UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

Katarina Živković

HURVICOVA I FROBENIJUSOVA TEOREMA O REALNIM ALGEBRAMA

master rad

Beograd, 2022.

Mentor:

dr Aleksandar Lipkovski, redovan profesor

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Članovi komisije:

dr Marko Radovanović, vandredni profesor

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

dr Slavko Moconja, docent

Univerzitet u Beogradu, Matematički fakultet

Datum odbrane: *30.06.2022.*

Zahvalila bih se svom mentoru prof. dr. Aleksandru Lipkovskom, kao i članovima komisije prof. dr. Marku Radovanoviću i prof. dr. Slavku Moconji na korisnim sugestijama i savetima kako bi ovaj rad dobio na kvalitetu.

Sadržaj

1. UVOD

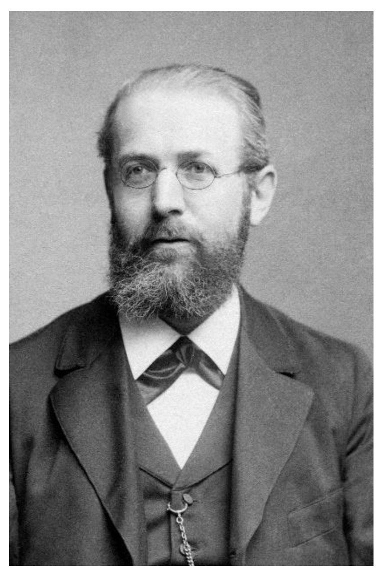
U matematici, hiperkompleksni broj tradicionalni je izraz za element konačnodimenzionalne algebre preko polja realnih brojeva. Proučavanje hiperkompleksnih brojeva krajem 19. veka čini osnovu moderne algebre i teorije reprezentacija grupa. Tada su definisani kvaternioni, bikvaternioni i oktonioni koji su postali ustaljeni pojmovi u matematičkoj literaturi, dodani realnim i kompleksnim brojevima. Koncept hiperkompleksnog broja obuhvatio ih je sve i "zahtevao" je odgovarajuću matematičku oblast koja će ih objasniti i klasifikovati.

Hurvic i Frobenijus dokazali su teoreme koje postavljaju ograničenje hiperkompleksnosti: Hurvicova teorema kaže da su konačnodimenzionalne realne algebre $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$, a Frobenijusova teorema kaže da su jedine realne asocijativne algebre s deljenjem $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$. Hiperkompleksni brojevi su postali odskočna daska za nastanak teorije grupa i u predstavljanju grupa. I tako je počela da nastaje moderna algebra ili apstraktna algebra.

Prema tome, apstraktna algebra je deo matematike čija je struktura nastala u devetnaestom veku i koja se bavi proučavanjem algebarskih struktura poput vektorskih prostora, tela, polja, prstena, grupa.

U radu su opisane Hurvicova i Frobenijusova teorema. Takođe su dati dokazi ove dve teoreme, kao i Zornova teorema koja predstavlja proširenje Frobenijusove teoreme. U radu ćemo moći da se upoznamo i podsetimo pojmova koji su korišćeni. Kroz kratki pregled kompleksnih brojeva, kvaterniona, kao i oktoniona čitalac će biti u prilici da sagleda istorijsku potrebu za nastajanjem ovih brojeva kao i njihove osobine, što će omogućiti bolje razumevanje dokaza ovih dveju teorema.

***Slika 1*:** Adolf Hurvic



***Slika 2*:** Ferdinand Frobenijus

2. KRATKO PODSEĆANJE POJMOVA IZ ALGEBRE

Ako je $\mathbb{Z}$ skup svih celih brojeva, njihovo uobičajeno sabiranje možemo shvatiti i kao jedno preslikavanje

$$(m,n) \to m+n, \quad \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$$

kojim se svakom paru celih brojeva pridružuje određen ceo broj. I slično za njihovo množenje $(m,n) \to m \cdot n$, pa u tom smislu govorimo i o dve *binarne* operacije u samom skupu $\mathbb{Z}$.

I uopšte, pod *binarnom operacijom* u nekom skupu A podrazumevamo svako preslikavanje

$$(a,b) \to a * b, \quad A^2 \to A$$

kojim se proizvoljnom paru (a,b) elemenata skupa A pridružuje određen element $a * b$ iz tog istog skupa A.

Definicija 2.1. Svaki uređen par $(S,*)$ skupa S i bilo koje binarne operacije $*$ u tom skupu zovemo i jednim grupoidom. Ako je ta operacija i komutativna, odnosno asocijativna, tada i za sam taj grupoid kažemo da je komutativan, odnosno asocijativan.

Definicija 2.2. Asocijativne grupoide zovemo i polugrupama.

Definicija 2.3. Za element e skupa M kažemo da je neutral polugrupe $(M,*)$ ili same binarne operacije $(a,b) \to a * b$ u tom skupu, ako za svako a iz M važi i $a * e = a$ i $e * a = a$.

Definicija 2.4. Polugrupe sa neutralom zovemo i monoidima. Drugim rečima to je svaka uređena trojka $(M,*,e)$ u kojoj je $*$ binarna operacija u skupu M i e neki fiksiran element iz M, takva da za svako a, b, c iz M važi:

1) $(a * b) * c = a * (b * c)$ (aksioma asocijativnosti)
2) $a * e = a, \quad e * a = a$ (aksioma neutralnog elementa)

Tada takođe kažemo i da je sam taj skup M jedan monoid sa binarnom operacijom $*$ i neutralom e.

Definicija 2.5. Za element a kažemo da je inverzibilan ili da ima inverz u monoidu ako postoji bar jedno a^- iz M za koje je

$$a * a^- = e \ \ i \ \ a^- * a = e.$$

Definicija 2.6. Monoide u kojima su svi elementi inverzibilni zovemo i grupama. Drugim rečima, svaka grupa je određena izvesnim skupom G i jednom binarnom operacijom u tom skupu, na primer

$$(a,b) \to a * b, \quad G^2 \to G$$

koja je asocijativna, koja ima neutral, na primer e, i takva da za svako a iz G postoji bar jedno, a time i tačno jedno a^- iz G za koje je $a * a^- = e \ \ i \ \ a^- * a = e$.[1]

Definicija 2.7. Za grupu G se kaže da je Abelova ili komutativna ako je njena binarna operacija komutativna $ab = ba, \forall a, b \in G$

Tvrđenje 2.1. U grupi G je:

1) $(a^{-1})^{-1} = a$
2) $(a * b)^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$

Definicija 2.8. Neka je $(G,*)$ grupa i $H \subset G$. Kažemo da je H podgrupa grupe G i pišemo $H < G$ ako je $*$ binarna operacija na H i $(H,*)$ grupa.[2]

Definicija 2.9. Prsten je neprazan skup R zajedno sa dve binarne operacije (obično označeno kao sabiranje $+$ i množenje $\cdot$) takve da:

1) $(R, +)$ je Abelova grupa
2) $(ab)c = a(bc)$ za sve $a, b, c \in R$ (asocijativnost množenja)
3) $a(b + c) = ab + ac$ i $(a + b)c = ac + bc$ (zakoni leve i desne distributivnosti)

Ako dodatno važi:

4) $ab = ba$ za sve $a. b \in R$

onda za R kažemo da je komutativni prsten.

Ako R sadrži element 1_R takav da je

5) $1_R a = a 1_R$ za sve $a \in R$

onda za R kažemo da je prsten s jedinicom.

Definicija 2.10. Prstene u kojima jedino nula nema inverz zovemo telima, a komutativna tela poljima.

---

[1]Kalajdžić Gojko, Linearna algebra, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011
[2]Lipkovski Aleksandar, Linearna algebra i analitička geometrija, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2020

3. OD IMAGINARNE JEDINICE DO KEJLIJEVIH BROJEVA

"Kompleksni broj je broj oblika $z = a + ib$, gde su a i b realni brojevi, a gde je $i^2 = -1$(imaginarna jedinica). Kompleksni broj ima algebarsku strukturu tela te sadrži sva rešenja algebarskih jednačina. Može se predstaviti kao tačka, odnosno kao vektor u Gausovoj ravni."[3]

„Svako znanje mora biti prepoznavanje... Aritmetika se mora otkrivati tačno u istom smislu u kojem je Kolumbo otkrio Zapadnu Indiju, i mi ništa više ne stvaramo brojeve nego što je on stvorio Indijance...Sve ono o čemu se može misliti postoji, a njegovo postojanje je preduslov, ne rezultat, da se o njemu može misliti...“[4] Tako je i sa otkrivanjem kompleksnih brojeva.

300 godina p. n. e EUKLID IZ ALEKSANDRIJE (323–283 p. n. e.) je bio antički matematičar poznat po svom delu "*Elementi*". On "ne dokazuje u svojoj knjizi direktno da koren iz dva nije racionalan broj. Međutim, dokaz ovog tvrđenja sledi iz stavova 5,6 i 9 desete knjige"[5]

"5. Samerljive veličine su u razmeri jedna prema drugoj kao broj prema broju...

6. Ako su dve veličine u razmeri jedna prema drugoj kao broj prema broju, one su samerljive...

9. Kvadrati na samerljivim dužima se nalaze u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju. I kvadrati koji se nalaze u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju imaju za strane samerljive duži. A kvadrati na nesamerljivim dužima se ne nalaze u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju. I kvadrati koji se nalaze u razmeri kvadratnog broja prema kvadratnom broju nemaju za strane samerljive duži."[6]

200 godina p.n.e. "Pojam negativnih brojeva javlja se po prvi put u kineskoj matematici. Naime, u starokineskoj knjizi "*K·iu-čang suan-šu*" (Devet knjiga matematičkih veština oko 200. godine pre nove ere, ali možda i mnogo ranije) iz perioda dinastije Han (202. p.n.e.-211.n.e.) negativni brojevi su zapisivani crnom bojom dok su pozitivni pisani crvenom bojom."[7]

50 HERON IZ ALEKSANDRIJE (10-70) je grčki matematičar i inženjer. Konstruisao je razne sprave na hidraulični i pneumatski pogon. Pisao je traktate iz matematike i mehanike."Prvi trag kvadratnog korena negativnog broja je nađen u "*Stereometriji*" Herona iz Aleksandrije (oko 50. godine)."[8]

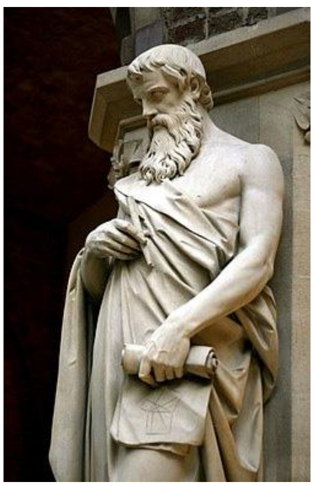
250 DIOFANT IZ ALEKSANDRIJE (oko 250 n.e.) je grčki matematičar koji je otkrio Diofantove jednačine. Bio je istaknuti matematičar svog vremena i deo njegovog rada je sačuvan u šest

[3]Abdelnor Jason, Matematički rečnik, Vuk Karadžić, Beograd,1983, str.60.
[4]Baker Stefan, Filozofija matematike, Nolit, Beograd, 1973, str.144.
[5] Lučić Zoran, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009, str.111.
[6] Euklid, Elementi, knjiga X, Srpska akademija nauka, Beograd, 1956, str.13,14 i15.
[7]Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006. str.148.
[8]Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006. str.148.

poglavlja Aritmetike koja su dospela do nas, i koja je bila verovatno najstariji sistemski traktat o algebri. "Iracionalne i negativne brojeve nije smatrao brojevima, pa ih nije razmatrao, a rešenja jednačina koja bi bila negativna ili iracionalna odbacivao je, postavljajući određene uslove za postojanje rešenja."[9]

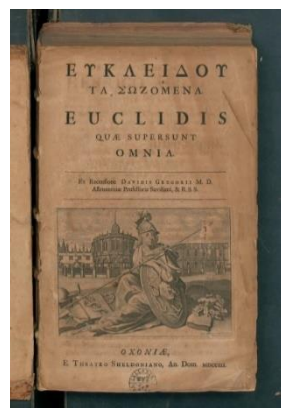
665 BRAHMAGUPTA (598-670) piše spis "*Bramaguptasidant*a" koji je najstariji poznati tekst koji nulu tretira kao broj i koji je "dao opštija pravila za rešavanje kvadratnih jednačina, koja je doveo i pod jednu zakonitu formu. Rešavao je jednačine oblika: $ax^2 + bx = c, a > 0$. Koeficijenti u jednačinama, osim "a", mogu biti i negativni brojevi. Njegova pravila su svojom suštinom identična savremenim."[10]

850 MAHAVIRA, indijski matematičar, pisac knjige "*Ganitasarasangraha*" (O suštini matematike) "je bio prvi koji je suštinski shvatio ovaj problem. U svom razmatranju negativnih brojeva on kaže da "*kako u prirodi stvari negativna količina ne može biti kvadrat, to ne postoji kvadratni koren negativnog broja*"[11]



Slika 3: Statua Euklida u muzeju prirodne istorije u Oksfordskom univerzitetu

Slika 4: Jedan od najstarijih sačuvanih fragmenata Euklidovih *Elemenata*



Slika 5: Euklidova knjiga iz 1707. godine

XIV vek JOVAN PEDIASIMA srpski matematičar.[12] "U nauci Vizantije isrednjevekovne Srbije bio je poznat pojam korena i kvadratne iracionalnosti. Od prvog vizantijskog matematičara

[9] Dadić Žarko,Povijest ideja i metoda u matematici i fizici,Školska knjiga, Zagreb,1992, str.56
[10]Nedović V. Slavko, Matematičko istorijski mozaik – Pogled u matematiku antike, Arhimedes, Beograd, 2004.str.170.
[11]Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006. str.148.
[12] Trifunović Dragan, Matematika Vizantije i srednjovekovne Srbije, Arhimedes, Beograd, 2004,

Prokola Diadoha (5.vek) pa do Jovana Pediasima (kraj 14 veka) korišćeni su rezultati o iracionalnosti u obimu koji je izložen u X knjizi Euklidovih Elemenata."[13]

1545 KARDANO ĐIROLAMO (Cardano Girolamo) (1501-1576) bio je italijanski lekar, matematičar, fizičar, astronom i kockar. Bavio se algebrom. U svom delu "Ars magna**"** izveo je formulu za rešenje kubne jednačine (Kardanova formula), iako je to, izgleda, pronašao Tartalja, i objavio. "On je definisao jednostavne zakone sa negativnim brojevima u svojoj knjizi "Ars Magna" (Velika veština), formulisao je pravilo "minus puta minus daje plus" kao nezavisno pravilo i nazvao negativne brojeve "fiktivni". Usvojio je simbol za negativni broj "m" (m je od latinske reči meno-minus)"[14]

1572 RAFAEL BOMBELI (1530-1580) je bio italijanski matematičar. Rođen u Bolonji i autor je rasprave o algebri i ličnost drugog stepena sa negativnom diskriminantom uspeo "da uvede fiktivne ili imaginarne brojeve. Ti brojevi su linearne kombinacije na telu R realnih brojeva jedinice "1" i druge jedinice više nego manje (*piu di meno*), naše i. Oni su dakle oblika a+bi. Tako se stidljivo pojavilo telo C kompleksnih brojeva."[15]

1629 ŽIRAR ALBERT (Albert Gilard) (1595-1632) je bio francuski matematičar koji je završio Univerzitet u Lajdenu. Bio je prvi koji je upotrebio skraćenice "*sin*", "*cos*" i "*tan*". Bio je prvi koji je otkrio pravila za sabiranje stepena korena bilo koje funkcije. "Žirar (1629) i Dekart (1637) određuju: ako je n stepen polinoma P(x), jednačina P(x)=0 ima tačno n korena. Kad se koreni ne mogu naznačiti, nazivaju se imaginarnim, prihvata se da se može računati sa njima kao sa realnim brojevima ali za to se ne daje nikakav dokaz."[16]

1637 RENE DEKART (Rene Descartes) (1596-1659) je francuski filozof, matematičar i naučnik čije je delo "*Geometrija*" postavilo osnove današnjoj analitičkoj geometriji. "Dekart je upotrebio metodu koordinatnog predstavljanja zavisnosti jedne veličine da bi povezao geometriju sa algebrom; geometrijska su se pitanja sada mogla formulisati, izračunavati i rešavati algebarskim sredstvima, a algebarske veze mogle su se ilustrovati geometrijski."[17] On je prvi skovao termin "imaginarni" za izraze koji uključuju kvadratne korene negativnih brojeva, i uzima njihovu pojavu kao znak da je problem nerešiv.

1747 LEONARD OJLER (Leonhard Euler) (1707-1783) je švajcarski matematičar i fizičar, koji je živeo u Berlinu i Sankt Peterburgu. Bio je jedan od najplodnih matematičara-sačuvano je oko 900 njegovih radova. Uspešno je definisao logoritme negativnih i kompleksnih brojeva, čime je proširio domen matematičke primene logoritama. Takođe je definisao eksponecijalnu funkciju za kompleksne brojeve i otkrio njenu vezu sa trigonometrijskim funkcijama. Za proizvoljan realan broj "t" prema Ojlerovoj formuli, važi jednakost: $e^{it} =$

[13] Perišić Pavle, Trifunović Dragan, Povesica o kvadratnom korenu, Beograd, 2002 str.34

[14] Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006. str.148.

[15] Stipanić Ernest, Putevima razvitka matematike, Beograd 1988, str.21.

[16] Stipanić Ernest, Putevima razvitka matematike, Beograd 1988, str.22

[17] Devide Vladimir, Matematika kroz kulture i epohe, Školska knjiga, Zagreb, 1979, str.144.

$cos\,(t)\; +\; i\,sin(t)$. Poseban slučaj te formule, koji se dobija za vrednost t = π poznat kao Ojlerov identitet.[18]

1831 **KARL FRIDRIH GAUS** (1777-1855) je nemački matematičar koji je dao doprinos u svim poljima matematike, a posebno u teoriji brojeva. "Gaus je dao prvi pravi dokaz fundamentalnog teorema algebre: svaka algebarska jednačina s kompleksnim koeficijentima ima barem jedan koren koji je kompleksan broj".[19] Gaus objavljuje svoju aritmetičku teoriju kompleksnih brojeva (izraz "kompleks" je skovao Gaus)[20], omogućavajući geometrijsku interpretaciju kompleksnih brojeva. Gaus stvara algebru kompleksnih brojeva i ukazuje na put do onoga što kasnije postaje poznato kao hiperkompleksni brojevi.

1843 **VILIJAM ROUAN HAMILTON** (William Rowan Hamilton) (1805-1865) je irski matematičar koji je uveo pojam kvaterniona. On dolazi do zaključka da ne može postojati sistem brojeva na prostoru od tri dimenzije, ali da može postojati na prostoru od četiri dimenzije koje je nazvao kvaternioni. Hamiltonovo otkriće kvaterniona izazvalo je uzbuđenje u matematičkom svetu. "Razlog je što su kvaternioni bili prva matematička apstrakcija koja nije motivisana ni sa čim što bi se moglo smatrati izučavanjem fizičkog sveta... S jedne strane kvaternioni su nešto neobično, imaju sva svojstva kompleksnih brojeva, izuzev što množenje nije komutativno. S druge strane Hamilton im je našao primenu u gotovo svim oblastima tadašnje matematike i fizike".[21] Koncept vektorskog prostora, kao i izraz vektor dugujemo Hamiltonu i on se odnosi na geometrijsko predstavljanje kvaterniona.

1878 **FERDINAND GEORGE FROBENIJUS** (1849-1917) pokazuje, koristeći algebarsku topologiju, da kvaternioni zadovoljavaju sva svojstva aritmetike osim komutativnog zakona množenja.

1896. **HURVIC ADOLF** (Hurwitz Adolf) (1859-1919) dokazuje da je svaka normirana algebra sa identitetom izomorfna bilo realnim, kompleksnim, kvaternionima ili Kejlijevim brojevima.

[18] Letić Duško,Sajfert Vjekoslav, Živković D. Katarina, Matematičke konstante e, γ, $-1^{1/2}$, Tehnički fakultet Mihailo Pupin u Zrenjaninu, Univerzitetu Novom Sadu, Zrenjanin 2013. str.75

[19] MilarDejvid, JanMilar, Džon Milar, MargaretMilar, Kembričkirečnik –Naučnici, Dereta, 2003.str.183.

[20] Stipanić Ernest, Putevima razvitka matematike, Beograd 1988, str.24

[21] Perović Miodrag, Istorija matematike 1-3, knjiga 3, Akademska misao, Beograd, 2019, str.1083.

4.KOMPLEKSNI BROJEVI

4.1. Istorija kompleksnih brojeva

”U istoriji matematike nema većeg iznenađenja od činjenice da su kompleksni brojevi shvaćeni i sintetički i analitički, pre negativnih brojeva”, istakao je u svojoj knjizi veliki matematičar E.T.Bel. Zvuči paradoksalno, ali prvi suštinski korak ka pravilnom shvatanju i konačnom usvajanju negativnih brojeva desio se tek kada su kompleksni brojevi stekli svoj matematički ”legitimitet”.

Kompleksni brojevi su se pojavili usled potrebe da se reše kubne jednačine, a ne kvadratne kao što je ustaljeno verovanje. Ovu tvrdnju možemo potkrepiti istorijskim činjenicama. Abu Abdula Muhamed bin Musa Al-Hvarizmi (780-850) u svom delu Algebra nudi rešenja za kvadratne jednačine različitih tipova. Ta rešenja se poklapaju sa rešenjima kvadratnih jednačina koje se izučavaju danas u školama, odnosno striktno su ograničena na realna rešenja. Dokazi su geometrijske prirode. Kao izvore najverovanije je koristio grčka i indijska matematička otkrića. Prema rečima G.J.Trumera, pod kalifom Al Mamunom, Al-Hvarizmi je postao član ”Kuće Mudrosti”, odnosno preteče modernih akademija nauka koja je bila osnovana u Bagdadu. Upravo je za Al-Mamuna Al-Huarizmi napisao svoj astronomski esej, a i sama Algebra je takođe posvećena ovom vladaru. Algebarske metode koje su već bile poznate arapima su u Italiju uvedene putem latinskog prevoda Algebre Al-Hvarizmija od strane Gerarda od Kremone (1114-1187), kao i kasnije kroz radove Leonarda iz Pize (1170-1250), poznatijeg kao Fibonači. Prvi koji je rešio jednačinu $x^3 + px = q$ je bio Scipione del Fero, profesor na Univerzitetu u Bolonji, koji je na ovom univerzitetu predavao do svoje smrti 1526. godine. Na svojoj samrtničkoj postelji, del Fero je formulu poverio svom učeniku Antoniju Mariji Fioreu. Fiore je izazvao Tartalju na matematičko takmičenje i noć pre tog okršaja, Tartalja je takođe ponovo otkrio tu formulu i pobedio na takmičenju. Nakon toga je Tartalja formulu (ali ne i njen dokaz) predočio Đerolamu Kardanu, koji se zakleo na tajnost. Znajući formulu (i Tartaljino uputstvo, formulisano u obliku pesme), Kardano je uspeo da rekonstruiše dokaz. Kasnije je Kardano saznao da je del Fero znao formulu i on je to potvrdio intervjuišući rođake koji su mu dali uvid u Ferove dokumente. Kardano je tada formule za sva tri slučaja $(x^3 + px = q; x^3 = px + q; x^3 + q = px)$ objavio u knjizi Ars Magna 1545. godine. Vredi pomenuti da je Kardano naveo del Fera kao prvog autora, i Tartalju kao nekoga ko je uspeo da kasnije dođe do formule nezavisno od njih dvojice.[22]

Imaginarne brojeve je definisao italijanski matematičar Rafael Bombeli 1572. godine. U to vreme smatrani su besmislenim, nimalo korisnim i bili odbacivani, kao nula svojevremeno. Njihovo uzdizanje desilo se u trenutku kada se pojavila potreba za definisanjem kvadratnog korena iz negativnog broja, jer do tada nije postojao ni jedan realan broj koji bi rešio taj problem. Bombeli je tada uveo nov broj – imaginarnu jedinicu.[23]

[22]Feher Siniša, Primena kompleksnih brojeva u analitičkoj geometriji, algebri i analizi, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2017

[23]https://nationalgeographic.rs/nauka/prirodne-nauke/a18306/najlepsi-brojevi-koji-su-promenili-svet-nauke.html

Aritmetiku kompleksnih brojeva u pravom smislu razvio je 1831. godine čuveni nemački matematičar Karl Fridrih Gaus (1777-1855). On je predstavio kompleksne brojeve kao tačke u ravni, našao za korisno da razlikuje pojam imaginarnog broja za ai i kompleksnog broja za $a+bi$; pri čemu je uveo termin kompleksnog broja. Ojler je 1748. uveo oznaku $i=\sqrt{-1}$; a francuski matematičar Ogisten Koši (1789-1857) uvodi 1821. nazive konjugovan par za $a+ib$ i $a-ib$ i moduo za veličinu $\sqrt{a^2+b^2}$, koju je Vajerštras zvao apsolutna vrednost i označavao sa $|a+ib|$.

Nezavisno od Gausa čuveni irski matematičar Vilijam Rouan Hamilton (1805-1865) je 1843. uveo aritmetiku kompleksnih brojeva zasnovanu na prikazu kompleksnog broja kao uređenog para realnih brojeva $x+iy=(x,y)$.[24]

Kao što je već pomenuto, pored polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva, ukazuje se potreba za njegovim proširenjem. Ta potreba izlazi već iz nemogućnosti rešavanja jednačina u polju $\mathbb{R}$**.** Naime, linearna jednačina $ax+b=c\ (a,b,c\in\mathbb{R}, a\neq 0)$ ima (jedinstveno) rešenje u $\mathbb{R}$, dok već kvadratna jednačina $x^2+1=0$ nema rešenja u $\mathbb{R}$. Ta situacija je analogna onoj gde se jednačina $x^2=2$ ne može razrešiti na skupu $\mathbb{Q}$, pa smo uveli simbol $\sqrt{2}$ i promatrali brojeve $r_1+r_2\sqrt{2}$, gde su $r_1, r_2 \in \mathbb{Q}$. Tako se uvodi simbol i kao jedno rešenje jednačine $x^2=-1$, pa se s tim "spoljašnjim" brojem povežu aritmetičke operacije iz $\mathbb{R}$ da se dobije veće polje, tj. proširenje polja $\mathbb{R}$. Pokazuje se da to proširenje $\mathbb{C}$ polja $\mathbb{R}$ realnih brojeva osim mnogih drugih važnih svojstava ima i to svojstvo da svaka algebarska jednačina oblika

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

gde su $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C}$ ima rešenje u $\mathbb{C}$.

Formalno se polje kompleksnih brojeva $\mathbb{C}$ najjednostavnije definiše kao skup $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ svih uređenih parova $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ realnih brojeva, pri čemu se govori da je x realni, a y imaginarni deo kompleksnog broja $(x,y)\in\mathbb{C}$.[25]

Značaj kompleksnog broja ne leži samo u algebri, već se kompleksan broj pokazao neophodan kako u mnogim granama matematike, na primer u teoriji funkcija, teoriji brojeva, geometriji i dr., tako i u primenjenoj matematici, specialno u hidrodinamici, elektricitetu, nebeskoj mehanici, optici i dr.[26]

[24]Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov, prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006
[25]Veljan Darko, Pavković Boris, Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
[26]Karamata Jovan, Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju, Naucna knjiga, Beograd, 1948

4.2. Definicija kompleksnih brojeva

Definicija 4.2.1. Skup svih kompleksnih brojeva u oznaci $\mathbb{C}$ je skup svih uređenih parova $z = (x, y)$ realnih brojeva za koje važe aksiome:

a) *Aksioma sabiranja:* $(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = ((x_1 + x_2), (y_1 + y_2))$
b) *Aksioma množenja:* $(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1x_2 - y_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$

Za uređene parove usvaja se aksioma $(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \wedge y_1 = y_2$.

Teorema 4.2.1. Za proizvoljne kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 važi da je:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
2) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
3) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
4) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
5) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

4.3. Neutralni element

Definicija 4.3.1. Kompleksan broj $(0,0)$ zove se kompleksna nula, a broj $(1,0)$ kompleksna jedinica.

Teorema 4.3.1. Za svaki kompleksan broj z važe jednakosti

1) $z + (0,0) = (0,0) + z = z$
2) $z \cdot (1,0) = (1,0) \cdot z = z$

Teorema 4.3.2. Neka su a i b dva kompleksna broja takva da za svaki kompleksan broj z važe jednakosti

$$z + a = z, \qquad z \cdot b = z.$$

Tada je $a = (0,0), b = (1,0)$.

Definicija 4.3.2. Broj $(0,0)$ zove se neutralni element za sabiranje kompleksnih brojeva, a broj $(1,0)$ neutralni element za množenje kompleksnih brojeva ili jedinični element ili jedinica.

4.4. Suprotan broj kompleksnog broja. Oduzimanje

Definicija 4.4.1. Suprotan broj proizvoljnog kompleksnog broja (z) u oznaci $(-z)$ je kompleksan broj takav da je:

$$(z) + (-z) = (0,0).$$

Teorema 4.4.1. Svaki kompleksan broj (x, y) ima tačno jedan suprotan broj.

Teorema 4.4.2. Ako su $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ dva proizvoljna kompleksna broja, postoji tačno jedan kompleksan broj z takav da je $z_1 + z = z_2$. Taj broj je jednak $z_2 + (-z_1)$, zove se razlika brojeva z_2 i z_1 i označava sa $z_2 - z_1$.

4.5. Recipročan broj kompleksnog broja. Deljenje.

Definicija 4.5.1. Recipročan broj kompleksnog broja $z \neq (0,0)$ u oznaci $\frac{1}{z}$, je takav kompleksan broj za koji je:

$$z \cdot \frac{1}{z} = (1,0).$$

Teorema 4.5.1. Svaki kompleksan broj $(x, y)(\neq (0,0))$ ima tačno jedan recipročan broj, naime $\left(\frac{x}{x^2+y^2}, -\frac{y}{x^2+y^2}\right)$.

Teorema 4.5.2. Ako su $z_1 = (x_1, y_1)$ i $z_2 = (x_2, y_2)$ dva proizvoljna kompleksna broja i $(x_1, y_1) \neq (0,0)$, tada postoji tačno jedan kompleksan broj $z = (x, y)$ takav da je $z_1 \cdot z = z_2$. Taj broj je jednak $z_2 \cdot \frac{1}{z_1}$, zove se količnik brojeva z_2 i z_1 i označava sa $\frac{z_2}{z_1}$.[27]

4.6. Polje kompleksnih brojeva

Teorema 4.6.1. Za proizvoljne kompleksne brojeve z_1, z_2, z_3 važi da je:

3) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
4) $z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$
5) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
6) $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$
7) $z_1 + (0,0) = z_1$
8) $z_1 \cdot (1,0) = z_1$

[27] Mitrinović S. Dragoslav, Kompleksna analiza, IRO „Građevinska knjiga“, Beograd, 1981

9) $z_1 + (-z_1) = 0$
10) $z_1 \cdot \frac{1}{z_1} = (1,0);\ z_1 \neq (0,0)$
11) $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$

Drugim rečima skup svih kompleksnih brojeva čini polje u odnosu na operacije $(+)$ i $(\cdot)$ to jest $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ je polje.

Definicija 4.6.1. Kompleksan broj $(0,1)$ zove se imaginarna jedinica i označavaćemo je sa i.

Definicija 4.6.2. Kompleksni brojevi se mogu pisati i na sledeći način:

$$(x, y) = (x, 0) + (0, y) = (x, 0) + (0, y) \cdot (0,1) = x + iy.$$

Obično se kompleksan broj $x + iy$ označava sa Z, to jest $Z = x + iy$. To je takozvani algebarski oblik kompleksnog broja. Realni broj x se naziva realni deo kompleksnog broja Z i označava se sa $x = ReZ$, a realni broj y naziva se imaginarni deo kompleksnog broja Z i označava se sa $y = ImZ$.

4.7. Konjugovano kompleksni brojevi. Modul i argument kompleksnog broja. Geometrijska interpretacija kompleksnog broja.

Definicija 4.7.1. Ako je $z = x + iy$ kompleksan broj $\bar{z} = x - iy$, je njemu konjugovano kompleksan broj.

Teorema 4.7.1. Konjugovanje kompleksnih brojeva je funkcija $z \to \bar{z}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ koja ima sledeća svojstva za svaki par $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

1) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
3) $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \qquad kad\ god\ je\ z_2 \neq 0$
4) $\overline{\overline{z_1}} = z_1$

Definicija 4.7.2. Neka je $z = x + iy$ kompleksan broj. Posmatrajmo izraz:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

odnosno

$$|z| = z\bar{z}.$$

$|z|$ se naziva moduo kompleksnog broja.

Teorema 4.7.2. Funkcija $z \longrightarrow |z|: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ima za svaki par $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ sledeća svojstva:

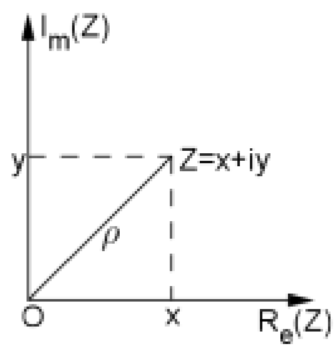
1) Jedini kompleksni broj kome je apsolutna vrednost jednaka 0 je baš 0. Svi ostali kompleksni brojevi imaju apsolutnu vrednost koja je veća od 0.
2) $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$,

3) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad čim\ je\ z_2 \neq 0$
4) ova nejednakost obično se zove nejednakost trougla

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

5) $|\bar{z}| = |z|$
6) $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$

Kompleksni brojevi su definisani kao uređeni parovi, pa se za njihovo predstavljanje može koristiti ravan sa pravouglim koordinatnim sistemom.



Slika 6: Kompleksna ravan

Definicija 4.7.3. Tačku Z sa Dekartovskim koordinatama (x, y) ćemo nazivati geometrijskom slikom kompleksnog broja $Z = (x, y)$ (ili $Z = x + iy$ u algebarskom obliku). Skup svih tačaka ravni koje identifikujemo sa kompleksnim brojevima nazivamo kompleksnom ravni, ili Gausovom kompleksnom ravni. Pošto se skup realnih brojeva pri ovakvoj identifikaciji preslikava na x osu nju nazivamo realnom osom, a skup čisto imaginanih kompleksnih brojeva (za koje je $ReZ = 0$) se preslikava na y osu, pa je zato nazivamo imaginarnom osom.

Definicija 4.7.4. Argument kompleksnog broja Z u oznaci arg (Z), merni je broj konveksnog orijentisanog ugla čiji je prvi krak pozitivni deo realne ose, a drugi poluprava OZ, gde je $0 = 0 + 0i$ kompleksan broj O.

Kako je merni broj konveksnog orijentisanog ugla uvek iz intervala$(-\pi, \pi]$, to jest arg $(Z) \in (-\pi, \pi]$, ekvivalentna definicija argumenta kompleksnog broja i bila: argument u oznaci arg (Z) je surjektivna funkcija koja preslikava skup nenula kompleksnih brojeva u interval realnih brojeva $(-\pi, \pi]$, odnosno:

$$f(Z) = \arg(Z) : \mathbb{C} \setminus \{0\} \rightarrow (-\pi, \pi]$$

definisana sa

$$\arg(Z) = \arg(x+iy) = \begin{cases} \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & za\ x > 0 \\ \pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & za\ x < 0 \wedge y \geq 0 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{y}\right) & za\ x < 0\ \wedge y < 0 \\ \frac{\pi}{2} & za\ x = 0 \wedge\ y > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & za\ x = 0 \wedge\ y < 0 \end{cases}$$

4.8. Eksponencijalni i trigonometrijski oblik kompleksnog broja

Ukoliko na *slici 6* definišemo ugao xOZ kao ugao φ tada iz osnovnih trigonometrijskih identiteta u pravouglom trouglu važe sledeće relacije:

$$y = r\sin\varphi$$

$$x = r\cos\varphi$$

Kada imamo da je z= $x + iy$, onda važi da je:

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

tako smo dobili takozvani trigonometrijski oblik kompleksnog broja.

Definicija 4.8.1. n-tim stepenom (n prirodan broj) broja z naziva se proizvod

$$\underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{n\ faktora} = z^n.$$

Ako broj z napišemo u trigonometrijskom obliku $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, tada s obzirom na prethodnu jednakost dobijamo

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

Ako u ovoj jednakosti umesto z stavimo $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, dobićemo Moavrovu formulu

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Na osnovu Ojlerove formule:

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x\,, x \in \mathbb{R}$$

dobija se takozvani eksponencijalni oblik kompleksnog broja[28]

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}.$$

[28] Deaux Roland, Introduction to the geometry of complex numbers, Dover publications inc., Mineola, New York, 2008

Generalno, ovime smo definisali kompleksnu eksponencijalnu funkciju, koja samo proširuje onu realnu

$$e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y).$$

U Ojlerovom zapisu kompleksnog broja, De Muavrova teorema glasi

$$z^n = (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi}.$$

Teorema 4.8.1. Polinomna jednačina stepena n

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = 0, \qquad a_n \neq 0$$

ima tačno n kompleksnih korena. [29]

Definicija 4.8.2. Broj ω zovemo n-ti koren kompleksnog broja z ako je $\omega^n = z$; tada pišemo $\omega = \sqrt[n]{z}$.

Da bismo izračunali ω, napišimo i broj z i broj ω u trigonometrijskom obliku:

$$z = r(\cos\varphi + i \sin\varphi), \qquad \omega = \rho(\cos\theta + i\sin\theta).$$

Sada umesto $\omega^n = z$ možemo pisati

$$\rho^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

a odavde je

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi,$$

gde je k proizvoljan ceo broj. Jednakost $\rho^n = r$ jednoznačno određuje pozitivan broj ρ, a iz $n\theta = \varphi + 2k\pi$ vidimo da je θ beskonačno, tj.

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta_k = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}.$$

Za $k = 0,1,2, \dots, n-1$ izjednakosti $\theta_k = \frac{\varphi+2k\pi}{n}$ dobijamo za θ_k vrednosti $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$, a sve ostale vrednosti za θ_k (za $k = n, n+1, \dots$) razlikuju se od ovih za umnožak od 2π.

Prema tome, s obzirom na te vrednosti za ρ i θ imamo samo n različitih n-tih korena $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{n-1}$ kompleksnog broja $z \neq 0$;[30]

$$\begin{cases} \omega_0 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right), \\ \omega_1 = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi}{n}\right), \\ \dots \\ \omega_{n-1} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2(n-1)\pi}{n}\right). \end{cases}$$

[29]https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/OldWeb/14_p.pdf
[30] Dajović Vojin, Teorija funckija kompleksne promenljive, Izdavačko informativni centar studenata, Beograd, 1977.

5. KONAČNODIMENZIONALNE REALNE DIVIZIONE ALGEBRE

Neka je K proizvoljno polje, a V vektorski K-prostor (prostor nad poljem K) konačne dimenzije n. Mi ćemo uglavnom uzimati da je $K = \mathbb{R}$ polje realnih brojeva, tj. V realan prostor. Kako je vektorski prostor V izomorfan sa vektorskim prostorom K^n n-torki $x = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ ($\xi_i \in K, i = 1, \dots, n$), ograničavaćemo se uglavnom na slučaj $V = K^n$, dakle, specijalno, na $V = \mathbb{R}^n$.

Vektorski prostor V nad poljem K zove se algebra nad K ili K-algebra ako je u V zadano moženje

$$V \times V \to V, (x, y) \to xy \ (x, y \in V)$$

koje predstavlja bilinearnu funkciju na $V \times V$, tj. ispunjava uslove

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha \cdot xz + \beta \cdot yz, x(\alpha y + \beta z) = \alpha \cdot xy + \beta \cdot xz$$

za svako $\alpha, \beta \in K$ i svako $x, y, z \in V$.

Od množenja u K-algebri V traži se da bude distributivno prema sabiranju tj.

$$x(y + z) = xy + xz \quad i \quad (x + y)z = xz + yz \ \ (x, y, z \in V)$$

i da je sa množenjem skalarima povezano uslovom

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y) \quad (\alpha \in K; x, y \in V).$$

K-algebra je ujedno vektorski prostor nad poljem K i prsten sa (zajedničkim sabiranjem i) vezom između množenja i množenja skalarima iskazanom poslednjim uslovom.

Dimenzija vektorskog prostora V zove se dimenzija K-algebre $(V,\cdot)$. Na množenje se ne postavlja obavezno uslov asocijativnosti

$$(xy)z = x(yz) \qquad (x, y, z \in V)$$

niti uslov komutativnosti

$$xy = yx \qquad (x, y \in V).$$

Ukoliko je u K-algebri V ispunjen uslov asocijativnosti, odnosno komutativnosti, tada se kaže da je ta algebra asocijativna, odnosno komutativna. Ako u K-algebri V postoji element e za koji važi $ex = xe = x$ ($x \in V$) tada je takav element e jedinstven i zove se jedinični element K-algebre V.

Teorema 5.1. Ako množenje u K-algebri V dimenzije 1 nije trivijalno, tj ne važi $xy = 0, (x, y \in V)$, tada algebra V ima jedinični element.

Algebra V koja zadovoljava takozvani Jakobijev identitet

$$x(yz) + y(zx) + z(xy) = 0 \quad (x, y, z \in V)$$

zove se Lijeva algebra.

Algebra V koja ispunjava uslove

$$x(xy) = x^2y, \quad (xy)y = xy^2, \quad (x, y \in V)$$

zove se alternativna algebra.

Svaka asocijativna algebra je sigurno allternativna, dok u svakoj alternativnoj algebri V asocijator

$$A(x, y, z) = (xy)z - x(yz) \qquad (x, y, z \in V)$$

predstavlja alternativnu funkciju tj. menja predznak kad bilo koja dva argumenta zamene mesta.

Teorema 5.2. Ako je V alternativna K-algebra, tada je funkcija $A(x, y, z)$ alternativna. Ukoliko je K polje karakteristike $char\ K \neq 2$, recimo $K = \mathbb{R}$, tada važi i obrnuto. U svakoj alternativnoj algebra V važi i $(xy)x = x(yx)(x, y \in V)$.

Uzimanjem raznih množenja u vektorskom prostoru V dobijamo razne K-algebre $\mathcal{A}$. Da u njima istaknemo množenje, pisaćemo $\mathcal{A} = (V,\cdot)$ ili $\mathcal{A} = (V,\times)$ itd.

Element x K-algebre $(V,\cdot)$ zove se delitelj nule ako za neki element $y \in V, y \neq 0$ važi $xy = 0$ ili $yx = 0$. K-algebra $V \neq \{0\}$ koja nema delitelja nule $\neq 0$ zove se algebra bez delitelja nule. $\mathbb{R}$-algebru zvaćemo realna algebra, a $\mathbb{C}$-algebru kompleksna algebra.

Svaka algebra V koja ispunjava uslov

$$x^m y^n = x^{m+n} \quad (x, y \in V, m, n \in \mathbb{N})$$

je stepeno asocijativna, kao i sve asocijativne algebre.

Ako je $(V,\cdot)$ K-algebra, a U potprostor vektorskog prostora V za koji važi $uv \in U$ $(u, v \in U)$ tada je $(U,\cdot)$ takođe K-algebra. U tom slučaju kaže se da je U podalgebra algebra V.

Ako su $(V,\cdot)$ i $(W,\cdot)$ K-algebre, tada se K-linearno preslikavanje $f: V \to W$ zove homomorfizam K-algebri ukoliko važi

$$f(xy) = f(x)f(y) \quad (x, y \in V).$$

Ako je K-linearno preslikavanje $f: V \to W$ vektorskih prostora mono-, epi-, izo-, endo-, odnosno automorfizam, onda se kaže da je homomorfizam $f: V \to W$ K-algebri mono-, epi-, izo-, endo-, odnosno automorfizam.

Još od Hamiltona algebre sa deljenjem imaju centralnu ulogu. Za K-algebru V kaže se da je diviziona algebra ako, za svako $a, b \in V, a \neq 0$, svaka od jednačina $ax = b$ i $ya = b$ ima jedinstveno rešenje u V.

Teorema 5.3. Diviziona K-algebra V nema delitelja nule. Konačnodimenzionalna K-algebra V koja nema delitelja nule je diviziona algebra.

Teorema 5.4. Svaka alternativna diviziona K-algebra V ima jedinični element. Svaka asocijativna diviziona K-algebra V predstavlja telo u odnosu na sabiranje i množenje.

Za realne algebre $\mathbb{R}$ i $\mathbb{C}$ u pripadnom vektorskom $\mathbb{R}$-prostoru V možemo definisati skalarni proizvod

$$V \times V \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \to \langle x, y \rangle$$

i pomoću njega Euklidovu normu

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}} \quad (x \in V)$$

i pri tome važi pravilo proizvoda

$$\|xy\| = \|x\| \cdot \|y\|.$$

Ovakve realne algebra zovu se kompozicione algebre.

Teorema 5.5. Kompoziciona algebra nema delitelja nule.

Hamilton je dugo pokušavao da po uzoru na realnu algebru $\mathbb{C}$ konstruiše trodimenzionalnu kompozicionu algebru. Taj trud morao je biti uzaludan s obzirom na sledeću teoremu za koju Hamilton nije znao.

Teorema 5.6. Svaka realna diviziona algebra neparne dimenzije s jediničnim elementom e izomorfna je sa $\mathbb{R}$, tj ima dimenziju 1.

Teorema 5.7. Za svaku kompleksnu divizionu algebru V konačne dimenzije sa jediničnim elementom važi $V = \mathbb{C}e$ tj $V \cong \mathbb{C}e$.[31]

Slika 7: Karl Gustav Jakob Jakobi

Slika 8: Vilijam Rouan Hamilton

[31]Perić Veselin, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Univerzitet Crne Gore, Štamparija OBOD, Cetinje, 2000

6. KVATERNIONI

6.1. Istorija kvaterniona

U matematici, kvaternioni predstavljaju proširenje kompleksnih brojeva. Njih je prvi opisao irski matematičar Vilijam Rouan Hamilton 1843. dok su važni prethodnici uključeni u ovaj rad: Ojlerovi identiteti o četiri kvadrata 1748. i Rodrigezova parametrizacija rotacije pomoću četiri tačke 1840. Gaus je takođe otkrio kvaternione 1819. ali je ovaj rad objavljen tek 1900.

Algebra kvaterniona uvedena od strane Hamiltona, nastala je kao ishod pokušaja da se trodimenzioni euklidski vektorski prostor izgradi kao sistem brojeva koji bi bio analogon odnosa kompleksnih brojeva i dvodimenzionalnog prostora. Naime, kako kompleksne brojeve možemo posmatrati kao tačke u ravni tako je on tražio način kako da to isto uradi i sa tačkama u prostoru. On je prvo pokušao da predstavi tačku sa koordinatama (a,b,c) u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu brojem $u = a + bi + cj$ i definisao je množenje takvih brojeva što bi bilo proširenje množenja kompleksnih brojeva. Ovo je značilo $i^2 = -1$ i $j^2 = -1$ (da bi se obezbedila restrikcija množenja u skupu kompleksnih brojeva za tačke (a,b,0) i (a,0,c)). Godinama pre toga znao je da sabira i množi trojke brojeva ali je uvek dolazio i stao kod problema deljenja. Nije znao kako da odredi količnik dve tačke u prostoru. Dalje, ako definišemo konjugat $\bar{u}$ od u, analogno kao skupu u $\mathbb{C}$, sa $\bar{u} = a - bi - cj$, dobijamo da važi

$$u\bar{u} = \bar{u}u = a^2 + b^2 + c^2 + (ij + ji)bc$$

i time $ij + ji = 0$, što pod pretpostavkom da je množenje komutativno daje $ij = ji = 0$. Hamilton je imao za cilj da definiše množenje sa osobinom da

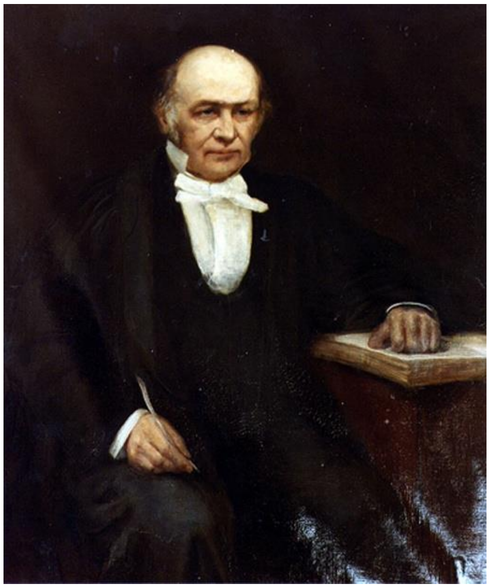
$$(a_1 + ib_1 + jc_1)(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC$$

gde je $A^2 + B^2 + C^2 = ({a_1}^2 + {b_1}^2 + {c_1}^2)({a_2}^2 + {b_2}^2 + {c_2}^2)$, ali ovo nije slučaj kada je $ij = ji = 0$. Bilo je stoga neophodno izostaviti komutativnost i pisati $ij = -ji = k$, čime proizvod dobija oblik $(a_1 + ib_1 + jc_1)\,(a_2 + ib_2 + jc_2) = A + iB + jC + kD.$ Na prvi pogled, Hamilton se nadao da će k moći da identifikuje sa elementom $\alpha + i\beta + j\gamma$ kome odgovara tačka (α, β, γ) u trodimenzionalnom prostoru. Ipak je na kraju došao do zaključka da je to nemoguće i da je četvrta dimenzija neophodna da bi se k predstavio tačkom. Zapravo, Hamilton je postigao za četiri dimenzije ono što se nadao da će postići za tri dimenzije. Ovo nam je dalo da danas možemo da razvijemo formalni račun algebre kvaterniona.

Rešenje problema konačno dolazi 1843. godine u Dablinu na njegovom putu do ”Irske kraljevske akademije” kada Hamilton dolazi do koncepta koji prethodi kvaternionima. Hamilton je bio zadovoljan ovim otkrićem pa je fundamentalne formule za kvaternione

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

odmah urezao u kamen mosta kojim je prolazio.[32] Hamilton je uređene četvorke brojeva sa ovim pravilima množenja nazvao kvaternionima i ostatak svog života on posvećuje njima. Čak je i osnovao školu "kvaternionista" koja je objavila nekoliko knjiga.



Slika 9: Vilijam Rouan Hamilton

Slika 10: Spomen ploča u Dablinu, Broom Bridge

Geometrijski, primer kvaterniona nalazimo pri proučavanju rotacije tela oko nepomične ose. Kada podelimo dva realna broja p i s gde je $s \neq 0$, dobijamo kao rezultat opet realan broj $q = ps^{-1}$ za koje važi $p = qs$. Po toj analogiji količnik dva vektora a i b koji u opštem slučaju nisu kolinearni bi trebala da bude neka veličina koju možemo označiti sa Q koja treba da zadovoljava jednakost $a = Qb$. Ovaj proizvod geometrijski predstavlja dilataciju (s obzirom da vektori a i b nisu istog inteziteta) i obrtanje vektora b za ugao $\theta = \measuredangle(a, b)$ do poklapanja sa a (pošto vektori a i b nisu kolinearni). Kako bi, dakle, definisali deljenje dva vektora, moramo prethodno definisati pomenutu veličinu Q. Hamilton ovu veličinu predstavlja u obliku zbira broja A i vektora v i kao takva ona nije ni vektor ni broj. Ali između vektora u prostoru i uređenih trojki realnih brojeva postoji izomorfizam, to je veličina Q određena sa četiri broja zbog čega ju je Hamilton nazvao kvaternion. Geometrijski, kvaternion se ne može predstaviti jer bi za tako nešto bilo potrebno imati četiri ose, jedna za broj i tri za vektor.

Kvaternioni počinju ubrzano da se koriste od kraja dvadesetog veka, primarno zbog njihove primene u opisivanju prostornih rotacija. Kvaternioni su se takođe pokazali korisni i u teoriji brojeva zbog njihove veze sa kvadratnim formama.[33]

[32] https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/node24.html
[33] Ilić Vladimir, Kvaternioni i njihova primena u geometriji, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2011

6.2. Kvaternioni. Osobine kvaterniona

Definicija 6.2.1. Skup kvaterniona je skup

$$\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a.b.c.d \in \mathbb{R}\}$$

gde su i, j, k međusobno različiti imaginarni elementi za koje važi

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1.$$

Kao što je već pomenuto kvaternion se može zapisati kao zbir broja (skalara) i vektora, stoga možemo izdvojiti dva posebna podskupa od kojih prvi može da sadrži sve kvaternione oblika $a1 + 0i + 0j + 0k$ koje nazivamo čisti skalari, a drugi podskup je skup svih kvaterniona oblika $0 \cdot 1 + bi + cj + dk$ koje nazivamo čisti kvaternioni ili čisti vektori, a često i imaginarni kvaternioni.

Definicija 6.2.2. Neka su $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Binarna operacija sabiranja + na skupu $\mathbb{H}$ definiše se na sledeći način

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k. \end{aligned}$$

Očito je da važi asocijativnost ove operacije jer se svodi na asocijativnost operacije sabiranja u skupu $\mathbb{R}$ te zaključujemo da je $(\mathbb{H}, +)$ polugrupa.

Neutralni element za sabiranje kvaterniona će biti $0 = 0 \cdot 1 + 0i + 0j + 0k$, što će nam dati strukturu monoida, a inverzni element kvaterniona $q = a1 + bi + cj + dk$ biće $-q = -a1 - bi - cj - dk$. Važi i komutativnost operacije sabiranja kvaterniona jer se svodi na komutativnost sabiranja u skupu $\mathbb{R}$, samim tim važi sledeća lema.

Lema 6.2.1. Algebarska struktura $(\mathbb{H}, +)$ gde je $+$ sabiranje u skupu $\mathbb{H}$ čini Abelovu grupu.

Tvrđenje 6.2.1. Algebra kvaterniona $\mathbb{H}$ je asocijativna diviziona algebra. Svaki element $x = a1 + bi + cj + dk$ te algebre zadovoljava jednačinu

$$x^2 = 2ax - (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)1.$$ [34]

6.3. Vektorski kvaternioni. Množenje skalarom i konjugovanje u algebri kvaterniona

Definicija 6.3.1. Operaciju $*: \mathbb{R} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ množenja kvaterniona skalarom iz polja $\mathbb{R}$ definišemo za $\alpha \in \mathbb{R}$ i $q \in \mathbb{H}$ sa:

$$\alpha * q = \alpha(a1 + bi + cj + dk) = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k.$$

[34] Perić Veselin, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Univerzitet Crne Gore, Štamparija OBOD, Cetinje, 2000

Teorema 6.3.1. Skup kvaterniona $\mathbb{H} = \{a1 + bi + cj + dk : a.b.c.d \in \mathbb{R}\}$ sa operacijom sabiranja $+$ i operacijom množenja kvaterniona skalarom * definisanim sa:

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k) + (a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k) \\ &= (a_1 + a_2)1 + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k \end{aligned}$$

$$\alpha * q = \alpha(a1 + bi + cj + dk) = (\alpha a)1 + (\alpha b)i + (\alpha c)j + (\alpha d)k$$

čini vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ i označavamo ga $(\mathbb{H}, +, *)$

Kako je prema definiciji svaki element skupa $\mathbb{H}$ oblika $a1 + bi + cj + dk$ za neke $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, moguće ga je prikazati kao jedinstvenu linearnu kombinaciju elemenata $1, i, j, k$ što znači da skup $\{1, i, j, k\}$ čini bazu za $\mathbb{H}$. Stoga je dimenzija ovog vektorskog prostora $dim(\mathbb{H}) = 4$.

Definicija 6.3.2. Neka su $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$. Binarna operacija množenja kvaterniona $\cdot$ definisana je na sledeći način:

$$\begin{aligned} q_1 \cdot q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) &+ (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i \\ &+ (a_1 c_2 - b_1 d_2 + c_1 a_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2 + d_1 a_2)k. \end{aligned}$$

Množenje kvaterniona biće asocijativno akko je množenje elemenata i, j, k asocijativno. Isto važi i za svojstvo komutativnosti. No, ako pogledamo Kejlijevu tablicu množenja baznih elemenata, primetićemo da ona nije simetrična u odnosu na glavnu dijagonalu pa množenje tih elemenata nije komutativno.

	i	j	k
i	-1	k	$-j$
j	$-k$	-1	i
k	j	$-i$	-1

Slika 11: *Kejlijeva tablica množenja baznih elemenata*

Stoga je množenje kvaterniona asocijativna operacija koja nije komutativna, te struktura $(\mathbb{H}, +)$ čini polugrupu. Neutralni element za množenje je kvaternion $q = 1 + 0i + 0j + 0k = 1$ stoga dobijamo i strukturu monoida.

Definicija 6.3.3. Za kvaternion $q = a1 + bi + cj + dk$ definišemo njegov konjugat

$$\bar{q} = a1 - bi - cj - dk.$$

Lema 6.3.1. Neka su $q_1 = a_1 1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ i q_2=$a_2 1 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$ dva proizvoljna kvaterniona iz skupa $\mathbb{H}$. Tada važi:

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \text{ i } \overline{q_1 \cdot q_2} = \overline{q_1} \cdot \overline{q_2}.$$

Neka je sada $q = a + bi + cj + dk$ proizvoljan kvaternion i neka je $\bar{q} = a - bi - cj - dk$ njemu konjugovani kvaternion. Njihov umnožak je

$$q \cdot \bar{q} = (a + bi + cj + dk) \cdot (a - bi - cj - dk) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$

što je nenegativan realan broj pa uvodimo sledeću definiciju.

6.4. Norma kvaterniona. Ostale osobine.

Definicija 6.4.1. Modul ili normu kvaterniona $q = a + bi + cj + dk$ označavamo s $|q|$ i definišemo kao

$$|q| = \sqrt{\bar{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Za kvaternion q kažemo da je jedinični kvaternion ako je $|q| = 1$.

Propozicija 6.4.1. (Multiplikativnost norme) Za sve $p, q \in \mathbb{H}$ važi $|pq| = |p||q|$.

Propozicija 6.4.2. Svaki nenula kvaternion $q \in \mathbb{H}$ je invertibilan i inverz je

$$q^{-1} = \frac{\bar{q}}{|q|^2}$$

i važi $|a^{-1}| = |a|^{-1}$

Lema 6.4.1. Algebarska struktura $(\mathbb{H}\backslash\{0\},\cdot)$, gde je $\mathbb{H}$ skup svih kvaterniona, a operacija $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona, čini grupu. Zbog nekomutativnosti operacije $\cdot$ u skupu $\mathbb{H}$, ta grupa nije Abelova.

Teorema 6.4.1. Algebarska struktura $(\mathbb{H},+,\cdot)$ gde je $+$ binarna operacija sabiranja kvaterniona i $\cdot$ binarna operacija množenja kvaterniona čini nekomutativni prsten s jedinicom.[35]

Tvrđenje 6.4.1. Algebra kvaterniona je kompoziciona algebra.

U matematici, Hurvicovi kvaternioni ili Hurvicov ceo broj je kvaternion čije su komponente ili svi celi brojevi ili sve polovine neparnih celih brojeva (ne smeju i jedni i drugi). Tako skup svih Hurvicovih kvaterniona je

$$\mathcal{H} = \left\{a1 + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \middle|\ ili\ a,b,c,d \in \mathbb{Z}\ ili\ a,b,c,d \in \mathbb{Z} + \frac{1}{2}\right\}.$$

Može se pokazati da je $\mathcal{H}$ zatvoren u odnosu na množenje i sabiranje kvaterniona i u odnosu na njih predstavlja jedan potprsten prstena svih kvaterniona $\mathbb{H}$.

[35] Stehlik Petra, Kvaternioni i prostorne rotacije, diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2020

Stav 6.4.1. Norma Hurvicovog kvaterniona je ceo broj.

Lipšicov kvaternion ili Lipšicov ceo broj je kvaternion čije su komponente celi brojevi. Skup svih Lipšicovih kvaterniona

$$\mathcal{L} = \{a + bi + cj + dk \in \mathbb{H} \mid a, b, c, d \in \mathbb{Z}\}$$

predstavlja potprsten prstena Hurvicovih kvaterniona $\mathcal{H}$. Lipšicova podgrupa kvaterniona $\mathcal{L}$ je indeksa 2 grupe $\mathcal{H}$.

Norma Hurvicovih kvaterniona, data sa $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ je uvek ceo broj. Po Lagranžovoj teoremi svaki nenegativan ceo broj može biti zapisan kao suma najviše četiri kvadrata. Tako, svaki nenegativan ceo broj je norma nekog Lipšicovog ili Hurvicovog kvaterniona. Hurvicov ceo broj je prost akko je njegova norma prost broj.[36]

Slika 12: Nils Abel

Slika 13: Rudolf Lipšic

[36]Vukomanović Milica, Kvaternionske algebre, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2019

7. OKTONIONI

7.1. Istorija oktoniona

Manje poznato je otkriće oktoniona od strane Hamiltonovog prijatelja sa koledža, Džona Grejvsa. Grejvsovo interesovanje za algebru je navelo Hamiltona da razmišlja o kompleksnim brojevima i tripletima na prvom mestu. Koliko sutradan nakon svoje sudbonosne šetnje, Hamilton je Grejvsu poslao pismo od 8 stranica u kojem je opisao kvaternione. Grejvs je odgovorio 26. oktobra pohvalivši Hamiltona na smelosti ideje, ali dodajući ″Još uvek postoji nešto u sistemu što me muči. Još nemam jasne stavove o tome u kojoj meri imamo slobodu da proizvoljno stvaramo imaginare i da ih obdarujemo natprirodnim svojstvima.″ I upitao je ″Ako sa svojom alhemijom možeš da napraviš tri funte zlata, zašto bi tu stao?″ Grejvs je tada počeo da radi na svom zlatu! Kasnije, 26. decembra pisao je Hamiltonu opisujući novu 8-dimenzionalnu algebru, koju je nazvao ″oktave″. Pokazao je da je to normirana algebra sa deljenjem i iskoristio to da izrazi proizvod dva zbira od osam savršenih kvadrata kao jedan zbir osam savršenih kvadrata (Teorema o osam kvadrata). U januaru 1844. Grejvs je poslao tri pisma Hamiltonu u kome je proširio svoje otkriće. Pokušao je da konstruiše 16-dimenzionalnu normiranu algebru sa deljenjem, ali je ″naišao na neočekivani problem″ i počeo da sumnja da je to moguće. Hamilton je ponudio da objavi Grejsovo otkriće, ali pošto je bio zauzet radom na kvaternionima, ostavljao je objavljivanje ovog Grejsovog otkrića po strani. U julu je pisao Grejvsu ističući da su oktonioni neasocijativni: ″$A \cdot BC = AB \cdot C = ABC$ ako su A,B,C kvaternioni, ali uopšte nije tako sa vašim oktavama″. U stvari, Hamilton je prvi izmislio termin ″asocijativno″ otprilike u to vreme, tako da su oktonioni igrali ulogu u razjašnjavanju važnosti ovog koncepta. U međuvremenu, Artur Kejli, koji je tek završio Kembridž, razmišljao je o kvaternionima još od kad je Hamilton objavio njihovo postojanje. Činilo se da traži odnose između kvaterniona i hipereliptičkih funkcija. U martu 1845. objavio je rad u časopisu ″Philosophical Magazine″ pod naslovom ″O Jakobijevim eliptičkim funkcijama, u odgovoru Rev. B. Bronvinu; i o kvaternionima″. Najveći deo ovog rada bio je pokušaj da se opovrgne članak koji ukazuje na greške u Kejlijevom radu na eliptičkim funkcijama. Takođe kao naknadnu misao, on se bavio kratkim opisom oktoniona. Međutim, ovaj rad je bio toliko pun grešaka da je izostavljen iz njegovog zbornika – osim dela o oktonionima. Uznemiren zbog toga što ga je Kejli preduhitrio sa objavljivanjem otkrića oktoniona, Grejvs je priložio postskriptum svom radu koji je trebalo da se pojavi u sledećem broju istog časopisa, rekavši da je znao za oktonione još od Božića 1843. Takođe i Hamilton je 14. juna 1847 poslao kratak dopis Irskoj kraljevskoj akademiji, u kojoj garantuje prioritet Grejsovog otkrića. Međutim bilo je prekasno: oktonioni su postali poznati kao ″Kejlijevi brojevi″. Da stvar bude još gora, Grejvs je kasnije otkrio da je njegovu teoremu o osam kvadrata već otkrio C.F. Degen 1818. Postavlja se pitanje, zašto su oktonioni čamili u takvoj tami u poređenju sa kvaternionima? Razlog je to što im je nedostajala jasna primena na geometriju i fiziku. Njihova relevantnost za geometriju bila je prilično nejasna sve do 1925. godine kada je Eli Kartan opisao ″trijalnost″ - simetriju između vektora i spinora u 8-dimenzionalnom euklidskom prostoru. Njihova potencijalna relevantnost za fiziku primećena je u radu Žordana, fon Nojmana i Vignera iz 1934. u osnovama kvantne mehanike. Međutim, pokušaji Žordana i drugih da primene oktanionsku kvantnu mehaniku na nuklearnu fiziku i fiziku čestica naišli su na mali uspeh. Rad u tom pravcu se nastavio prilično sporo sve do 1980-ih kada se shvatilo da oktonioni objašnjavaju neke neobične karakteristike teorije struna.

7.2. Definicija i osobine oktaniona

Najelementarniji način da se konstruišu oktonioni je da se da njihova tabela množenja. Oktonioni su 8-dimenzionalna algebra sa osnovom $1, e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7$ i njihovo množenje je dato u tabeli ispod koja opisuje rezultat množenja elementa u i-tom redu sa elementom u j-toj koloni.[37]

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_4	e_7	$-e_2$	e_6	$-e_5$	$-e_3$
e_2	$-e_4$	-1	e_5	e_1	$-e_3$	e_7	$-e_6$
e_3	$-e_7$	$-e_5$	-1	e_6	e_2	$-e_4$	e_1
e_4	e_2	$-e_1$	$-e_6$	-1	e_7	e_3	$-e_5$
e_5	$-e_6$	e_3	$-e_2$	$-e_7$	-1	e_1	e_4
e_6	e_5	$-e_7$	e_4	$-e_3$	$-e_1$	-1	e_2
e_7	e_3	e_6	$-e_1$	e_5	$-e_4$	$-e_2$	-1

Slika 14: Tablica množenja oktaniona

Sada možemo dati sledeću definiciju:

Definicija 7.2.1. Skup $\mathbb{O} = \{a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7 | a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots ,7\}$ pri čemu elementi $e_1, e_2, \dots , e_7$ zadovoljavaju sledeća svojstva:

- ${e_1}^2 = {e_2}^2 = \cdots = {e_7}^2 = -1, e_1e_2 = e_4$
- za $i \neq j$ važi $e_ie_j = -e_je_i$
- ako je $e_ie_j = e_k$, onda je $e_{i+1}e_{j+1} = e_{k+1}$ (indeksi se računaju kao elementi skupa $\mathbb{Z}_7$)
- ako je je $e_ie_j = e_k$, onda je $e_{2i}e_{2j} = e_{2k}$ (indeksi se računaju kao elementi skupa $\mathbb{Z}_7$)

naziva se skup oktava (oktoniona).

[37]Baez John C., The Octonions, Department of Mathematics, University of California, 2001

Definicija 7.2.2. Neka je $p \in \mathbb{O}, p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7$. Realan broj a_0 naziva se realni deo oktave p i označava se sa $\Re(p)$. Oktava $a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7$ naziva se imaginarni deo oktave p i označava se sa $\Im(p)$.

Definicija 7.2.3. Oktava oblika $p = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7$ naziva se imaginarna oktava. Skup

$$\Im(\mathbb{O}) = \{a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7 | a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \dots ,7\}$$

naziva se skup imaginarnih oktava.

Teorema 7.2.1. Algebra $\mathbb{O}$ je alternativna diviziona algebra.

Teorema 7.2.2. (Teorema o osam kvadrata) Za realne brojeve $a_1, a_2, \dots , a_8$ i $b_1, b_2, \dots , b_8$ važi

$$\begin{aligned}
&({a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_8}^2)({b_1}^2 + {b_2}^2 + \cdots + {b_8}^2)\\
&\qquad = (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4 - a_5b_5 - a_6b_6 - a_7b_7 - a_8b_8)^2\\
&\qquad + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3 + a_5b_6 - a_6b_5 - a_7b_8 + a_8b_7)^2\\
&\qquad + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2 + a_5b_7 + a_6b_8 - a_7b_5 - a_8b_6)^2\\
&\qquad + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1 + a_5b_8 - a_6b_7 + a_7b_6 - a_8b_6)^2\\
&\qquad + (a_1b_5 - a_2b_6 - a_3b_7 - a_4b_8 + a_5b_1 + a_6b_2 + a_7b_3 + a_8b_4)^2\\
&\qquad + (a_1b_6 + a_2b_5 - a_3b_8 + a_4b_7 - a_5b_2 + a_6b_1 - a_7b_4 + a_8b_3)^2\\
&\qquad + (a_1b_7 + a_2b_8 + a_3b_5 - a_4b_6 - a_5b_3 + a_6b_4 + a_7b_1 - a_8b_2)^2\\
&\qquad + (a_1b_8 - a_2b_7 + a_3b_6 + a_4b_5 - a_5b_4 - a_6b_3 + a_7b_2 + a_8b_1)^2.
\end{aligned}$$

Dokaz ove teoreme je pravolinijski.[38]

7.3. Kejli-Diksonova konstrukcija

Kejli-Diksonova konstrukcija se sastoji u tome da, počevši od neke algebre sa konjugovanjem $\mathbb{A}_i$ dobijemo novu algebru $\mathbb{A}_{i+1}$ čiji su elementi parovi iz $\mathbb{A}_i$ tj važi $\mathbb{A}_{i+1} = \mathbb{A}_i \oplus \mathbb{A}_i$. Uz to, preslikavanje koje nekom elementu $a \in \mathbb{A}_i$ pridružuje element $(a, 0) \in \mathbb{A}_{i+1}$ je injektivno, pa se element a može identifikovati sa $(a, 0)$. Specijalno ako je 1 jedinica u algebri $\mathbb{A}_i$ onda je $(1,0)$ jedinica u algebri $\mathbb{A}_{i+1}$. Ako sa ϵ označimo element $\epsilon = (0,1), 1 \in \mathbb{A}_i$, tada se svaki element $(a, b) \in \mathbb{A}_{i+1}$ može zapisati kao $a + b\epsilon$ jer je:

$$a + b\epsilon = (a, 0) + (b, 0)(0,1) = (a, 0) + (0, b) = (a, b).$$

Važi jednakost

$$a(b\epsilon) = (a, 0)(b, 0) = (0, ba) = (ba)\epsilon$$

a sličnim računom se pokazuje da važi i $(a\epsilon)b = (a\bar{b})\epsilon$, kao i $(a\epsilon)(b\epsilon) = -\bar{b}a$, pa je množenje elemenata novodobijene algebre $\mathbb{A}_{i+1}$ predstavljenih u obliku $a + b\epsilon$, $a, b \in \mathbb{A}_i$ potpuno određeno. Takođe, iz jednakosti

[38] Perić Veselin, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Univerzitet Crne Gore, Štamparija OBOD, Cetinje, 2000

$$\bar{a} - b\epsilon = (\bar{a}, 0) - (b, 0)(0,1) = (\bar{a}, 0) - (0, b) = (\bar{a}, -b)$$

zaključujemo da je jednakošću

$$\overline{a + b\epsilon} = \bar{a} - b\epsilon$$

zadato konjugovanje na algebri $\mathbb{A}_{i+1}$.

Pre nego što uvedemo sledećih nekoliko stavova uvešćemo definiciju metričke i normirane algebre.

Definicija 7.3.1. Algebru sa jedinicom A nad poljem $\mathbb{R}$ nazivamo *metričkom algebrom* ako je na njoj definisano konjugovanje $a \to \bar{a}$ tako da za svako $a \in A$ element $a\bar{a}$ pripada prostoru $\mathbb{R}$ (tačnije podprostoru $\mathbb{R} \cdot 1$) i za $a \neq 0$ važi $a\bar{a} > 0$.

Definicija 7.3.2. Konačnodimenziona algebra A, istovremeno i euklidski prostor (ali ne obavezno i metrička algebra), naziva se *normirana algebra* ako je:[39]

$$|ab| = |a| \cdot |b|, a, b \in A.$$

Sledećih nekoliko stavova govori o osobinama algebri dobijenih Kejli-Diksonovom konstrukcijom:

Stav 7.3.1. Ako je $\mathbb{A}_i$ metrička onda je i $\mathbb{A}_{i+1}$ metrička.

Stav 7.3.2. Ako je $\mathbb{A}_i$ realna onda $\mathbb{A}_{i+1}$ nije realna algebra.

Stav 7.3.3. $\mathbb{A}_i$ je realna akko je $\mathbb{A}_{i+1}$ komutativna.

Stav 7.3.4. $\mathbb{A}_i$ je komutativna i asocijativna akko je $\mathbb{A}_{i+1}$ asocijativna.

Stav 7.3.5.$\mathbb{A}_i$ je asocijativna i metrička akko je $\mathbb{A}_{i+1}$ alternativna.

Sada ćemo primeniti Kejli-Diksonovu konstrukciju počevši od realnih brojeva, tj. označićemo $\mathbb{A}_0 = \mathbb{R}$. Formiramo algebru $\mathbb{A}_1 = \mathbb{A}_0 \oplus \mathbb{A}_0 = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} = \mathbb{C}$. Kako je $\mathbb{R}$ realna algebra, prema Stavu 7.3.2 algebra $\mathbb{C}$ nije realna, a prema Stavu 7.3.3 $\mathbb{C}$ je takođe i komutativna algebra. Takođe kako je $\mathbb{R}$ komutativna i asocijativna algebra prema Stavu 7.3.4 sledi da je $\mathbb{C}$ asocijativna algebra. Element (1,0) je jedinica u $\mathbb{C}$, a za element $\epsilon = (0,1) = i$ važi $i^2 = -1$, pa se na osnovu jednakosti $a + b\epsilon = (a, b)$ svaki element $(a, b) \in \mathbb{C}$ može zapisati kao $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$.

Sada ponavljamo proces i formiramo algebru $\mathbb{A}_2 = \mathbb{A}_1 \oplus \mathbb{A}_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C} = \mathbb{H}$. Elementi algebre $\mathbb{H}$ su dakle, parovi kompleksnih brojeva, tj. neki element $q \in \mathbb{H}$ ima oblik $q = (z_1, z_2), z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pošto $\mathbb{C}$ nije realna algebra, prema Stavu 7.3.3 množenje u $\mathbb{H}$ nije komutativno. Kako je množenje u $\mathbb{C}$ komutativno i asocijativno, onda je prema Stavu 7.3.4 množenje u $\mathbb{H}$ asocijativno. Ako je sa 1 označena jedinica u $\mathbb{C}$, onda je kvaternion (1,0) jedinica u $\mathbb{H}$, a $\epsilon = (0,1)$. Na osnovu jednakosti $a + b\epsilon = (a, b)$, element $q \in \mathbb{H}$ se može zapisati kao $q = z_1 + z_2\epsilon$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Ako je $z_1 = a + bi, z_2 = c + di$ onda je

$$q = a + bi + (c + di)\epsilon = a + bi + c\epsilon + di\epsilon$$

i ako označimo $\epsilon = j$ i $i\epsilon = k$ dobijamo

[39] http://alas.matf.bg.ac.rs/~vsrdjan/files/g_2.pdf

$$q = a + bi + cj + dk, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$$

što upravo predstavlja oblik kvaterniona koji smo koristili u samoj definiciji kvaterniona.

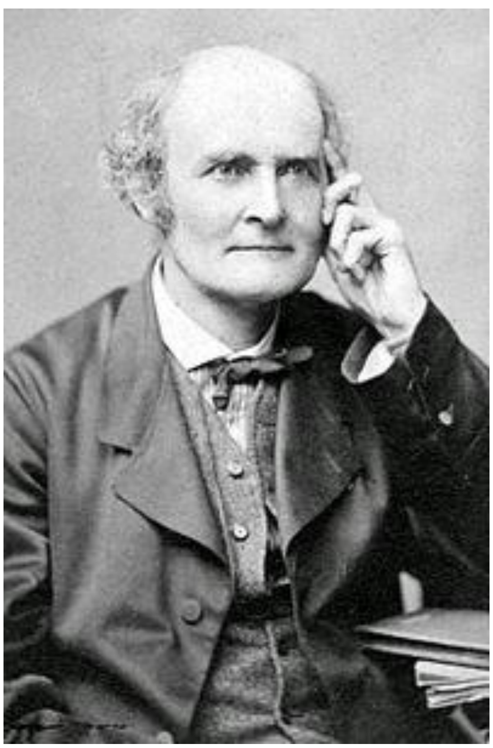
Proces se nastavlja i formiramo algebru $\mathbb{A}_3 = \mathbb{A}_2 \oplus \mathbb{A}_2 = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H} = \mathbb{O}$. Elementi algebre $\mathbb{O}$ su parovi kvaterniona. Kako je množenje u $\mathbb{H}$ asocijativno prema Stavu 7.3.5, množenje u $\mathbb{O}$ je alternativno, ali nije ni asocijativno ni komutativno. Na sličan način kao do sada pokazuje se da se svaki element $p \in \mathbb{O}$ može predstaviti kao

$$p = a_0 + a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_7e_7, \;\; a_i \in \mathbb{R}, i = 1,2, \ldots, 7$$

što predstavlja oblik oktoniona koji smo koristili u definiciji oktoniona.

Teorema 7.3.1. Algebra oktava je normirana algebra.

Sledeći korak u Kejli-Diksonovom procesu je formiranje algebre čiji su elementi parovi oktava. Analognim postupkom dobija se algebra dimenzije 16 čiji se elementi nazivaju sedenioni, a skup svih sedeniona označava slovom $\mathbb{S}$. Međutim, algebarska sedeniona ima delitelje nule, tj. nije algebra sa deljenjem, samim tim nije ni normirana algebra.[40]



Slika 15: Artut Kejli

Slika 16: Leonard Eugen Dikson

[40]Stojanov Stefan, Hiperkompleksni sistemi i geometrija, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2018

8. HURVICOVA TEOREMA

8.1. Adolf Hurvic

Adolf Hurvic (Adolf Hurwitz) (1859 -1919) je bio nemački matematičar koji je radio na algebri, analizi, geometriji i teoriji brojeva. Rođen je u jevrejskoj porodici u Hildestamu, u to vreme u kraljevini Hanover. Njegov otac Salomon posedovao je ručnu tkaonicu, koja je obezbeđivala skromni prihod za izdržavanje porodice.

Hurvic se upisuje 1868. godine u poznatu i prestižnu državnu gimnaziju "Andreanum" (postojanje gimnazije se pominje u dokumentima još 1225. godine) u Hildeshajmu. Tada je u gimnaziji predavao i Herman Šubert (1848-1911), poznati nemački matematičar koji se bavio algebarskom geometrijom. Šubert prepoznaje u mladom Hurvicu talenat za matematiku i postaje mu prijatelj. Još u toku gimnazijskih dana, kada je mladi Hurvic imao sedamnaest godina, zajedno sa svojim profesoron Šubertom piše i objavljuje svoj prvi rad u časopisu "Mathematische Annalen" na temu Mišel Šaslove teoreme (Michel Chasles 1793-1880), o postupku brojanja u algebarskoj geometriji uključujući broj krivih ili površi u prostoru koje poseduju određena svojstva.[41]

***Slika 17*: Mladi Adolf Hurvic**

***Slika 18*: Izgled gimnazija Andreanum u Hildeshajmu 1868. godine**

Po završetku gimnazije, Šubert je ubedio Hurvicovog oca Salomona da pusti svog sina da studira matematiku i obezbedio mu stipendiju koju je finansirao gospodin E. Edvards. Šubert je takođe preporučio svog učenika svom prijatelju nemačkom matematičaru Feliks Klajnu (Felix Klein 1849-1925) koji je držao predavanja, uglavnom o teoriji brojeva. Hurvic započinje svoje studije u Minhenu 1877. godine. Posle samo jednog semestra Hurvic napušta Minhen i odlazi u Berlin na

[41]Strick Henz Klaus, Adolf Hurwitz, (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/hurwitz.pdf)

studije, gde sluša analizu kod profesora Karla Vajerštrasa (Karl Weierstrass 1815-1897), poznatog po značajnim radovima iz teorije funkcija, varijacionog računa, diferencijalne geometrije i linearne algebre. Istovremeno sluša i predavanja Leopolda Kronekera (Leopold Kronecker 1823-1891).

Postoji jedna anegdota. Leopold Kroneker je smatrao da aritmetika i analiza moraju da budu zasnovane na „celim brojevima“, tvrdeći da je "Bog napravio cele brojeve; sve ostalo je delo čoveka". Ovo je stavilo Kronekera u opoziciju nekih matematičkih dela Georga Kantora, Kronekerovog studenta[42]. "Naravno, Kroneker nije ni pomišljao da transcendetalni brojevi uopšte ne postoje, odnosno da ne postoje brojevi koji koji nisu rešenja algebarskih jednačina, već je odbijao da prihvati one za koje ne postoji algoritamski postupak generisanja cifara".[43]

Za vreme svog boravka u Berlinu, Hurvic je održavao komunikaciju sa Feliks Klajnom, koji mu pomaže oko rada o eliptičkim modularnim funkcijama. Nakon tri odslušana semestra na Univerzitetu u Berlinu, 1879. godine Hurvic se vraća na Univerzitet u Minhenu. U Minhenu nastavlja intezivno da sarađuje sa Klajnom, i kad je Klajn dobio mesto profesora na Univrzitetu u Lajpcigu u oktobru 1889. godine, Hurvic odlazi zajedno sa Klajnom u Lajpcig. Na Lajpciškom univerzitetu 1881. godine Hurvic brani doktorsku disertaciju o eliptičnim modularnim funkcijama "*Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe*".[44] Hurvic je svoju disertaciju posvetio svom dobrotvoru gospodinu E. Edvardsu.

Po sticanju doktorata, bilo je prirodno da Hurvic postane docent na Univerzitetu u Lajpcigu pošto je bio student profesora Klajna, tamnošnjeg profesora matematike. Nažalost, na univerzitetu u Lajpcigu procedura je propisivala da mesto docenta podrazumeva i znanje grčkog jezika, a Hurvic ga nije dovoljno dobro znao. Srećom na Univerzitetu u Getingenu, u Donjoj Saksoniji nije postojao taj uslov, tako da je Hurvic 1882. godine dobio mesto na Univerzitetu u Getingenu, nakon što je priložio svoje reference[45].

Nemački matematičar Karl Luis Ferdinand fon Lindeman (Carl Louis Ferdinand von Lindemann 1852-1939), profesor na Univerzitetu u Kenigsbergu (poznat po tome što je 1882. godine dokazao da je broj pi (π) transcedentan broj) poziva 1884. godine Hurvica da prihvati mesto vanrednog profesora na Univerzitetu u Kenigsbergu, na period od osam godina. Hurvic rado prihvata poziv i seli se u Kenigsberg. Univerzitet u Kenigsbergu u istočnoj Pruskoj (danas Kalinjingrad u Rusiji) osnovao je 1544. godine vojvoda Albert od Pruske kao protestansku akademiju, poznatu kao Albertina.

[42]Biermann, K R, Biography in *Dictionary of Scientific Biography* (New York 1970-1990) (https://www.encyclopedia.com/people/science-and-technology/mathematics-biographies/leopold-kronecker#2830902392)
[43]Božic Milan, Pregled istorije i filozofije matematike, Beograd 2002.str.237.
[44]Eminger Stefanie Ursula, C F Geiser and R Rudio: the men behind the First International Congress of Mathematicians, *St Andrews PhD thesis* (2014),
(https://mathshistory.standrews.ac.uk/Publications/Eminger.pdf)
[45] O·Connor, John J, Robertson Edmund F, Adolf Hurwiz, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hurwitz/)

Na Univerzitetu u Kenigsbergu upoznaje se sa Davidom Hilbertom (1862-1843) i Hermanom Minkovskim (1864-1909) sa kojima ostaje doživotni prijatelj i saradnik. Hilbert je doktorirao 1886. godine na Univerzitetu u Kenigsbergu sa disertacijom „O nepromenjivim svojstvima posebnih binarnih formi, sa naglaskom na sferne harmonijske funkcije“. Po doktoriranju ostaje na istom fakultetu kao profesor od 1886 do 1889. godine. Herman Minkovski je takođe doktorirao 1885. godine na Univerzitetu u Kenigsbergu. Njihova međusobna saradnja i razmena naučnih ideja ima značajan uticaj na njihove naučne karijere. Čak i kada je Minkovski napustio Kenigsberg i preselio se u Bon, on se i dalje vraćao u Kenigsberg i tu provodio svoj odmor u društvu sa Hurvicom i Hilbertom.

Za vreme svog boravka u Kenigsbergu, Hurvic se upoznaje sa Idom Samjuel, ćerkom profesora na medicinskom fakultetu. Venčali su se 1892. godine i dobili troje dece: Lizabet (rođena 1894. godine), Evu (rođena 1896. godine) i Otoa (rođenog 1898. godine).

Kada je 1891. godine bilo upražnjeno mesto na Univerzitetu u Berlinu, na preporuku profesora Karl Vajerštrasa, profesor Tehničkog univerziteta u Cirihu Ferdinand Georg Frobenijus (1849-1917) prelazi na mesto profesora na Univerzitet u Berlinu. Na upražnjeno katedru na Ciriškom tehičkom fakultetu - Politehnici ETH (Eidgenössische Technische Hochschule) biva primljen Hurvic. Godine 1892. Hurvic se seli sa porodicom u Švajcarsku, u Cirih.

***Slika 19*: Adolf Hurvic**

***Slika 20*:** Glavna zgrada Politehnike u Cirihu izgrađena 1864. godine

Samo nekoliko nedelja po prihvatanju katedre u Cirihu, Hurvic je doveden u tešku dilemu. Naime, nemački matematičar, poznat po svojim delima na polju kompleksne analize Karl Herman Amandus Švarc (Karl Hermann Amandus Schwarz 1843-1921) prelazi sa Univerziteta u Getingenu na Univerzitet u Berlinu. Univerzitet u Getingenu nudi Hurvicu upražnjeno mesto profesora. Ova ponuda je bila veoma primamljiva, jer je u to doba Univerzitet u Getingenu bio među vodećim nemačkim univerzitetima. Katedra na Unvezitetu u Getingenu je bila prestižnija za svakog nemačkog naučnika od katedre na Politehnici u Cirihu. Hurvic je bio veoma lojalna osoba, i pošto je dao reč da prihvata katedru u Cirihu, nije prihvatio vrlo primamljivu ponudu Univerziteta u Getingenu. Hurvic je u Cirihu ostao do kraja života[46].

Prvi Međunarodni kongres matematičara održan je 1897 godine u Cirihu. Hurvic je bio jedan od glavnih organizatora kongresa. Bio je i predsednik komisije za prijem radova, zatim je bio zadužen i za organizaciju društvenog dela kongresa i za obezbeđivanje svih kongresnih publikacija (pozivnica, programa, pravilnika, postera, bedževa itd.) na nemačkom i francuskom jeziku. Na samom kongresu, bio je jedan od predavača na plenarnom delu kongresa gde je izložio rad "Development of the General Theory of Analytic Functions in Recent Times " (Razvoj opšte teorije analitičkih funkcija u novom vremenu). Na ovom kongresu Hurvic je bio jedini koji je predstavljao Švajcarsku.

Za vreme boravka na Univerzitetu u Kenigsbergu Hurvic se bavi teorijskim geometrijskim problemima. Većinu istraživanja koja je vršio odnose se na primenu Rimanovih funkcija na probleme u algebri, posebno na algebarske funkcije[47]. Mnoga njegova otkrića u znak zahvalnosti danas nose njegovo ime (na primer Hurvicova determinanta, Hurvicov broj, Hurvicova teorema itd.). Iz njegovog obimnog stvaralaštva i nespornog doprinosa razvoju matematike, moglo bi se izdvojiti kao najvažnije: Hurvicova teorema (kompleksna analiza), Hurvicova teorema (algebra kompozicije), Hurvicova determinanta, Hurvicova matrica, Hurvicov broj, Hurvicov polinom, Hurvicov problem, Hurvicov kvaternion, Hurvicova šema, Hurvicova zeta funkcija, Hurvicova površina, Hurvicova teorema o automorfizmima, Radon-Hurvicovi brojevi, Riman-Hurvicova formula itd.

Hurvic je bio lošeg zdravstvenog stanja. Njegovi zdravstveni problemi počinju još za vreme njegovog boravka na studijama u Minhenu, gde je oboleo od tifusa. Bolovao je od teških migrena, a 1905. godine teško su mu oboleli bubrezi i jedan je morao biti izvađen. Umro je 1919. godine u Cirihu.

Njegov prijatelj David Hilbert ga je opisao kao skromnog čoveka, skladnog duha, mudrog filozofa, ljubitelja muzike i pijaniste amatera, druželjubivog, ali nenametljivog čoveka čije su žive oči otkrivale njegov duh.[48]

---

[46]O,Connor, John J, Robertson Edmund F, Adolf Hurwiz, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hurwitz/)

[47]Boyer Carl B., A History of Mathematics, John Wiley **&** Sons, inc, New York- Chichester -Brisbane –Toronto-Sngapore, 1991.str 606.

[48]O,Connor, John J, Robertson Edmund F, Adolf Hurwiz, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hurwitz/)

8.2. Hurvicova teorema i skica dokaza Hurvicove teoreme

Hurvicova teorema. Svaka normirana algebra sa jedinicom je izomorfna jednoj od sledeće četiri algebre: $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}, \mathbb{O}$.

Uslov da algebra ima jedinicu je od velike važnosti i ne može biti izostavljen. Kasnije ćemo videti da postoje algebre bez jedinice, ali ni jedna od njih ne mora biti izomorfna algebrama koje su pomenute u teoremi iznad, od kojih sve imaju jedinicu.

Skica dokaza. Neka je $\mathcal{A}$ normirana algebra sa jedinicom. Podsetimo se da je normirana algebra, algebra u kojoj možemo definisati skalarni proizvod na sledeći način:

$$(ab, ab) = (a, a)(b, b).$$

Neka je 1 jedinica algebre $\mathcal{A}$. Svaki element $a \in \mathcal{A}$ može biti jedinstveno predstavljen kao suma dva izraza od kojih je jedan proporcionalan sa 1 a drugi ortogonalan sa 1. Tako je

$$a = k1 + a'$$

gde je k realan broj i $a' \perp 1$. Dok će njegov konjugat biti:

$$\bar{a} = k1 - a'.$$

U suštini ako je a proporcionalno sa 1 onda će biti $\bar{a} = a$, a ako je a ortogonalno na 1 onda će biti $\bar{a} = -a$.

Očito je i $\bar{\bar{a}} = a$ i $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$.

Neka je $\mathcal{U}$ podalgebra algebre $\mathcal{A}$ koja sadrži 1 i različita je od 1. Neka je $1, i_1, i_2, \dots, i_n$ baza $\mathcal{U}$ takva da su $i_1, i_2, \dots, i_n$ ortogonalni na 1. Onda je konjugat elementa $a_0 1 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n$ upravo element $a_0 1 - a_1 i_1 - \cdots - a_n i_n$. Ovo pokazuje da ako je u element $\mathcal{A}$ onda je i $\bar{u}$ element iz $\mathcal{A}$.

Znamo da postoji nenula vektor ortogonalan na $\mathcal{U}$. Dok je odgovarajući njegov umnožak jedinični vektor e koji je ortogonalan na $\mathcal{U}$. Trebali bi da pokažemo da je skup elemenata oblika:

$$u_1 + u_2 e \ (u_1 \in \mathcal{U}, u_2 \in \mathcal{U}) \qquad (1)$$

zatvoren za množenje, a time i podalgebra od $\mathcal{U}$. Označimo sa $\mathcal{U} + \mathcal{U}e$ ovu podalgebru. Trebamo dokazati:

Tvrđenje 8.2.1. Reprezentacija elemenata $\mathcal{U} + \mathcal{U}e$ u obliku *(1)* je jedinstvena.

Tvrđenje 8.2.2. Proizvod dva elementa oblika *(1)* dat je sa:

$$(u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) = (u_1 v_1 - \overline{v_2} u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \overline{v_1})e. \qquad (2)$$

Kao što nam je poznato da se dupliranjem kompleksnih brojeva dobijaju kvaternioni, tako isto dolazimo do zaključka da je podalgebra $\mathcal{U} + \mathcal{U}e$ izomorfna dupliranoj podalgeri $\mathcal{U}$.

Pre nego što pređemo na poslednju fazu dokaza, primetićemo određeno svojstvo konjugacije u algebri $\mathcal{A}$.

Kako sadrži jedinicu 1, algebra $\mathcal{A}$ sadrži podalgebru elemenata oblika $k1$. Podalgebra je izomorfna algebri realnih brojeva. Algebru realnih brojeva označićemo sa $\mathcal{R}$. Ako u prethodnom zamenimo $\mathcal{U}$ sa $\mathcal{R}$, onda će e biti jedinični vektor ortogonalan na 1. Iz formule *(2)*:

$$e^2 = (\mathbb{0} + 1e)(\mathbb{0} + 1e) = -1.$$

Ovo implicira da je kvadrat vektora a' ortogonalan na 1 upravo $\lambda 1$, gde je $\lambda \leq 0$. Lako je pokazati obrnuto, da ako je $\lambda 1$ kvadrat elementa i ako $\lambda \leq 0$, onda je taj element ortogonalan na 1. Prema tome elementi koji su ortogonalni sa 1, i samo te elemente, karakteriše činjenica da je njihov kvadrat jednak $\lambda 1$, gde je $\lambda \leq 0$. Ovo nam omogućuje da damo alternativni opis konjugacije u $\mathcal{A}$. Neka

$$k1 + a', \text{gde je } a'^2 = \lambda 1, \lambda \leq 0$$

predstavlja jedinstvenu reprezentaciju elementa $a \in \mathcal{A}$. Onda je $\bar{a} = k1 - a'$.

Sada možemo preći na poslednji deo dokaza.

Razmotrimo još jednom podalgebru $\mathcal{R}$. Ako $\mathcal{R} \neq \mathcal{A}$, onda postoji jedinični vektor e ortogonalan na $\mathcal{R}$. Razmotrimo podalgebru $\mathcal{C} = \mathcal{R} + \mathcal{R}e$. Kako je to duplirana algebra $\mathcal{R}$, ona je izomorfna algebri kompleksnih brojeva. Iz onoga što je rečeno o konjugaciji u algebri $\mathcal{A}$ sledi da se za elemente iz $\mathcal{C}$ konjugacija poklapa sa uobičajenom konjugacijom kompleksnih brojeva.

Ako se podalgebra $\mathcal{C}$ ne poklapa sa $\mathcal{A}$, onda možemo naći još jedan jedinični vektor e' ortogonalan na $\mathcal{C}$. Razmotrimo podalgebru $\mathcal{Q} = \mathcal{C} + \mathcal{C}e'$, koja je rezultat dupliranja $\mathcal{C}$. Ova algebra je izomorfna algebri kvaterniona. Naša ranija karakterizacija konjugacije u $\mathcal{A}$ implicira da se za elemente iz $\mathcal{Q}$ konjugacija poklapa sa konjugacijom algebre kvaterniona.

Ako se podalgebra $\mathcal{Q}$ ne poklapa sa $\mathcal{A}$, onda ponovo biramo vektor e''' ortogonalan na $\mathcal{Q}$ i razmatramo podalgebru $\mathcal{O} = \mathcal{Q} + \mathcal{Q}e'''$ koja je rezultat dupliranja $\mathcal{Q}$ i stoga je izomorfna Kejlijevim brojevima. Ova algebra mora da se poklapa sa $\mathcal{A}$, kao što ćemo pokazati, bilo koja podalgebra koja sadrži 1 i nije jednaka sa $\mathcal{A}$ je asocijativna. Kako množenje Kejlijevih brojeva nije asocijativno, podalgebra $\mathcal{O}$ mora da se poklapa sa celom algebrom $\mathcal{A}$.

Ako algebra $\mathcal{A}$ nije izomorfna jednoj od algebri $\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{Q}$ onda je izomorfna algebra $\mathcal{O}$. Ali ovo je tvrđenje naše teoreme.

Vidimo da ćemo našu teoremu dokazati ako dokažemo tvrđenja 8.2.1 i 8.2.2, kao i sledeće tvrđenje

Tvrđenje 8.2.3. Svaka podalgebra koja sadrži 1 i različita je od $\mathcal{A}$ je asocijativna.

Lema 8.2.1. Sledeća jednakost važi u bilo kojoj normiranoj algebra

$$(a_1 b_1, a_2 b_2) + (a_1 b_2, a_2 b_1) = 2(a_1, a_2)(b_1, b_2). \qquad (3)$$

Primetimo da ova jednakost povezuje četiri elementa a_1, a_2, b_1, b_2 algebre $\mathcal{A}$.

Lema 8.2.2. Sledeća jednakost važi u normiranim algebrama sa identitetom

$$(ab)\bar{b} = (b,b)a. \qquad (4)$$

Drugim rečima, element $(ab)\bar{b}$ je uvek proporcionalan a i koeficijent proporcionalnosti je (b,b).

Iz gore navedene jednakosti možemo da zaključimo drugu jednakost koja će imati vrlo bitnu ulogu u onome što sledi.

Ako b zamenimo sa $x+y$ dobijamo

$$\big(a(x+y)\big)(\bar{x}+\bar{y}) = (x+y, x+y)a$$

ili

$$(ax)\bar{x} + (ay)\bar{y} + (ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = (x,x)a + (y,y)a + 2(x,y)a.$$

Prema jednakosti *(4),* u jednakosti iznad, prvi i drugi član sa leve strane su jednaki, respektivno, prvom i drugom članu s desne strane. Stoga

$$(ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = 2(x,y)a.$$

Ovo je jednakost koju smo želeli da ustanovimo.

Ostaje nam da dokažemo tvrđenja 8.2.1,8.2.2 i 8.2.3. Podsetićemo se da smo sa $\mathcal{U}$ označili podalgebru od $\mathcal{A}$ koja sadrži 1 i ne poklapa se sa $\mathcal{A}$, i e je jedinični vektor ortogonalan na $\mathcal{U}$.

Prvo ćemo pokazati da su podprostori $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}e$ ortogonalni, tako da je, $u_1 \perp u_2e$ za bilo koja dva elementa $u_1 \epsilon \mathcal{U}, u_2 \epsilon \mathcal{U}$.

Koristićemo lemu 8.2.1. Ako u *(3)* stavimo $a_1 = u_1, a_2 = u_2, b_1 = e, b_2 = 1$ dobijamo

$$(u_1u_2, e) + (u_1, u_2e) = 2(u_1, e)(u_1, 1).$$

Sada samo treba da imamo na umu da je $\mathcal{U}$ podalgebra, tako da u_1u_2 pripada $\mathcal{U}$. Ali onda je

$u_1 \perp e, u_1u_2 \perp e$. Iz poslednje jednakosti sledi

$$(u_1, u_2e) = 0$$

tako da je $u_1 \perp u_2e$. Ovo znači da su podprostori $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}e$ ortogonalni, kao što smo i tvrdili.

Sada lako možemo **dokazati tvrđenje 8.2.1**: Reprezentacija bilo kog elementa u $\mathcal{U} + \mathcal{U}e$ oblika $u_1 + u_2e$ je jedinstvena. Pretpostavimo

$$u_1 + u_2e = u_1' + u_2'e.$$

Onda

$$u_1 - u_1' = (u_2' - u_2)e.$$

Ovo znači da element $v = u_1 - u_1'$ pripada podprostorima $\mathcal{U}$ i $\mathcal{U}e$. Kako smo pokazali da su ovi podprostori ortogonalni, $(v,v) = 0$ i stoga $v = \mathbb{0}$. Ovo imlicira da je $u_1 - u_1' = \mathbb{0}$ i $(u_2' - u_2)e = \mathbb{0}$. Takođe s obzirom na jednakost$(ab,ab) = (a,a)(b,b)$, $ab = \mathbb{0}$ implicira da je $a = \mathbb{0}$ ili $b = \mathbb{0}$.

U našem slučaju $(u_2' - u_2)e = \mathbb{0}$ i $e \neq \mathbb{0}$ implicira da je $u_2' - u_2 = \mathbb{0}$. Iz čega sledi $u_1 = u_1'$ i $u_2 = u_2'$. Ovim smo dokazali tvrđenje 8.2.1.

Sledeće ćemo dokazati tvrđenje 8.2.2, odnosno korektnost jednakosti *(2)*. Trebamo pokazati da ako su u i v elementi podalgebre $\mathcal{U}$, onda

$$(ue)v = (u\bar{v})e \qquad \textit{(r1)}$$

$$u(ve) = (vu)e \qquad \textit{(r2)}$$

$$(ue)(ve) = -\bar{v}u. \qquad \textit{(r3)}$$

Sa ovim relacijama koje su nam na raspolaganju lako možemo dokazati jednakost *(2)*. U stvari

$$(u_1 + u_2e)(v_1 + v_2e) = u_1v_1 + (u_2e)(v_2e) + (u_2e)v_1 + u_1(v_2e).$$

Ako zadnja tri sabirka sa desne strane zamenimo sa relacijama iznad dobijamo

$$(u_1 + u_2e)(v_1 + v_2e) = (u_1v_1 - \overline{v_2}u_2) + (v_2u_1 + u_2\overline{v_1})e$$

što je upravo jednakost *(2)*.

Da bi smo dokazali gornje relacije koristićemo jednakost

$$(ax)\bar{y} + (ay)\bar{x} = 2(x, y)a. \qquad \textit{(5)}$$

Ako u ovu jednakost stavimo

$$a = u, x = e, y = \bar{v}$$

i imamo na umu da je $\bar{v} \perp e$, imamo

$$(ue)v + (u\bar{v})\bar{e} = \mathbb{0}.$$

Kako je $\bar{e} = -e$ (za $e \perp 1$) dobijamo *(r1)*.

Da bi smo dokazali *(r2)* stavićemo u *(5)*

$$a = 1, x = u, y = \overline{ve}.$$

Kako je $\overline{ve} = -ve$ ($ve \perp \mathcal{U}$, pa je $ve \perp 1$) sledi

$$u(ve) - (ve)\bar{u} = \mathbb{0}.$$

Koristeći *(r1)* dobijamo

$$u(ve) = (ve)\bar{u} = (vu)e.$$

Da bismo dokazali *(r3)* koristićemo sledeće opažanje: Ako ova jednakost važi za $v = c \, i \, v = d$ onda važi i za $v = c + d$. Kako svaki element v može biti zapisan kao suma dva člana gde je jedan proporcionalan sa 1 a drugi ortogonalan na 1, dovoljno je da dokažemo *(r3)* u dva slučaja: kada je $v = k1$ i kada je $v \perp 1$.

Ako je $v = k1$ onda relacije *(r3)* postaje

$$k(ue)e = -ku$$

identitet čija korektnost sledi iz identiteta *(4)*.

Sada pretpostavimo da je $v \perp 1$ (znači da je $\bar{v} = -v$). Ako u *(5)* stavimo

$$a = u, x = e, y = -ve$$

imamo

$$(ue)(ve) - \big(u(ve)\big)\bar{e} = -2(e, ve)u$$

Iz $(a_1 b, a_2 b) = (a_1, a_2)(b, b)$, (e, ve) je jednako $(1, v)(e, e)$ što je jednako nula. Dalje iz *(r2),* drugi član s leve strane jednak je $-\big((vu)e\big)\bar{e} = -vu = \bar{v}u$. Onda je

$$(ue)(ve) = -\bar{v}u$$

što smo i želeli da dokažemo. Dokazivanjem *(r1), (r2), (r3)* dokazali smo tvrđenje 8.2.2.

Kako bismo završili dokaz naše teoreme moramo da dokažemo tvrđenje 8.2.3: *Svaka podalgebra koja sadrži* 1 *i različita je od* $\mathcal{A}$ *je asocijativna,* pa je

$$(uv)w = u(vw)$$

za bilo koja tri elementa u, v, w iz $\mathcal{U}$.

Da bismo pokazali ovo koristićemo opet jednakost *(5)*, stavljajući

$$a = ve, x = \bar{w}, y = \bar{u}e$$

imamo

$$\big((ve)\bar{w}\big)(-\bar{u}e) + \big((ve)(\bar{u}e)\big)w = \mathbb{0}$$

ili koristeći *(r1)* i *(r3)*

$$u(vw) - (uv)w = \mathbb{0}$$

Ovim smo završili dokaz Hurvicove teoreme.[49]

[49]Kantor I.L, Solodovnikov A.S, Hypercomplex Numbers, Nauka, Moskva, 1973

9. FROBENIJUSOVA TEOREMA

9.1. Ferdinand Georg Frobenijus

Ferdinand Georg Frobenijus (Ferdinand Georg Frobenius) (1849-1917) je bio nemački matematičar, koji je radio na algebri, analizi, geometriji i teoriji brojeva. Rođen je u protestantskoj porodici u Šarlotenburgu, bogatom predgrađu Berlina. Njegov otac Kristijan Ferdinand Frobenius je bio protestantski paroh.

Georg Frobenius sa jedanaest godina, 1860. godine upisuje gimnaziju "Joachimstal" u Berlinu (Gimnaziju je osnovao 1601. godine Joakim Fridrih fon Brandeburg, kao elitnu gimnaziju za nadarenu decu sa naglaskom na hrišćansko humanističko obrazovanje, sposobnim za obavljanje dužnosti u državnoj i crkvenoj službi). Frobenijius uspešno završava gimnaziju, maturirao je 1867. godine.

Po završenoj gimnaziji Frobenijus započinje svoje studije na Univerzitetu u Getingenu, gde ostaje samo jedan semestar i prelazi na Univerzitet u Berlinu, gde sluša predavanja poznatih profesora matematike: Leopold Kronekera (1823-1891), Ernsta Eduarda Kumera (Ernst Eduard Kummer) (1810-1893) i Karla Vajerštrasa (Karl Theodor Wilhelm Weierstraß) (1815-1897). Doktorirao je 1870. godine pod mentorstvom profesora Karl Vajerštrasa. Po završetku studija zapošljava se prvo u gimnaziji "Joachimstal" u Berlinu a zatim u gimnaziji "Sophienrealschule" i na kraju 1874. Godine prelazi na Univerzitet u Berlinu kao vanredni profesor matematike.[51]

Slika 21: Ferdinand Georg Frobenijus[50]

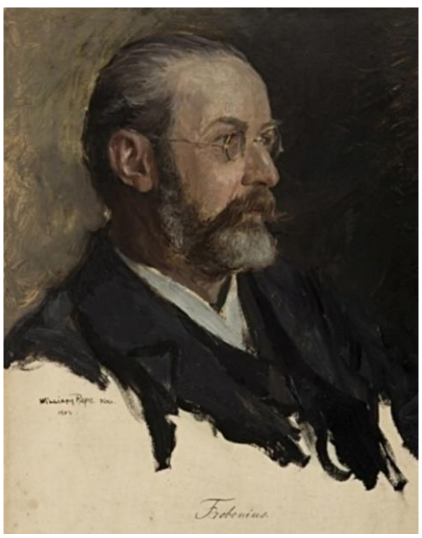
Slika 22: Glavna zgrada Politehnike u Cirihu izgrađena 1864. godine

[50] https://alberto27.altervista.org/georg-frobenius/?doing_wp_cron=1638288287.9140040874481201171875

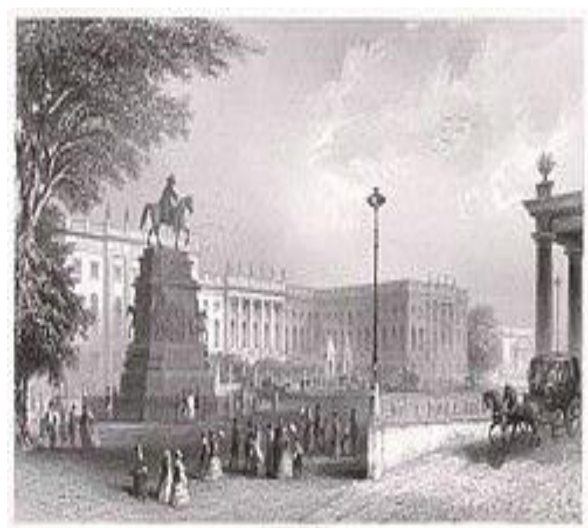
[51] O,Connor, John J, Robertson Edmund F, Ferdinand Georg Frobenius, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frobenius/)

Frobenijus ostaje u Berlinu samo godinu dana, kada dobija ponudu od Ciriškog tehičkog fakulteta Politehnica ELH (Eidgenössische Technische Hochschule) za mesto redovnog profesora matematike. Frobenijus prihvata ponudu i seli se u Švajcarsku, u Cirih. Tamo ostaje sedamnest godina, sve do 1892.godine. U Cirihu se oženio, podigao porodicu i uradio mnogo na razvoju različitih oblasti matematike.

Kada je u decembru 1891. godine umro profesor Leopold Kroneker, ostalo je upražnjeno mesto na katedri matematike na Berlinskom univerzitetu. Sada je profesor Karl Vajerštras bio u mogućnosti, koristeći svoj uticaj na Berlinskom univerzitetu da "progura" svog kandidata Ferdinand Georg Frobenijusa na upražnjeno mesto redovnog profesora na katedri Univerziteta u Berlinu. Druga dva kandidata su bili: profesor Maks Noter (1844-1921) sa Univerziteta u Erlagenu u Bavarskoj, i Julijus Vilhem Ričard Dedekind (Julius Wilhelm Richard Dedekind) (1831-1916), koji je takođe jedno vreme predavao na Ciriškoj Politehnici.. Frobenijusa je 1892.godine postao redovni profesor na Univerzitetu u Berlinu. Iste godine je postao redovni član Kraljevske akademije nauka u Berlinu (potvrđeno 14.januara 1893).



Slika 23: Ferdinand Georg Frobenijusa od slikara Vilijam Pejp (William Pape)[52]



***Slika 24*:** Berlinski univerzitet 1850.godine

Prilikom kandidovanja Frobenijusa za članstvo u Kraljevske akademije nauka, preporuke koje su napisali: Karl Vajerštras i Imanuel Lazarus Fuks najbolje govore o raznovrsnosti i visokom kvalitetu Frobenijusovog rada za vreme njegovog boravka u Cirihu. Vajerštras i Fuks navode petnaest tema kojima je Froberijus dao veliki doprinos:

1. Razvoju analitičkih funkcija,
2. Algebarskom rešenju jednačina čiji su koeficijenti racionalne funkcije jedne promenljive,
3. Teorija linearnih diferencijalnih jednačina,
4. O Pfaff-ovom problemu,

[52] https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Ferdinand_Georg_Frobenius

5. Linearni oblici sa celobrojnim koeficijentima,
6. O linearnim supstitucijama i binarnim oblicima,
7. O spojenim linearnim diferencijalnim operatorima,
8. Teorija eliptičke i Jakobijeve funkcije,
9. O odnosima između 28 dvostrukih tangeta na površine četvrtog stepena,
10. O Silovljevoj teoremi,
11. O dvostrukim kosetima koji proizlaze iz dve konačne grupe,
12. O Jakobijevim kovarijantama,
13. O Jakobljevim funkcijama u tri varijable,
14. Teorija bikvadratnih oblika i
15. O teoriji površina sa diferencijalnim parametrom.[53]

"Teorija hiperkompleksnih brojeva, koje su razradili Pirs, Študi, Frobenijus i Katran, ukazala je na legitimno mesto kvaterniona kao prostog asocijativnog sistema brojeva sa više od dve jedinice. Kult kvaterniona u vreme njegovog apogeja doveo je do stvaranja "Međunarodnog ugruženja za koordinaciju i proučavanje kvaterniona i srodnih matematičkih sistema".[54]

***Slika 25*:** Karl Vajerštras

***Slika 26*:** Ferdinand Georg Frobenijus[55]

Profesor Ernst Eduard Kumer odlazi u penziju i u letnjem semestru 1884. godine na njegovo mesto dolazi Imanuel Lazarus Fuks (Immanuel Lazarus Fuchs)(1833-1902). Karl Vajerštras je održao svoje poslednje predavanje u letnjem semestru 1887. godine (otišao je u penziju sa 72 godine), a 1902. godine imenovan je za njegovog naslednika Herman Amadeus Švarc (1843-1921).[56] Švarc je po doktoriranju 1864. na Berlinskom fakultetu (mentor mu je bio profesor Ernst Eduard Kumer) radio je u gimnaziji u Berlinu a 1876. je bio vanredni profesor u Haleu, zatim od

[53] O,Connor, John J, Robertson Edmund F, Ferdinand Georg Frobenius, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frobenius/)
[54] Dirk J. Strojk, Kratak pregled istorije matematike, Beograd 1991,стр.209..
[55] https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Ferdinand_Georg_Frobenius
[56] https://www.math.berlin/mathematiker/ferdinand-georg-frobenius.html

1869 redovni profesor na Ciriškoj politehnici i od 1875. redovni profesor na Univerzitetu u Getingenu i konačno 1892. godine nasleđuje katedru profesora Karl Vajerštrasa.

I tako je došlo do smene generacija na matematičkoj katedri Univerziteta u Berlinu. Slavni trio matematičara: Ernst Eduard Kumer, Karl Vajerštras i Leopold Kroneker, koji su učinili Berlinski univerzitet vodećim matematičkim centrom u Nemačkoj, smenio je trio: Imanuel Lazarus Fuks, Herman Amadeus Švarc i Ferdinand Georg Frobenijus. Međutim, novi trio nije mogao da nadogradi staru slavu.

Kod Frobenijusa je doktoriralo 17 studenata, koji su kasnije u svom radu ostvarili znatan doprinos u matematici.[57] Frobenijus je izusetno cenio Edmunda Georga Hermana Landaua (1877-1938), koji je doktorirao kod njega 1899. godine i koji je od 1899. godine predavao na Univerzitetu u Berlinu da bi 1909. godine prešao na Univerzitet u Getingenu. Dobio je Nobelovu nagradu 1905. godine. Takođe, Frobenjius je cenio i matematičara ruskog porekla Isaju Šura (Issai Schur) (1875-1941), koji je doktorirao kod njega 1901. godine i koji je od 1913. godine bio vanredni profesor u Bonu. U narednim godinama Frobenijus je bezuspešno pokušavao na različite načine da Šura zaposli na Berlinskom univerzitetu.

Frobenijus 1916. godine, u 67 godini života odlazi u penziju. Želeo je da njegov naslednik u Berlinu bude Isaja Šur, ali stvari su ispale drugačije. Dvojica kandidata za Frobenijusovo mesto na Univerzitetu u Berlinu su bili Šur (Issai Schur) i matematičar grčkog porekla Konstantin Karateodori (Constantin Cratheodory) (1873-1950). Nakon što je Frobenijus umro 1917. godine za njegovog naslednika je ipak postavljen 1919. godine Konstantin Karateodori. Iste godine Konstantin Karateodori je primljen u Akademiju nauka u Berlinu. Karateodori je dao značajan doprinos realnoj i kompleksnoj analizi i varijacionom računu. Karateodori se smatra jednim od najčuvenijih grčkih matematičara.

Frobenijus je za sobom ostavio zapaženu naučnu zaostavštinu. Mnoga njegova otkrića u znak zahvalnosti danas nose njegovo ime kao što su:

- Frobenijusov metod,
- Frobenijusova matrica,
- Frobenijusova nejednačina,
- Frobenijusova grupa,
- Frobenijusova norma,
- Frobenijusova teorema,
- Frobenijusov polinom,
- Frobenijusova faktorizacija,
- Peron-Frobenijusov operator,
- Frobenijus-Peronova teorema,
- Frobenijusov homomofrizam komutativne algebre,
- Frobenijusov kriterijum integrabilnosti,
- Ruš-Frobenijusova teorema poznata i kao Kroneker-Kapelijeva teorema.

[57] https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=4642

9.2. Frobenijusova teorema i njen dokaz

Jedan od klasičnih problema u teoriji algebre je pronalaženje svih algebri sa deljenjem. Uprkos fundamentalnoj prirodi problema (i činjenice da mnogi problemi u drugim oblastima matematike, kao što je recimo topologija, zavise od njenog rešenja), i dalje nije u potpunosti rešen. Važan rezultat je postignut nedavno. Prvi korak je napravio Hopf 1940. godine. On je dokazao koristeći topološke metode, da dimenzija realnih algebri sa deljenjem nad realnim brojevima mora biti stepen dvojke.[58] Godine 1958. Kervaire i Milnor nezavisno su dokazali da taj stepen dvojke mora biti 1,2,4 ili 8. Njihov dokaz je koristio glavni “rezultat” u algebarskoj topologiji koji se zove Bott-ova periodičnost.[59] Dok ovo pokazuje da su dimenzije divizionih algebra male, mi i dalje nemamo kompletan pregled ovih algebra (za slučaj proizvoljnih polja).

Frobenijusova teorema. Svaka asocijativna diviziona algebra nad poljem realnih brojeva je izomorfna jednoj od sledećih: algebri realnih brojeva, algebri kompleksnih brojeva i algebri kvaterniona.

Nakon toga, ustanovljen je opštiji rezultat, koji možemo nazvati generalizovana Frobenijusova teorema.

Generalizovana Frobenijusova teorema. Svaka alternativna diviziona algebra nad poljem realnih brojeva je izomorfna jednoj od sledeće četiri algebra: realni brojevi, kompleksni brojevi, kvaternioni i Kejlijevi brojevi.

Podsetićemo se da je algebra alternativna ako važe sledeći identiteti za bilo koja dva elementa a i b

$$(ab)b = a(bb)$$

$$(bb)a = b(ba).$$

Jasno je da je svaka asocijativna algebra alternativna, tako da Frobenijusova teorema sledi iz generalizovane Frobenijusove teoreme. Sa druge strane, algebra Kejlijevih brojeva je alternativna ali nije asocijativna, tako da su ove dve teoreme zapravo različite.

Da bi dokazali ove dve teoreme prvo trebamo navesti neka od svojstva asocijativne divizione algebre.

Označimo sa $\mathcal{A}$ asocijativnu divizionu algebra. Tvrdićemo da algebra $\mathcal{A}$ ima sledeća svojstva:

Tvrđenje 9.2.1. Algebra $\mathcal{A}$ ima identitet.

Dokaz. Neka je a nenula element algebra $\mathcal{A}$. Razmotrićemo jednakost:

$$xa = a.$$

[58] Hopf H., Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, Comment. Math. Helv. 13, 219-239, 1941

[59] Milnor J., Some consequences of a theorem of Bott, Ann. of Math. 68, 444-449, 1958

Kako je $\mathcal{A}$ diviziona algebra, naša jednakost ima jedinstveno rešenje e tako da je $ea = a$. Množeći ovu jednakost sa leve strane sa b imamo sledeću jednakost $b(ea) = ba$, ili s obzirom na asocijativnost $\mathcal{A}$, $(be)a = ba$. Kako jednakost $xa = ba$ ima jedinstveno rešenje sledi

$$be = b.$$

Ako pomnožimo ovu jednakost sa desne strane sa c i ponovimo postupak dobijamo

$$ec = c.$$

Kako su b i c proizvoljni elementi, poslednje dve jednakosti pokazuju da je element e zapravo identitet algebre $\mathcal{A}$. Kao i obično označavaćemo ovaj element sa 1.

■

Tvrđenje 9.2.2. Ako element $a \in \mathcal{A}$ nije proporcionalan 1 onda skup elemenata $\mathcal{C}_a$ u obliku

$$\alpha 1 + \beta a$$

formira podalgebru izomorfnu algebri kompleksnih brojeva.

Dokaz. Za naše potrebe dovoljno je da dokažemo da element a zadovoljava kvadratnu jednakost

$$a^2 + sa + t1 = \mathbb{0} \qquad (1)$$

sa negativnom diskriminantom.

Neka je n dimenzija algebre. Razmotrićemo $n + 1$ stepen elementa a.

$$a^0 = 1, a^1, a^2, \dots, a^n$$

Sistem od $n + 1$ vektora je linearno zavisan, tako da neki stepen mora biti linearna kombinacija njegovih prethodnika.

$$a^m = k_{m-1}a^{m-1} + \cdots + k_2a^2 + k_1a + k_0 1$$

Drugim rečima, a je koren jednakosti m-tog stepena.

$$x^m - k_{m-1}x^{m-1} - \cdots - k_2x^2 - k_1x - k_0 = 0.$$

Razmotrimo opšti polinom m-tog stepena

$$P(x) = x^m - k_{m-1}x^{m-1} - \cdots - k_2x^2 - k_1x - k_0.$$

Ovakav polinom $P(x)$ može biti zapisan kao proizvod

$$P(x) = P_1(x)P_2(x) \dots P_s(x)$$

linearnih ili nesvodljivih kvadratnih polinoma.

Svaki od polinoma $P_1(x), P_2(x), \dots, P_s(x)$ je suma dva ili tri člana, tj. oblika: $x + t$ ili $x^2 + sx + t$.

Sledi da kada u gornjoj jednakosti zamenimo x sa a dobijamo

$$P(a) = P_1(a)P_2(a) \dots P_s(a)$$

Kako je $P(a) = \mathbb{0}$ sledi

$$P_1(a)P_2(a)\dots P_s(a) = \mathbb{0}.$$

Sada ćemo iskoristiti činjenicu da je $\mathcal{A}$ diviziona algebra. Iz te činjenice sledi da ako je proizvod nula, onda bar jedan od činioca mora biti nula. Sledi da za neko i važi

$$P_i(a) = \mathbb{0}$$

odnosno, element a zadovoljava linearnu ili kvadratnu jednakost. Ako a zadovoljava linearnu jednakost

$$a + t\mathbb{1} = \mathbb{0}$$

onda, suprotno pretpostavci, biće proporcionalan sa 1. Sledi da a zadovoljava nerastavljivu kvadratnu jednakost *(1).* Kako je polinom $P_i(x)$ nerastavljiv, diskriminanta mu je negativna što dokazuje tvrđenje.

■

Tvrđenje 9.2.3. Ako dva elementa $a_1 \in \mathcal{A}, a_2 \in \mathcal{A}$ ne pripadaju istoj podalgebri $\mathcal{C}_a$ onda skup elemenata $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$ u obliku

$$\alpha 1 + \beta a_1 + \gamma a_2 + \delta a_1 a_2$$

formira podalgebru izomorfnu algebri kvaterniona.

Dokaz. U podalgebri $\mathcal{C}_{a_1}$ izabraćemo element b_1 takav da je ${b_1}^2 = -1$ (b_1 je imaginarna jedinica u kompleksnoj algebri $\mathcal{C}_{a_1}$). Slično, u podalgebri $\mathcal{C}_{a_2}$ izabraćemo element b_2 takav da je ${b_2}^2 = -1$. Kako su b_1, b_2 različiti, redom, od a_1, a_2 pomnoženim sa 1 sledi da se skup elemenata oblika $\alpha 1 + \beta a_1 + \gamma a_2 + \delta a_1 a_2$ poklapa sa skupom elemenata oblika $\alpha' 1 + \beta' b_1 + \gamma' b_2 + \delta' b_1 b_2$, stoga se $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$ poklapa sa $\mathcal{Q}_{b_1,b_2}$.

Dalje, nije teško videti da je

$$e_1 = b_1, \;\; e_2 = k_1 b_1 + k_2 b_2$$

i $k_2 \neq 0$ onda se skup $\mathcal{Q}_{e_1,e_2}$ poklapa sa $\mathcal{Q}_{b_1,b_2}$ pa tako i sa $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$. Trebali bi pokazati da je moguće da izaberemo brojeve k_1 i k_2 tako da

$$ {e_1}^2 = -1, {e_2}^2 = -1, (e_1 e_2)^2 = -1 \qquad (2)$$

(prva od ovih jednakosti važi za proizvoljne k_1 i k_2)

Primetimo da sa jedne strane imamo

$$(b_1 + b_2)^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2 + (\, b_1 b_2 + b_2\, b_1) = -2 \cdot 1 + (\, b_1 b_2 + b_2\, b_1)$$

a sa druge strane imamo da $(b_1 + b_2)^2$ mora biti linearna kombinacija 1 i $b_1 + b_2$:

$$(b_1 + b_2)^2 = p1 + q(b_1 + b_2).$$

Dakle,

$$b_1 b_2 + b_2\, b_1 = (p+2)1 + q(b_1 + b_2). \tag{3}$$

Slično

$$(b_1 + 2b_2)^2 = {b_1}^2 + 4{b_2}^2 + 2(\, b_1 b_2 + b_2\, b_1) = -5 \cdot 1 + 2(\, b_1 b_2 + b_2\, b_1)$$

i

$$(b_1 + 2b_2)^2 = p' 1 + q'(b_1 + 2b_2)$$

tako da

$$b_1 b_2 + b_2\, b_1 = \frac{1}{2}(p' + 5)1 + \frac{1}{2} q'(b_1 + 2b_2).$$

Pretpostavimo da $q \neq 0$. Izjednačavanjem ova dva izraza možemo zaključiti da se b_1 razlikuje od b_2 za umnožak od 1, tako da $b_2 \in \mathcal{C}_{b_1}$. Međutim ovo je isključeno po pretpostavci. Stoga $q = 0$ i jednakost *(3)* postaje:

$$b_1 b_2 + b_2\, b_1 = \lambda 1. \tag{4}$$

Drugim rečima, ako su b_1 i b_2 dva različita elementa čiji su kvadrati -1, onda jednakost *(4)* važi.

Sada je lako naći tražene elemente e_1 i e_2. Stoga ćemo razmatrati element $c = \lambda b_1 + 2b_2$, gde λ ima istu vrednost kao u *(4)*. Kvadrat broja c je:

$$c^2 = -\lambda^2 1 - 4 \cdot 1 + 2\lambda(\, b_1 b_2 + b_2\, b_1) = (\lambda^2 - 4) \cdot 1 \tag{5}$$

što znači da je $\lambda^2 - 4 < 0$. Stavimo

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{4 - \lambda^2}}\, c.$$

Tada *(5)* implicira da je ${e_2}^2 = -1$, što je druga jednakost u *(2).* Da bi dokazali treću jednakost iz *(2)* primetimo

$$e_1 e_2 + e_2 e_1 = \mathbb{0}. \tag{6}$$

Zaista

$$\begin{aligned} e_1 e_2 + e_2 e_1 &= \frac{1}{\sqrt{4 - \lambda^2}}(\, b_1(\lambda b_1 + 2b_2) + (\lambda b_1 + 2b_2)\, b_1) \\ &= \frac{1}{\sqrt{4 - \lambda^2}}\big(-2\lambda \cdot \mathbb{1} + 2(\, b_1 b_2 + b_2\, b_1)\big) = \mathbb{0}. \end{aligned}$$

Koristeći ${e_2}^2 = -1$ imamo

$$(e_1 e_2)^2 = (e_1 e_2)(e_1 e_2) = (e_1 e_2)(-e_2 e_1) = -(e_1 {e_2}^2) e_1 = {e_2}^2 = -1.$$

Ovo nas dovodi do treće jednakosti u *(2).*

Sada ćemo pokazati da je skup elemenata Q_{e_1, e_2} oblika

$$\alpha 1 + \beta e_1 + \gamma e_2 + \delta e_1 e_2$$

(koja se kao što je pomenuto ranije pokalapa sa $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$) podalgebra algebre $\mathcal{A}$.

Dovoljno je pokazati da je proizvod bilo koja od četiri elementa: $1, e_1, e_2, e_1e_2$ sam po sebi linearna kombinacija ovih elemenata. Jedini proizvodi za koje ovo mora biti potvrđeno su proizvodi $e_1(e_1e_2)$, $(e_1e_2)e_1, e_2(e_1e_2), (e_1e_2)e_2$.

Imamo

$$\begin{gathered} e_1(e_1e_2) = {e_1}^2 e_2 = -e_2, \\ (e_1e_2)e_1 = -(e_2e_1)e_1 = -e_2{e_1}^2 = e_2, \\ e_2(e_1e_2) = -e_2(e_2e_1) = -{e_2}^2 e_1 = e_1, \\ (e_1e_2)e_2 = e_1{e_2}^2 = -e_1. \end{gathered} \tag{7}$$

Ovim završavamo dokaz da je $\mathcal{Q}_{e_1,e_2}$ podalgebra.

Ostalo je da pokažemo da je ova podalgebra izomorfna algebri kvaterniona. Da bismo ovo pokazali, prvo ćemo pokazati da su elementi $1, e_1, e_2, e_1e_2$ baza pomenute podalgebre, a drugo što ćemo pokazati je da je tablica množenja za ovu bazu ista kao tablica množenja za bazu $1, i, j, k$ koja je ujedno i baza algebre kvaterniona.

Za sada znamo da je svaki element iz $\mathcal{Q}_{e_1,e_2}$ linearna kombinacija elemenata $1, e_1, e_2, e_1e_2$. Da bismo dokazali da pomenuti elementi formiraju bazu ostaje da dokažemo da su oni linearno nezavisni ili da nijedan od njih nije linearna kombinacija njegovih prethodnika. Da e_2 nije linearna kombinacija 1 i e_1 sledi iz činjenice da e_1 i e_2 ne pripadaju podalgebri $\mathcal{C}_a$. Tako da ostaje da pokažemo da e_1e_2 nije linearna kombinacija $1, e_1$ i e_2, tj. da ne možemo e_1e_2 predstaviti na sledeći način:

$$e_1e_2 = pe_2 + qe_1 + r1.$$

Pretpostavimo suprotno, da je zapravo ova jednakost tačna. Onda p i q moraju biti različiti od 0. Množenjem sa e_1 sa leve strane dobijamo:

$$-e_2 = pe_1e_2 - q1 + re_1$$

ili

$$e_1e_2 = -\frac{1}{p}e_2 - \frac{r}{p}qe_1 + \frac{q}{p}1.$$

Razlika ova dva izraza za e_1e_2 daje jednakost

$$\left(p + \frac{1}{p}\right)e_2 + \left(q + \frac{r}{p}\right)e_1 + \left(r - \frac{q}{p}\right)1 = \mathbb{0}.$$

Koeficijent uz e_2 mora biti 0 (inače će e_2 biti linearna kobinacija e_1 i 1), međutim ovo je nemoguće zbog izbora realnog broja p. Ovim smo pokazali da elementi $1, e_1, e_2, e_1e_2$ gde je $e_3 = e_1e_2$ čine bazu podalgebre $\mathcal{Q}_{e_1,e_2}$.

Da su tablice množenja iste za ovu podalgebru i algebru kvaterniona sledi iz relacija *(2), (6)* i *(7).*

■

Koristeći svojstva tvrđenja 9.2.1, 9.2.2, 9.2.3 lako ćemo dokazati Frobenijusovu teoremu. Tako, neka je $\mathcal{A}$ asocijativna diviziona algebra. Po tvrđenju 9.2.1, algebra $\mathcal{A}$ ima identitet. Elementi oblika $k1$ formiraju podalgebru $\mathcal{R}$ izomorfnu algebri realnih brojeva. Ako $\mathcal{R}$ nije u potpunosti $\mathcal{A}$, prema tvrđenju 9.2.2, $\mathcal{A}$ sadrži podalgebru $\mathcal{C}_a$ izomorfnu kompleksnim brojevima. Ako $\mathcal{C}_a$ nije $\mathcal{A}$, onda po tvrdnji 9.2.3, $\mathcal{A}$ sadrži podalgebru $\mathcal{Q}_{a,b}$ izomorfnu algebri kvaterniona. Ako se $\mathcal{Q}_{a,b}$ poklapa sa $\mathcal{A}$, onda smo završili. Pretpostavimo da to nije slučaj. Onda $\mathcal{A}$ sadrži element c koji nije u $\mathcal{Q}_{a,b}$ i trebali bi pokazati da $\mathcal{A}$ onda nije diviziona algebra.

U algebri kvaterniona $\mathcal{Q}_{a,b}$ biramo bazu $1, i, j, k$ sa standardnom tablicom množenja:

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$$

i zapišemo c kao $p1 + qe$, gde je $e^2 = -1$ (e je „imaginarna jedinica“ kompleksne algebre $\mathcal{C}_c$).

Zapisaćemo ie koristeći asocijativnost $\mathcal{A}$ i relaciju (2). Tako da imamo

$$ie = (jk)e = j(ke) = j(-ek + \lambda'1) = -(je)k + \lambda'j = -(-ej + \lambda''1)k + \lambda'j = ei - \lambda''k + \lambda'j$$

tj.

$$ie - ei = \lambda'j - \lambda''k$$

s druge strane iz (3) imamo

$$ie + ei = \lambda'''1.$$

Sabiranjem poslednje dve jednakosti vidimo da element ie pripada $\mathcal{Q}_{a,b}$. Tako i $ic = i(p1 + qe)$ pripada $\mathcal{Q}_{a,b}$. Ako $c' \in \mathcal{Q}_{a,b}$ onda je proizvod ic' takođe element $\mathcal{Q}_{a,b}$. Tako da proizvod bilo kog elementa iz $\mathcal{A}$ i i pripada $\mathcal{Q}_{a,b}$. Međutim ovo nije moguće, ako je $\mathcal{A}$ diviziona algebra (jednačina $ix = c$, gde c ne pripada $\mathcal{Q}_{a,b}$, nema rešenje). Ova kontradikcija dokazuje Frobenijusovu teoremu.

9.3. Dokaz generalizovane Frobenijusove teoreme baziran na Hurvicovoj teoremi

Počećemo sa podsećanjem osnovne definicije alternativne algebre. Definišemo algebru u kojoj važi sledeći identitet:

$$(ab)b = a(bb) \text{ i } b(ba) = (bb)a.$$

Međutim postoji i druga definicija alternativne algebre, prema kojoj je algebra $\mathcal{A}$ alternativna ako vrednost bilo kog konačnog proizvoda (koji je proizvod bilo koja dva elementa a i b) ne zavisi od pozicije zagrada u proizvodu. Ovo znači, na primer

$$(ab)b = a(bb)$$

$$(ab)(ba) = \big(a(bb)\big)a$$

itd.

Jasno je da druga definicija alternativnog svojstva implicira prvu. Prva definicija implicira drugu u Artinovoj teoremi, koju sada nećemo dokazivati.

U našem dokazu generalizovane Frobenijusove teoreme koristićemo drugu definiciju alternativnog svojstva. Ovo znači, striktno govoreći da ćemo dokazati sledeću teoremu: *Ako diviziona algebra $\mathcal{A}$ nad poljem realnih brojeva ima svojstvo da konačan proizvod bilo koja dva elementa ne zavisi od raspodela zagrada u tom proizvodu, onda je algebra $\mathcal{A}$ izomorfna jednoj od četiri algebra: algebra realnih brojeva, algebra kompleksnih brojeva, algebra kvaterniona, algebra Kejlijevih brojeva.*

Važno je napomenuti da tvrđenja 9.2.1, 9.2.2 i 9.2.3 koja važe za asocijativne divizione algebra, važe i za alternativne divizione algebra.

Nema potrebe da napravimo ni najmanju izmenu u dokazima za tvrđenja 9.2.2 i 9.2.3. Za dokaz tvrđenja 9.2.1, moraćemo da napravimo male izmene u alternativnom slučaju. Stoga, neka je e rešenje jednačine $xa = a$. Množenjem jednakosti $ea = a$ sa e sa leve strane dobijamo $e(ea) = ea$ ili po alternativnom svojstvu $(ee)a = ea$. Stoga $ee = e$. Ponovo koristeći alternativno svojstvo imamo $(be)e = b(ee)$ i $e(ec) = (ee)c$, dalje je, $(be)e = be$ i $e(ec) = ec$. Sledi da je $be = b$ i $ec = c$, pa je e identitet naše algere.

Da bismo dokazali generalizovanu Frobenijusovu teoremu možemo da pratimo šablon dokaza Frobenijusove teoreme, a to je da pokažemo da ako podalgebra $\mathcal{Q}_{a,b}$ nije $\mathcal{A}$, onda $\mathcal{A}$ sadrži drugu podalgebru izomorfnu algebri Kejlijevih brojeva. Tada bi bilo neophodno dokazati da se ta druga podalgebra poklapa sa $\mathcal{A}$. Iako moguć, takav dokaz je prilično dugačak. Zato ćemo koristiti drugi pristup, tj dokazaćemo da je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Prema Hurvicovoj teoremi, ovo bi impliciralo traženi ishod.

Definisaćemo u algebra $\mathcal{A}$ sledeću operaciju konjugacije. Ako je element a proporcionalan sa 1, ona ćemo pisati $\bar{a} = a$. Ako a nije proporcionalan sa 1 onda, prema tvrđenju 9.2.2 sadržan je u podalgebri $\mathcal{C}_a$. $\mathcal{C}_a$ koja sadrži konjugat od a, $\bar{a}$.

Iz definicije o $\bar{a}$ sledi da je $\bar{\bar{a}} = a$ i $\overline{ka} = k\bar{a}$ za bilo koji realan broj k.

Pre nego što zaključimo ostala svojstva naše konjugacije prvo moramo da razjasnimo sledeće pitanje. Pretpostavimo da element a nije proporcionalan sa 1. Uzećemo bilo koji kvaternion podalgebre $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$ koji sadrži a. Ova podalgebra sadrži konjugat elementa a, $\tilde{a}$. Prirodno pitanje koje se postavlja je da li je $\tilde{a} = \bar{a}$. Pokazaćemo da jeste.

Kako konjugati u kompleksnoj algebri, a i $\bar{a}$ imaju svojstva

$$a + \bar{a} = (realan\ broj) \cdot 1 \qquad \textit{(8)}$$

$$a\bar{a} = (realan\ broj) \cdot 1. \qquad \textit{(9)}$$

i kako konjugati u algebri kvaterniona, a i $\tilde{a}$ imaju analogna svojstva

$$a + \tilde{a} = (realan\ broj) \cdot 1 \qquad \textit{(8')}$$

$$a\bar{\tilde{a}} = (realan\ broj) \cdot 1. \qquad \textit{(9')}$$

Oduzimanjem *(8)* i *(8')* i *(9)* i *(9')* dobijamo sledeće jednakosti

$$\bar{a} - \tilde{a} = (realan\ broj) \cdot 1$$

$$a(\bar{a} - \tilde{a}) = (realan\ broj) \cdot 1.$$

Ako bismo imali $\tilde{a} \neq \bar{a}$, onda bi poslednje relacije implicirale da je a umnožak od 1 što je kontradiktorno našoj pretpostavci.

Tako da je konjugacija elementa a ista bilo da je on element kompleksne podalgebre $\mathcal{C}_a$ ili element kvaternionske podalgebre $\mathcal{Q}_{a_1,a_2}$.

Uzgred, isto važi za apsolutnu vrednost od a; apsolutna vrednost od a je ista bilo da je on element kompleksne podalgebre ili element kvaternionske podalgebre.

Iz ovoga što smo dokazali o svojstvima konjugacije lako je zaključiti da sledeće jednakosti za bilo koja dva elementa a i b u algebri $\mathcal{A}$:

$$\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$$

$$\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}.$$

Zapravo ako a i b pripadaju istoj kompleksnoj podalgebri, onda izrazi iznad predstavljaju svojstva konjugacije u toj podalgebri. Ako b ne pripada $\mathcal{C}_a$, onda ove jednakosti i dalje važe, u ovom slučaju, predstavljaju svojstva konjugacije u $\mathcal{Q}_{a,b}$.

Izraz $\overline{ab} = \bar{b}\bar{a}$ i $\bar{\bar{b}} = b$ impliciraju da je konjugat od $a\bar{b}$ u stvari $b\bar{a}$. Iz čega sledi

$$a\bar{b} + b\bar{a} = (realan\ broj) \cdot 1.$$

Definisaćemo u algebri $\mathcal{A}$ skalarni proizvod (a, b) formulom

$$a\bar{b} + b\bar{a} = 2(a, b) \cdot 1.$$

Svojsva skalarnog proizvoda su sledeća:

1) $(a, a) > 0 \; ako \; a \neq \mathbb{0} \; i \; (\mathbb{0}, \mathbb{0}) = 0$
2) $(a, b) = (b, a)$
3) $(a, kb) = k(a, b)$
4) $(a, b_1 + b_2) = (a, b_1) + (a, b_2)$

i lako je pokazati da skalarni proizvod koji smo upravo definisali zadovoljava sva ova svojstva. Zapravo, očigledno je da naš skalarni proizvod ima svojstvo *2)*. Formule $\overline{ka} = k\bar{a}$ i $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ impliciraju da naš skalarni proizvod ima svojstva i *3)* i *4)*. Da bi videli da ima i svojstvo *1)* dovoljno je da primetimo

$$(a, a) \cdot 1 = a\bar{a} = |a|^2 \cdot 1$$

i da se podsetimo da je apsolutna vrednost kompleksnog broja strogo pozitivna ako $a \neq \mathbb{0}$ i nula ako $a = \mathbb{0}$.

Iz gornje jednakosti zaključujemo

$$\sqrt{(a, a)} = |a|$$

tako da se, norma elementa a u algebri $\mathcal{A}$ poklapa sa apsolutnom vrednošću od a u kompleksnim brojevima (ili kvaternionima).

Kako bilo koja dva elementa a, b u algebra $\mathcal{A}$ pripadaju jednoj kompleksnoj ili kvaternionskoj podalgebri, sledi

$$|ab|^2 = |a|^2|b|^2$$

ili

$$(ab, ab) = (a, a)(b, b)$$

a ova jednakost pokazuje da je $\mathcal{A}$ normirana algebra. Prema Hurvicovoj teoremi, algebra $\mathcal{A}$ mora biti izomorfna jednoj od četiri “standardne” algebra: algebri realnih brojeva, algebra kompleksnih brojeva, algebra kvaterniona, i algebra Kejlijevih brojeva. Ovo kompletira dokaz generalizovane Frobenijusove teoreme.[60]

■

[60]Kantor I.L, Solodovnikov A.S, Hypercomplex Numbers, Nauka, Moskva, 1973

9.4. Proširenje Frobenijusove teoreme – Zornova teorema

Zornova teorema proširuje Frobenijusovu teoremu na neasocijativni slučaj.[61] Kombinacijom ove dve teoreme dobijamo strukturnu teoremu za alternativne kvadratne realne algebre bez delitelja nule:

Teorema 9.4.1. Svaka alternativna kvadratna realna algebra bez delitelja nule izomorfna je sa nekom od realnih algebri $\mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$ ili $\mathbb{O}$.

Zornova teorema. Svaka alternativna kvadratna realna algebra bez delitelja nule, koja nije asocijativna, izomorfna je sa Kejlijevom algebrom oktava $\mathbb{O}$.

Da bi smo dokazali ovu teoremu navešćemo prvo teoremu o "podvostručenju".

Teorema 9.4.2. Neka je $\mathcal{B}$ prava podalgebra alternativne kvadratne realne algebre $\mathcal{A}$ bez delitelja nule, koja sadrži jedinični element e alebre $\mathcal{A}$. Tada važi:

1) $\mathcal{B}$ je asocijativna alebra
2) Postoji $q \in Im\mathcal{A}$ sa $q^2 = -e$ i $\langle \mathcal{B}, q \rangle = 0$
3) Za svako $q \in Im\mathcal{A}$ sa $q^2 = -e$ i $\langle \mathcal{B}, q \rangle = 0, \mathcal{B} + \mathcal{B}q$ predstavlja podalebru alebre $\mathcal{A}$ sa $\dim(\mathcal{B} + \mathcal{B}q) = 2dim\mathcal{B}$ i pritom važi:
   a. $u \cdot vq = vu \cdot q \ (u, v \in \mathcal{B})$
   b. $uq \cdot v = u\bar{v} \cdot q, specijalno\ qv = \bar{v}q; (u, v \in \mathcal{B})$
   c. $uq \cdot vq = -\langle q, q \rangle \cdot \bar{v}u \ (u, v \in \mathcal{B})$

Takođe biće nam potrebna još jedna teorema

Teorema 9.4.3. Algebra oktava $\mathbb{O}$ je direktna suma $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}p$ realnih prostora, pri čemu je $p = (0, e')$; ova suma je ortogonalna u odnosu na skalarni proizvod u $\mathbb{O}$. Osim toga za svako $u, v \in \mathbb{H}$ važi:

1) $u(vp) = (vu)p$
2) $(up)v = (u\bar{v})p\ specijalno\ pv = \bar{v}p$
3) $(up)(vp) = -\bar{v}u$

Dokaz Zornove teoreme. Prema Frobenijusovoj teoremi, za algebru $\mathcal{A}$ iz Zornove teoreme važi $dim\mathcal{A} > 4$. Osim toga, postoji podalgebra $\mathcal{B}$ algebre $\mathcal{A}$ i monomorfizam algebri $f: \mathbb{H} \to \mathcal{A}$ sa$f(\mathbb{H}) = \mathcal{B}$. Kako algebra $\mathcal{A}$ po pretpostavci nije asocijativna sigurno je $\mathcal{B} \neq \mathcal{A}$.

Sada možemo primeniti teoremu o „podvostručenju". Prema 2) te teoreme postoji $q \in \mathcal{A}$ sa $q^2 = -e$ i $\langle \mathcal{B}, q \rangle = 0$. Prema tvrdnji 3) iste te teoreme, $\mathcal{B} + \mathcal{B}q$ predstavlja podalebru alebre $\mathcal{A}$ koja sadrži e. Sa druge strane, na osnovu teoreme 9.4.3, $\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}p$. Preslikavanje

$$\mathbb{O} = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}p \to \mathcal{B} + \mathcal{B}q, \quad u + vp \to f(u) + f(v)q$$

[61] Zorn Max, Theorie der alternativen ringe, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 1930

je bijektivno i $\mathbb{R}$-linearno. Na osnovu a),b) u teoremi 9.4.2, odnosno u teoremi 9.4.3, to preslikavanje je zapravo izomorfizam algebri. Kad bi bilo $\mathcal{B} + \mathcal{B}q \neq \mathcal{A}$ onda bi algebra $\mathcal{B} + \mathcal{B}q$, na osnovu teoreme o "podvostručenju" bila asocijativna. No, tada bi bila asocijativna i algebra $\mathbb{O}$, što je nemoguće. Znači, $\mathcal{B} + \mathcal{B}q = \mathcal{A}$, tj algebra $\mathbb{O}$ je izomorfna sa algebrom $\mathcal{A}$.

■

Zornova teorema se može bitno poopštiti. Naime, poznato je da je svaka prosta alternativna neasocijativna algebra Kejlijeva algebra nad svojim centrom.[62]

Slika 27: Maks Zorn

Slika 28: Univerzitet Indijana na kome je predavao Maks Zorn

[62]Perić Veselin, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Univerzitet Crne Gore, Štamparija OBOD, Cetinje, 2000

10. ZAKLJUČAK

Vilijam Hamilton ni Herman Grasman niisu bili u stanju da dokažu da ne postoji trodimenzionalna komutativna algebra. Međutim, Georg Frobenijus dokazuje da jedine realne linearne asocijativne algebre koje imaju jedinicu u odnosu na množenje i zadovoljavaju uslov P(xy) = P(x)P(y) za proizvod normi, jesu realni brojevi, kompleksni brojevi i kvaternioni (n = 1,2,4). Pri kraju XIX veka, 1898.godine, Adolf Hurvic je dokazao da jedine realne linearne asocijativne algebre koje zadovoljavaju uslov P(xy) = P(x)P(y) jesu realni brojevi, kompleksni brojevi, kvaternioni i takozvani bikvaternioni (jedna manje značajna algebra koju je definisao engleski matematičar Kliford (Viliam Cliford) za n=8).

Istraživanja o asocijativnim algebrama su tipičan korak moderne algebre: zadaju se neka svojstva operacija pa se traže ostala svojstva koja su njihove posledice, i na kakvim su sve skupovima operacije sa takvim svojstvima moguće. Zato su hiperkompleksni sistemi bili jedan od odlučnih zaokreta u razvoju algebre od teorije o rešavanju jednačina, ka algebri kao grani matematike u kojoj se izučavaju svojstva operacija. Tom zaokretu, su u svakom slučaju doprineli svojim radovima-teoremama, koji u njihovu čast nose njihova imena Georg Frobenijus i Adolf Hurvic.

Postepeno postaje jasno da predmet algebre treba da budu skupovi sa zadanim na njima algebarskim operacijama (takozvane univerzalne algebre) koje se razmatraju sa tačnošću do izomorfizma. Poslednje znači da priroda skupova-nosača algebarskih operacija iz ugla algebre je beznačajna i u tom smislu, stvarnim objektom izučavanja javljaju se same algebarske operacije.

Kvaternioni su našli primenu u opisivanju prostornih rotacija, a pokazali su se korisni i u teoriji brojeva zbog njihove veze sa kvadratnim formama. Dok se Hurvicova teorema primenjuje u algebarskoj topologiji na probleme o vektorskim poljima na sferama i homotopijskim grupama klasičnih grupa u kvantnoj mehanici na klasifikaciju jednostavnih Žordanovih algebri. Oktonioni nisu toliko poznati kao kvaternioni i kompleksni brojevi, koji se mnogo više proučavaju i koriste. Oktonioni se odnose na izuzetne strukture u matematici, među njima i izuzetne Lijeve grupe. Oktonioni imaju primenu u oblastima kao što su teorija struna, specijalna relativnost i kvantna logika. Primena Kejli-Diksonove konstrukcije na oktonione proizvodi sedenione. Algebra sedeniona, koja se obično označava sa $\mathbb{S}$ je 16-dimenzionalna Kejli-Diksonova algebra. To su hiperkompleksni brojevi, slični kvaternionima i oktonionima. Takođe, algebra sedeniona je neasocijativna, nekomutativna i nealternativna.[63] Štaviše, to nije algebra kompozicije ni diviziona algebra jer ima delioce nule.[64] Sedenioni se pojavljuju u mnogim oblastima nauke, kao sto su elektromagnetna teorija i linearna gravitacija.

[63] Bilgici Goksal, Tokeser Umit, Unal Zafer, Fibonacci and Lucas Sedenions, Journal of Integer Sequences, vol. 20, 2017
[64] Chanyal B. C., Sedenion unified theorz of gravi-electromagnetism, Indian Journal of Physics, vol. 88, 2014

Literatura

[1] Abdelnor Jason, Matematički rečnik, Vuk Karadžić, Beograd, 1983

[2] Baez John C., The Octonions, Department of Mathematics, Universitz of California, 2001

[3] Baker Stefan, Filozofija matematike, Nolit, Beograd, 1973

[4] Bilgici Goksal, Tokeser Umit, Unal Zafer, Fibonacci and Lucas Sedenions, Journal of Integer Sequences, vol. 20, 2017

[5] Božic Milan, Pregled istorije i filozofije matematike, Beograd, 2002

[6] Boyer Carl B., A History of Mathematics, John Wiley & Sons, inc, New York- Chichester - Brisbane –Toronto-Sngapore, 1991

[7] Biermann, K R, Biography in Dictionary of Scientific Biography (New York 1970-1990)

[8] Chanyal B. C., Sedenion unified theorz of gravi-electromagnetism, Indian Journal of Physics, vol. 88, 2014

[9] Veljan Darko, Pavković Boris, Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992

[10] Vukomanović Milica, Kvaternionske algebre, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2019

[11] Dadić Žarko, Povijest ideja i metoda u matematici i fizici, Školska knjiga, Zagreb, 1992

[12] Devide Vladimir, Matematika kroz kulture i epohe, Školska knjiga, Zagreb, 1979

[13] Dirk J. Strojk, Kratak pregled istorije matematike, Beograd, 1991

[14] Dajović Vojin, Teorija funckija kompleksne promenljive, Izdavačko informativni centar studenata, Beograd, 1977.

[15] Deaux Roland, Introduction to the geometry of complex numbers, Dover publications inc., Mineola, New York, 2008

[16] Eminger Stefanie Ursula, C F Geiser and R Rudio: the men behind the First International Congress of Mathematicians, St Andrews PhD thesis (2014), https://mathshistory.standrews.ac.uk/Publications/Eminger.pdf

[17] Euklid, Elementi, knjiga X, Srpska akademija nauka, Beograd, 1956

[18] Hopf H., Ein topologischer Beitrag zur reellen Algebra, Comment. Math. Helv. 13, 219-239, 1941

[19] Ilić Vladimir, Kvaternioni i njihova primena u geometriji, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2011

[20] Milnor J., Some consequences of a theorem of Bott, Ann. of Math. 68, 444-449, 1958

[21] Kalajdžić Gojko, Linearna algebra, Zavod za udžbenike, Beograd, 2011

[22] Kantor I.L, Solodovnikov A.S, Hypercomplex Numbers, Nauka, Moskva, 1973

[23] Karamata Jovan, Kompleksan broj sa primenom na elementarnu geometriju, Naucna knjiga, Beograd, 1948

[24] Letić Duško,Sajfert Vjekoslav, Živković D. Katarina, Matematičke konstante e, γ, -11/2, Tehnički fakultet Mihailo Pupin u Zrenjaninu, Univerzitetu Novom Sadu, Zrenjanin, 2013

[25] Letić Duško,Cakić Nenad, Sajfert Vjekoslav, Davidović Branko, Živković D. Katarina, Eulerov Pentagon, Elektrotehnički fakultet u Beogradu, Beograd, 2015

[26] Lipkovski Aleksandar, Linearna algebra i analitička geometrija, Matematički fakultet Univerziteta u Beogradu, Beograd, 2020

[27] Lučić Zoran, Ogledi iz istorije antičke geometrije, Službeni glasnik, Beograd, 2009

[28] Milar Dejvid, JanMilar, Džon Milar, MargaretMilar, Kembričkirečnik –Naučnici, Dereta, 2003

[29] Mitrinović S. Dragoslav, Kompleksna analiza, IRO „Građevinska knjiga“, Beograd, 1981

[30] Nedović V. Slavko, Matematičko istorijski mozaik – Pogled u matematiku antike, Arhimedes, Beograd, 2004

[31] O’Connor, John J, Robertson Edmund F, Adolf Hurwiz, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hurwitz/)

[32] O’Connor, John J, Robertson Edmund F, Ferdinand Georg Frobenius, Mac Tutor History of Mathematics, University of St. Andrews (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frobenius/)

[33] Perić Veselin, Konačnodimenzionalne realne divizione algebre, Univerzitet Crne Gore, Štamparija OBOD, Cetinje, 2000

[34] Perišić Pavle, Trifunović Dragan, Povesica o kvadratnom korenu, Beograd, 2002

[35] Perović Miodrag, Istorija matematike 1-3, knjiga 3,Akademska misao, Beograd, 2019

[36] Petković Miodrag, Petković Ljiljana, Matematički vremeplov - prilozi za istoriju matematike, Zmaj, Novi Sad, 2006

[37] Stehlik Petra, Kvaternioni i prostorne rotacije, diplomski rad, Sveučilište J.J. Strossmayera, Osijek, 2020

[38] Stipanić Ernest, Putevima razvitka matematike, Beograd, 1988

[39] Stojanov Stefan, Hiperkompleksni sistemi i geometrija, master rad, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu, 2018

[40] Strick Henz Klaus, Adolf Hurwitz, (https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Strick/hurwitz.pdf)

[41] Trifunović Dragan, Matematika Vizantije i srednjovekovne Srbije, Arhimedes, Beograd, 2004

[42] Feher Siniša, Primena kompleksnih brojeva u analitičkoj geometriji, algebri i analizi, master rad, Univerzitet u Novom Sadu, 2017

[43] https://commons.wikimedia.org/wiki/Category:Ferdinand_Georg_Frobenius

[44] https://alberto27.altervista.org/georg-frobenius/?doing_wp_cron=1638288287.9140040874481201171875

[45] https://www.math.berlin/mathematiker/ferdinand-georg-frobenius.html

[46] https://www.fsb.unizg.hr/mat-4/OldWeb/14_p.pdf

[47] https://nationalgeographic.rs/nauka/prirodne-nauke/a18306/najlepsi-brojevi-koji-su-promenili-svet-nauke.html

[48] https://www.mathgenealogy.org/id.php?id=4642

[49] https://math.ucr.edu/home/baez/octonions/node24.html

[50] http://alas.matf.bg.ac.rs/~vsrdjan/files/g_2.pdf

[51] Zorn Max, Theorie der alternativen ringe, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg, 1930