УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Марина Урошевић

КОМПЛЕКСНА КОМБИНАТОРИКА

• МАСТЕР РАД •

Београд, 2022.

МЕНТОР

- др Бобан Карапетровић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

ОСТАЛИ ЧЛАНОВИ КОМИСИЈЕ

- др Миљан Кнежевић, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

- др Владимир Божин, доцент,
  Математички факултет, Универзитет у Београду

Садржај

Увод

Многи комбинаторни проблеми поплочавања и пребројавања, разних нивоа тежина, могу се релативно елегантно решити користећи технику засновану на примени комплексних бројева. Са друге стране, неки нестандардни комбинаторни проблеми могу се решавати применом комплексне интеграције. Такође, велики број различитих комбинаторних идентитета може се доказати користећи наведене технике. Циљ рада је упознавање основних метода за решавање разних комбинаторних проблема, укључујући комбинаторне проблеме поплочавања и пребројавања, који се заснивају на примени неких елементарних својстава комплексних бројева и комплексних интеграла. Испоставља се да основна идеја у решавању одређене класе комбинаторних проблема, применом базних елемената комплексне анализе, потиче од коначне (дискретне) Фуријеове трансформације или неке њене варијанте. Отуда се претходни методи могу генерализовати у оквиру коначне (дискретне) Фуријеове анализе. За потребе овога рада биће израђени задаци, као и сликовити прикази.

У првом поглављу овог рада дата је дефиниција комплексних бројева и њихових кључних својстава. Скуп комплексних бројева $\mathbb{C}$ који је снабдевен одговарајућим операцијама сабирања и множења представља поље комплексних бројева. Такође, за сваки комплексан број разликујемо његов реалан и имагинаран део, модул и конјугат задатог комплексног броја. Са друге стране, дефинисаћемо експоненцијалну функцију у комплексној равни и испитати њена основна својства. Једно од кључних својстава експоненцијалне функције представљено је чувеном Моавровом формулом. У комплексној равни можемо представити и тригонометријске функције, односно дати тригонометријски приказ комплексних бројева кроз поларну форму. На самом крају поглавља увешћемо комплексан интеграл и образложити једно његово основно својство и навести могућу примену приликом решавања проблема. Са освртом на прву главу, применом комплексних бројева и њихових основних својстава, у другом и трећем поглављу биће истакнути примери који илуструју комбинаторне проблеме поплочавања и пребројавања. Четврто поглавље садржи коначну Фуријеову анализу, дефиницију дуалне групе и образложење случаја некомутативних група. За било коју коначну, комутативну групу важе и релације ортогоналности, Фуријеова инверзија, као и Планшерелов идентитет. Последњи део рада посветићемо Гаусовим сумама и Дирихлеовим карактерима, при чему наводимо и неке конкретне примере.

На крају, желим да се захвалим ментору и члановима комисије на корисним примедбама и сугестијама које су допринеле бољем квалитету рукописа.

Марина Урошевић

Глава 1

Комплексни бројеви и комплексна интеграција

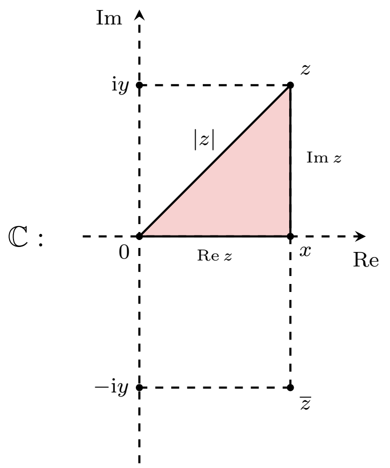
Комплексни бројеви. Скуп $\mathbb{C} = \{x + \mathrm{i}y : x, y \in \mathbb{R}\}$ који је снабдевен операцијама сабирања и множења, које су дефинисане на следећи начин

$$\begin{aligned}(x + \mathrm{i}y) + (u + \mathrm{i}v) &= (x + u) + \mathrm{i}(y + v),\\ (x + \mathrm{i}y) \cdot (u + \mathrm{i}v) &= (xu - yv) + \mathrm{i}(xv + uy),\end{aligned}$$

при чему за елемент i (који се зове *имагинарна јединица*) важи $\mathrm{i}^2 = -1$, представља *поље комплексних бројева.* Ако је $z = x + \mathrm{i}y$ комплексан број, тада су

$$\operatorname{Re} z = x, \quad \operatorname{Im} z = y, \quad |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{ и } \ \overline{z} = x - \mathrm{i}y,$$

реалан део, *имагинаран део*, *модул* и *конјугат* датог комплексног броја z, тим редом.



У комплексној равни $\mathbb{C}$ приказани су реалан део, имагинаран део, модул и конјугат датог комплексног броја z.

Поред тога, скуп $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ заједно са операцијама сабирања и множења, дефинисаних на следећи начин

$$\begin{aligned}(x, y) + (u, v) &= (x + u, y + v),\\ (x, y) \cdot (u, v) &= (xu - yv, xv + uy),\end{aligned}$$

представља поље које је изоморфно пољу комплексних бројева $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. Следи да се сваки комплексан број $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ може видети и као уређен пар $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ и стога, за поље $\mathbb{C}$ кажемо *комплексна раван*. Наводимо нека основна својства комплексних бројева, која следе елементарно из претходних дефиниција, при чему претпостављамо да су z, z_1 и z_2 комплексни бројеви.

- $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$;
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$, $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, $\overline{(z_1/z_2)} = \overline{z_1}/\overline{z_2}$ $(z_2 \neq 0)$;
- $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;
- $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ $(z_2 \neq 0)$;
- $|\overline{z}| = |z|$, $\overline{(\overline{z})} = z$;
- $z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re} z$;
- $z - \overline{z} = 2\mathrm{i} \operatorname{Im} z$;
- $z_1 = z_2$ ако и само ако $\operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2$ и $\operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$.

Осим тога, важи

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 &= (z_1 + z_2)\,\overline{(z_1 + z_2)} \\
&= (z_1 + z_2) \cdot (\overline{z_1} + \overline{z_2}) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + (z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2) \\
&= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&\leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\
&= (|z_1| + |z_2|)^2,
\end{aligned}$$

што директно повлачи

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Применом претходне неједнакости, налазимо

$$|z_1| - |z_2| = |z_1 + z_2 - z_2| - |z_2| \leq |z_1 + z_2| + |z_2| - |z_2| = |z_1 + z_2|.$$

Затим, добијамо

$$\begin{aligned}
|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&= 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right).
\end{aligned}$$

Слично је

$$\begin{aligned}
|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 &= 1 + |z_1|^2|z_2|^2 - 2 \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) - |z_1|^2 - |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1\overline{z_2}) \\
&= \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right).
\end{aligned}$$

На основу свега претходног, добили смо следећа својства комплексних бројева

- $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$;
- $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 + z_2|$;
- $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2\left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)$;
- $|1 - z_1\overline{z_2}|^2 - |z_1 - z_2|^2 = \left(1 - |z_1|^2\right)\left(1 - |z_2|^2\right)$.

За нека додатна елементарна својства комплексних бројева и бројне друге корисне информације погледати збирке задатака [2, 5].

Експоненцијална функција. Ако је $z = x + \mathrm{i}y$, *експоненцијалну функцију* у комплексној равни дефинишемо на следећи начин

$$\exp z = e^z = e^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y).$$

Тада важи

$$e^{\mathrm{i}y} = \cos y + \mathrm{i}\sin y,$$

за све $y \in \mathbb{R}$. У наставку, наводимо нека својства експоненцијалне функције, при чему претпостављамо да су y, y_1 и y_2 реални бројеви

- $\overline{e^{\mathrm{i}y}} = e^{-\mathrm{i}y}$;
- $\dfrac{e^{\mathrm{i}y} + e^{-\mathrm{i}y}}{2} = \cos y, \ \dfrac{e^{\mathrm{i}y} - e^{-\mathrm{i}y}}{2\mathrm{i}} = \sin y$;
- $\left|e^{\mathrm{i}y}\right| = 1$;
- $1 + e^{\mathrm{i}y} = 2e^{\frac{\mathrm{i}y}{2}}\cos\dfrac{y}{2}, \ 1 - e^{\mathrm{i}y} = -2e^{\frac{\mathrm{i}y}{2}}\sin\dfrac{y}{2}$;
- $e^{\mathrm{i}y_1} = e^{\mathrm{i}y_2}$ ако и само ако $y_1 = y_2 + 2k\pi$ за неко $k \in \mathbb{Z}$.

Лема 1.1 (Моаврова формула) *Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}$. Тада важи*

$$\left(e^{\mathrm{i}y}\right)^n = e^{\mathrm{i}ny}.$$

Доказ. Нека су $y_1, y_2, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Важи

$$e^{\mathrm{i}y_1} \cdot e^{\mathrm{i}y_2} = (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + \mathrm{i}(\cos y_1 \sin y_2 + \cos y_2 \sin y_1) = e^{\mathrm{i}(y_1 + y_2)}.$$

Применом индукције, следи да је

$$e^{\mathrm{i}y_1} \cdot \ldots \cdot e^{\mathrm{i}y_n} = e^{\mathrm{i}(y_1 + \ldots + y_n)}.$$

У специјалном случају $y_1 = y_2 = \ldots = y_n = y$ добијамо тражену формулу

$$(e^{\mathrm{i}y})^n = e^{\mathrm{i}ny},$$

што је и требало показати. ■

Са друге стране, ако $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$, тада је

$$|e^z| = \left|e^x \cdot e^{\mathrm{i}y}\right| = e^x,$$

што директно повлачи следећа својства експоненцијалне функције

- $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$;
- $|e^z| \neq 0$ ($\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\times$, при чему је $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ пробушена комплексна раван);
- $e^{z+2\pi \mathrm{i}} = e^z$ (периодична функција са периодом $2\pi\mathrm{i}$).

Пример 1.1 Претпоставимо да је $z \in \mathbb{C}$. Доказати да важи

$$e^{-|z|} \leq |e^z| \leq e^{|z|},$$

као и

$$\overline{e^z} = e^{\overline{z}}.$$

Решење. Најпре, важи $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$. Такође, знамо да је $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, одакле следи $-|z| \leq \operatorname{Re} z \leq |z|$. Обзиром на монотоност експоненцијалне функције, добијамо

$$e^{-|z|} \leq e^{\operatorname{Re} z} = |e^z| \leq e^{|z|}.$$

Још важи да је

$$\overline{e^z} = \overline{e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{\mathrm{i} \operatorname{Im} z}} = e^{\operatorname{Re} z} \cdot \overline{e^{\mathrm{i} \operatorname{Im} z}} = e^{\operatorname{Re} z} \cdot e^{-\mathrm{i} \operatorname{Im} z} = e^{\operatorname{Re} z - \mathrm{i} \operatorname{Im} z} = e^{\overline{z}}.$$

Крај задатка. ■

Поларна форма. У комплексној равни $\mathbb{C}$ можемо представити тригонометријске функције косинус и синус на следећи начин

$$\cos z = \frac{e^{\mathrm{i}z} + e^{-\mathrm{i}z}}{2} \quad \text{и} \quad \sin z = \frac{e^{\mathrm{i}z} - e^{-\mathrm{i}z}}{2\mathrm{i}},$$

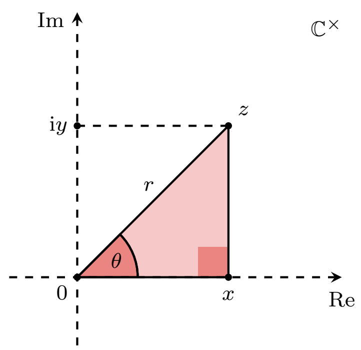
при чему $z \in \mathbb{C}$.
Нека је $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$. Означимо са $r = |z|$ модул комплексног броја и $\theta = \arg z \in [0, 2\pi)$ аргумент комплексног броја z (угао који вектор положаја тачке образује са позитивним делом реалне осе). Уређен пар (r, θ) представља поларне координате комплексног броја z. Такође, важи

$$x = r\cos\theta \quad \text{и} \quad y = r\sin\theta.$$

Из претходног следи

$$z = r\cos\theta + \mathrm{i}r\sin\theta = re^{\mathrm{i}\theta}.$$

Овакав запис комплексног броја z изражен преко његових поларних координата представља поларну форму комплесног броја z.



Поларна форма броја $z \in \mathbb{C}^\times$.

Дакле, важи да је $z = |z|e^{\mathrm{i}\arg z}$. Посматрамо једначину

$$z^n = \omega \quad \text{при чему је} \quad (n \in \mathbb{N},\, \omega \in \mathbb{C}^\times). \tag{1.1}$$

Претпоставимо да је $\omega = \rho e^{\mathrm{i}\alpha}$. Како је $\omega \neq 0$, решење једначине (1.1) можемо потражити у поларном облику $z = re^{\mathrm{i}\theta}$. Заменом у једначину (1.1) добијамо

$$r^n e^{\mathrm{i}n\theta} = \rho e^{\mathrm{i}\alpha}.$$

Применом модула налазимо да је $r^n = \rho$ и $e^{\mathrm{i}n\theta} = e^{\mathrm{i}\alpha}$. Даље следи да је $r = \sqrt[n]{\rho}$ и $n\theta = \alpha + 2k\pi$, при чему је $k \in \mathbb{Z}$. Тада, решења једначине (1.1) ће бити облика

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \cdot e^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2k\pi}{n}},$$

при чему ћемо посматрати само врендости $k = 0, 1, \ldots, n-1$ јер је експоненцијална функција периодична. Специјално, ако је $\omega = 1$ као решења добијамо n-те корене јединице

$$z_k = e^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2k\pi}{n}} \quad \text{при чему је} \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Број $\xi = z_1 = e^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2\pi}{n}}$ је n-ти корен јединице, јер он генерише све остале n-те корене јединице. Ако је $n \geq 3$ тада n-ти корени јединице представљају темена правилног n-тоугла уписаног у јединичну кружницу $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

Пример 1.2 Нека је $n \in \mathbb{N}$.

(а) Одредити $\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^n$.

(б) Доказати да је

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k} (-1)^k = 2^{n/2} \cos\frac{n\pi}{4}.$$

(в) Доказати да је

$$\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right]^2 = 2^n.$$

Решење. (а) Kako је $1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \mathrm{i}\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$, добијамо

$$\mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^n = \mathrm{Re}\left(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\right)^n = \mathrm{Re}\left(2^{n/2}e^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}\right) = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

(б) Приметимо да важи

$$\begin{aligned}
(1+\mathrm{i})^n &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1}\mathrm{i} + \ldots + \binom{n}{n}\mathrm{i}^n \\
&= \left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right] + \mathrm{i}\left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right].
\end{aligned}$$

Искористимо једнакост из дела под (а) и добијамо

$$\sum_{k=0}^{[n/2]} \binom{n}{k}(-1)^k = \binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots = \mathrm{Re}(1+\mathrm{i})^n = 2^{n/2}\cos\frac{n\pi}{4}.$$

(в) Из дела под (б) знамо да важи

$$\left[\binom{n}{0} - \binom{n}{2} + \binom{n}{4} - \ldots\right]^2 + \left[\binom{n}{1} - \binom{n}{3} + \binom{n}{5} - \ldots\right]^2 = |(1+\mathrm{i})^n|^2 = (\sqrt{2})^{2n} = 2^n.$$

Тиме је пример завршен. ■

Пример 1.3 Израчунати

$$\sum_{k=0}^{3n-1}(-1)^k\binom{6n}{2k+1}3^k,$$

где је $n \in \mathbb{N}$.

Решење. Означимо суму

$$S=\sum_{k=0}^{3n-1}(-1)^k\binom{6n}{2k+1}3^k.$$

Приметимо да важи

$$S=\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{6n}{2k+1}(\mathrm{i}\sqrt{3})^{2k}=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{6n}{2k+1}(\mathrm{i}\sqrt{3})^{2k+1}.$$

Такође, важи да је

$$(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{6n}=\binom{6n}{0}+\binom{6n}{1}\mathrm{i}\sqrt{3}+\ldots+\binom{6n}{6n}(\mathrm{i}\sqrt{3})^{6n}.$$

Уједно, важи и

$$\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{6n}=\sum_{k=0}^{3n-1}\binom{6n}{2k+1}(\mathrm{i}\sqrt{3})^{2k+1}.$$

На крају, следи

$$S=\frac{1}{\mathrm{i}\sqrt{3}}\cdot\mathrm{i}\,\mathrm{Im}(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^{6n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}(2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^{6n}=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}(2^{6n}\cdot e^{2\pi n\mathrm{i}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\,\mathrm{Im}\,2^{6n}=0,$$

што је и требало одредити. ■

▶ **Комплексна интеграција.** Нека је $[a,b]$ сегмент на реалној правој и $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ дата непрекидна функција. Тада дефинишемо

$$\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b\mathrm{Re}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_a^b\mathrm{Im}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

Напоменимо да претпоставка о непрекидности функције φ, повлачи непрекидност функција $\mathrm{Re}\,\varphi$ и $\mathrm{Im}\,\varphi$, што омогућава постојање интеграла на десној страни претходно наведене формуле. Поред тога, за овако дефинисан комплексан интеграл наводимо и следеће елементарно својство.

Теорема 1.1 *Нека је $\varphi:[a,b]\to\mathbb{C}$ непрекидна функција. Тада важи*

$$\left|\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right|\le\int_a^b|\varphi(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Доказ. Користећи поларну форму комплексног броја можемо записати

$$\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t=re^{\mathrm{i}\theta},$$

за неке $r\ge 0$ и $\theta\in[0,2\pi)$. Тада директно налазимо

$$\left|\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \quad = \quad r=e^{-\mathrm{i}\theta}re^{\mathrm{i}\theta}=e^{-\mathrm{i}\theta}\int_a^b\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\int_a^b e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(t)\,\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned} &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(t)\right)\mathrm{d}t + \mathrm{i}\int_a^b \mathrm{Im}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(t)\right)\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}\left(e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(t)\right)\mathrm{d}t \\ &\leq \int_a^b \left|e^{-\mathrm{i}\theta}\varphi(t)\right|\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

што је и требало показати. ■

Са друге стране, наводимо и следећи једноставан резултат који се односи на овако уведен комплексан интеграл и који може бити од користи у наредним разматрањима.

Лема 1.2 *Нека је $n \in \mathbb{Z}$. Тада важи*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 1, & \text{ако је } n = 0 \\ 0, & \text{ако је } n \neq 0 \end{cases}.$$

Доказ. Ако је $n = 0$, тада тривијално важи

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}0t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,\mathrm{d}t = 1.$$

Са друге стране, ако је $n \neq 0$, добијамо

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{\mathrm{i}nt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi n\mathrm{i}}\, e^{\mathrm{i}nt}\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi n\mathrm{i}}\left(e^{2\pi n\mathrm{i}} - 1\right) = 0,$$

чиме је доказ завршен. ■

Приметимо да за дате реалне бројеве a и b важи

$$e^{2\pi\mathrm{i}(b-a)} = 1,$$

ако и само ако је

$$b - a \in \mathbb{Z}.$$

Самим тим, слично као у Леми 1.2, имајући у виду чињеницу да је

$$\int_a^b e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot e^{2\pi\mathrm{i}x}\Big|_a^b = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot\left(e^{2\pi\mathrm{i}b} - e^{2\pi\mathrm{i}a}\right) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\cdot e^{2\pi\mathrm{i}a}\cdot\left(e^{2\pi\mathrm{i}(b-a)} - 1\right),$$

долазимо до закључка да важи

$$\int_a^b e^{2\pi\mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x = 0 \ \text{ ако и само ако } \ b - a \in \mathbb{Z}. \tag{1.2}$$

Нека од претходно наведених основних својстава комплексног интеграла, користићемо у наредним главама.

Пример 1.4 Нека је $n \in \mathbb{N}$ и $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$. Доказати да постоји $J \subset \{1, 2, \ldots n\}$ тако да важи

$$\left| \sum_{j \in J} z_j \right| \geqslant \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

Решење. Бирамо произвољно θ и означимо

$$J_\theta = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \arg\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \in [0, \pi)\},$$

при чему је функција

$$\arg : \mathbb{C}^\times \to [0, 2\pi)\,,$$

додефинисана тако да је аргумент комплексног броја 0 једнак нули. Следи

$$J_{\pi+\theta} = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : \arg\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \in [\pi, 2\pi)\},$$

за све $\theta \in \mathbb{R}$. Из претходног следи

$$J_\theta \cup J_{\pi+\theta} = \{1, 2, \ldots, n\},$$

при чему су скупови J_θ и $J_{\pi+\theta}$ дисјунктни. Такође, важи да је

$$\mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \geq 0.$$

Добијамо да је

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| &= \left| \sum_{j \in J_\theta} e^{\mathrm{i}\theta} z_j \right| \geq \mathrm{Im}\left(\sum_{j \in J_\theta} e^{\mathrm{i}\theta} z_j \right) \\
&= \sum_{j \in J_\theta} \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \\
&= \sum_{j \in J_\theta} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right|.
\end{aligned}$$

Из претходног следи

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| \mathrm{d}\theta &\geq \int_0^{2\pi} \sum_{j \in J_\theta} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sum_{j \in J_\theta} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta + \int_\pi^{2\pi} \sum_{j \in J_\theta} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sum_{j \in J_\theta} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta + \int_0^{\pi} \sum_{j \in J_{\pi+\theta}} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi} \sum_{j \in J_\theta \cup J_{\pi+\theta}} \left| \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi} \sum_{j=1}^{n} \left| \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\pi} \left| \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta.
\end{aligned}
$$

За свако $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ постоји $\alpha_j \in [0, 2\pi)$, тако да важи

$$z_j = |z_j|\, e^{\mathrm{i}\alpha_j}.$$

Односно, $\alpha_j = \arg z_j$. Када то заменимо добијамо

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \left| \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta &= \int_0^{\pi} \left| \operatorname{Im}\left(|z_j|\, e^{\mathrm{i}(\theta+\alpha_j)}\right) \right| \mathrm{d}\theta = |z_j| \int_0^{\pi} \left|\sin(\theta + \alpha_j)\right| \mathrm{d}\theta \\
&= |z_j| \int_0^{\pi} |\sin\theta|\, \mathrm{d}\theta \\
&= 2\,|z_j|.
\end{aligned}
$$

Након тога, налазимо

$$\int_0^{2\pi} \left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| \mathrm{d}\theta \;\geq\; \sum_{j=1}^{n} \int_0^{\pi} \left| \operatorname{Im}\left(e^{\mathrm{i}\theta} z_j\right) \right| \mathrm{d}\theta = 2 \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

добијамо

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| \mathrm{d}\theta \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Претпоставимо да за све $\theta \in [0, 2\pi)$ важи

$$\left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Тада следи

$$\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{j \in J_\theta} z_j \right| \mathrm{d}\theta \leq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|$$

а то је немогуће, па онда следи да је θ такво да важи

$$\left| \sum_{j \in J_{\theta_1}} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

при чему $\theta_1 \in [0, 2\pi)$. Ако претпоставимо да је $J = J_{\theta_1}$ добијамо

$$\left| \sum_{j \in J} z_j \right| \geq \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

Крај задатка. ■

Глава 2

Проблеми поплочавања

У овом поглављу илуструјемо примену основних својстава комплексних бројева и комплексних интеграла у решавању разних комбинаторних проблема пополочавања. Пре него што кренемо са комбинаторним проблемима, наводимо један користан технички пример.

Пример 2.1 Нека су $a, n \in \mathbb{N}$, где је $n > 1$ и $\xi = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Доказати да важи

$$\xi + \ldots + \xi^a = 0 \text{ ако и само ако } n \mid a.$$

Решење. Означимо са q и r количник и остатак при дељењу броја a бројем n. Тада број a можемо записати као $a = qn + r$, при чему је $0 \le r < n$. Како важи да је $\xi^n = 1$ и $\xi \neq 1$, онда важи и да је $\xi^r = 1$ ако и само ако је $r = 0$.

$$\xi + \ldots + \xi^a = \xi \left(1 + \ldots + \xi^{a-1}\right) = \xi \cdot \frac{1 - \xi^a}{1 - \xi}.$$

Самим тим, важи $\xi + \ldots + \xi^a = 0$ ако и само ако је $\xi^a = 1$. Са друге стране, имамо

$$\xi^a = \xi^{qn+r} = (\xi^n)^q \, \xi^r = \xi^r = 1,$$

што је могуће ако и само ако је $r = 0$, односно, ако и само ако $n \mid a$. Тиме је пример у потпуности завршен. ■

Пример 2.2 Пронаћи најмањи природан број n, такав да се квадрат димензије $n \times n$ може поплочати квадратима димензија 40×40 и 49×49, тако да су у поплочавању заступљене обе врсте датих квадрата.

Решење. Сваком пољу квадрата $n \times n$ доделимо координате (x, y), где је $1 \le x, y \le n$, тако да поље у доњем левом углу табле има координате $(1, 1)$ (слично као у Примеру 2.1). У поље са координатама (x, y) упишимо број $\xi^x \omega^y$, при чему је

$$\xi = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{40}} \text{ и } \omega = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{49}}.$$

У наставку, уочимо квадрат димензије $m \times m$, при чему $1 \le m \le n$. Претпоставимо да поље у доњем левом углу тог квадрата има координате (x, y). Наиме, сума бројева на пољима која обухвата квадрат димензија $m \times m$ износи

$$\sum_{j=x}^{x+m-1} \sum_{k=y}^{y+m-1} \xi^j \omega^k = \xi^x \omega^y \cdot \frac{1 - \xi^m}{1 - \xi} \cdot \frac{1 - \omega^m}{1 - \omega}.$$

Специјално, за $m = 40$ важи $\xi^{40} = 1$, а за $m = 49$ важи $\omega^{49} = 1$, па следи да је сума уписаних бројева у квадрату димензија 40×40 или 49×49 једнака нули. Из тога следи да је $\xi^n = 1$ или $\omega^n = 1$. Ако је $\xi^n = 1$, тада важи $40|n$, а ако је $\omega^n = 1$, тада закључујемо $49|n$.
Претпоставимо да је за поплочавање квадрата димензије $n \times n$ потребно a квадрата димензије 40×40 и b квадрата димензије 49×49, при чему су a и b природни бројеви. Тада важи

$$40^2 \cdot a + 49^2 \cdot b = n^2.$$

Ако $40|n$, онда $40^2|b$, одакле следи да је $n^2 > 40^2 \cdot 49^2$, односно $n > 1960$. Како смо претпоставили да је n дељив са 40, следи да је $n \geq 2000$. Такође, ако $49|n$, онда $49^2|a$, одакле следи да је $n^2 > 40^2 \cdot 49^2$, односно $n > 1960$. Обзиром да смо претпоставили да је n дељив са 49, у овом случају следи да је $n \geq 2009$. Дакле, природан број $n = 2000$ испуњава тражене услове, односно, квадрат димензије 1960×1960 који је смештен у доњем левом углу квадрата 2000×2000 можемо поплочати квадратима димензије 49×49, док се остатак може поплочати квадратима димензије 40×40. ■

Пример 2.3 Да ли можемо поплочати таблу димензије 13×13 из које смо отклонили централни јединични квадрат користећи само правоугаонике димензије 1×4 или 4×1?

Решење. Претпоставимо да је поплочавање могуће и означимо поља задате табле са $(1,1), (1,2), \dots, (8,9)$, при чему је поље у доњем левом углу почетно. Придружимо број i^{k+2j} квадрату са координатама (k, j). Очигледно, ма како поставили правоугаонике димензије 1×4 или 4×1 на таблу они ће обухватити бројеве чији је збир једнак нули. Дакле, збир свих ознака једнак је броју који одговара централном јединичном квадрату. Закључујемо

$$\mathrm{i}^{21} = \left(\mathrm{i} + \mathrm{i}^2 + \ldots + \mathrm{i}^{13}\right)\left(\mathrm{i}^2 + \mathrm{i}^4 + \ldots + \mathrm{i}^{26}\right) = \mathrm{i} \cdot \frac{\mathrm{i}^{13} - 1}{\mathrm{i} - 1} \cdot \mathrm{i}^2 \cdot \frac{\mathrm{i}^{26} - 1}{\mathrm{i}^2 - 1} = \mathrm{i}^3,$$

што је заправо немогуће. Дакле, претпоставка од које смо започели је погрешна, а поплочавање немогуће. ■

Пример 2.4 На таблу димензије 8×9 поставимо правоугаоник димензије 3×1 и *сломљени* правоугаоник димензије 1×3, добијен уклањањем централног, јединичног квадрата. Задати правоугаоници и *сломљени* правоугаоници се не преклапају нити се могу ротирати. Доказати да постоји скуп S који садржи 18 квадрата, таквих да ако је 70 јединичних квадрата покривено, преостала 2 припадају скупу S.

Решење. Поново означимо поља задате табле са $(1,1), (1,2), \dots, (8,9)$, при чему је поље у доњем левом углу почетно. Пољу са коoридинатама (k, j) доделимо број $\mathrm{i}^j \cdot \varepsilon^k$, где је $\mathrm{i}^2 = -1$ и $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$. Сума бројева било ког правоугаоника или *сломљеног* правоугаоника је нула. Сума свих бројева је

$$\left(\sum_{k=1}^{8} \varepsilon^k\right)\left(\sum_{j=1}^{9} \mathrm{i}^j\right) = -\mathrm{i}.$$

Претпоставимо да су (a_1, b_1) и (a_2, b_2) једина поља која нису покривена. Онда је

$$\mathrm{i}^{b_1}\varepsilon^{a_1} + \mathrm{i}^{b_2}\varepsilon^{a_2} = -\mathrm{i}.$$

Претпоставимо да је $z_1 = \mathrm{i}^{b_1-1}\varepsilon^{a_1}$ и $z_2 = \mathrm{i}^{b_2-1}\varepsilon^{a_2}$. Имамо да је $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 + z_2 = -1$. Следи да је

$$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = -1 \text{ и } z_1^3 = z_2^3 = 1.$$

Ово имплицира једнакост $\mathrm{i}^{3(b_1-1)} = \mathrm{i}^{3(b_2-1)} = 1$, одакле је $b_1 \equiv b_2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$. Дакле, релација $z_1 + z_2 = -1$ постаје $\varepsilon^{a_1} + \varepsilon^{a_2} = -1$, што је могуће ако и само ако остаци од a_1 и a_2 приликом дељења са 3 дају 1 и 2. Коначно, можемо одабрати S који ће бити скуп свих поља која леже у пресеку линија $1, 2, 4, 5, 7, 8$ са колонама $1, 5, 9$. Као што је претходно наведено, ако два поља остану непокривена онда она припадају скупу S. Тиме је пример завршен. ■

Пример 2.5 Нека је k цео број већи од 2. Одредити позитиван, цео, непаран број n тако да се табла димензије $n \times n$ може поплочати правоугаоницима димензије $1 \times k$ или $k \times 1$, при чему је само централни јединични квадрат непокривен.

Решење. Сваком пољу квадрата $n \times n$ доделимо координате (x, y), где је $1 \leq x, y \leq n$, тако да поље у доњем левом углу табле има координате $(0, 0)$. Доделимо број z^{x+y} квадрату (x, y), где је z примитиван k-ти корен из јединице. Онда ће све плочице димезије $1 \times k$ или $k \times 1$ покрити укупну вредност једнаку нули. Поред тога, укупна вредност за целу таблу мора бити једнака 0. Са друге стране, укупна вредност је управо

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} z^j\right)^2 - z^{n-1}.$$

Дакле, за

$$\left(\sum_{j=1}^{n-1} z^j\right)^2 - z^{n-1} = 0,$$

постоји $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ тако да је

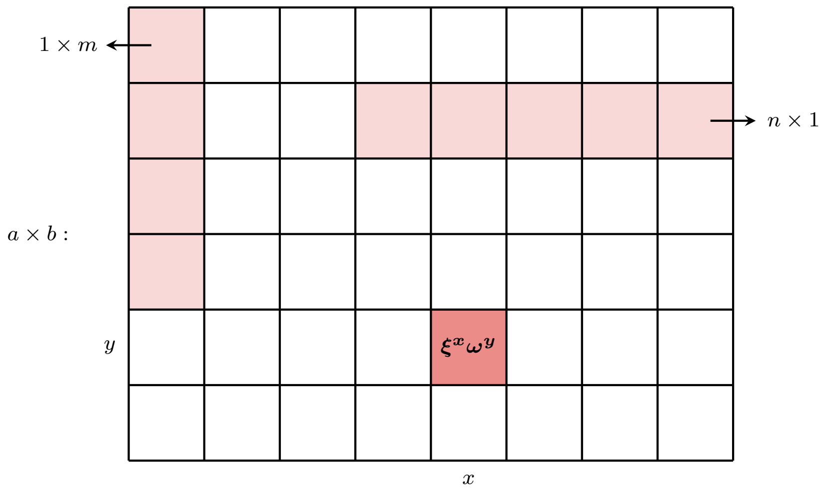
$$\frac{z^n - 1}{z - 1} = \varepsilon \cdot z^{\frac{n-1}{2}}.$$

Другачије, то записујемо

$$\left(z^{\frac{n-1}{2}} - \varepsilon\right)\left(z^{\frac{n-1}{2}} + \varepsilon\right) = 0,$$

што имплицира да је $n \equiv \pm 1\,(\mathrm{mod}\, k)$. За $n \equiv 1\,(\mathrm{mod}\, k)$, можемо покрити обе централне колоне и редове (не укључујући централни квадрат) користећи правоугаонике, остављајући четири правоугаоника димензије која је умножак броја k. За $n \equiv -1\,(\mathrm{mod}\, k)$, можемо поделити таблу на четири правоугаоника, сваки димензије a која је умножак броја k, тако да је поплочавање поново могуће. Одговор на питање је: свако n за које важи $n \equiv \pm 1\,(\mathrm{mod}\, k)$. ■

Пример 2.6 Правоугаона табла димензије $a \times b$ поплочана је правоугаоницима димензија $1 \times m$ и $n \times 1$, при чему су $a, b, m, n \geq 2$ природни бројеви. Доказати да се ова табла може поплочати користећи само правоугаонике димензије $1 \times m$ или само правоугаонике димензије $n \times 1$.

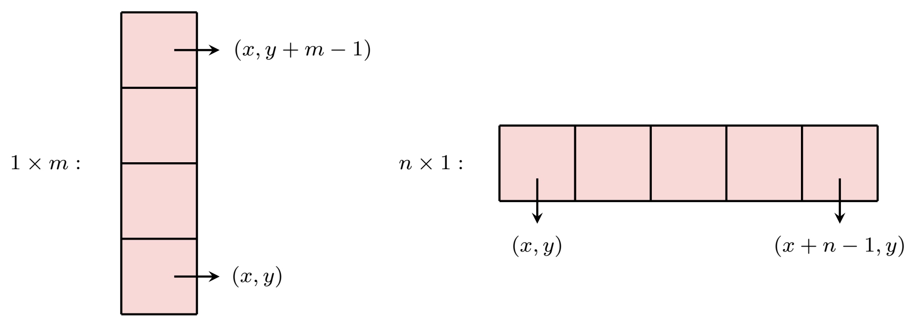


Прва слика уз Пример 2.6.

Решење. Сваком пољу задате табле димензије $a \times b$ доделимо координате (x, y), при чему је $1 \leq x \leq a$ и $1 \leq y \leq b$, а поље у доњем левом углу табле ће имати координате $(1, 1)$. У поље са координатама (x, y) упишимо број $\xi^x \omega^y$, при чему је

$$\xi = e^{\frac{2\pi i}{n}} \text{ и } \omega = e^{\frac{2\pi i}{m}}.$$

Поставимо правоугаоник димензије $1 \times m$ или правоугаоник димензије $n \times 1$ на таблу $a \times b$ и израчунајмо суме бројева у пољима на која су постављени.



Друга слика уз Пример 2.6.

Закључујемо да сума бројева на пољима која обухвата правоугаоник $1 \times m$, независно од места на којем се налази, износи

$$\xi^x \omega^y + \ldots + \xi^x \omega^{y+m-1} = \xi^x \omega^y \cdot \left(1 + \ldots + \omega^{m-1}\right) = \xi^x \omega^y \cdot \frac{1 - \omega^m}{1 - \omega} = 0.$$

Аналогно, сума бројева на пољима која обухвата правоугаоник $n \times 1$, независно од места на којем се налази, износи

$$\xi^x \omega^y + \ldots + \xi^{x+n-1} \omega^y = \xi^x \omega^y \cdot \left(1 + \ldots + \xi^{n-1}\right) = \xi^x \omega^y \cdot \frac{1 - \xi^n}{1 - \xi} = 0.$$

Још закључујемо да се правоугаона табла димензије $a \times b$ може се поплочати користећи правоугаонике димензија $1 \times m$ и $n \times 1$. На основу претходног следи да сума свих бројева уписаних у поља на табли $a \times b$ једнака

$$\sum_{x=1}^{a}\sum_{y=1}^{b}\xi^x\omega^y = \left(\sum_{x=1}^{a}\xi^x\right)\cdot\left(\sum_{y=1}^{b}\omega^y\right) = 0.$$

Коначно закључујемо

$$\xi + \ldots + \xi^a = 0 \text{ или } \omega + \ldots + \omega^b = 0,$$

односно (видети Пример 1.1)

$$n \mid a \text{ или } m \mid b.$$

У случају када $n \mid a$ табла се може поплочати користећи само дате правоугаонике димензије $n \times 1$. Самим тим, у овом случају се свака врста табле $a \times b$ може поплочати правоугаоницима димензије $n \times 1$, а тиме и цела табла. Други случај када $m \mid b$ табла се може поплочати користећи само правоугаонике димензије $1 \times m$. У овом случају се свака колона табле $a \times b$ може поплочати правоугаоницима димензије $1 \times m$, а тиме и цела табла. ∎

Пример 2.7 Нека је $n \geq 2$ цео број. Свакој тачки (i, j) са целобројним координатама доделимо вредност $i + j \pmod n$. Наћи све парове (a, b) позитивних целих бројева таквих да се сваки остатак по модулу n појављује исти број пута на странама (не укључујући темена) правоугаоника са теменима $(0, 0), (a, 0), (a, b), (0, b)$ и сваки остатак по модулу n појављује исти број пута у унутрашњости овог правоугаоника.

Решење. Најпре, размотримо једноставни случај када је $n = 2$. Како унутрашњост правоугаоника мора имати паран број страна, јасно је да један од бројева a и b мора бити непаран. Ако је један од бројева a или b непаран онда су сви услови задовољени, па су решења у том случају сви парови (a, b) такви да бројеви a и b нису истовремено парни.
Размотримо сада случајеве када је $n > 2$. Нека је z примитиван n-ти корен јединице. Доделимо број z^{x+y} квадрату (i, j). Сума бројева на пољима која обухвата квадрате задатог износи нула, што можемо записати као

$$\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{j=1}^{b-1} z^{i+j} = 0.$$

Другачије, то записујемо као

$$\sum_{i=1}^{a-1}\sum_{j=1}^{b-1} z^{i+j} = z^2 \cdot \frac{z^{a-1}-1}{z-1}\cdot\frac{z^{b-1}-1}{z-1},$$

тако да је нужно један од бројева a или b конгруентан са 1 по модулу n. Симетрично, можемо закључити да је $a \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$. Како се сваки остатак по модулу појављује исти број пута на странама правоугаоника, закључујемо

$$(z^a + 1)\left(\sum_{j=1}^{b-1} z^j\right) + \left(z^b + 1\right)\left(\sum_{i=1}^{a-1} z^i\right) = 0.$$

Како је $a \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$, претходна једнакост постаје

$$(z+1)\left(\sum_{j=1}^{b-1} z^j\right) = 0.$$

Како је $n > 2$, онда је $z+1 \neq 0$ и $\sum_{j=1}^{b-1} z^j = 0$, као и $b \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$. За $a \equiv b \equiv 1 (\operatorname{mod} n)$, сви услови су задовољени, па следи да је ово решење у случају када је $n > 2$. ■

Пример 2.8 Правоугаоник Π издељен је на правоугаонике $\{\Pi_j\}_{j=1}^n$ са међусобно дисјунктним унутрашњостима, при чему сваки од датих правоугаоника Π_j има странице паралелне одговарајућим страницама почетног правоугаоника Π и има бар једну страницу целобројне дужине. Доказати да правоугаоник Π има бар једну страницу целобројне дужине.

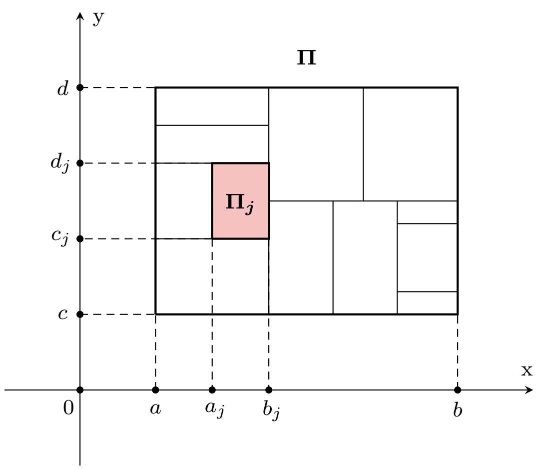
Решење. Правоугаоник Π можемо сместити у раван $\mathbb{R}^2$ тако да су му странице паралелне координатним осама. Тада важи

$$\Pi = [a, b] \times [c, d],$$

за неке $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Такође је

$$\Pi_j = [a_j, b_j] \times [c_j, d_j],$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$, где су a_j, b_j, c_j и d_j реални бројеви, будући да су странице сваког од датих правугаоника Π_j паралелне координатним осама.



Подела првоугаоника Π на правоугаонике Π_j у равни $\mathbb{R}^2$.

Сваки од правоугоника Π_j на које је издељен почетни правоугаоник Π, има неку од страница целобројне дужине. Према томе, за све $j = 1, 2, \ldots, n$, бар један од бројева $b_j - a_j$ и $d_j - c_j$, који представљају дужине страница правоугаоника Π_j, јесте цео број. Користећи раније изведено својство (1.2) добијамо да важи

$$\iint_{\Pi_j} e^{2\pi \mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_{a_j}^{b_j} e^{2\pi \mathrm{i}x}\,\mathrm{d}x\right) \cdot \left(\int_{c_j}^{d_j} e^{2\pi \mathrm{i}y}\,\mathrm{d}y\right) = 0,$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Након тога, налазимо

$$\left(\int_a^b e^{2\pi \mathrm{i} x}\,\mathrm{d}x\right)\cdot\left(\int_c^d e^{2\pi \mathrm{i} y}\,\mathrm{d}y\right) = \iint_{\Pi} e^{2\pi \mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{j=1}^{n}\iint_{\Pi_j} e^{2\pi \mathrm{i}(x+y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,$$

одакле, следи

$$\int_a^b e^{2\pi \mathrm{i} x}\,\mathrm{d}x = 0 \quad \text{или} \quad \int_c^d e^{2\pi \mathrm{i} y}\,\mathrm{d}y = 0.$$

У првом случају је $b - a \in \mathbb{Z}$, док у другом случају важи $d - c \in \mathbb{Z}$, при чему смо опет искористили својство (1.2). Стога, почетни правоугаоник Π има бар једну страницу целобројне дужине. ■

Глава 3

Проблеми пребројавања

Комплексни бројеви имају примену у решавању разних комбинаторних проблема пребројавања, што је основна тематика ове главе.

Пример 3.1 Одредити колико има природних бројева са $n \in \mathbb{N}$ цифара из скупа $\{2, 3, 7, 9\}$ који су дељиви са 3.

Решење. Нека је a_n, b_n и c_n број природних бројева са n цифара из скупа $\{2, 3, 7, 9\}$ који при дељењу са 3 дају остатак 0, 1 и 2 редом. Тада важи

$$a_n + b_n + c_n = 4^n.$$

Још претпоставимо да је $\xi = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{3}}$. Тада следи

$$\begin{aligned}
a_n + \xi b_n + \xi^2 c_n &= \sum_{x_1,\ldots,x_n \in \{2,3,7,9\}} \xi^{x_1+\ldots+x_n} \\
&= \sum_{j_1+j_2+j_3+j_4=n} \left(\xi^2\right)^{j_1} \left(\xi^3\right)^{j_2} \left(\xi^7\right)^{j_3} \left(\xi^9\right)^{j_4} \\
&= \left(\xi^2 + \xi^3 + \xi^7 + \xi^9\right)^n \\
&= \left(2 + \xi + \xi^2\right)^n \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Закључујемо да је $a_n - 1 + \xi b_n + \xi^2 c_n = 0$, па је $a_n - 1 + \xi b_n - (1 + \xi)\, c_n = 0$. Добијамо

$$a_n - 1 - c_n + \xi\,(b_n - c_n) = 0.$$

Када пређемо на имагинарни део добијамо

$$0 = \operatorname{Im}\left(a_n - 1 - c_n + \xi\,(b_n - c_n)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(b_n - c_n)\,.$$

Из претходног следи $b_n - c_n = 0$, па је и $a_n - 1 - c_n = 0$. Дакле

$$4^n = a_n + b_n + c_n = a_n + a_n - 1 + a_n - 1 = 3a_n - 2,$$

па је

$$a_n = \frac{4^n + 2}{3},$$

што је и требало одредити. ■

Пример 3.2 Нека је $n \in \mathbb{N}$.

(а) Израчунати

$$S_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}},$$

где је $j \in \mathbb{Z}$.

(б) Нека су $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ и

$$\widehat{z_j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} z_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}},$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Доказати да важи

$$z_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \widehat{z_k} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}},$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Поред тога, доказати да је

$$\sum_{j=1}^{n} |\widehat{z_j}|^2 = \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2$$

(в) Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$, при чему важи $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$. Доказати да је

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right) \cos \frac{2\pi}{n} \geq x_1 x_2 + x_2 x_3 + \ldots x_n x_1.$$

Решење. (а) На почетку, приметимо да у случају кад $n \mid j$ важи $e^{\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} = 1$ за све $k = 1, 2, \ldots, n$, па следи да је $S_{j,n} = n$. Даље, претпостављамо да $n \nmid j$, па следи да је

$$S_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}}\right)^k = e^{\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}} \cdot \frac{1 - e^{2\pi \mathrm{i} j}}{1 - e^{\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}}} = 0.$$

Коначно, добијамо да важи

$$S_{j,n} = \begin{cases} n, & \text{ако } n \mid j \\ 0, & \text{ако } n \nmid j \end{cases}.$$

(б) За све $j = 1, 2, \ldots, n$ важи

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \widehat{z_k} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} z_m e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} mk}{n}}\right) e^{\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} z_m \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k(j-m)}{n}} \\
&= \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{n} z_m S_{j-m,n}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\overset{(а)}{=} \frac{1}{n} \cdot z_j \cdot n \\ &= z_j. \end{aligned}$$

У доказивању смо искористили део под (а) и чињеницу да $n \mid j - m$ за све $j, m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ако и само ако је $j = m$. Још важи да је

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |\widehat{z_j}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \widehat{z_j}\overline{\widehat{z_j}} &= \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} z_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{m=1}^{n} \overline{z_m} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} mj}{n}} \right) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} z_k \overline{z_m} \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi \mathrm{i}(m-k)j}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{m=1}^{n} z_k \overline{z_m} S_{m-k,n} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} n z_k \overline{z_k} \\ &= \sum_{j=1}^{n} |z_j|^2. \end{aligned}$$

(в) Специјално, када је $n = 1$ тривијално доказујемо тврђење. Даље разматрамо ситуацију када је $n \geqslant 2$. Претпоставимо да је

$$x_{n+1} = x_1 \ \text{ и } \ y_j = x_j - x_{j+1},$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Из услова да је $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$, следи

$$\widehat{x_n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k = 0.$$

Искористићемо ознаке из дела под (б)

$$\widehat{x_j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} \ \text{ и } \ \widehat{y_j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} y_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}}$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n$. Такође, проверавамо да за све $j = 1, 2, \ldots, n$ важи да је

$$\begin{aligned} \widehat{y_j} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} y_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k+1})\, e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_k e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} kj}{n}} - e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{n} x_{k+1} e^{-\frac{2\pi \mathrm{i}(k+1)j}{n}} \\ &= \left(1 - e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}}\right) \widehat{x_j}. \end{aligned}$$

Још важи да је

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n} |y_j|^2 \overset{(б)}{=} \sum_{j=1}^{n} \left|1 - e^{\frac{2\pi \mathrm{i} j}{n}}\right|^2 |\widehat{x_j}|^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(2 - 2\cos\frac{2\pi j}{n}\right) |\widehat{x_j}|^2.$$

Како је $\widehat{x_n} = 0$, следи

$$\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\frac{2\pi j}{n}\right) |\widehat{x_j}|^2 .$$

Ако посматрамо функцију $\varphi(x) = \cos\frac{2\pi x}{n}$, где је $x \in (1, n-1]$, и њен први извод $\varphi'(x) = -\frac{2\pi}{n}\sin\frac{2\pi x}{n}$ уочићемо да она опада на интервалу $[1, n/2]$ и расте на интервалу $[n/2, n-1]$. Како је $\varphi(1) = \cos\frac{2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi(n-1)}{n} = \varphi(n-1)$, следи

$$\cos\frac{2\pi j}{n} = \varphi(j) \leq \cos\frac{2\pi}{n},$$

за све $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Закључујемо да је

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} y_j^2 = \sum_{j=1}^{n-1} \left(2 - 2\cos\frac{2\pi j}{n}\right) |\widehat{x_j}|^2 \quad &\geq \quad \left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \sum_{j=1}^{n-1} |\widehat{x_j}|^2 \\
&= \quad \left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} |\widehat{x_j}|^2 \\
&\overset{(б)}{=} \quad \left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} |x_j|^2 \\
&= \quad \left(2 - 2\cos\frac{2\pi}{n}\right) \sum_{j=1}^{n} x_j^2
\end{aligned}$$

па је

$$2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+1}\right) = \sum_{j=1}^{n} (x_j - x_{j+1})^2 = \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \geqslant 2\left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2 - \cos\frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right).$$

Из претходног следи

$$-2\sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+1} \geqslant -2\cos\frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2.$$

Када бисмо последњу неједнакост помножили са $-\frac{1}{2}$ променио би се знак и добили бисмо

$$\left(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2\right)\cos\frac{2\pi}{n} = \cos\frac{2\pi}{n}\sum_{j=1}^{n} x_j^2 \geq \sum_{j=1}^{n} x_j x_{j+1} = x_1x_2 + x_2x_3 + \ldots x_n x_1,$$

а то је и требало доказати. ■

Као што је већ показано кроз Пример 3.2 (а), за природан број n и цео број j важи

$$S_{j,n} = \sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2\pi i k j}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi i k j}{n}} = \begin{cases} n, & \text{ако } n \mid j \\ 0, & \text{ако } n \nmid j \end{cases}.$$

Претходно својство комплексних бројева можемо искористити у наредном примеру.

Пример 3.3 Нека је $n \in \mathbb{N}$, при чему је сваком елементу скупа $K = \{1, 2, \dots, n\}$ придружен тачно један од бројева 1, 2 или 3. Означимо са A број свих елемента $(a, b, c) \in K \times K \times K$, таквих да је $a + b + c$ дељив са n и да a, b и c имају исти придружени број. Такође, означимо са B број свих елеманата $(a, b, c) \in K \times K \times K$, таквих да је $a+b+c$ дељив са n и да a, b и c имају међусобно различите придружене бројеве. Доказати да важи

$$2A \geq B.$$

Решење. Означимо са $\varphi : K \to \{1, 2, 3\}$ задату функцију која сваком елементу скупа K придружује тачно један од бројева 1, 2 или 3. Такође, означимо са

$$f_j(z) = \sum_{a \in K, \varphi(a)=j} z^a,$$

где је $z \in \mathbb{C}$, а $j \in \{1, 2, 3\}$. Тада добијамо

$$\begin{aligned} A &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)=j} \frac{1}{n} S_{a+b+c,n} \\ &= \sum_{j=1}^{3} \sum_{\varphi(a)=\varphi(b)=\varphi(c)=j} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k(a+b+c)}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{3} f_j^3 \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}\right) \end{aligned}$$

и

$$B = \frac{6}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \prod_{j=1}^{3} f_j \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}\right).$$

Важи да је

$$2A - B = \frac{2}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=1}^{3} f_j^3 \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}\right) - 3 \prod_{j=1}^{3} f_j \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}\right) \right).$$

Ако посматрамо израз у загради добијамо

$$\sum_{j=1}^{3} f_j^3 - 3 \prod_{j=1}^{3} f_j = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^{3} f_j \right) \cdot \left((f_1 - f_2)^2 + (f_2 - f_3)^2 + (f_3 - f_1)^2 \right).$$

Још важи да је

$$\sum_{j=1}^{3} f_j^3 \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k}{n}}\right) = \sum_{a=1}^{n} e^{\frac{2\pi \mathrm{i} k a}{n}} = S_{k,n} = \begin{cases} 0, & \text{ако је } 1 \leq k \leq n-1 \\ n, & \text{ако је } k = 0 \end{cases}.$$

Дакле,

$$2A - B = (f_1(1) - f_2(1))^2 + (f_2(1) - f_3(1))^2 + (f_3(1) - f_1(1))^2 \geq 0,$$

а одатле следи да је $2A \geq B$. ■

Нека је p прост број и нека су $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ рационални бројеви, такви да важи

$$a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0,$$

при чему је

$$\varepsilon = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{p}} = \cos\frac{2\pi}{p} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{p}.$$

Тада мора бити

$$a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}.$$

Претходно познато својство користићемо у наредном задатку. Такође, укратко наводимо и доказ претходног својства. Наиме, како полиноми

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1} \ \text{ и } \ 1 + x + \ldots + x^{p-1},$$

имају заједнички корен ε, то они не могу бити узајамно прости и како је полином $1 + x + \ldots + x^{p-1}$ нерастављив над пољем $\mathbb{Q}$, то полином $a_0 + a_1 x + \ldots + a_{p-1}x^{p-1}$ мора бити дељив полиномом $1 + x + \ldots + x^{p-1}$, што је могуће једино у случају када је $a_0 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$.

Пример 3.4 Колико има n-тоцифрених бројева, чије су цифре из скупа $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$, а сума цифара је дељива са 7?

Решење. Нека је $a_n^{(k)}$ број природних бројева са n цифара из скупа $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$ који при дељењу са 7 дају остатак 0. Тада важи

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{6} a_n^{(k)}\varepsilon^k &= \sum_{x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1,3,4,6,7,9\}} \varepsilon^{x_1 + x_2 + \ldots + x_n} \\ &= \left(\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9\right)^n,\end{aligned}$$

при чему је

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{7} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{7}.$$

Знајући да је

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^6 = 0 \ \text{ и } \ \varepsilon^9 = \varepsilon^2,$$

закључујемо да се $\left(\varepsilon + \varepsilon^3 + \varepsilon^4 + \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^9\right)^n$ може свести на много једноставнији облик $\left(-\varepsilon^5\right)^n$. Специјално, ако претпоставимо да је n дељиво са 7, добијамо

$$\sum_{k=0}^{6} a_n^{(k)}\varepsilon^k = (-1)^n.$$

Остале случајеве разматрамо на сличан начин. Тада важи

$$a_n^{(0)} - (-1)^n = a_n^{(1)} = \ldots = a_n^{(6)}.$$

Ако је q заједничка вредност, онда је

$$7q = \sum_{k=0}^{6} a_n^{(k)} - (-1)^n = 6^n - (-1)^n,$$

јер тачно 6^n бројева имају n цифара које су из скупа $\{1, 3, 4, 6, 7, 9\}$. Дакле, у овом случају је

$$a_n^{(0)} = (-1)^n + \frac{6^n - (-1)^n}{7}.$$

Потпуно аналогно се разматрају остали случајеви. ■

Пример 3.5 Нека је $\{a_n\}_{n\geq 1}$ низ различитих, позитивних целих бројева таквих да важи $a_n \leq 4.999n$ за све $n \in \mathbb{N}$. Доказати да постоји бесконачно много бројева n, таквих да сума цифара броја a_n није дељива са 5. Да ли резултат остаје исти ако је услов $a_n \leq 5n$ за све $n \in \mathbb{N}$?

Решење. Нека је $s(x)$ сума цифара броја x и претпоставимо да за све $n > M$ важи $5 \mid s(a_n)$. Нека је n такав да важи

$$\left\lfloor \frac{10^n - 1}{4.999} \right\rfloor > M + 3,$$

и нека је A скуп првих 10^n ненегативних целих бројева. Бројеви a_k, при чему је

$$1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{10^n - 1}{4.999} \right\rfloor,$$

припадају скупу A, јер је $1 \leq a_k \leq 4.999k \leq 10^n - 1$. Следи да A садржи бар

$$\left\lfloor \frac{10^n - 1}{4.999} \right\rfloor - M,$$

бројева са сумом цифара дељивом са 5. Ако је i такав да важи $2 \leq \mathrm{i} \leq n$, онда можемо рећи да је x_j број елеманта скупа A, при чему скуп A садржи i цифара и сума цифара је конгруентна j по модулу 5. Тада важи

$$\begin{aligned} x_0 + x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon^3 + x_4\varepsilon^4 &= \sum_{0\leq a_2,\ldots,a_i\leq 9,\, 1\leq a_1\leq 9} \varepsilon^{a_1+a_2+\ldots+a_i} \\ &= \left(\varepsilon + \varepsilon^2 + \ldots + \varepsilon^9\right)\left(1 + \varepsilon + \ldots + \varepsilon^9\right)^{i-1} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ако се позовемо резултат наведен непосредно испред Примера 3.4 и искористимо чињеницу да је $x_0 + x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 9 \cdot 10^{i-1}$, добићемо највише

$$1 + \sum_{i=2}^{n} \frac{9 \cdot 10^{i-1}}{5} = 2 \cdot 10^{n-1} - 1$$

елемената скупа A са сумом цифара дељивом са 5. Дакле,

$$\left\lfloor \frac{10^n - 1}{4.999} \right\rfloor - M \leq 2 \cdot 10^{n-1} - 1$$

за довољно велико n, што је немогуће. Са друге стане, разматрамо случај када је $a_n \leq 5n$. Заправо, посматрамо низ почевши од 1, који садржи позитивне целе бројеве чија је сума цифара дељива са 5, у растућем редоследу. Докажимо да је $a_n < 5n$ за све n. За $n = 1, 2, 3$ важи $a_1 = 1, a_2 = 5, a_3 = 14$. Такође, међу било којих 10 узастпоних природних бројева, тачно два су чланови низа. Следи $a_{2n} < 10n$ и $a_{2n-1} = a_{2n} - 5 < 5(2n - 1)$. Тиме је пример завршен. ∎

Пример 3.6 Нека је $p > 2$ прост број и $A = \{1, 2, \ldots, 2p\}$. Наћи број подскупова скупа A таквих да садрже p елемената и чија је сума дељива са p.

Решење. Посматрамо $\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{p} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{p}$. Претпоставимо да је x_j број подскупова X скупа A таквих да задовољавају услове да је $|X| = p$ и $m(X) \equiv j \pmod p$. Тада закључујемо

$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j \varepsilon^j = \sum_{B\subset A, |B|=p} \varepsilon^{m(B)} = \sum_{1\leq c_1<c_2<\ldots<c_p\leq 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_p}.$$

Како је
$$X^p - 1 = (X-1)(X-\varepsilon)\ldots\left(X-\varepsilon^{p-1}\right),$$
из тога закључујемо да је

$$\sum_{1\leq c_1<c_2<\ldots<c_p\leq 2p} \varepsilon^{c_1+c_2+\ldots+c_p}$$

управо коефицијент од X^p у полиному $(X+\varepsilon)\left(X+\varepsilon^2\right)\ldots\left(X+\varepsilon^{2p}\right)$. Такође, налазимо да је
$$(X+\varepsilon)\left(X+\varepsilon^2\right)\ldots\left(X+\varepsilon^{2p}\right) = (X^p+1)^2.$$

Дакле,
$$\sum_{j=0}^{p-1} x_j \varepsilon^j = 2,$$

одакле следи да је $x_0 - 2 = x_1 = \ldots = x_{p-1}$. Обзиром да постоји $\binom{2p}{p}$ подскупова са p елемената, то значи да је

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_{p-1} = \binom{2p}{p}.$$

Коначно,
$$x_0 = 2 + \frac{1}{p}\left(\binom{2p}{p} - 2\right),$$

што је и требало одредити. ■

Пример 3.7 Нека је $f(n)$ број подскупова од $1, 2, 3, \ldots, n$ елемената чија је сума једнака $0 (\mathrm{mod}\, n)$. Празан скуп је такође укључен, имајући суму елемената једнаку нули. Доказати да је
$$f(n) = \frac{1}{n} \sum_{d|n,\ d \text{ непаран}} \varphi(d) 2^{\frac{1}{d}}.$$

Решење. Напоменимо да је φ Ојлерова фукнција и $\varphi(n)$ је заправо број оних елемената скупа $\{1, 2, \ldots, n\}$ који су узајамно прости са n. Нека је $\varepsilon = e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{n}}$. Претпоставимо да је
$$g(X) = \prod_{\mathrm{i}=1}^{n}\left(1 + X^{\mathrm{i}}\right) = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k.$$

Јасно је да је $f(n) = \sum_{j\geqslant 0} a_{jn}$. Специјално, у случају када је $g(\varepsilon^j)$ последња сума може се лако израчунати.
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(\varepsilon^j) = \sum_{j\geqslant 0} a_{jn}.$$

Сада можемо израчунати $g(\varepsilon^j)$. Ако је $d = \frac{n}{\text{НЗД}(j,n)}$, тада је

$$X^d - 1 = \left(X - \varepsilon^j\right)\left(X - \varepsilon^{2j}\right)\dots\left(X - \varepsilon^{dj}\right).$$

Такође,

$$\left(1 + \varepsilon^j\right)\left(1 + \varepsilon^{2j}\right)\dots\left(1 + \varepsilon^{dj}\right) = 2,$$

ако је d непаран или једнак нули. Из овога закључујемо да је $g(\varepsilon^j) = 2^{\frac{n}{d}}$, ако је d непаран или једнак нули. Постоји тачно $\varphi(d)$ вредности j за које је ε^j примитивни n-ти корен, па следи

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} g(\varepsilon^j) = \sum_{d|n,\ d \text{ непаран}} \varphi(d) 2^{\frac{n}{d}},$$

што је и требало показати. ■

Глава 4

Коначна Фуријеова анализа

У основи многих математичких резултата је идентитет

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{\frac{2i\pi k(a-b)}{n}} = 1_{a\equiv b (\mathrm{mod}\, n)},$$

за све целе бројеве a, b и све позитивне целе бројеве n, али то је само специјални случај шире теорије. Најпре ћемо видети ширу генерализацију кроз Фуријеову анализу на коначним комутативним групама. Ови резултати су нарочито корисни у бројним теоријама и комбинаторици. Са друге стране, они су прва компонента граничне слике, хармонијске анализе. За коначне комутативне групе ствари су много једноставније, обзиром да ту заобилазимо проблеме на које можемо наићи када радимо са хармонијском анализом (као што је $\mathbb{R}$, јединична кружница у скупу $\mathbb{C}$, или много теже, некомутативне и некомпактне тополошке групе). Чињеница да је група комутативна поједностављује нам проблем значајно.

Дуална група. Нека је G коначна комутативна група са n елемента. Желимо да дефинишемо Фуријеову трансформацију за функцију $f : G \to \mathbb{C}$. Позивањем на то да ако је f интеграбилна функција на скупу $\mathbb{R}$, са комплексним вредностима, њена Фуријеова трансформација је дефинисана са

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)e^{2i\pi xy}\,\mathrm{d}y.$$

Присуство карактера $y \to e^{2i\pi xy}$ ће бити водич до Фуријеове анализе на комутативним групама. Напоменимо да када радимо са комутативним групама, једна је обично означена са $+$ за интерне операције над G. Ово је прилично јасно када радимо са групама као што су $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, али дефинитивно није погодно за групе као што су $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Због тога, прећутно ћемо подразумевати да када радимо са апстрактном комутативном групом G, користићемо мултипликативну нотацију за интерне операције на групи, док ћемо за конкретне примере одабрати најинтуитивнију нотацију, у зависности од ситуације. Карактер G је морфизам за групу $\chi : G \to \mathbb{C}^*$. У зависности од тога да ли користимо адитивну или мултипликативну нотацију за интерне операције, карактер означава $\chi(x+y) = \chi(x)\cdot\chi(y)$, за све $x, y \in G$, односно $\chi(xy) = \chi(x)\cdot\chi(y)$. Карактер се назива тривијалан за $\chi(g) = 1$, за све $g \in G$. Нека је $\widehat{G}$ скуп свих карактера скупа G. То је очигледно мултипликативна група, важи да је $(\chi_1 \cdot \chi_2)(g) = \chi_1(g)\cdot\chi_2(g)$ и називамо је дуална група групе G. Приметимо, за све $\chi \in \widehat{G}$ и $g \in G$ важи $\chi(g)^n = \chi(g^n) = 1$, јер је $g^n = 1$ по Лагранжовој теореми.

Заправо, $|\chi(g)| = 1$ и $\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}$, за све $g \in G$ и $\chi \in \widehat{G}$. Идеја хармонијске анализе је да се све информације о функцији из G пресликавају на $\widehat{G}$.

Пример 4.1 Нека је $n \geqslant 2$ и $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Шта је дуална група групе G? Видели смо да је $\chi(1)$ је n-ти јединични корен. Као што је χ јединствено одређена са $\chi(1)$, тако је и G одређена јединицом. Обрнуто, ако је z n-ти јединични корен, $x \to z^x$ дефинише карактер групе G. Закључујемо да је $\widehat{G}$ изоморфна са $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, иако овај изоморфизам зависи од избора примитивног n-тог корена из јединице. Како је коначна комутативна група директан производ цикличних група, следи да за сваку коначну комутативну групу G њен дуал је изоморфизам за G. Још закључујемо да G и њена дуална група имају исти број елемената. Из овог запазања и задатка , ако је $x \in G - 1$, онда постоји $\chi \in \widehat{G}$ такав да важи $\chi(x) \neq 1$. Дакле, мапа $g \to (\chi \to \chi(g))$ је инјективни хомоморфизам $G \to \widehat{\widehat{G}}$, при чему је G подгрупа од $\widehat{\widehat{G}}$. Обзиром да је $|\widehat{\widehat{G}}| = |G|$, претходна инјекција мора бити изоморфизам. Коначно, G је канонски изоморфна са својим двоструким дуалом.

Теорема 4.1 *Ако је G коначна комутативна група, онда је $\widehat{G}$ комутативна група изоморфна са G и $\widehat{\widehat{G}}$ је канонски изоморфна са G.*

Доказ. Нека је $F(G, \mathbb{C})$ поље вектора свих мапа $f : G \to \mathbb{C}$. То је поље вектора димензије $|G|$, обзиром да мапа пресликава $F(G, \mathbb{C}) \to \mathbb{C}^{|G|}$, односно f у $(f(g))_{g \in G}$, што је очигледно линеарни изоморфизам. Ако претпоставимо да $f, g \in F(G, \mathbb{C})$, онда

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x)\overline{g(x)}$$

Лако је проверити да то произилази из поља вектора $F(G, \mathbb{C})$. ■

У наставку следи главна теорема Фуријеове анализе на скупу G.

Теорема 4.2 *Елементи скупа $\widehat{G}$ формирају ортонормалну базу над $F(G, \mathbb{C})$.*

Доказ. Поделићемо доказ на неколико корака.

Корак 1. Доказујемо да је $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 1_{\chi_1 = \chi_2}$, под условом да је $(\chi)_{\chi \in \widehat{G}}$ ортонормални скуп. Ако важи да је $\chi_1 = \chi_2$, све следи из чињенице да $\chi(g)$ има величину 1 за било који карактер g или χ. Закључујемо да случај када је $\chi = \frac{\chi_1}{\chi_2}$ није тривијалан. Тада

$$\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} \chi(x).$$

Нека је $S = \sum_{x \in G} \chi(x)$. Тада за све $g \in G$ важи

$$\chi(g)S = \sum_{x \in G} \chi(gx) = \sum_{x \in G} \chi(x) = S,$$

јер је $x \to gx$ пермутација од G. Обзиром да χ није тривијално, постоји g такво да је $\chi(g) \neq 1$ и из претходне једнакости добијамо $S = 0$ и $\langle \chi_1, \chi_2 \rangle = 0$.

Корак 2. Тврдимо да за све $x \in G$ важи $\sum_{x \in \widehat{G}} .\chi(x) = 0$. Исти аргумент као и у првом кораку показује да је то довољно да докаже да постоји $\chi \in \widehat{G}$ тако да је $\chi(x) \neq 1$. Није тривијално, али је већ образложено.

Корак 3. Обзиром да је $(\chi)_{\chi\in\widehat{G}}$ ортонормални скуп, он је линеарно независтан. Како има исту кардиналност као простор вектора $F(G,\mathbb{C})$, основна теорија простора вектора показује да мора бити основа од $F(G,\mathbb{C})$. Тиме је доказ завршен. ■

Теорема 4.3 *За било коју коначну комутативну групу G важе следеће релације*

(1) (релације ортогоналности) За све $\chi,\chi_1,\chi_2\in\widehat{G}$ и $g,h\in G$

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}\chi_1(x)\overline{\chi_2(x)}=1_{\chi_1=\chi_2},\ \frac{1}{|G|}\sum_{x\in\widehat{G}}\chi(g)\overline{\chi(h)}=1_{g=h}$$

(2) (Фуријеова инверзија) За све $f\in F(G,\mathbb{C})$ важи $f=\sum_{\chi\in\widehat{G}}\langle f,\chi\rangle\chi$.

(3) (順аншерелов идентитет) За све $f\in F(G,\mathbb{C})$ важи

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|f(x)|^2=\sum_{\chi\in\widehat{G}}|\langle f,\chi\rangle|^2.$$

Доказ. (1) Већ смо доказали приликом доказивања претходне теореме. (2) Према релацији ортогоналности, за било које $x\in G$ имамо да је

$$\left(\sum_{\chi}\langle f,\chi\rangle\cdot\chi\right)(x)=\frac{1}{|G|}\sum_{\chi}\chi(x)\sum_{y}f(y)\overline{\chi(y)}=\frac{1}{|G|}\sum_{y}f(y)\sum_{\chi}\chi(x/y)=f(x),$$

одакле следи решење. Користећи претходну теорему и корак број (2), можемо закључити

$$\frac{1}{|G|}\sum_{x\in G}|f(x)|^2=\langle f,f\rangle=\sum_{\chi_1}\sum_{\chi_2}\langle f,\chi_1\rangle\cdot\overline{\langle f,\chi_2\rangle}\cdot\langle\chi_1,\chi_2\rangle=\sum_{\chi\in\widehat{G}}|\langle f,\chi\rangle|^2,$$

одакле следи (3). ■

Додатно напоменимо да генерално посматрајући, важи

$$\langle f,g\rangle=\sum_{\chi\in\widehat{G}}\langle f,\chi\rangle\overline{\langle g,\chi\rangle}$$

за све $f,g\in F(G,\mathbb{C})$, што можемо закључити из било које адаптације доказа Планшереловог идентитета. Поред тога, користећи формулу класичне Фуријеове анализе аналогно следи

$$\widehat{f}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(y)e^{-iny}\,\mathrm{d}y.$$

Записујемо као $\widehat{f}(\chi)=\langle f,\chi\rangle$ и називамо га χ-Фуријеов коефицијент од f.

Случај некомутативних група. Претходне теореме могу се применити и у сличају када је група коначна, али некомутативна. Наиме, са циљем да применимо Фуријеову анализу на било којој коначној групи G, морамо најпре размотрити све комплексне, коначнодимензионе приказе групе G. Такав приказ се састоји од коначне димензије векторског поља V на ком група G делује линеарно, односно за сваки елемент $g\in G$ има аутоморфизам означен као g из V тако да важи $gh=g\circ h$. Лева страна једнакости представља аутомофризам придружен $gh \in G$, док десна страна једнакости представља композицију аутоморфизама. Практично, приказ групе G је морфизам $\rho : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, за неко $n \geq 1$. Овде је са $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ означена група матрица формата $n \times n$ чија је детерминанта различита од нуле. Прикази $\rho_1, \rho_2 : G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ називају се изоморфизми ако постоји $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ такво да важи $\rho_2(g) = P\rho_1(g)P^{-1}$ за све $g \in G$. У случају када је $n = 1$ називамо ρ карактером. Такво представљање векторског поља V назива се несводљиво ако ниједан одговарајући подпростор од V није стабилан под свим аутоморфизмима g, при чему је $g \in G$. На пример, карактер је несводљивог приказа ако уопште не постоји одговарају подпростор. Једини несводљиви приказ коначне комутативне групе су карактери, тако да ће нова теорија бити компатибилна са теоријом појашњеном у претходном поглављу. Да би се доказала претходна тврдња потребно је користити основне резултате линеарне алгебре, наводећи да свака комутативна фамилија ендоморфизама над коначнодимензионалним векторским просторима над алгебарски затвореним пољем има заједнички сопствени вектор. Дакле, ако је G комутативна група која несводљиво делује на V, постоји заједнички сопствени вектор v за све $g \in G$. Онда је $\mathbb{C}_v$ ненула подпростор од V стабилан за све $g \in G$ и мора бити $\mathbb{C}_v = V$, па следи да је V карактер. Према томе, имамо следећи елемнтаран резултат.

Теорема 4.4 *Било који коначнодимензионални приказ коначне групе V је сума несводљивих приказа, тако да постоје векторски подпростори $V_1, \ldots, V_k$ од V стабилни под G, што је несводљив приказ и такав да важи $V = \oplus_i V_i$.*

Улога дуалног $\widehat{G}$ од G у комутативном случају има скуп G несводљиве репрезентације. Испоставило се да је ово коначан скуп. Скуп мапа $F(G, \mathbb{C})$ је природно алгебра и изоморфизам групној алгебри $\mathbb{C}[G]$. То можемо јединствено записати као $\sum_{g \in G} a_g \cdot g$, при чему је $a_g \in \mathbb{C}$. Множење је дефинисано на следећи начин

$$\left(\sum_{g\in G} a_g \cdot g\right)\left(\sum_{g\in G} b_g \cdot g\right) = \sum_{g\in G}\left(\sum_{h_k=g} a_h b_k\right)\cdot g.$$

Сваки елемент из G заправо делује као множење са g. Наредна теорема сумира својства од $\mathbb{C}[G]$.

Теорема 4.5 *(1) $\widehat{G}$ је коначан скуп и $\mathbb{C}[G]$ је изоморфизам као приказ групе G у $\oplus_{V\in\widehat{G}} V$, при чему је $\oplus_{V\in\widehat{G}} V$ димензија од V, а $nV = V \oplus V \oplus \ldots \oplus V$, n пута. Заправо,*

$$|G| = \sum_{V\in\widehat{G}} (dimV)^2 .$$

(2) Центар од $\mathbb{C}[G]$ садржи све мапе $f : G \to \mathbb{C}$, такве да је $f(g) = f(hgh^{-1})$ за све $g, h \in G$. Димензија је еквивалентна са $|\widehat{G}|$ и са бројем конјугованих класа од G.

Дефинисали смо унутрашњи производ на $\mathbb{C}\,[G]$ и показали да карактери од G формирају ортонормалну базу над $\mathbb{C}\,[G]$ у случају комутативних група. У случају некомутативних група то је мало теже доказати. За $f_1, f_2 \in \mathbb{C}\,[G]$ дефинишемо

$$\langle f_1, f_2\rangle = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} f_1(g)\overline{f_2(g)}$$

За било који приказ $\rho : G \to GL_n(\mathbb{C})$ можемо придружити његов карактер. Карактер је елемент од $\mathbb{C}[G]$ и дефинисан је на следећи начин $\chi_\rho(g) = T_r(\rho(g))$. Следи главна теорема Фуријеове теорије на коначним групама.

Теорема 4.6 *(1) Ако су V_1 и V_2 прикази групе G такви да важи $\chi_{V_1} = \chi_{V_2}$ као елементи од $\mathbb{C}[G]$, онда су V_1 и V_2 изоморфизми (и обратно).*

(2) $(\chi_V)_{V\in\widehat{G}}$ је ортонормална база од центра $\mathbb{C}[G]$ за претходно дефинисан унутрашњи производ. Још важи да је приказ V несводљив ако и само ако важи да је $\langle\chi_V, \chi_V\rangle = 1$.

(3) Ако g, h припадају G, онда је $\sum_{V\in\widehat{G}} \chi_V(g)\overline{\chi_V(h)}$ еквивалентна кардиналности централизатора g у G ако су g, h конјугати у G и еквивалентна са нула иначе.

Конкретни примери. Нека је N цео број већи од 1 и нека је G група инвертибилних остатака, класа $\bmod N$, односно

$$G = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^*.$$

Карактер од G назива се Дирихлеов карактер модула N или само Дирихлеов карактер $\bmod N$. Означимо тај карактер са χ и нека је

$$\chi(n) = 1_{\text{НЗД}(n,N)=1} \cdot \chi(n)$$

за све целе бројеве n, разматрајући у овом случају N-периодичне функције. Ако d дели N и ако χ_d је карактер по модулу d, онда χ_d ствара карактер $\bmod N$ компоновајући га са мапом $(\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^*$. Карактер $\bmod N$ назива се примитивни ако се не добија на претходно поменути начин, за било који прави делилац d од N и било које χ_d. Практично, карактер $\chi \bmod N$ је примитиван ако и само ако за било који прави делилац d од N постоји $n \equiv 1 (\bmod d)$ такав да НЗД$(n, N) = 1$ и $\chi(n) \neq 1$. Размотримо сада шта се дешава када применимо апстрактну теорију. Нека је a цео број, узајамно прост са бројем N и нека је f мапа $f(n) = 1_{n\equiv a(\bmod N)}$. То је мапа на групи G, а из дефиниције за све карактере χ из G важи да је $\widehat{f}(\chi) = \overline{\chi(a)}$. Применом Фуријеове инверзне формуле добијамо

$$1_{n\equiv a(\bmod N)} = \frac{1}{\varphi(N)} \sum_{\chi} \overline{\chi(a)}\chi(n).$$

То је сума која обједињује све Дирихлеове карактере по модулу N. Ова једнакост важи за све n узајамно просте са N, а то је од кључног значаја за доказ Дирихлеове теореме којом ћемо се бавити у наставку.

Гаусова сума и Фуријеови коефицијенти Дирихлеових карактера. Сваком Дирихлеовом карактеру $\chi \bmod N$ придружујемо функцију која је N-периодична у скупу $\mathbb{Z}$ и дефинисани су као $\chi(n) = 1_{\text{НЗД}(n,N)=1} \cdot \chi(n)$. Свака функција која је N-периодична у скупу $\mathbb{Z}$ индукује мапу на скупу $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ и можемо посматрати њен Фуријеов коефицијент у односу на ову коначну комутативну групу. Фуријеов коефицијент мапе f на скупу $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ биће означен као

$$\widehat{f}(r) = \frac{1}{N} \sum_{x\in G} f(x) e^{-\frac{2i\pi rx}{N}},$$

обзиром да су карактери над $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ идентификовани са $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ (идентификујемо a и карактер $x \to e^{\frac{2i\pi ax}{N}}$). У наставку се бавимо коефицијентима када функција f долази из Дирихлеовог карактера.

Лема 4.1 *Нека је χ Дирихлеов карактер* $\operatorname{mod} N$.

(1) За било који број a који је узајамно прост са N важи

$$\widehat{\chi}(a) = \overline{\chi(a)}\widehat{\chi}(1).$$

(2) Ако је χ примитиван, онда је $\widehat{\chi}(a) = 0$ увек када је НЗД$(a, N) > 1$ и тада важи

$$|\widehat{\chi}(a)| = \frac{1}{\sqrt{N}},$$

за НЗД$(a, N) = 1$.

Доказ. (1) Како је $\widehat{\chi}(a) = 0$ увек када је НЗД$(a, N) > 1$ и тада важи

$$\widehat{\chi}(a) = \frac{1}{N}\sum_{x\in G}\chi(x)\zeta^{ax},$$

при чему је $\zeta = e^{-\frac{2i\pi}{N}}$. Обзиром да је $x \to ax$ пермутација од G, тада важи

$$\chi(a)\widehat{\chi}(a) = \frac{1}{N}\sum_{ax\in G}\chi(x)\zeta^{ax} = \frac{1}{N}\sum_{x\in G}\chi(x)\zeta^{x} = \widehat{\chi}(1),$$

и резултат следи из $|\chi(a)| = 1$.
(2) Претпоставимо да су $N = dv$ и $a = du$, при чему је $d > 1$ и НЗД$(u, v) = 1$. Нека је

$$\zeta = e^{-\frac{2i\pi u}{v}}$$

примитиван корен јединице реда v. Приметимо да је

$$\begin{aligned}
\widehat{\chi}(a) &= \frac{1}{N}\sum_{x (\operatorname{mod} N)}\chi(x)\zeta^{x}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{j=0}^{N-1}\chi(j)\zeta^{j}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{d-1}\sum_{j=0}^{v-1}\chi(j+kv)\zeta^{j}\\
&= \frac{1}{N}\sum_{j (\operatorname{mod} v)}\left(\sum_{k (\operatorname{mod} d)}\chi(j+kv)\right)\zeta^{j}.
\end{aligned}$$

За све j запажамо да се сума

$$S_j = \sum_{k (\operatorname{mod} d)}\chi(j+kv)$$

нулира. Следи да је χ примитиван, па постоји број $n \equiv 1 (\operatorname{mod} v)$ такав да је НЗД$(n, N) = 1$ и $\chi(n) \neq 1$. Још приметимо да је $(n(j + kv)(\operatorname{mod} N))_{k(\operatorname{mod} d)}$ пермутација од $(j + kv(\operatorname{mod} N))_{k(\operatorname{mod} d)}$. Дакле

$$\chi(n)S_j = \sum_{k (\operatorname{mod} d)}\chi(n(j+kv)) = \sum_{k (\operatorname{mod} d)}\chi(j+kv) = S_j.$$

Обзиром да је $\chi(n) \neq 1$, следи да је $S_j = 0$, а тиме смо доказали први део. Користећи Планшерелов идентитет за $\mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$ коначно добијамо

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi(N)}{N} &= \sum_{x (\operatorname{mod} N)} |\chi(x)|^2 \\
&= \sum_{a (\operatorname{mod} N)} |\widehat{\chi}(x)|^2 \\
&= \sum_{NZD(a,N)=1} |\overline{\chi(a)}\widehat{\chi}(1)|^2 \\
&= \varphi(N)|\widehat{\chi}(1)|^2.
\end{aligned}$$

Из последње једнакости добијамо да је $|\widehat{\chi}(1)|^2 = \frac{1}{\sqrt{N}}$. Користећи поново део (1) следи резултат. Тиме је доказ завршен. ■

Литература

[1] M. Aigner, G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Sixth Edition, Springer, Berlin, 2018.

[2] T. Andreescu, D. Andrica, *Complex numbers from A to ... Z*, Birkhäuser, Boston, MA, 2006.

[3] T. Andreescu, G. Dospinescu, *Problems from the Book*, XYZ press, 2008.

[4] T. Andreescu, G. Dospinescu, *Straight from the Book*, XYZ press, 2012.

[5] Б. Карапетровић, *Увод у комплексну анализу - збирка задатака*, Математички факултет, Београд, 2020.

Списак симбола

$\arg z$	аргумент комплексног броја z
$\mathbb{C}$	комплексна раван
$\mathbb{C}^{\times}$	$\mathbb{C} \setminus \{0\}$ пробушена комплексна раван
$\cos$	тригонометријска функција косинус у комплексној равни
$\exp$	експоненцијална функција у комплексној равни
i	имагинарна јединица
$\operatorname{Im} z$	имагинаран део комплексног броја z
$\mathbb{N}$	скуп природних бројева
$\mathbb{N}_0$	скуп $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{Q}$	скуп рационалних бројева
$\mathbb{R}$	скуп реалних бројева
$\mathbb{R}^2$	скуп свих уређених парова (x, y) са реалним координатама
$\operatorname{Re} z$	реалан део комплексног броја z
$\sin$	тригонометријска функција синус у комплексној равни
$\mathbb{Z}$	скуп целих бројева
$\lvert z \rvert$	модул комплексног броја z
$\overline{z}$	коњугат комплексног броја z