бројем к, а други није, онда њихов збир и њихова разлика нису дељиви бројем к.

Скуп природних бројева је уређен скуп јер за свака два његова члана a и b важи: $a=b$ или $a<b$ или $a>b$.

Теорема: Ако је $a\leq b$ и $b\leq c$, онда је $a\leq c$.

Пример: Ако је $4\leq 5$ и $5\leq 6$ онда је и $4\leq 6$.

Дефиниција: Узастопни бројеви су они између којих нема ниједан природан број. Такође ако посматрамо разлику два узастопна природна броја, уочавамо да је она увек једнака 1. (нпр. Два узастопна броја су 7 и 8 или 15 и 16 итд.).

Број 1 нема свог претходника у скупу природних бројева и за разлику од осталих бројева који имају по два суседна броја, он у скупу N има само једног.

Нула није природан број, али је често придружујемо том скупу. Скуп природних бројева којем придружујемо нулу означавамо са $N_0=N\cup\{0\}$.

У скупу N дефинисана релација „бити дељив“ је погодна да се неке чињенице у вези са њом доказују. Методе којима се служим приликом доказивања су једноставне и неће изазвати отпор код ученика петог (или шестог) разреда. При томе је важно да сваком својству које се доказује претходе уводне активности кроз које ученици наслуте опште тврђење и осете потребу да их докажу.

Такође знамо да су се ученици у нижим разредима срели са дељењем са остатком у скупу природних бројева, може се чак и рећи да су стекли рутину у том поступку. Због тога предлажем да се формулише и доказ следеће теореме:

За свако $a\in N_0$ и свако $b\in N$ постоје јединствени $q\in N_0$ и $r\in\{0,1,2,...,b-1\}$, такви да је $a=bq+r$.

Ако се определимо за алгебарски доказ ове теореме морамо се користити чињеницама у које ученици не сумњају, па их можемо подстаћи да сами закључе уз позивање на бројевну праву да важи:

Теорема о најмањем елементу: Сваки непразан подскуп скупа природних бројева садржи свој најмањи елемент, тај елемент је одређен и јединствен је.

Архимедово својство: За свака два природна броја a и b постоји природан број c, такав да је $a<bc$.

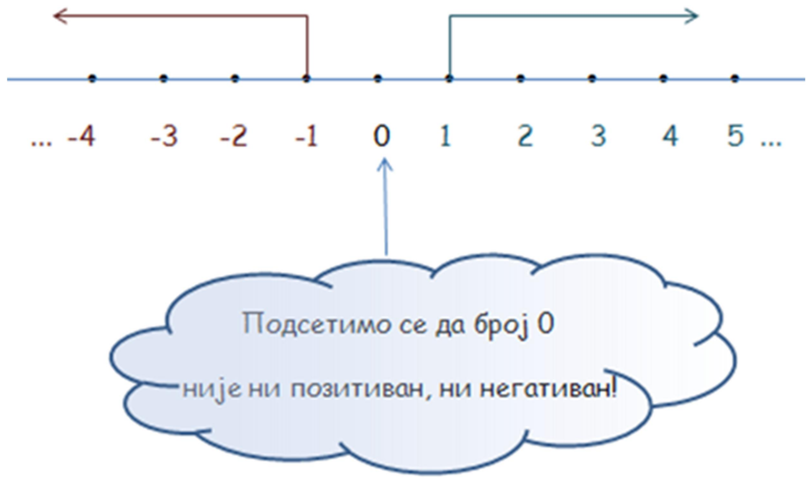
Последица: При дељењу броја a∈N_0 бројем b∈N, остатак може бити тачно један од бројева 0,1,...,b−1.

2.4.2. Скуп целих бројева

Бројеви који су мањи од 0 називају се негативни цели бројеви. Запис сваког негативног целог броја се састоји од знака – и природног броја, тако да тим записом приказујемо колико је вредност мања од 0.

Z^-=-1,-2,-3…
Односно $Z=Z^-U\{0\}UZ^+$ тј. скуп целих бројева је унија целих негативних бројева, нуле и целих позитивних бројева и они се најлакше могу представити на бројевној правој.

Када бројевну полуправу допунимо до праве, десно од нуле приказујемо позитивне целе бројеве,а лево од нуле негативне целе бројеве (Слика 9).



Слика 9. Позитивни и негативни цели бројеви

Цели бројеви су свуда око нас нпр.:

- вода мрзне на 0°C, а кључа на 100°C;
- у фебруару је просечна температура -3 степена;
- у лифту нам 0 говори да смо у приземљу,а -1 да смо у подруму.

Као код скупа природних бројева тако и код скупа целих бројева важе особине комутативности, асоцијативности и дистрибутивности. Скуп целих бројева садржи елемент 0 којег зовемо неутрални елемент за сабирање и важи a+0=0+a=a за свако a∈Z, нула је једини елемент са овим својством.

Неутрални елемент за множење у скупу целих бројева је елемент 1.

Цео број b је инверз целог броја a ако важи: a+b=b+a=0. Елемент b називамо супротним или инверзним елементом елемента a, он је јединствено одређен и означавамо га са –b. Код множења не постоји супротни елемент јер дељење није дефинисано у скупу целих бројева. Збир b+(−a) пише се као b–a и зове се разлика елемената b и a.

На скупу целих бројева ћемо још дефинисати и релацију уређења: $a \leq b$ ако и само ако $b-a \in N$. За сва три цела броја a,b и c важи: $a<b \wedge b<c \Rightarrow a<c$. За ову релацију код целих бројева важе рефлексивност, антисиметричност и транзитивност.

Теорема: За елементе скупа целих бројева важи:

1. $(a>0 \wedge b>0) \Rightarrow (a+b>0)$;

2. $(a>0 \wedge b>0) \Rightarrow (ab>0)$;

3. $(a<0 \wedge b<0) \Rightarrow (ab>0)$;

4. $(a>0 \wedge b<0) \Rightarrow (ab<0)$;

5. $(a<b) \Rightarrow (\forall c \in Z)(a+c<b+c)$;

6. $ab=0 \Rightarrow (a=0 \vee b=0)$;

7. $ab=ac \Rightarrow b=c$.

Доказ:

Доказаћу само случај 2. Нека је τ функција пројекције везана уз релацију еквиваленције ~ на скупу N×N, тј. пројекција τ сваком уређеном пару природних бројева (a,b) придружује одговарајући цео број. Нека је:

$Z+ = \{\tau(n + 1, 1) : n \in N\}$,

$Z- = \{\tau(1, n + 1) : n \in N\}$,

$Z_0 = \{0\}$.

Нека су $a,b \in Z$ такви да је $a>0$ и $b>0$, значи да је $a \in Z^+$ и $b \in Z^+$. Постоје $m,n \in N$ такви да је $a=\tau(m+1,1)$, $b=\tau(n+1, 1)$.

Израчунајмо

$ab = \tau(m+1, 1)\tau(n+1, 1)$

$= \tau((m+1)(n+1)+1, (m+1) 1+1 (n+1))$

$= \tau(mn+m+n+1+1, m+1+n+1)$

$= \tau(mn+1, 1)$.

Доказано је да је $ab>0$ јер је $\tau(mn+1, 1) \in Z^+$. ∎

2.4.3. Скуп рационалних бројева

Проблеми свакодневног живота намећу потребу за бројевима који означавају део неке целине. Потреба за прецизнијим мерењем довела је до појаве разломака, бројева којима записујемо једнаке делове целине [6].

Разломак записујемо помоћу два природна броја и разломачке црте.

$\frac{a}{b} = a : b$ где a представља бројилац, а b представља именилац.

За било које природне броје a и b важе следећа тврђења:

1. ако је a=b, тада је $\frac{a}{b}$=1 (на пример, ако је a=b=5, тада је $\frac{5}{5}$=1);
2. ако је a дељиво са b, тада је разломак $\frac{a}{b}$ природан број (на пример, ако је a=6, b=2, тада је $\frac{6}{2}$=3);
3. сваки природан број n можемо записати у облику $\frac{n}{1}$, јер је n:1=n.

Скуп рационалних бројева се обележава са Q. За скуп рационалних бројева важи: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Longleftrightarrow$ ad=bc.

Врсте разломака:

- Прави разломци су они који су мањи од 1, а остали су неправи.
  Пример: Којој врсти разломака припада разломак $\frac{3}{5}$? Пошто је овај разломак мањи од 1, одатле следи да се ради о правом разломку.
  Теорема: Ако је a<b, тада је $\frac{a}{b}$ прави разломак. Уколико је a≥b, тада је разломак $\frac{a}{b}$ неправи.
  Сваки од неправих разломака може се записати као збир једног природног броја и једног правог разломка. Одговарајући природан број из тог збира представља број целих у том разломку, због тога неправи разломак можемо записати и тако што напишемо прво број целих садржаних у њему, а онда допишемо одговарајући разломак.
  Нпр. $\frac{7}{6} = \frac{6+1}{6} = \frac{6}{6} + \frac{1}{6} = 1 + \frac{1}{6} = 1\frac{1}{6}$
- Неправи разломак записан на овај претходни начин назива се мешовити разломак.

Скуп целих бројева као подскуп скупа рационалних бројева

Целе бројеве m∈Z можемо схватити као рационалне бројеве представљене разломцима $\frac{m}{1}$. Уочимо да важи: m+n $\leftrightarrow \frac{\mathrm{m+n}}{1} = \frac{m}{1} + \frac{n}{1}$, m·n$\leftrightarrow \frac{\mathrm{m \cdot n}}{1} = \frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1}$.
Код релације ≤ важи: m≤n у Z ако и само ако је $\frac{m}{1} \leq \frac{n}{1}$ у Q. Због тога скуп целих бројева схватамо као подскуп скупа рационалних бројева, Z⊂Q, са операцијама сабирања и множења рационалних бројева и релацијом уређења на рационалним бројевима. Каже се још да операције сабирања и множења на скупу рационалних бројева проширују операције сабирања и множења на скупу целих бројева.

Када је реч о сабирању и одузимању рационалних бројева (разломака) треба да знамо следеће дефиниције:

Дефиниција: Збир и разлика два рационална броја је рационалан број, другим речима кажемо да је скуп Q затворен у односу на сабирање и одузимање.

Дефиниција: Разломци са једнаким имениоцима се сабирају и одузимају тако што се именилац препише, а бројиоци се саберу или одузму тј. $\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$, $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$.

Дефиниција: Природан број и разломак се сабирају тако што се природан број представи у облику разломка који има исти именилац као дати разломак, па се примени претходна дефиниција, тј. $n+\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b}{b}+\frac{a}{b}=\frac{n\cdot b+a}{b}$.

Дефиниција: Разломке различитих имениоца сабирамо или одузимамо тако што их прво сведемо на заједнички именилац одговарајућим скраћивањем или проширивањем, а онда их сабирамо као разломке са једнаким имениоцима.

Што се тиче множења и дељења разломака:

Дефиниција: Производ два разломка јесте разломак чији је бројилац производ бројилаца та два разломка, а именилац је производ имениоца та два разломка, односно $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

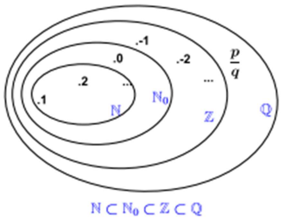
Дефиниција: Поделити разломак другим разломком исто је што и помножити тај разломак реципрочном вредношћу другог разломка, тј. $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$.

За свака три разломка $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ важи:

1. Асоцијативност за сабирање $\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$;
2. Неутрални елемент за сабирање $\frac{a}{b}+0=0+\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$;
3. Комутативност за сабирање $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$;
4. Супротан број $\frac{a}{b}+\left(-\frac{a}{b}\right)=\left(-\frac{a}{b}\right)+\frac{a}{b}=0$;
5. Особина минуса исоред заграде $-\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=-\frac{a}{b}-\frac{c}{d}$;
6. Асоцијативност за множење $\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$;
7. Неутрални елемент за множење $1\cdot\frac{a}{b}=\frac{a}{b}\cdot 1=\frac{a}{b}$;
8. Комутативност за множење $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$;
9. Дистрибутивност множења $\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)=\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}+\frac{a}{b}\cdot\frac{e}{f}$.

2.4.4. Скуп реалних бројева

Подсетимо се које скупове бројева већ знамо и који односи важе међу њима (Слика 10) [4].



Слика 10. Однос међу скуповима

Одавде закључујемо да су сви природни бројеви, сви цели и сви рационални бројеви подскупови скупа реалних бројева.

Теорема: Ако је x позитиван реалан број, тада постоји јединствен број $n_0 \epsilon \{0,1,2,\ldots\}$ такав да је $n_0 \leq x < n_0+1$.

Доказ: Према Архимедовој аксиоми (За свака два цела броја a, b, од којих је први позитиван, постоји природан број n такав да је $n \cdot a > b$) за $b=x$ и $a=1$, постоји природан број n такав да је $x < n \cdot 1 = n$. Међу свим таквим бројевима n постоји најмањи, означимо га са n’. Дакле важи $0<x<n'$. Ако би било $n'-1>x$, онда n’ не би био најмањи број који испуњава претходни услов. Ако означимо $n'-1=x$ тада добијамо тврђење теореме.

Дефиниција: Нека су у скупу R={x,y,z,...} дефинисани сабирање и множење, бинарна релација ≤ и нека за сваки x,y,z,..єR важе услови:

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$;
2. $x+y=y+x$;
3. $x\,(yz)=(xy)\,z$;
4. $x\,(y + z)=xy+xz$;
5. $xy=yx$;
6. $(x \leq y) \vee (y \leq x)$;
7. $(x\leq y \wedge y\leq x) \rightarrow x=y$;
8. $(x\leq y \wedge y\leq z) \rightarrow x\leq z$;
9. $(x\leq y) \rightarrow (x+z\leq y+z)$.

2.4.5. Скуп ирационалних бројева

У свакодневном животу човек се током развоја цивилизације срео са потребом мерења, пре свега мерења дужине дужи и површине дела површи Земље.

Ирационалан броје је онај реалан број који није рационалан, односно не може бити написан као разломак два цела броја. Може се лако показати да су ирационални бројеви сви који у свакој бројној основи (децималној, бинарној итд.) имају бесконачно цифара и не долази до бесконачног понављања неког подниза цифара.

Скуп ирационалних бројева је непребројив.

За презентовање овог градива користимо апликацију Google Meet.

2.5. Апликација Google Meet

Онлајн учење математике је новина и за слушаоце, а у исто време и за предаваче, из тог разлога тражимо технике које ће олакшати сналажење у овој врсти предавања. Једна од таквих техника је предавање путем Google Meet апликације коју имате могућност да користите путем својих рачунара као и андроид и iOS уређаја.

Meet омогућава до 100 учесника одједном у позиву и ограничен је до 60 минута, такође нуди и функције заказивања састанака и дељење екрана.

Предузећа, школе и друге организације могу да користе напредне функције укључујући састанке са до 250 интерних и спољних учесника и стримовање за до 100 000 гледалаца на домену. Школе могу бесплатно да користе Google Meet у склопу издања G Suite for Education

Бесплатна верзија ове апликације захтева да отворите Google налог и на тај начин добијете могућност приступа апликацији. Google је такође поставио бројне мере заштите на месту Meeta попут могућности прихватања или одбијања уласка на састанак, искључивање и укључивање учесника, сложене кодове састанка и шифровање у преносу.

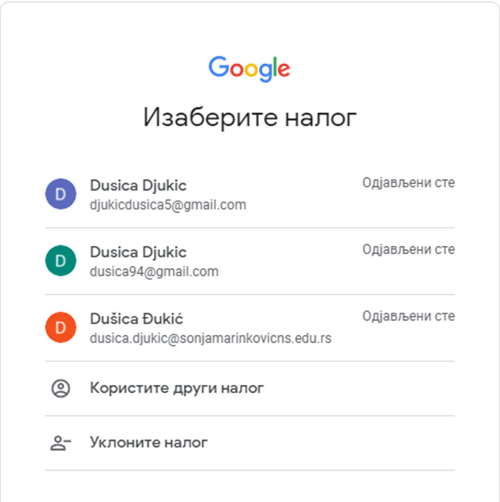
2.5.1. Коришћење Google Meet-a и започињање видео састанака

Да бисте се пријавили идете на страницу Google Meeta, унесете своје име, email адресу, земљу и примарну употребу за Google Meet (лично, пословно, образовно) [10]. Када се региструјете следи неколико корака за коришћење:

1. отворите апликацију;
2. одаберете: започните нови састанак или унесете шифру састанка;
3. изаберете Google налог који желите да користите;
4. придружите се састанку, самим тим можете да имате могућност да додате и друге на састанак.

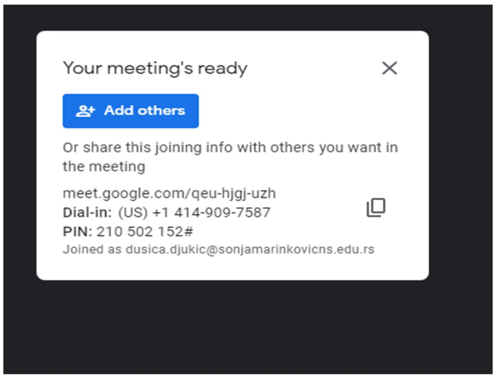
Уколико желимо да започенемо видео састанак, пратићемо неколико наредних корака:

1. да бисте направили нови видео састанак, пријавите се на постојећи Google налог (Слика 11) или се бесплатно региструјте;



Слика 11. Пријављивање на Google налог

2. позовите друге људе на састанак
   Пошаљите линк или код састанка ком год желите да би та особа ушла на састанак. Да би гости који користе бесплатну верзију Google Meet-а ушли, треба да отворе Google налог или да се пријаве на постојећи;



Слика 12. Позивање на састанак

3. уђите на састанак
   Додирните линк састанка у позиву, унесите код састанка организатора (Слика 13) или уђите на састанак помоћу броја за укључивање телефоном и PIN-а из позива.

Слика 13. Начин уношења кода састанка

Сви лако могу да закаче и уклоне учеснике или им искључе звук, међутим не можете да укључите звук другима, осим ако их не замолите па сами учине. Када је реч о налозима образовне установе, само аутор састанка може да искључи звук другима или да их уклони. Да би састанак (предавање) био што интересантнији користите размену порука током позива, такође да бисте делили датотеке, линкове и друге поруке са ученицима кликните на икону ћаскања. Оно што треба да се зна јесте да поруке које су послате током састанка након завршетка истог нису видљиве.

2.5.2. Неке од функција које нам олакшавају рад

Навешћемо пар опција за лакше и ефикасније праћење часа путем Google Meet-а.

- **Google Meet Grid View**
  Google Meet без додатака вам омогућава да на екрану видите само 16 поља, односно 16 ученика. Пошто већина наставника током оваквог вида комуникације има више од 16 ученика, овај додатак нам омогућава да истовремено на екрану видите све своје ученике укључене у оквиру једне сесије разговора, што ће свакако олакшати праћење током контролних задатака или тестова.
- **Nod-Reactions for Google Meet**
  Ово проширење ће омогућити да ученици покажу реакције без прекида наставничког излагања. По моделу функционисања сличан је Facebook реакцијама, тако ученици током предавања могу да вам поставе смајли којим ће изразити своје позитивне или негативне реакције. Такође уколико кликну на смајли са подигнутом руком, то ће вама као наставнику бити знак да ученик има неко питање. Додатак вам такође може

послужити и током онлајн тестирања да проверите да ли ученици сматрају да су им неки задаци тешки или им треба помоћ.

- **Dualless**

  Уколико би током онлајн наставе требало истовремено да показујете нешто ученицима, али бисте желели и да их надгледате како се понашају, препорука је овај додатак, који ће вам омогућити да поделите екран на два прозора и тако са једне стране видите Google Meet, а са друге веб локацију са које представљате неки наставни материјал ученицима или неку презентацију.

- **Meet Attendance**

  Помоћу овог додатка можете да испратите који су ученици присуствовали часу. Сви подаци о присуству чувају се у Google (Sheet) табелама које су доступне креаторима онлајн комуникацијског састанка. Овај додатак функционише тако што бележи имена ученика и време укључења. Такође бележи све промене током трајања састанака (уколико се неки ученик искључи или се неко накнадно прикључи).

- **Google Meet Push To Talk**

  Ако вам је за потребе одржавања часа важно да сви ученици имају искључене микрофоне (на пример док решавају тест), помоћу овог проширења можете их свима искључити, међутим да би било функционално за све учеснике онлајн часа, непоходно је да и ученици и наставник имају инсталирано ово проширење.

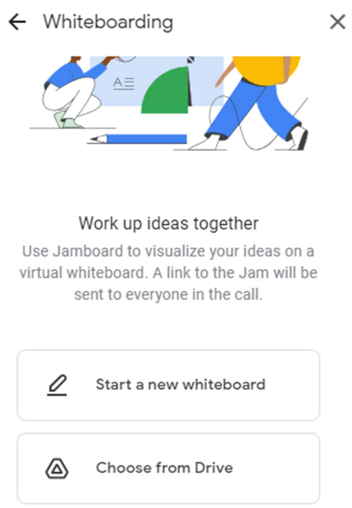
- **Tactiq Pins for Google Meet**

  Ово проширење вам омогућава да своје аудио излагање претворите текстуални материјал. Ученици ће лакше пратити наставу јер ће моћи и да чују и да виде текст онога што причате, што може бити изузетно корисно када им дајe те инструкције за попуњавање теста. Исто тако, уколико предајете неку лекцију или ученик излаже неки део лекције, текстуални материјал може да се сачува и послужи касние као наставно средство. Такође, уколико користећи овај додатак испитујете ученике појављиваће се текстуални запис вашег говора као и учениковог, што чини транспарентним процес онлајн ипитивања.

2.5.3. Кратак пример часа

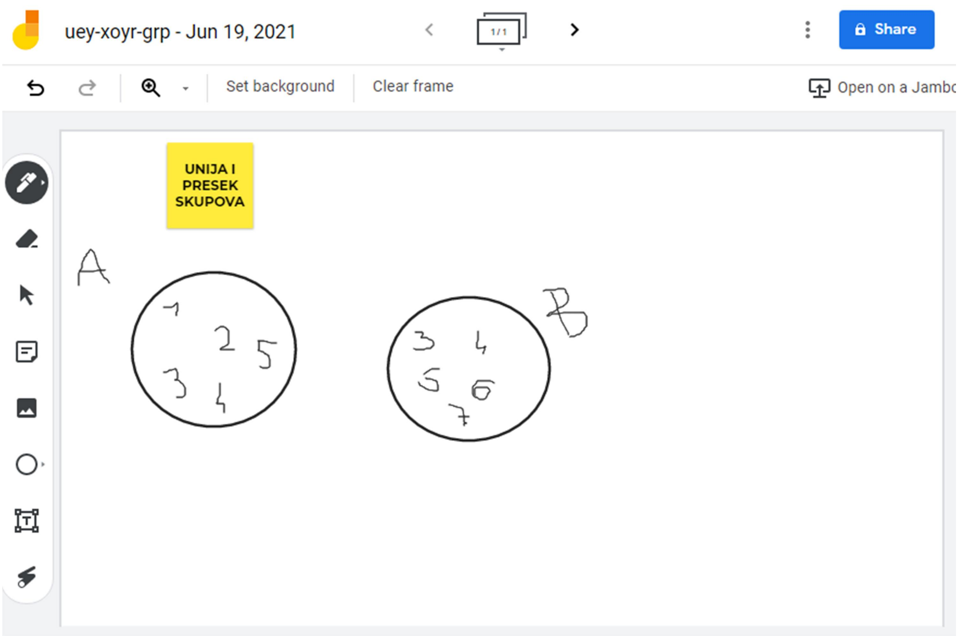
Током овог часа користићу опцију беле табле у Google Meet-u. Whiteboard је виртуелна бела табла помоћу које можете уживо да размењујете идеје са другима. Whiteboard можете да покренете или отворите током Meet позива само ако сте у позив ушли на рачунару. Корисници који у видео позиву учествују преко мобилног уређаја или таблета добијају линк до Whiteboard фајла и преусмеравају се у апликацију Whiteboard.

Да бисте започели час неопходно је да поделите шифру састанака са ученицима или да их појединачно позовете путем mail адресе. Након прикључивања ученика, час започињемо коришћењем опције „start a new whiteboard'' (Слика 14).



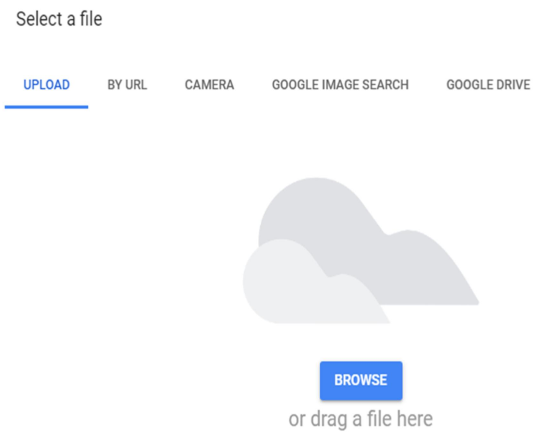
Слика 14. Коришћење беле табле

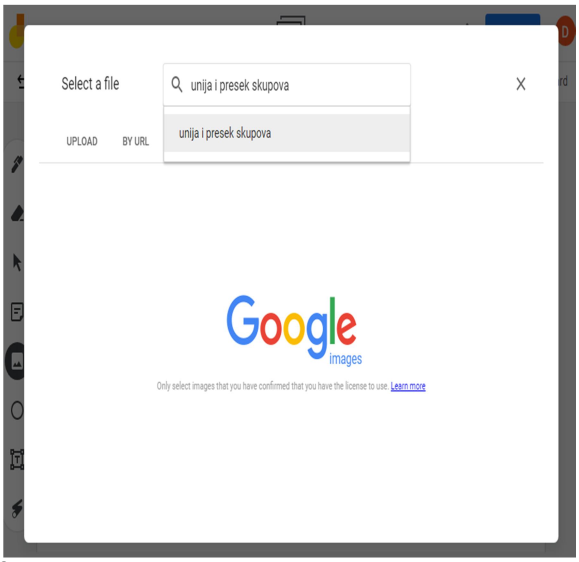
Након укључења табле и одабира одговарајућих опција пишемо наслов лекције и започињемо час.



Слика 15. Пример приказа скупова на белој табли

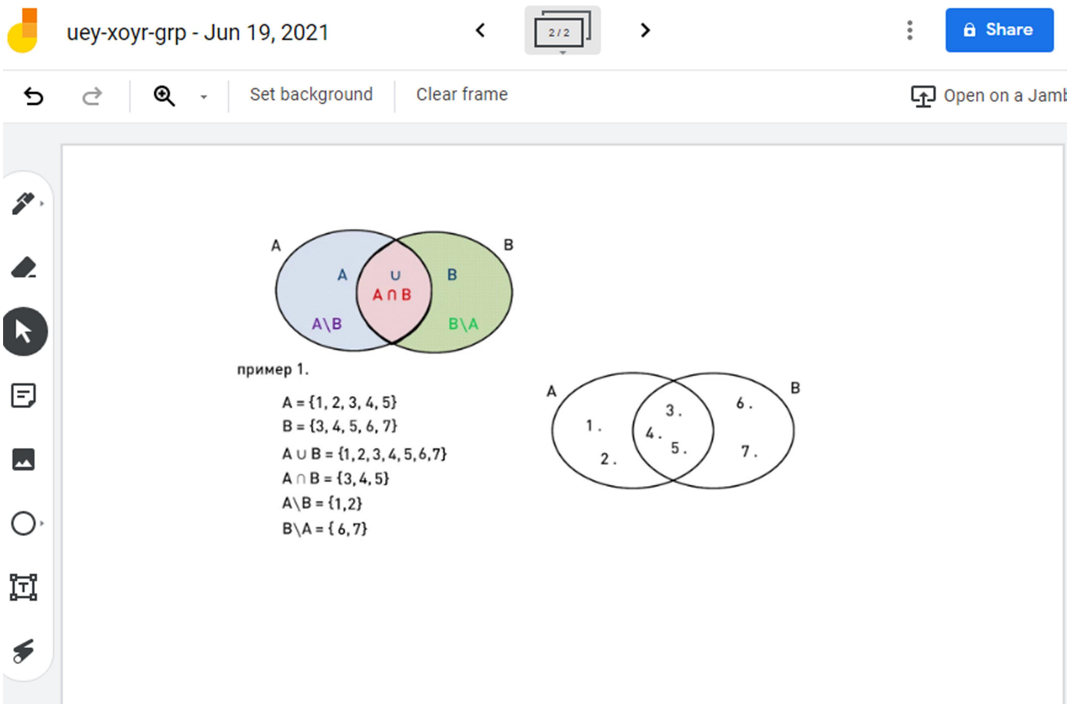
Ученицима сам представила два скупа (A={1,2,3,4,5} и B={3,4,5,6,7}) (Слика 15) на којима желим да објасним појам уније и пресека скупова. Ради лакшег разумевања користим опцију додавања слике. Једна од могућности је да одговарајућу слику пронађемо на Googlu (Слика 17), а друга могућност је да додамо слику из наше архиве (Слика 16).





Слика 16. Додавање слике из наше архиве Слика 17. Додавање слике са интернета

Након одабира одговарајуће фотографије и дељења исте са ученицима (Слика 18) добијамо могућност за лакше и јасније објашњавање градива на конкретном примеру као и уштеду времена у односу на ручно писање.



Слика 18. Приказ одабране фотографије на белој табли

Користећи пример са слике учимо децу како да читају Венов дијаграм, одакле добијају да је AUB={1,2,3,4,5,6,7}, док је A∩B={3,4,5}.

3. РАЗЛОМЦИ

Природни бројеви су се појавили као резултат пребројавања, а прво проширење појма броја било је додавање разломака скупу природних бројева. Појам разломка везан је са потребом мерења величина. Мерење било које величине састоји се у њеном упоређивању са другом величином коју узимамо за јединичну.

Са развојом аритметике људи су почели да разматрају разломљени број (разломак) као количник двају природних бројева. Уопште, разломком су најпре називали бројеве облика $\frac{m}{n}$ где су m и n природни бројеви.

Разломке називамо још и рационални бројеви (латински ratio–однос) и са тим скупом бројева смо се упознали већ у претходном поглављу [2].

Приликом дефинисања рационалних бројева, односно разломака рекли смо да вредност m називамо бројилац и он означава од колико једнаких делова се састоји нека целина (броји делове), док вредност n називамо именилац и он означава на колико једнаких делова је подељена нека целина, такође именилац увек треба да буде различит од нуле.

Пример: На слици (Слика 19) су приказана три једнака мафина. Два од три једнаких мафина су украшена цвећем. Математички то записујемо $\frac{2}{3}$ и читамо као две трећине.

Слика 19. Пример за објашњавање разломака

3.1. Проширивање и скраћивање разломака

Приликом сређивања математичких израза неопходно је да знамо како можемо да скратимо или да проширимо неки разломак.

Дефиниција: Када бројилац и именилац неког разломка помножимо истим бројем кажемо да смо тај разломак проширили тим бројем. Разломак се може прошитири било којим природним бројем већим од 1.

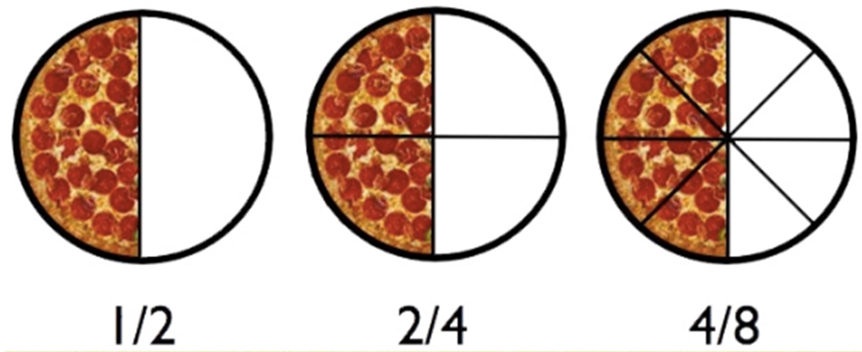
Пример: Проширити разломак $\frac{1}{4}$ са бројем 2. Резутат који добијамо када и именилац и бројилац помножимо са 2 је $\frac{2}{8}$.

Дефиниција: Када се бројилац и именилац неког разломка поделе истим природним бројем кажемо да смо скратили тај разломак тим природним бројем.

Разломак се може скратити само бројем који је заједнички делилац његовог бројиоца и имениоца. Највећи заједнички делилац два цела броја је највећи број којим се могу поделити оба броја без остатка.

Дефиниција: Разломци код којих су бројиоци и имениоци узајамно прости бројеви називају се несводљиви разломци, па се они не могу скраћивати.

Пример: Ана је појела $\frac{1}{2}$ пице, Драгана $\frac{2}{4}$, а Невена $\frac{4}{8}$ пице (Слика 20). Ко је појео највише?



Слика 20. Пример појeдене пице представљене разломцима

Посматрајући разломке, можемо да закључимо да су појеле исти део пице. До тога долазимо одговарајућим проширивањем или скраћивањем. Ако проширујемо разломке онда ћемо први разломак да проширимо бројем 4,а други разломак бројем два и на тај начин добијамо исту вредност коју је појела Невена, ако ипак желимо да скраћујемо разломке онда ћемо последњу вредност да скратимо са 4, а други разломак са 2 и да добијемо исту вредност коју има Ана. Уз помоћ слике можемо да се уверимо да су заиста све три појеле исту количину пице.

3.2. Упоређивање разломака

Навешћемо два правила која нам показују на који начин можемо да упоредимо два разломка:

1. ако два разломка имају једнаке имениоце, већи је онај који има већи бројилац;
2. ако два разломка имају једнаке бројиоце, већи је онај који има мањи именилац.

Ако разломци имају различите бројиоце и имениоце они се упоређују тако што се прво проширивањем или скраћивањем доведу на разломке једнаких имениоца или једнаких бројиоца, а након тога се употреби једно од два наведена правила.

3.3. Сабирање и одузмање разломака

Обраду операције сабирања (одузимања) почећемо полазећи од интуитивног схватања кодификовањем три корака:

1. уочавање и означавање сабирака (код сабирања) односно умањеника и умањиоца (код одузимања);
2. писања израза збира или разлике;
3. једначење са записом у виду једног разломка.

Дефиниција: Уколико разломци имају једнаке имениоце они се сабирају или одузимају тако што се имениоци препишу, а бројиоци се саберу или одузму. Међутим уколико разломци имају различите имениоце, они се прво одговарајућим проширивањем сведу на једнаке имениоце па се онда сабирају или одузимају као што је већ наведено.

Приликом сабирања и одузимања разломака са различитим имениоцем, да би одредили са којим бројем треба проширити имениоце потребно је одредити њихов најмањи заједнички садржалац.

Дефиниција: Најмањи заједнички садржалац два цела броја је најмањи природан број који је дељив без остатка са оба броја.

Пример: Маја и Мила су добиле једнаке чоколаде и свака од њих је појела одређен део своје чоколаде. Ако је Маја појела дванаест двадесетпетина, а Мила девет двадесетпетина, колико су укупно појеле?

1. Маја је појела $\frac{12}{25}$, а Мила $\frac{9}{25}$ чоколаде,
2. укупно су појеле $\frac{12}{25} + \frac{9}{25}$ чоколаде,
3. што је $\frac{12+9}{25} = \frac{21}{25}$.

Овде указујемо на чињеницу да смо имали две резличите количине поједене чоколаде означене разломцима и да смо збиром тих разломака означили укупну количину. Такође истичемо да смо приликом бројања укупног броја поједених делова пребројали 12 делова прве чоколаде и 9 делова друге чоколаде.

Напомена: Ако је у разломку бројилац већи од имениоца, представљамо их у облику: $\frac{m}{n}$=k+$\frac{r}{n}$, $n \in N$, $m,k,r \in N_0$, $0 \leq r < n$.
У општем случају за свако $k \in N_0$ важи: k=$\frac{k}{1}$=$\frac{2k}{2}$=...(= $\frac{kn}{n}$, $n \in N$).

На истом примеру од малопре треба да израчунамо колико им је чоколаде укупно преостало?

1. Маји је остало $\frac{13}{25}$, а Мили $\frac{16}{25}$ чоколаде,
2. укупно им је преостало $\frac{13}{25} + \frac{16}{25}$,
3. односно $\frac{13+16}{25} = \frac{29}{25}$.

Користећи претходно наведену напомену долазимо до тога да је Маји и Мили укупно преостало 1+$\frac{4}{25}$ чоколаде, односно преостала им је једна цела чоколада и још четири двадесетпетине.

Својства опреација у (Q^+) изводимо користећи се већ упознатим својствима одговарајућих операција у (N_0).

Тако је: (m+n):p=m:p+n:p, односно у облику разломка то би изгледало оавако $\frac{(m+n)}{p}$=$\frac{m}{p}$ + $\frac{n}{p}$.

Свесни смо да је доказивање чињенице да се својство комутативности операције сабирања чува приликом проширења света бројева са N_0 на Q^+ .

Пример: Марко и Милош су делили једнаке пице. Ако је Марко појео две шестине пице, а Милош пет дванаестина пице колико су укупно појели и колико им је остало?

Марко је појео $\frac{2}{6}$ што је исто као $\frac{4}{12}$,

Милош је појео $\frac{5}{12}$ пице.

Укупно су појели $\frac{2}{6} + \frac{5}{12} = \frac{4}{12} + \frac{5}{12} = \frac{9}{12}$.

Ако посматрамо колико им је укупно преостало, видимо да је Марку преостало $\frac{8}{12}$ пице, док је Милошу преостало $\frac{7}{12}$, односно укупно им је преостало $\frac{8}{12} + \frac{7}{12} = \frac{15}{12} = 1 + \frac{3}{12}$, што значи да им је остала једна цела пица и још три дванаестине.

3.4. Множење и дељење разломака

Дефинисали смо у скупу Q^+ производ разломака $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ као разломак који се изражава $\frac{a}{b}$-ти део од $\frac{c}{d}$. На тај начин смо нашли да је: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$.

Важно је напоменути да се кроз даље активности морамо уверити да се важна својства операције множења бројева у N_0 чувају.

Доказаћемо својства комутативности и асоцијативности операције множења разломака: Знамо да је $1 \in N_0$ и $\forall a \in N_0$ важи $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$, па на сличан начин проверавамо за разломке:

1. $1 \in Q^+$;
2. $\forall \frac{a}{b} \in Q^+$ важи $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$.
   Заиста, нека је $m \in N_0 \setminus \{0\} = N$. Онда је за свако такво m, $1 = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}}$ и стога је
   $\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$,
   $1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{m}} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a \cdot m}{b \cdot m} = \frac{a}{b}$.

За сваки разломак $\frac{a}{b} \in Q^+ \setminus \{0\}$ постоји њему реципрочан разломак $\frac{b}{a} \in Q^+ \setminus \{0\}$, такав да је

$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1$.

Важно је напоменути да је сваки елемент $\frac{m}{k}$ скупа $Q^+ \setminus \{0\}$ који испуњава $\frac{a}{b} \cdot \frac{m}{k} = \frac{m}{k} \cdot \frac{a}{b} = 1$ једнак са $\frac{b}{a}$. Заиста: $\frac{m}{k} = \frac{m}{k} \cdot 1 = \frac{m}{k} \cdot (\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}) = (\frac{m}{k} \cdot \frac{a}{b}) \cdot \frac{b}{a} = 1 \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{a}$.

Када је реч о дељењу разломка природним бројем то чинимо тако што бројилац препишемо, а именилац се помножи тим бројем. Међутим ако разломак делимо неким другим разломком онда први разломак препишемо и помножимо га са реципрочном вредношћу другог разломка. Реципрочна вредност било ког разломка се добија тако што бројилац и именилац замене своја места.

За обраду овог дела градива у онлајн настави користићу Google презентацију.

3.5. Google презентација

Google презентација служи за онлајн презентацију која вам омогућава да лако делите презентације које укључују текст, фотографије, аудио или видео датотеке. Овакав вид презентовања је први пут представљен 9. Марта 2006 године [13].

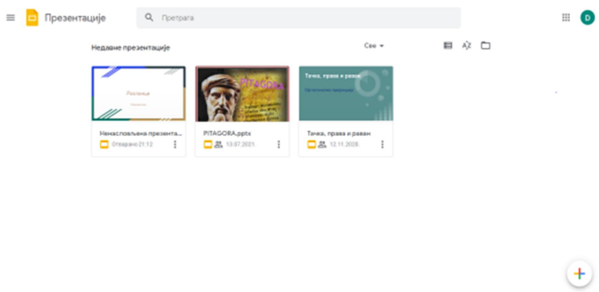
Google је креирао скуп образовних апликација које су сличне алатима пронађеним у Microsoft Office. Google Slides је Google презентацијски програм који је сличан PowerPoint-у.

Зашто бисте требали да размислите о преласку на Google верзију?

Једна од главних предности коришћења ове верзије је да су Google алати бесплатни, потребан вам је само ваш Google налог и интернет веза. За коришћење Google слајдова можете користити свој редован gmail налог, у случају да га немате мораћете да га креирате за коришћење ове апликације.

Како изгледа једно креирање презентације по корацима:

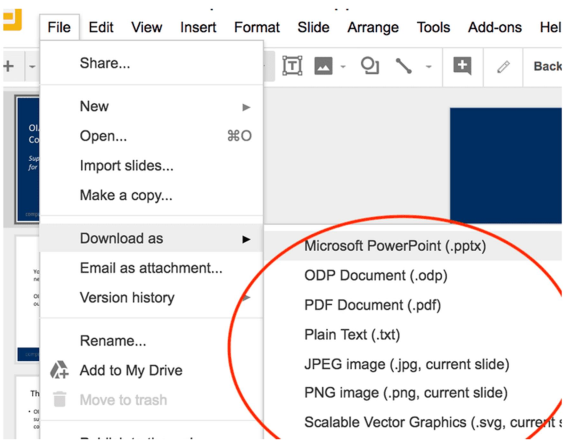
1. отворите почетни екран презентација на slides.google.com;
2. у доњем десном углу притиснете опцију ‚+' (Слика 21) односно опцију која значи „Започни нову презентацију''.



Слика 21. Прављење нове презентације

Компатибилност са Microsoft PowerPoint-ом

Ако желите да претворите једну од ваших PowerPoint презентација у Google слајдове једноставно користите функцију за отпремање на Google слајдовима (Слика 22). Ваш PowerPoint документ ће аутоматски бити претворен у Google слајдове. Такође можете да сачувате своју презентацију као PowerPoint презентацију или чак и као PDF. Што значи да слободно можемо рећи да су Google презентација и Microsoft PowerPoint две компатибилне апликације.

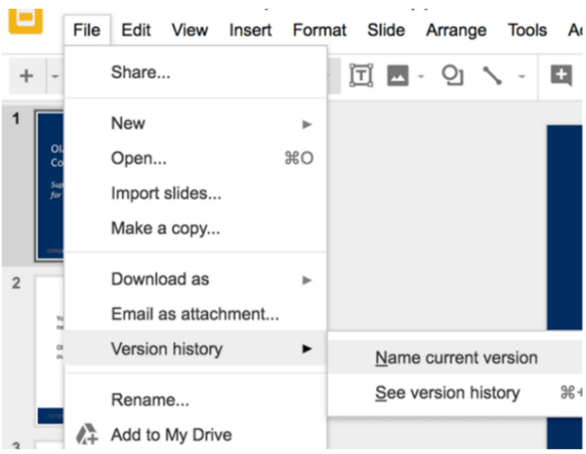


Слика 22. Претварање PowerPoint презентације у Google слајдове

Додавање адреса е-поште сарадника: Једна од кључних предности Google слајдова преко Microsoft PowerPoint-a је да Google Slides омогућава сарадњу уживо, без обзира на то где су ваши сродни чланови. Дугме за дељење на Google презентацији ће вам омогућити да позовете више људи путем свог Google налога или Gmail налога. Ви контролишете који ниво приступа има свака особа, на пример да ли особа може само гледати или и уредити.

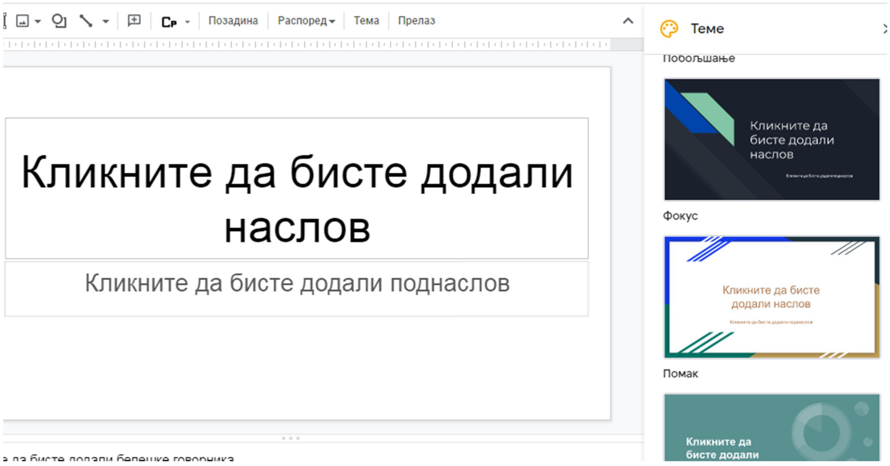
Дељење презентације омогућава свима у тиму да раде и гледају на истој презентацији истовремено са сателитских уређаја. Сви могу да виде уживе измене док су пријављени.

Такође једна од предности ове апликације је историја промене (Слика 23), Google непрестано аутоматски чува вашу презентацију док радите на мрежи. Функција историје прати све промене укључујући и време и ко је направио уређивање и шта је учињено.



Слика 23. Историја промене

Одабир тема приликом презентације: Као и PowerPoint, Google Slides нуди могућност коришћења унапред дизајнираних тема и функција које долазе са координирањем боја и фонтова (Слика 24). Google слајдови такође пружају неке лепе дизајнерске функције које укључују зумирање и излазак из ваших слајдова и могућност примене маски на слике како би изменили своје облике. Можете такође уграђивати видео у своју презентацију помоћу .mp4 датотеке или повезивањем на онлајн видео.



Слика 24. Теме за презентацију

Да ваш садржај буде видљив свима објављивањем на вебу, путем линка или грађеног кода: Твоја презентација може се такође објавити на web страници преко везе или уграђеним кодом. Такође можете ограничити приступ онима који могу да виде презентацију путем дозвола. Ово су живи документи, па кад год направите промену у документу промене ће се појавити и у објављеној вези.

Суштина: Сада када смо прегледали основе Google слајдова јасно је да је једна од највећих предности овог алата, способност да се бави живом сарадњом. Жива сарадња би могла бити велики савременик и учинити драматичне разлике у продуктивности сваког следећег пројекта.

Избор између PC-a ili Mac-a: И један и други, будући да је Google презентација базирана на претраживачу, платформа на којој се одлучите за рад неће иамти никакву разлику у односу на другу платформу. Google слајдови такође имају Android и iOS апликацију, тако да можете да радите на презентацији на таблету или паметном телефону. Ово такође значи да сви ученици имају слободу да користе рачунар или Mac и самим тим немају сметњи и ограничења приликом рада.

Подржани формати датотека:

Табела1. Подржани формати датотека

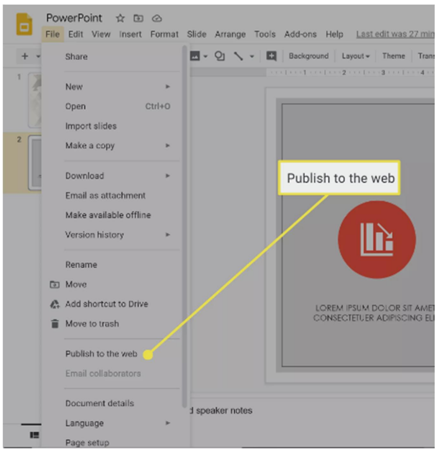
.GSLIDES	Google Slides Shortcut
.JPG	JPEG Image
.ODP	OpenDocument Presentation
.PDF	Portable Document Format File

.PNG	Portable Network Graphic
.POT	Microsoft PowerPoint Template (Legacy)
.POTM	Microsoft PowerPoint Macro-Enabled Presentation Template
.POTX	Microsoft PowerPoint Presentation Template
.PPS	Microsoft PowerPoint Slide Show (Legacy)
.PPSM	Microsoft PowerPoint Macro-Enabled Show
.PPSX	Microsoft PowerPoint Slide Show
.PPT	Microsoft PowerPoint Presentation (Legacy)
.PPTM	Microsoft PowerPoint Macro-Enabled Presentation
.SVG	Scalable Vector Graphics File
.TXT	Plain Text File

3.6. Како објавити Google презентацију

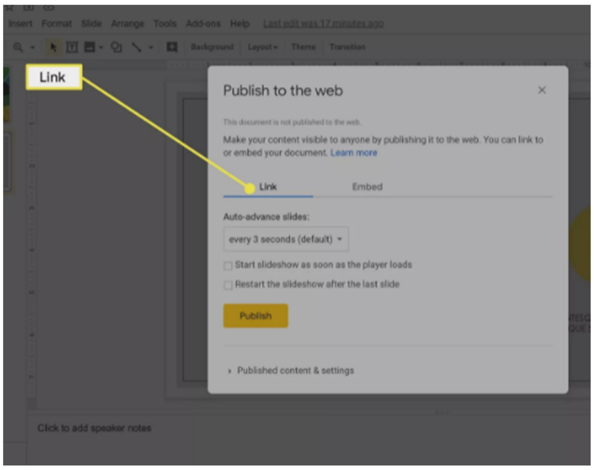
Да бисте објавили презентацију на Google мрежи потребно је да испратите седеће кораке:

1. идете на датотеке (File) → објави на вебу (Publish to the web) (Слика 25).



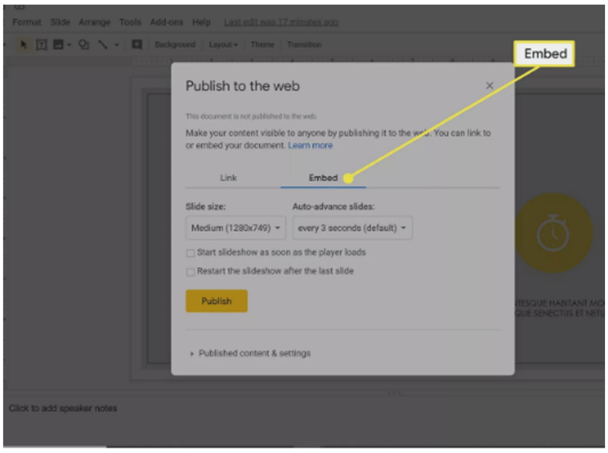
Слика 25. Објављивање на вебу

2. Изабере се Link да бисте добили URL за дељење (Слика 26). Такође можете да одаберете колико времена пролази пре него што се сваки слајд појави и да ли ће се презентација поново покренути након завршетка слајда или не.



Слика 26. Бирање линка

3. Бира се „угради“ (Embed) да бисте генерисали код који можете да додате на своју веб локацију. Овде постоји и додатна опција за избор величине слајдова.

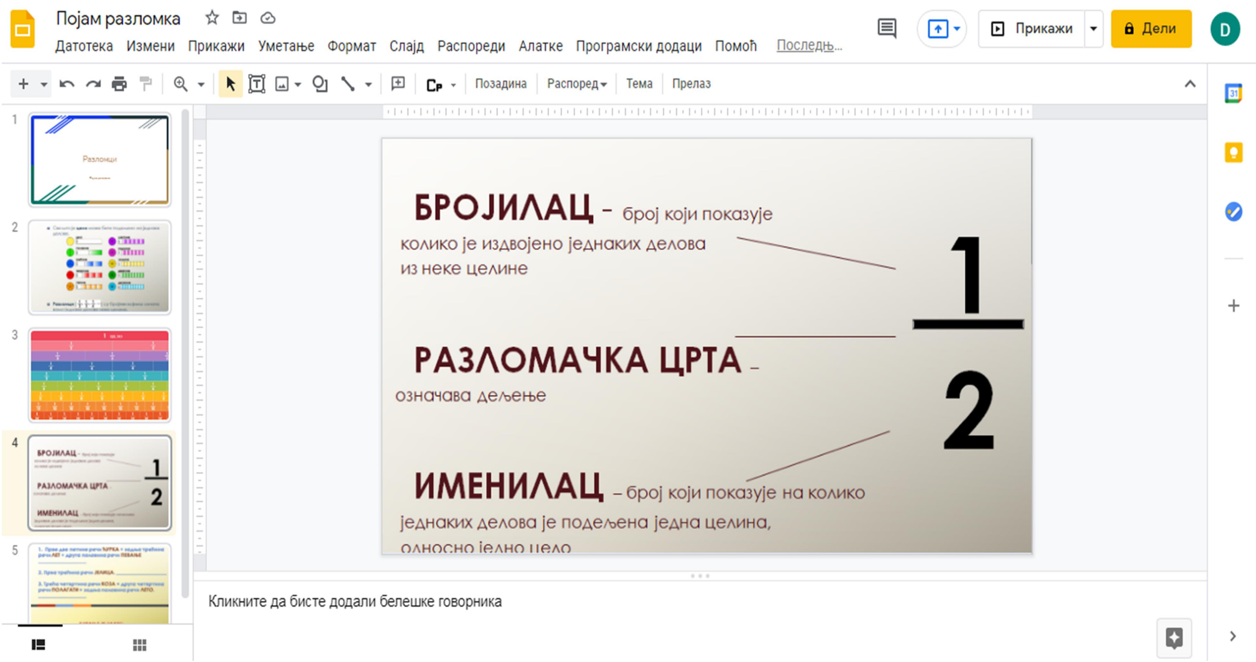


Слика 27. Генерисање кода

4. Када се све подеси, преостаје да се изабере опција објави (Publish).

3.7. Пример једног часа

Када се ученици пријаве, покреће се презентација где ће се презентовати слајд по слајд и на тај начин приказати основни појмови разломака (Слика 27). Оно што је овде велика предност и за предаваче, а и за саме ученике, јесте то што можемо самостално као предавач да одаберемо темпо мењања слајдова у зависности од тога којом брзином ученици могу да испрате одређено градиво.



Слика 27. Пример часа

По потреби, за додатна објашњења убацује се нова презентација путем Power Pointa.

4. ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

Подучавање ученика нижих разреда основне школе о употреби слова као алгебарских променљивих и непознатих углавном се своди на коришћење променљиве x како би се описала непозната вредност у аритметичким записима и решавање простих једначина и неједначина у скупу природних бројева. Такав систем учења не подстиче алгебарско размишљење, а претерана употреба слова x доводи до тога да се ученици навикну на тај начин представљања непознате, па им задаци у којима се употребљавају друга слова изгледају непознато и тешко. Циљ подучавања је да ученици раде са изразима који укључују променљиве без размишљања о одређеном броју, него са словима на њиховом месту, да раде са симболима без обраћања пажње на оно што они представљају.

4.1. Линеарне једначине

Једначина је једнакост у којој учествују променљиве које другачије зовемо непознате. Свака једначина може бити са једном, две, три или више непознатих, самим тим можемо да имамо и једно, два или више решења неке једначине.

Једначине помажу ученицима да увиде зависност између величина, да изражавају карактеристике различитих појава реалног света, уводе нас у област бројева, успостављају везу између математике и других наука.

Дефиниција: Решити једначину значи одредити вредност непознате за коју једнакост постаје тачна [5].

Арапски математичар Al Horezmi (780-850.) се другачије зове „оцем алгебре" јер је први проучавао алгебру у елементарној форми. Захваљујући делу Hisab al džabr we al muqabala, цивилизација је добила нови појам „алгебра". Његова математика је у потпуности уређена речима без коришћења симбола. Al Horezmi корсти линеарне и квадратне једначине за решавање практичних проблема различитих врста и порекла. Начин писања једначина како се нама чини природним је изграђен у 16. и 17. веку.

Дефиниција: Линеарне једначине су све једначине облика $ax–b=0$, где је x непозната,a вредности a и b су константе.

Линеарне једначине су једначине степена један, односно непозната мора да буде највише првог степена.

Било који линеарни прорачуни који захтевају више од једне променљиве могу се извршити уз помоћ линеарних једначина.

Табела 2. Примери за препознавање линеарних једначина

Једначине	Линеарне или оне које нису линеарне
$y = 8x - 9$	Линеарна
$y = x^2 - 7$	Није леинеарна
$\sqrt{y} + x = 6$	Није линеарна
$y + 3x - 1 = 0$	Линеарна
$y^2 - x = 9$	Није линеарна

Ако посматрамо претходно наведену таблицу видимо да су само прва и четврта једначина линеарне, остале три нису, зато што им непозната није на први степен.

Пример: Решити једначину 9-2x=5x+2.

Решење: -2x-5x=2-9,

-7x=-7,

x=1.

Теорема:

1. Једначина облика ax-b=0 односно ax=b има јединствено решење $\frac{b}{a}$, где је a≠0;
2. Ако је a=0, а b≠0 тада је та једначина немогућа, односно нема решења;
3. Ако је a=0 и b=0 тада је сваки реалан број решење једначине.

Доказ:

1. Ако је a≠0, постоји реалан број $\frac{1}{a}$ који је различит од 0. Множењем основног облика са $\frac{1}{a}$ добија се једначина $\frac{1}{a}\cdot$ ax=$\frac{1}{a}\cdot$ b, односно x=$\frac{b}{a}$. Како ова последња једначина има јединствено решење $\frac{b}{a}$, онда и ax-b=0 има јединствено решење $\frac{b}{a}$.
2. Ако је a=0, а b≠0 добијамо 0·x=b, па ниједан реалан број није решење ове једначине.

Ако је a=0, b=0, онда је 0·x=0, што следи да је сваки релана број решење ове једначине.

4.2. Еквивалентне једначине

Са појмом еквивалентности се често сусрећемо кроз различите области, па самим тим и приликом решавања једначина треба да дефинишемо тај појам.

Дефиниција: Ако две једначине са једном непознатом имају једнаке скупове решења онда за њих кажемо да су еквивалентне.

На основу дефиниције еквивалентних једначина закључује се да је релација еквиваленције у скупу једначина са једном непознатом рефлексивна, симетрична и транзитивна. То је директна последица чињенице да је једнакост скупова релација еквиваленције.

1. Симетричност једнакости
   Ако је A=B , онда је B=A, из A=B произилази да је A−B=0 па је према томе и B−A=0 тј. B=A;

2. Транзитивност
   Ако је A=B и B=C , онда је и A=C. Према дефиницији из A=B произилази A−B=0, а из B=C произилази да је B−C=0. Збир два сабирка од којих је сваки једнак нули је такође нула, па је A−B+B−C=0 или A−C=0, дакле A=C.

Приликом решавања неке једначине покушавамо да је заменимо једноставнијом еквивалентном једначином, зато је важно знати којим се трансформацијама дата једначина своди на еквивалентну једначину.

Теорема: Ако се датој једначини са леве и десне стране дода исти број или исти израз добија се једначина еквивалентна датој једначини.

Нека је $A=B$, додајмо левој и десној страни C, треба доказати да је $A+C=B+C$. Из $A=B$ произилази $A-B=0$ и даље $A+C-B-C=0$ тј. $A+C-(B+C)=0$ па је $A+C=B+C$.

Израз C може имати било коју вредност, али не може изгубити смисао броја, нпр. не можемо додати разломак чији је именилац једнак нули.

Теорема: Ако се обе стране једначине помноже или поделе истим бројем или истим изразом различитим од нуле, добија се еквивалентна једначина.

Нека је $A=B$, и C ма који број или израз који не губи смисао броја. Из $A=B$, произилази $A-B=0$, производ сваке стране једначине бројем C једнак је нули, па је $AC-BC=0$ и добијамо $AC=BC$.

Пример:

Једначине: $x+2=5$ и $3x+5=14$ су еквивалентне јер свака од њих има само једно решење $x=3$.

4.3. Линеарне неједначине

Пре самог решавања неједначина подсетићемо се основних особина неједнакости јер су потребне за уочавање односа међу бројевима и за решавање самих неједначина.

Нека су a, b, c ма који бројеви (на основу особина уређености скупа рационалних бројева) важи:

1. ако је $a<b$, онда је $b>a$ или ако је $a>b$, онда је $b<a$ (ако се мењају стране неједнакости,неједнакост мења смисао);
2. ако је $a<b$ и $b<c$, онда је и $a<c$. Исто тако, из $a>b$ и $b>c$, следи да је $a>c$;

   Пример: Нека су $a=5$, $b=7$, $c=9$ одатле онда сигурно следи да је $a<c$, односно да је $5<9$;

3. ако је $a>b$, онда је $a+c>b+c$ $(a-c>b-c)$. Исто тако, из $a<b$, следи $a+c<b+c$ $(a-c<b-c)$ и обрнуто из $a+c<b+c$ $(a-c<b-c)$ следи $a<b$ или из $a+c>b+c$ $(a-c>b-c)$ следи $a>b$;

   Пример: $a=5$, $b=7$, $c=9$ одатле следи да је $a+c<b+c$, односно $5+9<7+9$ тј. $14<16$;

4. ако је $a>b$, $c>0$ онда је $ac>bc$, али ако је $c<0$ онда из $a>b$ следи $ac<bc$ (ако се обе стране неједнакости помноже (поделе) истим бројем, неједнакост се мења или мења свој смисао према томе да ли је тај број позитиван или негативан).

Из $ac>bc$, следи $a>b$, ако је $c>0$ и $a<b$ ако је $c<0$. Из $ac<bc$, следи $a<b$, ако је $c>0$ и $a>b$ ако је $c<0$.

Линеарне неједначине решавамо слично као и једначине користећи еквивалентне трансформације.

Важно је рећи да се смер неједнакости мења када неку неједначину множимо или делимо негативним бројем. За две неједначине кажемо да су еквивалентне ако је решење прве уједно и решење друге неједначине и обрнуто, ако је решење друге неједначине решење и прве.

Пример:

$3x<12$ и $-3x<12$

$X<12/3$ и $x>12/-3$

X<4 и x>-4.

Напомена: у другом примеру делимо са -3 што значи да морамо променити знак.

Приликом решавања може се добити да неједначина има коначан број решења, бесконачно решења или да уопште нема решења.

Приликом записивања скупа решења неједначине треба да обратимо пажњу и на заграде: код -∞ и +∞ заграде су увек мале (,), такође и када се у неједначини јавља $< или >$, међутим уколико се у неједначини појављује $\leq или \geq$ тада се решење записује у велике заграде (угласте) [,]. Мале заграде нам говоре да ти бројеви нису у скупу решења, док нам угласте заграде говоре да бројеви припадају скупу решења.

Решити неједначину: 3(x-2)+9x<2(x+3)+8

Решење: 3x-6+9x<2x+6+8,

3x+9x-2x<6+8+6,

10x <20,

x<2, што значи да је наш скуп решења x∈(-∞,2).

Решити неједначину: $\frac{2a+1}{3}$ - $\frac{3a-2}{2}$ ≥ -1

Решење: Прво једначину треба да помножимо са NZS (3,2) што је 6, тако да добијамо:

2(2a+1)–3(3a-2)≥-6,

4a+2-9a+6≥-6,

-5a+8≥-6,

-5a≥-6-8,

-5a≥-14.

У наредном кораку примећујемо да треба да делимо бројем -5, што самим тим значи да се и знак мора мењати, па је

a≤ $\frac{-14}{-5}$, што је заправо исто као a≤ $\frac{14}{5}$,

скуп решења ове неједначине је a∈(-∞, $\frac{14}{5}$].

Решити неједнчину: (x-1)(x–4)>0

Да бисмо решили ову неједначину прво се подсећамо две битне ствари везане за производ:

1) A·B <0 ако и само ако је A<0, а B>0 или A>0, а B<0 (односно производ две вредности је мањи од нуле ако је једна од њих позитивна, а друга негативна);
2) A·B>0 ако и само ако је A>0 и B>0 или ако A<0 и B<0 (односно производ две вредности је већи од нуле ако су обе вредности позитивне или ако су обе вредности негативне).

Одавде следи решење неједначине у два случаја:

1. $x-1<0$ и $x-4<0$
   $x<1$ и $x<4$
   решење овог случаја је пресек ове две неједначине, што значи
   $x\in(-\infty,1)$;
2. $x-1>0$ и $x-4>0$
   $x>1$ и $x>4$, па је решење поново пресек, односно
   $x\in(4,+\infty)$.
   Како имамо два случаја и важи први или други, самим тим коначно решење је унија решења, односно
   $x\in(-\infty,1)\cup(4,+\infty)$.

За објашњавање ове лекције користићу апликацију Zoom, а након тога следи један тест за учеике помоћу Google анкете односно Google теста.

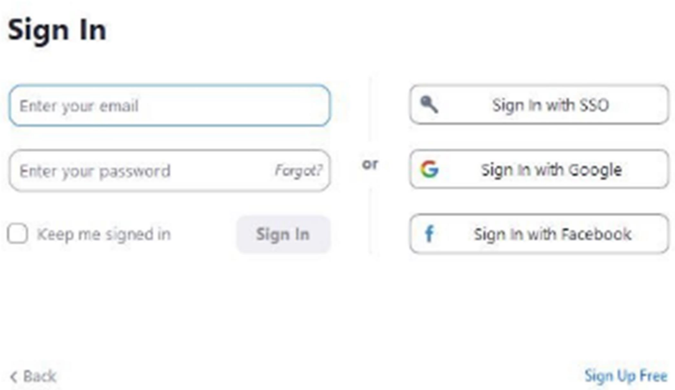
4.4. Zoom апликација

У време пандемије када је физичка дистанца обавезна ова апликација постаје једна од најзначајнијих апликација за састанке, држање предавања и слично [9]. Путем ове апликације корисници могу:

1. делити документа, слике и видео снимке;
2. користити таблу за писање и презентацију;
3. делити екран између корисника.

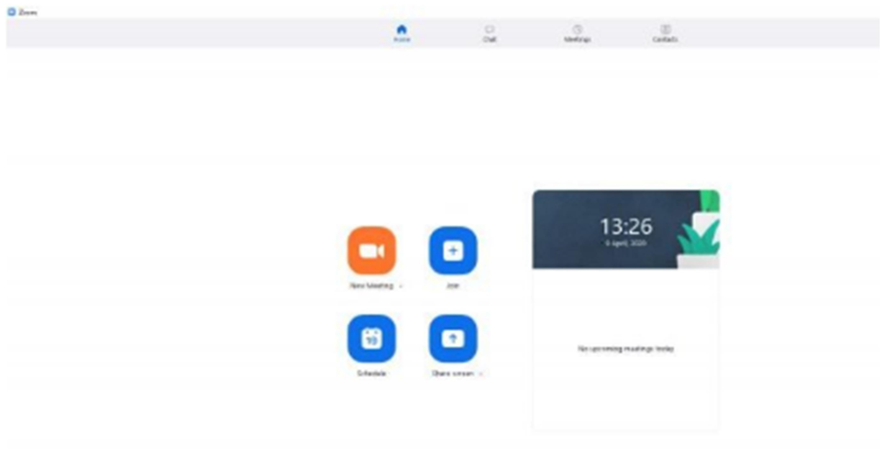
Пре самог коришћења апликације неопходна је инсталација исте, након тога вам се појављују две опције: Sing in (пријави се) и Join a Meeting (придружи се састанку).

Ако желимо да се пријавимо то радимо преко опције Sing in,након уноса својих података бирамо да ли желимо пријаву путем Google или Facebook-а (Слика 28).



Слика 28. Пријављивање на Zoom

Након пријаве са својим подацима отвара вам се наредна слика на којој видите опције за креирање својих састанака, заказивање састанака и слично (Слика 29).



Слика 29. Опције за састанке

Ако желимо да се придружимо неком састанку тада бирамо опцију Join a Meeting и уписујемо предходно добијен код састанка (Слика 30).

Слика 30. Придруживање састанку

Након уноса броја састанка имамо три опције које нам могу олакшати коришћење, а то су:

1. запамти моје име за будуће састанке;
2. не конектуј се звуком;
3. искључи видео.

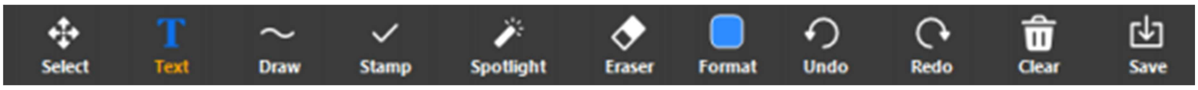
Као што је познато, брже се опредељујемо за ону апликацију за коју имамо више опција и пречица које нам олакшавају рад.

4.4.1. Неке од опција које нам нуди апликација

- **Google Calendar**
  Да бисте пратили све ваше састанке и држали свој распоред на једном месту, повежите Zoom и Google Calendar. Можете их повезати тако што ћете се улоговати у свој Google Calendar, отићи у подешавања и одабрати Gett adds. У pop-up табу потражите опцију Zoom for GSuite и потврдите инсталирање апликације.
- **Опција за брзо додавање нових ученика**
  Ако сте већ на предавању, нове ученике можете додати помоћу **Alt+I**. Ово отвара нови таб у коме можете копирати позив и лозинку или послати мејл свима које желите на састанку.

- **Снимање часа (састанка)**
  Снимање можете лако започети или прекинути уз **Alt+R** или **Cmd+Shift+R**. Међутим ако желите да паузирате снимање користите **Alt+P** или **Cmd+Shift+P.**
- **Дељење екрана и табле**
  Брзи начин да поделите свој екран и документа је да користите скраћеницу **Alt+S** или **Cmd+Shift+S.** Можете делити цео екран, део екрана, да дозволите да неко управља екраном, као и да директно делите документа са Google Drive-a.
- **Цртање и остављање белешки по екрану**
  Zoom апликација има одличну опцију која омогућава свим учесницима да остављају белешке, истакну неки текст или цртају по екрану. Да бисте то урадили пронађите опцију View Option при врху прозора, а затим одаберите Annotate. Појавиће се списак алата које можете користити, бирамо онај који највише одговара нашим потребама.

Једна од опција која се код наставника показала као најкориснија јесте бела табла (Whiteboard). Она нам пружа следеће могућности: куцање текста, цртање, истицање важног итд.

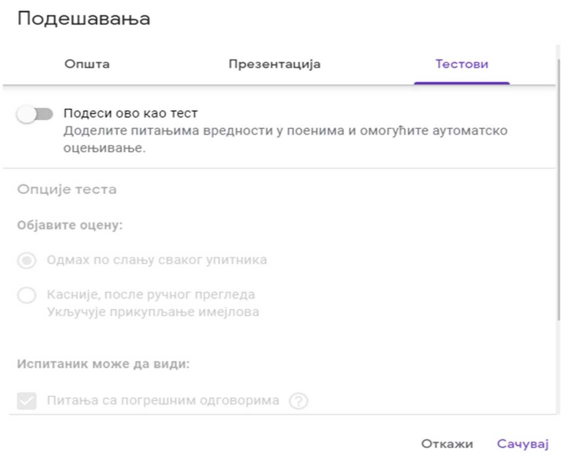


Слика 31. Неке од опција Zoom апликације

4.5. Тестирање ученика

Након презентованог градива путем Zoom апликације, правимо пример једног теста за ученике да се провери ниво савладаног градива.

За тестирање користимо Google упитник, односно Google тест (Слика 32). Да бисмо имали могућност коришћења треба да имамо свој Google налог преко ког се пријавимо и започињемо са састављањем теста. Да би тест био што квалитетнији у опцијама за подешавање бирамо тест и неке од понуђених ставки које нам у датом моменту одговарају (да ли се оцена објављује одмах након предаје теста или накнадно, да ли ученик може одмах да види где је грешио и који су тачни одговори и слично).

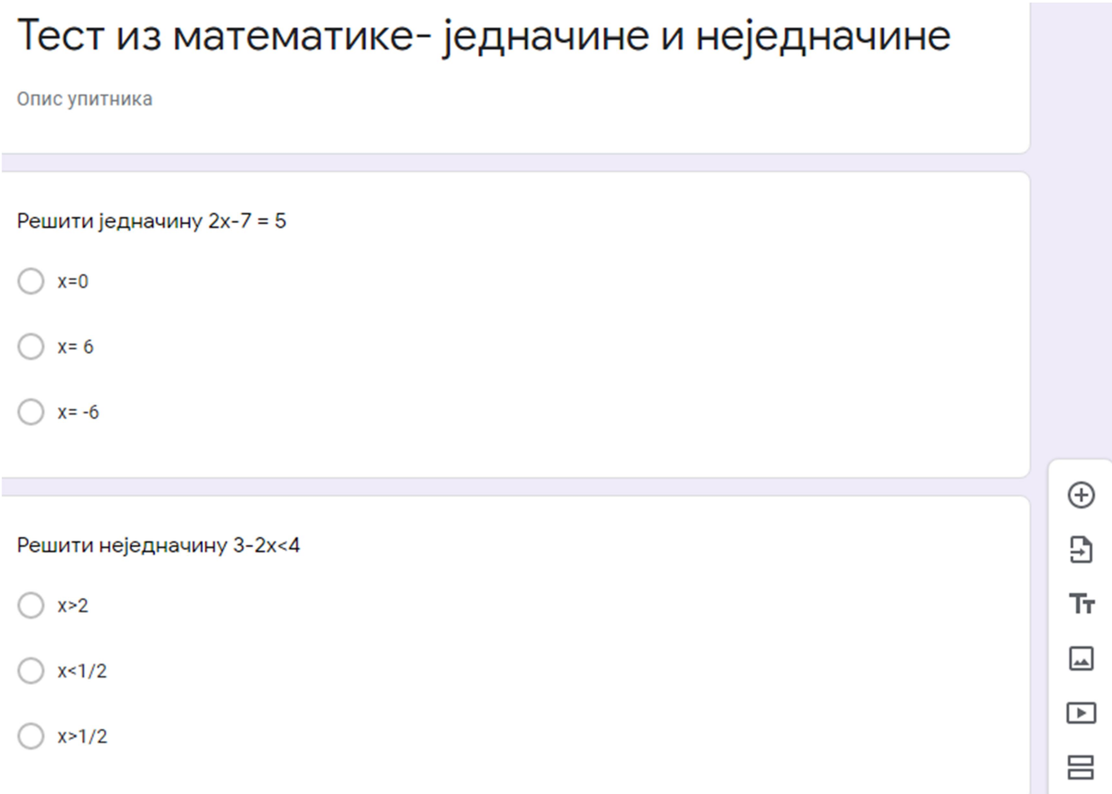


Слика 32. Google тест

Након одабира одговарајућих опција следи састављање теста, приликом сваког новог питања бирамо опцију,+'.

4.5.1. Пример теста из математике

Једна од кључних ствари поред презентовања градива ученицима јесте и провера њиховог знања из тог разлога су професори приликом онлајн наставе често бирали баш овакав вид тестирања ученика.



Слика 33. Пример теста

Оно што је такође важно за састављање тестова јесте опција која се појављује приликом састављања сваког питања у доњем десном углу, а то је опција „обавезно“, са том опцијом тражимо од ученика да одговори на сваки задатак, а уколико то не учини рачунар бележи као нетачан одговор.

5. УСПЕХ УЧЕНИКА

Кроз сам рад покушала сам да представим три методе презентовања градива онлајн путем, након тога уследио је истраживачки рад на ученицима основне школе „Соња Маринковић“ из Новог Сада узраста 7. и 8. разреда.

Успех ученика из било ког предмета условљен је различитим чиниоцима. Наставник је један од њих, који својим поступцима и начином рада одређује квалитет наставе и степен оствареног успеха код ученика. Од начина на који остварује своју професионалну улогу зависи организација наставе и наставних активности, квалитет часова као и ниво мотивације ученика.

Како математика обично није омиљени предмет међу ученицима, пред наставницима математике је врло тежак задатак јер треба да остваре прописани наставни програм, а да при томе ученицима приближе математику и олакшају учење. Да би се ученици заинтересовали за математику они пре свега треба да је разумеју, да постигну почетни успех у раду и пронађу разлоге због којих ће наставити активније да уче [11].

Кроз кратку анкету сам испитала ученике седмог и осмог разреда о оваквом виду наставе (онлајн) математике и о томе колики је ниво знања који су стекли овим путем учења. Анкету је радило укупно 82 ученика, од којих је било 49 девојчица и 33 дечака. Сви ученици похађају исту основну школу и уче исте математичке садржаје.

Упитник за анкетирање ученика се састојао од шест питања и понуђених одговора.

1) Разред?
    - 7
    - 8
2) Колико пута недељно си провео/ла пратећи онлајн наставу матемаике?
    - Пет пута недељно
    - Четири пута недељно
    - Три или мање пута

3) Да ли си током онлајн наставе морао/ла више или мање времена да проведеш учећи самостално или уз помоћ укућана у односу на редовну наставу?
    - Провео/ла сам више времена учећи самостално или уз нечију помоћ
    - Провео/ла сам мање времена учећи самостално или уз нечију помоћ

4) Да ли се онлајн настава састојала само из предавања или и из провера знања?
    - Само предавања
    - И једно и друго

5) Да ли је наставник/ца објављивао/ла додатне материјале ван одржаног онлајн часа?
    - Да
    - Не

6) Да ли си задовољан/на количином стеченог знања након онлајн наставе?
    - Јесам
    - Нисам

Након анкетирања ученика анализирани су добијени подаци и закључак је следећи.

Укупно је анкетирано 26 ученика седмог разреда и 56 ученика осмог разреда.

Што се тиче праћења наставе нико од ученика није наставу пратио пет пута недељно, њих 63 је наставу пратили четири пута, док је 19 ученика од одабраног узорка наставу математике пратило три или мање пута недељно.

Када питам ученике да ли су током оваквог вида наставе за време пандемије морали више или мање времена да проведу учећи самостално добили смо податак да је од укупно 82 ученика њих 67 одговорило да је у овом периоду морало више времена да проведе учећи самостално или уз помоћ својих укућана.

Оно што је занимљиво, свима је познато да се током школске године врше редовне провере знања ученика биле оне писмене или усмене, међутим као одговор на четврто питање већи број ученика је рекао да уопште нису имали провере знања из математике. Међутим када је реч о додатном материјалу ту су одговори равномерно подељени, једна половина испитаника је одговорила да су током онлајн наставе имали додатне материјале од стране својих наставника, међутим друга половина се са тим није сложила и истиче да се настава искључиво заснивала на одржаном часу путем неке од понуђених апликација.

Питање које је занимало све и наставнике и родитеље, а и саме ученике јесте податак о томе да ли су задовољни количином стеченог знања из математике током онјалјн наставе. Однос одговора на ово питање ћу представити графички.

Слика 34. График мишљења ученика о стеченом знању током онлајн наставе

Оно што може да се примети јесте чињеница да ученици нису задовољни количином знања које су стекли током оваквог вида наставе и то је оно што нас све забрињава. Поставља се питање у чему је проблем и шта је довело до овакве статистике? Претпоставка је да и поред свих алата којима се служимо и олакшица које су нам понуђене у свету рачунара, ученицима је ипак лакше да наставу прате уживо у својим кабинетима пратећи рад наставника и активно учествујући у реализацији часа.

ЗАКЉУЧАК

Можда постоји много разлога да се алгебра посматра као напреднија грана математике у односу на аритметику, зато се у школама и уводи после аритметике. Али постоје убедљиви разлози за увођење алгебре као саставног дела раног математичког образовања.

Прихватање појма рана алгебра у циљу побољшања наставе елементарне математике у нижим разредима основне школе подразумева промену наставних планова и програма. Међутим одређена група истраживача [12] је става да убацивање алгебарских садржаја у наставу математике у нижим разредима основне школе није нимало једноставан задатак. Предности које би донео овај концепт су велике, почевши од бољег разумевања аритметике, олакшано учење алгебре у вишим разредима, па све до бољег сналажења у свакодневном животу.

Приликом планирања часа кључно је познавање предзнања ученика, затим јасно одређен циљ часа и наставне методе којима је најлакше достигнути тај циљ. Овим радом сам покушала да представим три различите области које се обрађују у основној школи, као и начин презентовања тог градива ученицима у ситуацији када је једино могуће извести онлајн наставу. Радећи статистику на основу одговора ученика дошла сам до закључка да су много боље резултате постизали током редовне наставе у школи. Можда је баш кључно то што приликом редовне наставе наставници у сваком моменту могу да одговоре на сва питања, свесни су колико ученици владају градивом и виде изразе лица једни других, одакле може доста тога да се закључи тј. да се види колико је ученицима нешто јасно и шта је то што им прави сметње у разумевању новог градива.

За крај постављам изјаву ученика седмог разреда о оваквом виду наставе и сматрам да је то најбољи и најзначајнији закључак за сваког наставника:

„Имајући у виду да нисмо знали како да радимо математику на интернету, пратили смо школску таблу путем камере на лаптопу и укључивали се сваки пут када би нам наставница поставила питање. Часови иду добро и додаци за Google Meet и Google презентацију које нам је наставница открила су заиста корисни. Наставница се труди да укључи све ученике у наставу и све у свему сам задовољан часовима математике, мада се надам да ћу наредне године наставу пратити редовно у школи, јер ми такав облик учења више одговра и лакше ми је за самосталан рад код куће.“

Међутим и поред свега треба се увек трудити да ученици разумеју и прихвате чињеницу да ће се улагањем времена и напора њихово знање градити систематски и временом све више надограђивати.

.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Сања Милојевић, Математика 5. радни уџбеник Klett, 2011.

[2] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић, Математика 6. радни уџбеник Klett, 2009.

[3] Горан Цвијановић, Концептуализација појма рана алгебра и рано алгебарско мишљење, Истраживање математичког образовања, Vol. VIII, Broj 14,1-8, 2016.

[4] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић Математика 7, Уџбеник за седми разред основне школе, Klett, Београд, 2009.

[5] Небојша Икодиновић, Слађана Димитријевић Математика 8, Уџбеник за осми разред основне школе, Klett, Београд, 2009.

[6] Григориј Д. Глејзер, Природни и рационални бројеви, Настава математике (2007)

[7] Heinz-Dieter Ebbinghaus, Hans Hermes, Friedrich Hirzebruch, Michael Koecher, Klaus Mainzer, Jürgen Neukirch, Alexander Prestel, Reinhold Remmert, Numbers, Springer - Verlag, New York, 1991.

[8] Charles H. Butler, Frank L. Wren, The teaching of secondary mathematics,Michigan University,1960.g.

[9] Како користити „Zoom“ апликацију: https://www.portalmladi.com/zoom-aplikacija/

[10] Како користити „Google Meet“ апликацију: https://apps.google.com/meet/how-it-works/

[11] Искустава наставника: https://www.institut.edu.rs/iskustvo-iz-nastavnicke-prakse-trikovi-za-onlajn-nastavu-matematike/

[12] Citation Carraher, Schliemann, Brizuela, Earnest, Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education, Journal for Research in Mathematics Education, 37(2), 87-115., 2006.

[13] Упутство за коришћење „Google презентације“: https://hr.eyewated.com/sto-je-google-prezentacija/

.