Универзитет у Београду
Математички факултет

Мастер рад

Колмогоровљева конструкција реалних бројева

Студент:
Александар Ивановић

Ментор:
др Небојша Икодиновић

У Београду, 2022. године

Ментор:

др Небојша Икодиновић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Филип Марић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Славко Моцоња, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране:________________

Захвалнице

Желео бих да се захвалим пре свега ментору мастер рада професору Небојши Икодиновићу на исцрпним дискусијама и детаљној анализи мастер рада као и комисији професорима Славку Моцоњи и Филипу Марићу на корисним саветима и сугестијама које су побољшале мастер рад. Такође се захваљујем мојим родитељима мајци Милки, која ми је била највећа подршка као и оцу Горану и браћи Стојану и Велимиру. Свако од њих ми је био помоћ и подршка на свој начин. Захваљујем се многобројним пријатељима као и друговима из средње школе који су били велика подршка током целог студирања. Последње али не и најмање битно захваљујем се пријатељима са дискорд сервера ***FiveStack*** *који су ме подстакли да брже завршим мастер рад.*

Без муке се пјесна не испоја,
без муке се се сабља не сакова!
П. П. Његош (Горски вијенац)

Наслов мастер рада: Колмогоровљева конструкција реалних бројева

Резиме: У овом раду се приказује једна од мање познатих конструкција реалних бројева. Колмогоров је објавио задатак 1946. године [1], у коме је предложио да се реални бројеви могу представити као функције које сликају скуп $\mathbb{N}$ у $\mathbb{N}$ и задовољавају још нека додатна својства. Решење задатка је дато у [2]. Конструкција је инспирисана Еуклидовим поступком мерења дужи.

У првом поглављу наведена су нека историјска разматрања као и еквивалентни облици аксиоме супремума.

Друго поглавље даје дефиницију реалних бројева по Колмогорову и детаљан опис конструкције. Приказана је идеја Еуклидовог поступка мерења дужи. Поред саме конструкције реалних бројева доказује се да важи аксиома супремума у конструисаном систему. Такође се даје доказ да су изоморфни сви модели који задовољавају аксиому супремума, имају дефинисане релације и операције и својства из Колмогоровљеве конструкције.

Треће поглавље даје опис познатих конструкција од стране Дедекинда и Кошија. Описан је и један од начина конструкције реалних бројева који потиче од нестандардне анализе.

У четвртом поглављу описана је једна од главних идеја која је довела формализације појма алгоритма. Израчунљиви реални бројеви су уведени као бројеви за које постоји Тјурингова машина која их израчунава. Разматрани су и различити начини на који се може увести појам израчунљивости, а који потичу од различитих конструкција којима можемо увести реалне бројеве.

У додатку А је описано Штерн-Брокоово дрво и наведена су нека својства. Поред тога описано је на који начин се могу помоћу Штерн-Брокоовог дрвета описати сви позитивни рационални бројеви као коначни путеви у графу и начин на који реалне бројеве можемо увести као бесконачне путеве којима је један крај у корену дрвета.

У додатку Б описана је структура природних бројева са минималним бројем својстава који нам је потребан за Колмогоровљеву конструкцију.

Кључне речи: Конструкција реалних бројева, Аксиома супремума, Природни бројеви, Израчунљивост, Тјурингове машине, Штерн-Брокоово дрво

Садржај

1 Увод

Откриће ирационалних бројева се приписује Питагори[1] и његовим следбеницима. Они су открили да су дијагонала квадрата и његова страница несамерљиве. Две дужи d_1 и d_2 су самерљиве ако постоји рационалан број r такав да важи $d_1 = r \cdot d_2$. Ако је d дијагонала а a страница квадрата, тада не постоји рационалан број r такав да је $d = r \cdot a$. Када посматрамо јединични квадрат, из Питагорине теореме имамо да важи $2 = 1^2 + 1^2$. Ако би $\sqrt{2}$ био рационалан број, тада би оне били самерљиве. Дајемо познати доказ те чињенице.

Теорема 1.1. Број $\sqrt{2}$ је ирационалан.

Доказ. Претпоставимо супротно да је $\sqrt{2}$ рационалан. То значи да постоје природни бројеви m и n такви да је

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}.$$

За разломак $\frac{m}{n}$ можемо претпоставити да је сведен тј. m и n немају заједничких делитеља. Даље после квадрирања добијамо

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{m^2}{n^2}, \\ 2n^2 &= m^2. \end{aligned}$$

Закључујемо да је m^2 паран број, а одатле да је и m паран број. Број m можемо записати као $m = 2k$ за неки природан број k. Дакле

$$\begin{aligned} 2n^2 &= (2k)^2, \\ 2n^2 &= 4k^2, \\ n^2 &= 2k^2. \end{aligned}$$

Закључујемо да је n такође паран број, одакле добијамо контрадикцију јер смо претпоставили да је разломак $\frac{m}{n}$ сведен. $\square$

Антички Грци нису прихватали постојање ирационалних бројева, али нису могли да порекну постојање ирационалних геометријских величина као што је дијагонала квадрата. Због тога су Грци третирали геометријске величине другачије од бројева или када су посматрали геометријске величине, чинили су то тако да не спомињу ирационалне бројеве, већ само рационалне.

Да би дужине и друге геометријске величине третирали као бројеве, Грци су развили теорију пропорција како би избегли спомињање ирационалних бројева. Теорија пропорција се приписује Еудоксу[2]. Објашњавамо укратко теорију пропорција[3]. Кажемо да су дужине рационалне ако се могу представити као производ рационалног броја и неке фиксне јединичне дужи. Идеја Еудокса је

[1] Питагора са Самоса, рођен између 584. и 570. п. н. е. а умро је између 500. и 495. п. н. е. - грчки филозоф и математичар.

[2] Еудокс са Книда, (408. п. н. е. - 355. п. н. е.) - грчки математичар и астроном.

[3] Детаљан опис се може пронаћи у [11].

била да кажемо да је дужина λ одређена рационалним дужинама мањим од ње и рационалним дужинама већим од ње. Прецизније две дужине λ_1 и λ_2 су једнаке, ако за било коју рационалну дужину мању од λ_1 важи да је такође мања од λ_2 и ако за било коју рационалну дужину већу од λ_1 важи да је такође већа од λ_2. Дужина λ_1 је мања од дужине λ_2, ако постоји рационална дужина већа од λ_1, за коју важи да је мања од дужине λ_2. Теорија пропорција је била толико успешна да је успорила развој теорије реалних бројева за близу 2000 година. Такође теорија пропорција је директно инспирисала Дедекинда да конструише реалне бројеве.

Даљи развој теорије бројева се наставља тек у 19. веку. Са појавом Канторове теорије скупова реални бројеви су поново добили на значају. Развојем математичке анализе и теорије скупова, увиђа се својство супремума која поседује комплетно уређено поље реалних бројева, а које рационални бројеви немају. Наводимо следећу теорему која нам даје све еквивалентне облике аксиоме супремума.

Теорема 1.2. Следећа тврђења су еквивалентна [4]:

1. (Аксиома непрекидности) Ако су A и B непразни подскупови скупа $\mathbb{R}$, такви да је $x \leq y$ за све $x \in A, y \in B$, тада постоји елемент $z \in \mathbb{R}$, такав да је $x \leq z \leq y$ за све $x \in A, y \in B$.

2. (Супремум) Сваки непразан, одозго ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има супремум у $\mathbb{R}$.

3. (Инфимум) Сваки непразан, одоздо ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}$ има инфимум у $\mathbb{R}$.

4. а) (Архимедово[5] својство) За произвољне позитивне реалне бројеве a, b постоји (и јединствено је одређен) природан број n такав да је

$$(n-1)a \leq b < na.$$

   б) (Канторов[6] принцип уметнутих одсечака) Сваки низ уметнутих одсечака (I_n) на реалној правој има непразан пресек.

5. (Дедекиндова[7] аксиома) Ако су $D_1, D_2 \subset \mathbb{R}$ такви да је (D_1, D_2), Дедекиндов пресек, онда постоји најмање горње ограничење $\sup D_1 \in \mathbb{R}$ скупа D_1.

   Дедекиндов пресек је подела скупа $\mathbb{Q}$ рационалних бројева на два подскупа D_1 и D_2 таквих да важи:

   - D_1 је непразан.
   - $D_1 \neq \mathbb{Q}$. Еквивалентно D_2 је непразан.
   - Ако важи $x \in \mathbb{Q}$ и $y \in \mathbb{Q}$, $x < y$ и $y \in D_1$, онда $x \in \mathbb{Q}$.

[4] За доказ видети [5], [10] и [12].
[5] Архимед (287. п н. е. — 212. п. н. е.) - старогрчки математичар, физичар и астроном.
[6] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845–1918) - немачки математичар.
[7] Julius Wilhelm Richard Dedekind (1831-1916) - немачки математичар.

- Ако је $x \in D_1$, тада постоји $y \in D_1$ такво да $y > x$.

6. (Борел[8]-Лебегова[9] теорема) Свако отворено покривање J сегмента $[a, b]$ има коначно потпокривање.

7. (Болцано[10]-Вајерштрасова[11] теорема за скупове) Сваки бесконачан ограничен подскуп $A \subset \mathbb{R}$ има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

8. (Болцано-Вајерштрасова теорема за низове) Сваки ограничен низ реалних бројева (a_n) има бар једну тачку нагомилавања у $\mathbb{R}$.

9. (Вајерштрасова теорема) Нека је (a_n) растући низ реалних бројева. Тада је (a_n) конвергентан ако и само ако је ограничен одозго.

10. (Вајерштрасова теорема) Нека је (a_n) опадајући низ реалних бројева. Тада је (a_n) конвергентан ако и само ако је ограничен одоздо.

Конструкција реалних бројева задовољава својство супремума ако задовољава било које од наведених еквивалентних тврђења.

[8]Félix Édouard Justin Émile Borel (1871-1956) - француски математичар

[9]Henri Léon Lebesgue (1875-1941) - француски математичар.

[10]Bernardus Placidus Johann Nepomuk Gonzal Bolzano (1781-1848) - чешки математичар и свештеникл

[11]Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (1815-1897) - немачки математичар.

2 Колмогоровљева конструкција

Колмогоровљева[12] конструкција конструише систем који има својство супремума, а идеја конструкције се заснива на принципу мерења дужи који ћемо укратко описати. Прогласимо неку дуж за јединичну дуж у односу на коју меримо све остале дужи. Ако је d произвољна дуж прво тражимо највећи цео број који је мањи или једнак од d, означимо га са m_1. Тај број нам представља колико пута можемо надовезати јединичну дуж да тако настала дужина буде мања или једнака d. Ако је број m_1 мањи од d, онда посматрамо колико пута можемо надовезати половину јединичне дужи до d, означимо тај број са m_2. Ако је сада број $\frac{m_2}{2}$ мањи од d тада посматрамо $\frac{1}{3}$ јединичне дужи. Овај поступак понављамо све док не добијемо тачну дужину d или до у бесконачност ако је дуж d ирационална. Тај поступак можемо представити и преко неопадајућег низа рационалних бројева $m_1,\ \frac{m_2}{2},\ \frac{m_3}{3},\ ...$ који конвергира ка d. Како су нам имениоци унапред познати можемо их изоставити приликом записивања и тада нам остаје само низ природних бројева $m_1,\ m_2,\ m_3,\ ....$ На тај начин Колмогоровљева конструкција на прикривени начин конструише реалне бројеве из природних.

Већина конструкција реалних бројева подразумева да нам је познат скуп $\mathbb{Q}$ рационалних бројева као уређено поље које задовољава Архимедову аксиому. При Колмогоровљевој конструкцији реалних бројева полази се од скупа природних бројева

$$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \ldots,\ n,\ \ldots\},$$

и операција са њима. Понекад се узима да је скуп природних бројева скуп $\mathbb{N}$ са елементом 0, али ћемо при даљем раду сматрати да 0 не припада скупу природних бројева и користити ознаку $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Код Колмогоровљеве конструкције конструишемо позитивни део реалне праве, коју обележавамо са Φ. Поред тога на скупу Φ имамо операције сабирања $+$ и множења $\cdot$, као и релације $<$. На скупу Φ важи следећи скуп аксиома:

1. (Комутативност) За произвољне $\alpha,\ \beta \in \Phi$ важи:
$$\alpha + \beta = \beta + \alpha, \quad \alpha\beta = \beta\alpha.$$

2. (Асоцијативност) За произвољне $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Phi$ важи:
$$(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),\ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma).$$

3. (Дистрибутивност) За произвољне $\alpha,\ \beta,\ \gamma \in \Phi$ важи:
$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

4. За произвољне $\alpha,\ \beta \in \Phi$ важи тачно једна од релација:
$$\alpha < \beta,\ \alpha = \beta,\ \beta < \alpha.$$

[12] Андреј Колмогоров (1903-1987) - руски математичар.

5. Ако важи $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$ тада важи $\alpha < \gamma$.
6. Увек је тачно $\alpha < \alpha + \beta$.
7. Ако је $\alpha < \beta$ тада важи:
$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma,\ \alpha\gamma < \beta\gamma.$$
8. За произвољне $\alpha,\ \beta \in \Phi$ увек је могуће решити једначину
$$\alpha x = \beta,$$
α је увек различито од 0 јер радимо само са позитивним делом реалне праве.
9. За $\alpha < \beta$ увек је могуће решити једначину
$$\alpha + x = \beta.$$
10. (Аксиома супремума) За произвољан одозго ограничен скуп $\Phi' \subset \Phi$ постоји супремум.

Као помоћ при конструкцији користићемо и функцију $\left[\frac{*}{*}\right] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$. За аргументе $m, n \in \mathbb{N}$ вредност $\left[\frac{m}{n}\right]$ је јединствен број k из $\mathbb{N}_0$ такав да важи
$$kn \leq m < n(k+1).$$
Из дефиниције функције следе нека од својстава која ће нам требати при даљем раду.

Став 2.1. Нека су $m, n, m', n', l \in \mathbb{N}$ тада важи

i) $$\left[\frac{m}{n}\right] \leq \left[\frac{m'}{n}\right] \text{ где је } m < m',$$

ii) $$\left[\frac{m}{n}\right] \leq \left[\frac{m}{n'}\right] \text{ где је } n > n',$$

iii) $$\left[\frac{ml}{nl}\right] = \left[\frac{m}{n}\right],$$

iv) $$\left[\frac{\left[\frac{ml}{n}\right]}{l}\right] = \left[\frac{m}{n}\right],$$

v) $$\left[\frac{m}{1}\right] = m.$$

Доказ. **i)** Користимо неједнакости које нам представљају $k = \left[\frac{m}{n}\right]$ и $k' = \left[\frac{m'}{n}\right]$
$$kn \leq m < n(k+1)$$
$$k'n \leq m' < n(k'+1)$$

и комбинујући са неједнакоћу $m < m'$ видимо да важи

$$kn \leq m < m' < n(k' + 1)$$

или у краћем запису добијамо

$$kn < n(k' + 1)$$

одакле следи $k < k'+1$. Пошто се природни бројеви могу разликовати за најмање 1 (теорема Б.3), добијамо тражену неједнакост $k \leq k'$.
ii) Из неједнакости $kn \leq m < n(k+1)$ и $k'n' \leq m < n'(k'+1)$ следи $kn \leq m < n'(k'+1)$ или краће $kn < n'(k'+1)$. Примењујући $n > n'$ на претходну неједнакост добијамо $kn < n(k'+1)$ одакле следи $k \leq k'$.
iii) Директно следи из $kn \leq m < n(k+1)$ када се неједнакост помножи са природним бројем l.
iv) Нека су $k = \left[\frac{m}{n}\right]$ и $k' = \left[\frac{ml}{n}\right]$ тада важе једнакости

$$\begin{aligned} kn &\leq m < n(k+1) \\ k'n &\leq ml < n(k'+1). \end{aligned}$$

Множењем прве неједнакости са l добијамо $knl \leq ml < nl(k+1)$, из ових неједнакости добијамо $knl < n(k'+1)$ и $k'n < nl(k+1)$, односно $kl < k'+1$, тј. $kl \leq k'$ и $k' < l(k+1)$, што нам представља $k = \left[\frac{k'}{l}\right]$.
v) Пошто важи $m \cdot 1 \leq m < 1 \cdot (m+1)$, следи да је $\left[\frac{m}{1}\right] = m$. □

Функција $\left[\frac{*}{*}\right] : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ личи на познату функцију *цео број на ниже* и има иста својства као та функција, али овде напомињемо да функција коју смо ми дефинисали је функција две промењљиве $\left[\frac{x}{y}\right]$ којој су аргументи природни бројеви, није стандардна функција цео број на ниже која се дефинише као функција једног аргумента над реалним бројевима. Циљ нашег увођења функције је да избегнемо диреткно коришћење рационалних бројева како би конструкција била искључиво над природним бројевима.

2.1 Дефиниција позитивног реалног броја

Дефиниција 2.1. Позитивним реалним бројем ћемо називати функцију $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0$ са следећим својствима

Φ_1 За све природне бројеве k важи

$$\alpha(n) = \left[\frac{\alpha(kn)}{k}\right].$$

Еквивалентно за произвољне $k, n \in \mathbb{N}$ важи неједнакост

$$k\alpha(n) \leq \alpha(kn) < k(\alpha(n) + 1).$$

Φ_2 За произвољно $n \in \mathbb{N}$ постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да важи

$$\alpha(kn) > k\alpha(n).$$

Из скупа свих могућих функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ посматрамо само оне које имају својства Φ_1 и Φ_2 и њих ћемо сматрати реалним бројевима. Конкретне вредности за неку функцију $\alpha(1), \alpha(2), \alpha(3), \ldots$ представљају вредности $m_1, m_2, m_3, \ldots$ из Еуклидовог поступка мерења дужи који је описан у уводном делу.

Описујемо општи поступак којим за било који реални број можемо да нађемо функцију α која му одговара. Нека је x реалан број који желимо да представимо. Дефинишимо *цео број на горе* од реалног броја x као цео број $\lceil x \rceil$ такав да важи следећа неједнакост $\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil$. Функцију $\lceil \ \rceil$ читамо као најближи цео број на горе. На пример: $\lceil 1 \rceil = 1, \lceil 2 \rceil = 2, \lceil 2.5 \rceil = 3, \lceil 2.4 \rceil = 3, \lceil 2.6 \rceil = 3$. Сада сваки позитиван реалан број x можемо представити као функцију

$$\alpha(n) = \lceil nx \rceil - 1.$$ [13]

Функција $\alpha(n) = \lceil nx \rceil - 1$ директно на основу дефиниције испуњава својства Φ_1 и Φ_2[14]. Ова дефиниција је директно мотивисана разматрањима Еуклидовог поступка мерења који је описан у уводном делу. Ову функцију ћемо такође видети касније у мало другачијем облику при разматрањима изоморфности модела и израчунљивости. Дајемо неке примере:

- Произвољан природан број p представљамо као $\alpha(n) = \lceil np \rceil - 1 = np - 1$,
- Број $\frac{1}{2}$ тј. $\alpha(n) = \lceil n\frac{1}{2} \rceil - 1$ представљамо као следећи скуп формула

$$\begin{cases} \alpha(2n) = n - 1, \\ \alpha(2n+1) = n, \end{cases}$$

- Број $\frac{1}{3}$ тј. $\alpha(n) = \lceil n\frac{1}{3} \rceil - 1$ представљамо као следећи скуп формула

$$\begin{cases} \alpha(3n-1) = n - 1, \\ \alpha(3n) = n - 1, \\ \alpha(3n+1) = n. \end{cases}$$

За рационалне бројеве је лако пронаћи одговарајући скуп једнакости који га описује тако што се гледа именилац и праве случајеви нпр. ако посматрамо рационални број $\frac{m}{l}$ и функцију $\alpha(n) = \lceil n\frac{m}{l} \rceil - 1$, тада тражимо вредности функције α за све вредности аргумената од nl до $nl + (l - 1)$. За ирационалне бројеве се функција $\alpha(n) = \lceil nx \rceil - 1$ не може описати коначним скупом једнакости.

Позитивне реалне бројеве ћемо означавати малим словима грчког алфабета, а скуп свих позитивних реалних бројева са Φ. Ако функција задовољава услове Φ_1 и Φ_2 тада она припада скупу Φ.

[13] Функцију користимо само овде да интуитивно објаснимо дефиницију 2.1. и дамо примере пошто је читалац већ упознат са реалним бројевима. Реални бројеви још увек нису уведени па ни не можемо говорити о њима.

[14] У доказу теореме 13 се користи иста функција α са другачијом ознаком $\langle x \rangle$ ради конзистености са оригиналним решењем задатка, такође доказ да важе својства Φ_1 и Φ_2 за функцију α при доказу теореме 13 је читљивији без -1 у дефиницији функције α од оног како смо увели функцију овде.

Став 2.2. Ако $\alpha, \beta \in \Phi$ и за неко n_0 важи

$$\alpha(n_0) < \beta(n_0)$$

тада за све $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\alpha(n) \leq \beta(n).$$

Доказ. Како функција α припада скупу Φ и $k \in \mathbb{N}$, тада из особине Φ_1 следи

$$\alpha(kn) < k(\alpha(n) + 1), \text{ за све } n.$$

Ако је n_0 такво да $\alpha(n_0) < \beta(n_0)$, тада важи $\alpha(n_0) + 1 \leq \beta(n_0)$. Користећи се претходним неједнакостима добијамо

$$\alpha(kn_0) < k(\alpha(n_0) + 1) \leq k\beta(n_0) \leq \beta(kn_0), \text{ за све } k. \tag{2.1.1}$$

Ако би постојало k_0 такво да важи

$$\beta(k_0) < \alpha(k_0)$$

тада бисмо претходним расуђувањем имали да важи

$$\beta(k_0 n_0) < \alpha(k_0 n_0)$$

што је контрадикција са (2.1.1). □

Поредак на скупу Φ уводимо следећом дефиницијом:

Дефиниција 2.2.

$$\alpha < \beta$$

означава да постоји $n \in \mathbb{N}$ такво да

$$\alpha(n) < \beta(n).$$

Ако за свако $n \in \mathbb{N}$ важи

$$\alpha(n) = \beta(n)$$

тада кажемо да су позитивни реални бројеви α и β једнаки и означавамо са

$$\alpha = \beta.$$

За овако уведену релацију поретка из дефиниције и претходног става важи да је поредак транзитиван и да је увек тачна једна од релација

$$\alpha < \beta, \quad \alpha = \beta, \quad \beta < \alpha.$$

Транзитивност релације поретка следи из транзитивности релације поретка на природним бројевима. Нека су $\alpha, \beta, \gamma \in \Phi$ такви да је $\alpha < \beta$ и $\beta < \gamma$, тада по дефиницији постоје бројеви m и n такви да је $\alpha(n) < \beta(n)$ и $\beta(m) < \gamma(m)$. Из става 2.2 за m важи $\alpha(m) \leq \beta(m) < \gamma(m)$ одакле следи $\alpha < \gamma$. Тиме смо доказали да у нашој конструкцији важи аксиома 5.

2.2 Увођење основних операција

У овом поглављу уводимо аритметику позитивних реалних бројева. Дефинишемо сабирање и множење у складу са дефиницијом скупа Φ.

Геометријски дужи сабирамо тако што их надовежемо једну на другу. Нека су d_1 и d_2 две дужи, њиховим надовезивањем добијамо дуж $d_1 + d_2$. Ако су $m_1, \frac{m_2}{2}, \frac{m_3}{3}, \ldots$ и $n_1, \frac{n_2}{2}, \frac{n_3}{3}, \ldots$ одговарајући низови рационалних бројева као код Еуклидског поступка мерења, тада можемо да дефинишемо низ за дуж $d_1 + d_2$ као

$$m_1 + n_1, \frac{m_2 + n_2}{2}, \frac{m_3 + n_3}{3}, \ldots$$

што нам даје идеју како да дефинишемо збир два реална броја.

Теорема 2.1. Ако су α и β функције које припадају скупу Φ тада функција γ дефинисана са

$$\begin{cases} \gamma(n) & = \max_k \gamma_k(n), \\ \gamma_k(n) & = \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k))}{k}\right], \end{cases} \tag{2.1}$$

такође припада скупу Φ.

Доказ. Доказујемо да функција γ задовољава услове Φ_1 и Φ_2. Из услова Φ_1 за α и β важе неједнакости

$$\alpha(k) < k(\alpha(1) + 1)$$
$$\beta(k) < k(\beta(1) + 1).$$

Из особине **i)** функције $[\ \ ]$ следи неједнакост

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k) + \beta(k))}{k}\right] \leq \left[\frac{nk(\alpha(1) + \beta(1) + 2)}{k}\right] = n(\alpha(1) + \beta(1) + 2).$$

Последња неједнакост нам показује да су за фиксирано n, вредности функције $\gamma_k(n)$, $k \in \mathbb{N}$, су ограничене одозго, па је дефинисано $\gamma(n) = \max_k \gamma_k(n)$. Посебно, постоји k' такво да је $\gamma_{k'}(n) = \gamma(n)$.

Када заменимо k у γ_k са lk, где је $l \in \mathbb{N}$ имамо

$$\gamma_{lk}(n) = \left[\frac{n(\alpha(lk) + \beta(lk))}{lk}\right].$$

Користећи се својством **iii)** става 2.1 добијамо да за $l \in \mathbb{N}$ важи

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{l}{l} \cdot \frac{n(\alpha(k) + \beta(k))}{k}\right] = \left[\frac{n(l\alpha(k) + l\beta(k))}{lk}\right].$$

Ове неједнакости важе за све l према услову Φ_1: $l\alpha(k) \leq \alpha(lk)$ и $l\beta(k) \leq \beta(lk)$. Следи, из својства **i)** става 2.1, неједнакост

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n(l\alpha(k) + l\beta(k))}{lk}\right] \leq \left[\frac{n(\alpha(lk) + \beta(lk))}{lk}\right] = \gamma_{lk}(n).$$

Приметимо, ако је $k_0 \in \mathbb{N}$ такво да је $\gamma_{k_0}(n) = \gamma(n)$, онда за произвољно $l \in \mathbb{N}$ важи

$$\gamma_{k_0 l}(n) = \gamma(n). \tag{2.3}$$

Докажимо да γ задовољава својство Φ_1. Ако у $\gamma_k(n)$, n заменимо са nl где је $l \in \mathbb{N}$ имамо

$$\gamma_k(nl) = \left[\frac{nl(\alpha(k)+\beta(k))}{k}\right]$$

одакле из својства **iv)** симбола $[\ \ ]$ следи

$$\left[\frac{\gamma_k(nl)}{l}\right] = \left[\frac{\left[\frac{nl(\alpha(k)+\beta(k))}{k}\right]}{l}\right] = \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k))}{k}\right] = \gamma_k(n). \tag{2.4}$$

Тиме је доказано да функција γ_k задовољава својство Φ_1.

Нека су $k' \in \mathbb{N}$ и $k'' \in \mathbb{N}$ такви да важи $\gamma_{k'}(n) = \gamma(n)$ и $\gamma_{k''}(nl) = \gamma(nl)$. Тада за $k = k'k''$, према (2.3), важи $\gamma_k(n) = \gamma(n)$ и $\gamma_k(nl) = \gamma(nl)$. Ове једнакости заједно са (2.4) дају

$$\gamma(n) = \left[\frac{\gamma(nl)}{l}\right].$$

Тиме је доказано да функција γ задовољава својство Φ_1.

Сада показујемо да функција γ задовољава и својство Φ_2. Приметимо да постоји $k \in \mathbb{N}$ такво да важи

$$\begin{cases} \gamma_k(n) & = \gamma(n) \\ k\gamma_k(n) & < n(\alpha(k)+\beta(k)). \end{cases} \tag{2.5}$$

У супротном, за све k за које важи $\gamma_k(n) = \gamma(n)$ имали бисмо да важи $k\gamma_k(n) = n(\alpha(k)+\beta(k))$ (2.6). (У складу са дефиницијом, за произвољне n и k важи неједнакост $k\gamma_k(n) \leq n(\alpha(k)+\beta(k))$.) Узмимо неко k_0k за које важи $\gamma_{k_0}(n) = \gamma(n)$ и користећи се својством Φ_2 закључујемо да постоји l такво да важи $l\alpha(k_0) < \alpha(lk_0)$(2.7). У складу са (2.3) важи

$$\gamma_{lk_0}(n) = \gamma(n).$$

Одатле следи да и даље важи (2.6) ако се k_0 замени са lk_0

$$lk_0\gamma_{lk_0}(n) = n(\alpha(lk_0) + \beta(lk_0)).$$

Такође важи из (2.6)

$$lk_0\gamma_{k_0}(n) = ln(\alpha(k_0) + \beta(k_0)).$$

Последње две једнакости дају контрадикцију

$$\begin{aligned} lk_0\gamma_{k_0}(n) &= ln(\alpha(k_0)+\beta(k_0)) = ln\alpha(k_0) + ln\beta(k_0) \\ &<_{(2.7)} n\alpha(lk_0) + ln\beta(k_0) \leq n\alpha(lk_0) + n\beta(lk_0). \end{aligned}$$

јер важи $\gamma_{k_0}(n) = \gamma_{lk_0}(n) = \gamma(n)$, а десне стране су различите због (2.7) и услова Φ_1. Тиме смо доказали да постоји k такво да за које важи (2.5). За такво k важи

$$k\gamma(n) < n(\alpha(k) + \beta(k)),$$

одакле следи

$$k\gamma(n) + 1 \leq n(\alpha(k) + \beta(k)).$$

Помножимо ту неједнакост са l где је $l \geq k$ и на левој страни неједнакости заменимо у другом члану l са k

$$kl\gamma(n) + k \leq kl\gamma(n) + l.$$

Из те неједнакости следи

$$k(l\gamma(n) + 1) \leq ln(\alpha(k) + \beta(k).$$

или

$$l\gamma(n) + 1 \leq \left[\frac{ln(\alpha(k) + \beta(k))}{k}\right] = \gamma_k(nl).$$

Из дефиниције (2.1) функције γ важи:

$$l\gamma(n) + 1 \leq \gamma_k(ln) \leq \max_k \gamma_k(ln) = \gamma(ln).$$

Последњом неједнакошћу смо доказали да постоји $l \in \mathbb{N}$ за које важи

$$l\gamma(n) < \gamma(ln),$$

одакле следи да функција $\gamma(n)$ задовољава и својство Φ_2. Како функција $\gamma(n)$ испуњава оба услова она припада скупу Φ. $\square$

Дефиниција 2.3. Збир два позитивна реална броја α и β дефинишемо као

$$\gamma(n) = \max_k \left[\frac{n(\alpha(k) + \beta(k))}{k}\right]$$

где је $n \in \mathbb{N}$ произвољно и означавамо са

$$\alpha + \beta = \gamma.$$

Дајемо пример на сабирању бројева 2 и 3 односно $\alpha(n) = n \cdot 2 - 1$ и $\beta(n) = n \cdot 3 - 1$:

$$\max_k \left[\frac{n(\alpha(k) + \beta(k))}{k}\right] = \max_k \left[\frac{n(k \cdot 2 - 1 + k \cdot 3 - 1)}{k}\right] =$$
$$\max_k \left[\frac{n(k \cdot 5 - 2)}{k}\right] = n \cdot 5 - 1.$$

Оправдање за последњи корак се може пронаћи на 24. страни.

Желимо да уведемо множење са сличном идејом као код сабирања. Нека су d_1 и d_2 две дужи и $m_1, \frac{m_2}{2}, \frac{m_3}{3}, ...$ и $n_1, \frac{n_2}{2}, \frac{n_3}{3}, ...$ одговарајући низови рационалних бројева као код Еуклидског поступка мерења. Производу две дужи $d_1 \cdot d_2$ одговара следећи низ

$$m_1 n_1, \frac{m_2 n_2}{2^2}, \frac{m_3 n_3}{3^2}, ...$$

што нам даје идеју како да дефинишемо производ два реална броја.

Теорема 2.2. Ако су α и β две функције из скупа Φ тада и функција γ дефинисана са

$$\gamma(n) = \max_k \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] \tag{3.1}$$

такође припада скупу Φ.

Доказ. Уводимо ознаку

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right]. \tag{3.2}$$

Из својства Φ_1 и својстава става 2.1 важи:

$$\gamma_k(n) \leq n(\alpha(1)+1)(\beta(1)+1).$$

Тиме смо доказали да за произвољно n постоји $\gamma(n)$, и да можемо пронаћи k за које важи

$$\gamma_k(n) = \gamma(n). \tag{3.3}$$

Из (3.2) заменом k са lk, где је $l \in \mathbb{N}$ имамо:

$$\gamma_{lk}(n) = \left[\frac{n\alpha(kl)\beta(kl)}{(kl)^2}\right].$$

Из својства става 2.1 важи:

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n(l\alpha(k)l\beta(k))}{(kl)^2}\right].$$

Упоређујући последња два израза и користећи својство Φ_1 и својство **iv)** става 2.1, добијамо да важи неједнакост $\gamma_k(n) \leq \gamma_{lk}(n)$. Одатле закључујемо да ако је k_0 такво да $\gamma_{k_0}(n) = \gamma(n)$, тада за поизвољно l такође важи

$$\gamma_{lk_0}(n) = \gamma(n). \tag{3.4}$$

Заменом у (3.2) n са ln имамо

$$\gamma_{k_0}(ln) = \left[\frac{nl\alpha(k_0)\beta(k_0)}{k_0^2}\right]$$

Из својства **iv)** става 2.1 важи

$$\gamma_{k_0}(n) = \left[\frac{\gamma_{k_0}(ln)}{l}\right]. \tag{3.5}$$

Нека су k' и k'' из $\mathbb{N}$ такви да важи

$$\gamma_{k'}(n) = \gamma(n)$$
$$\gamma_{k''}(ln) = \gamma(ln),$$

закључујемо да за $k = k'k''$ из (3.4) важи:

$$\gamma_k(n) = \gamma(n),$$
$$\gamma_k(ln) = \gamma(ln).$$

Из тих једнакости и (3.5) важи

$$\gamma(n) = \left[\frac{\gamma(ln)}{l}\right].$$

Тиме смо доказали да функција дефинсана са (3.1) задовољава својство Φ_1. Сада доказујемо да функција задовољава и својство Φ_2. Прво доказујемо да потоји k такво да истовремено важе следеће релације, за све n,

$$\begin{cases} \gamma_k(n) = \gamma(n), \\ k^2\gamma_k(n) < n\alpha(k)\beta(k). \end{cases} \tag{3.6}$$

Да бисмо ово доказали претпоставимо супротно. Нека за произвољно k важи

$$\gamma_k(n) = \gamma(n)$$

и уместо неједнакости нека важи једнакост

$$k^2\gamma_k(n) = n\alpha(k)\beta(k). \tag{3.7}$$

Узмемо једно од k_0 за које важи $\gamma_{k_0}(n) = \gamma(n)$ и користимо се својством Φ_2, пронађемо $l \in \mathbb{N}$ за које важи

$$l\alpha(k_0) < \alpha(lk_0). \tag{3.8}$$

Из (3.4) важи $\gamma_{lk_0}(n) = \gamma(n)$. Тада једначина (3.7) важи и када се k у њој замени са lk_0,

$$(lk_0)^2\gamma_{lk_0}(n) = n\alpha(lk_0)\beta(lk_0).$$

Такође важи када се (3.7) помножи са l^2:

$$(lk_0)^2\gamma_{k_0}(n) = nl\alpha(k_0)l\beta(k_0).$$

Из тога што важи $\gamma_{k_0}(n) = \gamma_{lk_0}(n) = \gamma(n)$, својства Φ_1 и (3.8) закључујемо да имамо контрадикцију из последњих двеју неједнакости. Дакле постоји k такво да важи (3.6).
За такво k важи

$$k^2\gamma(n) < n\alpha(k)\beta(k),$$

одакле следи

$$k^2\gamma(n) + 1 \leq n\alpha(k)\beta(k).$$

Помножимо обе стране последње нејеначине са $l \geq k^2$ и на левој страни заменимо l са k^2 у другом члану

$$lk^2\gamma(n) + k^2 \leq lk^2\gamma(n) + l \leq nl\alpha(k)\beta(k)$$

и добијамо

$$k^2(l\gamma(n)+1) \leq ln\alpha(k)\beta(k),$$

одакле следи

$$l\gamma(n)+1 \leq \left[\frac{ln\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] = \gamma_k(ln) \leq \gamma(ln).$$

Тиме је пронађено $l \in \mathbb{N}$ такво да важи

$$l\gamma(n) < \gamma(ln),$$

одакле следи да функција γ задовољава и својство Φ_2. Доказали смо да функција γ припада скупу Φ. $\square$

Сада можемо да уведемо производ два реална броја.

Дефиниција 2.4. Производ два позитивна реална броја α и β дефинишемо као

$$\gamma(n) = \max_k \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right]$$

где је $k, n \in \mathbb{N}$ произвољно и означавамо са

$$\alpha \cdot \beta = \gamma.$$

Дајемо пример на производу бројева 2 и 3 односно $\alpha(n) = n \cdot 2 - 1$ и $\beta(n) = n \cdot 3 - 1$:

$$\max_k \left[\frac{n(\alpha(k)\beta(k))}{k^2}\right] = \max_k \left[\frac{n(k \cdot 2 - 1)\cdot(k \cdot 3 - 1)}{k^2}\right] =$$
$$\max_k \left[\frac{n(k^2 \cdot 6 - k \cdot 2 - k \cdot 3 + 1)}{k^2}\right] = n \cdot 6 - 1.$$

Оправдање за последњи корак се налази на 23. страни последица 1.

У наставку доказујемо својства овако уведених операција сабирања и множења и њихове међусобне односе.

Теорема 2.3. Операција сабирања уведена дефинијом (2.3) је комутативна и асоцијативна.

Доказ. Комутативност следи директно из дефиниције јер комутативност важи за природне бројеве:

$$\alpha + \beta = \max_k \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k))}{k}\right] = \max_k \left[\frac{n(\beta(k)+\alpha(k))}{k}\right] = \beta + \alpha.$$

Нека су α, β, γ произвољни реални бројеви. Уводимо ознаке:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = \delta, \\ \delta + \gamma = \epsilon \end{cases} \tag{4.1}$$

и дефинишемо функције:

$$\begin{cases} \eta(n) = \max_k \eta_k(n) \\ \eta_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k)+\gamma(k))}{k}\right]. \end{cases} \tag{4.2}$$

Овде треба приметити да смо функцију η дефинисали исто као и при дефинисању операције сабирања, па сва доказана својства такође важе и за функцију η. Дакле постоји k такво да важи $\eta_k(n) = \eta(n)$.

У складу са (4.1) дефиницијом сабирања имамо:

$$\begin{cases} \epsilon(n) = \max_k \epsilon_k(n) \\ \epsilon_k(n) = \left[\frac{n(\delta(k)+\gamma(k))}{k}\right]. \end{cases} \tag{4.3}$$

и

$$\begin{cases} \delta(k) = \max_{k'} \delta_{k'}(k) \\ \delta_{k'}(k) = \left[\frac{k(\alpha(k')+\beta(k'))}{k'}\right]. \end{cases} \tag{4.4}$$

Из (4.3) за произвољно k следи:

$$k\epsilon_k(n) \leq n(\delta(k) + \gamma(k)). \tag{4.5}$$

Такође из (4.4) за произвољно k' следи

$$k'\delta_{k'}(k) \leq k(\alpha(k') + \beta(k')).$$

Узмимо такво k' за које важи

$$\delta_{k'}(k) = \delta(k),$$

одакле закључујемо да важи:

$$k'\delta(k) \leq k(\alpha(k') + \beta(k')). \tag{4.6}$$

Помножимо обе стране у (4.5) са k' и искористимо неједнакост (4.6) одакле добијамо

$$kk'\epsilon_k(n) \leq n(k\alpha(k') + k\beta(k') + k'\gamma(k))$$

даље следи

$$kk'\epsilon_k(n) \leq n(\alpha(kk') + \beta(kk') + \gamma(kk')).$$

Када заменимо kk' у (4.2), следи:

$$\epsilon_k(n) \leq \left[\frac{n(\alpha(kk') + \beta(kk') + \gamma(kk'))}{kk'}\right] = \eta_{kk'}(n) \leq \eta(n),$$

одакле за произвољно k важи

$$\epsilon(n) \leq \eta(n). \tag{4.7}$$

Доказујемо обратну неједнакост. Из формуле (4.4), за $k = k'$ имамо $\delta_k(k) = \alpha(k) + \beta(k)$, одакле следи

$$\alpha(k) + \beta(k) \leq \delta(k). \tag{4.8}$$

Узимајући у обзир (4.2) и (4.3) и својство Φ_1, из (4.8) добијамо

$$\eta_k(n) \leq \epsilon_k(n)$$

или

$$\eta(n) \leq \epsilon(n).$$

Из последње неједнакости и (4.7) следи

$$\eta(n) = \epsilon(n),$$

из те неједнакости асоцијативност је очигледна. □

Теорема 2.4. Операција множења уведена дефиницијом (2.4) је комутативна и асоцијативна.

Доказ. Комутативност следи из комутативности природних бројева.

$$\alpha \cdot \beta = \max_k \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] = \max_k \left[\frac{n\beta(k)\alpha(k)}{k^2}\right] = \beta \cdot \alpha$$

Доказујемо асоцијативност. Нека су α, β, γ три произвољна елемента скупа Φ. Уводимо ознаке:

$$\begin{cases} \alpha\beta = \delta, \\ \delta\gamma = \epsilon \end{cases} \tag{5.1}$$

и дефинишемо функцију

$$\begin{cases} \eta(n) = \max_k \eta_k(n), \\ \eta_k(n) = \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)\gamma(k)}{k^3}\right]. \end{cases} \tag{5.2}$$

Постоји k такво да важи $\eta_k(n) = \eta(n)$. Из (5.1) такође имамо

$$\begin{cases} \epsilon(n) = \max_k \epsilon_k(n), \\ \epsilon_k(n) = \left[\frac{n\delta(k)\gamma(k)}{k^2}\right] \end{cases} \tag{5.3}$$

и

$$\begin{cases} \delta(n) = \max_k \delta_k(n), \\ \delta_{k'}(k) = \left[\frac{k\alpha(k')\beta(k')}{k'^2}\right]. \end{cases} \tag{5.4}$$

Из (5.3) за проивољно k важи:

$$k^2\epsilon_k(n) \leq k\delta(k)\gamma(k), \tag{5.5}$$

и из (5.4) за произвољно k' важи:

$$k'^2 \delta_{k'}(k) \le n\alpha(k')\beta(k').$$

Узмимо такво k' за које важи $\delta_{k'}(k) = \delta(k)$ одакле закључујемо

$$k'^2 \delta(k) \le k\alpha(k')\beta(k'). \tag{5.6}$$

Формуле (5.5) и (5.6) заједно нам дају:

$$k^3 k'^3 \epsilon_k(n) \le_{(5.5)} kk'^3 n\delta(k)\gamma(k) \le_{(5.6)} kk'nk\alpha(k')\beta(k')\gamma(k) \le n\alpha(kk')\beta(kk')\gamma(kk')$$

одакле следи користећи се својством Φ_1 неједнакост

$$(kk')^3 \epsilon_k(n) \le n\alpha(kk')\beta(kk')\gamma(kk').$$

Последња неједнакост нам са (5.2) даје:

$$\epsilon_k(n) \le \left[\frac{n\alpha(kk')\beta(kk')\gamma(kk')}{(kk')^3}\right] = \eta_{kk'}(n) \le \eta(n),$$

или општије из произвољности k

$$\epsilon(n) \le \eta(k). \tag{5.7}$$

Доказујемо обратну неједнакост. Приметимо да (5.4) за $k = k'^2$ даје:

$$\delta_{k'}(k'^2) = \alpha(k')\beta(k')$$

одакле због произвољности k' можемо закључити

$$\alpha(k)\beta(k) \le \delta(k^2) \tag{5.8}$$

за произвољно k. Из (5.2) убацујући последњу неједнакост закључујемо:

$$\eta_k(n) \le \left[\frac{n\delta(k^2)\gamma(k)}{k^3}\right] \le \left[\frac{n\delta(k^2)\gamma(k^2)}{k^4}\right].$$

Из последње неједнакости и (5.3) следи неједнакост

$$\eta_k(n) \le \epsilon_{k^2}(n) \le \epsilon(n)$$

или због произљности k:

$$\eta(n) \le \epsilon(n). \tag{5.9}$$

Неједнакости (5.7) и (5.9) дају једнакост

$$\epsilon(n) = \eta(n),$$

из које следи асоцијативност операције множења. □

Теорема 2.5. Ако су α, β, γ произвољни реални бројеви из скупа Φ тада важи следећа једнакост

$$(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma.$$

Доказ. Нека су α, β, γ произвољни реални бројеви из скупа Φ. Уводимо ознаке:

$$\begin{cases} \alpha\gamma = \delta, \\ \beta\gamma = \epsilon, \\ \delta + \epsilon = \eta, \\ \alpha + \beta = \lambda, \\ \lambda\gamma = \nu. \end{cases} \tag{6.1}$$

Доказујемо да је $\nu = \eta$, из те неједнакости следи да важи дистрибутивни закон. Уводимо помоћну функцију:

$$\begin{cases} \mu(n) = \max_k \mu_k(n) \\ \mu_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k))\gamma(k)}{k^2}\right]. \end{cases} \tag{6.2}$$

По дефиницији множења и сабирања имамо и следеће формуле:

$$\begin{cases} \eta(n) = \max_k \eta_k(n), \\ \eta_k(n) = \left[\frac{n(\delta(k)+\epsilon(k))}{k}\right] \end{cases} \tag{6.3}$$

$$\begin{cases} \delta(k) = \max_{k'} \delta_{k'}(k), \\ \delta_{k'}(k) = \left[\frac{k\alpha(k')\gamma(k')}{k'^2}\right] \end{cases} \tag{6.4}$$

$$\begin{cases} \epsilon(k) = \max_{k'} \epsilon_{k'}(k), \\ \epsilon_{k'}(k) = \left[\frac{k\beta(k')\gamma(k')}{k'^2}\right]. \end{cases} \tag{6.5}$$

Фиксирамо k и пронађемо k'', k''' такве да важе једнакости

$$\delta_{k''}(k) = \delta(k)$$
$$\epsilon_{k'''}(k) = \epsilon(k).$$

За $k' = k''k'''$ важи $\delta_{k'}(k) = \delta(k)$ и $\epsilon_{k'}(k) = \epsilon(k)$.

Из (6.4) и (6.5) за такво k' важе неједнакости:

$$k'^2\delta(k) \leq k\alpha(k')\gamma(k'),$$
$$k'^2\epsilon(k) \leq k\beta(k')\gamma(k').$$

Сабирањем тих неједнакости добијамо:

$$k'^2(\delta(k) + \epsilon(k)) \leq k(\alpha(k') + \beta(k'))\gamma(k'). \tag{6.6}$$

Узимајући у обзир (6.3), (6.6) и (6.2) добијамо неједнакости:

$$\eta_k(n) = \left[\frac{nk'^2(\delta(k) + \epsilon(k))}{k'^2 k}\right] \leq \left[\frac{n(\alpha(k') + \beta(k'))\gamma(k')}{k'^2}\right] = \mu_{k'}(n) \leq \mu(n),$$

одакле због произвољности k следи $\eta(n) \leq \mu(n)$ (6.7).

Доказујемо обратну неједнакост. Као у (5.8) имамо

$$\alpha(k)\gamma(k) \leq \delta(k^2)$$

и

$$\beta(k)\gamma(k) \leq \epsilon(k^2),$$

одакле из (6.2) и (6.3) имамо:

$$\mu_k(n) \leq \left[\frac{n(\delta(k^2) + \epsilon(k^2))}{k^2}\right] = \eta_{k^2}(n) \leq \eta(n).$$

Како је k произвољно важи $\mu(n) \leq \eta(n)$. Последња неједнакост и (6.7) дају $\eta(n) = \mu(n)$. (6.8) Из дефиниције (6.1) за ν и λ имамо формуле:

$$\begin{cases} \nu(n) = \max_k \nu_k(n), \\ \nu_k(n) = \left[\frac{n\lambda(k)\gamma(k)}{k^2}\right] \end{cases} \tag{6.9}$$

и

$$\begin{cases} \lambda(k) = \max_{k'} \lambda_{k'}(k), \\ \lambda_{k'}(k) = \left[\frac{k(\alpha(k')+\beta(k'))}{k'}\right]. \end{cases} \tag{6.10}$$

Пронађемо такво k' такво да

$$\lambda_{k'}(k) = \lambda(k).$$

За такво k' из (6.10) имамо неједнакост:

$$k'\lambda(k) \leq k(\alpha(k') + \beta(k')).$$

Из последње неједнакости и из (6.9) и (6.2) добијамо да важе следеће неједнакости:

$$\nu_k(n) = \left[\frac{nk'^2\lambda(k)\gamma(k)}{k'^2k^2}\right] \leq \left[\frac{nk'k(\alpha(k') + \beta(k'))\gamma(k)}{k'^2k^2}\right] \leq$$
$$\left[\frac{n(\alpha(kk') + \beta(kk') + \gamma(kk'))}{(kk')^2}\right] = \mu_{kk'}(n) \leq \mu(n).$$

Одакле из произвољности k следи $\nu(n) \leq \mu(n)$ (6.11). Доказујемо обратну неједнакост. Из (4.8) за произвољно k важи неједнакост $\alpha(k) + \beta(k) \leq \lambda(k)$. Из (6.2) и (6.9) изводимо неједнакост $\mu_k(n) \leq \nu_k(n)$ одакле добијамо $\mu(n) \leq \nu(n)$. Последња неједнакост заједно са (6.9) даје

$$\mu(n) = \nu(n)$$

одакле са једнакошћу (6.8) закључујемо да за произвољно n важи

$$\eta(n) = \nu(n)$$

тј.

$$\eta = \nu.$$

$\square$

Како смо дефинисали и доказали својства аритметичких операција прелазимо на везе између операција и релације поретка на скупу Φ.

Теорема 2.6. Операција сабирања је монотона. Нека су α, β и γ произвољни елементи скупа Φ и $\alpha < \beta$, тада важи

$$\alpha + \gamma < \beta + \gamma.$$

Доказ. Уводимо ознаке:

$$\alpha + \gamma = \delta,$$
$$\beta + \gamma = \epsilon.$$

По дефиницији изрази за δ и ϵ су:

$$\begin{cases} \delta(n) = \max_k \delta_k(n), \\ \delta_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k)+\gamma(k))}{k}\right], \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon(n) = \max_k \epsilon_k(n), \\ \epsilon_k(n) = \left[\frac{n(\beta(k)+\gamma(k))}{k}\right]. \end{cases} \tag{7.1}$$

Приметимо да постоји k такво да важи $\alpha(k) + 1 < \beta(k)$ (7.2). Заиста, из услова теореме (и деф. 2.2) следи да постоји природно k' за које важи $\alpha(k') < \beta(k')$ тј. $\alpha(k') + 1 \leq \beta(k')$, по својству Φ_2 можемо пронаћи k'', за које важи $k''\beta(k') < \beta(k'k'')$, тада

$$\alpha(k'k'') + 1 \leq k''(\alpha(k') + 1) \leq k''\beta(k') < \beta(k'k'').$$

Нека је k такво да важи неједнакост (7.2) и n такво да $n > k$. За такво n и k важи:

$$k < n(\beta(k) - (\alpha(k) + 1))$$

тиме и за произвољно природно l имамо

$$kl < n(\beta(kl) - \alpha(kl)),$$

одакле следи

$$kl + n(\alpha(kl) + \gamma(kl)) < n(\beta(kl) + \gamma(kl)). \tag{7.3}$$

За произвољно дато фиксирано n пронађемо такво l за које важи

$$\delta_l(n) = \delta(n).$$

Тада за произвољно k такође важи једнакост

$$\delta_{kl}(n) = \delta(n).$$

Заменимо у (7.1), k са kl добијамо:

$$kl\delta(n) \leq n(\alpha(kl) + \gamma(kl)).$$

Последња неједнакост заједно са (7.3) даје:

$$kl(\delta(n)+1) < n(\beta(kl)+\gamma(kl))$$

или

$$\delta(n)+1 \leq \left[\frac{n(\beta(kl)+\gamma(kl))}{kl}\right] = \epsilon_{kl}(n) \leq \epsilon(n),$$

тј. пронашли смо такво n да важи

$$\delta(n) < \epsilon(n).$$

Дакле, $\delta < \epsilon$, тј. $\alpha+\gamma < \beta+\gamma$. □

Теорема 2.7. Операција множења је монотона. Нека су α, β и γ произвољни елементи скупа Φ и $\alpha < \beta$, тада

$$\alpha\gamma < \beta\gamma.$$

Доказ. Уводимо ознаке:

$$\alpha\gamma = \delta,$$
$$\beta\gamma = \epsilon.$$

По дефиницији изрази за δ и ϵ су:

$$\begin{cases} \delta(n) = \max_k \delta_k(n), \\ \delta_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k)\gamma(k))}{k^2}\right], \end{cases} \quad \begin{cases} \epsilon(n) = \max_k \epsilon_k(n), \\ \epsilon_k(n) = \left[\frac{n(\beta(k)\gamma(k))}{k^2}\right]. \end{cases} \tag{7.4}$$

Приметимо да ако је k' такво да важи неједнакост (7.2) и $\gamma(k'') > 0$, тада и за $k = k'k''$ важе неједнакости:

$$\begin{cases} \alpha(k)+1 < \beta(k) \\ \gamma(k) > 0 \end{cases} \tag{7.5}$$

Заиста из

$$\alpha(k'k'')+1 \leq k''(\alpha(k')+1) < k''\beta(k') \leq \beta(k'k'')$$

и

$$\gamma(k'k'') \geq k'\gamma(k'') > 0.$$

Узмимо k које задовољава неједнакости (7.5) и важи $n > k'$. За такве n и k имамо:

$$k^2 < n(\beta(k)-(\alpha(k)+1)) \leq n(\beta(k)-(\alpha(k)+1))\gamma(k).$$

Штавише за произвољно природно l важи

$$(kl)^2 < n(\beta(kl)-\alpha(kl))\gamma(kl)$$

или

$$(kl)^2 + n\alpha(kl)\gamma(kl) < n\beta(kl)\gamma(kl). \tag{7.6}$$

За произвољно фиксирано n пронађемо такво l да је

$$\delta_l(n) = \delta(n).$$

Тада за произвољно k, такође важи да важи једнакост

$$\delta_{kl}(n) = \delta(n).$$

Заменимо у (7.4) k са kl, и закључујемо:

$$(kl)^2\delta(n) \leq n\alpha(kl)\gamma(kl).$$

Последња неједнакост са (7.6) даје:

$$(kl)^2(\delta(n)+1) \leq n\beta(kl)\gamma(kl)$$

или

$$\delta(n)+1 \leq \left[\frac{n\beta(kl)\gamma(kl)}{(kl)^2}\right] = \epsilon_{kl}(n) \leq \epsilon(n).$$

Тиме смо доказали да постоји такво n за које важи $\delta(n) < \epsilon(n)$ тј.

$$\delta < \epsilon \Leftrightarrow \alpha\gamma < \beta\gamma.$$

□

Реалне бројеве смо до сада посматрали као функције које сликају природне бројеве у природне бројеве. Видели смо на почетку рада како можемо представити природне бројеве у ширем систему који конструишемо. Сада хоћемо да докажемо да се наша нова репрезентација природних бројева стварно понаша као скуп $\mathbb{N}$ са свим операцијама и релацијама дефинисаним на њему. Општије, при конструкцији проширења система интересује нас како у проширеном систему видимо систем из кога смо га смо га конструисали.

Уводимо једну добро одабрану функцију и доказујемо да припада скупу Φ.

Став 2.3. Функција $P(n) = pn - 1$, где је $p \in \mathbb{N}$ припада скупу Φ.

Доказ. Директно видимо да за произвољне k и n важи

$$k(np-1) \leq knp - 1 < knp,$$

одакле следи

$$\left[\frac{P(kn)}{k}\right] = \left[\frac{knp-1}{k}\right] = np - 1 = P(n).$$

Тиме је испуњен услов Φ_1. Услов Φ_2 следи из очигледне неједнакости која важи за $k \geq 2$:

$$k(np-1) < knp - 1 \Leftrightarrow kP(n) < P(kn).$$

□

Такође доказујемо и помоћни став да је приликом дефиниције множења два броја небитно по којим k узимамо максимум.

Став 2.4. Ако фунцкије $\alpha(n)$ и $\beta(n)$ припадају скупу Φ, тада важи

$$\max_k \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] = \max_{k,k'} \left[\frac{\alpha(nk')\beta(k)}{k'k}\right]. \tag{8.1}$$

Доказ. Из својстава става 2.1 директно следи

$$\left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] \leq \left[\frac{\alpha(nk)\beta(k)}{k^2}\right] = \left[\frac{n^2\alpha(nk)\beta(k)}{n^2k^2}\right] \leq \left[\frac{n\alpha(nk)\beta(nk)}{(nk)^2}\right],$$

одакле закључујемо:

$$\max_k \left[\frac{n\alpha(k)\beta(k)}{k^2}\right] = \max_k \left[\frac{\alpha(nk)\beta(k)}{k^2}\right] \leq$$
$$\max_{k,k'} \left[\frac{\alpha(nk)\beta(k')}{kk'}\right] \leq \max_{k,k'} \left[\frac{\alpha(nkk')\beta(kk')}{(kk')^2}\right]$$

што нам доказује (8.1). □

Теорема 2.8. За произвољно $\alpha \in \Phi$ важи $\alpha \cdot \mathbf{1} = \alpha$, где је

$$\mathbf{1}(n) = n - 1.$$

Доказ. Уведимо ознаку $\alpha \cdot \mathbf{1} = \gamma$. По дефиницији производа и (8.1) важи:

$$\begin{cases} \gamma(n) = \max_{k,k'} \gamma_k^{k'}(n) \\ \gamma_k^{k'}(n) = \left[\frac{\alpha(nk)(k'-1)}{kk'}\right]. \end{cases} \tag{8.2}$$

Следи, по својству Φ_1 да важи $\alpha(nk) < k(\alpha(n)+1)$ па добијамо

$$\gamma_k^{k'}(n) < \alpha(n) + 1,$$

или $\gamma_k^{k'}(n) \leq \alpha(n)$. Како су k и k' произвољни следи

$$\gamma(n) \leq \alpha(n). \tag{8.3}$$

Обратно, узмемо природно k такво да важи

$$k\alpha(n) \leq \alpha(kn) - 1$$

и

$$k' > \alpha(nk).$$

Тада

$$\gamma_k^{k'}(n) = \left[\frac{\alpha(nk)(k'-1)}{kk'}\right] = \left[\frac{k'\alpha(nk) - \alpha(nk)}{kk'}\right] \geq$$
$$\left[\frac{k'\alpha(nk) - k'}{kk'}\right] \geq \left[\frac{k\alpha(n)}{k}\right] = \alpha(n),$$

одакле следи $\gamma(n) \geq \alpha(n)$. Последња неједнакост заједно са (8.3) показује $\gamma(n) = \alpha(n)$ за произвољно природно n. □

Доказали смо да је функција $\mathbf{1}(n) = n - 1$ неутрал за множење.
Последица 1.: Ако је p природан број и $\alpha \cdot p = \gamma$, тада важи

$$\gamma(n) = \alpha(pn). \tag{8.4}$$

Доказ. По дефиницији множења и (8.1) имамо

$$\gamma(n) = \max_{k,k'} \left[\frac{\alpha(k)(npk' - 1)}{kk'} \right],$$

а из теореме 8. имамо да важи $\alpha \cdot 1 = \alpha$, одакле следи

$$\max_{k,k'} \left[\frac{\alpha(k)(nk' - 1)}{kk'} \right] = \alpha(n).$$

Последње две формуле нам потврђују (8.4). □

Ако за произвољно природно p посматрамо скуп функција P дефинисаних са $P(n) = pn - 1$, примећујемо да је скуп $P \subset \Phi$ једно утапање $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq)$ у $(\Phi, +, \cdot, \leq)$. Доказујемо да $(P, +, \cdot, \leq)$ има структуру природних бројева.

Докажимо да је поредак природних бројева сачуван у Φ. Ако су p и q природни бројеви за које важи $p < q$ тада

$$np - 1 < nq - 1$$

одакле следи $p(n) < q(n)$ за свако n. Чува се поредак из скупа природних бројева у скупу Φ. Докажимо да је скуп P затворен за операције дефинисане на Φ. Уводимо ознаку $r = p \cdot q$, тада по формули (8.4) имамо да важи

$$p(n)q = p(nq) = p(nq) - 1 = q(np) - 1 = q(np) = pq(n) = r(n),$$

дакле за производ два природна броја имамо и одговарајући начин да множимо функције које нам представљају природне бројеве. Преостаје нам још да докажемо затвореност за сабирање. Уведимо ознаке

$$p + q = r$$

и

$$p + q = \gamma,$$

где последње сабирање посматрамо у смислу дефиниције (2.3). сабирања у скупу Φ. По дефиницији

$$\begin{cases} \gamma(n) = \max_k \gamma_k(n) \\ \gamma_k(n) = \left[\frac{n(k(p+q)-2)}{k} \right] \end{cases},$$

одакле следи

$$k\gamma_k(n) \leq n(k(p+q) - 2) < nk(p+q),$$

или

$$\gamma_k(n) \leq (p+q)n - 1,$$

због произвољности k следи

$$\gamma(n) \leq (p+q)n - 1 = r(n).$$

Обратно, за $k \geq 2$ важи

$$r(n) = (p+q)n - 1 = \left[\frac{n(k(p+q)-k)}{k}\right] \leq \left[\frac{n(k(p+q)-2)}{k}\right] = \gamma_k(n) \leq \gamma(n).$$

Тиме смо доказали $\gamma(n) = r(n)$.

Теорема 2.9. Једначина

$$\alpha\xi = \beta,$$

где су α и β елементи скупа Φ, увек има јединствено решење у скупу Φ. Број ξ зовемо решењем једначине и количником дељења β sa α. Решење означавамо са $\frac{\beta}{\alpha}$.

Доказ. Без умањења општости можемо узети да је $\beta = 1$, тј. $\beta(n) = n - 1$. Ако β није једнако 1, тада решавамо једначину $\frac{\alpha}{\beta}\xi = 1$. Претпоставимо да је $\alpha > 1$. Доказујемо да је решење једначине $\alpha\xi = 1$ дато формулом

$$\begin{cases} \xi(n) = \max_k \xi_k(n), \\ \xi_k(n) = \left[\frac{n(k-1)}{\alpha(k)}\right]. \end{cases} \tag{9.1}$$

Приметимо да ако је $\alpha(1) = 0$ тада по својству Φ_1, $\alpha(k) < k(\alpha(1)+1) = k$ или $\alpha(k) \leq k-1$. Одакле ако је $\alpha > 1$, тада $\alpha(1) > 0$ и $\alpha(k) \geq k\alpha(1) > 0$ за произвољно k. Прво доказујемо да функција дефинисана у (9.1) припада скупу Φ и да је решење једначине.

Како $\alpha(k) \geq k-1$, тада из става 2.1 очигледно важи

$$\xi_k(n) \leq \left[\frac{n(k-1)}{k-1}\right],$$

или $\xi_k(n) \leq n$ (9.2), одакле следи да постоји максимум по k од $\xi_k(n)$.

Из (9.1) следи:

$$\alpha(k)\xi_k(n) \leq n(k-1). \tag{9.3}$$

Помножимо (9.3) са l, а (9.2) са $l-1$, где је l произвољан природан број већи од 1 и саберемо неједнакости:

$$(l\alpha(k) + (l-1))\xi_k(n) \leq n(l(k-1) + l - 1).$$

По својству Φ_1 за произвољне l и k важе неједнакости

$$\alpha(lk) < l(\alpha(k)+1), \text{тј.}$$

$$\alpha(lk) \leq l\alpha(k) + l - 1. \tag{9.4}$$

Добијамо да важи

$$\alpha(lk)\xi_k(n) \leq n(lk-1),$$

одакле следи

$$\xi_k(n) \leq \left[\frac{n(lk-1)}{\alpha(lk)}\right] = \xi_{lk}(n).$$

Из последњег израза за произвољно $l > 1$ важи:

$$\xi_k(n) \leq \xi_{lk}(n). \tag{9.5}$$

Користећи се својством **iv)** става 2.1, можемо написати

$$\xi_k(n) = \left[\frac{\xi_k(ln)}{l}\right], \tag{9.6}$$

где су l и k произвољни природни бројеви. Пронађимо такве k', k'' за које важи $\xi_{k'}(n) = \xi(n)$ и $\xi_{k''}(ln) = \xi(ln)$. Посматрамо $k = k'k''$. Тада из (9.5) следи

$$\xi(n) = \xi_{k'}(n) \leq \xi_k(n) \leq \xi(n)$$

и

$$\xi(ln) = \xi_{k''}(ln) \leq \xi_k(ln) \leq \xi(ln).$$

За такво k (9.6) даје:

$$\xi(n) = \left[\frac{\xi(ln)}{l}\right],$$

па функција ξ задовољава својство Φ_1.

Доказујемо да функција ξ испуњава и други услов. Прво доказујемо да постоји природно k за које важи истовремено

$$\begin{cases} \xi_k(n) = \xi(n) \\ \alpha(k)\xi_k(n) < n(k-1). \end{cases} \tag{9.7}$$

Претпоставимо супротно, нека за свако k за које је $\xi_k(n) = \xi(n)$, важи

$$\alpha(k)\xi_k(n) = n(k-1). \tag{9.8}$$

Приметимо да ако су k' и k'' такви да важи $\xi_{k'}(n) = \xi(n)$ и $k'' - 1 < \alpha(k'')$, тада за $k = k'k''$ имамо

$$\begin{cases} \xi_k(n) = \xi(n) \\ k-1 < \alpha(k). \end{cases} \tag{9.9}$$

Прва формула следи из (9.5). Друга се добија из неједнакости $k'' \leq \alpha(k'')$. Дакле $k'k'' \leq k'\alpha(k'') \leq \alpha(k'k'')$ или $k'k'' - 1 < \alpha(k'k'')$. Ако узмемо k такво да важи (9.9), тада из (9.8) следи

$$\alpha(k)\xi(n) = n(k-1) \tag{9.10}$$

и из (9.8) и (9.5), за произвољно природно l,

$$\alpha(lk)\xi(n) = n(lk-1). \tag{9.11}$$

Из (9.10) и (9.9) важи $\xi(n) < n$ (9.12).

Обратно, ако у (9.11) $\alpha(lk)$ заменимо са $l\alpha(k) + l - 1$, закључујемо

$$\begin{aligned}
l\alpha(k)\xi(n) + (l-1)\xi(n) &\geq n(lk-1) \\
nk - n + (l-1)\xi(n) &\geq nlk - n \\
(l-1)\xi(n) &\geq nlk - nk \\
(l-1)\xi(n) &\geq nk(l-1) \\
\xi(n) &\geq nk
\end{aligned}$$

Из последње неједнакости и (9.10), добијамо $\xi(n) \geq n$ што је контрадикцији са (9.12). Тиме је доказано постојање k такво да важи (9.7):

$$\alpha(k)\xi(n) < n(k-1),$$

одакле следи

$$\alpha(k)\xi(n) + 1 \leq n(k-1).$$

Помножимо обе стране последње неједнакости са $l \geq \alpha(k)$ и на левој страни заменимо l са $\alpha(k)$ одакле следи:

$$\alpha(k)(l\xi(n) + 1) \leq nl(k-1).$$

Из последње неједанкости следи:

$$l\xi(n) + 1 \leq \left[\frac{nl(k-1)}{\alpha(k)}\right] = \xi_k(nl) \leq \xi(nl).$$

Тиме је доказано својство Φ_2.

Остаје да докажемо да је формулом (9.1) ξ дато решење једначине

$$\alpha\xi = 1.$$

Другачије записано

$$n - 1 = \max_k \gamma_k(n), \tag{9.13}$$

где је

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n\alpha(k)\xi(k)}{k^2}\right]. \tag{9.14}$$

Узмемо k такво да

$$k > n(\alpha(1) + 2),$$

тада

$$k^2 > nk(\alpha(1) + 2) = n(k + k(\alpha(1) + 1)) > n(k + \alpha(k))$$

и

$$nk^2 - k^2 < nk^2 - n(k + \alpha(k)),$$

што је исто што и

$$k^2(n-1) < n(k(k-1) - \alpha(k)). \tag{9.14.1}$$

Из (9.1) добијамо

$$k(k-1) < \alpha(k)(\xi_k(k) + 1) \leq \alpha(k)(\xi(k) + 1).$$

Даље следи

$$k(k-1) - \alpha(k) < \alpha(k)\xi(k),$$

из (9.14.1) закључујемо

$$k^2(n-1) < n\alpha(k)\xi(k).$$

Закључујемо да важи неједнакост:

$$n - 1 \leq \left[\frac{n\alpha(k)\xi(k)}{k^2}\right] = \gamma_k(n)$$

тј.

$$n - 1 \leq \max_k \gamma_k(n). \tag{9.15}$$

Обратно, нека је l' такво да $\xi_{l'}(k) = \xi(k)$, тада за произвољно k из (9.5) следи $\xi_{kl'}(k) = \xi(k)$. Из (9.14) закључујемо

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n\alpha(k)\xi_{kl'}(k)}{k^2}\right] = \left[\frac{n\alpha(k)\alpha(l'k)\xi_{kl'}(k)}{k^2\alpha(l'k')}\right].$$

Последњи израз није већи од

$$\left[\frac{n\alpha(k)k(l'k-1)}{k^2\alpha(l'k)}\right] = \left[\frac{nl'\alpha(k)(l'k-1)}{l'k\alpha(l'k)}\right] \leq \left[\frac{n(l'k-1)}{l'k}\right].$$

Одатле очигледно важи $\gamma_k(n) \leq n - 1$. Последња неједнакост заједно са (9.15) нам даје (9.13).

Нека је сада α произвољно (не нужно веће од 1). Из Φ_2 постоји природан број p, за који важи $\alpha(p) > 1$. Ако је γ такво да $\alpha p = \gamma$, тада из (8.4) следи

$$\gamma(n) = \alpha(pn) \geq n\alpha(p) > n > n - 1,$$

што је исто што и $\gamma > 1$. Тада је очигледно за решавање једначине

$$\alpha\xi = 1$$

довољно решити једначину

$$\gamma\psi = 1,$$

где је ξ умножак од ψ и p. Јединственост решења једначине следи из монотоности множења. Овиме је теорема 9 доказана у потпуности. $\square$

Теорема 2.10. Једначина

$$\alpha + \xi = \beta, \tag{10.1}$$

где су α и β елементи скупа Φ и $\alpha < \beta$, има јединствено решење у скупу Φ.

Доказ. Без умањења општости можемо посматрати једначину када је $\beta = 1$. Ако β није једнако јединици тада посматрамо једначину $\frac{\alpha}{\beta} + \xi = 1$. Показујемо да је функија ξ дефинисана као

$$\begin{cases} \xi(n) = \max_k \xi_k(n), \\ \xi_k(n) = \left[\frac{n(k-\alpha(k)-2)}{k}\right], \end{cases} \tag{10.2}$$

где максимум узимамо по свим k, за које важи $k - \alpha(k) - 2 \geq 0$, решење једначине

$$\alpha + \xi = 1, \tag{10.3}$$

где је $\alpha < 1$. Приметимо прво да из услова $\alpha < 1$ следи да постоји k такво да важи

$$\alpha(k) < k - 1,$$

или

$$k - \alpha(k) - 2 \geq 0.$$

Такође из услова Φ_1, за произвољне природне бројеве l и k важи

$$\alpha(k) < l(\alpha(k) + 1)$$

или

$$\alpha(lk) + 1 \leq l\alpha(k) + l,$$

одакле, за такво k за које је испуњено $k - \alpha(k) - 2 \geq 0$ и произвољно $l \geq 2$, важи

$$lk - \alpha(lk) - 2 > l(k - \alpha(k) - 2) \geq 0. \tag{10.4}$$

Лако је видети да $\xi(n)$ постоји и пронаћи k, за које важи

$$\xi_k(n) = \xi(n).$$

Из својстава става 2.1, следи

$$\left[\frac{n(k - \alpha(k) - 2)}{k}\right] \leq \left[\frac{nk}{k}\right] = n,$$

тј.

$$\xi_k(n) \leq n$$

за произвољно k.

Из (10.2) следи:

$$k\xi_k(n) \leq n(k - \alpha(k) - 2). \tag{10.5}$$

Ако помножимо обе стране последње неједнакости са произвољним природним бројем l, из последње неједнакости следи и из (10.4), закључујемо да важи:

$$lk\xi_k(n) \leq n(lk - \alpha(lk) - 2),$$

одакле

$$\xi_k(n) \leq \left[\frac{n(lk - \alpha(lk) - 2)}{lk}\right] = \xi_{lk}(n)$$

тј.

$$\xi_k(n) \leq \xi_{lk}(n). \tag{10.6}$$

По својству **iv)** става 2.1 важи

$$\xi_k(n) = \left[\frac{\xi_k(ln)}{l}\right], \tag{10.7}$$

где су k и l произвољни природни бројеви.

Нека су k' и k'' за које важи

$$\begin{aligned} \xi_{k'}(n) &= \xi(n) \\ \xi_{k''}(ln) &= \xi(ln). \end{aligned}$$

Ако је $k = k'k''$, тада из (10.6) следи

$$\begin{aligned} \xi(n) = \xi_{k'}(n) \leq \xi_k(n) \leq \xi(n), \\ \xi(ln) = \xi_{k''}(ln) \leq \xi_k(ln) \leq \xi(ln). \end{aligned}$$

Очигледно за за такво k из (10.7) важи:

$$\xi(n) = \left[\frac{\xi(ln)}{l}\right],$$

тј. функција $\xi(n)$ испуњава својство Φ_1.

Да бисмо доказали да функција ξ испуњава и други услов, доказаћемо да постоји природан број k за који истовремено важи:

$$\begin{cases} \xi_k(n) = \xi(n), \\ k\xi_k(n) < n(k - \alpha(k) - 2). \end{cases} \tag{10.8}$$

Претпоставимо супротно, нека за све k за које важи $\xi_k(n) = \xi(n)$, важи једанкост

$$k\xi_k(n) = n(k - \alpha(k) - 2). \tag{10.9}$$

Узмимо k за које важи $\xi_k(n) = \xi(n)$ и произвољан природан број $l \geq 2$. Из (10.9) и (10.6) следи:

$$k\xi(n) = n(k - \alpha(k) - 2)$$

и

$$lk\xi(n) = n(lk - \alpha(lk) - 2). \tag{10.10}$$

Помножимо прву једнакост са l и добијамо:

$$lk\xi(n) = ln(k - \alpha(k) - 2). \tag{10.11}$$

Једнакости (10.4), (10.11) дају контрадикцију са (10.10).

Тиме смо доказали да постоји k такво да важи (10.8), тј.

$$k\xi(n) < n(k - \alpha(k) - 2).$$

Тада важи

$$k\xi(n) + 1 \leq n(k - \alpha(k) - 2).$$

Помножимо обе стране последње неједнакости са $l \geq k$ и заменимо на левој страни l са k:

$$k(l\xi(n) + 1) \leq ln(k - \alpha(k) - 2),$$

одакле следи

$$l\xi(n) + 1 \leq \left[\frac{ln(k - \alpha(k) - 2)}{k}\right] = \xi_k(ln) \leq \xi(ln).$$

Доказали смо и друго својство.

Доказујемо да је

$$n - 1 = \max_k \gamma_k(n),$$

где

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k) + \xi(k))}{k}\right]. \tag{10.12}$$

Нека је $k > 2n$ и такво да важи $k - \alpha(k) - 2 \geq 0$. Тада важи

$$k(n-1) < n(k-2) = n(\alpha(k) + k - \alpha(k) - 2) \leq$$
$$n\left[\alpha(k) + \max_l \left[\frac{k(l - \alpha(l) - 2}{l}\right]\right] = n(\alpha(k) + \xi(k)),$$

одакле следи

$$n - 1 \leq \left[\frac{n(\alpha(k) + \xi(k))}{k}\right] = \gamma_k(n),$$

тј.

$$n - 1 \leq \max_k \gamma_k(n). \tag{10.13}$$

Доказујемо обратну неједнакост. Нека је l' такво да важи

$$\xi(k) = \xi_{l'}(k).$$

Тада из (10.6) следи да важи једнакост

$$\xi(k) = \xi_{l'k}(k)$$

и из (10.12) важи:

$$\gamma_k(n) = \left[\frac{n(\alpha(k) + \xi_{l'k}(k))}{k}\right] = \left[\frac{n(l'k\alpha(k) + l'k\xi_{l'k}(k))}{l'k^2}\right].$$

Даље из (10.5) и својства **i)** става 2.1 последњи израз није већи од

$$\left[\frac{n(l'k\alpha(k) + k(l'k - \alpha(l'k) - 2))}{l'k^2}\right] \leq \left[\frac{n(l'k - 2))}{l'k}\right],$$

тј.

$$\gamma_k(n) \leq n - 1.$$

Последња неједнакост заједно са (10.13) даје:

$$\max_k \gamma_k(n) = n - 1.$$

Јединственост решења једначине $\alpha + \xi = 1$ следи из монотоности сабирања. □

Теорема 2.11. Увек важи

$$\alpha < \alpha + \beta.$$

Доказ. Нека је k такво да $\beta(k) > 0$. Такво k постоји из услова 2. скупа Φ. Тада важи

$$\alpha(k) < \alpha(k) + \beta(k)$$

и из (4.8) следи

$$\alpha(k) < \delta(k)$$

где је

$$\delta = \alpha + \beta.$$

тј.

$$\alpha < \alpha + \beta.$$

□

2.3 Аксиома супремума

Теорема 2.12 (Аксиома супремума)**.** Ако је скуп $\Phi' \subset \Phi$ ограничен одозго, тада постоји супремум скупа Φ' који означавамо са $\sup \Phi'$.

Доказ. Нека је Φ' ограничен реалним бројем β. Тада за свако $\alpha \in \Phi'$ за произвољно фиксирано n важи:

$$\alpha(n) \leq \beta(n).$$

Дефинишемо функцију $\gamma(n)$ следећим изразом:

$$\gamma(n) = \max_{\alpha \in \Phi'} \alpha(n) \tag{11.1}$$

Доказујемо да $\gamma(n)$ припада скупу Φ. Приметимо да за произвољно N, постоји функција α_N из скупа Φ', таква да важи

$$\gamma(n) = \alpha_N(n) \tag{11.2}$$

за све $n \leq N$.

По самој дефиницији функције $\gamma(n)$ за произвољно $n = 1,\ 2,\ \ldots,$ постоји функција α_n таква да важи

$$\gamma(n) = \alpha_n(n).$$

Из коначног скупа позитивних реалних бројева $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ можемо одабрати највећи. Одговарајућу функцију ћемо означавати са α_N. Тада α_N очигледно задовољава (11.2).

Ако су k и n произвољни природни бројеви и ако $N > kn$, тада из (11.2) следи:

$$\gamma(n) = \alpha_N(n) = \left[\frac{\alpha_N(kn)}{k}\right] = \left[\frac{\gamma(kn)}{k}\right].$$

Тиме је доказано својство Φ_1.

Доказујемо да функција $\gamma(n)$ испуњава и својство Φ_2. Нека је n произвољан природан број. Узмимо $N > n$. Како функција $\alpha_N(n)$ испуњава услов Φ_2 можемо пронаћи k такво да

$$k\alpha_N(n) < \alpha_N(kn).$$

Из (11.1) и последње неједнакости и (11.2) закључујемо:

$$\gamma(kn) \geq \alpha_N(kn) > k\alpha_N(n) = k\gamma(n).$$

Није тешко видети да је γ супремум скупа Φ'. По дефиницији (11.1) важи,

$$\alpha \leq \gamma$$

за свако $\alpha \in \Phi'$. Дакле γ је горње ограничење скупа Φ'. Доказујемо да је γ најмање од свих горњих органичења скупа Φ'.

Претпоставимо супротно. Ако постоји позитиван реалан број δ мањи од γ, такав да важи $\alpha < \delta < \gamma$ за свако $\alpha \in \Phi'$. Тада постоји такво n да важи

$$\delta(n) < \gamma(n).$$

Нека је $N > n$, тада имамо

$$\delta(n) < \gamma(n) = \alpha_N(n),$$

одакле видимо да постоји позитиван реалан број α, који припада скупу Φ' и за који важи

$$\delta < \alpha < \gamma.$$

Добили смо контрадикцију. Одакле следи да је γ најмање горње ограничење скупа Φ'. $\square$

2.4 Изоморфизам модела аксиома

Сада када смо конструисали један модел који испуњава аксиоме од 1-10, поставља се питање јединствености таквог система. Ако имамо два или више оваквих модела и сва имају својства 1-10 и својство супремума, колико таквих система има? Да ли их можемо разликовати међусобно? Одговор на то питање је да их разликујемо до на изоморфизам.

Теорема 2.13. Нека је Ψ произвољан скуп на коме су дефинисане операције сабирања, множења, поретка и нека важе аксиоме $1-10$. Тада је Ψ изоморфно са Φ.

Пре самог доказа теореме приметићемо неколико особина скупа Ψ које ћемо користити доказујући теорему 2.13.

I Скуп Ψ садржи подскуп који је изоморфан са скупом природних бројева. Посматрајмо решење једначине $ax = a$. Означимо решење те једначине са $x = e$. Ако је b сада други произвољан елемент скупа Ψ представљен као $b = ax_1$ тада закључујемо да важи

$$be = ax_1e = aex_1 = ax_1 = b.$$

Другим речима e нам представља неутрал за множење. Посматрајмо сабирање елемента e са самим собом

$$e, e+e = 2e, e+e+e = 3e, e+e+e+e = 4e, ...$$

Бројеве $e, 2e, 3e, ..., ne, ...$ ћемо звати целим позитивним бројевима скупа Ψ и означаваћемо их само као $1, 2, 3, ..., n, ...$

II Важи Архимедово својство тј. ако су a и b произвољни елементи скупа Ψ, тада постоји природан број n за који важи

$$na > b.$$

Доказ. Посматрајмо скуп $S = \{na \mid n = 1,\ 2,\ ...\}$. Претпоставимо да је тај скуп ограничен. Тада би решење једначине $a + x = c$, где је $c = \sup S$, задовољавало неједанкост $x < c$. Постојало би n такво да важи $x < na$. Па из услова 7 би следило

$$x + a = c < na + a = (n+1)a,$$

одакле добијамо контрадикцију, јер је $c = \sup S$.

□

III Скупу Ψ додајемо и елемент 0, који испуњава следеће услове: за произвољан елемент $a \in \Psi$

$$\begin{aligned} a &> 0, \\ a + 0 = 0 + a &= a, \\ a0 = 0a &= 0, \\ 0 + 0 &= 0, \\ 0 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Проширење скупа Ψ таквим елементом садржи све природне бројеве и нулу. Тај проширени скуп обележавамо са Ψ'.

Дефинишемо функцију $[a]$ цео део од броја a, где је a произвољни елемент скупа Ψ, као цео број за који важи неједнакост

$$[a] \leq a < [a] + 1.$$

Постојање таквог броја следи из Архимедовог својства. Такође посматрамо и функцију $\langle a \rangle$, коју дефинишемо као природан број за који важи неједнакост

$$\langle a \rangle < a \leq \langle a \rangle + 1.$$

IV Из елемената скупа Ψ'

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, ...,$$

конструишемо систем функција на исти начин како је био конструисан систем Φ. Тако конструисан систем је изоморфан са Φ, па ћемо га такође означавати са Φ.

V Ако су $a = \sup X$ и $b = \sup Y$, тада важе следеће једнакости:

$$a + b = \sup(X + Y),$$
$$ab = \sup(XY).$$

Доказ. Доказујемо теорему 2.13. Из IV, довољно је доказати да је Ψ изоморфно са Φ, где се под Φ подразумева систем функција који је направљен уз помоћ елемената скупа Ψ'.

Нека је a произвољан елемент скупа Ψ. Посматрајмо функцију

$$\alpha(n) = \langle na \rangle.$$

Показујемо да та функција припада скупу Φ тј. да задовољава услове Φ_1 и Φ_2. Очигледно важи,

$$na = \langle na \rangle + \theta$$

где је $0 < \theta \leq 1$. Ако је k произвољан природан број тада важи

$$kna = k\langle na \rangle + k\theta,$$

одакле следи

$$\langle kna \rangle = k\langle na \rangle + \langle k\theta \rangle, \tag{12.1}$$

одакле следи

$$\left[\frac{\langle kna \rangle}{k}\right] = \langle na \rangle + \left[\frac{\langle k\theta \rangle}{k}\right] = \langle na \rangle,$$

тиме смо доказали да функција $\alpha(n) = \langle na \rangle$ испуњава услов Φ_1. Проверавамо услов Φ_2. Из II, за свако θ може се пронаћи такво k, да важи

$$k\theta > 1.$$

За свако k из (12.1) следи, да важи

$$\langle kna\rangle \ > k\langle na\rangle.$$

тиме је доказано да је испуњен и други услов.

Обратно, доказујемо да се скуп Φ састоји само из функција $\alpha(n)$, дефинисаних по формули

$$\alpha(n) = \ \langle na\rangle,$$

где је a неки елемент скупа Ψ. Нека је $\alpha(n)$ произвољна функција која припада скупу Φ. Из услова Φ_2 за пар произвољних природних бројева важе неједнакости

$$k\alpha(n) \leq \alpha(kn) < k(\alpha(n)+1).$$

Поделимо неједнакости са k одакле добијамо:

$$\alpha(n) \leq \frac{\alpha(kn)}{k} < \alpha(n)+1, \tag{12.2}$$

следи да постоји $\sup_k \frac{\alpha(kn)}{k}$ за произвољно n. Доказујемо да је

$$\alpha(n) = \ \langle na\rangle,$$

где је

$$a = \sup_k \frac{\alpha(k)}{k}. \tag{12.3}$$

Приметимо да из услова Φ_1 увек важи

$$\frac{\alpha(kn)}{k} \leq \frac{\alpha(mkn)}{mk},$$

и да из услова Φ_2 постоји m такво да

$$\frac{\alpha(kn)}{k} < \frac{\alpha(mkn)}{mk}.$$

Одатле следи:

$$\sup_k \frac{\alpha(mkn)}{mk} = \sup_k \frac{\alpha(kn)}{k} \tag{12.4}$$

и

$$\alpha(n) < \sup_k \frac{\alpha(kn)}{k} \leq \alpha(n)+1. \tag{12.5}$$

Из (12.4) и (12.5) следи

$$\alpha(n) = \langle \sup_k \frac{\alpha(kn)}{k}\rangle = \ \langle \sup_k n\cdot\frac{\alpha(kn)}{kn}\rangle =$$
$$\langle n\sup_k \frac{\alpha(kn)}{kn}\rangle \ = \ \langle n\sup_k \frac{\alpha(k)}{k}\rangle \ = \ \langle na\rangle.$$

Уз помоћ функције $\alpha(n) = \langle na \rangle$ смо једнозначно одредили за сваки елемент скупа Ψ, њему одговарајући елемент скупа Φ.

Ако је $a < b$, тада из II, постоји такво n да

$$1 < (b-a)n,$$

где је $b-a$ решење једначине $a+x=b$, одакле следи

$$\langle na \rangle < \langle nb \rangle.$$

Одакле закључујемо да пресликавање чува поредак.

Показујемо да ако су елементи a и b из Ψ и њима одговарајући елементи α и β из Φ, тада елементу $a+b$ одговара елемент $\alpha+\beta=\gamma$ тј. да

$$\gamma(n) = \langle n(a+b) \rangle.$$

Ово својство доказујемо користећи (12.3) и V:

$$\begin{aligned}\langle n(a+b) \rangle &= \langle n \left(\sup_k \frac{\alpha(k)}{k} + \sup_k \frac{\beta(k)}{k} \right) \rangle = \\ &= \langle \sup_k \frac{n(\alpha(k)+\beta(k))}{k} \rangle = \sup_k \left[\frac{n(\alpha(k)+\beta(k))}{k} \right] = \gamma(n).\end{aligned}$$

За производ два броја доказ је аналоган. □

Доказали смо да сви су сви скупови, који задовољавају аксиоме 1 - 10 и испуњавају својство супремума, изоморфни.

3 Преглед неких конструкција реалних бројева

Већина конструкција реланих бројева подразумева да нам је познат скуп рационалних бројева $\mathbb{Q}$ са операцијама $+, \cdot$, релацијом $\leq$ и константама 0 и 1 и следећим аксиомама [5]:

1. својства сабирања:
   (а) $(\forall x, y \in \mathbb{Q}) x + y = y + x$,
   (б) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Q})(x + y) + z = x + (y + z)$,
   (в) постоји елемент $0 \in \mathbb{Q}$, такав да је $x + 0 = x$ за све $x \in \mathbb{Q}$,
   (г) за сваки елемент $x \in \mathbb{Q}$, постоји елемент $-x \in \mathbb{Q}$, тако да је $x + (-x) = 0$;
2. својства множења:
   (а) $(\forall x, y \in \mathbb{Q}) x \cdot y = y \cdot x$,
   (б) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Q})(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,
   (в) постоји елемент $1 \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, тако да је $x \cdot 1 = x$ за све $x \in \mathbb{Q}$,
   (г) за сваки елемент $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ постоји елемент $x^{-1} \in \mathbb{Q}$, такво да је $x \cdot x^{-1} = 1$,
   (д) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Q}) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$;
3. својства релације $\leq$:
   (а) $(\forall x \in \mathbb{Q}) x \leq x$,
   (б) $(\forall x, y \in \mathbb{Q})(x \leq y, y \leq x \Rightarrow x = y)$,
   (в) $(\forall x, y, z \in \mathbb{Q})(x \leq y, y \leq z \Rightarrow x \leq z)$,
   (г) за свака два елемента $x, y \in \mathbb{Q}$ важи $x \leq y$ или $y \leq x$,
   (д) ако је $x \leq y$ и z произвољан елемент из $\mathbb{Q}$, важи $x + z \leq y + z$,
   (ђ) ако је $0 \leq x$ и $0 \leq y$, онда је и $0 \leq x \cdot y$;
4. (Архимедова аксиома) За произвољне бројеве $a, b \in \mathbb{Q}$, где је $a > 0$ постоји природан број n такав да важи $na > b$.

Аксиоме 1.а - 1.г нам говоре да је скуп $\mathbb{Q}$ Абелова група у односу на операцију сабирања. Аксиоме 2.а - 2.д говоре да је скупа $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ такође Абелова група у односу на операцију множења, када заједно посматрамо операције сабирања, множења и релацију $\leq$ скуп $\mathbb{Q}$ је уређено поље. Аксиоме 1.а - 3.ђ зовемо алгебарским аксиомама. Архимедова аксиома се не може извести из алгебарских аксиома, па уређено поље рационалних бројева зовемо и Архимедовским пољем.

У наставку, при опису Дедекиндове и Канторове конструкције реалних бројева подразумевамо да важе сва претходно наведена својства скупа $\mathbb{Q}$. Те конструкције проширују скуп $\mathbb{Q}$ до скупа $\mathbb{R}$ тако да сва својства рационалних бројева важе и за реалне бројеве заједно са аксиомом супремума. У наредним поглављима се нећемо бавити исправношћу дефиниција и доказима, већ ћемо само илустровати идеје.

3.1 Дедекиндова конструкција

Идеја код Дедекиндове конструкције[15] је да се свака тачка на реалној прави посматра као скуп рационалних бројева лево и десно од те тачке. Ако је $x \in \mathbb{R}$ тада уместо x посматрамо следећи скуп $\{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q < x\} \sqcup \{q \mid q \in \mathbb{Q} \wedge q > x\}$. Овде ћемо представити мало другачију верзију ове идеје, где посматрамо само једну страну.

Дефиниција 3.1. Подскуп α скупа $\mathbb{Q}$ је Дедекиндов пресек, ако су испуњени следећи услови:

- $\alpha \neq \emptyset$ и $\alpha \neq \mathbb{Q}$,
- за свако q из α, из $x \in \mathbb{Q}$ и $x < q$ следи $x \in \alpha$,
- у скупу α не постоји највећи елемент.

Скуп свих Дедекиндових пресека означавамо са $\mathbb{R}_D$. Приметимо да саме рационалне бројеве можемо такође представити преко Дедекиндових пресека. Ако је $q \in \mathbb{Q}$ тада рационалан број q записујемо као $\{x \mid x \in \mathbb{Q} \wedge x < q\}$. Овакве Дедекиндове пресеке означавамо са $\langle \hookleftarrow, q\rangle$. Посматрајмо функцију која рационалне бројеве пресликава у Дедекиндове пресеке $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{R}_D$ дефинисану са $f(q) = \langle \hookleftarrow, q\rangle$. Таква функција је **1-1** али није **на**.

Дефинишемо уређење на скупу свих Дедекиндових пресека.

Дефиниција 3.2. Уређење скупа $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$: $\alpha \preceq \beta$ акко $\alpha \subseteq \beta$[16]; $\alpha \prec \beta$ акко $\alpha \preceq \beta$ и $\alpha \neq \beta$.

Аритметика на скупу Дедкиндових пресека се уводи следећим дефиницијама.

Дефиниција 3.3. Операција сабирања $\oplus$ на скупу $\mathbb{R}_{\mathrm{D}}$ се дефинише као

$$\alpha \oplus \beta = \{a + b \mid a \in \alpha,\ b \in \beta\}$$

Дефиниција 3.4. Неутрал 0 за сабирање уводимо као:

$$\langle \hookleftarrow, 0\rangle = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$$

[15] За детаље конструкције видети [4] и [10].

[16] Строго разликујемо ознаку $\subset$ за прави подскуп од ознаке $\subseteq$ када скупови могу бити и једнаки.

Дефиниција 3.5. Инверз елемента α у односу на сабирање:

$$\sim \alpha = \{-x \mid x \notin \alpha, x \text{ није најмањи елемент у } \mathbb{Q} \setminus \alpha\}$$

Дефиниција 3.6. Операција множења $\oplus$ на скупу $\mathbb{R}_\mathrm{D}$ се дефинише по случајевима: ако је $\langle \hookleftarrow, 0\rangle \preceq \alpha$ и $\langle \hookleftarrow, 0\rangle \preceq \beta$ онда је

$$\alpha \odot \beta = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{a \cdot b \mid a \in \alpha, b \in \beta, 0 < a, 0 < b\}$$

док је

$$\alpha \odot \beta = \begin{cases} \langle \hookleftarrow, 0\rangle, & \alpha = \langle \hookleftarrow, 0\rangle \text{ или } \beta = \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \\ (\sim \alpha) \odot (\sim \beta), & \alpha \prec \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \beta \prec \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \\ \sim ((\sim \alpha) \odot \beta), & \alpha \prec \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \langle \hookleftarrow, 0\rangle \prec \beta, \\ \sim (\alpha \odot (\sim \beta)), & \beta \prec \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \langle \hookleftarrow, 0\rangle \prec \alpha. \end{cases}$$

За све рационалне бројеве a и b важе једнакости: $\langle \hookleftarrow, a\rangle \oplus \langle \hookleftarrow, b\rangle = \langle \hookleftarrow, a+b\rangle, \sim \langle \hookleftarrow, a\rangle = \langle \hookleftarrow, -a\rangle, \langle \hookleftarrow, a\rangle \odot \langle \hookleftarrow, b\rangle = \langle \hookleftarrow, a \cdot b\rangle$, односно $f(a+b) = f(a) \oplus f(b), f(-a) =\sim f(a), f(a \cdot b) = f(a) \odot f(b)$, као и еквиваленција $\langle \hookleftarrow, a\rangle \preceq \langle \hookleftarrow, b\rangle$ акко $a \leq b$, тј. $f(a) \preceq f(b)$ акко $a \leq b$, операције $\oplus, \sim, \odot$ и уређење $\preceq$ можемо сматрати проширењима операција $+, -, \cdot$, и уређења $\leq$ скупа $\mathbb{Q}$. Ова чињеница оправдава коришћење истих ознака $+, -, \cdot$ и $\leq$ за одговарајуће операције и уређење скупа $\mathbb{R}_\mathrm{D}$. Природно се може проширити и парцијална операција инверза у оgносу на множење:

$$\langle \hookleftarrow, a\rangle^{-1} = \left\langle \hookleftarrow, a^{-1}\right\rangle, a \in \mathbb{Q},$$

а ако је $\alpha \neq \langle \hookleftarrow, a\rangle$ за свако $a \in \mathbb{Q}$, онда је $\alpha^{-1} = \{x \in \mathbb{Q} \mid x \leq 0\} \cup \{x^{-1} \mid x > 0, x \notin \alpha\}$, у случају да је $\langle \hookleftarrow, 0\rangle < a$ и $\alpha^{-1} = -(-\alpha)^{-1}$ уколико је $a < \langle \hookleftarrow, 0\rangle$. Дакле, изграђена структура $\mathbb{R}_\mathrm{D} = (\mathrm{R}_\mathrm{D}, \leq, +, \cdot, \langle \hookleftarrow, 0\rangle, \langle \hookleftarrow, 1\rangle)$ је наследила све основне особине операција и уређења структуре рационалних бројева $\mathbb{Q} = (\mathrm{Q}, \leq, +, \cdot, 0, 1)$. Скуп $\mathbb{R}_\mathrm{D}$ се може сматрати правим проширењем структуре $\mathbb{Q}$. Дедекиндова конструкција је заправо изградња уређеног поља $\mathbb{R}_\mathrm{D}$ које је право проширење уређеног поља $\mathbb{Q}$.

Кључно својство у карактеризацији реалних бројева је својство супремума. Због једноставности наводимо доказ.

Теорема 3.1. Сваки одозго ограничен подскуп скупа $\mathbb{R}_\mathrm{D}$ има супремум.

Доказ. Нека је X произвољан одозго ограничен подскуп од R_D. Није тешко доказати да је $\widehat{\xi} = \bigcup_{\xi \in X} \xi$ Дедекиндов пресек, као и да је $\widehat{\xi}$ горње ограничење скупа X. При том, за свако друго горње ограничење α скупа X, будући да је $\xi \leq \alpha, \xi \in X$, важи $\widehat{\xi} \leq \alpha$, што значи $\widehat{\xi} = \sup X$. □

3.2 Канторова конструкција

Пре самог описа конструкцје[17] дајемо мотивацију. Посматрајмо број

$$\pi = 3.1415926535...$$

[17]Конструкцију преко Кошијевих низова је објавио Кантор 1872. године. За детаље конструкције видети [12].

и следећи низ

$$0, 100, -5, 3, \frac{31}{10}, \frac{314}{100}, \frac{3141}{1000}, \frac{31415}{10000}, \frac{314159}{100000}, \dots \ .$$

Тај низ се састоји искључиво од рационалних бројева и видимо да се на неки начин се приближава броју π. Идеја је да посматрамо низове рационалних бројева који конвергирају и да нам они на неки начин представљају реалне бројеве. При овој идеји се јавља још један проблем, посматрајмо следећи низ

$$431, 130, -50, 3, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{104348}{33215}, \frac{1043835}{332263}, \dots \ .$$

Тај низ такође конвергира броју π, али је различит од првог низа. Проблем је што постоји много различитх низова који конвергирају ка истом броју, па имамо проблем јединствености. Један реалан број има бесконачно много различитх низова који конвергирају ка њему.

Овај проблем решавамо тако што ћемо увести неку релацију еквиваленције и посећи скуп свих низова рационалних бројева са том релацијом. Тада нам реалне бројеве представљају класе еквиваленције на које је разбијен скуп свих низова рационалних бројева.

Дефиниција 3.7. За низ (a_n) низ рационалних бројева кажемо да је Кошијев ако за свако $\epsilon > 0$ постоји индекс $n_0 \in \mathbb{N}$, такав да је $|a_m - a_n| < \epsilon$ чим су индекси m и n већи од n_0. Дакле,

$$(a_n) \text{ је Кошијев} \Leftrightarrow (\forall \epsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall m, n \in \mathbb{N})(m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon).$$

Идеја претходне дефиниције лежи у томе да ако неки низ конвергира ка некој вредности, онда ће чланови како n расте бити све ближи једни другима тј. две добре апроксимације неке вредности поред тога што су близу самој вредности, добро ће се међусобно апроксимирати. Исто резоновање можемо применити и на два различита низа рационалних бројева који апроксимирају исту вредност, што нас наводи да уведемо релацију еквиваленције на свим низовима коју апроксимирају исту вредност.

Означимо скуп свих рационалних Кошијевих низова са $C_{\mathbb{Q}}$. На скупу $C_{\mathbb{Q}}$ уводимо релацију еквиваленције.

Дефиниција 3.8. Нека су (a_n) и (b_n) низови из $C_{\mathbb{Q}}$. Дефинишемо релацију $\sim$ на $C_{\mathbb{Q}}$ као

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = 0.$$

Ако су два низа (a_n) и (b_n) у релацији кажемо да су еквивалентни.

Доказ да је ова релација симетрична, рефлексивна и транзитивна директно следи из дефиниције.

Дефиниција 3.9. Реални бројеви су класе еквиваленције $[(a_n)]$ Кошијевих низова рационалних бројева тј. $\mathbb{R}_C = C_{\mathbb{Q}} \ / \sim$. Свака класа еквиваленције нам представља један реалан број.

Како смо се користили низовима рационалних бројева да дефинишемо реалне бројеве поставља се питање како саме рационалне бројеве представљамо као класе еквиваленција.

Дефиниција 3.10. Нека је q било који рационалан број, дефинишемо реалан број $\tilde{q}$ као класу еквиваленције констатног низа $(q, q, q, ...)$.

Уводимо аритметику на скупу класа еквиаленицје на које разбијен скуп $C_{\mathbb{Q}}$.

Дефиниција 3.11. Нека су $s, t \in \mathbb{R}_C$, за њих постоје Кошијеви низови рационалних бројева (a_n) и (b_n) такви да је $s = [(a_n)]$ и $t = [(b_n)]$.

1. Дефинишемо $s + t$ као класу еквивалнеције низа $(a_n + b_n)$. Неутрал за сабирање је класа еквиваленције низа $(0, 0, 0, ...)$.

2. Дефинишемо $s \cdot t$ као класу еквивалнеције низа $(a_n \cdot b_n)$. Неутрал за множење је класа еквиваленције низа $(1, 1, 1, ...)$.

Дефиниција 3.12. Нека је $s \in \mathbb{R}_C$, тада постоји низ (a_n) такав да је $s = [(a_n)]$.

1. Инверзни елемент елемента s, у односу на операцију сабирања, обележавамо као $-s$ и дефинишемо као класу еквиваленције низа $(-a_n)$.

2. Инверзни елемент елемента $s \neq 0$, у односу на операцију множења, обележавамо као $\frac{1}{s}$. Како је $s \neq 0$ тада низ рационалних бројева (a_n) не тежи 0, па ће за неко $n_0 \in \mathbb{N}$ важити да за свако $n > n_0$, следи да је $a_n > 0$ или $a_n < 0$. Посматрајмо следећи низ $(0, 0, ..., \frac{1}{a_{(n_0+1)}}, \frac{1}{a_{(n_0+2)}}, ...)$, инверзни елемент дефинишемо као класу еквиваленције посматраног низа. Идеја претходног раматрања је да за неки низ представник, коначно много првих чланова може бити 0, али да после неког индекса n нећемо имати чланове који су 0, па дефинишемо инверз само за преостале чланове.

Дефиниција 3.13. Нека је $s \in \mathbb{R}_C$. Кажемо да је s позитивно ако је $s \neq 0$ и ако је $s = [(a_n)]$ за неки Кошијев низ такав да постоји неко N, такво да је $a_n > 0$ за све $n > N$. Ако су s и t два реална броја, кажемо да је $s > t$ ако је $s - t$ позитивно.

Овако дефинисани реални бројеви $\mathbb{R}_C$ задовољавају Архимдеово својство и аксиому супремума.

3.3 Конструкција из хиперрационалних бројева

Идеја коришћења инфинитезимала при успостављању математичке анализе потиче од Лајбница[18]. Укратко објашњавамо Лајбницову идеју коришћења бесконачно малих величина на примеру израчунавања извода фунцкије $f(x) = x^2$. Нека је dx нека бесконачно мала величина, да бисмо добили извод функције посматрамо следећу форумулу

$$\frac{f(x + dx) - f(x)}{dx},$$

[18]Gottfried Wilhelm Freiherr von Leibniz (1646-1716) - немачки математичар и филозоф.

тј. посматрамо разлику вредности функције f у самој тачки x и некој другој бесконачно близу тачки $x + dx$ подељену са тим бесконачно малим растојањем dx. На примеру конкретне функције добијамо

$$\frac{(x+dx)^2 - x^2}{dx} = \frac{x^2 + 2xdx + dx^2 - x^2}{dx} = \frac{2xdx + dx^2}{dx} = 2x + dx.$$

Лајбниц и математичари тог времена су посматрајући крајњи резултат $2x + dx$ резоновали да, пошто је dx бесконачно мало, можемо га занемарити, па нам остаје само $2x$ као крајњи резултат. Овај приступ са величинама које не стају није био формално оправдан и на крају је напуштен у корист $\delta - \epsilon$ приступа. Инфинитезимали су добили поново на значају тек у 20. веку са радовима Абрахама Робинсона[19] и увођењем нестандардне анализе.

Нестандардна проширења линеарно уређених алгебарских структура подразумевају све аксиоме које је имала стара структура са додатком да постоји бесконачно велики елемент који означавамо са ω. Како постоји бесконачно велики елемент ω, такође постоје елементи $-\omega$ и ω^{-1} тј. елемент који је мањи од било ког другог елемента и елемент који је бесконачно близу 0. Како се међу овим новим бројевима садрже и реални бројеви, при конструкцији оваквих система ми можемо контруисати и саме реалне бројеве, тако што ћемо одстранити све елементе који су бесконачно мали, бесконачно близу једни другима и бесконачно велики.

Дајемо кратко излагање идеје преко приступа са ултрафилтерима које је дато у [3].

3.3.1 Ултрафилтери

Дефиниција 3.14. Нека је J бесконачан скуп. Скуп $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(J)$ зовемо филтером над J ако важи:

$$J \in U \text{ и } \emptyset \notin \mathcal{U}(\text{регуларност}), \tag{1.}$$
$$\text{ако } A, B \in \mathcal{U}, \text{ онда } A \cap B \in \mathcal{U}(\text{својство коначног пресека}), \tag{2.}$$
$$\text{ако } A \in \mathcal{U} \text{ и } A \subseteq B \subseteq J, \text{ онда } B \in \mathcal{U}(\text{својство надскупа}). \tag{3.}$$

Филтер се зове ултрафилтером ако је максималан филтер тј. ако није подскуп ниједног другог филтера на J. Филтер је слободан ако $A \in \mathcal{U}$, онда је A бесконачан скуп.

Дефиниција 3.15. Слободан филтер дефинисан као

$$Fr(J) := \{A \in \mathcal{P}(J) \mid (J \setminus A) \text{ је коначан.}\}$$

се зове Фрешеов[20] филтер.

Став 3.1. Сваки филтер који садржи Фрешеов филер је слободан.

[19] Abraham Robinson (1918-1974) - амерички математичар.
[20] Maurice René Fréchet (1878 – 1973) - француски математичар.

Доказ постојања слободног ултрафилтера је неконструктивног карактера и зависи од аксиоме избора.

Теорема 3.2 (Торема о ултрафилтерима)**.** Ако важи аксиома избора, $Fr(J)$ се може проширити до слободног ултрафилтера.

Својство максималности ултрафилтера нам даје следећа теорема.

Теорема 3.3. Ултрафилтер $\mathcal{U}$ има следеће својство:

$$\text{Ако } A \in \mathcal{P}(J), \text{ тада важи } A \in \mathcal{U} \text{ или } J \setminus A \in \mathcal{U}.$$

3.3.2 Хиперрационални бројеви

Нека је $\mathcal{U}$ слободан ултрафилтер над $\mathbb{N}$ и $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ скуп свих рационалних низова.

Дефиниција 3.16. Дефинишемо релацију на $\mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ као

$$(a_n) \sim (b_n) \Leftrightarrow \{n \mid a_n = b_n\} \in \mathcal{U}.$$

Овако дефинисана релација представља једну релацију еквиваленције. Доказ да је ово релација еквиваленције следи из дефиниције релације и дефиниције ултрафилтера. Релација $\sim$ нам говори да су два низа $\mathcal{U}$-еквивалентни.

Дефиниција 3.17. Скуп хиперрационалних бројева $\mathbb{Q}^*$дефинишемо као скуп свих класа еквиваленције рационалних низова које добијамо релацијом $\sim$.

$$\mathbb{Q}^* = \mathbb{Q}^{\mathbb{N}} / \sim .$$

Дефиниција 3.18. Нека су $a,\ b \in \mathbb{Q}^*$, тада постоје низови рационалних бројева такви да је $a = [(a_n)]$ и $b = [(b_n)]$. Сабирање $+_*$, множење $\cdot_*$ и уређење $<_*$ дефинишемо као

$$\begin{aligned} [(a_n)] +_* [(b_n)] &= [(a_n + b_n)], \\ [(a_n)] \cdot_* [(b_n)] &= [(a_n \cdot b_n)], \\ [(a_n)] <_* [(b_n)] &\Leftrightarrow \{n \mid a_n < b_n\} \in \mathcal{U}. \end{aligned}$$

Дефиниција 3.19. Хиперрационалне бројеве облика $[(a_n)]$ где је (a_n) констан-тан низ $a_n = q$ за неко $q \in \mathbb{Q}$ обележавамо са q_σ. Природну стандардну копију $\mathbb{Q}$ у $\mathbb{Q}^*$ обележавамо са $\mathbb{Q}^\sigma$.

- Неутрал за сабирање је класа еквиваленције низа $(0, 0, 0, ...)$ коју означавамо са 0_σ.
- Неутрал за множење је класа еквиваленције низа $(1, 1, 1, ...)$ коју означавамо са 1_σ.

Дефиниција 3.20. Нека је $a \in \mathbb{Q}^*$, тада постоји низ рационалних бројева такав да важи $a = [(a_n)]$.

1. Инверз у односу на сабирање је класа еквиваленције низа $(-a_n)$.
2. Инверз у односу на множење дефинишемо на следећи начин. Нека је $(a_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ такав да је $(a_n) \not\sim 0_\sigma$. Тада $\{n \mid a_n = 0\} \notin \mathcal{U}$. Због максималности $\mathcal{U}, \{n \mid a_n \neq 0\} = \mathbb{N} \setminus \{n \mid a_n = 0\} \in \mathcal{U}$. Дефинишемо $(q_n) \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ као
$$q_n = \begin{cases} \frac{1}{a_n}, & a_n \neq 0, \\ 0, & a_n = 0. \end{cases}$$
Тада $\{n \mid a_n \cdot q_n = 1\} = \{n \mid a_n \neq 0\} \in \mathcal{U}$. Дакле $(a_n \cdot q_n) \sim 1_\sigma$.

Проширење рационалних бројева на хиперрационалне бројеве које нам недостаје је егзистенција бесконачно великог елемента $\omega \in \mathbb{Q}^*$ који је стриктно већи од било ког стандардног рационалног броја. Тај елемент ω можемо дефинисати као
$$\omega = [(\omega_n)],$$
где је $\omega_n = n$.

Став 3.2. $(\mathbb{Q}^*, +_*, \cdot_*, <_*)$ је уређено поље.

Можемо приметити да су дефиниције основних операција готово исте као код Канторове конструкције осим дефиниције релације $\sim$. Напомињемо да не можемо ништа рећи о јединствености самог слободног ултрафилтера $\mathcal{U}$, па самим тим скуп $\mathbb{Q}^*$ не мора бити јединствен. Како се сва својства скупа $\mathbb{Q}^*$ доказују из дефиниције слободног ултрафилтера нема проблема са непрецизним тврђењима.

Нека је $\mathcal{O}$ прстен коначних хиперрационалних бројева дефинисан као
$$\mathcal{O} = \{\alpha \in \mathbb{Q}^* \mid \exists q_\sigma \in \mathbb{Q}^\sigma, |\alpha| <_* q_\sigma\}.$$
$\mathcal{O}$ не садржи бесконачно велике бројеве, али и даље садржи елементе који су бесконачно мали и који су бесконачно близу. Како не желимо да $\mathbb{R}$ садржи и елементе који су бесконачно близу, желимо да те елементе уклонимо из $\mathcal{O}$. Дефинишемо следећи идеал који се састоји од нуле и бесконачно малих хиперрационалних бројева.
$$\mathcal{I} = \{\alpha \in \mathbb{Q}^* \mid \forall q_\sigma \in \mathbb{Q}^\sigma \setminus \{0_\sigma\}, |\alpha| <_* |q_\sigma|\}.$$

Став 3.3. $\mathcal{O}$ је уређени потпрстен од $\mathbb{Q}^*$.

Став 3.4. $\mathcal{I}$ је идеал од $\mathcal{O}$.

Став 3.5. $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ је поље.

Дефиниција 3.21. Реалне бројеве дефинишемо као количнички прстен
$$\mathbb{R} = \mathcal{O}/\mathcal{I}.$$
Сабирање и множење су индуковани прстеном $\mathcal{O}$. Уређење над $\mathbb{R}$ је дато са
$$\alpha + \mathcal{I} <_{\mathbb{R}} \beta + \mathcal{I} \Leftrightarrow (\alpha <_* \beta \wedge \alpha + I \neq \beta + I).$$

На овај начин смо сваки хиперрационалан број и све њему бесконачно близу хиперрационалне бројеве представили као једну класу еквиваленције.

Наводимо пример који илуструје интуицију иза нестандардног приступа. Код Канторове конструкције низови $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ представљају исти реалан број 0. Оба низа $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ припадају истој класи еквиваленције као и нула низ $\frac{1}{n} \sim \frac{1}{n^2} \sim \mathbf{0}$, па те низове не разликујемо међусобно. Код хиперрационалне конструкције низови $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ представљају различите инфинитезимале јер сада користимо ултрафитере када посматрмао класе еквиваленције, па за низове $\frac{1}{n}$ и $\frac{1}{n^2}$ важи $\frac{1}{n} \not\sim \frac{1}{n^2}$. На тај начин добијамо елементе који су бесконачно близу 0 или било ком другом реалном броју.

4 Израчунљивост реалних бројева

Појам алгоритма није био строго дефинисан у математици све до почетка 20. века. Математичари су интуитивно разумевали појам алгоритма као коначан скуп поступака, којим се обрађујући неке улазне податке добија неки излаз. Развојем теоријског рачунарства почетком 20. века појавила се потреба за формалним увођењем појма алгоритма. Алан Тјуринг[21] је увео концепт Тјурингове машине 1936. године. Тјурингова машина је апстрактан математички модел рачунара са бесконачном меморијом. Тјурингова машина на почетку извршавања на траци има уписану неку реч која је улазни податак. Реч се састоји од коначног низа симбола из унапред дефисаног скупа који зовемо алфабет. Машина такође зна са које позиције на траци уписује или чита и има коначан скуп инструкција. На тај начин формално можемо увести појам алгоритма као програма на апстрактном рачунару. Тај програм има коначан скуп инструкција и тиме смо се обезбедили да имамо коначан скуп поступака. Напомињемо да постоје и други формални системи за опис алгоритма као што су λ-рачун, RM-машине, Постове[22] машине, Марковљеви[23] алгоритми итд. Сви претходно наведени формализми су међусобно еквивалентни [14].

После увођења формалне дефиниције појма алгоритма, остаје нам питање да ли за све што интуитивно можемо израчунати постоји Тјурингов програм и обратно. Ово тврди Черч[24]-Тјуригнова теза. Како се ради о људској интуицији ово се не може формално доказати.

4.1 Тјурингова машина

Слика 1: Тјурингова машина

Дајемо кратак опис рада Тјурингове машине из [6] и [7]. Машина се састоји од траке која је бесконачна са обе стране и издељена је на ћелије. У сваку ћелију траке може бити уписан један симбол из неког унапред одабраног скупа симбола(алфабета) $\gamma = \{s_1, ..., s_m\}$. Поред тих симбола имамо и још једна специјалан симбол који нам представља бланко знак $\sqcup$. Тјурингова машина такође

[21] Alan Mathison Turing (1912-1954) - енглески математичар.
[22] Emil Leon Post (1897-1954) - амерички математичар.
[23] Андреј Андрејевич Марков(1903–1979) - руски математичар.
[24] Alonzo Church (1903–1995) - амерички математичар.

поседује главу тј. механизам који може да чита садржај једне ћелије и да извршава једну од инструкција Тјуринговог програма. Инструкције означавамо са $q_0, ..., q_k$, где је свака инструкција облика

$$\mathrm{q}_i \left| \begin{array}{c} \mathrm{s}_1\ \mathrm{s}_1'\mathrm{D}_1\mathrm{q}_{j_1} \\ \vdots \\ \mathrm{s}_m\ \mathrm{s}_m'\mathrm{D}_m\mathrm{q}_{j_m} \end{array} \right.$$

или q_i STOP. Ако је симбол s_l који се чита из ћелије, бришемо га и уписујемо s_l'. Глава се помера на леву ћелију ако је D_l једнако L, односно десну ако је D_l једнако R или остаје на истој, ако D_l једнако P и пређи на инструкцију q_{j_l}.

Сада инструкције можемо да дефинишемо као уређене петорке (q, s, s', D, q'), где q тренутна инструкција, s симбол алфабета уписан у ћелију коју чита глава, s' симбол који уписујемо у ћелију уместо s, D нам говори да ли глава треба да пређе на леву или десну ћелију или да остане на тренутној ћелији, q' је нова инструкција на коју прелазимо.

Дефинишемо Тјурингову машину.

Дефиниција 4.1. Тјурингова машина је уређена седморка $\mathbb{T} = (\mathcal{Q}, q_0, F, \Gamma, \sqcup, \Sigma, \tau)$ при чему је:

- $\mathcal{Q}$ коначан скуп стања, тј. скуп свих инструкција програма,
- $q_0 \in \mathbb{Q}$ је почетно стање, тј. прва инструкција којом се започиње извршавање програма,
- $F \subset \mathcal{Q}$ је скуп завршних стања, тј. скуп свих STOP-инструкција,
- Γ је алфабет траке који садржи бланко знак $\sqcup$, тј. скуп свих симобла који могу бити уписивани у ћелије траке,
- $\Sigma \subseteq \Gamma \setminus \{\sqcup\}$ улазни алфабет и
- τ је Тјурингов програм, тј. функција прелаза $\tau : (\mathcal{Q} \setminus F) \times \Gamma \to \Gamma \times \{R, L, P\} \times \mathcal{Q}$ којом се описују инструкције које нису STOP-инструкције: ако се уређена петорка $qss'Dq'$ појављује као део инструкције q, онда је $\tau(q, s) = (s', D, q')$.

Дефиниција 4.2. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је израчунљива акко постоји Тјурингова машина која је израчунава у коначном времену. Алфабет нам представља скуп $\Sigma = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, а сваку цифру броја уписујемо у засебну ћелију. Улаз нам представља број n који Тјурнговој машини говори колико цифара броја треба да испише и да се заустави.

Тјурингова машина не мора да се заустави за сваки улаз, може да се догоди да се израчунавање настави у бесконачност. Проблем да ли се Тјурингова машина за дати улаз зауставља зове се *halting* проблем. За њега не постоји Тјурингова машина која га проверава. Због тога имамо и услов који захтева да се машина извршава у коначном времену.

Дефиниција 4.3. Функција $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ је израчунљива акко постоје израчунљиве функције $s, a, b : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такве даважи

$$f(n) = (-1)^{s(n)} \frac{a(n)}{b(n)}.$$

Идеја дефиниције је да именилац и бројилац рационалног броја представимо израчунљивим функцијама, а знак рационалног броја броја представљамо тако што -1 степенујемо на неку израчунљиву функцију која за вредности има 0 ili 1 у зависности да ли је знак рационалног броја позитиван или негативан.

Напомињемо да и ако Тјурингове машине раде над произвољним алфабетом, представљање природних бројева на њима је ствар договора.

4.2 Израчунљиви бројеви

Тјурингових програма има пребројиво много, а реалних бројева непребројиво много. Интересују нас они бројеви који се могу добити Тјуринговом машином и такве бројеве зовемо израчунљивим реалним бројевима. Природни, цели и рационални бројеви су тривијално израчунљиви.

Различите конструкције реалних бројева имају своје израчунљиве еквиваленте [8] [9].

- *Кошијеви низови* Израчунљиве низове смо већ дефинисали као израчунљиве функције. Поред тога што сам низ мора бити израчунљив потребно је и да конвергира ефективно.

  Дефиниција 4.4. Низ $\{r_k\}$ рационалних бројева конвергира ефективно реалном броју x ако постоји израчунљива функција $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ таква да за све N:
  $$k \geq e(N) \implies |r_k - x| \leq 2^{-N}.$$
  је израчунљива.

  Дефиниција 4.5. Реалан број x је израчунљив ако постоји низ $\{r_k\}$ који конвергира ефективно ка x.

  Ефективна конвергенција је потребна јер може да се догоди да израчунљив низ рационалних бројева конверигра ка неизрачунљивој граници.

- *Дедекиндови пресеци*

  Дефиниција 4.6. Реалан број x је израчунљив ако је карактеристична функција његовог Дедекиндовог пресека $D = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < x\}$ израчунљива тј.

  $$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & x \notin D \end{cases}$$

  је израчунљива. Општије Дедекиндов пресек је израчунљив ако је израчунљива његова његова карактеристична функција.

- *Уметнути интервали* Низ $I_n = [a_n, b_n]$ уметнутих интервала за који важи $I_{n+1} \subset I_n$ је израчунљив ако су рационални низови a_n и b_n израчунљиви.

  Дефиниција 4.7. Реалан број x је израчунљив ако постоји израчунљив низ уметнутих интервала такав да је $\cap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \{x\}$

- *Децималан развој у основи* b

  Дефиниција 4.8. Реалан број $x \in [0,1]$ је израчунљив у основи b ако постоји израчунљива функција $f : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., b-1\}$ таква да важи

  $$x = \Sigma_{n=0}^{\infty} f(n) b^{-(n+1)}.$$

  Реалне бројеве ван тог интервала можемо посматрати као цео део који је природан број и децимални део.

Разичите конструкције реалних бројева дају различте израчунљиве конструкције. Све претходно наведене конструкције су еквиваленте. Еквивалентност је доказао Р.М. Робинсон[25] (1954) тако што је приметио да ако је α израчунљив реалан број тада је и функција $a(n) = \lceil n\alpha \rceil$ ($\lceil \ \rceil$ цео део на горе) израчунљива функција одакле лако следи еквиваленција [9].

При Колмогоровљевој конструкцији позитивних реалних бројева дефинисали смо их као скуп Φ свих функција $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ које задовољавају својства Φ_1 и Φ_2 и он је изоморфан са $\mathbb{R}^+$ што значи да је непребројив и да нису све функције израчунљиве. Поставља се питање када скупу свих функција које задовољавају Φ_1 и Φ_2 придодамо и услов $\alpha : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ је израчунљива функција, да ли је и тај скуп еквивалентан са претходним дефиницијама израчунљивих реалних бројева. Приметимо да смо при доказу изоморфизма у потпоглављу 2.4 управо користили ту функцију ($\alpha(n) = \langle na \rangle$) да дефинишемо изоморфизам између Φ и Ψ.

Скуп израчунљивих реалних бројева обележавамо са $\mathbb{R}_\mathrm{C}$ и за њега важе следћа тврђења [8]:

- $\mathbb{R}_\mathrm{C}$ је поље,
- $\mathbb{R}_\mathrm{C}$ садржи све реалне бројеве који су нам познати $\pi, e, \sqrt{2}, \sqrt{3}$ итд.,
- $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{A} \subseteq \mathbb{R}_\mathrm{C} \subset \mathbb{R}$, где је $\mathbb{A}$ скуп свих алгебарских бројева,
- $\mathbb{R}_\mathrm{C}$ је пребројив,
- $\mathbb{R}_\mathrm{C}$ није комплетан.

Проучавање израчунљивих бројева је предмет израчунљиве Анализе. У израчунљивој анализи се поред самих израчунљивих бројева проучавају и израчунљиве функције $f : \mathbb{R}_\mathrm{C} \to \mathbb{R}_\mathrm{C}$. При општијим размарањима у израчунљивој анализи се користе Тјуриногве машине типа 2. Тјурингове машине типа 2 се разликују од претходно описаних машина типа 1 по томе што поред једне траке такође поседују радне и улазне траке.

[25] Raphael Mitchel Robinson (1911–1995) - амерички математичар.

5 Закључак

У овом раду је детаљно представљена мање позната конструкција реалних бројева директно из природних од Колмогорова. Оригинално решење је допуњено додатним доказима и објашњењима. Такође су дати кратки описи најпознатијих конструкција реалних бројева од Дедекинда и Кантора као и једна нестандардна конструкција. Данас је познато око двадесет познатих конструкција реалних бројева. Свака од конструкција је била инспирисана различитим областима математике и подстакла је развој тих области.

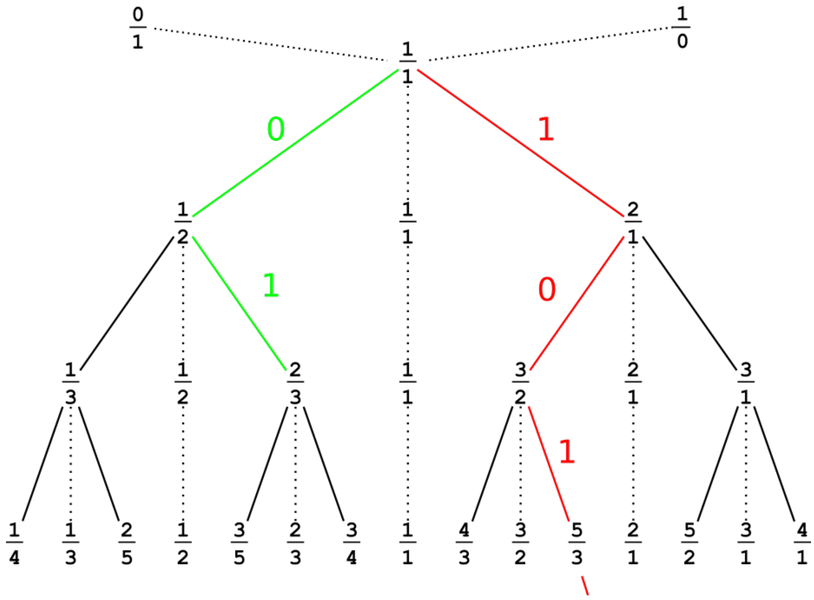
У последње време развојем рачунарства поставила су се питања које бројеве можемо представити рачунарским програмима. Сама природа реалних бројева да их има непребројиво много чини да немамо довољно програма који би нам исписали децимале тих бројева. Тиме је отворено ново поље математике израчунљива анализа у којој постоје многе верзије теорема из класичне анализе.

Поред теоријских разматрања питања израчунљивости реалних бројева подстакнуто је огромно поље у информатици које се бави практичним питањима репрезентације у рачунарима и ефикасним проналажењима апроксимација. Модерни рачунари реалне бројеве увек представљају као рационалне апроксимације са покретним зарезом, од којих је најкоришћенији стандард *IEEE754*.

Данас се реални бројеви најчешће посматрају као бесконачни децимални развоји. Ово је подстакнуто пре свега од стране образовања и практичним потребама физике и свакодневног живота, тиме се испушта суштина да су сви различити начини на које можемо представити реалне бројеве: Дедекиндови пресеци, Кошијеви низови, бесконачни децимални развоји итд. различите манифестације исте апстрактне појаве коју зовемо уређено поље реалних бројева.

А Штерн-Брокоово дрво

У овом додатку ћемо представити још један начин на који би могли да посматрамо реалне бројеве. Штерн-Брокоово[26] дрво су открили Мориц Штерн[27] и Луис Броко[28] независно један од другог[29]. Штерн је посматрао дрво у оквиру теорије бројева и његова својства, а Броко је користио дрво при пројектовању односа зупчаника унутар сатова да би побољшао прецизност мерења времена.



Слика 2: Штерн-Брокоово дрво

Дрво се добија тако што кренемо од формалних разломака $\frac{0}{1}$ и $\frac{1}{0}$ које формално сабирамо. Први елемент се добија тако што се бројиоци саберу са бројиоцима, а имениоци са имениоцима $\frac{1}{1} = \frac{0}{1} + \frac{1}{0}$. Преостали елементи стабла се добијају тако што се формално сабирају његов први леви и први десни предак. Навешћемо неколико примера:

$$\frac{3}{1} = \frac{2+1}{1+0} = \frac{2}{1} + \frac{1}{0},$$
$$\frac{5}{3} = \frac{3+2}{2+1} = \frac{3}{2} + \frac{2}{1},$$
$$\frac{1}{4} = \frac{0+1}{1+3} = \frac{0}{1} + \frac{1}{3},$$
$$\frac{3}{4} = \frac{2+1}{3+1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{1}.$$

Такође запажамо и својства која поседује овако конструисано бинарно дрво:

[26] За детаље видети [13].

[27] Moritz Abraham Stern(1807-1894) - немачки математичар.

[28] Louis Achille Brocot(1817-1878) - француски часовничар.

[29] Штерн је открио дрво 1858., а Броко 1861. године.

I Сваки позитиван рационалан број (осим 0 и 1) се јавља тачно једном у сведеном облику.

II Редослед разломака је испоштован по хоризонтали. Већи разломци се налазе десно од од мањих.

III Сваки ред је симетричан у односу на разломке. Наводимо пример трећег реда

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{3}{1}.$$

IV Ако кретање на лево кроз бинарно дрво обележавамо са 0, а на десно са 1, можемо записати пут од корена стабла до било ког чвора, коначним низовима нула и јединица. На пример пут до чвора $\frac{2}{3}$(зелена боја на слици) записујемо као 01. На овај начин сваком рационалном броју придружујемо један јединствен низ нула и јединица.

Поред ових својстава ово дрво поседује још многа интересантна својства. Како смо све коначне низове нула и јединица повезали са рационалним бројевима, намеће нам се да бесконачни путеви у дрвету представљају реалне бројеве. На тај начин смо добили и једну везу између бесконачних низова нула и јединица и реланих бројева. На слици је наведен један пример пута 101...(црвеном бојом), који би могао представљати неки реалан број. Интересантно је да се на овај начин може повезати теорија графова са теоријом реалних бројева.

Б Природни бројеви

Колмогоровљева контрукција се одвија над скупом природних бројева, па ћемо у овом поглављу дефинисати природне бројеве и операције над њима.

Ричард Дедекинд је 1888. године предложио аксиоматизацију аритметике природних бројева, а 1889. године је Ђузепе Пеано[30] предложио упрошћење те аксиоматике. Тим аксиомама се описују природни бројеви преко операције следбеника који се дефинише као функција $s : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и константе 0. Наводимо Дедекинд-Пеанове аксиоме:

(П1) $s(n) \neq 0$ за свако $n \in \mathbb{N}$.

(П2) Ако је $s(m) = s(n)$, онда $m = n$ за све $m, n \in \mathbb{N}$.

(П3) **(Принцип математичке индукције)** Ако је $S \subseteq \mathbb{N}$ такав да:

- **(БИ)** $0 \in S$,
- **(ИХ)** из $n \in \mathbb{N}$ следи да $s(n) \in \mathbb{N}$ за свако n из $\mathbb{N}$

онда је $S = \mathbb{N}$.

Суштина аксиоме **П1** је да функција s није на-функција, а аксиоме **П2** да је s 1-1 функција. Трећа аксиома нам говори да је $\mathbb{N}$ најмањи индуктивни скуп у смислу инклузије. Да бисмо дефинисали операције сабирања и множења на скупу природних бројева требају нам две теореме рекурзије. Овде ћемо само навести теореме, а докази се могу пронаћи у [6].

Теорема Б.1. Нека је X неки скуп и $g \in X$ и $h : X \to X$. Тада постоји јединствена функција $f : \mathbb{N} \to X$ таква да је

$$\begin{aligned} f(0) &= g \\ f(s(n)) &= h(f(n)),\ n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Теорема Б.2. Нека је $g : P \to X$ и $h : P \times X \to X$. Тада постоји јединствена функција $f : P \times \mathbb{N} \to X$ таква да за свако $p \in P$:

$$\begin{aligned} f(p, 0) &= g(p), \\ f(p, s(n)) &= h(p, f(p, n)),\ n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Сада сабирање и множење можемо да уведемо као функције $+(m, n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ и $\cdot(m, n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, које краће записујемо као $m + n$ и $m \cdot n$, дефинисане преко рекурзије.

$$\begin{aligned} m + 0 &= m, \\ m + s(n) &= s(m + n) \end{aligned}$$

[30]Giuseppe Peano (1858-1932) - италијански математичар

и

$$m \cdot 0 = 0,$$
$$m \cdot s(n) = s(m \cdot n).$$

Поредак на скупу природних бројева уводимо као

$$m \leq n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}\ (m + k = n).$$

Строг поредак уводимо као $m < n \Leftrightarrow m \leq n \wedge m \neq n$.

Теорема Б.3. Нека су $m, n, p \in \mathbb{N}$ произвољни природни бројеви тада важи:

- $m + n = n + m$.
- $m + 0 = m$.
- $m \cdot n = n \cdot m$.
- $m \cdot 1 = m$.
- $(m + n) \cdot p = m \cdot p + n \cdot p$.
- Из $m \leq n$ и $n \leq p$, следи $m \leq p$.
- Из $m \leq n$, следи $m + p \leq n + p$.
- Из $m \leq n$, следи $m \cdot p \leq n \cdot p$.
- Ако важи $m < n$, тада $m + 1 \leq n$.

Над овако уведеном структуром $(\mathbb{N}, +, \cdot, \leq, 0, 1)$ природних бројева се конструишу реални бројеви.

Литература

[1] А. Н. Колмогоров, *К обоснованию теории вещественных чисел*, УМН, 1946, том 1, выпуск 1(11), 217–219
http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=rm&paperid=7018&option_lang=rus

[2] Н. И. Кавун, *Обоснование теории вещшественных чисел по способу А. Н. Колмогорова*, УМН, 2:5(21) (1947), 199–229
http://www.mathnet.ru/links/a487548b439dc5ba3fbb70802746db20/rm6986.pdf

[3] L. S. Krapp, *Constructions of the real numbers a set theoretical approach*, Extended Essay at Oxford University, 2014.
http://www.math.uni-konstanz.de/~krapp/research/Constructions_of_the_real_numbers.pdf

[4] I. Weiss, *The real numbers - a survey of constructions*, DOI: arXiv:1506.03467, 2015.
https://arxiv.org/abs/1506.03467

[5] Д. Аднађевић, З. Каделбург, *Математичка анализа I*, десето издање, Математички факултет у Београду, ISBN: 9788671362115, 2012.

[6] Н. Икодиновић, *Теорија алгоритама*, скрипта, Математички факултет у Београду, 2019.
http://enastava.matf.bg.ac.rs/~ikodinovic/TA_beleske.pdf

[7] М. Живковић, *Алгоритми*, Математички факултет у Београду, 2001.
http://poincare.matf.bg.ac.rs/~ezivkovm/nastava/algoritmi.pdf

[8] V. Brattka, *Computability & Complexity in Analysis*, Tutorial, University of Cape Town, 2006.
http://www.cca-net.de/vasco/cca/tutorial.pdf

[9] Marian B. Pour-El, J. Ian Richards, *Computability in Analysis and Physics*, Association for Symbolic Logic, ISBN: 3540500359, 1989.
https://projecteuclid.org/eBooks/perspectives-in-logic/Computability-in-Analysis-and-Physics/toc/pl/1235422916

[10] M. Spivak, *Calculus Third Edition*, Cambridge University Press, ISBN: 9780521867443, 2006.

[11] J. Stillwell, *Mathematics and Its History Third Edition*, Springer Science+Business Media, LLC 2010 ISBN: 978-1-4419-6052-8, 2010.

[12] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis Third Edition*, McGrawHill Inc. ISBN: 0-07-054325-X, 1976.

[13] M. Niqui, *Exact arithmetic on the Stern–Brocot tree*, Journal of Discrete Algorithms 5 (2007) 356–379, Elsevier B.V., 2007.
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S1570866706000311

[14] Ф. Марић, П. Јаничић *Програмирање 1 - Основи програмирања кроз програмски језик C*, шесто издање, Математички факултет у Београду, ISBN: 978-86-7589-100-0, 2022.
http://poincare.matf.bg.ac.rs/~janicic//books/p1-b5.pdf

Биографија аутора

Александар Ивановић рођен је 01.05.1996. у Београду. Основну школу је завршио 2011. у Земуну као одличан ђак. Уписао је 2011. Земунску гимназију, природно-математички смер. Гимназију завршава 2015. и уписује Математички факултет основне академске студије смер *математика* модул *рачунарство и информатика*. Основне академске студије завршава 2020. са просеком 9,05.

У том периоду се запослио као софтвер инжењер у фирми *Fidelity National Information Services* и ради на развоју платформе нове генерације за процесирање финансијских деривата.

Мастер академске студије на Математичком факултету уписује 2020. на смеру *математика* модул *рачунарство и информатика*.

Области интересовања укључују историју и филозофију математике, заснивање математике и рачунарства, нееуклидске геометрије и развој софтвера.