Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Примена програмских пакета у решавању задатака из стереометрије

Ментор:
Тијана Шукиловић

Студент:
Урош Ивановић
1114/2020

Београд 2022.

Сажетак

Садржај

1 Увод

Градиво математике које се прелази у основним и средњим школама свакако представља изазов ученицима. Једна од области које могу бити захтевније је геометрија, тачније стереометрија. Основни објекти у геометрији су интуитивно једноставни, али комплетније разумевање и манипулисање геометријских објекта, нарочито у простору, може бити захтевно за ученике. Додатно потешкоћа може бити визуелизација задатог проблема у задатку, која захтева одређени ниво апстракције од ученика.

Због преобимности наставног плана и програма из математике и недовољног фонда часова за стереометрију, ученици немају довољно могућности за визуелизацију геометријских тела. Технолошка достигнућа омогућавају и мењају начин комуникације, пословања и учења. Свакој новој генерацији младих лакше је приступити језиком технологије, апликација и технолошким иновацијама. Зато би такав начин рада и учења могао бити ефикаснији и продуктивнији, све у циљу унапређења знања и вештина ученика. Примена савремених образовних технологија у настави стереометрије би значајно појачала визуализацију наставних садржаја код ученика, а самим тим и мотивацију за учење.

Овај рад се бави стереометријом која се обрађује у основним и средњим школама, тачније бави се полиедрима. Пре свега је представљена полиедарска површ, затим њени примери као што су призма, пирамида и зарубљена пирамида. Бави се особинама полиедара, пресецима, површинама и запреминама. Додатно, има речи и о правилним полиедрима, као полиедри са посебним особинама, и о полуправилним полиедрима који могу бити захтевнији за школско градиво али занимљиви за заинтересоване ученике.

Програмски пакети који омогучавају напредак наставе којима се бавимо су *GeoGebra* и *SketchUp*. Представљен је динамички софтверски пакет *GeoGebra* за подучавање математике. Можемо га посматрати као белу таблу где се могу представити математички материјали, како преко слика тако и помоћу слајдова и анимација.

Још један једноставан програмски пакет који омогућава прављење математичког садржаја је *SketchUp*. *SketchUp* је програм пре свега намењен за архитектуру што омогућава једноставније кретање и рад у простору, тако да је неке математичке објекте лакше представити у овом програму.

Већина слика у раду је одрађено у програмским пакетима *GeoGebra* и *SketchUp*. Циљ рада је да се популаризује употреба рачунара у настави математике, пре свега за коришћење образовних рачунарских софтвера. Тиме би дошло до подизања квалитета наставе, повећања мотивације код деце и ефикаснијег усвајања знања.

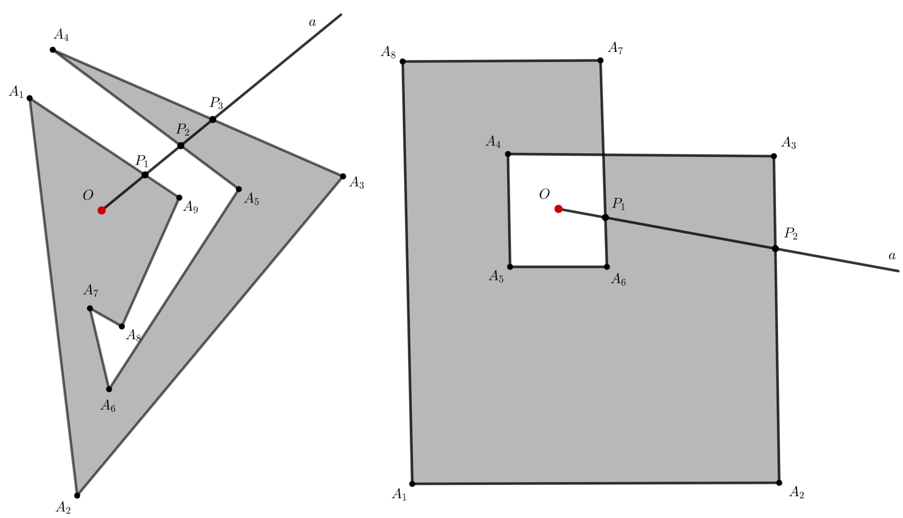
2 Полиедар

У овом поглављу су дефинисане полиедарска и рогљаста површ. Посебна пажња посвећена је геометријским телима - полиедрима. Анализирана је призма, пирамида и зарубљена пирамида, њихове особине, површине и запремине. Затим и компликованији објекти као сто су правилни полиедри или Платонова тела и полуправилни полиедри или Архимедова тела.

2.1 Полиедарска површ

Полигонска линија $A_1 ... A_n A_{n+1}$ је унија надовезаних дужи A_1A_2, A_2A_3 ... , A_nA_{n+1} које називамо ивице полигонске линије. Тачке $A_1, ..., A_{n+1}$ називају се темена полигонске линије. Ако је $A_{n+1} = A_1$ кажемо да је полигонска линија затворена и називамо је **полигоном** $A_1 ... A_n$. Ако никоје две ивице полигонске линије немају заједничких тачака, осим што сваке две суседне ивице имају заједничко теме, полигонску линију називамо *простом*.

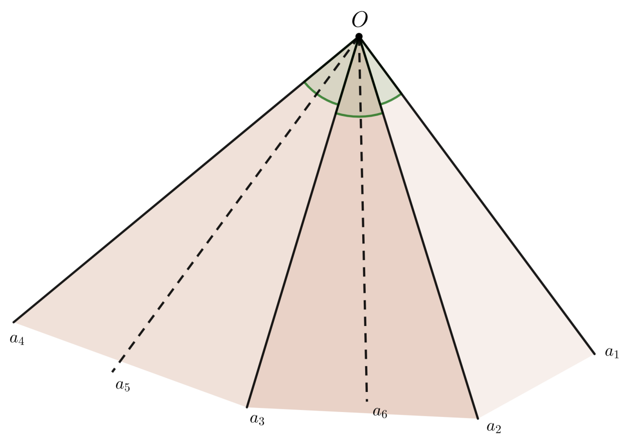
За тачку O у равни полигона p, $O \notin p$, кажемо да припада **унутрашњости полигона** p ако је паран број пресечних тачака полигона и произвољне полуправе a са теменом O која не садржи ни једно теме полигона. Ако је непаран број пресечних тачака полигона и полуправе a из темена O, тачка O припада **спољашњости полигона**.



Слика 1: Тачка O припада унутрашњости полигона (лево). Тачка O припада спољашности полигона (десно)

Унутрашњост полигона зовемо још и **полигонска површ**. Често се поистовећује појам полигона и полигонске површи коју он ограничава. За полигон кажемо да је *конвексни*, ако свака дуж која повезује било које две тачке унутар њега лежи у њему потпуно.

Нека је у простору задат коначан низ полуправих $a_1, a_2, ..., a_n$ са заједничким теменом O. Лик који се састоји из углова $\angle[a_1, a_2]$, $\angle[a_2, a_3]$,..., $\angle[a_{n-1}, a_n]$, $\angle[a_n, a_1]$, при чему свака два узастопна угла у овом цикличном низу не припадају једној равни, називамо **рогљастом површи** и обележавамо је са $Oa_1a_2...a_n$. Полуправе $a_1, a_2, ..., a_n$ називамо *ивицама*, тачку O *теменом*, а углове $\angle[a_1, a_2]$, $\angle[a_2, a_3]$, ..., $\angle[a_{n-1}, a_n]$, $\angle[a_n, a_1]$, $\angle[a_n, a_1]$ *пљоснима*, *ивичним угловима* или *странама рогљасте површи* $Oa_1a_2...a_n$.



Слика 2: Рогаљ $Oa_1a_2a_3a_4a_5a_6$

За две полигонске површи кажемо да су *суседне* ако имају једну заједничку ивицу и сем тачака те ивице немају више заједничких тачака. Коначан низ полигонских површи повезаних тако да су сваке две узастопне полигонске површи суседне у том низу, чине *ланац полигонских површи*. Скуп полигонских порши је *повезан* ако се било које две површи из тог скупа могу повезати ланцем полигонских површи.

Коначан, повезани скуп затворених полигонских површи (многоуглова) називамо **полиедарском површи** ако задовољава следеће услове:

а) ако површи задатог скупа имају једно заједничко теме, тада унутрашњи углови тих површи који имају заједничко теме припадају пљоснима једне рогљасте површи која сем пљосни које садрже поменуте углове нема више пљосни,

б) свака дуж која припада ивици неке од полигонских површи задатог скупа, припада највише још једној од ивица неке друге површи тог скупа.

Како суседне пљосни рогљасте површи никада не припадају једној равни, тада ни суседне пљосни полиедарске површи неће припадати једној равни.

Многоуглови који чине полиедарску површ називају се *стране* или *пљо-*

сни, а станице и темена тих многоуглова називају се *ивице* и *темена* полиедарске површи. Дужи које повезују темена полиедарске површи која припадају разним пљоснима те површи називамо њеним *дијагоналама*.

Примедба Оваква дефиниција полиедарске површи је превише стриктна и не дозвољава опције отворених полиедара, нити да је полиедар сложен. Зато ћемо користити неформалну дефиницију која је једноставнија и погоднија за примене у рачунарској графици и 3D моделовању.

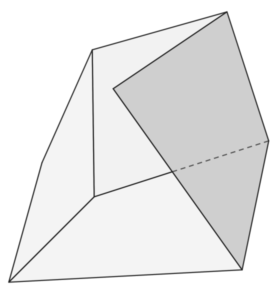
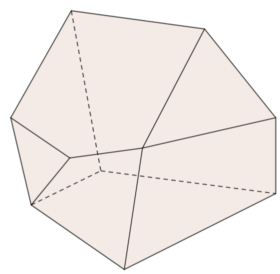
Полиедарска површ је објекат простора који је унија коначно много пљосни и задовољава следеће услове:

а) пљосни су конвексни полигони;

б) свака ивица припада највише двема пљоснима. Ивица која припада само једној пљосни зове се рубна ивица, док се ивица која припада двема пљоснима зове унутрашња ивица;

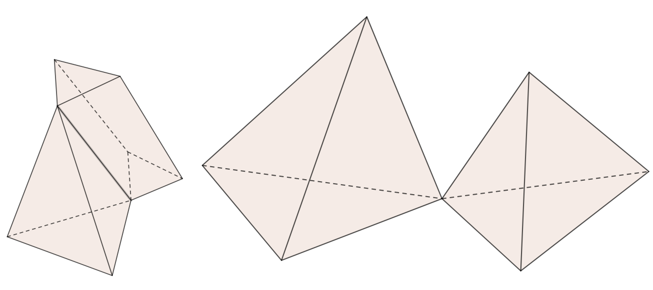
в) пресек две пљосни може бити само ивица.

Ако све странице многоуглова припадају по двема површима, тада је полиедарска површ *затворена*, а ако нека од страница многоугла припада само једној површи, полиедарска површ је *отворена*.

Слика 3: Отворена (лево) и затворена (десно) полиедарска порвш

Полигонску површ називамо *простом* ако не постоје две пљосни те површи које имају заједничких тачака, осим што суседне пљосни имају заједничку ивицу и пљосни једног рогља, имају заједничко теме. Ако, у противном, такве две пљосни постоје, ту површ називамо *сложеном*.



Слика 4: Сложене полиедарске порвши

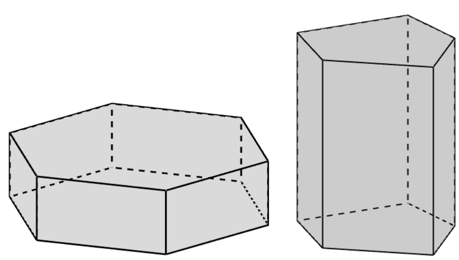
На Слици 4 прва полиедарска површ је сложена јер постоји ивица која је заједничка за четири пљосни, док је друга полиедарска површ сложена јер постоји теме заједничко за два рогља. Полиедарске површи на Слици 3 су просте.

Нека је дата проста, затворена полиедарска површ и тачка O која јој не припада. Ако свака полуправа из темена O која не садржи ни једно теме и не сече ивице површи, са њоме има непаран број заједничких тачака, тада је тачка O *унутар* полиедарске површи. Ако свака полуправа из темена O са њоме има паран број заједничких тачака, тада је тачка O *изван* полиедарксе површи. Скуп свих тачака унутар полиедарске површи назива се њеном *унутрашњошћу*, а скуп свих тачака изван, њеном *спољашњошћу*. Дакле, проста затворена полиедарска површ разлаже простор на две области: унутрашњост и спољашњост.

Унија просте затворене полиедарске површи и њене унутрашњости назива се **полиедар**.

2.2 Призма

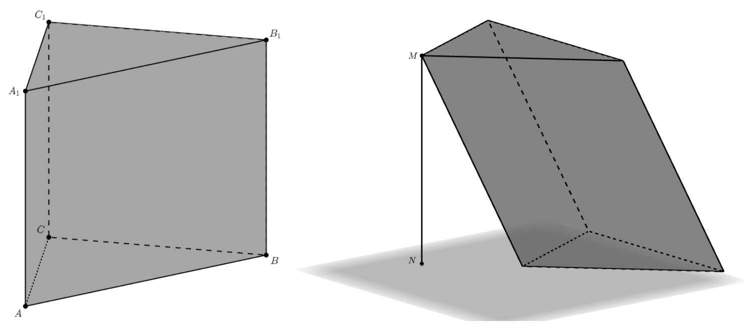
Полиедар чије су две подударне пљосни у двема паралелним равнима, и све остале пљосни паралелограми који спајају та два многоугла назива се **призма**. Два многоугла у паралелним равнима називају се *основе* призме или *база*, док се остали паралелограми називају *бочне стране* које заједно чине *омотач* призме. Ако је у основи n-тоугао, онда се призма назива n-тострана призма. Странице n-тоугаоних основа призме су *основне ивице* призме, а странице бочних страна су *бочне ивице*. Темена основе призме су *темена призме*. Призме чије су бочне ивице нормалне на равни основе називају се *праве* призме, а ако бочне ивице нису нормалне на равни основа, призма је *коса*. Дуж која спаја равни основа призме и нормална је на обе равни основа је *висина* призме.



Слика 5: Правилна шестострана призма (лево) и петострана призма (десно)

Права призма чије су основе правилни n-тоуглови назива се *правилна* n-страна призма. Призме чије су све пљосни правилни многоуглови је пример полуправилних полидара, али призме у општијем смислу за своје пљосни могу имати произвољне многоуглове.

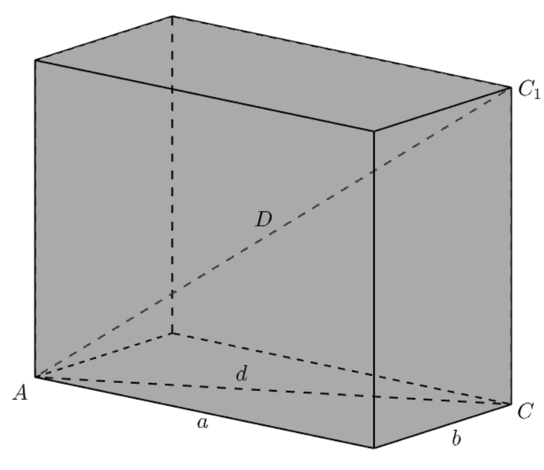
Призма чије су основе паралелограми назива се *паралелопипед*, док се призма са правоугаоницима за основе назива *квадар*. Квадар чије су све пљосни квадрати је правилни полиедар, коцка.



Слика 6: Права (лево) и коса (десно) тространа призма

Размотримо Слику 6. Подударни троуглови $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ чине основе тростране призме, док паралелограми ABB_1A_1, BCC_1B_1 и ACC_1A_1 чине бочне стране или омотач призме. Дужи AB, BC, AC, A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 чине основне ивице, док AA_1, BB_1 и CC_1 чине бочне ивице и могу представљати висине призме јер су дужи које спајају основе и нормалне су на њих, док код косе призме бочне ивице и висина нису једнаке. Висина косе призме је дуж MN која је нормална на обе основе.

Пример *Израчунати дужину дијагонале квадра D, ако су познате његове димензије a, b и c.*

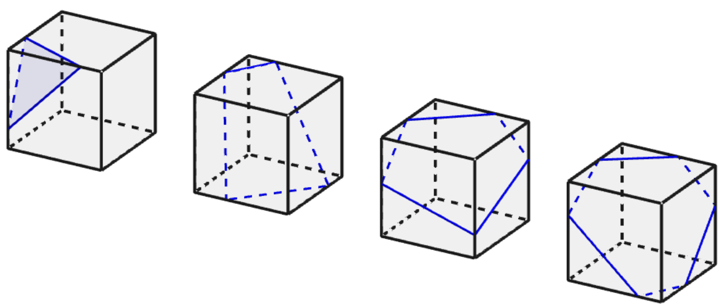


Слика 7: Квадар

Правилна призма чије су све стране правоугаоници је квадар. Ако су дужине ивица основе a и b, дијагонала основе $AC = d$ се лако може израчунати помоћу Питагорине теореме $d^2 = a^2 + b^2$. Просторна дијагонала $AC_1 = D$ се слично добија $D^2 = d^2 + CC_1^2$, одакле је $D^2 = a^2 + b^2 + c^2$. $\diamond$

Пресек призме и равни дају полигонску површ, чији облик зависи од тога како је постављена раван. Ако је раван паралелна основама призме, пресек је полигонска површ идентична основи, или једноставније, призма је подељена на две мање призме. Раван којом се сече призма може бити постављена тако да је паралелна са бочним ивицама, у ком случају је пресек паралелограм. Специјално, ако та раван садржи две несуседне бочне ивице, онда се пресек назива *дијагонални* пресек.

Пресеци призме и равни која није паралелна ни основама ни бочним ивицама могу бити различите полигонске површи. На Слици 8 приказани су такви пресеци коцке и равни, где су полигонске површи редом троугао, четвороугао, петоугао и шестоугао.



Слика 8: Пресеци коцке и равни

2.2.1 Површина призме

Као једно од најбитнијих својстава, израчунавање *површине* призме се своди на збир површина свих пљосни или полигонских површи који чине призму. Призму сачињавају две основе у паралелним равнима и паралелограми који чине бочне стране или омотач. Према томе, општа формула за површину призме представља збир две базе и омотача

$$P = 2 \cdot B + M,$$

где је B површина једне основе, а M површина омотача.

Површина омотача призме се може посматрати као производ обима основе и бочне ивице или висине $M = O \cdot H$, где је H висина призме.

Ако је пример праве тростране призме са основним ивицама a, b и c, површина основе се рачуна као

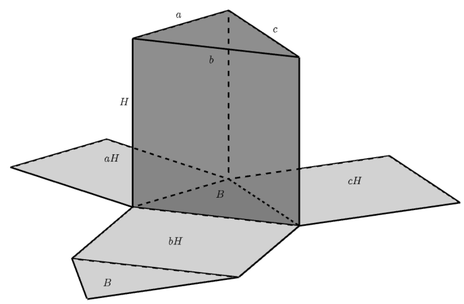
$$B = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c,$$

где су h_a, h_b и h_c одговарајуће висине троугла. Омотач чине три правоугаоника чија је једна страница одговарајућа страница троугла тј. основе, а друга страница висина призме H, тада је

$$M = a \cdot H + b \cdot H + c \cdot H = (a + b + c)H = O \cdot H.$$

Површина призме је

$$P = 2 \cdot B + M = 2 \cdot B + O \cdot H.$$



Слика 9: Тространа призма и њена мрежа

Ако је пример праве правилне шестостране призме, основа се рачуна као

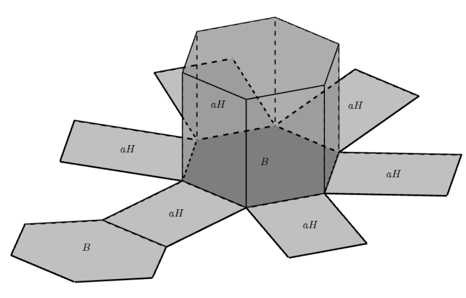
$$B = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2},$$

где је a страница правилног шестоугла основе. Омотач чине шест подударних правоугаоника чија је једна страница висина H, а друга страница a основе. Тада је

$$M = 6a \cdot H.$$

Површина призме је

$$P = 2 \cdot B + M = 3a^2\sqrt{3} + 6aH.$$



Слика 10: Шестострана призма и њена мрежа

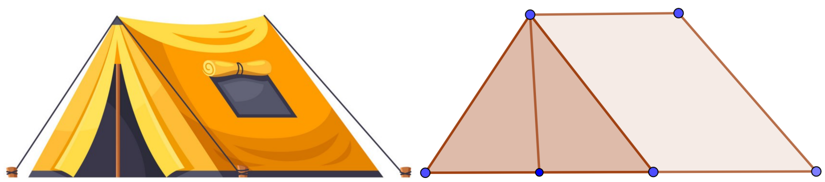
Пример *Дата је кутија чаја димезија* $4,6$ *и* $13cm$. *Колика површина картона је потребна за прављење те кутије?*

Слика 11: Чај

Кутија чаја је облика квадра. Површина потребног картона је површина квадра, тј. $P = 2B + M$. Основу чине правоугаоник $B = 4 \cdot 6$, док омотач чине два правоугаоника $4 \cdot 13$ и два $6 \cdot 13$. Коначно површина је

$$P = 2 \cdot 4 \cdot 6 + 2(4 \cdot 13 + 6 \cdot 13) = 308cm^2.$$

Задатак *Колико платна је потребно да се направи шатор (Слика 12 лево), ако је шатор дуг* $5\ m$. *Почетни, улазни део је у облику једнакостраничног троугла и штап при улазу у шатор је дужине* $\sqrt{3}\ m$.



Слика 12: Шатор (лево) и призма облика шатора (десно)

Шатор се може посматрати као призма чије су основе једнакостранични троуглови а омотач је састављен од правоугаоника. (види Слику 12 десно). Површина ове призме представља одговор колико је потребно платна како би се направио шатор.

Штап при улазу представља висину основе, тј. једнакостраничног троугла, $h = \sqrt{3}$. Како је

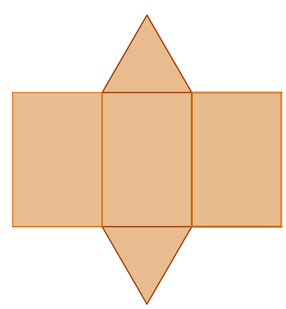
$$\sqrt{3} = h = \frac{a\sqrt{3}}{2},$$

страницу троугла a лако добијамо $a = 2$. Површина основе је

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}.$$

Омотач призме представљају 3 правоугаоника димензија a и H. Висина призме H је колико је шатор дуг, тј $H = 5$. Површина омотача је

$$M = 3a \cdot H = 3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$



Слика 13: Мрежа призме

Коначно површина призме је

$$P = 2B + M = 2\sqrt{3} + 30 \approx 33.46.$$

Потребно је 33.46 m^2 платна да би се направио шатор.

2.2.2 Запремина призме

Одређивање запремине неког тела значи одредити број који показује колико се пута неко одређено тело које по дефиницији има запремину 1 садржи у том телу. За тело, чија је запремина 1, узима се *јединична коцка*, тј. коцка ивице 1.

Запремина је пресликавање које неком телу додељује број, при чему је тај број већи или једнак нули, и јединичној коцки додељује број 1.

Такође се могу подразумевати следеће интуитивне особине запремине. Ако су два дела подударна, онда су им запремине једнаке. Ако се тело може расложити на два дисјунктна тела, онда је запремина почетног тела једнака збиру запремина разложених делова.

Запремина квадра једнака је *производу његових димензија.* Претпоставимо да су дужине ивица квадра a, b и c мерене истом јединицом дужине m ($1\ cm$ на Слици 14) Дужина a је $3\ cm$, ширина b је $2\ cm$ и висина c квадра је $5\ cm$. Повлачењем равни кроз квадар, које су паралелне његовим страницама $BCB'C', ABA'B'$ и основи (Слика 14) добија се квадар подељен на одговарајуће коцке. Дакле, запремина паралелопипеда је представљена помоћу јединичних коцки ивице $1\ cm$. Како је квадар разложен на дисјунктне јединичне коцке, онда је запремина једнака збиру његових коцки. Рачунање запремине квадра се своди на пребројавање јединичних коцки.

Како у првом слоју има 6 коцки, а у целом квадру има 5 таквих слојева, то је запремина паралелопипеда $5 \cdot 6 = 30$ тј. $30m^3$, $30dm^3$, $30cm^3$ итд. у зависности од одабира мерних јединица јединичне коцке. До резултата запремине може се доћи када мерне бројеве димензија помножимо, тј. $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

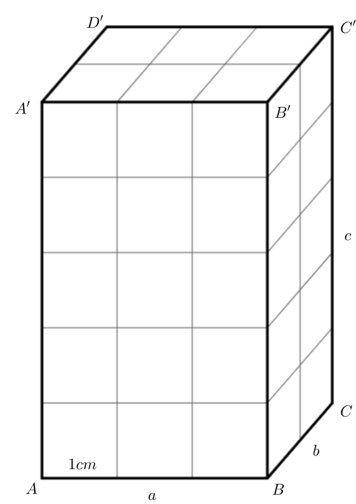
Запремина V правоуглог *квадра* дужине a, ширине b и висине c једнака је

$$V = abc.$$

Како је код овог паралелопипеда $ab = B$ основа призме и $c = H$ висина призме, то је

$$V = BH,$$

тј. запремина једнака је **производу основе и висине призме**.

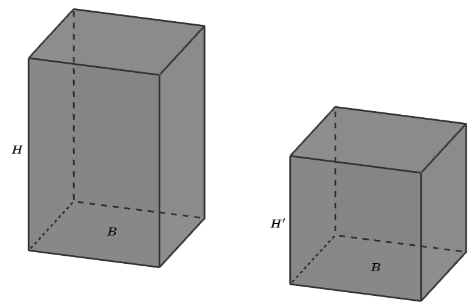


Слика 14: Квадар

Може се показати да ова формула важи и за произвољну призму, тј. запремина ма које призме једнака је производу површине основе и њене висине. Како је код *коцке* $a = b = c$, то је запремина коцке $V = a^3$. Сваки коси паралелопипед има једнаку запремину с правим правоуглим паралелопипедом исте основе и висине.

Однос запремина две призме једнаких основа, а различитих висина, односи се као њихове висине. Ако је запремина прве призме $V = BH$, а друге $V' = BH'$, онда њиховом деобом добијамо

$$V : V' = H : H'.$$



Слика 15: Призме једнаких основа

Пример *Запремина призме и запремина воде која је унутар призме је у односу* $2 : 3$*, док је висина призме за* 2 *већа од висине воде у призми. Израчунати висину воде у призми.*

Вода у датој призми се може посматрати као мања призма са истом основом. Како је њихов однос $2 : 3$, онда следи

$$\frac{V_v}{V_p} = \frac{2}{3} = \frac{H_v}{H_p},$$

где је V_v, H_v запремина и висина воде, а V_p, H_p запремина и висина призме. Како је висина призме за 2 већа од висине воде, онда је $H_p = 2 + H_v$. Користећи ову једначину и однос висина добија се

$$\frac{2}{3} = \frac{H_v}{2 + H_v}.$$

Коначно, висина воде у призми је $H_v = 4$.

Пример *Површина основе праве тростране призме је* 4*, а површина бочних страна су 9, 10 и 17. Наћи запремину призме.*

Основа призме је троугао страница a, b и c, површине $B = 4$, док су бочне стране $M_1 = aH$, $M_2 = bH$ и $M_3 = cH$, где је H висина призме (Слика 9). Запремина призме се рачуна као $V = BH$, тако да је само потребно наћи висину H. Површина оснве се може представити помоћу Хероновог образца $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, где је s полуобим који се може изразити као

$$s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}\left(\frac{9}{H} + \frac{10}{H} + \frac{17}{H}\right) = \frac{18}{H}.$$

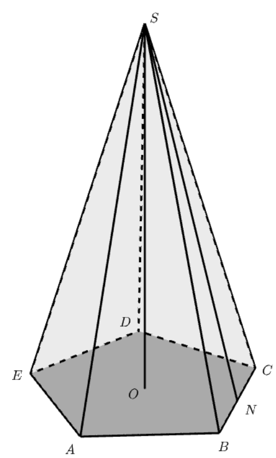
Дакле површина основе је $4 = \sqrt{\dfrac{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1}{H \cdot H \cdot H \cdot H}}$, тј. $H = 3$. Коначно, запремина призме је

$$V = BH = 4 \cdot 3 = 12.$$

2.3 Пирамида

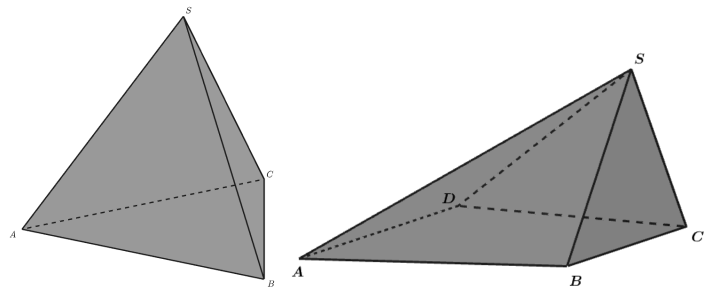
Пирамида је полиедар састављен од дела рогљасте површи и многоугла који чини основу. За природни број $n \geq 3$, полиедар који има $n+1$ пљосни од којих је једна пљосан $n-$тоугао, а све остале су троуглови, назива се $n-$тострана **пирамида**. *Основу* или *базу* пирамиде чини $n-$страна пљосан, остале пљосни називају се *бочне стране* пирамиде. Унија бочних страна чине *омотач* пирамиде.

Основа петостране пирамиде (Слика 16) је петоугао $ABCDE$, док су троуглови бочне стране SAB, SBC, SCD, SDE и SEA који чине омотач. Странице $n-$тоуглаоне основе пирамиде су *основне ивице* пирамиде, а странице бочних страна пирамиде су *бочне ивице*. Основне ивице петостране пирамиде су AB, BC, CD, DE и EA, док су бочне ивице SA, SB, SC, SD и SE. Све бочне ивице имају заједничку тачку S, која се назива *врх* пирамиде. Темена основе пирамиде и врх су темена пирамиде. Дуж која спаја врх пирамиде и раван основе и номална је на основу чини *висину* пирамиде. Дуж SO је висина петостране пирамиде. Ако је основа праве пирамиде правилан многоугао, пирамида је *правилна*. Ако је подножје висине правилне пирамиде истовремено и центар кружнице описане око основе, онда се назива *правом* пирамидом. Ако то није случај, пирамида је *коса*. Висина бочне стране пирамиде тј. висина троугла из врха пирамиде назива се *апотема*. Дуж SN је апотема петостране пирамиде.



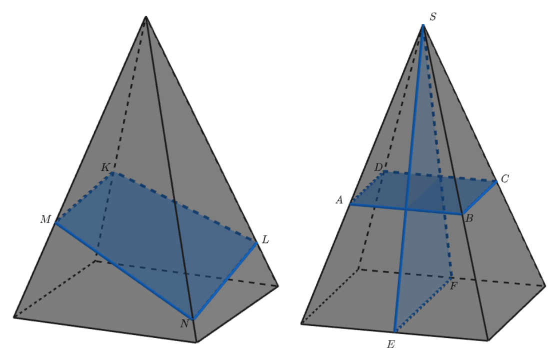
Слика 16: Права правилна петострана пирамида

У зависности од многоугла у основи пирамиде, постоје тростране, четворостране и многостране пирамиде. Тространа пирамида је најпростији полиедар и правилни полиедар који се назива *тетраедар*. Таква пирамида за све пљосне има троуглове од којих се свака може узети за основу.



Слика 17: Тетраедар (лево) и коса четворострана пирамида (десно)

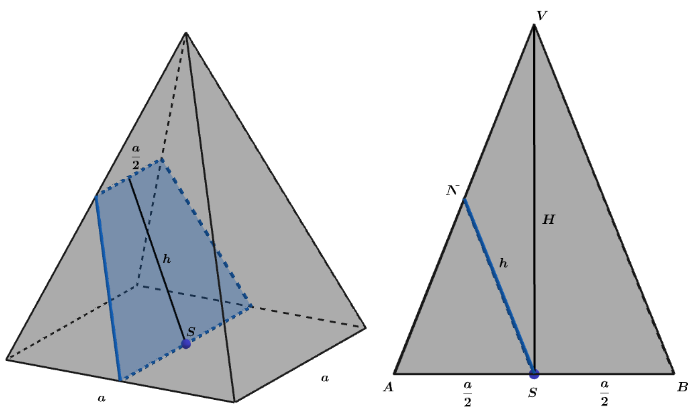
Пресек пирамиде и равни дају полиедарску површ, чији облик зависи од тога како је постављена раван. Ако је раван паралелна основи пирамиде, пресек је полиедарска површ слична основи. Или једноставније, пирамида је подељена на мању пирамиду и зарубљену пирамиду. На Слици 18 (десно) пресек $ABCD$ је паралелан основи. Ако пресечна раван садржи врх пирамиде и сече раван основе, онда је у пресеку троугао. На Слици 18 (десно) пресек EFS је троугао који садржи врх пирамиде. Пресеци пирамиде равни која није паралелна ни основи и не садржи врх пирамиде, могу бити различите полиедарске површи. Један такав пресек је четвороугао $MNLK$ на Слици 18 (лево).



Слика 18: Пресек равни и четворостране пирамиде

Пример *Правилна четворострана пирамида је пресечена са равни која садржи подножје висине пирамиде и паралелна је једној бочној страни. Израчунати површину пресека ако је основна ивица дужине* 28 cm *и висина пирамиде* 48 cm.

Пресек пирамиде и равни која пролази кроз подножје висине и паралелна је бочној страни, је једнакокраки трапез са основицама a и $\frac{a}{2}$ (Слика 19 лево).



Слика 19: Пресек пирамиде и равни

Висина трапеза h, која се добија у пресеку, се може израчунати помоћу Талесове теореме примењене на троугао ABV (Слика 19 десно). Троугао ABV представља пресек пирамиде и равни која садржи врх и нормална је на основу пирамиде. Применом Талесове теореме добија се $h : BV = \frac{a}{2} : a$. Дуж BV се лако може добити као $BV^2 = H^2 + SB^2 = 48^2 + 14^2$, дакле $BV = 50$. Из пропорције $h : BV = \frac{a}{2} : a$ се добија да је $h = 25$. Коначно, површина пресека је површина трапеза са основица a и $\frac{a}{2}$

$$P = \frac{(a + \frac{a}{2})h}{2} = \frac{(28 + 14)25}{2} = 525cm^2.$$

2.3.1 Површина пирамиде

Површина пирамиде се своди на збир површина свих пљосни или полигонских површи који чине пирамиду. Пирамиду сачињава основа и троуглови који чине бочне стране или омотач. Према томе, општа формула за површину пирамиде представља збир базе и омотача

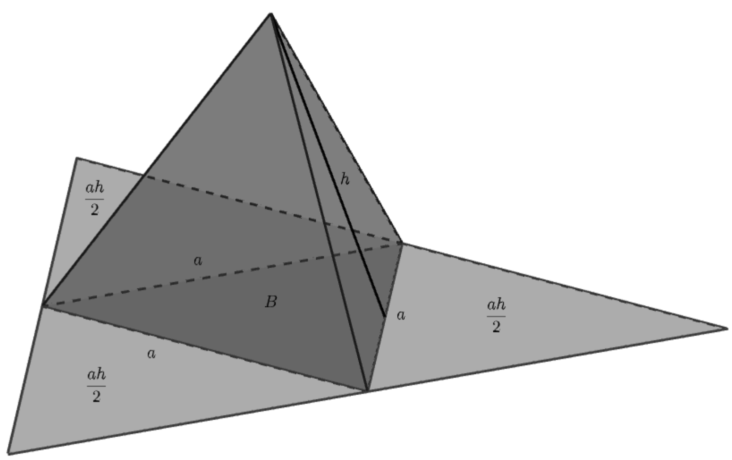
$$P = B + M,$$

где је B површина основе, а M површина омотача.

Омотач пирамиде се може посматрати као збир површина троуглова. Код n-стране правилне пирамиде површина омотача $M = n \cdot P_t$, где је P_t површина једног троугла омотача.

Ако је пример правилне тростране пирамиде основа је правилан троугао, површина основе рачуна се као $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где је a страница основе. Омотач чине три подударна троугла чија је једна страница одговарајућа страница троугла тј. основе, а висина троугла h бочна висина пирамиде. Дакле, омотач се рачуна као $M = 3\dfrac{a \cdot h}{2}$. Површина правилне тростране пирамиде је

$$P = B + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a \cdot h}{2}.$$



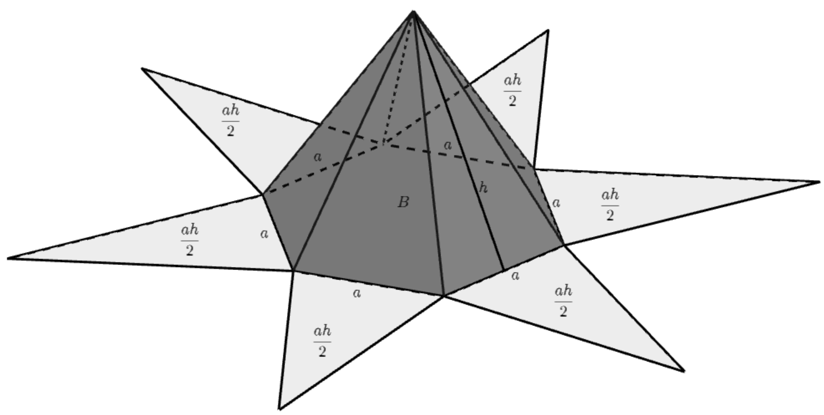
Слика 20: Тетраедар и његова мрежа

Тетраедар је правилан ако су му све пљосни једнакостранични троуглови странице a. Површина правилног тетраедра је

$$P = 4 \cdot B = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3}.$$

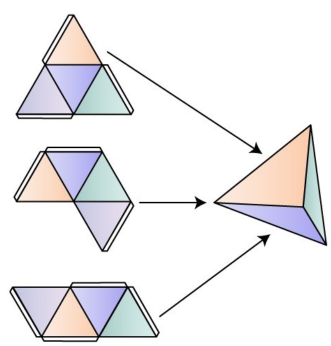
Ако је пример праве правилне шестостране пирамиде, површина основе се рачуна као $B = \dfrac{3a^2\sqrt{3}}{2}$, где је a страница правилног шестоугла основе. Омотач чине шест подударних троуглова чија је једна страница страница a основе, а висина троугла h бочна висина пирамиде. Тада је површина омотача $M = 6\dfrac{a \cdot h}{2} = 3a \cdot h$. Површина шестостране правилне пирамиде је

$$P = B + M = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3a \cdot h.$$



Слика 21: Шестострана правилна пирамида и њена мрежа

Пример *Паковање амбалаже Тетра Пак*



Слика 22: Паковање

Тетра Пак је шведско-швајцарска компанија за паковање и прераду хране која је изграђена на иновацији, пластично обложеном папирном картону у облику тетраедра, из којег је и име компаније. Оваква амбалажа је веома погодна за производњу због своје једноставне мреже паковања (Слика 22).

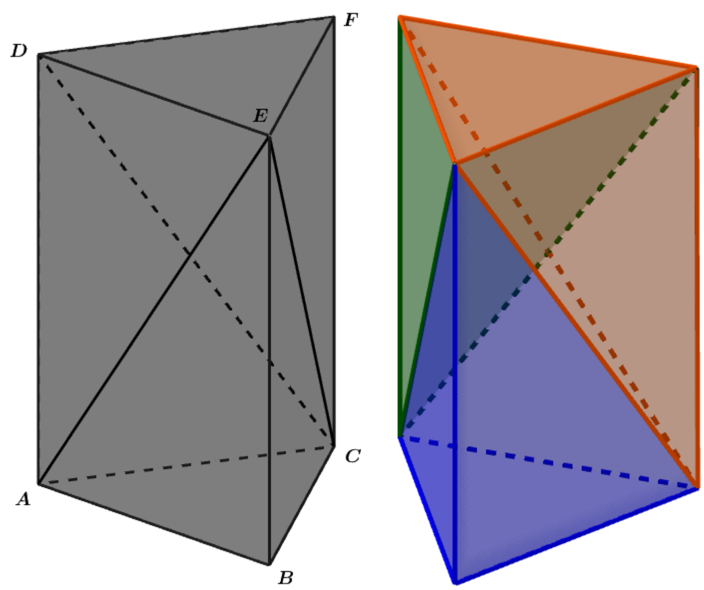
2.3.2 Запремина пирамиде

Сваке две пирамиде једнаких основа и висина имају једнаке запремине.

Свака тространа пирамида је трећина тростране призме исте основе и висине.

Када тространу призму $ABCDEF$ пресечемо равни која пролази кроз дијагонале AE и CE и кроз основну ивицу AC, добијамо тространу пирамиду чија је основа ABC и врх E, и четворострану пирамиду чија је основа $ACFD$, а врх E. Дијагоналним пресеком DCE, ова се четворострана пирамида дели на две тростране пирамиде, ACD основа и E врх и DCF основа и E врх. Ове две пирамиде су једнаких запремина јер имају једнаке основе и исту висину.

Пирамиде $AEDC$ и $ABEC$ су једнаких запремина, на исти начин. Како су пирамиде $AEDC$ и $ACDE$ једнаких запремина, а $ABEC$ и $ABCE$ једнаких запремина, онда су пирамиде: $ABCE, ACDE$ и $DCFE$ једнаких запремина. Како унија ових пирамида даје призму $ABCDEF$, то значи да је ма која од ових пирамида трећина призме.

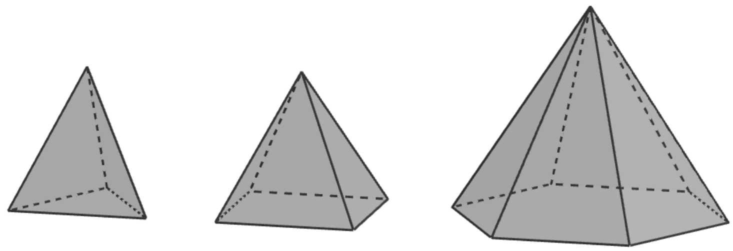


Слика 23: Тространа пирамида састављена од три пирамиде

Запремина ма које многостране пирамиде, праве или косе, је једнака трећини производа од површине основе и висине пирамиде. Дакле, запремина пирамиде је

$$V = \frac{BH}{3},$$

где је B основа, а H висина пирамиде.



Слика 24: Правилна тространа, четворострана и шестострана пирамида

Ако је пример правилне тростране пирамиде, основу јој чини правилни или једнакостранични троугао. Површина основе је $B = \dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где је a страница троугла. Запремина правилне тростране пирамиде је

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H.$$

Ако је пример правилне четворостране пирамиде, основу јој чини правилни четвороугао. Површина основе је $B = a^2$, где је a страница четвороугла. Запремина правилне четворостране пирамиде је

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{1}{3}a^2 \cdot H.$$

Ако је пример правилне шестостране пирамиде, основу јој чини правилни шестоугао. Површина основе је $B = 6\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}$, где је a страница шестоугла. Запремина правилне шестостране пирамиде је

$$V = \frac{1}{3}BH = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H.$$

Пример *Израчунати запремину праве правилне шестостране пирамиде основне странице $a = 2$ и висине $H = 5$.*

Запремина шестостране пирамиде је $V{=}\dfrac{1}{3}BH{=}\dfrac{2^2\sqrt{3}}{2}5{=}10\sqrt{3} \approx 17.32$.

Пример *Правилна четворострана пирамида на улазу у музеја Лувр у Паризу широка је* 35.42 *метра и висока* 21.64 *метра. Наћи запремину пирамиде Лувра.*

Површина основе пирамиде је $B{=}35.42 \cdot 35.42{=}1,254.5764m^2$. Користећи формулу за запремину пирамиде

$$V = \frac{1}{3}B \cdot H = 9,049.677m^3.$$

Слика 25: Музеј Лувр

2.4 Зарубљена пирамида

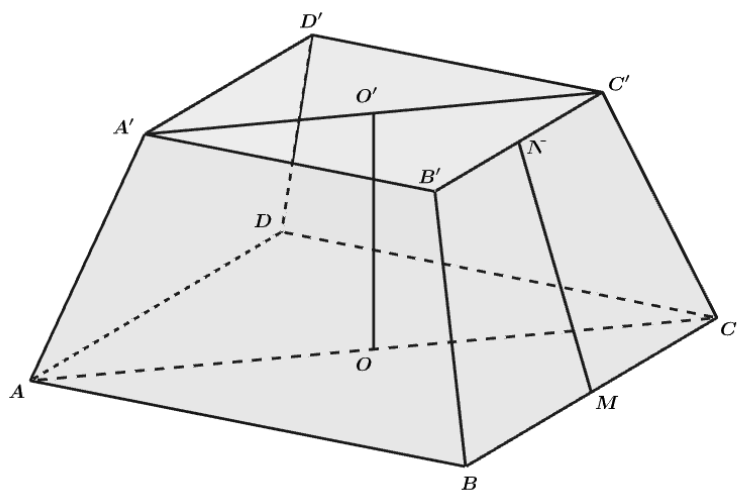
Нека је $n \geq 3$ природан број. Полиедар који има $n+2$ пљосни, од којих су две хомотетични $n-$тоуглови у односу на неку тачку S у две паралелне равни, а све остале пљосни су трапези, назива се $n-$тострана *зарубљена пирамида*.

Једноставније, ако се $n-$страна пирамида пресече са равни која је паралелна равни основе, добија се мања пирамида и зарубљена пирамида.

Хомотетични многоуглови називају се *основе* зарубљене пирамиде, док *омотач* чине трапези. На Слици 26 основе четворостране зарубљене пирамиде су $ABCD$ и $A'B'C'D'$, док омотач чине трапези $ABA'B'$, $BCB'C'$, $CDC'D'$ и $DAD'A'$. Дуж која спаја основе зарубљене пирамиде и нормална је на обе основе је *висина* зарубљене пирамиде. Висина на Слици 26 је OO'. Висине одговарајућих трапеза називају се *апотеме* зарубљене пирамиде. На Слици 26 дуж NM је апотема зарубљене пирамиде.

Дијагонале основа су дијагонале $n-$тоуглова. На Слици 26, дијагонала веће основе је AC или DB, док је дијагонала мање основе $A'C'$ или $D'B'$. Дијагонални пресек зарубљене пирамиде је пресек равни која садржи одговарајући пар дијагонала основа. На Слици 26, дијагонални пресек је једнакостранични трапез $ACA'C'$ или $BDB'D'$.

Зарубљена пирамида је *права* ако је настала од праве пирамиде, док је *правилна* ако је настала од правилне пирамиде.



Слика 26: Зарубљена пирамида

2.4.1 Површина и запремина зарубљене пирамиде

Површина зарубљене пирамиде представља збир површина мања и веће основе и површине омотача. Према томе површину рачунамо као

$$P = B + B' + M,$$

где је B већа основа, B' мања, а M омотач.

Површина праве правилне тростране зарубљене пирамиде је

$$P = B + B' + M = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{{a_1}^2\sqrt{3}}{4} + 3\frac{a + a_1}{2}h,$$

где је a страница веће основе, a_1 станица мање основе и h апотема.

Површина праве правилне четворостране зарубљене пирамиде је

$$P = B + B' + M = a^2 + {a_1}^2 + 4\frac{a + a_1}{2}h.$$

Површина праве правилне шестостране зарубљене пирамиде је

$$P = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{6{a_1}^2\sqrt{3}}{4} + 6\frac{a + a_1}{2}h.$$

Запремина зарубљене пирамиде се може представити као разлика запремине пирамиде и запремине мање, одсечене пирамиде. Запремина зарубљене пирамиде $ABCA'B'C'$ једнака је разлици запремина целе пирамиде $SABC$ и допуне $SA'B'C'$. Ако је B површина веће основе, B_1 површина мање основе (пресека), H висина зарубљене пирамиде, а x висина допуне, онда је запремина зарубљена пирамиде

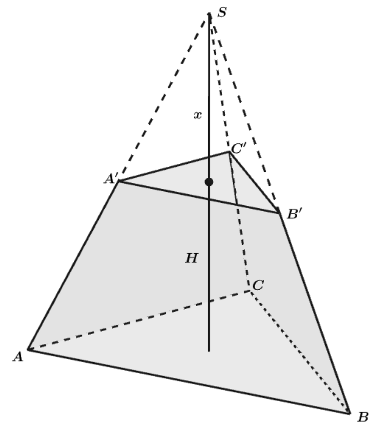
$$V = \frac{B(H + x)}{3} - \frac{B_1 x}{3} = \frac{BH}{3} - \frac{(B - B_1)x}{3}.$$

Висину допуне x одређујемо из пропорције $B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$, одакле је $x = \dfrac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}$ и заменом у првобитну једначину запремине

$$V = \frac{BH}{3} - \frac{(B - B_1)\frac{H\sqrt{B_1}(\sqrt{B} + \sqrt{B_1})}{B - B_1}}{3}.$$

Коначно, запремина зарубљене пирамиде је

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1).$$



Слика 27: Зарубљена пирамида

Запремина праве правилне тростране зарубљене пирамиде је

$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{\sqrt{3}H}{12}(a^2 + aa_1 + {a_1}^2),$$

где је a страница веће основе, a_1 станица мање основе и H висина.

Запремина праве правилне четворостране зарубљене пирамиде је

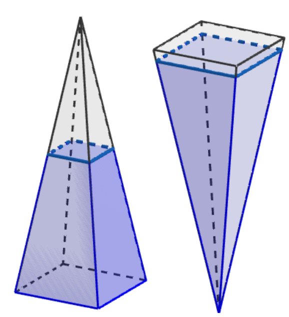
$$V = \frac{H}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1) = \frac{H}{3}(a^2 + aa_1 + {a_1}^2).$$

Пример *Страница праве правилне четворостране пирамиде је* $6cm$*, а висина је* $18cm$*. У пирамиду је насута вода која досеже до половине висине пирамиде. Докле ће досезати ако се пирамида окрене врхом наниже?*

Запремина воде у пирамиди представља запремину зарубљене пирамиде основе 6 и висине 9. Из пропорције $18 : 6 = 9 : a_1$ можемо наћи страницу друге основе зарубљене пирамиде $a_1 = 3$. Запремина зарубљење пирамиде је

$$V = \frac{9}{3}(6^2 + 6 \cdot 3 + 3^2) = 189cm^3.$$

Запремина воде остаје иста и када се окрене пирамида. Код окренуте пирамиде запремина воде представља запремину мање пирамиде чија висина се тражи у задатку. Из пропорције $h : x = 18 : 6$ добија се да је $h = 3x$, где је x страница основе мање пирамиде, а h њена висина. Запремина мање пирамиде је $V = \frac{1}{3}\left(\frac{h}{3}\right)^2 h$, одакле је $h = 9\sqrt[3]{7} \approx 17.216cm$.



Слика 28: Пирамида насута водом

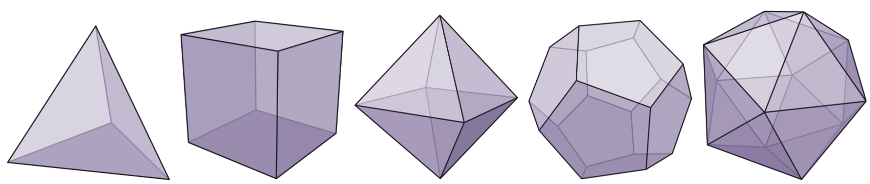
2.5 Правилни полиедри

Конвексни полиедар који задовољава услове:

а) све пљосни су правилне и међусобно подударне полигонске површи

б) све рогљасте површи су међусобно подударне и у истом броју назива се **правилни полиедар.**

Правилни полиедри се још називају и Платонова тела и постоје тачно пет таквих полиедара: *тетраедар, хексаедар (коцка), октаедар, додекаедар, икосаедар.* Платон је писао о правилним полиедрима у свом делу *Тимеј* (360 год пне), ослањајући се на истраживања свог ученика Теетета. У античко време сматрало се да тетраедар представља ватру, октаедар ваздух, хексаедар земљу, икосаедар воду а да додекаедар симболизује хармонију целог космоса. Њихова лепота долази из њихове симетрије и једнакости односа. Око 2000 година касније, Јохан Кеплер [1] се бави Платоновим и Архимедових телима и повезује их са његовим истраживањима закона кретања планета у свемиру, са његовом концепцијом "хармоније свемира".



Слика 29: Платонова тела

С обзиром да су код правилних полиедара све пљосни правилне и истостране а такође и рогљеви и да је исти број пљосни код сваког темена, сваки правилни полиедар можемо означити симболом $\{p, q\}$. Број p представља број углова једне пљосни или p - тоугла, док q представља број углова код сваког темена. Овај симбол се зове Шлефијев симбол [2].

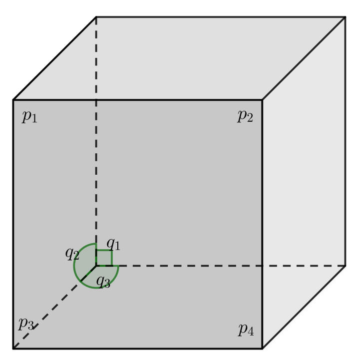
Коцка за пљосне има правилне четвороуглове, дакле $p = 4$. Око сваког темена има три угла па је $q = 3$.

Нека је правилан полиедар дат Шлефијевим симболом $\{p, q\}$, тада је збир збир углова сваке пљосни таквог полиедра бити

$$(p-2) \cdot 180^\circ.$$

С обзиром да су пљосни правилног полиедра правилни многоуглови, сви углови пљосни су једнаки. Дакле, сваки унутрашњи угао пљосни таквог полиедра је

$$\frac{(p-2)180^\circ}{p}.$$



Слика 30: Коцка, Шлефијев симбол$\{4, 3\}$

[1] *Johannes Kepler* (1571 – 1630)

[2] *Ludwig Schlafli* (1814 – 1895)

Како је код полиедра коме суседне пљосни не припадају једној равни, сума q таквих углова, тј. сума углова једног рогља, мора бити мања од $2 \cdot 180°$.

$$\begin{aligned}
\frac{q(p-2)180°}{p} &< 2 \cdot 180° \\
q(p-2) &< 2p \\
qp - 2q - 2p &< 0 \\
p(q-2) - 2q + 4 - 4 &< 0 \\
p(q-2) - 2(q-2) - 4 &< 0 \\
(q-2)(p-2) &< 4
\end{aligned}$$

где су $(p-2)$ и $(q-2)$ природни бројеви чији је производ мањи од 4, па су тиме одређене једине могућности:

$$1 \cdot 1 < 4, \qquad 1 \cdot 2 < 4, \qquad 2 \cdot 1 < 4, \qquad 1 \cdot 3 < 4, \qquad 3 \cdot 1 < 4.$$

$(3-2) \cdot (3-2) < 4$	$\{p, q\} = \{3, 3\}$	*тетраедар*
$(3-2) \cdot (4-2) < 4$	$\{p, q\} = \{4, 3\}$	*хексаедар*
$(4-2) \cdot (3-2) < 4$	$\{p, q\} = \{3, 4\}$	*октаедар*
$(3-2) \cdot (5-2) < 4$	$\{p, q\} = \{5, 3\}$	*додекаедар*
$(5-2) \cdot (3-2) < 4$	$\{p, q\} = \{3, 5\}$	*икосаедар*

Овим смо доказали да су тетраедар, хексаедар (коцка), октаедар, додекаедар и икосаедар једини правилни полиедри.

С обзиром да сума углова једног рогља, мора бити мања од $360°$, и све пљосни правилног полиедра су правилни многоуглови, Платонова тела можемо представити и на следећи начин.

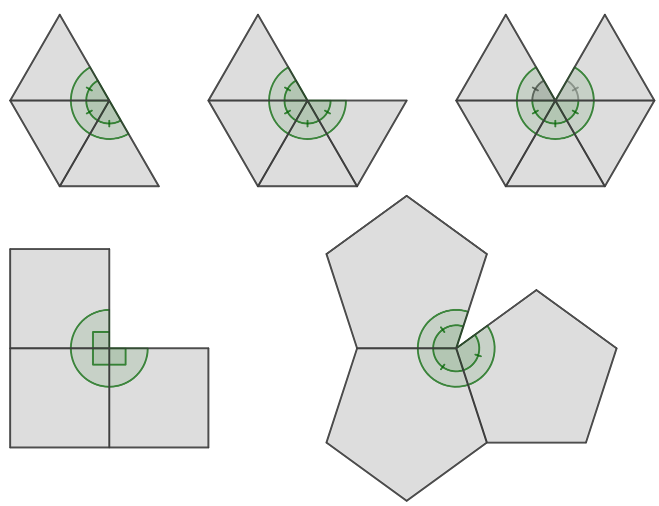
- Правилни полиедри чије су пљосни *троуглови*, тачније једнакостранични троуглови са једнаким унутрашњим угловима од $60°$.
  - 3 троугла око једног темена ($3 \cdot 60° = 180°$) *тетраедар*
  - 4 троугла око једног темена ($4 \cdot 60° = 240°$) *октаедар*
  - 5 троугла око једног темена ($5 \cdot 60° = 300°$) *икосаедар*

  Случај 6 троуглова око једног темена ($6 \cdot 60° = 360°$) не чини полиедар јер суседне пљосни тог рогља припадају једној равни.

- Правилни полиедри чије су пљосни *четвороуглови*, тачније квадрати са једнаким унутрашњим угловима од $90°$.
  - 3 четвороугла око једног темена ($3 \cdot 90° = 270°$) *хексаедар*

- Правилни полиедри чије су пљосни *петоуглови* са једнаким унутрашњим угловима од $108°$.
  - 3 петоугла око једног темена ($3 \cdot 108° = 324°$) *додекаедар*

Случај правилних полиедара чије су пљосни *шестоуглови* са једнаким унутрашњим угловима од $120°$ ($3 \cdot 120° = 360°$) не чини полиедар јер суседне пљосни тог рогља припадају једној равни.



Слика 31: Мрежа пљосни правилних полиедара око једног темена рогља

Симетрије Платонових тела дају занимљиво својство **дуалност**. Два полиедра су дуална ако постоји бијекција којом се инцидента темена, ивице и пљосни једног од њих пресликавају, редом, на инцидентне пљосни, ивице и темена другог.

За неки полиедар ћемо рећи да су му *инцидентни*:

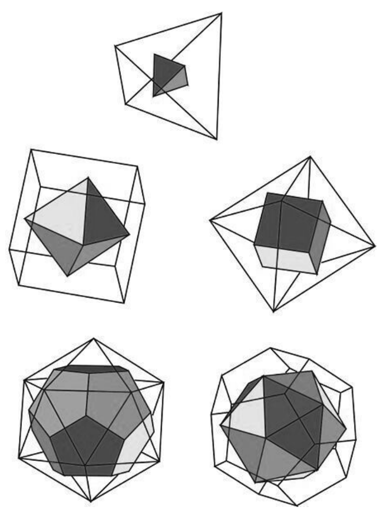
1. теме и ивица ако је теме, крај ивице;
2. теме и пљосан ако је теме, теме те пљосни;
3. ивица и пљосан ако је ивица, страница те пљосни.

Коцка и октаедар имају по 12 ивица, али број њихових пљосни и темена су замењена. Коцка: 6 пљосни и 8 темена, а октаедар: 8 пљосни и 6 темена. Шлефијев симбол се такође замени. Коцка $\{p, q\} = \{4, 3\}$, октаедар $\{p, q\} = \{3, 4\}$.

Слично, додекаедар и икосаедар имају по 30 ивица, али додекаедар 12 пљосни и 20 темена, док искосаедар 20 пљосни и 12 темена. Шлефијев симбол се такође замени. Додекаедар $\{p, q\} = \{5, 3\}$, икосаедар $\{p, q\} = \{3, 5\}$. Ово омогућава да једно тело буде пресликано у свој дуал.

Ако спојимо центре пљосни коцке добићемо октаедар и ако спојимо центре пљосни октаедра, добићемо коцку. Иста процедура се може применити да би се икосаедар пресликао у додекаедар и обрнуто.

Тетраедар је дуалан сам себи. Спајајући 4 центра његових пљосни добија се други, тетраедар.

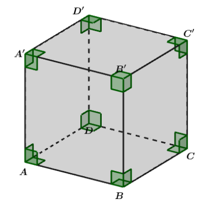


Слика 32: Дуалност Платонових тела

Помоћно тврђење: Збир S свих ивичних углова конвексног полиедра који има T темена износи

$$S = (T-2) \cdot 2 \cdot 180^\circ.$$

Пример коцке S=$(8-2) \cdot 2 \cdot 180^\circ$=$2160^\circ$ (Слика 33).



Слика 33: Коцка

Ојлерова теорема: Ако је T број темена, I број ивица, а P број пљосни конвексног полиедра, тада важи једнакост:

$$T + P = I + 2.$$

Доказ. Нека полиедар има P пљосни. Нека прва пљосан има m_1 ивица, друга m_2,... до m_P ивица. Према томе, збир свих ивичних углова полиедра износи:

$$\begin{aligned}S &= (m_1-2)180^\circ + (m_2-2)180^\circ + ... + (m_P-2)180^\circ \\ &= (m_1+m_2+...+m_P)180^\circ - 2P \cdot 180^\circ \\ &= 2I \cdot 180^\circ - 2P \cdot 180^\circ.\end{aligned}$$

С друге стране, према претходном тврђењу је $S = (T-2)2 \cdot 180^\circ$, па је

$$\begin{aligned}(T-2)2 \cdot 180^\circ &= 2I \cdot 180^\circ - 2P \cdot 180^\circ \\ T + P &= I + 2.\end{aligned}$$

□

име полиедара	**изглед пљосни**	**Т**	**И**	**П**	$\{p,q\}$
ТЕТРАЕДАР	троугао	4	6	4	{3,3}
ХЕКСАЕДАР	квадрат	8	12	6	{4,3}
ОКТАЕДАР	троугао	6	12	8	{3,4}
ДОДЕКАЕДАР	петоугао	20	30	12	{5,3}
ИКОСАЕДАР	троугао	12	30	20	{3,5}

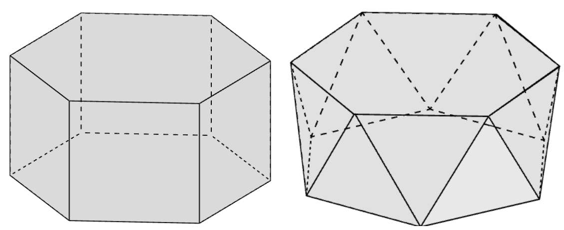
Табела 1: Карактеристике правилних полиедара

2.6 Архимедови полиедри

Поред пет правилних полиедара чије су пљосни правилни и међусобно подударни многоуглови, постоји још занимљивих полиедара за разматрање. Увођењем услова да пљосни буду правилни многоуглови, али и не нужно подударни, добијају се нови полиедри. Конвексни полиедри чије су све рогљасте површи међусобно подударне, и све пљосни правилни многоуглови, не нужно међусобно подударни, се називају **полуправилни полиедри**.

Папус из Александрије (3. век п.н.е.) је у својем делу *Синагога* навео тринаест таквих тела која се зову *полуправилни* или *Архимедови полиедри.* Јохан Кеплер је писао о таквим полиедрима у својој књизи *Harmonices mundi.*

За почетак се лако могу наћи примери полуправилних полиедара. Призме чије су две базе правилни многоуглови а бочне пљосни квадарти су пример полуправилних полиедара.



Слика 34: Шестострана призма (лево) и антипризма (десно)

Полиедри чије су две подударне пљосни у паралелним равнима, а једна од тих пљосни заротирана за одговарајући угао око његовог средишта, и све остале пљосни једнакостранични троуглови који спајају та два правилна многоугла и чине омотач, називају се још *антипризмама.*

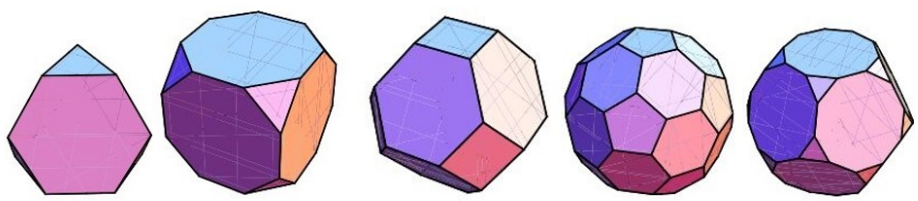
На слици 34 (лево) видимо пример шестостране призме чије базе чине два правилна шестоугла, а омотач је састављен од шест квадрата странице исте дужине као и странице шестоугла, и (десно) пример шестостране антипризме чије базе чине два правилна шестоугла, а омотач је састављен од дванаест једнакостраничних троуглова странице исте дужине као и странице шестоугла.

Полуправилни полиедри се могу јединствено означити кофигурацијом својих рогљева који означава редослед и врсту пљосни полиедра које се састају у једном рогљу. Пример ове ознаке за призму са Слике 34 је $\{4, 4, 6\}$, док је антипризма $\{3, 3, 3, 6\}$. У сваком темену призме се састају по два квадрата и један шестоугао, док се у сваком темену антипризме састају по три троугла и један шестоугао.

Поред призме и антипризме у полуправилне полиедре убрајају се и тринаест Архимедових тела.

Ако се рогљеви тетраедра зарубе равнима паралелним његовим пљоснима тако да одговарајуће ивице које секу раван деле у размери $1 : 2$, добија се *зарубљени тетраедар*. Ознака за овај полуправилни полиедар је $\{3,6,6\}$. Сличан поступак се може применити и на све правилне полиедре, па се тако добија прва група Архимедових тела:

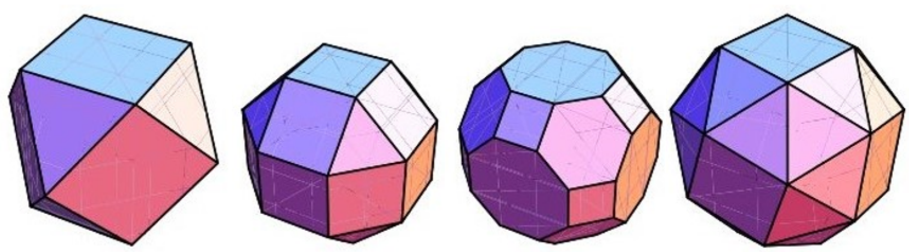
1. *зарубљени тетраедар* $\{3,6,6\}$,
2. *зарубљени хексаедар* $\{3,8,8\}$,
3. *зарубљени октаедар* $\{4,6,6\}$,
4. *зарубљени икосаедар* $\{5,6,6\}$,
5. *зарубљени додекаедар* $\{3,10,10\}$.



Слика 35: Прва група Архимедових тела

Друга група полуправилних полиедара једноставно се може повезати са коцком и октаедром па се називају *група кубокта* полиедара.

6. *Кубоктаедар* $\{3,4,3,4\}$,
7. *Ромбокубоктаедар* $\{3,4,4,4\}$,
8. *Велики ромбокубоктаедар* $\{4,6,8\}$,
9. *Скошена коцка* $\{3,3,3,3,4\}$.



Слика 36: Друга група Архимедових тела

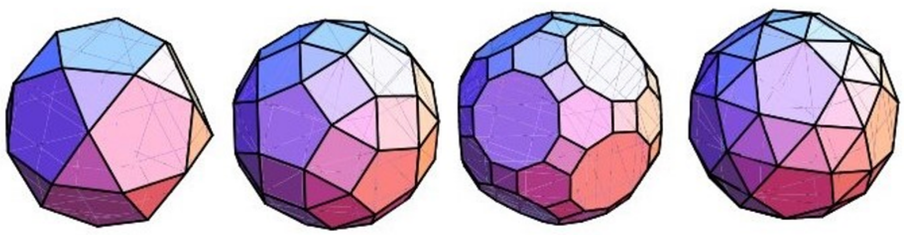
Трећа група полуправилних полиедара једноставно се може повезати са додекаедром и икосаедром па се називају *група икосадодека* полиедара.

10. *Икосадодекаедар* $\{3,5,3,5\}$,

11. *Ромбикосадодекаедар* $\{3,4,5,4\}$,

12. *Велики ромбикосадодекаедар* $\{4,6,10\}$,

13. *Скошени додекаедар* $\{3,3,3,3,5\}$.



Слика 37: Трећа група Архимедових тела

3 Програмски пакети

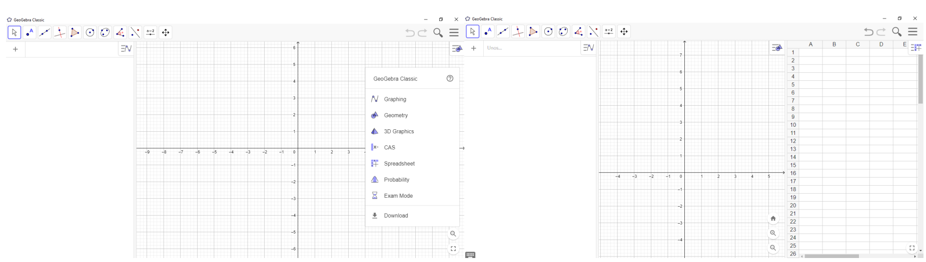
3.1 GeoGebra

GeoGebra је динамички софтверски пакет за математику дизајниран за учење и подучавање математичких садржаја на свим нивоима образовања. Његов творац, Маркус Хоенвортер [3], започео је пројекат 2001. године на Универзитету у Салцбургу, а са тимом програмера из целог света и даље ради на његовом унапређивању. У *Geogebri* се могу креирати динамички садржаји за све области математике, а нарочито за области геометрије (планиметрија, стереометрија, аналитичка геометрија). Поред геометрије, *GeoGebra* омогућава рад, креирање садржаја и повезивање области геометрије, алгебре, анализе и вероватноће. Објекти који се креирају су динамички повезани што омогућава начине за лакше усвајање знања, концепата и односа објеката који се на традиционилни начин предавања не могу лако остварити. Динамична повезаност објеката значи да померањем једног од објеката (тачка, дуж, права..) мењају аутомацки сви елементи објекта.

Настава геометрије може бити доста динамичија и прецизнија. Ученици добијају прецизне математичке садржаје и визуелизација постаје лако усвојива и интуитивна.

GeoGebra, као спој геометрије и алгебре омогућава унос података на оба начина, тј.објекти се могу нацртати уз помоћ већ постојећих функција, али исто тако их и алгебарски задати.

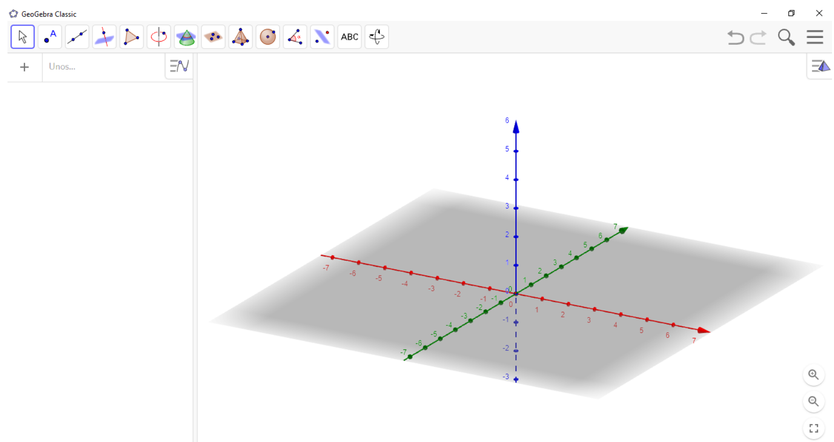
Geogebra има четири различита приказа математичких објеката: *алгебарски* приказ, *графички приказ у равни и у простору* (3D Graphics), CAS (Computer Algebra System) приказ и *табеларни* приказ (Слика 38).



Слика 38: Почетна страна (лево) и различити прикази (десно)

Површина за цртање 3D је један од приказа у *GeoGebri* који је намењен за представљање геометријских објеката у простору. Погодан је за рад са задацима из стереометрије.

[3] *Markus Hohenwarter*

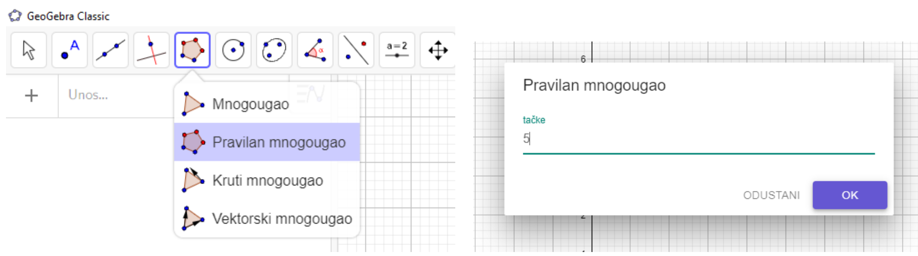


Слика 39: 3D графички приказ

Алати који могу да се користе за 3D цртање и олакшају рад се могу наћи као падајући мени (Слика 40). Алати су груписани као операције са тачкама, са правама, дужима, операције са равнима, мерење растојања, угла, површина, запремина, операције за контролу приказа слике, операције за креирање објеката, призме, пирамиде, купе, ваљка, операције са кривама другог реда, кружница, елипса, хипербола.

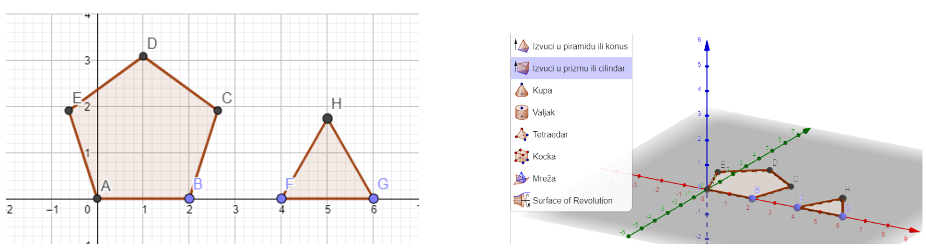
Слика 40: Алати за 3D графичко цртање

Пример *Конструкција петостране призме и тростране пирамиде.* Потребно је пре свега конструисати петоугао и троугао помоћу опције 'Правилни многоугао'. Довољно је одредити две тачке (Слика 41 лево) у координатном почетку које одређују страницу правилног многоугла и унети број n, за n-тоугао који се конструише (Слика 41 десно).



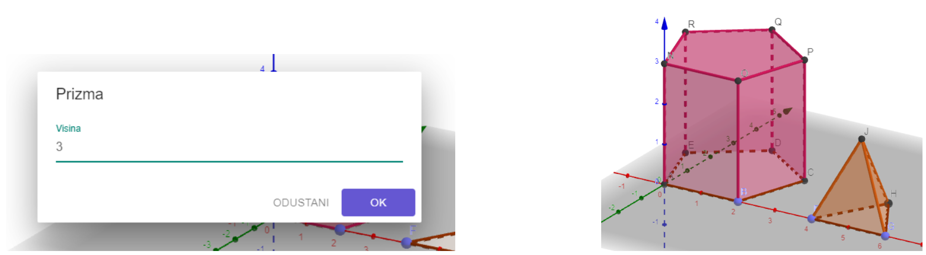
Слика 41: Правилни многоугао

На сличан начин се конструише правилни троугао. Да би смо конструисали призму или пирамиду морамо прећи у 3D Графичко цртање како би се сами објекти видели у простору (Слика 42). У простору се могу уочити објекти из дводимензионог цртања.



Слика 42: Опција 'Извуци призму или цилиндар'

Помоћу опције 'Извуци призму или цилиндар' се може конструисати призма. Довољно је изабрати многоугао који представља основу призме и унети број који представља њену висину. На исти начин се конструише пирамида помоћу опције 'Извуци пирамиду или купу'.

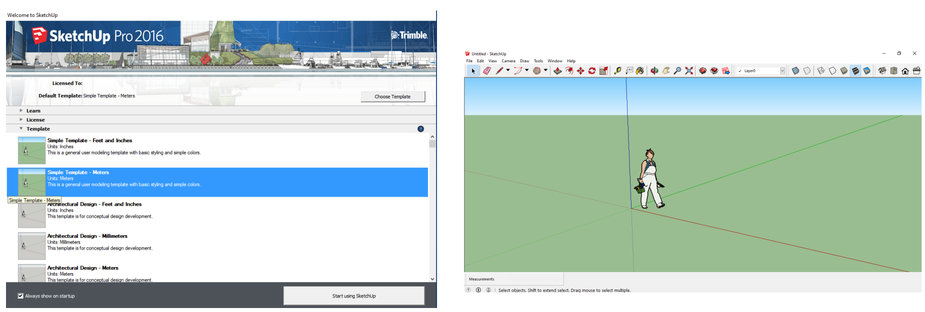


Слика 43: Призма и пирамида

3.2 SKETCHUP

SketchUp је програм за 3D моделирање који се може користити за креирање 3D објеката у 2D окружењу. Било да је реч о моделирању за 3D штампање или у о коришћењу у друге сврхе, *SketchUp* нуди све алате потребне за постизање професионалних и квалитетних резултата чак и за почетнике. Окружење је веома интуитивно и визуелно допадљиво. Сам садржај икона говори чему служе.

Када је програм отворен, омогућен је избор шаблона у којем се ради у зависности од врсте пројекта. Обично се користи једноставан шаблон - метри. Сваки пут када се отвори нови шаблон модела у *SketchUp*-у види се фигура особе на скали чија је сврха да да осећај величине објекта у моделу (Слика 44).



Слика 44: Избор шаблона за рад (лево) и почетна страна (десно)

Једна од најкориснијих ствари у 3D моделирању је како се кретати у прозору изабраног модела. Алати за орбиту омогућавају сву навигацију кроз простор и јаснију видљивост свих објекта.

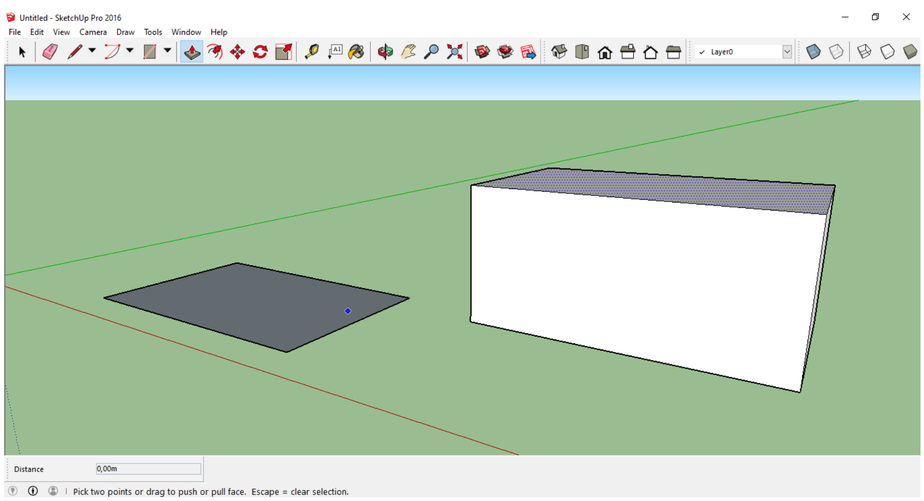
Основни алати који се обично користе су:

Слика 45: Алати

- Стрелица или алат за избор се користи за одабир пљосни, линија или објеката
- Алат за брисање
- Алат за линије који ствара равне линије. Повезивање више линија ће направити пљосан
- Алат који омогућава цртање линије слободном руком
- Алати за креирање лукова и кругова
- Алат за правоугаоник за прављење правоугаоника и квадрата
- Полигон алат ствара полигоналне пљосни

- Алат за померање помера објекте, линије или равни
- Алат за ротирање линија, равни или изабраних објеката помоћу угломера
- Гурните/повуците (*Push/Pull*) алат проширује равни у 3D објекте.
- Алат за мерење користи се за мерење дужине било ког објекта
- Алат за текст
- Алат за фарбање за фарбање било које површине или равни.

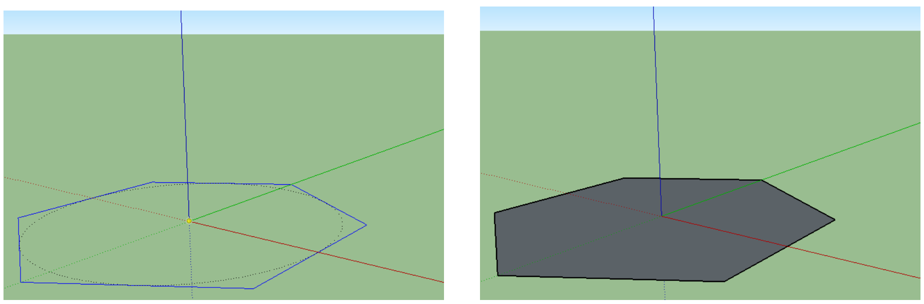
Један од основних алата је Гурните/повуците (*Push/Pull*) и он омогућава да скоро свакој равни коју нацртамо додамо трећу димензију једноставним повлачењем или гурањем. Овај начин рада знатно олакшава рад у простору. На слици 46 нацртан је правоугаоник и квадар добијен коришћењем овог алата.



Слика 46: Правоугаоник и квадар

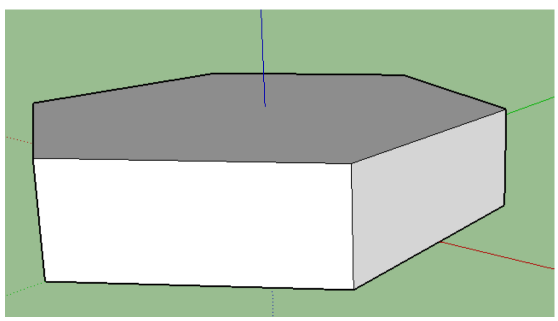
Конструкција шестостране антипризме

За конструкцију шестостране антипризме потребно је пре свега констрисати шестоугао, тј, њену основу. Помоћу алата за креирање полигона, нацртаћемо шестоугао. Кликом на координатни почетак бирамо центар шестоугла. Поновним кликом на неку другу тачку бирамо величину нашег полигона (Слика 47).



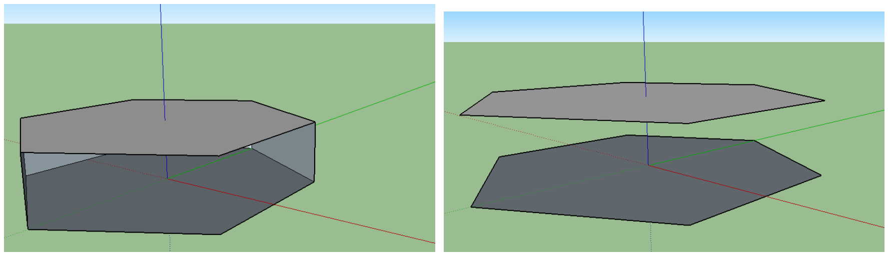
Слика 47: Цртање шетоугла

Користећи алат $Push/Pull$ нацртаћемо шестострану призму. Прво одабиром одговарајуће пљосни тј., кликом на већ направљени шестоугао а затим једноставним одабиром жељене висине призме.



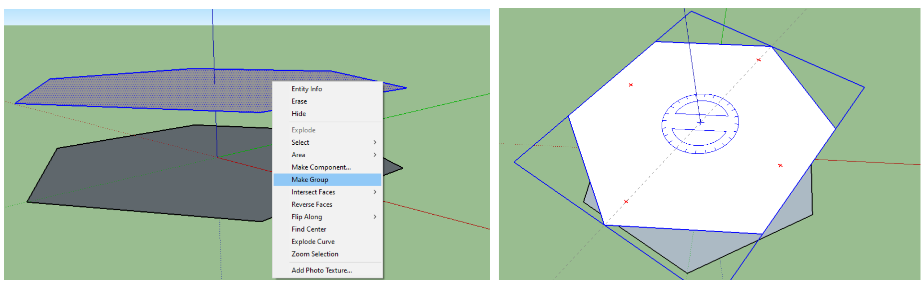
Слика 48: Шестострана призма

Користећи алат за брисање обрисаћемо све бочне стране призме тј. њен омотач. Кликом на бочне ивице саме пљосни нестају. Остају основе шестостране призме (Слика 49).



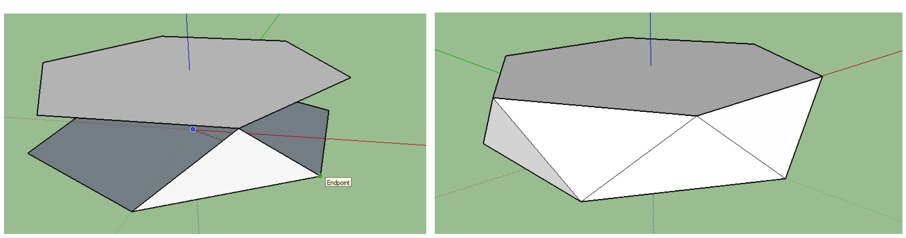
Слика 49: Брисање бочних странина

Селектујемо горњу основу призме и групишемо објекат, десним кликом *Make Group*. Помоћу алата за ротацију и угломера ротирамо шестоугао за 30° (Слика 50).



Слика 50: Ротација шестоугла

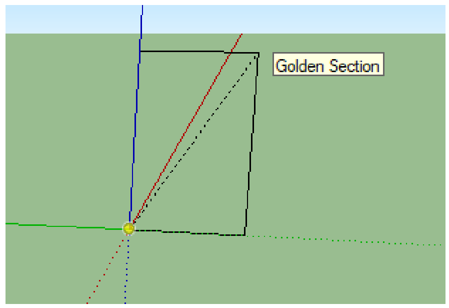
Користећи алат за креирање линије спајамо одговарајућа темена основа и самим тим креирамо пљосни, тј. троуглове који чине омотач шестостране антипризме (Слика 51).



Слика 51: Креирање бочних страна

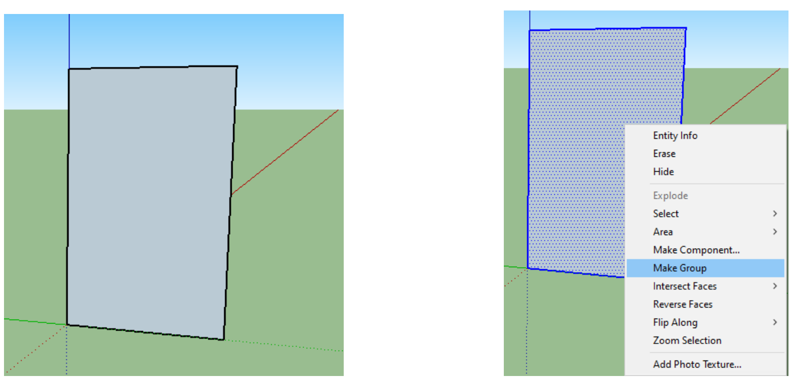
Конструкција икосаедра

За конструкцију икосаедра прво је потребно констрисати правоугаоник помоћу алата за цртање правоугаоника. Кликом на координатни почетак и повлачењем курсора тако да појави порука *Golden Section*, настаје правоугаоник чије су странице у златном пресеку (Слика 52).



Слика 52: Правоугаоник

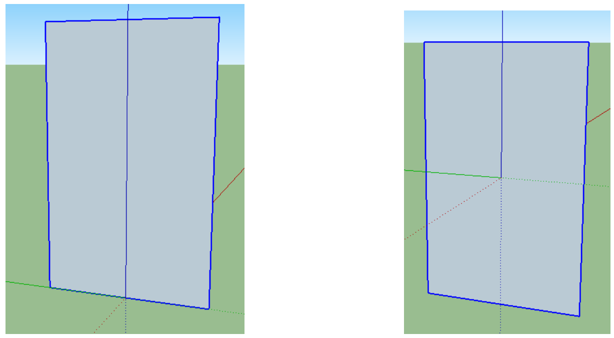
Добијени правоугаоник је потребно поставити као групу како би се лакше манипулисало њиме. Десним кликом на селектовани правоугаоник, а затим на опцију *Make Group*.



Слика 53: Правоуганик и опција *Make Group*

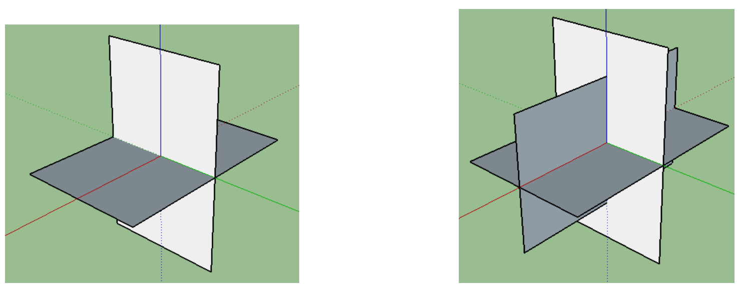
Правоугаоник је потребно центрирати на координатни почетак. Помоћу алата за померање (*Move*), цео објекат можемо померити. Кликом на средиште горње странице правоугаоника (Слика 54 лево), уз држање *Shift* тастера који омогућава лакшу координацију уз зелену осу, преместимо објекат у лево. А касније на сличан начин спустимо објекат на доле (Слика 54 десно).

Потребне су неколико копија овог правоугаоника у различитим положајима. Како би дошли до њих пожељно је користити алате за ротацију (*Rotate*).



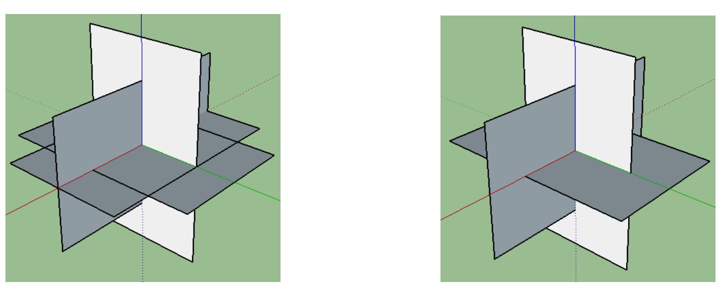
Слика 54: Померање праоугаоника улево (лево) на доле (десно)

Прво ћемо ротирати копију објекта у односу на зелену осу (Слика 55 лево), а затим тај добијени правоугаоник ротирати у односу на црвену осу (Слка 55 десно). За копирање и ротирање објекта потребно је држати тастер *Ctrl*.



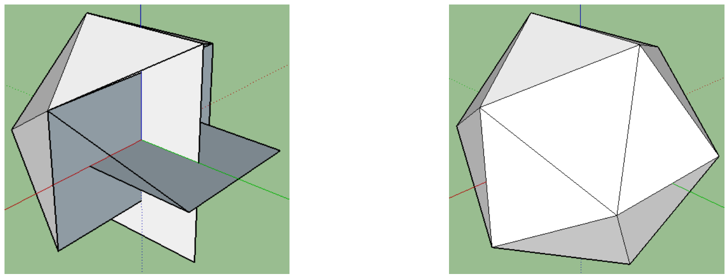
Слика 55: Ротација у односу на зелену (лево) и црвену (денсо) осу

Последњи добијени правоугаоник је потребно додатно ротирати у односу на плаву осу (Слика 56 лево), а након ротације више није потребан и може се избрисати (Слика 56 десно).



Слика 56: Ротација у односу на плаву осу (лево) и брисање (десно)

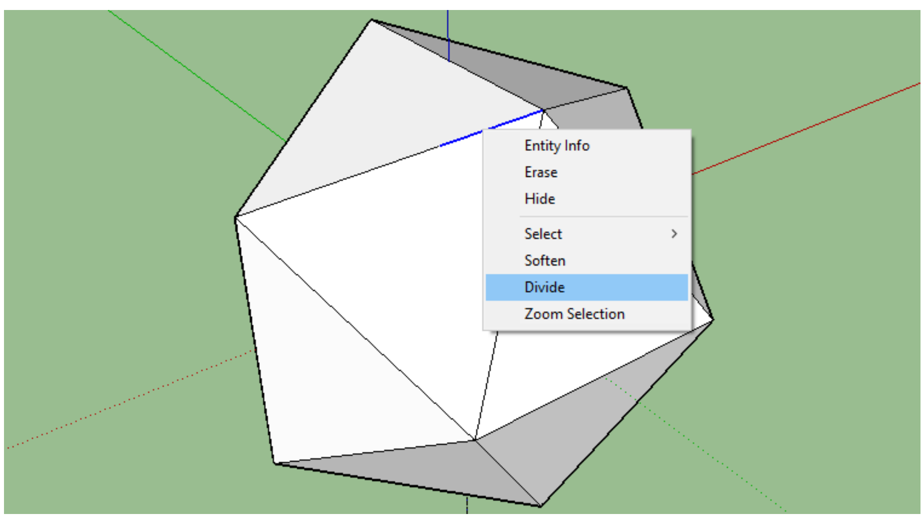
Коначно икосаедар добијамо ако спојимо свако теме ових правоугаоника. Алат за линије нам овде користи. Спајањем ових темена настају пљосни искосаедра, тј. троуглови (Слика 57).



Слика 57: Спајање темена (лево) и икосаедар (десно)

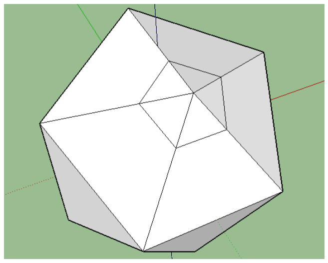
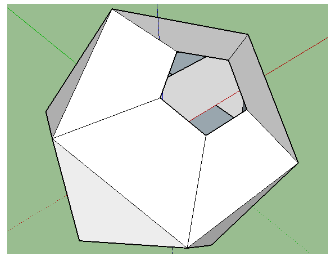
Конструкција зарубљеног икосаедра

За конструкцију зарубљеног икосаедра потребан је пре свега искосаедар чија је конструкција већ објашњена. Пре свега све ивице икосаедра морају бити подељење на 3 дела. Дељење дужи се лако врши, тако што десним кликом на ивицу бирамо опцију *Devide* и поделимо на жељени број делова (Слика 58).



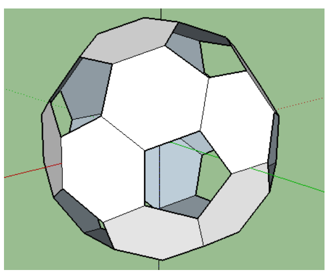
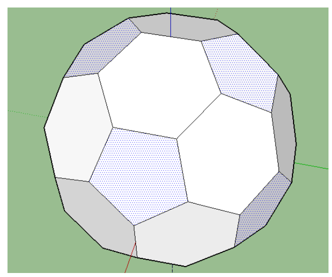
Слика 58: Дељење ивице

Подељене странице нам омогућавају да лакше пронађемо тачке петоугла који помоћу алата за цртање полигона, цртамо при сваком рогљу искосаедра (Слика 59 лево). Добијени петоугао, тј. рогаљ се обрише (Слика 59 десно).

Слика 59: Цртање петоугла (лево) и брисање (десно)

Исти поступак је потребан и за остале рогљеве икосаедра. Коначно, потребно је попунити шупље делове петоугловима.

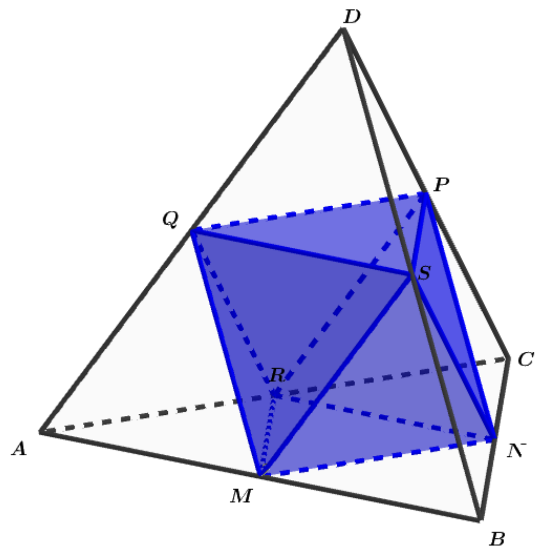
 

Слика 60: Зарубљени икосаедар

Добија се занимљив полиедар који доста подсећа на фудбалску лопту, где су петоуглови црни делови лопте, а шестоуглови бели. Ово је Архимедово тело или полуправилни полиедар који је представљен помоћу правилних петоуглова и шестоуглова.

4 Разни задаци

Задатак *Дат је тетраедар $ABCD$ странице a. Израчунати запремину октаедра, чија су темена средишта ивица датог тетраедра.*



Слика 61: Октаедар унутар тетраедра

Озрачимо са M, N, P, Q, R, S редом средишта ивица тетраедра AB, BC, CD, DA, AC и DE (Слика 61). Како су тачке M, N, P, Q, R, S средишта ивица, једнаке дужи су

$$AM = RA = AQ = \frac{a}{2}.$$

Пошто дуж MQ представља средњу линију троугла ABD, онда је $MQ = \dfrac{a}{2}$. Редом дужи QR, MR су средње линије троуглова ACD, ABC, тј.

$$MQ = QR = MR = \frac{a}{2}.$$

Дакле, полиедар $AMRQ$ је тетраедар странице $\dfrac{a}{2}$. Слично се могу уочити тетраедри $MBNS$, $NCRP$ и $QSPD$.

Запремина октаедра се може представити као разлика великог тетраедра $ABCD$ странице a и четири мања тетраедра странице $\dfrac{a}{2}$, тачније $MBNS$, $NCRP$ и $QSPD$.

$$V = V_v - 4V_m,$$

где је V_v запремина великог тетраедра, а V_m запремина малог.

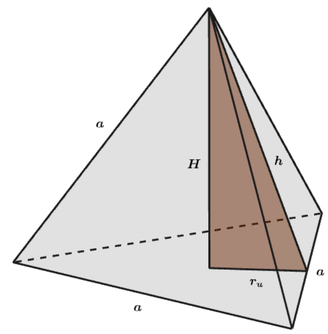
Запремина тетраедра се рачуна као запремина пирамиде $V = \dfrac{BH}{3}$. Основа B је једнакостанични троугао странице a чија је површина

$$B = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.$$

Висина тетраедра H представља

$$H^2 = h^2 - {r_u}^2,$$

где је h апотема или висина једнакостаничног троугла и r_u полупречник уписане кружнице основе.



Слика 62: Висина тетраедра

$$H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{2a^2}{3}.$$

Коначно, запремина тетраедра је

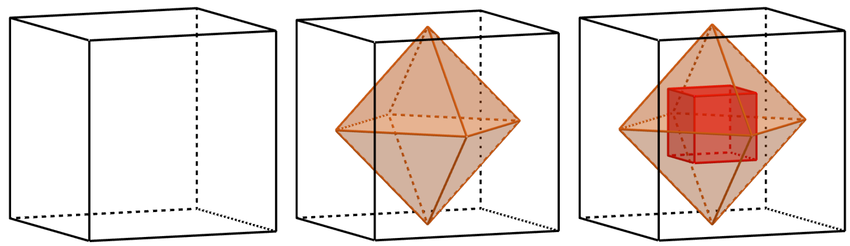
$$V = \frac{BH}{3} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}.$$

Запремина великог тетраедра странице a је $V_v = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{12}$, док је запремина мањег тетраедра странице $\dfrac{a}{2}$, $V_m = \dfrac{a^3\sqrt{2}}{8 \cdot 12}$. Запремина октаедра је

$$V = V_v - 4V_m = \frac{a^3\sqrt{2}}{12} - 4\frac{a^3\sqrt{2}}{8 \cdot 12},$$

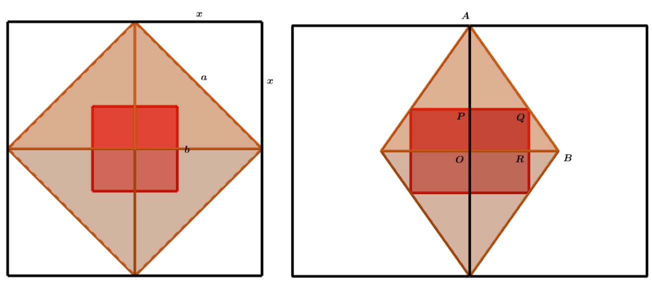
$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}.$$

Задатак *Око правилног октаедра је описана коцка, тако да су темена октаедра средишта пљосни коцке. У исти октаедар је уписана коцка, тако да су темена коцке средишта пљосни октаедра. Колики је однос запремина ове две коцке?*



Слика 63: Коцка уписана и описана око октаедра

Да бисмо израчунали однос запремина уписане и описане коцке $V_u : V_o$ потребно је наћи њихове запремине, тачније њихове странице.



Слика 64: Посматрано са стране (лево) и са ивице (десно)

Нека је a страница октаедра и b страница уписане коцке (Слика 64 лево).

Страница описане коцке се лако може наћи. Половина странице описане коцке x је помоћу Питагорине теореме $2x^2 = a^2$. Дакле, страница описане коцке је $a\sqrt{2}$, а њена запремени је $V_o = (a\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2}a^3$.

Троугао AOB и троугао APQ са слике 64 (десно) су слични, па следи

$$\frac{OB}{PQ} = \frac{OA}{AP}.$$

Дуж OB представља половину ивице октаедра, тј. $\dfrac{a}{2}$, $OP = \dfrac{b}{2}$ је половина унутрашње коцке, $PQ = \dfrac{\sqrt{2}b}{2}$ је половина дијагоналне стране уписане коцке, док је $OA = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ висина пирамиде која чини октаедар.

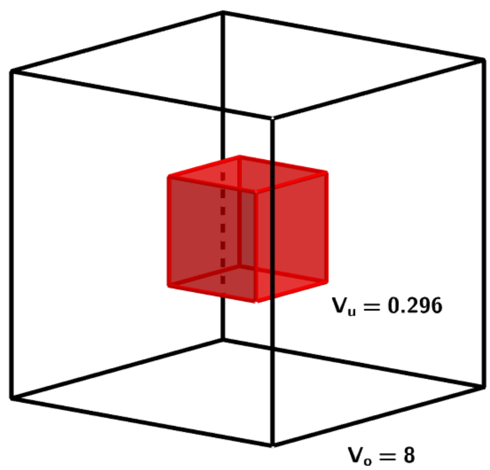
Дуж AP представља $AP = OA - OP = \frac{a\sqrt{2}}{2} - \frac{b}{2}$. Заменом у претходну релацију која следи из сличности, добија се ивица уписане коцке

$$b = \frac{a\sqrt{2}}{3}.$$

Запремина уписане коцке је $V_u = b^3 = \frac{2\sqrt{2}a^3}{27}$. Однос запремина уписане и описане коцке је

$$V_u : V_o = \frac{2\sqrt{2}a^3}{27} : 2\sqrt{2}a^3 = 1 : 27.$$

У *Geogebri* постоји функција за израчунавање запремине тела, па се може проверити да ли је однос запремина коцки тачан за неке конкретне вредности.

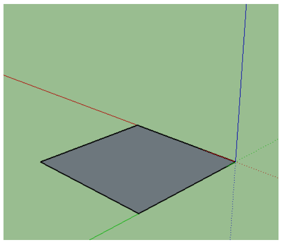
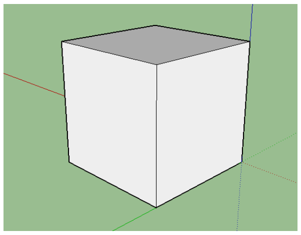


Слика 65: Однос запремина

У пирмеру са Слике 65 описана коцка је странице 2, тј. запремине $V_o = 8$, док је запремина уписане $V_u = 0.296$. Овај пример потврђује однос запремина јер је $8 : 27 \approx 0.296$.

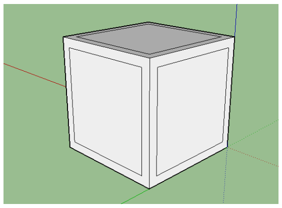
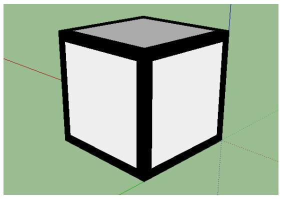
Задатак *Конструисати модел Рубикове коцке у SketchUp-у. Колика површина је обојена плавом бојом, ако је страница обојених квадрата* $1.8\ m$*?*

На почетку је потребно конструисати коцку. На слици 66 конструисан је квадрат, а затим коцка, користећи функцију $Push/Pull$.

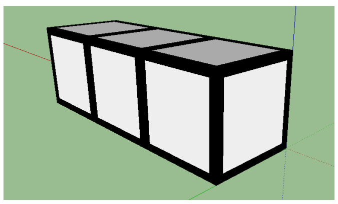
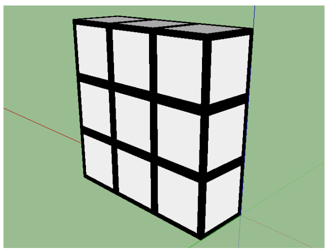
Слика 66: Коцка

Опцијом Offset се лако може уписати мањи квадрат на свакој од страна коцке. Како би одстојање од ивица коцке било исто на свим странама, довољно је кликнути двоструким кликом миша на све стране коцке. На слици 67 су уписани квадрати и обојене ивице црном бојом помоћу функције $PaintBucket$.

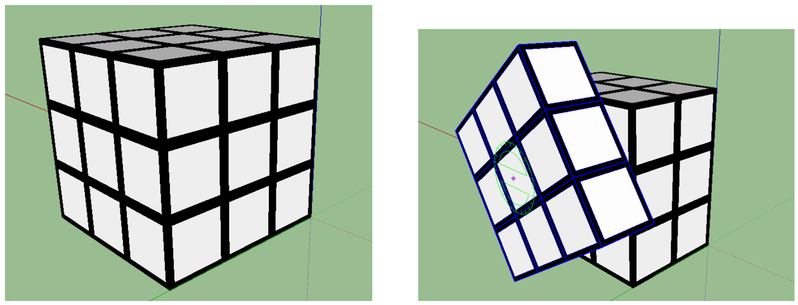
Слика 67: Коцка са обојеним ивицама

Добијени објекат је потребно поставити као групу како би се лакше манипулисало њиме. Десним кликом на селектовани објекат, а затим на опцију $Make\ Group$. Једноставно копирамо коцку два пута и такав објекат поставимо као групу за даље лакше копирање.

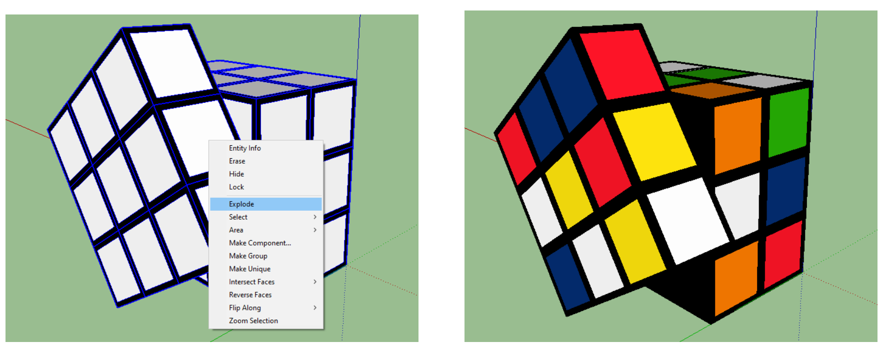
Слика 68: Копирање коцке

Након одговарајућих копирања добија се Рубикова коцка (Слика 69). Иако је већ конструисана коцка, једноставним коришћењем функције *Rotate* се може ротирати део коцке и тиме цео објекат више личи на Рубикову коцку.



Слика 69: Рубикова коцка

Како би се обојила Рубикова коцка потребно је прво селектовати цео објекат и десним кликом одабрати опцију *Explode*. Тиме објекат није више група и појединачни квадрати се лако могу обојити бојама по избору.



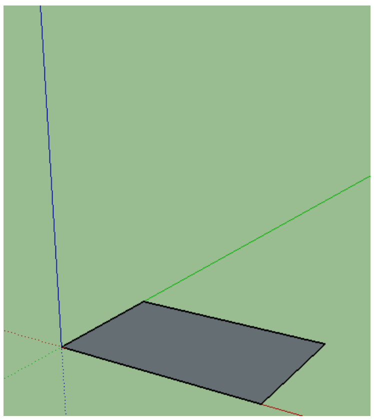
Слика 70: Бојење Рубикове коцке

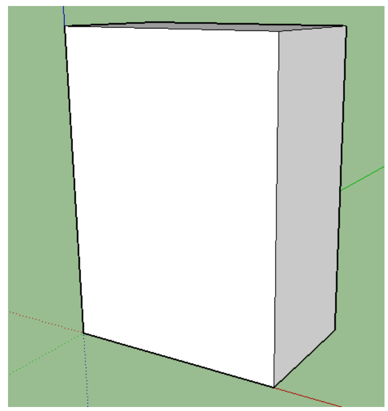
Свака Рубикова коцка у почетном облику има обојене стране у шест различитих боја. Разним кретањем коцке мањи, уписани квадрати помешају своја места али и даље постоји девет таквих квадрата обојених плавом бојом. Како је страница обојених квадрата $1.8m$, онда је површина која је обојена плавом бојом

$$9 \cdot (1.8m)^2 = 29.16m^2.$$

Задатак *Конструисати ормар у SketchUp-у чија је висина* $2.2m$, *а основа је правоугаоник чије су дужине страница* $0.5m$ *и* $0.9m$. *Колика му је запремина? Колико је боје потребно да се обоји предња страна ормана ако је за* $15m^2$ *потребно* $1l$ *боје?*

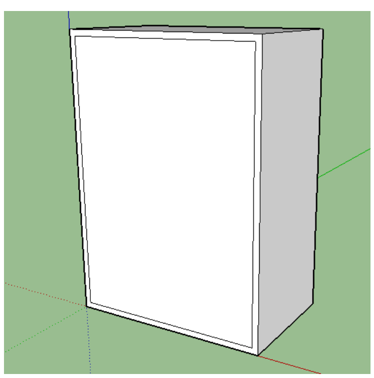
За конструкцију ормара потребно је нацртати правоугаоник, а затим квадар помоћу функције $Push/Pull$ (Слика 71).

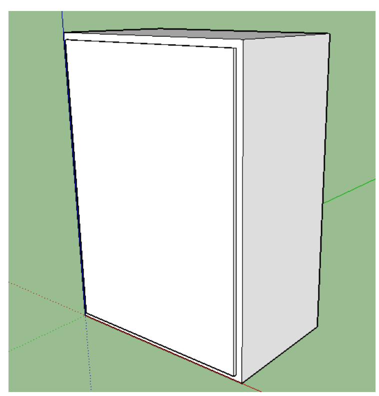




Слика 71: Правоугаоник и квадар

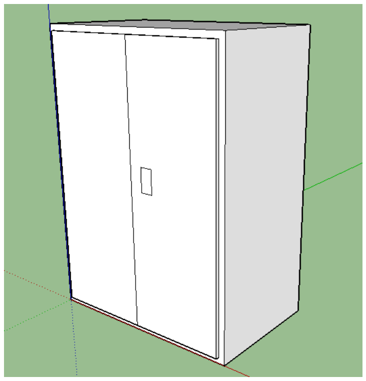
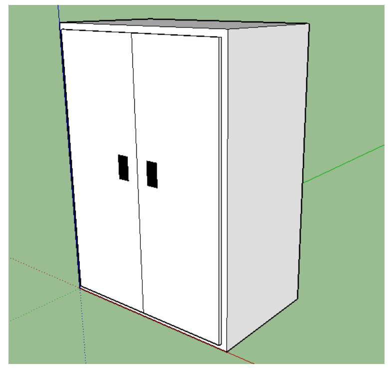
Уписаћемо правоугаоник на предњој страни квадра који је једнако удаљен од ивица, помоћу функције Offset. Затим функцијом $Push/Pull$ извућихемо тај правоугаоник (Слика 72).





Слика 72: Унписани правоугаоник

Повучемо вертикалну дуж која спаја средишта правоугаоника и са једне стране нацртамо мањи правоуганик који би представљао ручке ормара. Мањи правоугаоник обојимо у црно и ротирамо на другу страну (Слика 73).

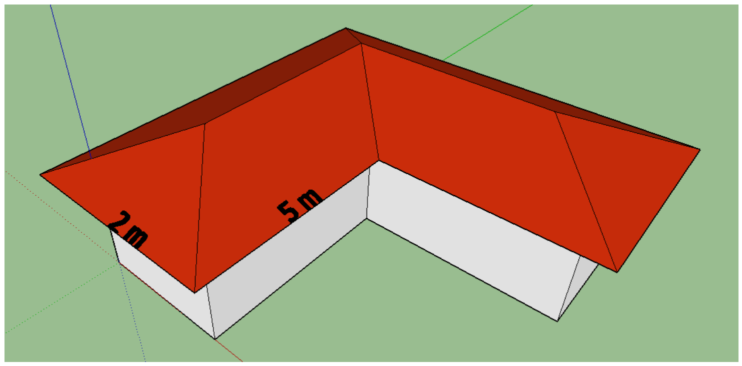
Слика 73: Ормар

Рачунање запремине ормара представља рачунање запремине квадра чија је основа правоугаоник дужине страница $0.5m$ и $0.9m$ и висине $2.2m$. Запремина квадра је

$$V = B \cdot H = (0.5 \cdot 0.9) \cdot 2.2 = 0.99m^3.$$

Из једноставне пропорције добија се колико је потребно боје за бојење предње стране ормара. Како је за $15m^2$ потребно $1l$ боје, тако је за предњу страну ормара чија је површина $2.2 \cdot 0.9 = 1.98m^2$ потребно xl, тј. $15 : 1 = 1.98 : x$. Дакле, $x = 0.132$, тј. потребно је $0.132l$ за бојење предње стране ормара.

Задатак *Дат је кров са димензијама као на Слици 74. Израчунати колико црепова је потребно да се купи, ако један цреп покрива* $0.12m^2$.



Слика 74: Кров

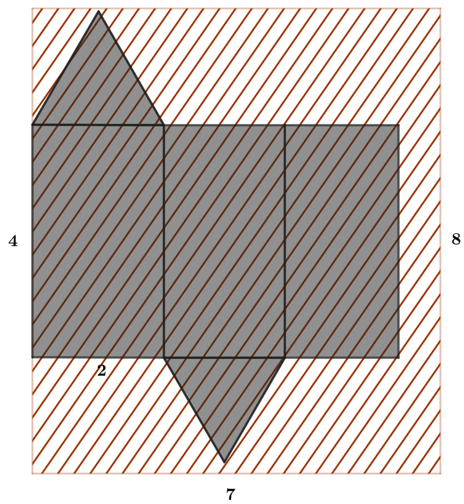
Потребно је израчунати површину целог крова. Он се састоји од два једнакостранична троугла, два паралелограма с једне стране и два трапеза с друге стране.

Површина троугла је $P_1 = \dfrac{2^2\sqrt{3}}{4} = \sqrt{3}$. Висина троугла представља и висину паралелограма и трапеза, $h = \dfrac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ па је површина паралелограма је $P_2 = 5\sqrt{3}$. Површина трапеза се може представити као унија правоугаоник страница $5m$ и $\sqrt{3}m$ и два правоугла троугла хипотенузе $2m$ и једне катете $\sqrt{3}m$. Површина трапеза је $P = 6\sqrt{3}$. Површина крова је

$$P = 2(P_1 + P_2 + P_3) = 2(\sqrt{3} + 5\sqrt{3} + 6\sqrt{3}) = 24\sqrt{3} \approx 41.57m^2.$$

Из једноставне пропорције добија се колико је потребно црепова купити. Ако један цреп покрива $0.12m^2$, онда x црепова покривају $41.57m^2$, тј. $1 : 0.12 = x : 41.57$. Дакле, $x = 346.42$, тј. потребно је купити 347 црепова.

Задатак *Димензије папира за паковање поклона су 7×8 cm, док је поклон, чоколадица Тоблероне, облика правилне призме основе ивице 2 cm и висине 4 cm. Да ли поклон може да се упакује и на колико начина тако да остане највише папира за паковање?*



Слика 75: Паковање поклона

На Слици 75 представљен је папир за паковање површином са црвеним пругама, док тамнији део представља мрежу тростране призме. Површина папира је $7 \cdot 8 = 56$, док је површина мреже призме тј. саме призме збир две површине основе и омотача $P = 2B + M$. Како је правилна тространа призма, основа је једнакостранични троугао. Коначно, површина призме је

$$P = 2\frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2 \cdot 4 = 2\sqrt{3} + 24 \approx 27.46cm^2.$$

Површина папира је већа од површине призме, тако да поклон може да се упакује на начин као на Слици 75, где правоуганици чине омотач, а троуглови основе призме.

Литература

[1] Татјана Давидовић Густард. *ПЛАТОНОВА ТЕЛА У ПРИРОДИ*. Математички факултет Универзитета у Београду, 2010.

[2] Шукиловић Т. и Вукмировић С. *Геометрија за информатичаре*. Математички факултет, Београд, 2015.

[3] Јован Д. Кечкић. *Математика са збирком задатака: за III разред средње школе: за гимназију*. Завод за уџбенике и наставна средства, 2018.

[4] Николина Ковачевић. *ПОЛУПРАВИЛНИ ПОЛИЕДРИ*. Свеучилиште у Загребу, 2012.

[5] Зоран Лучић. *Еуклидска и хиперболичка геометрија*. *Grafitti*, 1994.

[6] Врећица С. *On polygons and polyhedra*. *The Teaching of Mathematics VIII* (1), 2005. 1–14.

Списак преузетих слика

- Слика 11: Чај
  `https://thenounproject.com/icon/tea-leaf-and-hot-tea-3184935/`
- Слика 12: Шатор
  `https://www.vectorstock.com/royalty-free-vector/cartoon-tent-vector-35834066`
- Слика 22: Тетра Пак паковање
  `https://mathmonks.com/wp-content/uploads/2021/11/Tetrahedron-Net.jpg`
- Слика 25: Музеј Лувр
  `https://www.architectureanddesign.com.au/getmedia/82875f39-abc7-4f01-991b-6f00552085da/2_-2.aspx`
- Слика 29: Платонова тела
  `https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Platonic_solids#/media/File:Platonic_Solids_Transparent.svg`
- Слика 32: Дуалност Платонових тела
  `https://www.projectrhea.org/rhea/index.php/File:Dualsolid.jpg`
- Слике 35,36, 37
  `https://mathworld.wolfram.com/ArchimedeanSolid.html`
- Слика 75: Паковање поклона
  `https://i.pinimg.com/564x/58/7b/18/587b18c01b258df0070d6d060fa41064.jpg`