

Kosmološka konstanta

Žarko Mijajlović

Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu,
Studentski trg 16, 11000 Beograd,

`zarkom@matf.bg.ac.rs`

HEK Beograd

Septembar 7, 2021

Contents

- 1 Apstrakt
- 2 Uvod
- 3 Osnovni kosmološki principi
- 4 Veliki prasak
- 5 Jednačine polja
- 6 Kosmološki modeli
- 7 Regularno promenljive funkcije
- 8 Reference

Apstrakt

Kosmološka konstanta Λ predstavlja fundamentalnu fizičku veličinu i u savremenoj kosmologiji uzima se da reprezentuje jedan od najmisterioznijih fizičkih entiteta, tamnu energiju.



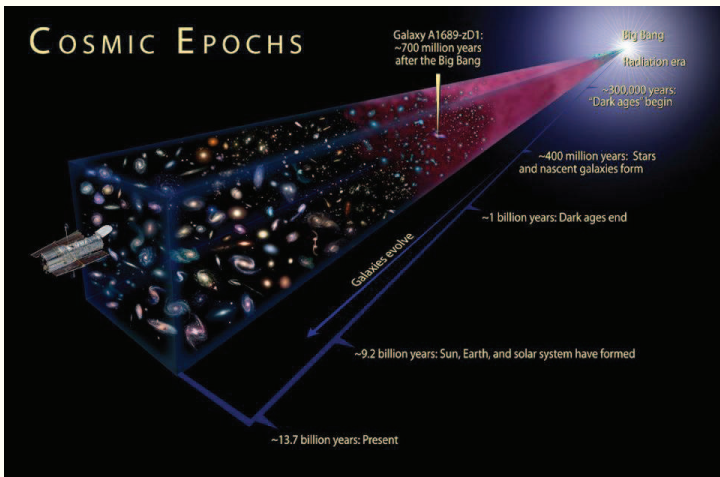
Slika: Pogled na Vaseljenu (dečak iz Indije)

Danas, kada gledate u bilo kom smeru koliko nam zakoni fizike dozvoljavaju da dosegemo, granice vidljivog se protežu do zaista ogromnih udaljenosti. Najstarije svetlo koje možemo raspoznati uz pomoć najboljih instrumenata emitovano je pre 13,8 milijardi (13.8×10^9) godina u trenutku stvaranja Vasiona - Velikog praska. Putujući kroz Svemir koji se širi, ta svetlost konačno stiže na Zemlju, noseći informacije o objektima koji su trenutno udaljeni 46 milijardi svetlosnih godina.

Kako vreme bude proticalo, moći ćemo da vidimo još dalje, kada svetlost koja je još uvek na svom putu na kraju stigne do nas. Ipak, u svakom trenutku postoji granica koliko daleko možemo videti. To je ograničenje koje nalaže opservabilni Univerzum. To takodje znači da ako se vratimo u bilo koju tačku u dalekoj prošlosti, Univerzum bi imao konačnu, merljivu veličinu. Manja nego što je danas, u zavisnosti od toga koliko je vremena prošlo od Velikog praska do tog momenta.

Ali šta biva ako smo se vratili do kraja: nazad na sam početak i na prvi trenutak vrelog Velikog praska? Iznenadjujuće i suprotno ranijim uverenjima, ne dolazimo do singulariteta - Univerzuma beskonačne gustine i beskonačne temperature na beskonačno malom prostoru. Ispostavlja se da postoji ograničenje; to je najmanja moguća veličina koju je Univerzum mogao imati.

Ako želimo da znamo šta će biti u budućnosti ili ono šta je bilo u prošlosti, moramo razumeti pravila i zakone koji tu vremensku nit uređuju. Pravila i zakone postavlja teorija gravitacije: Opšta teorija relativnosti. Polazeći od jednačina ove teorije (Ajnštajnovne jednačine polja) uz dovoljno podataka dobijenih merenjem različitih vrsta materije i energije u Kosmosu, možemo utvrditi evoluciju Univerzuma od daleke prošlosti pa sve do daleke budućnosti.



Slika: Evolucija Vasiono do danas

Uvod

Albert Ajnštajn uveo je 1917. kosmološku konstantu Λ u svoje jednačine iz Opšte teorije relativnosti. Razlog je bio da opiše tzv. stacionarni univerzum kao mogući model za našu Vasionu.

Početakom 1930-ih **Hubble** je eksperimentalno dokazao da se Vasiona širi, dakle nije stacionarna, pa je Ajnštajn odustao od ove ideje. Tom prilikom rekao da je uvođenje ove konstante bila njegova najveća zabluda.

Uvod

Sve do kraja XX veka smatralo se da je $\Lambda = 0$, a onda su 1998. dve grupe astronoma na opšte iznenadjenje nezavisno dokazali (izmerili) da se Kosmos ubrzano širi.

Ovaj fenomen pripisuje se tzv tamnoj energiji koja je u Ajnštajnovim jednačinama predstavljena upravo konstantom Λ . Dakle, Λ ipak nije jednaka nuli i tako ona dobija centralno mesto u savremenoj kosmologiji i savremenoj fizici.

Predavnje se odnosi na ovu konstantu i na sudbinu Vasiona uz pretpostavku o egzistenciji tamne energije.

Kosmologija je nauka o vaseseljeni, prostorno – vremenskom kontinuumu u kojem egzistiraju sva materija i sva energija. Pretpostavlja principe koji su proistekli iz astronomskih posmatranja ili su njima eksperimentalno potvrđeni.

- Ujednačen raspored materije (galaksija) na velikoj skali, od nekoliko stotina mega-parseka.
 $1 \text{ pc} = 3.26 \text{ ly}$. $1 \text{ ly} = 9.46 \times 10^{12} \text{ km}$
- Princip homognosti - Kosmos izgleda isto u svakoj tački
- Princip izotropnosti - Kosmos izgleda isto u svakom pravcu.

Otuda fizički zakoni važe u istom obliku u svim delovima Vasiona. Takođe, koordinatni sistem može se postaviti u bilo kojoj tački prostora, sa bilo kojom orijentacijom osa, a da to ne utiče na eksperiment.

Parsek

Simbol **pc** označava jedinicu dužine koja se koristi za merenje velikih udaljenosti do astronomskih objekata izvan Sunčevog sistema.

1 pc= 3.26 svetlosnih godina, odnosno

1 pc = 30.9 biliona kilometara (30.9×10^{12}).

Parsek se definiše kao rastojanje sa kojeg se rastojanje Zemlje od Sunca vidi pod uglom od jedne lučne sekunde.

Najbliža zvezda, Proksima Centauri, udaljena je oko 1,3 parseka (4,2 svetlosne godine) od Sunca. Većina zvezda vidljivih golim okom nalazi se unutar nekoliko stotina parseka od Sunca, a najudaljenije na nekoliko hiljada.

Maksimalna ugaona rezolucija ljudskog oka je 28 lučnih sekundi ili 0,47 lučnih minuta, što daje ugaonu rezoluciju od 0,008 stepeni, a na udaljenosti od 1 km odgovara 136 mm.

- Van Mlečnog puta postoje druge galaksije - veliki sistemi zvezda koje su povezane gravitacijom (1920-ih, Habl).
- Crne rupe, objekti sa tako jakim gravitacionim poljem koji ne dozvoljavaju "bektstvo" bilo kakvog oblika materije, čestica niti svetlosti.

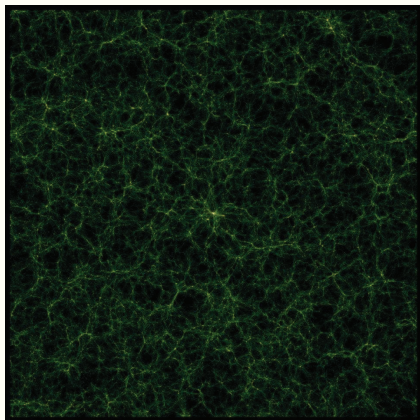


Prvi direktan snimak crne rupe (materije na ivici tzv. horizonta događaja 11. 09. 2019).

Crne rupe. Predvideo ih J. Michell 1783; K. Schwarzschild 1916. na osnovu opšte teorije relativnosti. Prvi ekperimentalni dokaz postojanja 1970-ih na osnovu perturbacija u putanji zvezde, dvojnog sistema zvezda – crna rupa.

U **galaktičkim jezgrima** nalaze se masivne crne rupe.

U kosmologiji, prilikom izučavanja evolucije Univerzuma, uzima se da su galaksije osnovne gradivne jedinice.



Kosmička paučina: Distribucija materije (galaksija) u Univerzumu na velikoj skali.

Skupine galaksija. Pod uticajem gravitacije galaksije se okupljaju u galaktička jata. Jedno jato sadrži par desetina do par stotina galaksija. Najveća galaksija u našem jatu je Velika galaksija u Andromedi (M31), vidljiva golim okom, zatim Mlečni put (naša galaksija) pa M33.

Supergalaktička jata saстоje se od desetina galaktičkih jata

Opservabilni univerzum na logaritamskoj skali:



Udaljavanjem od centra galaksije izgledaju sve manje zbog logaritamskog prikaza, dok ne formiraju Kosmičku paučinu.

Ovaj logaritamski prikaz Vasiona prikazuje naš Sunčev sistem, Mlečni put, kosmičku mrežu i granice onoga što je vidljivo, sada na udaljenosti od 46 milijardi svetlosnih godina.

Ovaj pogled je iz današnje perspektive, 13,8 milijardi godina nakon Velikog praska. Ako časovnik okrećemo unazad, Univerzum bi se smanjivao.



Sledeći podaci odnose se na vidljivi (opservabilni) Univerzum (U):

- $N(gal)/Mpc^3 = 12$, vidi [4].
- $N_U(gal) = 200 \times 10^{12}$.
- Dijametar, $d_U = 28.6 Gpc = 93 Gly$.
- Masa gravitacione materije, $M_U = 1.5 \times 10^{53} kg$.
- Gustina (uključene sve vrste energija osim tamne),
 $\rho = 9.9 \times 10^{-27} kg/m^3 = 6 \text{ protona}/m^3$.
- Starost, $t_U = 13.8 \text{ Gyr}$.
- Prosečna temperatura, $T_U = 2.72K$.



Naša galaksija je **Mlečni put**.

Sadrži 250×10^9 zvezda.

Prečnik= 53000 ly.

Starost= 13.5 Gyr.

M 31. Snimak dela na-
ma najbliže galaksije, **Veli-
ka galaksija u Androme-
di**, M31.

Crveni pomak: -0.001.

Udaljenost 0.83 Mpc.

Broj zvezda: 10^{12} .

Prečnik 220 Kly.

Reflektor, $d=25$ cm.

Kamera SBIG 8300f

Autori: N. Filipović,

Ž. Mijajlović



Slika: M 31



Treća po veličini galaksija u Lokalnoj grupi.

Gravitaciono povezana sa M31.

Starost= 13.5 Gyr.

M 33. Snimak dela nama najbliže galaksije, **Galaksija Vrteška**, M33.

Crveni pomak: -0.001.

Udaljenost 0.83 Mpc.

Broj zvezda: 10^{11} .

Prečnik 220 Kly.

Refraktor, $d=12$ cm.

Kamera SBIG 8300f

Autor: Ž. Mijajlović

Divčibare decembar 2020.



Slika: M 33



Veličina galaksija

prečnik: 1000 – 100.000 pc

debljina: 3000 – 10.000 ly.

Prosečno rastojanje između galaksija: 1 Mpc

NGC 891. Bočno postavljena galaksija. Pripada grupi 12 galaksija koja opet pripada lokalnom superklasteru.

Crveni pomak: $+0.00176$.

Udaljenost $29 Mly \sim 7 Mpc$.

Reflektor, $d=25$ cm.

Kamera SBIG 8300f

Autori: N. Filipović,

Ž. Mijajlović



Slika: NGC 891



Ako bi Vasiona bila vodena kugla prečnika Zemlje, tada bi galaksije bile ribe veličine 5 – 50 cm koje plivaju na međusobnom rastojanju od par metara.

M 74. Frontalno postavljena galaksija. Pripada lokalnoj grupi od desetak galaksija.

Crveni pomak:
+0.0022 (657km/s).
Udaljenost 9 Mpc.

Reflektor, $d=25$ cm.
Kamera SBIG 8300f

Autori: N. Filipović,
Ž. Mijajlović



Slika: M 74



Postoje slobodne galaksije i **klasteri** (jata) galaksija. Klasteri čine **super klustere**. Sila koja ih drži na okupu je gravitacija. Super klasteri su najveće formacije u Univerzumu.

Persejev klaster. U sazvežđu Persej nalazi se jedan od najmasivnijih objekata u svemiru, jato koje sadrži preko 1000 galaksija povezanih gravitacijom.

Crveni pomak:

+0.018(5366km/s).

Udaljenost +73.6 Mpc
(240.05 Mly).

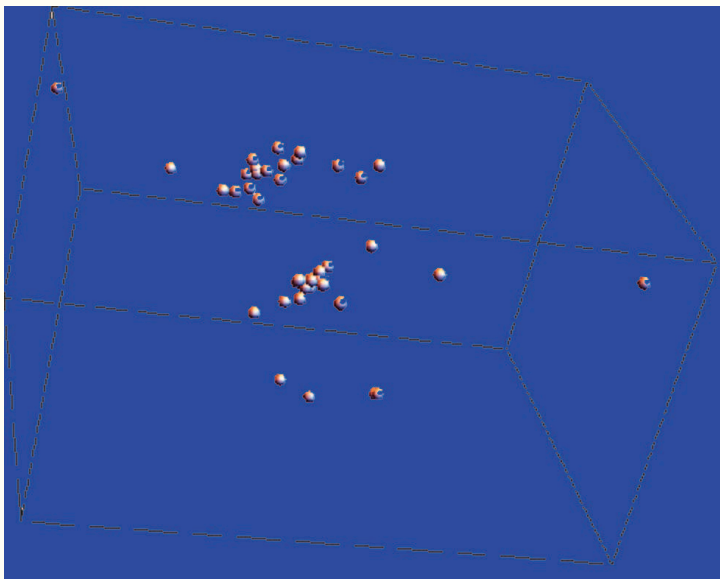
Reflektor, d=25 cm.

Kamera SBIG 8300f

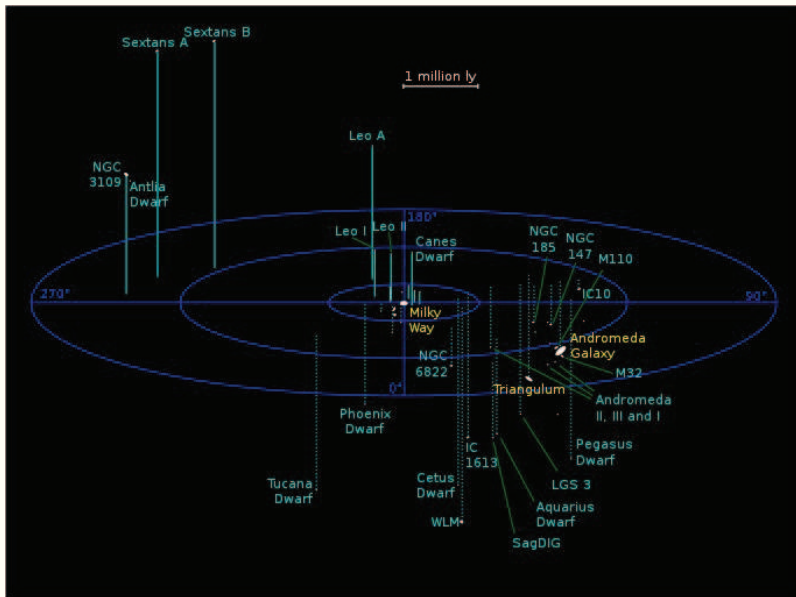
Autori: N. Filipović,
Ž. Mijajlović



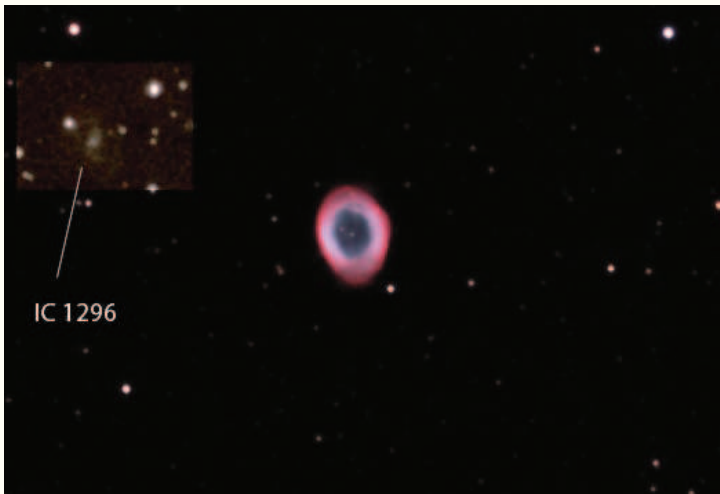
Slika: Jato u Perseju



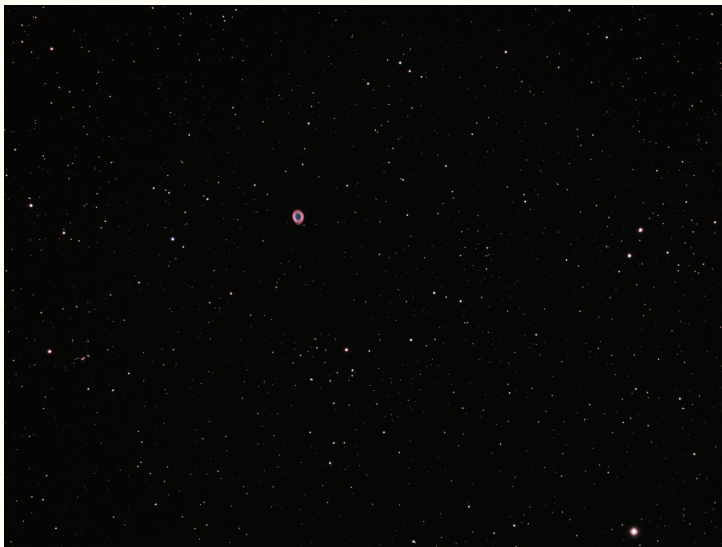
Slika: Lokalna grupa galaksija (Wolfram Mathematica)



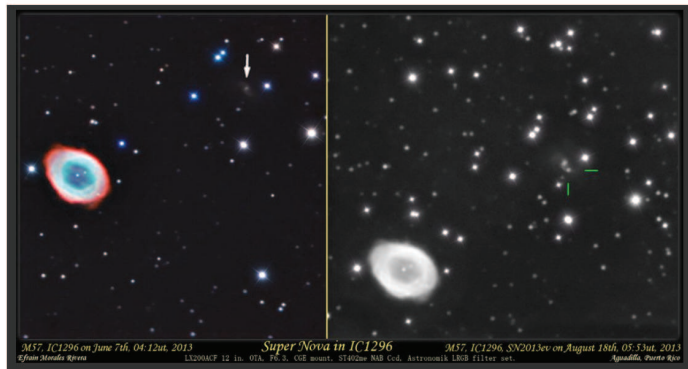
Slika: Lokalna grupa galaksija



Slika: Planetarna maglina M57 u Liri i udaljena galaksija IC1296. M57 je ostatak supernove. Rastojanje IC1296 od nas je 240 Mly. (Ž. Mijajlović, Divčibare 2020)



Slika: Planetarna maglina M57 u teleskopu, uvećanje 100x
(Ž. Mijajlović, Divčibare 2020)



M57 image taken on June 7th without SN and on August 18th, 05:53ut. Showing the Super Nova in the Galaxy IC1296-(Annotated) its ID is SN2013ev. Discovered by F. Ciabattari, E. Mazzoni and G. Petroni (ISSP) (Italy) On Aug12-2013 and independantly Manfred Kliemke (Germany). It is in the same field as the planetary nebula M57. This one is a Type II ($z=0.017$). This supernova is in the Constellation Lyra. (Equipment: LX200ACF 12 in. OTA, F6.3, CGE Mount, ST402me NAB Ccd, Astronomik LRGB filter set.

An excellent example of a supernovae that outshines its host galaxy which is hardly visible in the first picture.

M57 is ~2300 LY's distance while IC1296 is ~240 million LYs distance.

Slika: Supernova u galaksiji IC1296

Energetski ekvivalent materije

- Relativistička materija: čestice koje se kreću brzinom bliskoj brzini svetlosti (fotoni, elektroni velikih brzina, neutriini, ...). Na kosmičkoj skali to je kosmičko zračenje.
- Nerelativistička materija: čestice malih brzina, relativističko uvećanje mase je zanemarljivo (protoni, neutroni, ...). Na kosmičkoj skali to su galaksije.

$E = m_0 c^2$ – energetski ekvivalent nerelativističke materije,

$E = h\nu$ – energija elektromagnetnog zračenja.

$E = \gamma m_0 c^2$ – Energija čestice sa relativističkom brzinom v , (1)

$$\gamma = 1 / \sqrt{1 - v^2 / c^2}.$$

Ovim se čvrsta masa (čestice) i radijacija svode na zajednički imenitelj, energiju. Otuda ρ predstavlja gustinu energije.

Takođe,

- Tamna materija - vrsta materije koja sa vidljivom materijom ima jedino gravitacionu interakciju.
- Tamna energija - repulzivna sila koja deluje (na velikoj skali) antigravitacijski.

Ima mnogo teorija, ali ne zna se tačna priroda ovih entiteta.

Proračuni pokazuju sledeću raspodelu ovih entiteta u Vasioni:

- Vidljiva materija (čestice i zračenje) - 5%.
- Tamna materija - 27%. Uzrok "nepravilne" rotacije krakova galaksija, F. Zwicky, 1933.
- Tamna energija - 68%. Uzrok *inflacije*, ubrzanog širenja vasiona. S. Perlmutter i B. Schmidt sa koautorima 1998.



Vrlo slabo vidljiva galaksija **Dragonfly 44**. Tamna materija čini 99.99% sastava ove galaksije.



Snimak ove galaksije nemoguće je napraviti konvencionalnim teleskopom. Ovaj snimak napravljen je *dragonfly* teleskopom, po konstrukciji nalik oku vilinog konjica.

Našim Univerzumom ne upravljaju samo jednačine opšte relativnosti, već i spomenuti principi, gde je Univerzum oboje:

Izotropan, što znači da u proseku ima ista svojstva u svakom smeru.

Homogen, što znači da u proseku ima ista svojstva u svim mestima na koje bismo mogli da odemo.

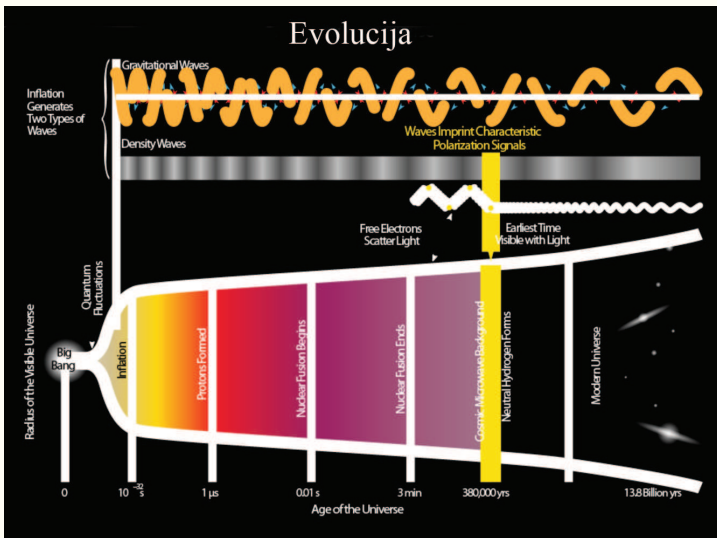
Uz ove pretpostavke možemo izvesti model univerzuma koji se mora ili širiti ili smanjivati. Ovo rešenje prvi je izveo 1920-ih Aleksandar Friedmann i poznato je kao

Friedmann Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) metrika.

Jednačine koje upravljaju ekspanzijom (ili kontrakcijom) Vasiona poznate su kao Fridmanove jednačine.

Na osnovu ovih jednačina možemo pratiti evoluciju Vasiona sve dok vrste energije u Univerzumu ostaju konstantne. Tj. sve dok ne pretvaramo jedan oblik energije (poput materije) u drugi (npr zračenje) koji poštuje drugačiji skup pravila prilikom širenja Univerzuma.

Da razumemo kako je Svemir evoluirao u dalekoj prošlosti ili će to učiniti u budućnosti, moramo takođe razumeti kako se svaka pojedinačna komponenta vremenom razvijala, kada i pod kojim okolnostima se ove različite komponente pretvaraju jedna u drugu.



Slika: Evolucija Vasiona odmah po postanju

Danas, Univerzum, kako ga merimo, sastoji se od sledećih oblika energije.

Tamna energija: čini 68% Univerzuma i oblik je svojstven energiji tkiva samog prostora; dok se Univerzum širi, gustina tamne energije ostaje konstantna.

Tamna materija: čini 27% Univerzuma. Njena gustina opada sa zapreminom Univerzuma koji se širi.

Normalna materija ("prašina", barijonska materija): Danas čini 4,9% Univerzuma. Isto se razblađuje kako se Vasiona širi. Gustina opada, ali broj čestice ostaju isti.

Radijacija čini danas zanemarljiv deo ukupne materije u Kosmosu. Dominantna u početku kondenzovala se u barijonsku materiju.

Neutrini mada čine samo 0,1% svemira zanimljivi su zbog svojih osobina. Na primer, dugo se nije znalo da li imaju masu mirovanja i vrlo su prodorni.

Mereći fluktuaciju tzv. pozadinskog zračenja (relikt Velikog praska), došlo se do zaključka da je maksimalna temperatura u samom početku bila 10^{15} GeV (10^{30} K), kao i da je postojala epoha u razvoju Univerzuma koja je prethodila Velikom prasku. Taj deo evolucije Kosmosa u direktno je vezan za **inflaciju**, naglo širenje Vasiona sa sledećim karakteristikama:

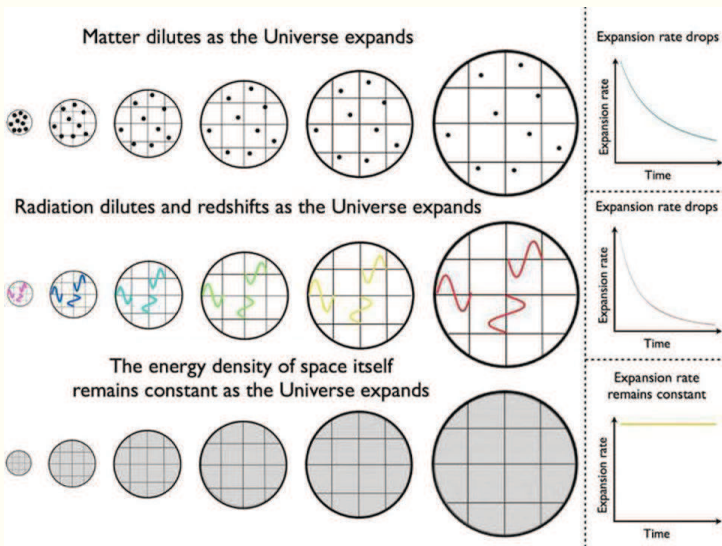
Pre Velikog praska dominirala je velika količina energije, slična tamnoj energiji.

Pod dejstvom ove energije Kosmos započinje eksponencijalno širenje.

Usled širenja Univerzum je postao hladan i sadržavao je samo energiju inflacionog polje.

Tokom inflatornog širenja koje je trajalo neodređeno vreme, inflatorno polje se raspadalo.

U tom procesu energija inflacije pretvorila se u materiju i zračenje.



Slika: Razredjivanje materije prilikom širenja Vasiona

Da je Vasiona nastala iz nekog bezdimenzionog singulariteta postojale bi posledice za naš Univerzum, suprostavljene onom što danas opažamo. Na primer, fluktuacije u pozadinskom zračenju bile bi mnogo veće, za faktor 30 000, a primordijalni gravitacioni talasi bili bi mnogo jači.

Pre 15 godina smatralo se da je energetski ekvivalent temperature bio oko 4×10^{16} GeV. Naknadna merenja smanjila su tu vrednost suštinski, na oko 10^{15} GeV. To postavlja granicu koliko se daleko može ekstrapolirati Veliki prasak unazad: na vreme od 10^{-35} sekundi i a skala udaljenosti na 1.5 metara. Univerzumu, u najranijim fazama možemo pripisati "veličinu" od oko 2 metra.

Ovo objašnjenje naginje teoriji multiverzuma prema kojoj je naš kosmos bio samo jedan mehur u peni svih univerzuma (10^{500}). Pod dejstvom fluktuacije energije vakuuma (inflacionog polja) mehur je eksplodirao u našu Vasionu.

Ajnštajnovе (- D. Hilbert?) jednačine polja (1915)

Albert Ajnštajn uveo je 1917. konstantu Λ u svoje jednačine kojima se opisuje gravitaciono polje:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (2)$$

želeći da obezbedi gravitaciono odbijanje, neophodna pretpostavka za model statičkog univerzuma u koji je verovao.

- $R_{\mu\nu}$ - Ričijev tenzor krivine,
- $g_{\mu\nu}$ - metrički tenzor,
- $T_{\mu\nu}$ - tenzor energije i impulsa,
- $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$ - skalarni tenzor krivine,
- G - gravitaciona konstanta, c - brzina svetlosti,
- Λ - kosmološka konstanta.

Friedmanove jednačine

Fridman (Alexander Friedmann, 1888-1925) izvodi 1920-ih iz jednačina polja diferencijalne jednačine ($\Lambda = 0$):

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad \text{Fridmanova jednačina,}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right), \quad \text{Jednačina ubrzanja,} \quad (3)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad \text{Jednačina fluida.}$$

Fridmanove jednačine povezuju kosmološke parametre:

- $a(t)$ - faktor širenja kosmosa (*scale factor*),
- $\rho(t)$ - gustina (pros. količina materije u jedin. zapremine)
- $p(t)$ - pritisak; jednačina stanja $p = w\rho$, $w = \text{konst.}$
- k - krivina prostora ($k = 0, -1, 1$).

Fridmanove jednačine koje uključuju kosmološku konstantu:

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \text{Fridmanova jednačina,}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\left(\rho + \frac{3p}{c^2}\right) + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \text{Jednačina ubrzanja,}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\left(\rho + \frac{p}{c^2}\right) = 0, \quad \text{Jednačina fluida.}$$

Smenom:

$$\rho' = \rho + \Lambda/(8\pi G), \quad p' = p - \Lambda/(8\pi G) \quad (4)$$

Fridmanove jednačine sa Λ članom svode se na oblik (3).

Zašto je Λ konstanta?

Uzmimo da G takođe zavisi od vremena.

Diferenciranjem Fridmanove jednačine i eliminacijom \ddot{a} uz pomoć jednačine ubrzanja dobijamo:

$$G \left(\dot{\rho} + 3 \frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \right) + \rho \dot{G} + c^2 \dot{\Lambda} = 0. \quad (5)$$

S obzirom na jednačinu fluida otuda sledi

$$\rho \dot{G} + c^2 \dot{\Lambda} = 0. \quad (6)$$

Dakle, ili su Λ i G obe vremenski zavisne veličine ili su obe konstante.

U kosmologiji se izučava i model vremenski zavisnih G i Λ , [1]. Glavni pravac istraživanja u kosmologiji pretpostavlja da je G konstanta (saglasno eksperimentima), dakle i Λ je konstanta.

Zašto je Ajnštajn napustio svoju konstantu Λ ?

Ajnštajn je želeo, naravno, da primeni svoje jednačine polja na stvarni univerzum. U to vreme znalo se da:

- Svemir sadrži i zračenje (radijaciju) i materiju.
- Zvezdana svetlost je glavni oblik kosmičkog zračenja.
- Gustina energije koja potiče od svetlosti zvezda mnogo je manja od ostale gustine energije zvezda.

Otuda zaključuje da primarni doprinos gustini energije univerzuma čini nerelativistička materija, pa se približno može uzeti da je $p = 0$, tj. da je pritisak radijacije zanemarljiv.

Nepotpune činjenice dostupne u to vreme (1917) dovode Ajnštajna do uverenja da je univerzum statičan, dakle niti se širi, niti se skuplja, da je gustina energije ρ pozitivna i konstanta.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2}, \quad \rho = 0,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho c^2, \quad \text{Jedn. ubrzanja,} \quad (7)$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad \text{Jedn. fluida.}$$

Odatle se već u Njutnovskoj mehanici (na pr. prema Njutnovoj teoremi, ili Gausovoj teoremi potencijala), izvodi da je $\rho = 0$, što je naravno kontradikcija. Statički univerzum može biti rešenje jednačina polja jedino u praznom i ravnom univerzumu. To se isto odmah vidi iz Fridmanovih jednačina.

Zato Ajnštajn uvodi korektivni član Λ . U statičkom univerzumu ρ i a su konstante, dakle $\dot{a} = 0$ i $\ddot{a} = 0$.

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho - \frac{kc^2}{a^2} + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \rho = 0,$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}\rho + \frac{\Lambda c^2}{3}, \quad \text{Jednačina ubrzanja,}$$

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}\rho = 0, \quad \text{Jednačina fluida.}$$

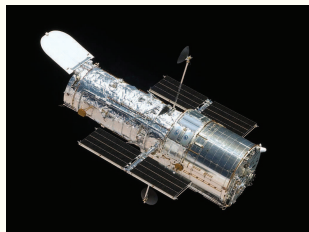
Iz prve dve Fridmanove jednačine Ajnštajn nalazi rešenje za statički univerzum:

$$\Lambda = 4\pi G/c^2, \quad k = 1 \text{ (zatvoren univerzum)}. \quad (8)$$

Krajem dvadesetih i početkom 1930-tih pojavile su se činjenice protiv modela statičkog univerzuma.

- Hablovo (Edwin P. Hubble, 1889 - 1953) eksperimentalno otkriće o širenju univerzuma, dakle a nije konstanta i $\dot{a} \neq 0$.
- Edington (Arthur S. Edington, 1882 - 1944) ukazao na nestabilnost modela takvog univerzuma.

Ajnštajn je ubrzo odustao od kosmološke konstante izjavom da je to njegova najveća zabluda.

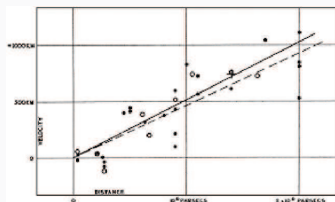


Hablov teleskop.

Lansiran 1990. i kruži na orbiti oko Zemlje na visini od 560 km.

Prečnik ogledala= 2.4 m.

Hublov zakon i Veliki prasak



Veliki prasak. Otkriće Hubbleovog zakona prirodno je vodilo teoriji Velikog praska: Svemir je nastao u jednom trenutku u prošlosti eksplozijom iz nekakvog singulariteta i od tada se neprekidno širi.

Hablov zakon. U spektru udaljenih galaksija, Hابل je otkrio crveni pomak:

$$z = \frac{\lambda_z - \lambda_e}{\lambda_e}, \quad z = \frac{v}{c}. \quad (9)$$

Pomak je protumačio kao Dopplerov efekt u spektru svetlosti koja dolazi od galaksije koja se udaljava. Prema dijagramu, utvrdio je da je brzina udaljavanja proporcionalna rastojanju:

$$\mathbf{v} = H_0 \mathbf{r}, \quad \text{Hablov zakon.} \quad (10)$$

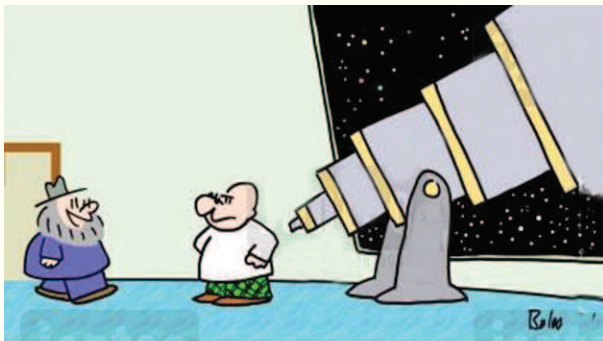
Edingtonov argument za nestabilnost Ajnštajnovog rešenja

Dopustimo malu fluktuaciju, na pr. pretpostavimo malu ekspanziju univerzuma. Tada će ρ opasti, te na osnovu jednačine fluida (i neprekidnosti $\dot{\rho}$), ρ će još neko vreme opadati.

S druge strane, prema jednačini ubrzanja, repulzivna sila predstavljena članom Λ/c^2 postaje dominantnija nad gravitacionom silom, predstavljenom članom $-4\pi G\rho/3$, pa bi se univerzum i dalje širio.

Dakle malo širenje univerzuma uzrokuje njegovo neprekidno širenje, bez kraja.

Slično se pokazuje da mala fluktuacija prema skupljanju univerzuma vodi ka kolapsu.



"Sorry I'm late, but you know how the Universe keeps expanding."

Slika: Izvinjenje jednog kosmologa

Univerzalne konstante

Univerzalne konstante su fizičke veličine za koje se pretpostavlja da su prostorno i vremenski invarijantne.

Njihova vrednost ne menja se protokom vremena, niti izborom mesta eksperimenta u Vasioni, saglasno kosmološkom principu homogenosti i izotropnosti.

Po pravilu postoji primarni fizički zakon u kojima se one javljaju.

Uzima se da ima 19 - 22 fundamentalnih konstanti.

Iz fundamentalnih konstanti izvode se druge konstante (na pr. Plankovo vreme, Plankova dužina, ...)

Fundamentalne konstante u kosmologiji

- **Gravitaciona konstanta,**

$$G = 6.67430(15) \times 10^{-11} m^3 \cdot kg^{-1} \cdot s^{-2}$$

Njutnov zakon gravitacije $F = G \frac{mM}{r^2}$.

- **Brzina svetlosti u vakuumu.,** $c = 299\,792\,458 m/s$.

Bazni princip specijalne teorije relativnosti: Brzina fotona ista je u svim inercijalnim sistemima i jednaka je c .

$$E = mc^2.$$

- **Plankova konstanta,** $h = 4.135667696 \times 10^{-15} eV \cdot s$.

Kvantum (najmanja količina) elektromagnetnog dejstva.

$$E = hv.$$

- **Kosmološka konstanta,** $\Lambda = 1.1056 \times 10^{-52} m^{-2}$.

U kosmologiji predstavlja repulzivnu silu, tamnu energiju.

U kvantnoj teoriji polja predstavlja energiju vakuuma.

Primarni fizički zakon= Ajnštajnova jednačina polja.

Kosmološki parametri

- Postoje fizičke veličine čije se vrednosti menjaju tokom vremena.
Pretpostavlja se prostorna invarijantnost, tj. vrednost parametra ne zavisi od izbora mesta u Vasioni.
- Kosmološki parametar u osnovi je realna funkcija $P = P(t)$, t je vremenska promenljiva.
Vreme je predstavljeno realnim kontinuumom R .
- Funkcija $P(t)$ predstavlja neku fundamentalnu fizičku vrednost koja se menja u vremenu i odnosi na standardni kosmološki model.

Radi jednostavnosti često se vrednosti konstanta simplifikuju, na pr. za brzinu svetlosti uzima se $c = 1$.

Teorijski kosmolozi izučavaju diferencijalne, geometrijske i algebarske osobine kosmoloških parametara. Po pravilu, trojka

$$\mathbf{M} = (\mathcal{J}, \mathcal{P}, \mathcal{C}) \quad (11)$$

- \mathcal{C} - skup univerzalnih konstanti.
- \mathcal{P} - skup kosmoloških parametara.
- \mathcal{J} - sistem (diferencijalnih) jednačina čija su rešenja funkcije $P \in \mathcal{P}$.

predstavlja matematički model Univerzuma i pridruženih fizičkih veličina.

Eksperimentalni kosmolozi mere te veličine. Ukoliko model \mathbf{M} nije saglasan sa izmerenim vrednostima, odbacuje se.

Glavna razlika između eksperimentalne i teorijske kosmologije je cena, prva je ∞ puta skuplja od teorijske kosmologije.

Pored $a = a(t)$, $p = p(t)$ i $\rho = \rho(t)$, rešenja Fridmanovih jednačina, sledeće funkcije predstavljaju važne kosmološke parametre:

$$\begin{aligned}
 H = H(t) &= \frac{\dot{a}}{a} && \text{Hablov parametar,} \\
 \rho_c = \rho_c(t) &= \frac{3H^2}{8\pi G} && \text{kritična gustina,} \\
 \Omega = \Omega(t) &= \rho/\rho_c && \text{parametar gustine,} \\
 \Omega_\Lambda = \Omega_\Lambda(t) &= \frac{\Lambda}{3H^2} && \text{parametar } \Lambda\text{-gustine,} \\
 \Omega_k = \Omega_k(t) &= -\frac{k}{a^2 H^2} && \text{parametar gustine krivine,} \\
 q = q(t) &= -\frac{\ddot{a}}{aH^2} && \text{parametar usporenja.}
 \end{aligned} \tag{12}$$

Kosmos stacionarnog stanja

Od 1930-ih, kada je Ajnštajn napustio svoju kosmološku konstantu, postavljeno je više kosmoloških modela.

U kompeticiji sa Teorijom velikog praska, naročito je bila popularna Teorija stabilnog stanja (Steady state theory) bazirana na *savršenom kosmološkom principu* (Fred Hoyle) prema kojem:

Fizički zakoni su prostorno-vremenski invarijantni.

Dakle, ne samo da ne postoji privilegovano mesto u prostoru, već ne postoji niti privilegovano mesto u vremenu.

Prema ovoj teoriji univerzum se uvek širi, ali održava konstantnu prosečnu gustinu, pri čemu se materija neprekidno stvara u vidu novih zvezda i galaksija jednakom brzinom kojom stare postaju neprimetne kao posledica sve veće udaljenosti.

Univerzum stacionarnog stanja nema početak niti kraj u vremenu, i u njemu takođe važe principi homogenosti i izotropije.

Drugim rečima, zašto bi se svemir stvorio odjednom (u Velikom prasku), kada može to isto malo po malo.

Otkrićem pozadinskog zračenja sredinom 1960-ih ova teorija uglavnom je napuštena.

Λ CDM model

Potvrdom ubrzanog širenja Vasiona 1998. (Saul Permuter i koautori) merenjem supernovih tipa Ia, Λ CDM (Lambda cold dark matter) postao je glavni kosmološki model.

Prema ovom modelu svemir sadrži tri glavne komponente:

- kosmološku konstantu Λ koja predstavlja tamnu energiju,
- hladnu tamnu materiju (skraćeno CDM),
- običnu materiju.

Pored toga što objašnjava Veliki prasak, ovaj model saglasan je sa eksperimentalno utvrđenim svojstvima kosmosa:

- Postojanjem i strukturom kosmičke mikrotalasne pozadine.
- Strukturom Vasiona na velikoj skali i distribucijom galaksija.
- Ubrzanim širenjem svemira.

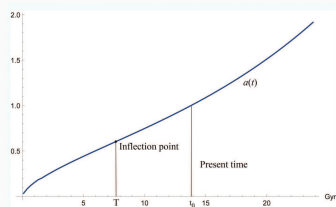
Λ CDM model baziran je na Ajnštajnovim jednačinama polja, odnosno Fridmanovim jednačinama.

Ove jednačine predviđaju nekoliko faza u evoluciji Vasiona:

- Inflaciju ranog univerzuma $10^{-36} - 10^{-32}$ sec.
(A. Starobinsky, A. Guth),
- Epoha radijacije (do 47 000yr od Velikog praska)
- Epoha dominacije gravitacione materije
(obična + tamna materija), 47 000yr – 7.65 Gyr.
- Epoha dominacija tamne energije
(kosmološke konstante) 7.65 Gyr – ∞ .

Za svaku od ovih epoha Fridmanove jednačine daju rešenja.

Konačna sudbina Vaseljene



Graf parametra $a(t)$ generisan je u Wolfram Mathematica ver. 11.0 pomoću ugrađene funkcije `UniverseModelData`.

Finale. Nalazimo se u poslednjoj epohi evolucije kosmosa u kojoj dominira Λ , tj. tamna energija.

U toj poslednjoj fazi, parameter širenja kosmosa $a(t)$ je eksponencijalno rastuća funkcija:

$$a(t) \sim e^{c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (13)$$

To znači da će se kosmos sve brže širiti.

Big Rip

Horizont događaja, koji se menja po zakonu

$$d_p = \int_0^{t_0} \frac{c}{a(t)} dt \sim e^{-c\sqrt{\frac{\Lambda}{3}}t}. \quad (14)$$

približavaće se se, dok će se komunikacija sa udaljenim objektima, onim koji se nalaze iza tog horizontata prekidati. Prostor iza horizonta događaja teče brzinom većom od brzine svetlosti, pa do posmatrača ne može dopreti elektromagnetno zračenje, niti dejstvo gravitacije sa tih objekata. Za hipotetičkog posmatrača na Zemlji nestaće najpre udaljene galaksije, zatim Velika galaksija u Andromedi, pa Mlečni put, potom Sunce i planete, a pred sam kraj i najbliža okolina. Na samom kraju, kroz otprilike 24 Gyr, pokidaće se sve veze između atoma i elementarnih čestica. Materija će se jednostavno istopiti u vakuumu.

Dualni univerzum

Predložen model o konačnoj sudbini Vasiona izaziva mnoga pitanja filizofske prirode.

Ipak, to je samo jedan od više scenarija koji se razmatraju u kosmologiji.

Jedan, svakako zanimljiv i više optimističan model kaže da je tamna enerija ništa drugo do plimski talas gravitacione prirode koji potiče od dualnog (paralelnog) univerzuma.

Prema toj teoriji, dualni univerzum utiče na našu Vasionu, isto kao što dve bliske crne rupe utiču jedna na drugu.

Izučavanja ovakvih modela leži, na primer u teoriji multiverzuma, teoriji struna, M-teoriji i teoriji diferencijalnih jednačina Novosadskog matematičara, akademika Vojislava Marića.

Ali o tome drugi put.



Slika: Dve bliske crne rupe

Karamatina teorija

U našem istraživanju bavili smo se evolucijom univerzuma prema Λ CDM modelu primenom teorije regularno promenljivih funkcija.

Jovan Karamata uveo je ovu klasu funkcija 1930 uopštavajući Hardijev pristup (preko Hardijevih polja) asimptotskoj analizi.

Pored Karamate, teoriju ovih funkcija razvijali su njegovi učenici (Aljančić, Avakumović, Tomić, Marić i drugi) ali i analisti svetskog ranga (Fletcher, Seneta, Bingham).

Za našu primenu u kosmologiji posebno je značajna primena ove teorije u rešavanju linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda koju je razvijao akad. Vojislav Marić.

Naime, ispostavilo se da u raznim fazama evolucije kosmološki parametri, kao rešenja Fridmanovih jednačina pripadaju upravo ovoj klasi funkcija. Marićeve teoreme mogle su se primeniti na rešena jednačine ubrzanja, jedno od tri iz sistema Fridmanovih jednačina.

U radovima [2], [3], [4] izvedene su asimptotske formule za kosmološke parametre primenom ove teorije.

Koautori su bili: Nadežda Pejović, Vojislav Marić, Stevo Šegan, Viktor Radović, Goran Damljanović i Danijela Branković.

Ovaj rezulta zabeležen je i u monografskoj literaturi iz ove oblasti. Jedna sekcija u monografiji [5] posvećena je ovoj primeni teoriji regularno promenljivih funkcija u kosmologiji.

© MAZIK ANDERSON

WWW.ANDERZTOONS.COM



"Hmm... Lemme check that purchase order again."

Slika: Oprema

Reference



Bingham, N.H., Goldie, C.M., Teugels, J.L.: Regular variation. *Cambridge Univ. Press*, Cambridge (1987).



A. Friedmann, Z. Phys. Über die Möglichkeit einer Welt mit konstanter negativer Krümmung des Raumes 21 (1) (1924) 326.



Karamata, J., Sur une mode de croissance réguliere fonctions. *Math. (Cluj)* (1930).



A. Fletcher, THE NUMBER OF GALAXIES PER UNIT VOLUME, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 106, p.121.,

<http://articles.adsabs.harvard.edu//full/1946MNRAS.106..121F/00>



P. Rehak, Nonlinear Differential Equations in the

-  Kantha, L, A Time-Dependent and Cosmological Model Consistent with Cosmological Constraints, *Advances in Astronomy*, Volume 2016, <https://www.hindawi.com/journals/aa/2016/9743970/#B27>
-  Mijajlović, Ž., Pejović, N., Šegan, S., Damljanović, G., On asymptotic solutions of Friedmann equations. *Appl. Math and Computation*, **219**, 1273–1286, (2012).
-  Mijajlović, Ž., Pejović, N., Marić, V.: On the ε cosmological parameter. *Serb. Astron. J.* **190**, 25 - 31, (2015).
-  Mijajlović, Ž., Pejović, N., Radović, V.: Asymptotic solution for expanding universe with matter-dominated evolution, *Int. J. Geometric methods in Modern Physics* Vol. 16, No. 4, (April 2019).
-  Seneta, E.: Regularly varying functions. *Springer*, Berlin