Глубокоуважаемому
Николаю Николаевичу
Салтыкову
от автора

TEHNIČKA VELIKA ŠKOLA U BEOGRADU

J. HLITČIJEV

POGLAVLJA IZ TEORIJE ELASTIČNOSTI

SA PRIMENAMA

DRUGO DOPUNJENO IZDANJE

Legem brevem esse oportet
quo facilius ab imperitis teneatur.
Seneca

Naučna Knjiga
IZDAVAČKO PREDUZEĆE NARODNE REPUBLIKE SRBIJE
BEOGRAD, 1950

Štamparija „Vuk Karadžić“ — pogon „Iskra“, Beograd, Takovska ul. 32 — Telefon 21-211.

Памяти

п̄рофессора И. Г. Бубнова,

учителя и друга.

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Ovo izdanje je dopunjeno primenama Teorije elastičnosti na konstruktivne probleme. Takve primene su mnogobrojne i raznolike; ako bih pokušao da obuhvatim bar njihov veći deo, debljina knjige bi uplašila čitaoca, mesto da ga zainteresuje za ovu disciplinu. Zato sam morao odabrati ograničen broj takvih primena. U većini slučajeva birao sam probleme važne sa praktičnog gledišta u kojima sam imao i nešto svoje da kažem.

Nadam se da čitalac taj lični moment neće smatrati za nedostatak knjige, jer u suštinu nekog problema najbolje može drugog da uvede onaj, koji je sam na njemu radio i doprineo njegovu rešavanju.

Zbog nedostatka štamparskog materijala bilo je nemoguće složiti petitom one delove, koji ne ulaze u okvir nastave na statičko-konstruktivnom otseku, gde predajem. Ti delovi su obeleženi u sadržaju zvezdicom.

Pri štampanju knjige mnogo me je zadužio Ing. M. Vrečko, bez čije svestrane pomoći njena oprema ne bi dala ono što se raspoloživim sredstvima moglo postići. Dugujem zahvalnost Dr. V. V. Miškoviću, koji je redigovao tekst i I. Jasenskoj, koja je pomagala Ing. M. Vrečku pri čitanju korektura.

11 jula 1950
u Beogradu

J. H.

S A D R Ž A J

I

Osnovne jednačine Teorije elastičnosti

II

Saint - Venant-ov problem

III

Ravno naprezanje

IV

Lokalno naprezanje. Deformacioni rad.

V

Naprezanje greda

VI

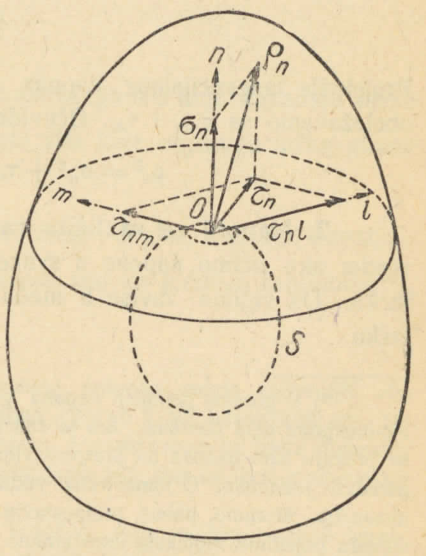
Savijanje ploča

I

OSNOVNE JEDNAČINE TEORIJE ELASTIČNOSTI

1. Spoljne sile i naponi. — Spoljne sile možemo podeliti, prema tome kako dejstvuju na telo, u *zapreminske* i *površinske sile*. Prve, kao što su sile teže, inercije i t. sl., napadaju sve tačke tela i proporcionalne su u svakoj tački njenoj masi. Druge, kao što su međusobni pritisak čvrstih tela pri dodiru, pritisak tečnosti ili gasa na čvrsto telo i t. sl., napadaju samo tačke spoljne površine tela i nezavisne su od mase.

Zamislimo u telu napregnutom spoljnim silama zatvorenu površinu S (sl. 1). Unutrašnje sile u tačkama te površine pretstavljaju uticaj dela van nje na deo tela koji ona ograničava. Uočimo oko neke tačke O mali deo te površine, sa spoljnom normalom n, i rezultantu sila koje napadaju tačke tog dela. Posmatrajmo vektor jednak toj rezultanti podeljenoj uočenim delom površine. Pri smanjivanju tog dela do vrlo malih dimenzija on će težiti nekoj konačnoj vrednosti $\vec{\rho}_n$. Tu vrednost*) zvaćemo *ukupni napon u tački O za ravan sa normalom n*, tj. za ravan koja dodiruje površinu S u tački O.



Sl. 1.

Ako posmatramo uticaj dela ograničena površinom S na deo van nje, po principu jednakosti akcije i reakcije

*) Sile koje napadaju tačke male površine, govoreći uopšte, svode se na rezultantu u tački O i redukcioni spreg. Ovaj spreg sačinjavaju sile koje su istoga reda male veličine kao i rezultanta, dok mu je krak mala veličina istoga reda kao i dimenzije površine. Pri smanjivanju površine smanjuje se i moment sprega podeljen površinom, dok rezultanta podeljena istom površinom teži konačnoj vrednosti $\vec{\rho}_n$.

imaćemo u istoj tački O, a za ravan sa normalom $-n$, ukupni napon iste veličine, a suprotnog smera

$$\vec{\rho}_{-n} = -\vec{\rho}_n. \qquad (1)$$

Projekciju ukupnog napona $\vec{\rho}_n$ na normalu n obeležavamo sa σ_n i zovemo *normalnim naponom u tački O za ravan sa normalom n.* Ako je ta projekcija pozitivna, to je *napon zatezanja*, u protivnom slučaju je to *napon pritiska.* Videli smo gore da ukupni napon za ravan sa normalom $-n$ ima smer *suprotan* naponu $\vec{\rho}_n$; njegova projekcija na normalu $-n$ biće, prema tome, *istoga* znaka kao i projekcija $\vec{\rho}_n$ na n, tj. biće

$$\sigma_{-n} = \sigma_n. \qquad (2)$$

Projekciju ukupnog napona $\vec{\rho}_n$ na samu ravan sa normalom n obeležavamo sa τ_n i zovemo *tangencijalnim naponom* ili *naponom smicanja u tački O za tu ravan.* Projekcija na istu ravan napona $\vec{\rho}_{-n}$ ima, očevidno, isti pravac ali smer suprotan smeru projekcije napona $\vec{\rho}_n$, tj.

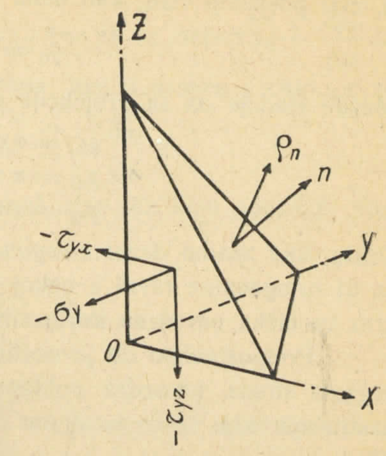
$$\tau_{-n} = -\tau_n. \qquad (3)$$

Projekcije tangencijalnog napona τ_n na dve ortogonalne ose m i l u toj ravni obeležavamo sa τ_{nm} i τ_{nl}. Očevidno je

$$\rho_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_n^2 = \sigma_n^2 + \tau_{nm}^2 + \tau_{nl}^2 \text{ *}). \qquad (4)$$

2. Naponi za različite ravni. — Naprezanje tela možemo smatrati poznatim ako znamo napone u svakoj njegovoj tački, i to za sve ravni kroz datu tačku. Da vidimo zavise li među sobom naponi za *različite* ravni kroz *istu* tačku.

Povucimo kroz tačku O tela tri koordinatne ravni (sl. 2) i obeležimo, kao što rekosmo, sa $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$, $\vec{\rho}_z$ ukupne napone za te ravni, a sa σ_x, τ_{xy}, τ_{xz}, odn. τ_{yx}, σ_y, τ_{yz} i τ_{zx}, τ_{zy}, σ_z njihove projekcije na koordinatne ose*). Za četvrtu ravan koju bismo povukli kroz istu tačku, čija bi normala n imala kosinuse smera, α, β, γ, ukupni napon bismo obeležili sa $\vec{\rho}_n$. Za ovoj paralelnu ravan, na vrlo malom otstojanju od tačke O (sl. 2), napon bi bio veći od $\vec{\rho}_n$ za malu veličinu $d\vec{\rho}_n$, odn. isti, tj. $\vec{\rho}_n$, ukoliko bismo zanemarili tu malu razliku. Ta ravan će, zajedno sa koordinatnim ravnima, izdvojiti iz tela mali tetraedar, čije ćemo dužine ivica obeležavati sa dx, dy, dz.



Sl. 2.

Ako strane tetraedra ne dodiruju spoljnu površinu tela, tačke tih strana napadaće samo unutrašnje sile. Označimo sa df površinu nagnute strane. Onda će rezultanta unutrašnjih sila koje napadaju njene tačke biti $\vec{\rho}_n df$. Površina strane u ravni yz je αdf, a rezultanta unutrašnjih sila koje napadaju njene tačke $\vec{\rho}_{-x}\alpha\, df = -\vec{\rho}_x \alpha\, df$; isto tako će rezultante sila koje napadaju tačke strane u ravnima zx i xy biti $-\vec{\rho}_y \beta\, df$ i $-\vec{\rho}_z \gamma\, df$.

Sem ovih, unutrašnjih sila, tačke tetraedra mogu, uopšte, napadati i spoljne, zapreminske sile. Ako sa $\vec{P}$ označimo zapreminsku silu za jedinicu zapremine**), sila koja napada tetraedar biće $\vec{P} \cdot {}^1/_3 \gamma df\, dz$.

---

*) U gornjoj definiciji napona govori se o „vrlo malim“, no ne o beskonačno malim dimenzijama dela površine. Šta to znači? Naše pretstave o unutrašnjoj strukturi čvrstih tela ne pružaju nam osnova da pretpostavimo da su pokretni molekuli, koji sačinjavaju telo, raspoređeni *jednoliko.* O tome treba voditi računa pri smanjivanju dela površine do vrlo malih dimenzija. Moramo, naime, pretpostaviti da su te male dimenzije u poređenju sa rastojanjima između pojedinih molekula istovremeno i *vrlo velike.* Tako samo naponi u tačkama tela mogu dati sliku naprezanja tela, na kojoj se ne bi pokazala slučajna i promenljiva grupisanja molekula. Tačke posmatranog malog dela površine napadao bi u tom slučaju toliko veliki broj unutrašnjih sila, da bi se slučajni uticaji uzajamnog rasporeda svakog para molekula poništavali i ne bi uticali na rezultantu. Ona bi pretstavljala ukupan uticaj vrlo velikog broja molekula.

Pitanje je mogu li se izabrati dimenzije dela površine tako, da se zadovolji taj uslov, a da, u isto vreme, one budu toliko male u odnosu prema dimenzijama tela da bismo ih mogli prema ovima zanemariti, kao i njihove više stepene prema nižim, drugim rečima, da bismo im smeli pripisati one osobine koje Analiza pripisuje beskonačno malim veličinama?

Prema podacima savremene Fizike jedan mol sadrži oko $7 \cdot 10^{23}$ molekula. To znači da jedan cm³, na pr., gvožđa, čija je atomska težina 55,6, a gustina 7,86 g/cm³, sadrži oko 10^{23} molekula, što bi odgovaralo prosečnom rastojanju između njih od $2 \cdot 10^{-8}$ cm. Odavde zaključujemo da bi površina, na pr., od jednog kvadratnog mikrona mogla zadovoljiti oba postavljena uslova. Tačke te površine napadalo bi mnogo više od $2 \cdot 10^7$ unutrašnjih sila, što se može smatrati dovoljim za eleminaciju slučajnih pojava. A u isto vreme se takve dimenzije mogu smatrati i dovoljno malima u odnosu prema dimenzijama tela, koje su, kod građevinskih i mašinskih konstrukcija, retko kada ispod 1 cm.

Po sebi se razume da, prenoseći na ovakve, konačne, male veličine osobine beskonačno malih, unosimo u račune grešku, no ona će biti sasvim neosetna. U istom smislu biće, niže, govora o naponima kao neprekidnim funkcijama koordinata, o njihovim „diferencijalima“ i „izvodima“.

*) Ovo su uobičajene oznake u tehnici. U Teoriskoj fizici se, mesto njih, često upotrebljavaju oznake koje je uveo 1883 nemački fizičar *G. Kirchhoff:*

$$X_x = \sigma_x, \quad Y_x = \tau_{xy}, \quad Z_x = \tau_{xz},$$
$$X_y = \tau_{yx}, \quad Y_y = \sigma_y, \quad Z_y = \tau_{yz},$$
$$X_z = \tau_{zx}, \quad Y_z = \tau_{zy}, \quad Z_z = \sigma_z.$$

**) Njena dimenzija je sila kroz zapreminu, na pr., kg/cm³ i t.sl.

Ako je telo u ravnoteži, rezultanta sila koje napadaju naš tetraedar je jednaka nuli, tj.

$$\vec{\rho}_n\, df - \vec{\rho}_x\, \alpha\, df - \vec{\rho}_y\, \beta\, df - \vec{\rho}_z\, \gamma\, df + \vec{P} \cdot {}^1/_3\, \gamma\, df\, dz = 0,$$

ili, ako poslednji član, kao malu veličinu višeg reda, zanemarimo

$$\vec{\rho}_n = \vec{\rho}_x \alpha + \vec{\rho}_y \beta + \vec{\rho}_z \gamma;$$

odavde sleduje da su projekcije $\vec{\rho}_n$ na koordinatne ose

$$\left.\begin{aligned} \rho_{nx} &= \alpha\, \sigma_x + \beta\, \tau_{yx} + \gamma\, \tau_{zx}, \\ \rho_{ny} &= \alpha\, \tau_{xy} + \beta\, \sigma_y + \gamma\, \tau_{zy}, \\ \rho_{nz} &= \alpha\, \tau_{xz} + \beta\, \tau_{yz} + \gamma\, \sigma_z\,. \end{aligned}\right\}{}^{*)} \qquad (5)$$

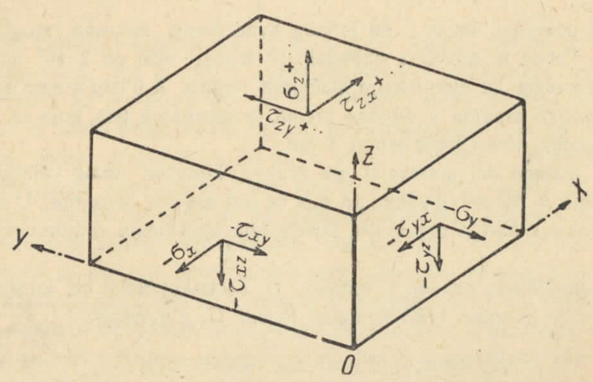
Dakle, kad znamo *devet komponentnih napona* (tri normalna i šest tangencijalnih) za tri ortogonalne ravni u nekoj tački, možemo naći napon za koju bilo ravan kroz tu tačku određenu kosinusima smera njene normale.

Pretpostavimo da je uočena tačka blizu spoljne površine tela, i da se nagnuta strana tetraedra poklapa sa elementom te površine. Onda će, mesto unutrašnjih sila, tačke te strane napadati spoljne *površinske* sile; dakle, mesto $\vec{\rho}_n$ pojavljuje se sila za jedinicu površine $\vec{p}_n$**), čije projekcije p_{nx}, p_{ny}, p_{nz} treba da budu

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= \alpha\sigma_x + \beta\tau_{yx} + \gamma\tau_{zx}\,, \\ p_{ny} &= \alpha\tau_{xy} + \beta\sigma_y + \gamma\tau_{zy}, \\ p_{nz} &= \alpha\tau_{xz} + \beta\tau_{yz} + \gamma\sigma_z\,, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

gde su α, β, γ sad kosinusi smera spoljne normale na površini tela u uočenoj tački.

3. Veza između napona i zapreminske sile. — Izdvojimo u napregnutom telu elementarni paralelepiped sa ivicama dx, dy, dz (sl. 3). Ako njegove strane ne dodiruju spoljnu površinu tela, onda ove tačke napadaju samo unutrašnje



Sl. 3

*) Ove jednačine postavio je 1822 francuski matematičar *A. L. Cauchy*.

**) Dimenzija p je, slično naponu, sila kroz površinu, na pr. t/cm².

sile, a tačke paralelepipeda spoljne zapreminske sile. Za tri strane koje se poklapaju sa koordinatnim ravnima obeležavamo napone, kao i ranije sa $\vec{\rho}_x$, $\vec{\rho}_y$, $\vec{\rho}_z$. Naponi za tri ostale strane razlikuju se od ovih za male priraštaje, koji odgovaraju pomeranju strane za dx, odn. za dy, odn. za dz. Prema tome je za stranu paralelnu yz ravni, a pomerenu prema njoj u pravcu x ose za dx, napon $\vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} dx$; za stranu paralelnu xz ravni, a pomerenu prema njoj u pravcu y ose za dy, napon je $\vec{\rho}_y + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} dy$, a za poslednju stranu $\vec{\rho}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} dz$.

Ako je telo u ravnoteži, mora geometriski zbir sila koje napadaju paralelepiped biti jednak nuli

$$\left(-\vec{\rho}_x + \vec{\rho}_x + \frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} dx\right) dy\, dz + \left(-\vec{\rho}_y + \vec{\rho}_y + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} dy\right) dz\, dx +$$
$$+ \left(-\vec{\rho}_z + \vec{\rho}_z + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} dz\right) dx\, dy + \vec{P}\, dx\, dy\, dz = 0.$$

Malo pre smo, posmatrajući ravnotežu elementarnog tetraedra, zanemarili $d\vec{\rho}_n$ u odnosu prema $\vec{\rho}_n$, no ovde *ne smemo* zanemariti diferencijale napona, jer se svi članovi koji sadrže same napone poništavaju, tako da su članovi sa diferencijalima napona veličine *najnižeg* reda u jednačini. Iz istog razloga ne smemo zanemariti ni član sa zapreminskom silom, koji je veličina istoga reda. Ako podelimo našu jednačinu sa $dx\, dy\, dz$, dobivamo

$$\frac{\partial \vec{\rho}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{\rho}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{\rho}_z}{\partial z} + \vec{P} = 0,$$

ili, u projekcijama*)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + Z &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Zbir momenata sila koje napadaju paralelepiped mora takođe biti jednak nuli. U ovom slučaju se, kao što ćemo dalje videti, ne poništavaju *svi* članovi koji sadrže napone, znači u odnosu prema njima mogu se zanemariti članovi sa diferencijalima napona, kao i član sa zapreminskom silom. To ćemo zasad i uraditi u interesu što kraćeg izvođenja.

*) Ove jednačine je izveo 1821 francuski inženjer *L. Navier*.

Počnimo sa zbirom momenata u odnosu na z osu. Sile $\sigma_x\, dy\, dz$ i $-\sigma_x\, dy\, dz$, $\sigma_x\, dx\, dz$ i $-\sigma_y\, dx\, dz$, $\sigma_z\, dx\, dy$ i $-\sigma_z\, dx\, dy$ se poništavaju; momenti sila $\tau_{xz}\, dy\, dz$, $-\tau_{xz}\, dy\, dz$, $\tau_{yz}\, dx\, dz$ i $-\tau_{yz}\, dx\, dz$ paralelnih z osi su jednaki nuli, kao što su i momenti sila $-\tau_{xy}\, dy\, dz$ i $-\tau_{yx}\, dx\, dz$ koji seku tu osu jednaki nuli; najzad, momenti sila $\tau_{zx}\, dx\, dy$ i $-\tau_{zx}\, dx\, dy$ su iste veličine a suprotnog smisla, a takođe i momenti sila $\tau_{zy}\, dx\, dy$ i $-\tau_{zy}\, dx\, dy$. Na taj način u našu jednačinu ulazi samo moment sile $\tau_{xy}\, dy\, dz$, jednak $\tau_{xy}\, dy\, dz\, dx$, i moment sile $\tau_{yx}\, dx\, dz$, jednak $-\tau_{yx}\, dx\, dz\, dy$:

$$\tau_{xy}\, dy\, dz\, dx - \tau_{yx}\, dx\, dz\, dy = 0,$$

a odatle imamo

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}.$$

Ako na isti način izjednačimo sa nulom zbir momenata u odnosu na x i y ose, dobićemo tri jednačine

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}. \tag{8}$$

Ove jednačine smanjuju sa devet na šest broj potrebnih podataka za iznalaženje napona za proizvoljnu ravan kroz datu tačku. Radi kraćeg pisanja možemo uvesti oznaku

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = \tau_x, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_y, \quad \tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau_z.$$

4. Glavni naponi. — Izrazi (5) određuju ukupni napon za proizvoljnu ravan. Da bismo našli normalni napon za istu ravan, treba pomnožiti te izraze sa α, odn. β, odn. γ, i te proizvode sabrati. I dobivamo

$$\sigma_n = \sigma_x\alpha^2 + \sigma_y\beta^2 + \sigma_z\gamma^2 + 2\tau_x\beta\gamma + 2\tau_y\gamma\alpha + 2\tau_z\alpha\beta. \tag{9}$$

Zamislimo sad povučen iz naše tačke u pravcu n poteg čija bi dužina bila obrnuto proporcionalna korenu iz $|\sigma_n|$. Koordinate tog potega su

$$\xi = \frac{\alpha}{\sqrt{|\sigma_n|}}, \quad \eta = \frac{\beta}{\sqrt{|\sigma_n|}}, \quad \zeta = \frac{\gamma}{\sqrt{|\sigma_n|}}.$$

Ako iz ovih jednnčina i iz jednačine (9) eliminišemo α, β, γ, imamo

$$\pm 1 = \sigma_x\xi^2 + \sigma_y\eta^2 + \sigma_z\zeta^2 + 2\tau_x\eta\zeta + 2\tau_y\zeta\xi + 2\tau_z\xi\eta,$$

tj. krajevi tih potega obrazuju centralnu površinu drugog reda. Za takvu površinu postoji ortogonalni sistem *glavnih* osa, a to znači da će, ako taj sistem uzmemo za koordinatni, iz naše jednačine ispasti tri poslednja člana, ili, da je za te ravni $\tau_x = \tau_y = \tau_z = 0$. Dakle, *u svakoj tački tela postoje tri ortogonalne ravni, na kojima ukupni napon stoji upravno;* od tri potega, koji im odgovaraju, jedan će imati najmanju, a jedan najveću vrednost, tj. *za jednu od tih ravni je normalni napon najveći, a za jednu najmanji.* Ova tri napona zovu se *glavnim* naponima u tački; obeležavaćemo ih sa σ_1, σ_2, σ_3.

Ako za koordinatne ose uzmemo pravce glavnih napona, dobivamo iz (5) koordinate napona $\vec{\rho}_n$ u obliku

$$\rho_{n1} = \alpha\,\sigma_1, \qquad \rho_{n2} = \beta\,\sigma_2, \qquad \rho_{n3} = \gamma\,\sigma_3; \tag{10}$$

a iz uslova $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ sleduje

$$\left(\frac{\rho_{n1}}{\sigma_1}\right)^2 + \left(\frac{\rho_{n2}}{\sigma_2}\right)^2 + \left(\frac{\rho_{n3}}{\sigma_3}\right)^2 = 1,$$

tj. krajevi vektora $\vec{\rho}_n$ obrazuju elipsoid*), čije su poluose σ_1, σ_2, σ_3; dakle, *najveći, odnosno, najmanji po apsolutnoj vrednosti ukupni napon ρ_n poklapa se sa najvećim, odn. najmanjim od glavnih napona.*

Iz (5) imamo za glavni napon σ_i $(i = 1, 2, 3)$

$$\left.\begin{aligned} \sigma_i\,\alpha_i &= \rho_{ix} = \sigma_x\alpha_i + \tau_z\,\beta_i + \tau_y\,\gamma_i\,, \\ \sigma_i\,\beta_i &= \rho_{iy} = \tau_z\,\alpha_i + \sigma_y\,\beta_i + \tau_x\,\gamma_i\,, \\ \sigma_i\,\gamma_i &= \rho_{iz} = \tau_y\,\alpha_i + \tau_x\,\beta_i + \sigma_z\,\gamma_i\,. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Ove jednačine, zajedno sa uslovom

$$\alpha_i^2 + \beta_i^2 + \gamma_i^2 = 1, \tag{12}$$

treba da nam odrede veličinu σ_i i kosinuse njena smera.

Sistem jednačina (11), homogenih po α_i, β_i, γ_i, može imati rešenje, sem trivijalnog (0, 0, 0) koje je prema (12) nemoguće, samo ako je

$$\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_z & \tau_y \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma_i & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} = 0. \tag{13}$$

Tri korena**) ove kubne jednačine su tri tražena glavna napona. Kosinuse njihovih smerova nalazimo iz jednačina

$$\alpha_i : \beta_i : \gamma_i = \begin{vmatrix} \sigma_y - \sigma_i & \tau_x \\ \tau_x & \sigma_z - \sigma_i \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \tau_x & \tau_z \\ \sigma_z - \sigma_i & \tau_y \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \tau_z & \sigma_z - \sigma_i \\ \tau_y & \tau_x \end{vmatrix} \tag{14}$$

i uslova (12).

Koeficijent uz σ_i^2 u jednačini (13) jednak je zbiru njenih korenova, tj. $\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$. Dakle, zbir normalnih napona za tri ortogonalne ravni u datoj tački je *invarijanta*, koju čemo obeležavati sa s.

5. Tangencijalni naponi. — Ako pravce glavnih napona uzmemo za koordinatne ose, imaćemo iz (9) i (10).

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \sigma_1\,\alpha^2 + \sigma_2\,\beta^2 + \sigma_3\,\gamma^2, \\ \rho_n^2 &= \sigma_1^2\,\alpha^2 + \sigma_2^2\,\beta^2 + \sigma_3^2\gamma^2; \end{aligned}$$

dakle

$$\tau_n^2 = \rho_n^2 - \sigma_n^2 = \sigma_1^2\alpha^2 + \sigma_2^2\beta^2 + \sigma_3^2\gamma^2 - (\sigma_1\,\alpha^2 + \sigma_2\,\beta^2 + \sigma_3\,\gamma^2)^2. \tag{15}$$

*) Taj elipsoid nazivamo elipsoidom Lamé-a, po francuskom matematičaru *G. Lamé*-u, koji je 1841 predložio ovu geometrisku pretstavu napona.

**) U Analitičkoj geometriji se dokazuje da su sva tri korena ove t.zv. *sekularne* jednačine — realna.

Ovaj obrazac određuje nam veličinu tangencijalnog napona za ravan određenu kosinusima smera njene normale.

Potražimo ravan u kojoj je tangencijalni napon najveći. Pošto je za tehničke primene znak kod tangencijalnog napona bez značaja, možemo mesto *extremum*-a od τ_n potražiti *extremum* od τ_n^2, što će znatno skratiti račun. Promenljive α, β, γ nisu nezavisne, već su vezane uslovom $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$. Znači moramo potražiti uslovni *extremum*, tj. izjednačiti parcijalne izvode od τ_n^2 po α, β, γ sa parcijalnim izvodima po istim promenljivima od $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, pomnoženim neodređenim koeficijentom λ. Ako ovo uradimo dobićemo

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1^2\alpha_j-2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2)\,\sigma_1\alpha_j&=\lambda\alpha_j,\\ \sigma_2^2\beta_j-2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2)\,\sigma_2\beta_j&=\lambda\beta_j,\\ \sigma_3^2\gamma_j-2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2)\,\sigma_3\gamma_j&=\lambda\gamma_j,\end{aligned}\right\}\qquad(16)$$

gde su α_j, β_j, γ_j kosinusi smera normale na traženoj ravni.

Pređimo na rešavanje ovog sistema jednačina. Ostavimo po strani, zasad, mogućnost da između glavnih napona ima međusobno jednakih; taj naročiti slučaj proučićemo kasnije, posebno. Onda se može dokazati da je bar jedan od traženih kosinusa jednak nuli. Jer, ako nijedan od njih nije jednak nuli, možemo prvu od naših jednačina podeliti sa α_j, drugu sa β_j i treću sa γ_j. Ako to učinimo i oduzmemo od prve jednačine drugu, od druge treću i od treće prvu, imaćemo

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1^2-\sigma_2^2&=2(\sigma_1-\sigma_2)(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2),\\ \sigma_2^2-\sigma_3^2&=2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2),\\ \sigma_3^2-\sigma_1^2&=2(\sigma_3-\sigma_1)(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2).\end{aligned}\right\}\qquad(17)$$

Pošto smo ostavili po strani slučaj kad između glavnih napona ima međusobno jednakih, možemo prvu od jednačina (17) podeliti sa $\sigma_1-\sigma_2$, drugu sa $\sigma_2-\sigma_3$, a treću sa $\sigma_3-\sigma_1$, i dobivamo

$$\begin{aligned}\sigma_1+\sigma_2&=2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2),\\ \sigma_2+\sigma_3&=2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2),\\ \sigma_3+\sigma_1&=2(\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2\beta_j^2+\sigma_3\gamma_j^2),\end{aligned}$$

odn.

$$\sigma_1+\sigma_2=\sigma_2+\sigma_3=\sigma_3+\sigma_1,$$

ili

$$\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3,$$

a to je u suprotnosti sa pretpostavkom da između glavnih napona nema međusobno jednakih. Dakle, u opštem slučaju, mora bar jedan od traženih kosinusa biti jednak nuli.

Ako je $\alpha_j=\alpha_I=0$, a ni $\beta_j=\beta_I$, ni $\gamma_j=\gamma_I$ nisu jednaki nuli, onda iz uslova $\alpha_j^2+\beta_j^2+\gamma_j^2=1$ sleduje $\gamma_I^2=1-\beta_I^2$. Prva od jednačina (16) je zadovoljena sa $\alpha_I=0$. Ako podelimo drugu jednačinu sa β_I, a treću sa γ_I, i od druge jednačine oduzmemo treću, nalazimo

$$\sigma_2^2-\sigma_3^2=2(\sigma_2-\sigma_3)(\sigma_2\beta_I^2+\sigma_3\gamma_I^2);$$

podelimo ovu jednačinu sa $(\sigma_2-\sigma_3)$ i zamenimo γ_I^2 sa $1-\beta_I^2$, i biće

$$\sigma_2+\sigma_3=2(\sigma_2-\sigma_3)\beta_I^2+2\sigma_3,$$

ili

$$\beta_I^2=\frac{1}{2},\qquad \beta_I=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

i

$$\gamma_I^2=\frac{1}{2},\qquad \gamma_I=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

To su dve ravni koje se seku duž pravca prvog glavnog napona, i polove ugao između pravaca ostalih glavnih napona. Iz jednačine (15) nalazimo za tangencijalne napone u tim ravnima

$$\tau_I^2={}^1/_2(\sigma_2^2+\sigma_3^2)-{}^1/_4(\sigma_2+\sigma_3)^2={}^1/_4(\sigma_2-\sigma_3)^2,$$

i

$$\tau_I=\pm{}^1/_2(\sigma_2-\sigma_3).$$

Na sličan način nalazimo i drugo rešenje jednačina (16), i to: $\beta_{II}=0$, $\alpha_{II}^2=\gamma_{II}^2={}^1/_2$. To su dve ravni, koje se seku duž pravca drugog glavnog napona i polove ugao između pravaca ostalih glavnih napona. Tangencijalni naponi u tim ravnima su

$$\tau_{II}=\pm{}^1/_2(\sigma_3-\sigma_1).$$

Treće rešenje jednačina (16), i to $\gamma_{III}=0$, $\alpha_{III}^2=\beta_{III}^2={}^1/_2$ daje dve ravni koje se seku duž pravca trećeg glavnog napona i polove ugao između pravaca ostalih glavnih napona. Tangencijalni naponi u tim ravnima su

$$\tau_{III}=\pm{}^1/_2(\sigma_1-\sigma_2).$$

I tako je najveći tangencijalni napon u datoj tački jedan od

$$\left.\begin{aligned}\tau_I&=\pm{}^1/_2(\sigma_2-\sigma_3),\\ \tau_{II}&=\pm{}^1/_2(\sigma_3-\sigma_1),\\ \tau_{III}&=\pm{}^1/_2(\sigma_1-\sigma_2).\end{aligned}\right\}\qquad(18)$$

Gornja rešenja jednačina (16) odnose se na opšti slučaj, tj. kad između glavnih napona nema međusobno jednakih. Proučimo sad specijalni slučaj, koji smo bili ostavili po strani. Pretpostavimo, na pr., da su σ_2 i σ_3 međusobno jednaki, no nisu jednaki sa σ_1. Onda je druga od jednačina (17) zadovoljena, dok se prva i treća poklapaju. Podelimo li sa $\sigma_1-\sigma_2$, imaćemo

$$\sigma_1+\sigma_2=2[\sigma_1\alpha_j^2+\sigma_2(\beta_j^2+\gamma_j^2)],$$

odn., posle zamene $\beta_j^2+\gamma_j^2$ sa $1-\alpha_j^2$,

$$\sigma_1+\sigma_2=2[\sigma_2+\alpha_j^2(\sigma_1-\sigma_2)],$$

ili

$$\alpha_j^2 = \frac{1}{2}, \quad \alpha_j = \pm \frac{1}{\sqrt{2}},$$

i

$$\beta_j^2 + \gamma_j^2 = {}^1/_2.$$

To znači da se svaka ravan koja obrazuje ugao ${}^1/_4\pi$ sa pravcem prvog glavnog napona može smatrati kao ravan najvećeg tangencijalnog napona*) koji, u tom slučaju, prema jednačini (15) postaje

$$\tau_{II}^2 = \tau_{III}^2 = {}^1/_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - {}^1/_4(\sigma_1 + \sigma_2)^2 = {}^1/_4(\sigma_1 - \sigma_2)^2,$$

ili

$$\tau_{II} = \tau_{III} = \pm\, {}^1/_2(\sigma_1 - \sigma_2).$$

Na sličan način nalazimo da su, u slučaju $\sigma_3 = \sigma_1$, najveći tangencijalni naponi u ravnima koje zatvaraju uglove ${}^1/_4\pi$ sa pravcem drugog glavnog napona, i jednaki

$$\tau_{III} = \tau_I = \pm\, {}^1/_2(\sigma_2 - \sigma_3).$$

Ako je $\sigma_1 = \sigma_2$, najveći tangencijalni naponi su u ravnima koje zatvaraju uglove ${}^1/_4\pi$ sa pravcem trećeg glavnog napona, a jednaki su

$$\tau_I = \tau_{II} = \pm\, {}^1/_2(\sigma_3 - \sigma_1).$$

Najzad, ako su sva tri glavna napona jednaka, iz jednačine (15) vidimo da je za svaku ravan kroz posmatranu tačku

$$\tau_n^2 = \sigma_1^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) - \sigma_1^2(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)^2 = 0.$$

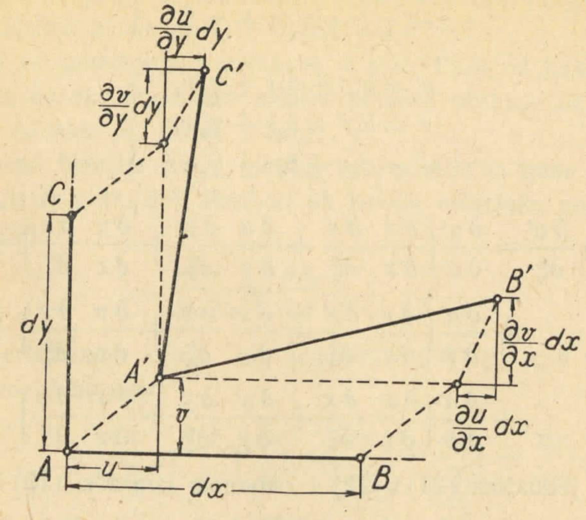
6. Deformacija. — Utvrdili smo u t. **3** da je dovoljno da poznajemo šest komponentnih napona u tački, da bismo našli napon za svaku ravan kroz tu tačku. Za iznalaženje samih komponentnih napona iz zadatih spoljnih sila imamo jednačine (6) i (7), koje smo našli iz uslova ravnoteže sistema materijalnih tačaka primenjenih na pojedine delove tela. Ti uslovi važe naravno za *čvrsto* telo, no nisu dovoljni za određivanje napona; za taj cilj treba da uzmemo u obzir i njegovu *deformaciju*, tj. male promene oblika usled dejstva spoljnih sila.

Kroz datu tačku A tela povucimo pravu paralelnu sa x osom i uočimo na njoj otsečak AB dužine dx (sl. 4). Označimo sa u, v, w projekcije malog pomeranja tačke A pri deformaciji **) na koordinatne ose. Ako zanemarimo male veličine višeg reda priraštaj dužine AB biće jednak razlici projekcija pomeranja

*) Sve te ravni dodiruju kružni konus sa osom u pravcu prvog glavnog napona i pravim uglom u temenu.

**) Pretpostavljamo da su to male veličine istoga reda kao i dx, dy, dz. One zavise od prvobitnog položaja tačke, tj. funkcije su x, y i z.

tačaka B i A po x osi, tj, maloj veličini drugog reda $\frac{\partial u}{\partial x}dx$. Odnos ovog priraštaja prema prvobitnoj dužini dx, ili $e_x = \partial u/\partial x$, je mala veličina prema jedi-



Sl. 4.

nici; zove se *specifično izduženje* ili *dilatacija* u pravcu x ose; na isti način dobivamo dilatacije i za ostale ose, tako da je

$$e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad e_z = \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{19}$$

Posmatrajmo sad ugao za koji se obrnula prava AB ka y osi; pošto je to mali ugao možemo smatrati da je jednak tangensu $\partial v/\partial x$. Na sličan način dobivamo da je ugao obrtanja prave AC ka x osi jednak $\partial u/\partial y$. Zbir tih uglova $g_z = \partial v/\partial x + \partial u/\partial y$, pretstavlja smanjivanje pravog ugla BAC pri deformaciji; na sličan način dobivamo smanjivanja i ostalih uglova između pravaca paralelnih osama, ili t.zv. *klizanja*

$$g_x = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \qquad g_y = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \qquad g_z = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}. \tag{20}$$

Šest *komponentnih deformacija* e_x, e_y, e_z, g_x, g_y, g_z, potpuno određuju deformaciju u tački, jer pomoću njih nalazimo dilatacije i klizanja za koje bilo pravce kroz tu tačku. Na primer, za koordinatni sistem ξ, η, ζ, određen kosinusima smerova

	x	y	z
ξ	α_1	β_1	γ_1
η	α_2	β_2	γ_2
ζ	σ_3	β_3	γ_3

ako sa u', v', w' obeležimo projekcije pomeranja na ose ξ, η i ζ biće

$$\left.\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta, \\ y &= \beta_1 \xi + \beta_2 \eta + \beta_3 \zeta, \\ z &= \gamma_1 \xi + \gamma_2 \eta + \gamma_3 \zeta, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

i

$$\left.\begin{aligned} u' &= \alpha_1 u + \beta_1 v + \gamma_1 w, \\ v' &= \alpha_2 u + \beta_2 v + \gamma_2 w, \\ w' &= \alpha_3 u + \beta_3 v + \gamma_3 w. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Tada je

$$\begin{aligned} e_\xi = \frac{\partial u'}{\partial \xi} = \frac{\partial u'}{\partial u}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + \\ + \frac{\partial u'}{\partial v}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right) + \\ + \frac{\partial u'}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \xi}\right). \end{aligned}$$

Diferenciranjem jednačina (21) i (22) i zamenom izraza iz (19) i (20) dobivamo

$$e_\xi = e_x \alpha_1^2 + e_y \beta_1^2 + e_z \gamma_1^2 + g_x \beta_1 \gamma_1 + g_y \gamma_1 \alpha_1 + g_z \alpha_1 \beta_1. \tag{23}$$

Na sličan način možemo naći

$$\begin{aligned} g_\zeta = \frac{\partial u'}{\partial \eta} + \frac{\partial v'}{\partial \xi} = 2e_x \alpha_1 \alpha_2 + 2e_y \beta_1 \beta_2 + 2e_z \gamma_1 \gamma_2 + \\ + g_x (\beta_1 \gamma_2 + \beta_2 \gamma_1) + g_y (\gamma_1 \alpha_2 + \alpha_1 \gamma_2) + g_z (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \alpha_2), \end{aligned} \tag{24}$$

itd.

Ako uporedimo obrasce (23) i (9), vidimo između njih potpunu analogiju. Iz te analogije možemo odmah zaključiti da, za svaku tačku, postoje *tri ortogonalna pravca glavnih dilatacija* e_1, e_2, e_3, za koje su klizanja jednaka nuli; dakle *ti pravci ostaju ortogonalni i u deformisanom telu.* Za jedan od tih pravaca je dilatacija najveća, a za jedan — najmanja. Analogno je $e_x + e_y + e_z = e_1 + e_2 + e_3$ invarijanta, koju ćemo obeležavati sa ε.

Uzmimo pravce glavnih dilatacija za koordinatne ose i konstruišimo na njima mali paralelepiped sa ivicama dx, dy, dz. Dužine tih ivica u deformisanom stanju su $dx(1 + e_1)$, $dy(1 + e_2)$, $dz(1 + e_3)$, a pošto se uglovi između tih ivica pri deformaciji ne menjaju, zapremina deformisanog paralelepipeda biće

$$dx\, dy\, dz\, (1 + e_1)\ (1 + e_2)\ (1 + e_3),$$

ili, ako zanemarimo male veličine višeg reda,

$$dx\, dy\, dz\, (1 + e_1 + e_2 + e_3).$$

Odavde se vidi da je invarijanta $\varepsilon = e_1 + e_2 + e_3$ odnos priraštaja zapremine paralelepipeda usled deformacije prema prvobitnoj zapremini, i zove se *zapreminskom dilatacijom* u tački.

7. Pomeranja tačaka. — Jednačine (19) i (20) određuju komponentne deformacije, kad su pomeranja u, v, w poznate funkcije prvobitnih koordinata tačke. U tehnici često nailazimo na obrnuti zadatak; poznate su komponente deformacije, a traže se pomeranja tačaka, što će reći treba integrisati sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina (19) i (20).

Počnimo od pomeranja u u pravcu x ose. Prva od jednačina (19) daje nam neposredno $\partial u/\partial x$. Da bismo našli u pomoću obrasca za potpuni diferencijal*) potrebni su nam još $\partial u/\partial y$ i $\partial u/\partial z$.

Da nađemo funkciju $\partial u/\partial z$, potražićemo prethodno njene delimične izvode: $\partial^2 u/\partial z\, \partial x$, $\partial^2 u/\partial z\, \partial y$ i $\partial^2 u/\partial z^2$. Prvi od tih izvoda nalazimo, neposredno, iz prve od jednačina (19)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial e_x}{\partial z}. \tag{25}$$

Ako diferenciramo drugu od jednačina (20) po y, a treću po z pa te izvode saberemo, dobivamo

$$2\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right) = \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z},$$

a, s obzirom na prvu od jednačina (20),

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\, \partial z} = {}^1/_2\left(-\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right). \tag{26}$$

Ako diferenciramo drugu od jednačina (20) po z i uzmemo u obzir treću od jednačina (19), dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial z} = \frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x}. \tag{27}$$

Sad možemo naći i $\partial u/\partial z$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} = {}^1/_2 \int_o^y \left(-\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) dy + \\ + \int_o^z \left(\frac{\partial g_y}{\partial z} - \frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_{y=o} dz + \int_o^x \left(\frac{\partial e_x}{\partial z}\right)_{\substack{y=o \\ z=o}} dx + q, \end{aligned} \tag{28}$$

gde je q proizvoljna konstanta.

---

*) Ako su $\partial U/\partial x = A$, $\partial U/\partial y = B$, $\partial U/\partial z = C$ (i $\partial A/\partial y = \partial B/\partial x$, $\partial B/\partial z = \partial C/\partial y$, $\partial A/\partial z = \partial C/\partial x$), onda je

$$U = \int_o^x A\, dx + \int_o^y (B)_{x=o}\, dy + \int_o^z (C)_{\substack{x=o \\ y=o}}\, dz.$$

Kako je

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}\right)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}\right),$$

to iz jednačina (25), (26) i (27) sleduje da komponentne deformacije moraju zadovoljavati uslove

$$\left.\begin{aligned}
&{}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)=\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z},\\
&{}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial g_x}{\partial x}+\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2 e_z}{\partial x\,\partial y},\\
&\frac{\partial^2 g_y}{\partial x\,\partial z}=\frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{29}$$

Jednačine (19) i (20) su simetrične u pogledu na x, y, z, i u, v, w, te iz (28) možemo cikličkom permutacijom odmah naći

$$\frac{\partial v}{\partial x}={}^1/_2\int_0^z\left(-\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)dz+$$

$$+\int_0^x\left(\frac{\partial g_z}{\partial x}-\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{z=o}dx+\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{z=o\\x=o}}dy+r,\tag{30}$$

gde je r proizvoljna konstanta. Analogno bismo našli i $\partial w/\partial y$. Iz uslova (29) nalazimo takođe cikličkom permutacijom:

$$\left.\begin{aligned}
&{}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 e_y}{\partial z\,\partial x},\\
&\frac{\partial^2 g_z}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2},\\
&\frac{\partial^2 g_x}{\partial z\,\partial y}=\frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}.
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

Uslovi (29) i (31), t.zv. *Saint Venant*-ovi, uslovi*) moraju biti zadovoljeni da bi zadatim deformacijama odgovarala stvarno moguća pomeranja tačaka.

*) Po francuskom inženjeru *B. de Saint-Venant-u*, koji ih je postavio 1864.

Pomoću jednačine (30) i poslednje od jednačina (20) nalazimo treći od traženih izvoda funkcije u:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=g_z-{}^1/_2\int_0^z\left(-\frac{\partial g_y}{\partial y}+\frac{\partial g_z}{\partial z}+\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)dz-$$

$$-\int_0^x\left(\frac{\partial g_z}{\partial x}-\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{z=o}dx-\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{z=o\\x=o}}dy-r.$$

Sada možemo naći i samu traženu funkciju u, a iz nje, cikličkom permutacijom, i v i w

$$\left.\begin{aligned}
u=&\int_0^x e_x dx-\int_0^y\!\!\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial x}\right)_{\substack{x=o\\z=o}}dy\,dy-\int_0^z\!\!\int_0^z\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_{\substack{x=o\\y=o}}dz\,dz+\\
&+{}^1/_2\int_0^z\Big[g_y+(g_y)_{y=o}\Big]_{x=o}dz+{}^1/_2\int_0^y\Big[g_z+(g_z)_{z=o}\Big]_{x=o}dy-{}^1/_2\int_0^y\!\!\int_0^z\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_{x=o}dz\,dy-\\
&-(g_y)_{\substack{x=o\\y=o\\z=o}}z+qz-ry+a,\\
v=&\int_0^y e_y dy-\int_0^z\!\!\int_0^z\left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)_{\substack{y=o\\x=o}}dz\,dz-\int_0^x\!\!\int_0^x\left(\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{\substack{y=o\\z=o}}dx\,dx+\\
&+{}^1/_2\int_0^x\Big[g_z+(g_z)_{z=o}\Big]_{y=o}dx+{}^1/_2\int_0^z\Big[g_x+(g_x)_{x=o}\Big]_{y=o}dz-{}^1/_2\int_0^z\!\!\int_0^x\left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_{y=o}dx\,dz-\\
&-(g_z)_{\substack{x=o\\y=o\\z=o}}x+rx-pz+b,\\
w=&\int_0^z e_z dz-\int_0^x\!\!\int_0^x\left(\frac{\partial e_x}{\partial z}\right)_{\substack{z=o\\y=o}}dx\,dx-\int_0^y\!\!\int_0^y\left(\frac{\partial e_y}{\partial z}\right)_{\substack{z=o\\x=o}}dy\,dy+\\
&+{}^1/_2\int_0^y\Big[g_x+(g_x)_{x=o}\Big]_{z=o}dy+{}^1/_2\int_0^x\Big[g_y+(g_y)_{y=o}\Big]_{z=o}dx-{}^1/_2\int_0^x\!\!\int_0^y\left(\frac{\partial g_z}{\partial z}\right)_{z=o}dy\,dx-\\
&-(g_x)_{\substack{x=o\\y=o\\z=o}}y+py-qx+c,
\end{aligned}\right\}\tag{32}$$

gde su a, b, c, p, q, r proizvoljne konstante*).

*) Ove obrasce je postavio 1905 ruski inženjer *I. G. Bubnov.*

Članovi sa proizvoljnim konstantama u ovim obrascima,

$$qz - ry + a, \quad rx - pz + b, \quad py - qx + c,$$

očevidno, ne zavise od deformacije i odgovaraju malim translacijama a, b, c i malim rotacijama p, q, r *krutog* tela. Ovaj deo pomeranja, koji ne spada u zadatak Teorije elastičnosti već Mehanike krutog tela, možemo eliminisati, ako vežemo koordinatni sistem za telo. To se može, na pr., ovako učiniti.

Eliminišemo prvo, translacije; to ćemo postići ako početak kooordinata vežemo sa onom tačkom tela u kojoj se pre deformacije nalazio, tj. za tačku (0, 0, 0) mora biti: $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$. Iz naših obrazaca sledi onda

$$a = 0, \; b = 0, \; c = 0.$$

Zatim eliminišemo rotacije oko x i y osa, pomoću uslova, da element z ose zadrži svoj pravac u telu, tj. da za tačku $(0, 0, dz)$, mora biti $u = 0$, $v = 0$. Prve dve jednačine (32) onda daju

$$-\left(\frac{\partial e_z}{\partial x}\right)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} dz\,dz + q\,dz = 0,$$

$$-\left(\frac{\partial e_z}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} dz\,dz + (g_x)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} dz - p\,dz = 0,$$

ili, ako zanemarimo male veličine višeg reda,

$$q = 0, \; p = (g_x)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}}.$$

Najzad, eliminišemo i rotaciju oko z ose, na pr., pomoću uslova da element xz ravni ostane u toj ravni, tj. da za tačku $(dx, 0, 0)$ mora biti $v = 0$. Onda iz druge jednačine (32) nalazimo

$$-\left(\frac{\partial e_x}{\partial y}\right)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} dx\,dx + r\,dx = 0,$$

a ako zanemarimo male veličine višeg reda,

$$r = 0.$$

8. Hooke-ov zakon. — U t. **1—7** proučavali smo napone i deformacije, ne vezujući jedan za drugog ta dva pojma. Sad treba da odredimo vezu među njima i izrazimo je analitički.

Pri proučavanju napona primenjivali smo na pojedine delove tela zakone Statike, koji važe za *bilo koji* sistem materijalnih tačaka. Proučavanje deformacija bilo je čisto geometrisko: ispitujući te geometriske promene oblika i zapremine tela nismo ulazili u njihovu zavisnost od spoljnih sila. Za uspostavljanje veze između deformacija i napona (a na taj način i između deformacija i spoljnih sila, jer je zavisnost između napona i spoljnih sila već utvrđena) treba da *definišemo* predmet našeg ispitivanja, tj. *elastično telo*, znači treba mu pripisati izvesne osobine*). Te osobine moraju biti utvrđene neposrednim ogledima sa realnim telima. U tom slučaju će se i zaključci koji proističu iz takve definicije moći primenjivati na realna tela.

Idealno elastičnim zovemo telo kod kojeg su deformacije linearne funkcije napona. Analitički bi se to izrazilo

$$\left.\begin{aligned}
e_x &= A_{xx}\sigma_x + A_{xy}\sigma_y + A_{xz}\sigma_z + B_{xx}\tau_x + B_{xy}\tau_y + B_{xz}\tau_z\,,\\
e_y &= A_{yx}\sigma_x + A_{yy}\sigma_y + A_{yz}\sigma_z + B_{yx}\tau_x + B_{yy}\tau_y + B_{yz}\tau_z\,,\\
e_z &= A_{zx}\sigma_x + A_{zy}\sigma_y + A_{zz}\sigma_z + B_{zx}\tau_x + B_{zy}\tau_y + B_{zz}\tau_z\,,\\
g_x &= C_{xx}\sigma_x + C_{xy}\sigma_y + C_{xz}\sigma_z + D_{xx}\tau_x + D_{xy}\tau_y + D_{xz}\tau_z\,,\\
g_y &= C_{yx}\sigma_x + C_{yy}\sigma_y + C_{yz}\sigma_z + D_{yx}\tau_x + D_{yy}\tau_y + D_{yz}\tau_z\,,\\
g_z &= C_{zx}\sigma_x + C_{zy}\sigma_y + C_{zz}\sigma_z + D_{zx}\tau_x + D_{zy}\tau_y + D_{zz}\tau_z\,,
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

gde su 36 slova A_{xx}, $A_{xy}, \ldots, D_{zz}$, *koeficijenti elastičnosti* nezavisni od veličina napona i deformacija, a zavisni jedino od hemiskog sastava i strukture tela. Oni su, uopšte, različiti za različite tačke tela i za različite pravce osa.

Engleski fizičar *Robert Hooke* je objavio 1678, kao rezultat svojih ogleda, da za mnoga realna tela, u izvesnim granicama, važi zakon proporcionalnosti između deformacija i napona i formulisao to latinskom rečenicom**) *„ut tensio sic vis“*, koju obično nazivaju *Hooke*-ovim zakonom. Ta osobina realnih tela je bila podloga i za našu definiciju idealno elastičnog tela. Zaključci i obrasci, koje ćemo u daljem izlaganju izvesti za takvo telo, mogu se primenjivati na realna tela ako se eksperimentalno utvrdi da imaju tu osobinu i samo u granicama u kojima je imaju.

Izraz „*Hooke*-ov zakon“ treba razumeti uslovno. To nije univerzalni prirodni zakon, kao što su, na pr., *Arhimed*-ov i *Newton*-ov zakon. To je zakon koji možemo uporediti sa *Mariotte - Gay - Lussac*-ovim zakonom za stanje gasova,

$$pv = RT,$$

*) *„The bodies we deal with have no properties whatever except those which we explicitly assign to them“ (Maxwell, 1879).*

**) *R. Hooke* je pronašao taj zakon još 1660, no nije ga odmah objavio, jer je „imao nameru da traži patent za neke primene tog zakona“. 1676 je, na kraju jedne svoje knjige, dodao anagram: *ceiiinosssttuv*, koji je sam dešifrirao tek 1678 u knjizi *„De Potentia restitutiva“*. U ono vreme je to bio običan način za obezbeđivanje prioriteta pronalaska, a tako se onemogućavalo da ga drugi iskoriste pre no što to za shodno nađe sam pronalazač.

gde su p pritisak, v zapremina, T apsolutna temperatura, a R konstanta datog gasa. Dalja ispitivanja su pokazala da se osobine izražene ovom jednačinom mogu pripisati samo *idealnom* gasu, dok je za realne gasove ta jednačina, kasnije, zamenjena *Van der Waals*-vom ili drugim jednačinama. No to ne znači da je prvobitni, najprostiji obrazac izgubio svoju vrednost. Njime se možemo i za realne gasove koristiti dok njihova temperatura i pritisak ne prelaze izvesne granice, koje se za pojedine gasove utvrđuju eksperimentalno.

Isto tako i *Hooke*-ov zakon i iz njega izvedeni zaključci važe bez ograničenja samo za idealno elastično telo, — koje u prirodi ne postoji. Ali je njihova primena i na realna tela, na pr., na razne konstruktivne materijale, potpuno opravdana, dok naponi i deformacije ne prelaze granice elastičnosti, koje se za pojedine materijale utvrđuju ogledom.

Kao što smo i gore naveli, koeficijenti elastičnosti, uopšte, zavise od položaja tačke u telu i od izabratih pravaca za ose kroz tu tačku. Sva dalja razlaganja biće ograničena pretpostavkom, da je telo *homogeno*, što znači da su mu koeficijenti elastičnosti isti u svim tačkama*). Može se dokazati da između tih 36 koeficijenata postoji 15 veza i na taj način smanjiti broj nezavisnih koeficijenata elastičnosti do 21**). Nećemo se upuštati u taj dokaz jer, i onako, moramo naše proučavanje ograničiti još i pretpostavkom, da je telo *izotropno-elastično*, što znači da ima iste elastične osobine za sve pravce kroz datu tačku***). Ta pretpostavka će dati niz veza među koeficijentima koje, između ostalog, obuhvataju i 15 ranije spomenutih veza. Dakle, *dalja naša razlaganja obuhvataju samo homogena, izotropno-elastična tela.*

Iz definicije izotropno-elastičnog tela neposredno izlazi da je kod takvog tela uticaj napona σ_x na dilataciju e_x isto toliki koliki je uticaj napona σ_y na dilataciju e_y, i napona σ_z na dilataciju e_z. A to znači da su koeficijenti A_{xx}, A_{yy} i A_{zz} međusobno jednaki; obeležimo ih sa A_1.

$$A_{xx} = A_{yy} = A_{zz} = A_1.$$

Slično tome, mora uticaj napona u poprečnim pravcima, tj. σ_y i σ_z na dilataciju e_x biti isti, i jednak uticaju napona σ_x i σ_z na dilataciju e_y, odn. napona σ_x i σ_y na e_z, tj.

$$A_{xy} = A_{xz} = A_{yx} = A_{yz} = A_{zx} = A_{zy} = A_2.$$

*) O toj pretpostavci treba voditi računa pri primeni obrazaca Otpornosti materijala na realna tela. Na pr., mehanička obrada metalnih delova menja elastične osobine slojeva bliskih spoljnoj površini. Kod tankih izvaljanih limova ili izvučenih žica ti slojevi ponekad čine znatan deo celokupne zapremine tela.

**) Ako se prihvati *Cauchy*-jeva hipoteza o centralnim intermolekularnim silama, broj nezavisnih koeficijenata se smanjuje čak do 15. Ovo pitanje, koje je bilo predmet opširnih diskusija vođenih u prošlom veku između zastupnika „multikonstantne" (21 koeficijent) i „rarikonstantne" teorije (15 koeficijenata), izlazi iz okvira našeg izlaganja, kojem je cilj, uglavnom, utilitarni.

***) Vrlo tipičan primer *anizotropnog* tela, za koje ne važi gornja pretpostavka, je drvo. Njegove elastične osobine u pravcu stabla se bitno razlikuju od onih u poprečnim pravcima.

Isto razlaganje dovodi do zaključka da su i

$$B_{xx} = B_{yy} = B_{zz} = B_1,$$

$$B_{xy} = B_{xz} = B_{yx} = B_{yz} = B_{zx} = B_{zy} = B_2,$$

i

$$C_{xx} = C_{yy} = C_{zz} = C_1,$$

$$C_{xy} = C_{xz} = C_{yx} = C_{yz} = C_{zx} = C_{zy} = C_2,$$

$$D_{xx} = D_{yy} = D_{zz} = D_1,$$

$$D_{xy} = D_{xz} = D_{yx} = D_{yz} = D_{zx} = D_{zy} = D_2.$$

Time je broj koeficijenata elastičnosti smanjen na 8 i jednačine (33) dobivaju oblik

$$\left.\begin{aligned} e_x &= A_1\sigma_x + A_2(\sigma_y + \sigma_z) + B_1\tau_x + B_2(\tau_y + \tau_z),\\ e_y &= A_1\sigma_y + A_2(\sigma_z + \sigma_x) + B_1\tau_y + B_2(\tau_z + \tau_x),\\ e_z &= A_1\sigma_z + A_2(\sigma_x + \sigma_y) + B_1\tau_z + B_2(\tau_x + \tau_y),\\ g_x &= C_1\sigma_x + C_2(\sigma_y + \sigma_z) + D_1\tau_x + D_2(\tau_y + \tau_z),\\ g_y &= C_1\sigma_y + C_2(\sigma_z + \sigma_x) + D_1\tau_y + D_2(\tau_z + \tau_x),\\ g_z &= C_1\sigma_z + C_2(\sigma_x + \sigma_y) + D_1\tau_z + D_2(\tau_x + \tau_y). \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

Ako promenimo pozitivni smer x ose, e_x, σ_x, σ_y, σ_z i $\tau_x = \tau_{yz}$, kao što znamo, ne menjaju znak, dok se kod $\tau_y = \tau_{xz}$ i $\tau_z = \tau_{xy}$ znak menja. Na osnovu prve od jednačina (34) možemo, prema tome, zaključiti da koeficijent B_2 mora biti jednak nuli. Pri istoj promeni pozitivnog smera x ose promeniće znak i g_z, koji pretstavlja malu promenu pravog ugla između x i y osa; iz poslednje jednačine (34) onda izlazi da su C_1, C_2, i D_2 takođe jednaki nuli.

Promenimo sad pozitivni smer y ose. Pri tome e_x, σ_x, σ_y i σ_z ne menjaju znak, dok se kod $\tau_x = \tau_{yz}$ znak menja. Na osnovu prve od jednačina (34) zaključujemo da i koeficijent B_1 mora biti jednak nuli. Prema tome, od 8 koeficijenata elastičnosti u jednačinama (34), samo *tri* nisu jednaka nuli te našu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\left.\begin{aligned} e_x &= A_1\sigma_x + A_2(\sigma_y + \sigma_z), & g_x &= D_1\tau_x,\\ e_y &= A_1\sigma_y + A_2(\sigma_z + \sigma_x), & g_y &= D_1\tau_y,\\ e_z &= A_1\sigma_z + A_2(\sigma_x + \sigma_y), & g_z &= D_1\tau_z. \end{aligned}\right\} \quad (35)$$

No ni ova tri koeficijenta, A_1, A_2 i D_1, nisu nezavisna. Ako, naime, obrnemo koordinatni sistem oko z ose za proizvoljni ugao φ, u novom koordinatnom sistemu, ξ, η, ζ, mora biti

$$e_\xi = A_1\sigma_\xi + A_2(\sigma_\eta + \sigma_\zeta).$$

Pomoću obrasca (23) možemo zameniti levu stranu ove jednačine sa

$$e_\xi = e_x\cos^2\varphi + e_y\sin^2\varphi + {}^1/_2\, g_z \sin 2\varphi,$$

ili, prema (35), sa

$$[A_1\sigma_x + A_2(\sigma_y + \sigma_z)]\cos^2\varphi + [A_1\sigma_y + A_2(\sigma_x + \sigma_z)]\sin^2\varphi + {}^1/_2 D_1 \tau_z \sin 2\varphi.$$

A, s obzirom na (9), može se istovremeno desna strana iste jednačine pretstaviti i u obliku

$$A_1(\sigma_x\cos^2\varphi + \sigma_y\sin^2\varphi + \tau_z\sin 2\varphi) + A_2(\sigma_x\sin^2\varphi + \sigma_y\cos^2\varphi - \tau_z\sin 2\varphi + \sigma_z).$$

Ako izjednačimo ta dva izraza i skratimo, imaćemo

$$^1/_2 D_1 = A_1 - A_2. \tag{36}$$

Dakle, elastične osobine izotropnog tela u *datoj tački* karakterišu tri koeficijenta A_1, A_2 i D_1, vezana međusobno jednačinom (36).

Obično se u tehnici uvode, mesto A_1, A_2 i D_1, koeficijenti

$$E = \frac{1}{A_1}, \quad \mu = -\frac{A_2}{A_1}, \quad G = \frac{1}{D_1} = \frac{1}{2(A_1 - A_2)} = \frac{E}{2(1+\mu)}, \tag{37}$$

i jednačine (35) postaju

$$\left.\begin{aligned} Ee_x &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), & G g_x &= \tau_x, \\ Ee_y &= \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x), & G g_y &= \tau_y, \\ Ee_z &= \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y), & G g_z &= \tau_z, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

ili, ako ih rešimo po naponima i uvrstimo izraze (19) i (20) za deformacije,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_x &= G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_y &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_z &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right). \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Koeficijenti E, μ i G za pojedine vrste materijala određuju se eksperimentalno.

Koeficijent E zove se *Young*-ovim modulom, po engleskom fizičaru koji ga je uveo 1807. Ako su svi komponentni naponi, sem σ_z nula, onda je $Ee_z = \sigma_z$, tj. *Young*-ov modul je koeficijent proporcijalnosti između normalnog napona i dilatacije kod aksijalno napregnutog štapa. Njegova je dimenzija ista kao i dimenzija napona.

Neimenovani broj μ zove se *Poisson*-ovim koeficijentom, po francuskom naučniku koji ga je uveo 1829. U slučaju aksijalnog naprezanja štapa, dilatacije u poprečnim pravcima, $e_x = e_y = -\mu\sigma_z/E$, moraju biti negativne (jer bi, inače, aksijalno produženje izazvalo produženje i u poprečnim pravcima!); dakle je $\mu > 0$. Saberemo li tri prve jednačine (38), nalazimo

$$E\varepsilon = (1 - 2\mu)\, s. \tag{40}$$

Zapreminska dilatacija je, dakle, proporcionalna zbiru normalnih napona. Ako su sva tri normalna napona pozitivna, mora i ε biti pozitivno; dakle $\mu < {}^1/_2$. Kod većine materijala je μ blizu 0,3*).

Koeficijent G zove se *modulom klizanja***), a ima istu dimenziju kao i E. Tri poslednje jednačine (38) pokazuju da su klizanja jednaka nuli kad su jednaki nuli tangencijalni naponi, tj. *da se kod izotropnog tela pravci glavnih napona poklapaju sa pravcima glavnih dilatacija.*

9. Problem Teorije elastičnosti. — U dobivenim vezama tri jednačine (7)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_z}{\partial y} + \frac{\partial\tau_y}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_x}{\partial z} + \frac{\partial\tau_z}{\partial x} + Y &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_y}{\partial x} + \frac{\partial\tau_x}{\partial y} + Z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{7'}$$

vezuju spoljne zapreminske sile i komponentne napone u tački.

Šest jednačina (38)

$$\left.\begin{aligned} Ee_x &= \sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z), & G g_x &= \tau_x, \\ Ee_y &= \sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x), & G g_y &= \tau_y, \\ Ee_z &= \sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y), & G g_z &= \tau_z, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

vezuju komponentne napone i deformacije.

Ovim su ekvivalentne jednačine

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_x &= G\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right), \\ \sigma_y &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_y &= G\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right), \\ \sigma_z &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right), & \tau_z &= G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right), \\ \varepsilon &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

*) Ako se usvoji *Cauchy*-jeva hipoteza o intermolekularnim silama, tj. rarikonstantna teorija, onda u primeni na izotropno-elastično telo izlazi $\mu = {}^1/_4$. Tačnost merenja postignuta pri dosadašnjim oglednim određivanjima μ nije dovoljna da bi se smelo kategorički tvrditi da to nije tačno. U Teoriskoj fizici uzima se obično $\mu = {}^1/_4$, dok u tehnici češće računaju sa $\mu = 0{,}3$.

**) U Teoriskoj fizici se često označava sa μ modul klizanja, a *Poisson*-ov koeficijent sa σ dok se mesto *Young*-ova modula uvodi modul λ, vezan sa tehničkim koeficijentima — odnosima

$$\lambda = \frac{2\mu}{1-2\mu}\, G = \frac{\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\, E.$$

u koje, mesto komponentnih deformacija, ulaze izvodi pomeranja tačaka iz jednačina (19) i (20).

Šest jednačina

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g_x}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}\,,\\
\frac{\partial^2 g_y}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}\,,\\
\frac{\partial^2 g_z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}\,,
\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z} &= {}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right),\\
\frac{\partial^2 e_y}{\partial z\,\partial x} &= {}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial g_x}{\partial x}\right),\\
\frac{\partial^2 e_z}{\partial x\,\partial y} &= {}^1/_2\,\frac{\partial}{\partial z}\left(-\frac{\partial g_z}{\partial z} + \frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y}\right),
\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

vezuje međusobno deformacije.

Gornje jednačine važe za sve tačke tela, dok za tačke spoljne površine važe još i uslovi

$$\left.\begin{aligned}
p_{nx} &= \sigma_x\,\alpha + \tau_z\,\beta + \tau_y\,\gamma\,,\\
p_{ny} &= \sigma_y\,\beta + \tau_x\,\gamma + \tau_z\,\alpha\,,\\
p_{nz} &= \sigma_z\,\gamma + \tau_y\,\alpha + \tau_x\,\beta\,.
\end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

U problemima Teorije elastičnosti obično su zadati oblik i dimenzije tela, njegove elastične osobine (E, i μ ili G) i spoljne zapreminske sile (X, Y, Z); osim toga moraju biti zadata i pomeranja tačaka spoljne površine ili spoljne površinske sile. U prvom slučaju traže se *pomeranja tačaka* u, v i w kao funkcije koordinata, koje bi u tačkama spoljne površine imale zadate vrednosti, no s tim da komponentni naponi σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y, τ_z, koji im prema jednačinama (39) odgovaraju zadovolje u svakoj tački tela sistem diferencijalnih jednačina (7). U drugom slučaju traže se *komponentni naponi* σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y i τ_z, kao funkcije koordinata, koje bi u tačkama spoljne površine zadovoljile uslove (6'), a u svima tačkama tela sistem diferencijalnih jednačina (7'). Osim toga, komponentne deformacije e_x, e_y, e_z, g_x, g_y, i g_z, koje tim naponima odgovaraju prema jednačinama (38), moraju u svakoj tački tela zadovoljavati sistem diferencijalnih jednačina (31) i (29). Pošto se nađu naponi mogu se naći i pomeranja tačaka iz jednačina (32).

Kod prve vrste problema traže se pomeranja u, v i w; stoga je najpodesnije *svim* jednačinama koje treba da budu zadovoljene dati takav oblik, da u njima ostanu kao nepoznate funkcije *samo* pomeranja tačaka, a to znači uvrstiti izraze (39) u jednačine (7').

Kad uvrstimo u prvu od jednačina (7'), mesto σ_x, τ_y i τ_z, izraze iz prve i dveju poslednjih od jednačina (39), dobivamo

$$G\left(2\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\mu}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + X = 0,$$

ili, ako promenimo red sabiranja,

$$G\left(\frac{2\mu}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z}\right) + X = 0.$$

Uzmemo li u obzir da je zbir triju poslednjih članova u zagradi

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(e_x + e_y + e_z\right) = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$$

i uvedimo li skraćenu oznaku za t.zv. *Laplace*-ov operator

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

gornja jednačina dobiva oblik

$$G\left(\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) + X = 0.$$

Ako na isti način uvrstimo u drugu i treću od jednačina (7), mesto komponentnih napona, izraze iz jednačina (39), nalazimo potpun sistem simultanih linearnih parcijalnih jednačina drugog reda za u, v i w

$$\left.\begin{aligned}
G\left(\Delta u + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right) + X &= 0,\\
G\left(\Delta v + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) + Y &= 0,\\
G\left(\Delta w + \frac{1}{1-2\mu}\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right) + Z &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{A}$$

Ako diferenciramo prvu od ovih jednačina po x, drugu po y, a treću po z isvode saberemo dobivamo

$$G\left(\Delta\varepsilon + \frac{1}{1-2\mu}\,\Delta\varepsilon\right) + \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} = 0,$$

odnosno

$$\Delta\varepsilon = -\,\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\,\frac{1}{G}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right). \tag{41}$$

Sistem jednačina (A), zajedno sa zadatim pomeranjima tačaka spoljne površine tela, određuje tražene funkcije u, v i w. U slučaju da nisu zadata pomeranja tačaka spoljne površine, nego projekcije površinske sile u tim tačkama, mogu se opet koristiti jednačine (A), ako u uslove (6′) uvrstimo izraze za komponentne napone iz jednačina (39)

$$\left.\begin{aligned} p_{nx} &= 2G\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right)\alpha+G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\beta+G\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\gamma,\\ p_{nx} &= 2G\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right)\beta+G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\gamma+G\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\alpha,\\ p_{nz} &= 2G\left(\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{\mu}{1-2\mu}\varepsilon\right)\gamma+G\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\alpha+G\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\beta. \end{aligned}\right\}\quad(\alpha)$$

Uspemo li da nađemo funkcije u, v i w iz jednačina (A) i površinskih uslova, dalje određivanje komponentnih deformacija i napona iz jednačina (38) i (39) svodi se na diferenciranje nađenih funkcija.

Kao što smo već naveli, ako su zadate površinske sile, često je zgodnije koristiti jednačine, u koje ulaze samo *naponi*, kao tražene funkcije koordinata tačke. To znači treba u *Saint Venant*-ove uslove (31) i (29) uvesti izraze za deformacije iz jednačina (38).

Ako uradimo to sa prvom od jednačina (31) i pomnožimo je sa E, nalazimo

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_x}{\partial y\,\partial z}=\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right).$$

Međutim, ako diferenciramo drugu od jednačina (7′) po y, a treću po z, saberemo izvode i taj zbir pomnožimo sa $1+\mu$, imaćemo

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_x}{\partial y\,\partial z}=-(1+\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\tau_z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\tau_y}{\partial x\,\partial y}\right)-$$
$$-(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Iz upoređenja dveju dobivenih jednačina sledi

$$(1+\mu)\left(\frac{\partial^2\tau_z}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2\tau_y}{\partial x\,\partial z}\right)+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}+(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=$$
$$=-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}+\mu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}\right),$$

ili

$$(1+\mu)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}\right)+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial z^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial z^2}-$$
$$-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial z^2}\right)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right).$$

Uzevši u obzir da je, prema prvoj od jednačina (7′),

$$\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}=-\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}-X,$$

a da je

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta-\frac{\partial^2}{\partial x^2},$$

nalazimo

$$-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\mu\,\Delta\sigma_x+\Delta\sigma_y-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}+\Delta\,\sigma_z-\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial x^2}=(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

ili

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-\mu\,\Delta\sigma_x+\Delta\,(\sigma_y+\sigma_z)=(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

odnosno

$$-\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}-(1+\mu)\,\Delta\sigma_x+\Delta s=(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}-\frac{\partial Z}{\partial z}\right).\qquad(42)$$

Uzimajući u obzir da je, prema jednačinama (40) i (41),

$$\Delta s=\frac{E}{1-2\mu}\Delta\varepsilon=-\frac{1+\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right),$$

može se jednačini (42) dati oblik

$$\Delta\sigma_x+\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+2\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)=0.\qquad(43)$$

Slično gornjem postupku mogu se uvesti izrazi za komponente deformacije iz jednačina (38) u prvi od uslova (29). Pomnožimo li ga sa E nalazimo

$$\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y\,\partial z}-\mu\frac{\partial}{\partial y\,\partial z}(\sigma_y+\sigma_z)=(1+\mu)\left(-\frac{\partial^2\tau_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tau_y}{\partial y\,\partial x}+\frac{\partial^2\tau_z}{\partial z\,\partial x}\right),$$

ili

$$\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z}-(1+\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y\partial z}+\frac{\partial^2\tau_z}{\partial z\,\partial x}+\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\tau_y}{\partial y\,\partial x}\right)+(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_x}{\partial x^2}=0.$$

Ali, s obzirom na drugu i treću od jednačina (7′), imamo

$$\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\tau_z}{\partial z\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial z}+Y\right),$$
$$\frac{\partial^2\sigma_z}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\tau_y}{\partial y\,\partial x}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{\partial\tau_y}{\partial x}\right)=-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\tau_x}{\partial y}+Z\right);$$

prema tome, naša jednačina, ako je podelimo sa $1+\mu$, dobiva oblik

$$\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z}+\frac{\partial^2\tau_x}{\partial z^2}+\frac{\partial Y}{\partial z}+\frac{\partial^2\tau_x}{\partial y^2}+\frac{\partial Z}{\partial y}+\frac{\partial^2\tau_x}{\partial x^2}=0,$$

ili

$$\Delta\tau_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 0. \tag{44}$$

Slično jednačini (43) nalazimo još dve jednačine iz drugog i trećeg uslova (31), a slično (44) dve jednačine iz uslova (29), svega, dakle, šest simultanih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda*) koje, zajedno sa tri diferencijalne jednačine prvog reda (7), sačinjavaju potpuni sistem jednačina za određivanje komponentnih napona

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\tau_z}{\partial y} + \frac{\partial\tau_y}{\partial z} + X = 0,\\
&\frac{\partial\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\tau_x}{\partial z} + \frac{\partial\tau_z}{\partial x} + Y = 0,\\
&\frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\tau_y}{\partial x} + \frac{\partial\tau_x}{\partial y} + Z = 0,\\
&\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + 2\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,\\
&\Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + 2\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,\\
&\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} + 2\frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\mu}{1-\mu}\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = 0,\\
&\Delta\tau_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z} + \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} = 0,\\
&\Delta\tau_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} = 0,\\
&\Delta\tau_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{B}$$

Osim ovih jednačina naponi moraju zadovoljiti površinske uslove (6′)

$$\left.\begin{aligned}
p_{nx} &= \sigma_x\alpha + \tau_z\beta + \tau_y\gamma,\\
p_{ny} &= \sigma_y\beta + \tau_x\gamma + \tau_z\alpha,\\
p_{nz} &= \sigma_z\gamma + \tau_y\alpha + \tau_x\beta.
\end{aligned}\right\} \tag{β}$$

Ako uspemo da nađemo šest funkcija σ_x, σ_y, σ_z, τ_x, τ_y i τ_z, koje bi u svakoj tački tela zadovoljavale jednačine (B), a u tačkama spoljne površine uslove (β), komponentne deformacije odredićemo iz jednačina (38), a pomeranja tačaka iz jednačina (32) bez teškoća.

*) Ove jednačine postavio je 1892 talijanski matematičar *E. Beltrami* za slučaj kad nema zapreminskih sila, a 1900 engleski fizičar *J. H. Michell* proširio ih je na opšti slučaj.

10. Metode rešavanja. — Sistemi jednačina (A) i (α), odn. (B) i (β), postavljeni u t. **9.**, jasno formulišu problem Teorije elastičnosti. Međutim, pri sadašnjem stanju Matematike tako, *direktno* postavljeni problem može se rešiti samo u nekoliko najprostijih slučajeva, bez naročite koristi za tehniku.

Obrnut problem (tj. ako pretpostavimo da su pomeranja tačaka tela date funkcije koordinata, pa tražimo spoljne sile, koje bi izazvale takva pomeranja) postaje jednostavan. Mesto integralenja sistema simultanih parcijalnih jednačina sa datim površinskim uslovima, ceo problem se svodi na diferenciranje datih funkcija. No da bi se tim putem došlo do rešenja od neke koristi za tehniku, treba *pogoditi* oblik tih funkcija. Pođe li to za rukom, sva dalja diferenciranja i uvođenja izvoda u osnovne jednačine (A) i (α) svode se na proveravanje celishodnosti učinjenih pretpostavki o obliku funkcija. Time se i objašnjava što se ni tim putem nije došlo do rešenja onih važnijih tehničkih problema.

Posle mnogih uzaludnih pokušaja najboljih matematičara prve polovine prošlog veka da se nađu pomoću jedne od dveju navedenih metoda korisna rešenja, francuski inženjer *B. de Saint-Venant* predložio je 1855 originalan, iako sa matematičkog gledišta vrlo primitivan način za rešavanje jednačina Teorije elastičnosti, koji je sam nazvao *poluobratnom metodom (méthode semi-inverse)*. Način se sastoji u tome, da se na osnovu postavljenih uslova pogode *neki* od komponentnih napona (obično oni, koji su jednaki nuli). Zatim se, pomoću jednačina (B) i (β), prvo proverava da li se te jednačine mogu, uopšte, zadovoljiti učinjenom pretpostavkom, pa se iz njih određuju spoljne sile i ostali komponentni naponi. Ako nađene spoljne sile odgovaraju uslovima, problem je rešen. U protivnom zaključuje se da učinjene pretpostavke odgovaraju uslovima nekog drugog problema, a za postavljeni treba izabrati druge pretpostavke i problem rešavati ponovo. Ma koliko da je *Saint-Venant*-ov način kao metoda nesavršen, on je i danas još jedini kojim se rešavaju najvažniji tehnički problemi.

Sam tok rešavanja problema pomoću *Saint-Venant*-ove metode ne može, naravno, biti logički jasan i jednostavan kao što je to slučaj kod obratne metode. Suština mu je u tome da se, ulazeći u jednačine (B) i (β) sa pretpostavljenim vrednostima za neke komponentne napone, nađu spoljne sile i utvrdi da one odgovaraju postavljenom problemu. Te jednačine daju u isto vreme i vezu između ostalih komponentnih napona i spoljnih sila u obliku diferencijalnih jednačina. Ako se ove jednačine mogu integraliti, tj. naći sami komponentni naponi kao funkcije koordinata tačke i spoljnih sila, problem je rešen. Po sebi se razume da se moraju zadovoljiti *sve* jednačine (B) i (β); ponekad one daju *nove* naknadne uslove za *raspored* spoljnih sila po telu, odnosno po njegovoj površini.

Pre no što pređemo na rešavanje konkretnih problema *Saint-Venant*-ovom metodom, pokažimo na jednom jednostavnom primeru primenu obrnute metode.

11. Sferični sud napregnut normalnim pritiskom. — Ovo je jedan od slučajeva gde je lako pogoditi kakva su pomeranja tačaka i gde se, prema tome, obrnuta metoda uspešno primenjuje.

Zamislimo da je telo ograničeno dvema koncentričnim sferičnim površinama, poluprečnika a i b $(a < b)$, i opterećeno normalnim, jednoliko raspoređenim pritiskom po tim površinama. Uticaj sopstvene težine tela zanemarujemo, tj. pretpostavljamo da nema zapreminskih sila. Jednačine (A) u tom slučaju postaju

$$\left.\begin{aligned}(1-2\mu)\,\Delta u + \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} &= 0,\\ (1-2\mu)\,\Delta v + \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= 0,\\ (1-2\mu)\,\Delta w + \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (\mathrm{A}')$$

Kako je opterećenje simetrično u odnosu na središte suda, telo će, očigledno, ostati simetrično i posle deformacije. Znači da će se tačke tela koje su se nalazile na nekoj sferičnoj površini poluprečnika r, posle deformacije, naći na nekoj drugoj, koncentričnoj sferičnoj površini poluprečnika $r+\rho$. Svaka tačka će se pomeriti u pravcu svog potega za istu veličinu ρ, nezavisnu od pravca potega. Projekcije tog pomeranja na koordinatne ose biće

$$u = \rho\frac{x}{r}, \quad v = \rho\frac{y}{r}, \quad w = \rho\frac{z}{r}. \qquad (45)$$

Pošto smo utvrdili da je ρ funkcija samo od r, biće i ρ/r funkcija takođe samo od r. Označimo je sa R, a njene izvode po r sa R', R'' itd. Uzevši u obzir, da je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ i da je prema tome $\partial r/\partial x = x/r$, $\partial r/\partial y = y/r$ i $\partial r/\partial z = z/r$, nalazimo iz jednačina (45)

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}(Rx) = R + R'x\frac{\partial r}{\partial x} = R + R'\frac{x^2}{r},\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(Rx) = R'x\frac{\partial r}{\partial y} = R'\frac{xy}{r},\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial}{\partial z}(Rx) = R'x\frac{\partial r}{\partial z} = R'\frac{xz}{r}.\end{aligned}\right\} \qquad (47)$$

Na isti način nalazimo parcijalne izvode od v i w, tako da je

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 3R + R'\frac{x^2+y^2+z^2}{r} = 3R + R'r$$

i

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = 3R'\frac{x}{r} + R'\frac{x}{r} + R''r\frac{x}{r} = 4R'\frac{x}{r} + R''x. \qquad (48)$$

Ponovnim diferenciranjem izraza (47) dobivamo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = R'\frac{x}{r} + R''\frac{x^2}{r}\frac{x}{r} + 2R'\frac{x}{r} - R'\frac{x^2}{r^2}\frac{x}{r} = R'\frac{x}{r}\left(3 - \frac{x^2}{r^2}\right) + R''\frac{x^3}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = R''\frac{xy^2}{r^2} + R'\frac{x}{r} - R'\frac{xy^2}{r^3} = K'\frac{x}{r}\left(1 - \frac{y^2}{r^2}\right) + R''\frac{xy^2}{r^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R'\frac{x}{r}\left(1 - \frac{z^2}{r^2}\right) + R''\frac{xz^2}{r^2},$$

te je

$$\Delta u = R'\frac{x}{r}\left(5 - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^2}\right) + R''\frac{x}{r^2}(x^2+y^2+z^2) = 4R'\frac{x}{r} + R''x. \quad (49)$$

Uvrstimo li izraze (48) i (49) u prvu od jednačina (A′) nalazimo

$$(1-2\mu)\left(4R'\frac{x}{r} + R''x\right) + 4R'\frac{x}{r} + R''x = 0,$$

odnosno

$$2(1-\mu)(4R' + R''r)\frac{x}{r} = 0.$$

Na potpuno isti način, iz ostalih dveju jednačina sistema (A′) dobili bismo

$$2(\ -\mu)(4R' + R''r)\frac{y}{r} = 0,$$

$$2(\ -\mu)(4R' + R''r)\frac{z}{r} = 0.$$

Nađene tri jednačine mogu biti zadovoljene samo ako je

$$4R' + R''r = 0.$$

Ova diferencijalna jednačina i treba da odredi R. Da bismo je integralili, podelimo je sa R'.

$$\frac{R''}{R'} = -\frac{4}{r}$$

ili

$$\frac{d\ln R'}{dr} = -\frac{d\ln r^4}{dr},$$

odakle je

$$\ln R' = \ln C - \ln r^4 = \ln\frac{C}{r^4},$$

ili

$$R' = \frac{C}{r^4},$$

gde je C integraciona konstanta. Ponovnim integralenjem dobivamo

$$R = C_1 - \frac{C}{3\,r^3},$$

gde je C_1 takođe integraciona konstanta.

Pomoću jednačina (39) i (47) nalazimo za komponentne napone

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= 2\,G\left[R + R'\frac{x^2}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu}(3\,R + R'r)\right] = \\
&= 2\,G\left[\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 - \frac{C}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{x^2}{r^2}\right)\right], \\
\sigma_y &= 2\,G\left[\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 - \frac{C}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{y^2}{r^2}\right)\right], \\
\sigma_z &= 2\,G\left[\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 - \frac{C}{r^3}\left(\frac{1}{3} - \frac{z^2}{r^2}\right)\right], \\
\tau_x &= 2\,G\;R'\frac{yz}{r} = 2\,GC\frac{yz}{r^5}, \quad \tau_y = 2\,GC\frac{xz}{r^5}, \quad \tau_z = 2\,GC\frac{xy}{r^5}.
\end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Dalje proučavanje naprezanja tela može se znatno uprostiti, ako opet iskoristimo činjenicu da su pomeranja tačaka u datom slučaju nezavisna od pravca potega. Znači, dovoljno će biti da proučimo naprezanje u tačkama na jednom od tih potega, na pr. na x osi. Za te tačke jednačine (51) daju

$$\sigma_x = 2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 + \frac{2}{3}\frac{C}{r^3}\right), \quad \sigma_y = \sigma_z = 2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 - \frac{1}{3}\frac{C}{r^3}\right),$$

$$\tau_x = 0, \qquad \tau_y = 0, \qquad \tau_z = 0.$$

Tri poslednje jednačine dovode do zaključka da se za izabrate tačke pravci glavnih napona poklapaju sa koordinatnim osama. Prema tome, jedan od glavnih napona ima pravac potega (radijalni napon)

$$\sigma_r = 2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 + \frac{2}{3}\frac{C}{r^3}\right), \tag{52}$$

a za pravce ostalih dvaju mogu se uzeti dva koja bilo uzajamno ortogonalna pravca u ravni upravnoj na potegu; ovima odgovaraju naponi

$$\sigma_t = 2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 - \frac{1}{3}\frac{C}{r^3}\right). \tag{53}$$

Ostaje još da zadovoljimo površinske uslove (α). U tačkama gde x osa seče sferične površine $r = a$ i $r = b$, kosinusi smera normale su $\alpha = -1$,

$\beta = 0$, $\gamma = 0$, odnosno $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Ako sa p_a i p_b obeležimo *apsolutne veličine* pritiska na te površine, iz jednačina (α) dobivamo

$$p_a = -2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 + \frac{2}{3}\frac{C}{a^3}\right),$$

$$p_b = -2\,G\left(\frac{1+\mu}{1-2\mu}\,C_1 + \frac{2}{3}\frac{C}{b^3}\right).$$

Ove jednačine određuju integracione konstante, naime

$$2\,G\frac{C}{3} = \frac{1}{2}(p_b - p_a)\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3},$$

$$2\,G\,C_1\frac{1+\mu}{1-2\mu} = -\frac{p_b b^3 - p_a a^3}{b^3 - a^3},$$

te jednačine (52) i (53) dobivaju konačan oblik

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{p_b b^3 - p_a a^3}{b^3 - a^3} + (p_b - p_a)\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}\frac{1}{r^3}, \\
\sigma_t &= -\frac{p_b b^3 - p_a a^3}{b^3 - a^3} - \frac{1}{2}(p_b - p_a)\frac{a^3 b^3}{b^3 - a^3}\frac{1}{r^3}.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

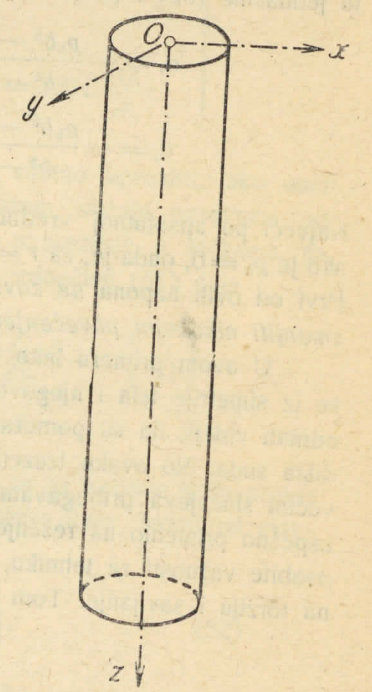
Najveći po apsolutnoj vrednosti napon biće za $r = a$ ili $r = b$. Tako, na pr., ako je $p_b = 0$, onda je, za $r = a$, $\sigma_t = {}^3/_2\,p$, dok je za $r = a$, $\sigma_t = {}^3/_2\,pa^3/(b^3 - a^3)$. Prvi od ovih napona *ne zavisi od dimenzija suda, što znači da se ne bi mogao smanjiti nikakvim povećanjem njegove debljine.*

U ovom primeru lako smo došli do rešenja pomoću obratne metode, jer se iz simetrije tela i njegovog opterećenja u odnosu na središte suda moglo odmah videti, da su pomeranja tačaka funkcije samo njihovog otstojanja od središta suda. No ovako izuzetno povoljna okolnost se vrlo retko javlja. U ogromnoj većini slučajeva pribegavamo poluobratnoj metodi, koju je sam *Saint-Venant* uspešno primenio na rešenje problema koji nosi i njegovo ime, problem od osobite važnosti za tehniku, naime određivanje napona k.d štapova napregnutih na torziju i savijanje. Tom problemu posvećeno je naredno poglavlje.

II

SAINT-VENANT-OV PROBLEM

12. Aksijalno naprezanje. — Počnimo od ovog najednostavnijeg slučaja *Saint-Venant*-ova problema. Zamislimo štap (sl. 5) dužine l. Uzmimo za x i y ose glavne centralne ose inercije površine gornje osnove, a z osu upravno na njima. Pri proučavanju ove vrste naprezanja štapa u Otpornosti materijala, govori se samo o naponu normalnom na poprečnom preseku, koji sad obeležavamo sa σ_z. Ostali komponentni naponi se i ne pominju, drugim rečima prećutno se pretpostavlja da su jednaki nuli. Da bismo mogli primeniti poluobratnu metodu treba u jednačine (B) uneti izvesne prethodno izabrane pretpostavke o naponima*) i, ako se utvrdi da te pretpostavke nisu u opreci sa jednačinama, odrediti ostale komponentne napone i spoljne sile. Prirodno je da se prvo pokuša sa istim pretpostavkama, koje se čine u Otpornosti materijala. Ako se pri tom pokaže da su pretpostavke, uopšte, moguće, sistem jednaćina (B) odrediće ostale komponentne



Sl. 5

*) Način kako se danas tretira *Saint-Venant*-ov problem, koji ćemo izložiti u ovom poglavlju znatno se razlikuje od njegova originalnog izlaganja. Jer u *Saint-Venant*-ovo doba još nisu postojale *Beltrami*-jeve jednačine (43) i (44), a ni izrazi (32) za pomeranja tačaka. On nije pred sobom imao sistem jednačina (B), koje kao nepoznate funkcije sadrže samo napone, već je morao o *naponima* činiti pretpostavke koji bi zadovoljili sistem jednačina (A) u koje ulaze kao nepoznate funkcije *pomeranja* tačaka. Znači, morao je sa svojim pretpostavkama ući prvo u jednačine (39), pa sa tako dobivenim diferencijalnim vezama za pomeranja — u sistem jednačina (A), kako bi se uverio da nisu u protivrečnosti sa tim sistemom i, eventualno, odredio ostale napone i spoljne sile. Usled toga je njegovo razlaganje, naravno, mnogo duže i zamršenije od našeg današnjeg.

napone, a uslovi (β) — površinske sile. Ako se ove svode na dve aksijalne sile iste veličine i suprotnog smera, sa napadnim tačkama u težištima osnova, pretpostavka odgovara postavljenom zadatku i isti je — rešen. U protivnom se mora ispitati druga neka pretpostavka itd.

Unesimo, dakle, u sistem jednačina (B) pretpostavke

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_x = 0, \quad \tau_y = 0, \quad \tau_z = 0. \tag{55}$$

Iz prvih dveju jednačina nalazimo

$$X = 0, \quad Y = 0,$$

tj. zapreminske sile moraju biti paralelne z osi. Uzmimo da je z osa vertikalna, a zapreminska sila da je specifična težina materijala δ, tj. konstantna. Iz treće jednačine (B) dobivamo tada

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -Z = -\delta. \tag{56}$$

U slučaju konstantne zapreminske sile, ostale jednačine sistema (B) se znatno pojednostavljuju

$$\left.\begin{aligned}
&\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = 0, && \Delta\tau_x + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y\,\partial z} = 0,\\
&\Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial y^2} = 0, && \Delta\tau_y + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial z\,\partial x} = 0,\\
&\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = 0, && \Delta\tau_z + \frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 s}{\partial x\,\partial y} = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (B')$$

Shodno našoj pretpostavci moramo uzeti

$$s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_z;$$

tada iz jednačina (B') sleduje

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y\,\partial z} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z\,\partial x} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\,\partial y} = 0,$$

što znači da σ_z mora biti linearna funkcija koordinata tačke

$$\sigma_z = A + Bx + Cy + Dz, \tag{58}$$

gde su A, B, C i D zasad proizvoljne konstante. Jednu od njih, i to D, određujemo odmah iz jednačine (56)

$$D = -\delta.$$

A sad pređimo na površinske uslove (β). U svim tačkama bočne površine normala je upravna na z osu, znači da je $\gamma = 0$. Uvrstimo li ovu vrednost za γ i izraze (55) i (58) za napone u uslove (β), nalazimo

$$p_{nx} = 0, \quad p_{ny} = 0, \quad p_{nz} = 0,$$

što znači da u tačkama bočne površine nema spoljnih sila.

U tačkama površine donje osnove $z = l$ spoljna normala je paralelna z osi, tj. $\alpha = 0$, $\beta = 0$ i $\gamma = 1$. Sa ovim vrednostima nalazimo iz uslova (β)

$$p_{zx} = 0, \quad p_{zy} = 0, \quad p_{zz} = (\sigma_z)_{z=l} = A + Bx + Cy - l\delta; \tag{59}$$

dakle sile na donjoj osnovi su paralelne z osi, a raspoređene su po istom zakonu kao i $(\sigma_z)_{z=l}$. U tačkama površine gornje osnove $z = 0$ spoljna normala ima smer negativne z ose, tj. $\alpha = 0$, $\beta = 0$ i $\gamma = -1$; prema tome imamo

$$p_{-zx} = 0, \quad p_{-zy} = 0, \quad p_{-zz} = -(\sigma_z)_{z=o} = -(A + Bx + Cy). \tag{60}$$

Redukujući sile koje napadaju tačke površine donje osnove na težište ove površine, nalazimo za projekcije njihove rezultate P.

$$P_x = \iint p_{zx}\, dF = 0, \quad P_y = \iint p_{zy}\, dF = 0,$$

$$P_z = \iint p_{zz}\, dF = \iint (A + Bx + Cy - l\delta)\, dF,$$

gde je dF element površine, a integrali su uzeti po celokupnoj površini osnove. Uzmemo li u obzir da su

$$\iint x\, dF = 0, \quad \iint y\, dF = 0,$$

kao momenti površine u odnosu na njene težišne ose, nalazimo da je rezultanta

$$P = (A - l\delta) F \tag{61}$$

i — paralelna z osi. Na isti način nalazimo za projekcije redukcionog momenta $\mathfrak{M}$.

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{M}_x &= \iint y\, p_{zz}\, dF = \iint (A + Bx + Cy - l\delta)\, y\, dF = C\, I_x, \\ \mathfrak{M}_y &= -\iint x\, p_{zz}\, dF = -\iint (A + Bx + Cy - l\delta)\, x\, dF = -B I_y, \\ \mathfrak{M}_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

gde su sa I_x i I_y obeleženi ekvatorijalni momenti inercije površine osnove, imajući pri tome u vidu da je

$$\iint x\, y\, dF = 0,$$

kao centrifugalni moment površine u odnosu na njene glavne ose.

Znači, dakle, sile u tačkama površine donje osnove svode se na rezultantu P, smera z ose, i dva sprega, sa momentima $\mathfrak{M}_x$ i $\mathfrak{M}_y$. Na sličan način nalazimo, redukujući sile koje napadaju tačke površine gornje osnove na težište te površine, da su projekcije te rezultante na x i y ose jednake nuli, dok je projekcija na z osu

$$-\iint (A + Bx + Cy)\, dF = -AF = -(P + lF\delta) = -(P + Q), \tag{63}$$

gde je sa Q obeležena ukupna težina štapa. Projekcije redukcionog momenta na x i y ose su

$$\left.\begin{aligned} -\iint (A + Bx + Cy)\, y\, dF &= -C I_x = -\mathfrak{M}_x, \\ \iint (A + Bx + Cy)\, x\, dF &= B\, I_y = \mathfrak{M}_y, \end{aligned}\right\} \tag{64}$$

dok je projekcija momenta na z osu jednaka nuli.

I tako dolazimo do zaključka, da pretpostavka učinjena u početku ovog §-a, prema kojoj su svi komponentni naponi, osim σ_z, jednaki nuli odgovara opterećenju štapa; *a*) aksijalnim silama $\pm P$ na osnovama, *b*) sopstvenom težinom Q duž ose štapa, *c*) spregovima $\pm \mathfrak{M}_x$ u yz ravni i *d*) spregovima $\pm \mathfrak{M}_y$ u xz ravni. Dakle, nađenim rešenjem obuhvaćen je čak širi od postavljenog problema, jer je obuhvatilo ne samo aksijalno naprezanje već i čisto savijanje u glavnim ravnima inercije. Ako iz jednačina (61) i (62) odredimo konstante A, B i C pomoću sila i spregova,

$$A = \frac{P}{F} + l\delta, \quad B = -\frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}, \qquad C = \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x},$$

nalazimo iz (58) poznati obrazac za normalni napon te vrste naprezanja

$$\sigma_z = \frac{P}{F} + \frac{Q}{F}\left(1 - \frac{z}{l}\right) - \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}\, x + \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}\, y. \tag{65}$$

Kako su τ_x, τ_y, i τ_z u svima tačkama štapa jednaki nuli, zaključujemo da su glavni naponi u svakoj tački paralelni koordinatnim osama. Najveći su tangencijalni naponi u ravnima čije su normale nagnute prema z osi pod uglom $\pm {}^1/_4\,\pi$, i jednaki su $\pm {}^1/_2\,\sigma_z$.

Proučimo sad pomeranja tačaka, i to posebno za svaku od pobrojanih vrsta opterećenja.

Prema jednačinama (38), a usled *naprezanja aksijalnim silama* $\pm P$ kom ponentne deformacije su

$$e_x = e_y = -\mu \frac{P}{EF}, \quad e_z = \frac{P}{EF}, \quad g_x = g_y = g_z = 0.$$

Njima odgovaraju, prema obrascima (32), pomeranja tačaka

$$u = -\mu \frac{P}{EF} x, \quad v = -\mu \frac{P}{EF} y, \quad w = \frac{P}{EF} z.$$

Iz ovih izraza se vidi da tačke koje pripadaju z osi $(x = 0,\ y = 0)$ imaju pomeranja samo u pravcu te ose, dok tačke neke prave paralelne z osi, a na otstojanju r od nje, dobivaju i horizontalno pomeranje

$$\sqrt{u^2 + v^2} = -\mu \frac{P}{EF} \sqrt{x^2 + y^2} = -\mu \frac{P}{EF} r.$$

Dakle, ta prava ostaće prava i paralelna z osi i u deformisanom telu, samo će se približiti toj osi za $\mu Pr/EF$ ako aksijalne sile zatežu štap, a udaljiti od nje ako ga pritiskuju. Sve tačke koje su pripadale površini nekog poprečnog preseka na otstojanju z od gornje osnove imaju ista pomeranja u pravcu z ose; dakle, presek ostaje ravan, i translatorno se pomera u tom pravcu.

Komponentne deformacije usled *zatezanja štapa sopstvenom težinom* Q, prema obrascima (38), jednake su

$$e_x = e_y = -\mu \frac{Q}{EF}\left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad e_z = \frac{Q}{EF}\left(1 - \frac{z}{l}\right), \quad g_x = g_y = g_z = 0,$$

a pomeranja tačaka prema obrascima (32) biće

$$u = -\mu \frac{Q}{EF}\left(1 - \frac{z}{l}\right) x, \ v = -\mu \frac{Q}{EF}\left(1 - \frac{z}{l}\right) y, \ w = \frac{Q}{EF}\left[z\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z}{l}\right) - \frac{\mu}{2}\frac{r^2}{l}\right],$$

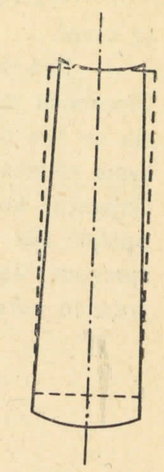
gde je $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ otstojanje posmatrane tačke od z ose. Kao što se iz tih obrazaca vidi, tačke z ose $(x = 0,\ y = 0)$ pomeraju se samo u pravcu te ose, dok tačke neke prave paralelne toj osi, i na otstojanju r od nje imaju i horizontalna pomeranja, naime

$$\sqrt{u^2 + v^2} = -\mu \frac{Q}{EF}\left(1 - \frac{z}{l}\right) r;$$

dakle, ta prava ostaje prava i pomera se *a*) translatorno prema z osi za $\mu Qr/EF$ i *b*) okreće se oko svog gornjeg kraja za mali ugao $\mu Qr/EFl$. Tačke površine nekog poprečnog preseka na otstojanju z od gornjeg kraja, pomeraju se u pravcu z ose za

$$\frac{Q}{EF}\left[z\left(1 - \frac{1}{2}\frac{z}{l}\right) - \frac{\mu}{2}\frac{r^2}{l}\right].$$

To znači da se ceo poprečni presek pomera translatorno za $\frac{Qz}{EF}\left(1 - \frac{z}{2l}\right)$ i deformiše u rotacioni paraboloid (sl. 6).



Sl. 6

Spregovi $\pm \mathfrak{M}_y$ savijaju štap u xz ravni („čisto" savijanje, sl. 7). Komponentne deformacije koje odgovaraju tom naprezanju jednake su prema jednačinama (38)

$$e_x = e_y = \mu \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} x, \quad e_z = -\frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} x, \quad g_x = g_y = g_z = 0,$$

a pomeranje tačaka, prema obrascima (32),

$$u = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} [\mu (x^2 - y^2) + z^2],$$

$$v = \mu \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} xy, \quad w = -\frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} xz.$$

Iz tih izraza se vidi da se tačke neutralnog sloja $(x = 0)$ pomeraju u pravcu x ose za

$$\frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} (-\mu y^2 + z^2);$$

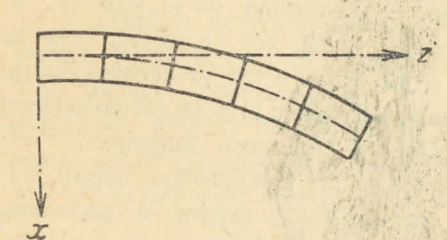
time se ta ravan pretvara u površinu drugog reda. Osa štapa $(x = 0,\ y = 0)$ pretvara se u krivu drugog reda, elastičnu liniju

$$u_o = \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y} z^2,$$

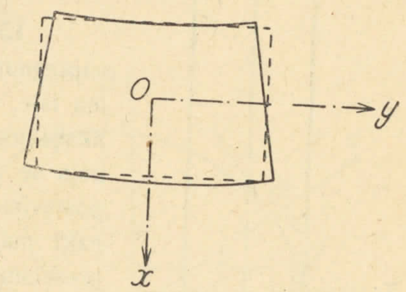
čija je krivina

$$\frac{d^2 u_o}{dz^2} = \frac{\mathfrak{M}_y}{EI_y},$$

što se potpuno poklapa sa obrascem Otpornosti materijala.



Sl. 7



Sl. 8

Za tačke površine poprečnog preseka na otstojanju z od osnove pomeranja upravna na taj presek su jednaka $-\mathfrak{M}_y zx/EI_y$, što znači da presek ostaje ravan, okreće se za ugao $\mathfrak{M}_y z/EI_y$ oko neutralne ose, kao što se to i pretpostavlja u iOtpornosti materijala. Osim toga te se tačke pomeraju i u ravni samog preseka, usled čega se menja njegov oblik. Na pr., kod pravougaonog preseka (sl. 8), širine b, i visine h, bočne strane ($y = \pm {}^1/_2\, b$) ostaju prave, ali se okreću za ugao ${}^1/_2\, \mathfrak{M}_y b/EI_y$, dok se druge dve strane ($x = \pm {}^1/_2\, h$) pretvaraju u krive linije, okrenute konveksnom stranom prema pozitivnoj x osi.

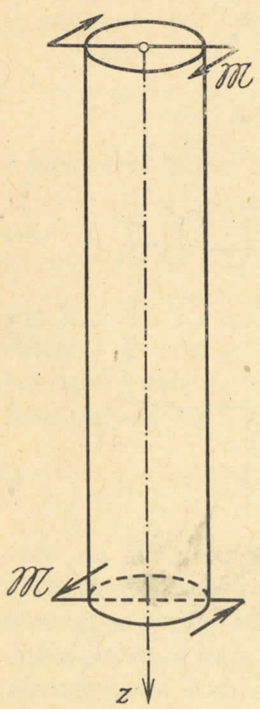
Sva ova razlaganja važe, naravno i za savijanje spregovima $\pm\, \mathfrak{M}_x$ u yz ravni.

Kao što se vidi, u datom slučaju, pretpostavke o naponima (55) uzete iz Otpornosti materijala pokazale su se potpuno tačne i dovele su do zaključaka, što se tiče deformacije štapa, koji se takođe poklapaju sa osnovnim pretpostavkama elementarne teorije savijanja. No ne sme se zaboraviti jedna vrlo važna činjenica, koja, na prvi pogled, znatno umanjuje vrednost nađenog rešenja. Spoljne sile u tačkama površina osnova stvarno se svode na aksijalne sile i spregove, kao što i treba da bude, ali su one *po površinama raspoređene po potpuno određenom zakonu*, izraženom jednačinama (59) i (60)

$$p_{zz} = \frac{P}{F} - \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}\, x + \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}\, y,$$

$$p_{-zz} = -\frac{P}{F} - \frac{Q}{F} + \frac{\mathfrak{M}_y}{I_y}\, x - \frac{\mathfrak{M}_x}{I_x}\, y.$$

Iz ovih jednačina se vidi da su sile koje izazivaju aksijalno naprezanje raspoređene jednoliko po površinama osnova, dok su sile koje sačinjavaju spregove u svakoj tački proporcionalne njenom otstojanju od y, odnosno od x ose. Dakle, strogo uzevši, nađeno rešenje odgovora samo tom rasporedu spoljnih sila po površinama osnova, dok bi za svaki drugi raspored trebalo tražiti drugo rešenje. U IV poglavlju ćemo navesti razloge zbog kojih se može smatrati da nađeno rešenje važi, iako *sa izvesnim ograničenjima*, i za te slučajeve.



Sl. 9

13. Torzija. — Zamislimo da je štap (sl. 9) napregnut spregovima $\pm\, \mathfrak{M}$, koji ga uvijaju; ose su mu iste, kao i u § **12.** Kao i u već proučenom slučaju aksijalnog naprezanja, pokušajmo prvo sa pretpostavkom koja se prećutno čini i u Otpornosti materijala. Pretpostavimo, naime, da su svi komponentni naponi jednaki nuli, osim tangencijalnog napona u poprečnim presecima, čije komponente beležimo sa τ_x i τ_y. Postavljamo, dakle, kao uslov da su

$$\sigma_x = 0,\quad \sigma_y = 0,\quad \sigma_z = 0,\quad \tau_z = 0. \tag{66}$$

Osim toga zanemarujemo uticaj sopstvene težine, dakle smatramo da zapreminskih sila nema

$$X = 0,\quad Y = 0,\quad Z = 0.$$

Unesemo li te pretpostavke u prve tri jednačine sistema (B), naćićemo

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0,\quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0. \tag{67}$$

Iz prvih dveju jednačina se vidi da, τ_x i τ_y ne zavise od z. Da bi se zadovoljila treća jednačina mora biti

$$\tau_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x},\quad \tau_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \tag{68}$$

gbe je ϕ proizvoljna funkcija od x i y.

Od jednačina (B') na str. 33 dve samo nisu identički zadovoljene pretpostavkom (66) i to

$$\Delta \tau_x + \frac{1}{1+\mu}\, \frac{\partial^2 s}{\partial y\, \partial z} = 0,\quad \Delta \tau_y + \frac{1}{1+\mu}\, \frac{\partial^2 s}{\partial z\, \partial x} = 0;$$

uzmemo li u obzir jednačine (66), (67) i (68), one daju

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) = 0.$$

Ako promenimo red diferenciranja dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

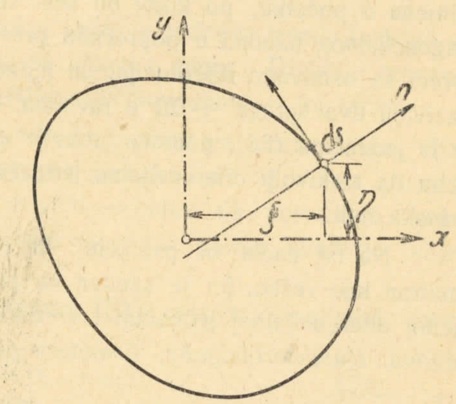
dakle je

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = C, \tag{69}$$

gde je sa C obeležena proizvoljna konstanta.

Pređimo na površinske uslove na bočnoj površini, ($\gamma = 0$). Prema uslovima zadatka površinske sile na njoj moraju biti jednake nuli. Prve dve jednačine grupe (β) zadovoljavaju taj uslov, a iz treće jednačine sleduje

$$\tau_y\, \alpha + \tau_x\, \beta = 0. \tag{70}$$



Sl. 10.

U tačkama bočne površine (sl. 10) je $\alpha = d\eta/ds$ i $\beta = -d\xi/ds$, gde su sa ξ i η obeležene koordinate konturne linije preseka (za razliku od koordinata x i y tačke površine preseka), a sa ds element te linije. Ako uvrstimo te izraze u uslov

(70) i zamenimo τ_x i τ_y njihovim izrazima (68) nalazimo

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}\frac{d\xi}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{ds}=\frac{d\phi}{ds}=0. \tag{71}$$

To znači da u tačkama konturne linije funkcija ϕ mora imati konstantnu vrednost, za koju možemo uzeti da je jednaka nuli, pošto dodavanje proizvoljne konstante funkciji ϕ ne utiče na njene izvode, odnosno na komponentne napone*).

U tačkama površina osnova je $\alpha=0,\ \beta=0,\ \gamma=\pm 1$; prema jednačinama ($\beta$) tom odgovaraju projekcije površinske sile

$$p_x=\pm\tau_y,\quad p_y=\pm\tau_x,\quad p_z=0,$$

gde se gornji znak odnosi na osnovu $z=l$, a donji na $z=0$. Redukujući te sile na težišta površina osnova, nalazimo za projekcije rezultante

$$\pm P_x=\pm\int\!\!\int p_x\,dx\,dy=\pm\int\!\!\int\tau_y\,dx\,dy=\pm\int dx\int\frac{\partial\phi}{\partial y}dy=0,$$

$$\pm P_y=\pm\int\!\!\int p_y\,dx\,dy=\pm\int\!\!\int\tau_x\,dx\,dy=\mp\int dy\int\frac{\partial\phi}{\partial x}dx=0,$$

ako je na konturi $\phi=0$. Redukcioni momenti su

$$\pm\mathfrak{M}=\int(x\,p_y-y\,p_x)\,dF=\pm\int\!\!\int(x\tau_x-y\tau_y)\,dF=$$

$$=\mp\int dy\int x\frac{\partial\phi}{\partial x}dx\mp\int dx\int y\frac{\partial\phi}{\partial y}dy. \tag{72}$$

Ako izvršimo parcijalno integriranje prvog člana po x, a drugog po y, i ako je na konturi $\phi=0$, nalazimo

$$\mathfrak{M}=2\int\!\!\int\phi\,dx\,dy. \tag{72'}$$

Rezultati dosadašnjeg razlaganja mogu se ovako formulisati. Pretpostavka učinjena u početku, po kojoj od šest komponentnih napona jedino komponente tangencijalnog napona u poprečnim presecima τ_x i τ_y nisu jednaki nuli, nije u opreci sa osnovnim diferencijalnim jednačinama (B). Takvo naprezanje stvarno izazivaju dva sprega $\pm\mathfrak{M}$ u ravnima osnova štapa. Naponi τ_x i τ_y određuju se iz jednačina (68), pomoću funkcije $\phi(x,y)$, koja u tačkama površine preseka treba da zadovolji diferencijalnu jednačinu (69), a na njegovoj konturi da bude jednaka nuli.

Na taj način bi problem, sa čisto matematičkog gledišta, mogao biti smatran kao rešen, jer je sveden na prostiji, naime na iznalaženje funkcije po njenoj diferencijalnoj jednačini i vrednosti na konturi (konturni problem, *краевая задача*, *Randwertaufgabe*, *boundary problem*), kao što se diferencijalna jednačina smatra da je rešena, ako se zadatak svede na izračunavanje integrala poznate funkcije. No ma da ne postoji opšte pravilo za integrisanje funkcija, postoje ipak praktične numeričke metode, pomoću kojih se integral može sračunati sa željenom tačnošću. Za konturni problem, međutim, ni takvih metoda nema, nego skoro za svaki zadati oblik konturne linije treba posebno tražiti način za njegovo rešavanje.

*) Ako je poprečni presek štapa višestruko povezano područje, tj. u slučaju uvijanja šupljeg štapa, izbor ove konstante nije potpuno proizvoljan. Takvi slučajevi nisu obuhvaćeni daljim izlaganjima.

Sama funkcija ϕ je nađena za čitav niz konturnih linija, od kojih samo mali broj dolazi u obzir za tehničku primenu. No pre nego što pređemo na izlaganja tih rešenja, ukazaćemo na još nekoliko opštih činjenica, nezavisnih od oblika konturne linije.

Nacrtajmo na poprečnom preseku štapa liniju, čija bi tangenta u svakoj tački imala pravac tangencijalnog napona u toj tački. Onda projekcija napona na normalu te linije u istoj tački mora biti jednaka nuli. Znači, ako obeležimo sa $\alpha=dy/ds$ i $\beta=-dx/ds$ kosinuse smera normale n na tu liniju (sl. 10) imaćemo

$$\tau_y\alpha+\tau_x\beta=\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{ds}=\frac{d\phi}{ds}=0, \tag{73}$$

ili

$$\phi(x,y)=D,$$

gde je D proizvoljna konstanta. Gore smo uzeli da je ta konstanta nula za konturnu liniju. Drugim vrednostima konstante odgovara sistem krivih *linija tangencijalnih napona*. Kao primer, na sl. 16 su te linije nacrtane za kvadrat, i to za vrednosti D: $-0{,}1185$; $-0{,}2370$; $-0{,}3555$ i $-0{,}4740$.

Veličinu tangencijalnog napona u nekoj tački površine preseka nalazimo kao zbir projekcija njegovih komponenata τ_y i τ_x na pravac tangente linije napona u toj tački,

$$\tau_y\frac{dx}{ds}+\tau_x\frac{dy}{ds}=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\beta-\frac{\partial\phi}{\partial x}\alpha=-\frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dn}-\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dn}=-\frac{d\phi}{dn}.$$

Dakle, veličina tangencijalnog napona u nekoj tački je jednaka izvodu funkcije ϕ po normali na liniju napona u toj tački sa znakom minus. Drukčije rečeno, gustina linija napona u nekoj tački karakteriše veličinu napona u toj tački.

Po sebi se razume da je nemoguće odrediti pomeranja tačaka štapa, dok nije određena funkcija ϕ za dati oblik njegovog preseka, ali se u tom pravcu može učiniti korak dalje, naime mogu se utvrditi osobine tih pomeranja, koje su svojstvene svim uvijenim štapovima, nezavisno od oblika konturne linije preseka.

Ako za konstante p, q i r u jednačinama (32) usvojimo vrednosti date u § 7, i to

$$p=(g_x)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}},\quad q=0,\quad r=0, \tag{74}$$

onda iz jednačina (66) i 68), s jedne, i jednačina (38) i (32), s druge strane, dobivamo

$$\left.\begin{aligned}
u &= {}^1/_2\, z\left[g_y + (g_y)_{y=o}\right]_{x=o} - {}^1/_2\, z\int_o^y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_{x=o} dy - (g_y)_{\substack{x=o\\ y=o}}\, z = \\
&= {}^1/_2\, z\left[g_y - (g_y)_{y=o}\right]_{x=o} - {}^1/_2\, z\int_o^y\left(\frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_{x=o} dy = \\
&= {}^1/_2\, z\int_o^y\left(\frac{\partial g_y}{\partial y} - \frac{\partial g_x}{\partial x}\right)_{x=o} dy = {}^1/_2\,\frac{z}{G}\int_o^y\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)_{x=o} dy = {}^1/_2\,\frac{C}{G}\, zy, \\
v &= {}^1/_2\, z\left[g_x + (g_x)_{x=o}\right]_{y=o} - {}^1/_2\, z\int_o^x\left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_{y=o} dx - (g_x)_{\substack{x=o\\ y=o}}\, x = \\
&= {}^1/_2\, z\left[g_x - (g_x)_{x=o}\right]_{y=o} - {}^1/_2\, z\int_o^x\left(\frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_{y=o} dx = \\
&= {}^1/_2\, z\int_o^x\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} - \frac{\partial g_y}{\partial y}\right)_{y=o} dx = -{}^1/_2\,\frac{z}{G}\int_o^x\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)_{y=o} dx = -{}^1/_2\,\frac{C}{G}\, zx,
\end{aligned}\right\} \quad (75)$$

$$\begin{aligned}
w &= {}^1/_2\int_o^y\left[(g_x) + (g_x)_{x=o}\right] dy + {}^1/_2\int_o^x\left[(g_y) + (g_y)_{y=o}\right] dx - \\
&- (g_x)_{\substack{x=o\\ y=o}}\, y + (g_x)_{\substack{x=o\\ y=o}}\, y = -\frac{1}{2G}\int_o^y\left[\frac{\partial\phi}{\partial x} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)_{x=o}\right] dy + \\
&+ \frac{1}{2G}\int_o^x\left[\frac{\partial\phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)_{y=o}\right] dx\,. \qquad (76)
\end{aligned}$$

Iz obrazaca (75) je jasno da je pomeranje neke tačke u ravni poprečnog preseka

$$\sqrt{u^2 + v^2} = \frac{1}{2}\,\frac{C}{G}\, zr,$$

gde je r otstojanje te tačke od težišta površine preseka. Kosinusi smera tog pomeranja sa x i y osom su y/r i $-x/r$, što znači da se ceo presek okreće oko z ose za mali ugao $-{}^1/_2 zC/G$. Veličina tog *ugla za jedinicu dužine štapa* $\theta = -{}^1/_2 C/G$ se zove *uglom torzije*. Odavde se konstanta C može izraziti pomoću tog ugla,

$$C = -2\,G\,\theta. \qquad (77)$$

Ova vrsta pomeranja je identična sa onom, koja se pretpostavlja pri proučavanju torzije u Otpornosti materijala. No, osim okretanja poprečnog preseka kao celine, tačke tog preseka pomeraju se i upravno na njegovoj ravni, pretvarajući ga u krivolinisku površinu. Kao što se vidi iz jednačine (76), oblik te površine zavisi od funkcije ϕ, i moći će se, dakle, bliže odrediti tek pošto se nađe funkcija ϕ za dati oblik preseka štapa.

Jednačina (13), koja određuje veličine glavnih napona, u datom slučaju postaje

$$\begin{vmatrix} -\sigma_i & 0 & \tau_y \\ 0 & -\sigma_i & \tau_x \\ \tau_y & \tau_x & -\sigma_i \end{vmatrix} = 0,$$

ili

$$\sigma_i^3 - (\tau_x^2 + \tau_y^2)\,\sigma_i = 0.$$

Odavde je

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_1 &= -\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = -\sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}, \\
\sigma_2 &= 0, \\
\sigma_3 &= \sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2},
\end{aligned}\right\} \quad (78)$$

i

$$\tau_{max} = {}^1/_2\,(\sigma_3 - \sigma_1) = \sqrt{\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2}.$$

14. Torzija osovine eliptičnog preseka. — Prirodno je da se, pri traženju funkcije ϕ, pokuša prvo sa polinomom, kao najprostijim oblikom. Iz diferencijalne jednačine (69) je jasno da će je zadovoljiti *svaki* polinom drugog stepena. Ako uz to damo koeficijentima tog polinoma takve vrednosti da u tačkama konture on bude jednak nuli (ili, uopšte, konstanti), taj polinom pretstavlja rešenje problema.

Ako je konturna linija elipsa,

$$\frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} - 1 = 0,$$

leva strana njene jednačine postaje, posle zamene ξ i η sa x i y, polinom drugog stepena po x i y, koji je na konturi jednak nuli. Funkcija ϕ ima dakle, oblik

$$\phi = A\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right),$$

gde je A koeficijent koji određujemo, ako uvrstimo taj izraz u diferencijalnu jednačinu (69)

$$2\,A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) = C,$$

odnosno

$$A = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C.$$

Prema tome, za eliptični presek je

$$\phi = \frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{79}$$

Iz jednačine (72′) je

$$\mathfrak{M} = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \left(\frac{1}{a^2} \iint x^2\, dx\, dy + \frac{1}{b^2} \iint y^2\, dx\, dy - \iint dx\, dy\right).$$

A uzevši u obzir da je

$$\iint x^2\, dx\, dy = I_y = {}^1/_4\, \pi a^3 b,$$

$$\iint y^2\, dx\, dy = I_x = {}^1/_4\, \pi a b^3,$$

$$\iint dx\, dy = F = \pi a b,$$

imamo

$$\mathfrak{M} = -\frac{1}{2} \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} C,$$

odakle je

$$C = -\frac{2}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \mathfrak{M} \tag{80}$$

i konačno

$$\phi = -\frac{\mathfrak{M}}{\pi a b}\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right). \tag{81}$$

Iz jednačina (68) je onda

$$\tau_x = 2 \frac{\mathfrak{M}}{\pi a^3 b} x, \qquad \tau_y = -2 \frac{\mathfrak{M}}{\pi a b^3} y, \tag{82}$$

prema jednačini (78) je

$$\tau_{max} = 2 \frac{\mathfrak{M}}{\pi a b} \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}. \tag{83}$$

Analitički *extremum* ove funkcije od x i y je u težištu površine preseka ($x = 0$, $y = 0$), ali je napon u toj tački jednak nuli. Dakle, ta tačka nije od interesa sa tehničkog gledišta, nego treba potražiti najveću vrednost napona na konturi. Ova je, očevidno, na krajevima *manje* poluose, tj. u onoj tački konture koja je *najbliža* težištu površine preseka.

Prema jednačini (77) je

$$\theta = \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} \frac{\mathfrak{M}}{G} = 4\pi^2 \frac{I_p}{F^4} \frac{\mathfrak{M}}{G}, \tag{84}$$

gde je

$$I_p = I_x + I_y = {}^1/_4\, \pi ab (a^2 + b^2),$$

a prema jednačini (76) je

$$w = \frac{\mathfrak{M}}{\pi a^3 b G} xy - \frac{\mathfrak{M}}{\pi a b^3 G} xy = \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} \frac{\mathfrak{M}}{G} xy. \tag{85}$$

Iz poslednjeg obrasca vidi se da se presek deformiše u krivu površinu, čije su izohipse hiperbole; asimptote tih hiperbola su glavne ose elipse. Za *kružni* presek ($a = b$) obrasci (83) i (84) se potpuno poklapaju sa obrascima Otpornosti materijala, dok iz obrasca (85) nalazimo $w = 0$; znači, presek u tom slučaju ostaje ravan.

Iz izraza (79) za funkciju ϕ je jasno da u tačkama krive linije

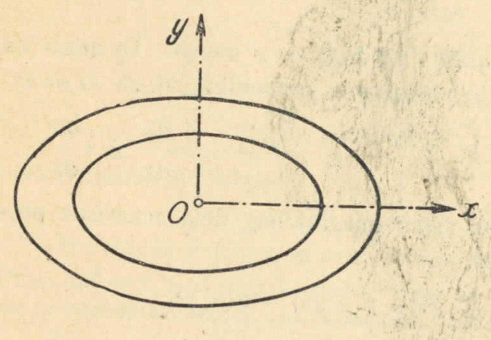
$$\left(\frac{x}{k a}\right)^2 + \left(\frac{y}{k b}\right)^2 = 1, \quad k < 1, \tag{86}$$

ta funkcija ima vrednost

$$\phi = -\frac{a^2 b^2}{2(a^2 + b^2)} C (1 - k^2) = D = \text{const.} \tag{87}$$

To znači da je jednačina (86) jednačina linija tangencijalnih napona; to su elipse slične konturnoj liniji.

Jednačina konturne linije (73) se poklapa sa konturnim uslovom (70) i (71). Dakle, na površini cilindra, čija je vodilja linija tangencijalnih napona, nema unutrašnjih sila. Ako iz osovine eliptičnog preseka napregnute na torziju, izvadimo tanju osovinu čiji je presek elipsa slična prvoj, onda se u tačkama ostalog dela naponi neće promeniti. Na taj način dobivamo šuplju osovinu, čiji presek ograničavaju dve slične elipse (sl. 11). Svi izvedeni obrasci, do (79) zaključno, važe i za taj slučaj, no za izračunavanje momenta površinskih sila na osnovama ne sme se sad koristiti obrazac (72′), jer ϕ nije nula na unutrašnjoj konturi, već ima vrednost datu jednačinom. Mora se upo-



Sl. 11

trebiti opšti obrazac (72), a integrisati po površini osnove između dve elipse

$$\pm \mathfrak{M} = \mp \iint \left(x \frac{\partial \phi}{\partial x} + y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx\, dy =$$

$$= \mp \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \iint \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) dx\, dy = \mp \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \left(\frac{I_y}{a^2} + \frac{I_x}{b^2} \right) =$$

$$= \mp \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} C \cdot {}^1\!/_4 \pi \left[\frac{1}{a^2} (a^3 b - k^4 a^3 b) + \frac{1}{b^2} (ab^3 - k^4 ab^3) \right] =$$

$$= \pm {}^1\!/_2 \pi (1 - k^4) \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2} C,$$

ili

$$C = -\frac{2}{\pi} \frac{a^2 + b^2}{a^3 b^3} \frac{\mathfrak{M}}{1 - k^4}. \tag{88}$$

Ovaj izraz se razlikuje od obrasca (80) samo koeficijentom $1/(1 - k^4)$, prema tome se i za slučaj šuplje osovine mogu primeniti obrasci (81) — (85) no uz dodavanje ovog koeficijenta.

15. Primena funkcije kompleksne promenljive. — Neka je $z = y + i y = r(\cos\theta + i \sin\theta)$ kompleksna promenljiva; onda je $w(z) = u(x, y) + i v(x, y)$ funkcija te promenljive, ako svakoj tački z u xy ravni odgovara neka određena tačka w u uv ravni. Na primer,

$$w(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x + i y} = \frac{x - i y}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - i \frac{y}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{1}{r} \cos\theta - \frac{i}{r} \sin\theta.$$

Po definiciji, funkcija kompleksne promenljive, w ima izvod u tački z, ako odnos beskonačno male promene funkcije prema beskonačno maloj promeni nezavisne promenljive z tj.

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w(z + dz) - w(z)}{dz}$$

teži određenoj vrednosti, nezavisno od načina na koji se z menja. To znači da izvod w po z pri promeni samo realnog dela nezavisne promenljive, tj. za $dz = dx$,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{u(x + dx, y) - u(x, y) + i[v(x + dx, y) - v(x, y)]}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$$

treba da bude jednak izvodu pri promeni samo imaginarnog dela nezavisne promenljive tj. za $dz = i\, dy$,

$$\frac{dw}{dz} = \frac{u(x, y + dy) - u(x, y) + i[v(x, y + dy) - v(x, y)]}{i\, dy} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{dy} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Dakle mora biti

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y},$$

odnosno

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}. \end{aligned}\right\} \tag{89}$$

Ovo su t.zv. *Cauchy-Riemann*-ove jednačine.

Diferenciranjem prve od tih jednačina po x, i druge po y i sabiranjem nalazimo

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Isto tako, diferenciranjem prve po y, a druge po x i oduzimanjem dobivamo

$$\frac{\partial v^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

To znači da su realni i imaginarni delovi funkcije kompleksne promenljive ravne harmoniske funkcije*)

Na pr., izvod pomenute funkcije z^{-1} je

$$\frac{dz^{-1}}{dz} = -z^{-2} = -\frac{1}{(x + iy)^2} = -\frac{(x - iy)^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2},$$

ili, u polarnim koordinatama,

$$\frac{dz^{-1}}{dz} = -z^{-2} = -\rho^{-2} (\cos 2\theta - i \sin 2\theta).$$

Lako se može, neposrednim diferenciranjem, proveriti da su

$$u = -\frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -\frac{1}{\rho^2} \cos 2\theta,$$

$$v = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{1}{\rho^2} \sin 2\theta$$

ravne harmoniske funkcije.

---

*) Funkcija $\psi(x, y, z)$ se zove harmoniska, ako zadovoljava t. zv. *Laplace*-ovu jednačinu, $\Delta \psi = 0$. Kad se radi o funkciji samo od dve promenljive $\psi(x, y)$, onda se funkcija zove ravnom harmoniskom, ako zadovoljava jednačinu

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Kad se uzme ϕ u obliku

$$\phi = {}^1/_4\, C\,(x^2 + y^2) + \psi\,(x, y) \tag{90}$$

i uvrsti u diferencijalnu jednačinu (69), dobiva se

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0,$$

a konturni uslov dobiva oblik

$$\psi\,(\xi, \eta) + {}^1/_4\, C\,(\xi^2 + \eta^2) = 0. \tag{91}$$

Time se problem svodi na iznalaženje ravne harmoniske funkcije ψ po konturom uslovu (91).

Uzimajući realni ili imaginarni deo od $(x + i\,y)^n$ sa različitim celim eksponentima n, može se dobiti niz ravnih harmoniskih funkcija u obliku polinoma. Kad se takva funkcija uvrsti u uslov (91), on određuje konturnu liniju, za koju je ta funkcija rešenje problema torzije. Na taj način je *Saint-Venant* proučio veliki broj ravnih harmoniskih funkcija i došao do opšteg zaključka da je najveći napon uvek u tački konturne linije, i to najbližoj težištu površine preseka, i da obrazac (84),

$$\theta = 4\,\pi^2 \frac{I_p}{F^4} \frac{\mathfrak{M}}{G},$$

koji je bio izveden za eliptični presek, može služiti, kao približni, i za druga jednostruko povezana područja.

Na primer, može se uzeti realni deo od $(x + i\,y)^3$ sa proizvoljnim koeficijentom

$$\psi = -\frac{C}{4\,a}\,(x^3 - 3\,x y^2)$$

i

$$\phi = -\frac{C}{4\,a}\,[x^3 - 3\,x y^2 - a\,(x^2 + y^2) + n\,a^3],$$

gde su a i n proizvoljne konstante. Jednačina konture je onda

$$\xi^3 - 3\,\xi\,\eta^2 - a\,(\xi^2 + \eta^2) + n\,a^3 = 0,$$

ili

$$-3\,\eta^2\,(\xi + {}^1/_3\,a) + \xi^2\,(\xi + {}^1/_3\,a) - {}^4/_3\,a\,\xi^2 + n\,a^3 =$$
$$= (\xi + {}^1/_3\,a)\,(\xi^2 - 3\,\eta^2) - {}^4/_3\,a\,(\xi^2 - {}^3/_4\,n\,a^2) = 0,$$

ili sa $n = \frac{1}{9}$:

$$(\xi + {}^1/_3\,a)\,[\xi^2 - 3\,\eta^2 - {}^4/_3\,a\,(\xi - {}^1/_3\,a)] = (\xi + {}^1/_3\,a)\,[(\xi - {}^2/_3\,a)^2 - 3\,\eta^2] =$$
$$= (\xi + {}^1/_3\,a)\,(\xi - {}^2/_3\,a - \eta\sqrt{3})\,(\xi - {}^2/_3\,a + \eta\sqrt{3}) = 0,$$

a to su jednačine strana jednakostranog trougla visine a (sl. 12, gde su nacrtane i linije tangencijalnih napona).

Najveći napon je na sredinama strana,

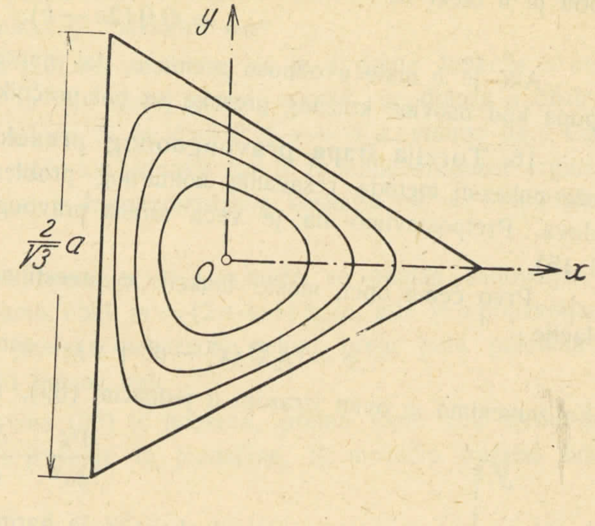
$$\tau_{max} = \frac{5}{6} \frac{\mathfrak{M}}{I_p}\,a,$$

u vrhovima je on jednak nuli. Ugao torzije je jednak

$$\theta = \frac{5}{3} \frac{\mathfrak{M}}{I_p\,G}.$$

Na sl 13 su date izohipse deformisanog preseka.

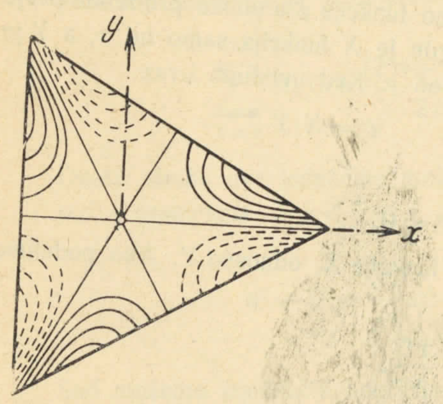
Kao drugi primer uzimamo $n = 1$ i $n = -1$; onda je u polarnim koordinatama



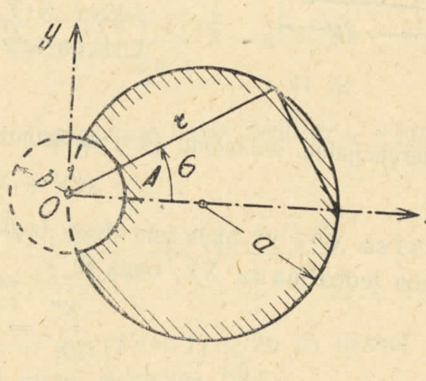
Sl. 12

$$\psi_1 = r\cos\theta, \quad \psi_2 = \frac{1}{r}\cos\theta.$$

Ako funkciji ϕ damo oblik



Sl. 13



Sl. 14

$$\phi = {}^1/_4\,C r^2 - {}^1/_2\,C a\,r\cos\theta + {}^1/_2\,C b^2 \frac{a}{r}\cos\theta - {}^1/_2\,C b^2, \tag{93}$$

gde su a i b konstante, jednačina konturne linije $\phi = 0$ imaće oblik

$$(r^2 - b^2)\,(1 - 2\,\frac{a}{r}\cos\theta) = 0.$$

To su dve jednačine, koje daju presek pokazani na sl. 14. Najveći tangencijalni napon je u tački A,

$$\tau_{max} = G\,\theta\,(2a - b).$$

Ako je b malo u odnosu prema a, taj napon je skoro dvaput veći od napona kod osovine kružnog preseka sa poluprečnikom a.

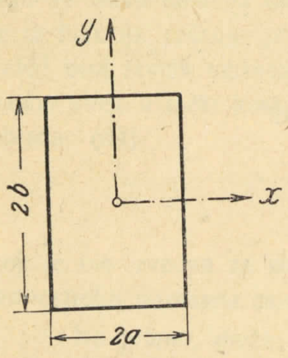
16. Torzija štapa pravougaonog preseka. — Na ovom primeru se može pokazati metoda rešavanja konturnog problema pomoću trigonometriskih redova. Pretpostavimo da je veća strana pravougaonika, $2b$, paralelna y osi (sl. 15).

Prvo ćemo opet, mesto funkcije ϕ, uvesti novu funkciju $\psi\,(x, y)$ pomoću relacije

$$\phi = {}^1/_2\, C\,(x^2 - a^2 + \psi) + \text{const.} \qquad (94)$$

Ako zamenimo ϕ ovim izrazom u jednačini (69), dobivamo

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0, \qquad (95)$$



Sl. 15

tj. funkcija ψ je harmoniska. Konturni uslov (71) postaje onda

$$\psi\,(\xi, \eta) = a^2 - \xi^2.$$

Dakle za $\xi = \pm a$ je $\psi = 0$, dok za $\eta = \pm b$ je $\psi = a^2 - \xi^2$.

Potražimo funkciju ψ u obliku proizvoda dveju fukcija $X \cdot Y$, gde je X funkcija samo od x, a Y je funkcija samo od y. Kad uvrstimo izraz

$$\psi = X \cdot Y$$

u diferencijalnu jednačinu (95) nalazimo

$$X''Y + XY'' = 0,$$

gde su sa X'' i Y'' obeleženi drugi izvodi funkcije X, odnosno Y. Ako podelimo nađenu jednačinu sa XY, onda je

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y}.$$

Leva strana ove jednačine zavisi samo od x, a desna samo od y. Ovakva jednakost je moguća samo, ako su i leva i desna strana konstantne,

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = \pm m^2,$$

gde je m konstanta.

Ako uzmemo kod m^2 gornji znak, onda je

$$X'' = m^2 X, \qquad Y'' = -m^2 Y.$$

Rešenja ovih jednačina su $\mathrm{Coh}\, mx$ i $\mathrm{Sh}\, mx$, odnosno $\cos my$ i $\sin my$. A uzmemo li donji znak, dobivamo $\cos mx$ i $\sin mx$, i $\mathrm{Coh}\, my$ i $\mathrm{Sh}\, my$. Dakle, svaki proizvod hiperboličnog sinusa ili kosinusa od mx sa trigonometriskim sinusom ili kosinusom od my, ili obrnuto, harmoniska je funkcija.

Iz konturnih uslova vidi se, međutim, da je ψ parna funkcija u odnosu na x i na y. To znači da za dati slučaj sinusi, uopšte, ne dolaze u obzir, već samo kosinusi. Najzad, iz uslova da je $\psi = 0$ za $x = \pm a$, vidimo da i $\mathrm{Coh}\, mx$ otpada, jer ta funkcija ne može biti jednaka nuli ni za jednu vrednost argumenta. Ostaje, dakle, samo proizvod iz trigonometriskog kosinusa od mx i hiperboličnog kosinusa od my.

Konturni uslov na stranama $x = \pm a$ može se odmah zadovoljiti, ako proizvoljnoj konstanti m damo oblik $m = (2n+1)\,\pi/2a$, gde je n proizvoljan ceo broj, jer će tada mx biti jednako neparnom celom broju puta polovina π za $x = \pm a$, te će $\cos ma$ biti jednak nuli.

Diferencijalna jednačina (95) je linearna, prema tome zbir njenih parcijalnih rešenja biće takođe rešenje te jednačine, tj. možemo traženu funkciju pretstaviti u obliku

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, \mathrm{Coh}\, \frac{(2n+1)\,\pi y}{2a} \cos \frac{(2n+1)\,\pi x}{2a},$$

gde su A_n dosad potpuno proizvoljni koeficijenti, a ostaje još da zadovoljimo i poslednji uslov da je $\psi = a^2 - \xi^2$ za $y = \pm b$ tj.

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n\, \mathrm{Coh}\, \frac{(2n+1)\,\pi b}{2a} \cos \frac{(2n+1)\,\pi \xi}{2a} = a^2 - \xi^2. \qquad (96)$$

Desnu stranu ove jednačine možemo na poznati način razložiti u trigonometriski red u granicama $-a < \xi < a$

$$a^2 - \xi^2 = \frac{32}{\pi^3}\, a^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \frac{(2n+1)\,\pi \xi}{2a}.$$

Sad možemo izjednačiti koeficijente uz $\cos\,(2n+1)\,\pi\xi/2a$ na desnoj strani ove jednačine sa koeficijentima na levoj strani jednačine (96)

$$A_n\, \mathrm{Coh}\, \frac{(2n+1)\,\pi b}{2n} = \frac{32}{\pi^3}\, a^2\, \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3},$$

odakle je

$$A_n = \frac{32}{\pi^3}\, a^2\, \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3\, \mathrm{Coh}\, \dfrac{(2n+1)\,\pi b}{2a}}.$$

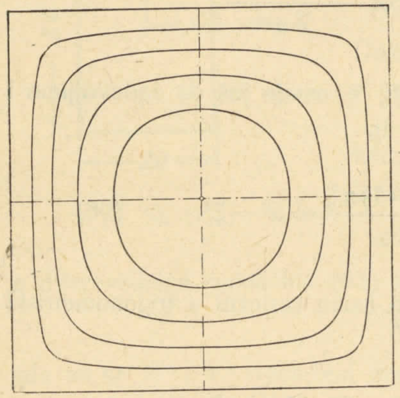
Na taj način tražena funkcija je

$$\psi(x,y)=\frac{32}{\pi^3}a^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^3\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.$$

Time je određena i funkcija ϕ, iz jednačine (94), i komponentni naponi, iz jednačina (68),

$$\left.\begin{aligned}\tau_x&=-C\left\{x-\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\right\},\\ \tau_y&=C\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\operatorname{Sh}\frac{(2n+1)\pi y}{2a}\cos\frac{(2n+1)\pi x}{2a}}{(2n+1)^2\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}.\end{aligned}\right\}\quad(97)$$

Linije napona $\phi=\text{const.}$ za kvadrat su pretstavljene na sl. 16. Izračunavanje ordinata tačaka tih linija za različite vrednosti apscisa u datom slučaju se mora vršiti sukcesivnim aproksimacijama.



Sl. 16

Najveći napon je na sredini duže strane, tj. za $x=\pm a$, $y=0$,

$$\tau_{max}=\mp Ca\left\{1-\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\right\}.$$

Za $b>a$ ovaj red brzo konvergiše i dovoljno je za praktične ciljeve zadržati samo prvi član, koji je, i u najnepovoljnijem slučaju, nešto manji od 0,4, dok je zbir svih ostalih članova manji od 0,002*). Dakle, sa greškom ispod $^1/_2\%$, je

$$\tau_{max}=\mp Ca\left[1-\frac{8}{\pi^2\operatorname{Coh}\frac{\pi b}{2a}}\right].\qquad(98)$$

*) Za $a=b$ je

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2\operatorname{Coh}\frac{(2n+1)\pi}{2a}}<\frac{2}{9}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{(2n+1)\pi}{2}}=\frac{2}{9}\frac{e^{-\frac{2}{3}\pi}}{1-e^{-\pi}}=0{,}002.$$

Torzioni moment je

$$\mathfrak{M}=2\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b}\phi(x,y)\,dx\,dy=\frac{8}{3}Cba^3-\frac{512}{\pi^5}Ca^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Th}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{(2n+1)^5}.$$

I kod ovog reda je dovoljno zadržati samo prvi član*), te, dopuštajući grešku ispod $^1/_2\%$, uzeti

$$\mathfrak{M}=C\left[\frac{8}{3}a^3b-\frac{512}{\pi^5}a^4\operatorname{Th}\frac{\pi b}{2a}\right],$$

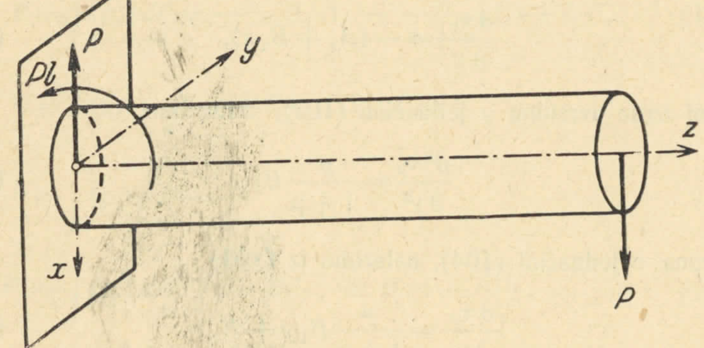
odakle je

$$2G\theta=C=\frac{\mathfrak{M}}{\left[\frac{8}{3}a^3b-\frac{512}{\pi^5}a^4\operatorname{Th}\frac{\pi b}{2a}\right]}.\qquad(99)$$

Iz obrasca (76) nalazimo za pomeranje tačaka u pravcu z ose

$$w=\frac{C}{2G}\left\{xy-\frac{32}{\pi^3}a^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)}{(2n+1)^3}\frac{\operatorname{Sh}\frac{(2n+1)\pi y}{2}}{\operatorname{Ch}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}\sin\frac{(2n+1)\pi x}{2a}\right\}.$$

17. Hipoteza Žuravskog. — Slično prethodno proučenim problemima aksijalnog naprezanja i torzije, možemo i u slučaju savijanja konzole silom na kraju (sl. 17) pokušati da i osnovne jednačine Teorije elastičnosti zadovoljimo



Sl. 17

*) Ovaj član, u najnepovoljnijem slučaju ($a=b$), jednak je $\operatorname{Th}{}^1/_2\pi=0{,}927$ dok je ostatak

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{Th}\frac{(2n+1)\pi b}{2a}}{(2n+1)^5}<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^5}<0{,}0046.$$

istom pretpostavkom koja se čini u Otpornosti materijala, pri proučavanju savijanja. Tamo se u račun uvodi samo napon σ_z upravan na poprečnom preseku i tangencijalni napon u tom preseku; za poslednji se pretpostavlja (t.zv. hipoteza Žuravskog) da je paralelan sili, tj. da ima samo komponentu τ_y, dok se za drugu njegovu komponentu τ_x, kao i za ostale komponentne napone σ_x, σ_y, i τ_z, pretpostavlja da su jednaki nuli.

Ako izostavimo zapreminske sile, tj, pretpostavimo da su

$$X=0, \quad Y=0, \quad Z=0,$$

a da su osim toga i

$$\sigma_x=0, \quad \sigma_y=0, \quad \tau_x=0, \quad \tau_z=0,$$

iz diferencijalnih jednačina sistema (B) sleduje

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z}=0, \frac{\partial \tau_y}{\partial x}=-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \tag{100}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}=0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial y}=0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y}=0, \tag{101}$$

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2}=-\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z}. \tag{102}$$

Iz grupe jednačina (101) vidi se da je

$$\sigma_z=A+Bx+Cy+A_1 z+B_1 x z, \tag{103}$$

gde su A, B, C, A_1 i B_1 proizvoljne konstante; onda druga jednačina grupe (100) daje

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x}=-(A_1+B_1 x), \tag{104}$$

a kada ovaj izraz uvrstimo u jednačinu (102), dobivamo

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2}=\frac{\mu}{1+\mu}B_1. \tag{105}$$

Vodeći računa o jednačini (104), nalazimo iz (105)

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y}=\frac{\mu}{1+\mu}B_1 y+K, \tag{106}$$

gde je K proizvoljna konstanta. Jednačine (106), (104) i prva od jednačina grupe (100) daju onda

$$\tau_y=-{}^1/_2 B_1\left(x^2-\frac{\mu}{1+\mu}y^2\right)-A_1 x+Ky+L,$$

gde je L proizvoljna konstanta.

U tačkama osnove $z=l$ je $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=1$, te je, prema jednačinama (β),

$$p_x=-{}^1/_2 B_1\left(x^2-\frac{\mu}{1+\mu}y^2\right)-A_1 x+Ky+L,$$

$$p_y=0,$$

$$p_z=A+Bx+Cy+A_1 l+B_1 l x,$$

a u tačkama osnove $z=0$ je $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=-1$, te je

$$p_x={}^1/_2 B_1\left(x^2-\frac{\mu}{1+\mu}y^2\right)+A_1 x-Ky-L,$$

$$p_y=0,$$

$$p_z=-(A+Bx+Cy).$$

Prema uslovima postavljenog problema, sile u tačkama osnove $z=l$ moraju se svesti na rezultantu P paralelnu x osi, a sile u tačkama osnove $z=0$ na rezultantu $-P$ i spreg momenta $\mathfrak{M}_y=Pl$ u xz ravni. Dakle, ako uzmemo, kao i ranije, za koordinatne ose glavne težišne ose površine leve osnove mora bit

$$0=\int_{z=0}(p_z)\,dF=-AF, \quad \text{ili } A=0,$$

$$0=\int_{z=l}(p_z)\,dF=A_1 l F, \quad \text{ili } A_1=0,$$

$$P=\int_{z=l}(p_x)\,dF=-{}^1/_2 B_1\left(I_y-\frac{\mu}{1+\mu}I_x\right)+LF, \tag{107}$$

$$0=\int_{z=0}(p_z)\,y\,dF=-C I_x, \quad \text{ili } C=0,$$

$$0=\int_{z=l}(p_z)\,y\,dF=0,$$

$$Pl=\int_{z=0}(p_z)\,x\,dF=-B I_y, \quad \text{ili } B=-\frac{Pl}{I_y},$$

$$0=\int_{z=l}(p_z)\,x\,dF=B I_y+B_1 l I_y, \quad \text{ili } B_1=-\frac{B}{l}=\frac{P}{I_y},$$

$$0=\int_{z=l}(p_x)\,y\,dF=K I_x{}^{*}), \quad \text{ili } K=0;$$

*) Ako je presek simetričan u odnosu na x osu.

iz jednačine (107) imamo

$$L = \frac{P}{2F}\left(3 - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{I_x}{I_y}\right).$$

Dakle je

$$\sigma_z = -\frac{P}{I_y}(l-z)\,x,$$

što se podudara sa poznatim obrascem iz Otpornosti materijala, i

$$\tau_y = -\frac{P}{2I_y}\left(x^2 - \frac{\mu}{1+\mu}y^2\right) + \frac{P}{2F}\left(3 - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{I_x}{I_y}\right).$$

Ostaje da vidimo još da li je ispunjen uslov zadatka da na bočnoj površini nema spoljnih sila. U tačkama te površine je $\gamma = 0$, te je, prema jednačinama (β),

$$p_x = 0, \quad p_y = 0, \quad p_z = \tau_y\,\alpha;$$

dakle, ako obeležimo koordinate tih tačaka, kao i pre, sa ξ i η, u njima mora biti ili $\alpha = 0$, ili

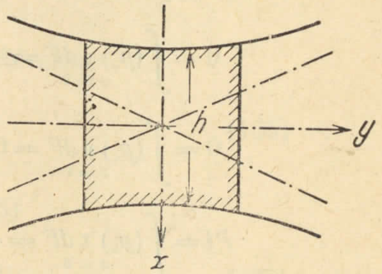
$$\xi^2 - \frac{\mu}{1+\mu}\eta^2 = \frac{I_y}{F}\left(3 - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{I_x}{I_y}\right).$$

To znači da konturnu liniju preseka treba da sačinjavaju dve prave paralelne x osi i dve grane hiperbole (sl. 18):

$$\xi^2 - \frac{\mu}{1+\mu}\eta^2 = h^2,$$

čije se poluose odnose kao $\sqrt{1 + 1/\mu}$.

Iz dobivenog rezultata se vidi da je pretpostavka učinjena o naponima opravdana samo za presek dat na sl. 18, dok za ostale preseke ona ne važi; mora se, dakle, ispitati neka druga, šira pretpostavka.



Sl. 18

18. Problem savijanja. — Proširimo pretpostavku **t. 17** na taj način, što nećemo ograničavati pravac tangencijalnog napona u poprečnom preseku uslovom da bude paralelan x osi. To znači da se, sem σ_z i τ_y, javlja i komponentni napon τ_x. Za ostala tri komponentna napona, σ_x, σ_y i τ_z, pretpostavljamo, kao i pre, da su jednaki nuli. Osim toga, pretpostavljamo, kao i pre, da su zapreminske sile jednake nuli.

Ako unesemo te pretpostavke, naime

$$\sigma_x = 0, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_z = 0,$$
$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = 0,$$

u sistem diferencijalnih jednačina (B), nalazimo

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = -\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}, \tag{108}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x\,\partial y} = 0, \tag{109}$$

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y\,\partial z}, \quad \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\mu}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z\,\partial x}. \tag{110}$$

Iz jednačina grupe (109) sledi, kao i u prednjem članu,

$$\sigma_z = A + Bx + Cy + (A_1 + B_1 x + C_1 y)\,z, \tag{111}$$

dok jednačine grupa (108) i (110) treba da odrede τ_x i τ_y.

Iz uslova na osnovama, kao i u **t. 17**, dobivamo

$$\left.\begin{aligned}
0 &= \int_{z=0} (p_z)\,dF = A\,F, && \text{ili} \quad A = 0\\
0 &= \int_{z=l} (p_z)\,dF = A_1\,l\,F, && \text{ili} \quad A_1 = 0\\
0 &= \int_{z=0} (p_z)\,y\,dF = C\,I_x, && \text{ili} \quad C = 0\\
0 &= \int_{z=l} (p_z)\,y\,dF = C_1\,l\,I_x, && \text{ili} \quad C_1 = 0\\
P\,l &= \int_{z=0} (p_z)\,x\,dF = -B\,I_y, && \text{ili} \quad B = -\frac{P\,l}{I_y}\\
0 &= \int_{z=l} (p_z)\,x\,dF = (B + B_1\,l)\,I_y, && \text{ili} \quad B_1 = -\frac{B}{l} = \frac{P}{I_y}
\end{aligned}\right\} \tag{112}$$

a, osim toga, i

$$P = \int \tau_y\,dF, \quad 0 = \int \tau_x\,dF, \quad 0 = \int (x\,\tau_x - y\,\tau_y)\,dF. \tag{113}$$

Jednačine (112) određuju konstante u obrascu (111), koji onda dobiva oblik

$$\sigma_z = -\frac{P\,(l-z)}{I_y}\,x. \tag{114}$$

Uslov da na bočnoj površini nema spoljnih sila, kao i u **t. 13**, postaje

$$\tau_y\,\alpha + \tau_x\,\beta = 0. \tag{115}$$

Iz ovog uslova i jednačina (113) odredićemo, zatim, proizvoljne konstante integrala jednačina (108) i (110).

Obrazac (114) određuje normalni napon nezavisno od oblika konture poprečnog preseka grede. On se potpuno podudara sa zaključcima Otpornosti materijala, koji na taj način, u pogledu normalnih napona, nalaze svoju potvrdu. Međutim, za određivanje tangencijalnog napona, odnosno njegovih komponenata τ_x i τ_y, treba rešiti diferencijalne jednačine (108) i (110) u vezi konturnog uslova (113), tj. treba, kao i u **t. 13,** tražiti rešenje posebno za svaki zadati oblik konturne linije preseka.

Prve dve jednačine grupe (108) ukazuju na to, da su τ_x i τ_y funkcije samo od x i y, kao i u **t. 13,** dok se treća jednačina te grupe, ako se u obzir uzme izraz (114), može napisati

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial x} + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = -\frac{P}{I_y} x,$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\tau_y + \frac{P}{2 I_y} x^2\right) + \frac{\partial \tau_x}{\partial y} = 0.$$

Slično **t. 13,** možemo ovu jednačinu zadovoljiti sa

$$\tau_x = -\frac{\partial \chi}{\partial x}$$

$$\tau_y + \frac{P}{2 I_y} x^2 = \frac{\partial \chi}{\partial y} - f(y),$$

gde je χ zasada proizvoljna funkcija od x i y, a $f(y)$ proizvoljna funkcija samo od y*); ove jednačine možemo napisati u obliku

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \tau_y &= \frac{\partial \chi}{\partial y} - \frac{P}{2 I_y} x^2 - f(y). \end{aligned}\right\} \tag{116}$$

Uzevši u obzir obrazac (114), možemo jednačine grupe (110) napisati

$$\frac{\partial^2 \tau_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_x}{\partial y^2} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \tau_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tau_y}{\partial y^2} = -\frac{1}{1+\mu} \frac{P}{I_y}.$$

A unesemo li u te jednačine izraze (116), imaćemo

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(-\frac{\partial \chi}{\partial x}\right) = 0,$$

*) Ovu funkciju je uveo ruski inženjer *S. P. Timošenko* 1913 g. i time znatno uprostio rešavanje ovog problema.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right) - \frac{P}{I_y} - f''(y) = -\frac{1}{1+\mu} \frac{P}{I_y},$$

ili, ako promenimo red diferenciranja,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}\right) = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{P}{I_y} + f''(y),$$

odnosno

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{P}{I_y} y + f'(y). \tag{117}$$

Na taj način sveli smo, kao i u **t. 13,** određivanje komponenata tangencijalnog napona na iznalaženje funkcije χ, koja u tačkama površine preseka treba da zadovolji diferencijalnu jednačinu (117), a u tačkama konturne linije uslov (115). Kad uvrstimo u taj uslov izraze (116) za τ_x i τ_y i zamenimo kao u **t. 13,** $\alpha = d\eta/ds$ i $\beta = -d\xi/ds$, on postaje

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \left[\frac{\partial \chi}{\partial \eta} - \frac{P}{2 I_y} \xi^2 - f(\eta)\right] \frac{d\eta}{ds} = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial \chi}{\partial \xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial \chi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{ds} = \left[\frac{P}{2 I_y} \xi^2 + f(\eta)\right] \frac{d\eta}{ds},$$

ili

$$\frac{d\chi}{ds} = \left[\frac{P}{2 I_y} \xi^2 + f(\eta)\right] \frac{d\eta}{ds}. \tag{118}$$

Rešenja ovog konturnog problema pronađena su za više konturnih linija, od kojih se u tehnici primenjuju krug, kružni prsten i pravougaonik. Za najvažnije profile, oblika „dvogubo te" i njemu slične, problem je i do danas ostao nerešen.

19. Greda kružnog preseka. — Jednačina konturne linije u ovom slučaju ima oblik

$$\xi^2 + \eta^2 = R^2. \tag{119}$$

Iskoristimo sad činjenicu što je funkcija $f(y)$ ostala dosad proizvoljna i dajmo joj oblik takav, da konturni uslov (118) postane što prostiji. Uzmimo naime da je

$$f(y) = \frac{P}{2 I_y}(y^2 - R^2). \tag{120}$$

Onda će na konturi, prema jednačini (119), biti

$$f(\eta) = \frac{P}{2 I_y}(\eta^2 - R^2) = -\frac{P}{2 I_y} \xi^2,$$

a konturni uslov (118) postaje

$$\frac{d\chi}{ds} = 0,$$

tj. funkcija χ na konturi postaje konstanta. Kako dodavanje proizvoljne konstante funkciji χ ne utiče na njene izvode, odnosno komponentne napone, možemo smatrati da je na konturi

$$\chi(\xi, \eta) = 0. \tag{121}$$

Diferencijalna jednačina (117) dobiva onda oblik

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} = \frac{1+2\mu}{1+\mu} \frac{P}{I_y} y. \tag{122}$$

Pokušajmo prvo da nađemo rešenje u najprostijem obliku cele funkcije. Ta funkcija ne bi bila, prema jednačini (122) stepena nižeg od trećeg u odnosu na y. Prema prvoj od jednačina grupe (113) treba očekivati da će τ_y biti parna funkcija od x i y, što znači, prema drugoj od jednačina grupe (116), da će χ biti parna funkcija od x, a neparna u odnosu na y. Prema tome imamo osnova da pokušamo sa funkcijom oblika

$$\chi = (A + Bx^2 + Cy^2)\, y, \tag{123}$$

gde su A, B i C proizvoljne konstante, čijim izborom treba zadovoljiti diferencijalnu jednačinu (122) i konturni uslov (121).

Kad zamenimo u izrazu (123) y sa η, a ξ^2 sa $R^2 - \eta^2$ i uvrstimo u uslov (121), dobivamo

$$[A + B(R^2 - \eta^2) + C\eta^2]\, \eta = 0.$$

Taj uslov mora biti zadovoljen u svakoj tački konturne linije, tj. za sve moguće vrednosti η, a to znači da mora biti

$$B = C, \quad A = -BR^2,$$

dakle

$$\chi = -B(R^2 - x^2 - y^2)\, y.$$

Ako unesemo ove izraze u diferencijalnu jednačinu (122), nalazimo

$$B = \frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y},$$

odnosno

$$\chi = -\frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y} (R^2 - x^2 - y^2)\, y,$$

i, prema jednačinama (116) i (120),

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{1+2\mu}{4(1+\mu)} \frac{P}{I_y} xy, \\ \tau_y &= \frac{1}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y} \left[(3+2\mu)(R^2 - x^2) - (1-2\mu)\, y^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{124}$$

Ukupni tangencijalni napon biće $\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2}$. Da bismo našli tačke preseka gde je najveći, potražićemo *maximum* od $(\tau_x^2 + \tau_y^2)$, odnosno od

$$\left\{ 4(1+2\mu)^2 x^2 y^2 + [(3+2\mu)(R^2 - x^2) - (1-2\mu)\, y^2]^2 \right\}.$$

Ako parcijalne izvode ove funkcije po x i y izjednačimo sa nulom, dobivamo dve jednačine za iznalaženje koordinata x_i i y_i tražene tačke,

$$2(1+2\mu)\, x_i y_i^2 - [(3+2\mu)(R^2 - x_i^2) - (1-2\mu)\, y_i^2](3+2\mu)\, x_i = 0,$$
$$2(1+2\mu)\, x_i^2 y_i - [(3+2\mu)(R^2 - x_i^2) - (1-2\mu)\, y_i^2](1-2\mu)\, y_i = 0.$$

Odavde nalazimo dva rešenja: $x_1 = 0$, $y_1 = 0$ i $x_2 = R$, $y_2 = 0$. Drugom rešenju odgovara $\tau_x = 0$ i $\tau_y = 0$; prema tome, najveći tangencijalni napon treba tražiti u tački $x_1 = 0$, $y_1 = 0$, tj. u težištu površine preseka gde je on

$$(\tau_y)_{max} = \frac{3+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{PR^2}{I_y}. \tag{125}$$

Ali treba još proveriti, da li nije granična vrednost napona na konturi veća od nađenog analitičkog *maximum*-a. U tačkama konture je

$$x = R\cos\theta, \quad y = R\sin\theta,$$

te je

$$\tau_x = -\frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y} R^2 \sin 2\theta,$$

$$\tau_y = \frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y} R^2 (1 - \cos 2\theta),$$

a ukupni tangencijalni napon je

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \frac{1+2\mu}{8(1+\mu)} \frac{P}{I_y} R^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (1 - \cos 2\theta)^2}.$$

Izjednačimo li sa nulom izvod po θ funkcije $[\sin^2 2\theta + (1 - \cos 2\theta)^2]$, nalazimo za ugao θ_i

$$\sin 2\theta_i \cos 2\theta_i + (1 - \cos 2\theta_i) \sin 2\theta_i = 0.$$

Rešenja ove jednačine su: $\theta_1 = 0$ i $\theta_2 = {}^1/_2\pi$. Prvom odgovara $\tau_x = 0$, $\tau_y = 0$, a drugom

$$\tau_x = 0, \quad \tau_y = \frac{1+2\mu}{4(1+\mu)} \frac{P}{I_y} R^2,$$

koji je, očigledno, manji od (125).

Prema obrascu Otpornosti materijala, najveći tangencijalni napon trebalo bi da bude

$$\tau_{max} = \frac{4}{3\pi} \frac{P}{R^2}.$$

Odnos njegove vrednosti prema izrazu (125) za $\mu = {}^1/_4$ jeste 0,95; dakle, upotreba ovog obrasca u datom slučaju unosi grešku do 5%.

Kad bismo na preseku nacrtali niz krivih linija (sl. 19), čije tangente u svakoj tački padaju u pravac tangencijalnog napona, za diferencijalnu jednačinu tih linija bismo dobili

$$\frac{dx}{dy} = -\frac{(3+2\mu)(R^2-x^2)-(1-2\mu)y^2}{2(1+2\mu)xy},$$

odnosno

$$-2x\,dx - \frac{3+2\mu}{1+2\mu}\,\frac{R^2-x^2}{y}\,dy + \frac{1-2\mu}{1+2\mu}\,y\,dy = 0.$$

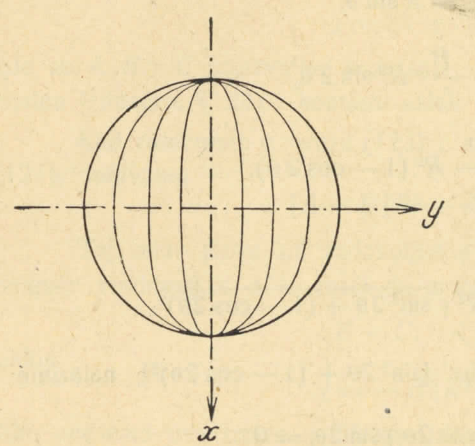
Do integrala ove diferencijalne jednačine doćićemo ako je pomnožimo nekom funkcijom $F(x, y)$, i odredimo ovu funkciju iz uslova da se leva strana jednačine pretvori u potpuni diferencijal. Taj je uslov

$$\frac{\partial}{\partial y}\Big[-(F(x,y)\cdot 2x\Big] = \frac{\partial}{\partial x}\Big[F(x,y)\cdot\Big(-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\,\frac{R^2-x^2}{y} + \frac{1-2\mu}{1+2\mu}\,y\Big)\Big],$$

ili

$$-2x\,\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} =$$

$$= F(x,y)\cdot\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\,\frac{2x}{y} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\cdot\Big(-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\,\frac{R^2-x^2}{y} + \frac{1-2\mu}{1+2\mu}\,y\Big).$$



Sl. 19

Uzmimo da je $\partial F(x, y)/\partial x = 0$, tj. da je F funkcija samo od y; onda iz gornje jednačine sledi

$$\frac{dF(y)}{F(y)} = -\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\cdot\frac{1}{y},$$

ili

$$\ln F(y) = -\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\ln y,$$

tj.

$$F(y) = y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}}.$$

Dakle, našu diferencijalnu jednačinu treba pomnožiti nađenom funkcijom.

$$-2x\,dx\cdot y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}} - (R^2-x^2)\,\frac{3+2\mu}{1+2\mu}\,dy\cdot y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}-1} +$$

$$+\frac{1-2\mu}{1+2\mu}\,dy\cdot y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}+1} = 0.$$

Odavde izlazi

$$d(R^2-x^2)\cdot y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}} + (R^2-x^2)\,dy^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}} - dy^{-\frac{1-2\mu}{1+2\mu}} = 0,$$

ili

$$d\Big((R^2-x^2)\,y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}}\Big) - dy^{-\frac{1-2\mu}{1+2\mu}} = 0.$$

A odavde je

$$(R^2-x^2)\,y^{-\frac{3+2\mu}{1+2\mu}} - y^{-\frac{1-2\mu}{1+2\mu}} = C,$$

gde je C konstanta, ili

$$R^2 - x^2 - y^2 = C\,y^{\frac{3+2\mu}{1+2\mu}}.$$

20. Greda pravougaonog preseka. — U **t. 19** dali smo proizvoljnoj funkciji $f(y)$, u obrascu (116), takvu vrednost da je desna strana konturnog uslova (118) postala nula i uslov je, na taj način, dobio najprostiji oblik (121). Ovde ćemo, zgodnim izborom te funkcije, udesiti da postane nula desna strana diferencijalne jednačine (117), i time zadatak svesti na iznalaženje harmoniske funkcije sa zadatim uslovom na konturi, slično **t. 16.**

Uzmimo, naime,

$$f(y) = -\frac{\mu}{1+\mu}\,\frac{P}{2I_y}\,(y^2 - C), \tag{126}$$

gde je C proizvoljna konstanta. Jednačina (117) postaje onda

$$\frac{\partial^2\chi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\chi}{\partial y^2} = 0, \tag{126'}$$

a izraze (116) možemo napisati

$$\left.\begin{aligned} \tau_x &= -\frac{P}{2I_y}\,\frac{\partial\chi}{\partial x}, \\ \tau_y &= \frac{P}{2I_y}\Big[\frac{\partial\chi}{\partial y} - x^2 + \frac{\mu}{1+\mu}(y^2 - C)\Big]. \end{aligned}\right\} \tag{127}$$

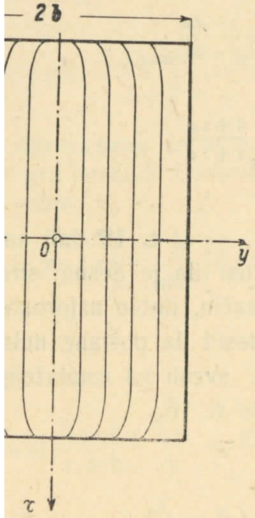
Konturni uslov (118) za slučaj pravougaonog preseka (sl. 20) je

$$\text{za } x = \pm a: \qquad \frac{\partial\chi}{\partial n} = a^2 - \frac{\mu}{1+\mu}(y^2 - C); \tag{128}$$

$$\text{za } y = \pm b: \qquad \frac{\partial\chi}{\partial x} = 0. \tag{129}$$

Kao ono u **t. 16,** tražimo funkciju χ u obliku proizvoda funkcija samo od x i samo od y i dolazimo na isti način do zaključka, da to mora biti proizvod iz hiperboličnog sinusa ili kosinusa od mx i trigonometriskog sinusa ili kosinusa

ıuto, — gde je m proizvoljna konstanta. Iz uslova (128) zaklju-
u **t. 16,** da funkcija χ mora biti parna u odnosu na x, a neparna
, dok iz uslova (129) zaključujemo da hiperbolične funkcije od y ne mogu doći u obzir. Dolaze prema tome u obzir samo proizvodi iz trigonometriskog sinusa od my i hiperboličnog kosinusa od mx. Isto tako, zadovoljavamo uslov (129) uzevši $m = n\pi/b$, gde je n ceo broj.



Sl. 20

Dakle, tražena funkcija mora imati oblik

$$\chi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{Coh} n\pi x/b \cdot \sin n\pi y/b, \quad (130)$$

gde su A_n proizvoljni koeficijenti. Da bismo lakše zadovoljili uslov (128) dodaćemo izrazu (130) još član $a^2 y$, koji ne utiče ni na diferencijalnu jednačinu (126'), ni na uslov (129). Uzmimo dak-

$$\chi = a^2 y + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{Coh} n\pi x/b \cdot \sin n\pi y/b. \quad (131)$$

ıje tada

$$\frac{\pi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} n A_n \operatorname{Coh} \frac{n\pi a}{b} \cos \frac{n\pi \eta}{b} = -\frac{\mu}{1+\mu}(\eta^2 - C) \quad (132)$$

ıve jednačine može se pretstaviti u obliku trigonometriskog reda

$$\eta^2 = \frac{b^2}{\pi^2}\left[{}^1/_3\,\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos n\pi \frac{\eta}{b} \right]. \quad (133)$$

jednačini (132), koja je dosad bila proizvoljna, dajmo vrednost ıesimo izraz (133) u desnu stranu jednačine (132). Izjednačujući ıed $\cos n\pi\eta/b$ s leve i desne strane, nalazimo

$$A_n = -\frac{\mu}{1+\mu} \frac{4b^3}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{n^3 \operatorname{Coh} n\pi a/b},$$

Onda iz jednačina (127) imamo za komponentne napone

$$\tau_x = \frac{\mu}{1+\mu} \frac{P}{2I_y} \frac{4b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{Sh} n\pi x/b}{\operatorname{Ch} n\pi a/b} \sin n\pi y/b, \quad (134)$$

$$\tau_y = \frac{P}{2I_y}\left\{ a^2 - x^2 - \frac{\mu}{1+\mu}\left[\frac{b^2}{3} - y^2 + \frac{4}{\pi^2} b^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \frac{\operatorname{Ch} n\pi x/b}{\operatorname{Ch} n\pi a/b} \cos n\pi y/b \right]\right\}. \quad (135)$$

Dobiveni rezultat (135) za τ_y razlikuje se od obrasca Otpornosti materijala članom u [ ]. Najveći tangencijalni napon τ_y javlja se u tačkama neutralne ose, i to za $y = \pm b$. Za $\mu = {}^1/_4$ i za razne odnose a/b dat je odnos njegove vrednosti prema onoj iz Otpornosti materijala u ovoj tablici

$a/b =$	2	1	$^1/_2$	$^1/_4$
	1,033	1,126	1,396	1,988

Iz tih brojeva se vidi da je greška elementarnog obrasca manja od $3^0/_0$ za običan odnos $a/b > 2$; čak i za $a = b$ taj obrazac ne daje apsurdne rezultate. Za $a < b$ greška je znatna, ali za takve grede je i sam tangencijalni napon toliko neznatan, da se, uopšte, može zanemariti.

Tangencijalni napon τ_x najveći je za $x = \pm a$. Kad izjednačimo sa nulom izvod od izraza (134) po y i rešimo aproksimacijama dobivenu transcendentnu jednačinu, naći ćemo dva korena bliska $\pm {}^2/_3\, b$ i napon

$$(\tau_x)_{max} = -\frac{\mu}{1+\mu} \frac{P}{2I_y} \frac{4b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{Th} n\pi \frac{a}{b} \sin \frac{2}{3} n\pi.$$

Za $a > b$ je

$$0{,}9963 < \operatorname{Th} n\pi a/b < 1,$$

te je

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \operatorname{Th} n\pi \frac{a}{b} \cdot \sin \frac{2}{3} n\pi < -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{2}{3} n\pi < 1{,}0187$$

Odnos $(\tau_x)_{max}$ prema $(\tau_y)_{max}$ je

$$\frac{(\tau_x)_{max}}{(\tau_y)_{max}} < 0{,}08257\left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

što znači da je, sa tehničkog gledišta, zanemarivanje ove komponente tangencijalnog napona potpuno opravdano.

Diferencijalnu jednačinu linija tangencijalnih napona za pravougaoni presek dobivamo zamenjujući τ_x i τ_y njihovim izrazima (134) i (135) u jednačini

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\tau_y}{\tau_x}.$$

Integral ove jednačine nije poznat, ali su nađena njena numerička rešenja za različite odnose strana*) a/b. Na sl. 20 su nacrtane linije napona za pravougaonik sa odnosnom strana $a/b = 3/2$.

21. Greda prstenastog preseka. — Uzimamo i u ovom slučaju diferencijalnu jednačinu opet u obliku (126') a proizvoljnu konstantu u izrazu (126) $C = 0$. Konturni uslov (118) je onda (sl. 21)

$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{P}{2I_y}\left(\xi^2 - \frac{\mu}{1+\mu}\eta^2\right)\frac{d\eta}{ds}.$$

To znači, za krug $\xi^2 + \eta^2 = a_1^2$ biće

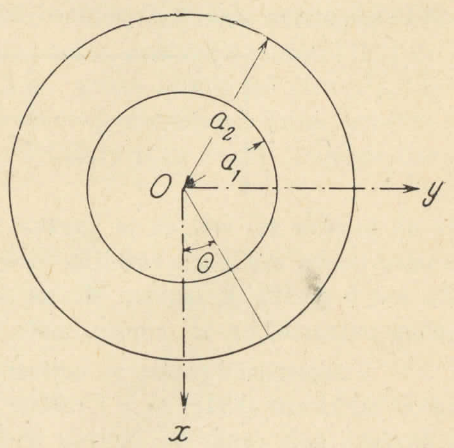
$$\frac{d\chi}{ds} = \frac{P}{2I_y}\left(a_1^2 - \frac{1+2\mu}{1+\mu}\eta^2\right)\frac{d\eta}{ds},$$

ili

$$\chi = \frac{P}{2I_y}\left[a_1^2 - \frac{1+2\mu}{3(1+\mu)}\eta^2\right]\eta. \qquad (136)$$

Isto tako će za krug $\xi^2 + \eta^2 = a_2^2$ biti

$$\chi = \frac{P}{2I_y}\left[a_2^2 - \frac{1+2\mu}{3(1+\mu)}\eta^2\right]\eta. \qquad (137)$$



Sl. 21

Iz ovih konturnih uslova vidimo da tražena harmoniska funkcija χ mora biti neparna u odnosu na y, a parna u odnosu na x; ovo se vidi ako u izrazima (136) i (137) zamenimo a_1^2, odnosno a_2^2 sa $\xi^2 + \eta^2$. Tražene osobine imaju, na pr., imaginarni delovi funkcija kompleksne promenljive $z = x + iy$,

$$\frac{y}{x^2+y^2};\quad y;\quad 3x^2y - y^3.$$

Uzmimo χ u obliku

$$\chi = \frac{P}{2I_y}\left[\frac{Ay}{x^2+y^2} + By + C(3x^2y - y^3)\right], \qquad (138)$$

gde su A, B i C proizvoljne konstante.

*) Numerička rešenja je dao mladi srpski naučnik Ing. *D. Rašković*, iz čije je doktorske teze pozajmljena i sl. 20.

Funkcija data izrazom (138) je, kao što znamo, harmoniska. Pokušajmo da izborom koeficijenata A, B i C zadovoljimo konturne uslove. Kad unesemo izraz (138) u uslove (136) i (137), dobivamo

$$A\frac{\eta}{a_1^2} + B\eta + C(3a_1^2\eta - 4\eta^3) = a_1^2\eta - \frac{1+2\mu}{3(1+\mu)}\eta^3,$$

$$A\frac{\eta}{a_2^2} + B\eta + C(3a_2^2\eta - 4\eta^3) = a_2^2\eta - \frac{1+2\mu}{3(1+\mu)}\eta^3;$$

odavde je

$$\frac{A}{a_1^2} + B + 3a_1^2C = a_1^2;\quad \frac{A}{a_2^2} + B + 3a_2^2C = a_2^2;\quad -4C = -\frac{1+2\mu}{3(1+\mu)},$$

i

$$A = -\frac{3+2\mu}{4(1+\mu)}a_1^2a_2^2,\quad B = \frac{3+2\mu}{4(1+\mu)}(a_1^2 + a_2^2),\quad C = \frac{1+2\mu}{12(1+\mu)}.$$

Dakle je

$$\chi = \frac{P}{8(1+\mu)I_y}\left\{(3+2\mu)\left(a_1^2 + a_2^2 - \frac{a_1^2a_2^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{1+2\mu}{3}(3x^2 - y^2)\right\}y,$$

i, prema (116),

$$\left.\begin{aligned}\tau_x &= -\frac{P}{4(1+\mu)I_y}\left[\frac{(3+2\mu)a_1^2a_2^2}{(x^2+y^2)^2} + 1 + 2\mu\right]xy,\\ \tau_y &= \frac{P}{8(1+\mu)I_y}\left\{(3+2\mu)\left[a_1^2 + a_2^2 - (x^2-y^2)\left(1 + \frac{a_1^2a_2^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\right] - 4y^2\right\}.\end{aligned}\right\} \qquad (139)$$

U slučaju *vrlo tanke* cevi nalazimo iz (139) sa $y/x = \operatorname{tg}\theta$, zanemarujući male veličine reda $(a_2 - a_1)/a_1$,

$$\tau_x = -\frac{Pa_2^2}{2I_y}\sin 2\theta,\qquad \tau_y = \frac{Pa_2^2}{I_y}\sin^2\theta.$$

Ukupni tangencijalni napon je

$$\sqrt{\tau_x^2 + \tau_y^2} = \frac{Pa_2^2}{I_y}\sin\theta,$$

a njegova najveća vrednost, i to za $\theta = {}^1/_2\pi$,

$$\tau_{max} = \frac{Pa_2^2}{I_y}$$

podudara se sa rezultatima Otpornosti materijala.

Za *debelu* cev zaključak bi bio drugojačiji. Na pr., za $a_1 = 0{,}1 a_2$ nalazimo iz (139), za $x = 0$, $y = a_1$ i $\mu = 1/4$,

$$\tau_{max} = 0{,}703 \frac{P a_2^2}{I_y},$$

dok bismo, iz obrasca Otpornosti materijala, našli

$$\tau_{max} = 0{,}370 \frac{P a_2^2}{I_y}.$$

22. Pomeranja tačaka grede. — U posmatranom slučaju jednačine (38) daju za komponentne deformacije

$$\left.\begin{aligned} e_x &= \frac{\mu P}{E I}(l - z)\, x, & g_x &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_x, \\ e_y &= \frac{\mu P}{E I}(l - z)\, x, & g_y &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_y, \\ e_z &= -\frac{P}{E I}(l - z)\, x, & g_z &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{140}$$

a iz jednačina (32) nalazimo za pomeranja tačaka

$$u = \frac{P}{E I}\left\{\frac{\mu}{2}[(l - x)\, x^2 - l y^2] + \frac{1}{6}(3 l - z)\, z^2\right\} +$$

$$+ \frac{1+\mu}{E} z \left[(\tau_y)_{x=0} - (\tau_y)_{\substack{x=0\\y=0}} - \int_0^y \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x}\right)_{x=0} dy \right],$$

$$v = \frac{\mu P}{E I}(l - z) x y + \frac{1+\mu}{E} z \left[(\tau_x)_{y=0} + (\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}} - \right.$$

$$\left. - \int_0^x \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial y}\right)_{y=0} dx \right] - \frac{2(1+\mu)}{E}(\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}}\, x,$$

$$w = \frac{P x}{E I}\left[- 1/2 (2 l - z)\, z + 1/6\, \mu x^2 \right] +$$

$$+ \frac{1+\mu}{E}\left\{ \int_0^y [\tau_x + (\tau_x)_{x=0}]\, dy + \int_0^x [\tau_y + (\tau_y)_{y=0}]\, dx - 2 (\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}}\, y \right\} +$$

$$+ \frac{2(1+\mu)}{E}(\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}},$$

gde su za konstante uzete vrednosti

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad p = (g_x)_{\substack{x=0\\y=0\\z=0}} = \frac{2(1+\mu)}{E}(\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad q = 0, \quad r = 0.$$

Kad uzmemo u obzir da je, prema jednačinama (116) i (117),

$$\frac{\partial \tau_y}{\partial y} - \frac{\partial \tau_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2} - f'(y) = \frac{\mu}{1+\mu}\frac{P}{I} y,$$

i, prema tome,

$$\int_0^y \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x}\right)_{x=0} dy = \int_0^y \left[\left(\frac{\partial \tau_y}{\partial y}\right)_{x=0} - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{P}{I} y \right] dy =$$

$$= (\tau_y)_{x=0} - (\tau_y)_{\substack{x=0\\y=0}} - \frac{\mu}{1+\mu}\frac{P}{I}\frac{y^2}{2},$$

$$\int_0^x \left(\frac{\partial \tau_y}{\partial y}\right)_{y=0} dx = \int_0^x \left(\frac{\partial \tau_x}{\partial x}\right)_{y=0} dx = (\tau_x)_{y=0} - (\tau_x)_{\substack{x=0\\y=0}},$$

nalazimo za pomeranja tačaka

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{P}{E I}\left\{ 1/2\, \mu (l - z)(x^2 - y^2) + 1/6 (3 l - z)\, z^2 \right\}, \\ v &= \frac{\mu P}{E I}(l - z)\, x y, \\ w &= -\frac{P x}{E I}\left\{ (l - 1/2\, z) - 1/6\, \mu x^2 \right\} + \\ &+ \frac{1+\mu}{E}\left\{ \int_0^y [\tau_x + (\tau_x)_{x=0}]\, dy + \int_0^x [\tau_y + (\tau_y)_{y=0}]\, dx \right\}. \end{aligned}\right\} \tag{141}$$

Težišna osa grede prelazi u „elastičnu liniju", čije se krivine u $x z$ i $y z$ ravnima mogu, kao što znamo, usled malih veličina deformacija, smatrati da su jednake $(\partial^2 u/\partial z^2)_{\substack{x=0\\y=0}}$ i $(\partial^2 v/\partial z^2)_{\substack{x=0\\y=0}}$. Ove vrednosti mogu se naći iz prvih dveju jednačina (141) diferenciranjem

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} = \frac{P(l - z)}{E I}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = 0. \tag{142}$$

Dakle, elastična linija leži u $x z$ ravni, a obrazac za njenu krivinu podudara se sa onim iz Otpornosti materijala, nađenim iz *Bernoulli*-jeve hipoteze. Samu jednačinu elastične linije nalazimo iz prve jednačine grupe (141) za $x = 0$ i $y = 0$

$$u_0 = \frac{P}{6 E I}(3 l - z)\, z^2.$$

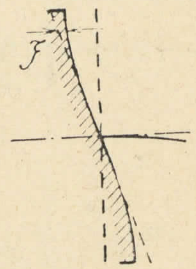
Dilatacija uzdužnog vlakna je, prema trećoj jednačini grupe (140) i prvoj od jednačina grupe (142),

$$e_z = -\frac{P}{EI}(l-z)\,x = -\frac{x}{\rho},$$

što se opet potpuno podudara sa obrascem Otpornosti materijala. Ravan $x=0$ ne izdužuje se, niti skraćuje, tj. ostaje „neutralna", a dilatacija nekog vlakna proporcionalna je njegovom otstojanju od neutralne ravni i krivini elastične linije u tom preseku.

No, *suprotno* pretpostavci Otpornosti materijala, elastična linija nije upravna na poprečnom preseku savijene grede, nego sa njim obrazuje ugao koji se od pravog razlikuje za

$$(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{2(1+\mu)}{E}(\tau_y)_{\substack{x=0\\y=0}}.$$



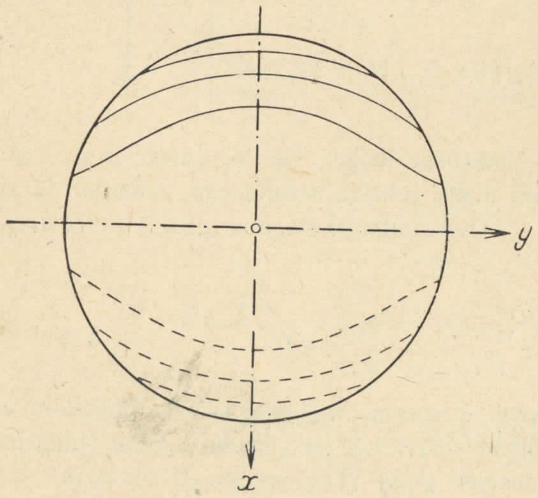
Sl. 22

Na primer, za kružni presek je ta razlika

$$(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}} = (3+2\mu)\frac{P}{EF},$$

a za pravougaoni presek

$$(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}} = \frac{3(1+\mu)}{4}\frac{P}{EF}\left\{1-\frac{\mu}{1+\mu}\frac{b^2}{a^2}\left[\frac{1}{3}+\frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2\,\mathrm{Ch}\,n\pi\,a/b}\right]\right\}.$$



Sl. 23

Vrednosti izraza u $\{\ \}$ date su, za razne odnose a/b, u ovoj tablici

$a/b=$	$^1/_2$	1	2
$\{\ \}=$	0,85	0,94	0,98

Iz treće jednačine grupe (141) vidi se da se *ne potvrđuje* ni pretpostavka Otpornosti materijala, po kojoj poprečni presek pri deformaciji grede ostaje ravan. Kad oduzmemo od te jednačine $(-g_y)\,x$, dobićemo aplikate ζ te krivoliniske površine (sl. 22). Izjednačujući ovaj izraz sa različitim konstantama dobićemo jednačine izohipsa te površine. Na pr., za kružni presek je

$$\zeta = -\frac{4P}{EI}(x^2+y^2)\,x;$$

te izohipse su pokazane na sl. 23.

I konturna linija preseka se deformiše. Na pr., za pravougaoni presek (sl. 8) vidimo iz druge jednačine grupe (141) da se strane $y=\pm b$ okreću za uglove $\pm\mu P(l-z)\,b/EI$, a iz prve jednačine iste grupe da strane $x=\pm a$ prelaze u krive linije.

III

RAVNO NAPREZANJE

23. Ravna deformacija i ravno naprezanje. — Kod mnogih problema Teoriske fizike proučavanje se ograničava na dvodimenzionalni prostor samo da bi se obišle matematičke poteškoće na koje nailazi rešenje problema u opštem obliku. Rešenje tako uprošćenog problema često baca svetlost i na složenije pojave*). Ima mnogo problema i u Teoriji elastičnosti, gde sama priroda postavljenog pitanja nameće takvo uprošćavanje.

Pri proučavanju naprezanja veoma dugačkog tela cilindričnog oblika, opterećenog poprečnim silama jednoliko raspoređenim po dužini (na pr., potporni zid, tunel) može se s pravom smatrati da tačke poprečnog preseka, ako je ovaj dovoljno udaljen od osnova, ostaju pri deformaciji u ravni tog preseka, i njihova pomeranja ne zavise od položaja preseka. Drukčije rečeno, ako je z osa upravljena paralelno izvodnicima cilindra, onda je $w=0$, $\partial u/\partial z=0$ i $\partial v/\partial z=0$. To je t. zv. *ravna deformacija.*

Prema jednačinama grupa (19) i (20), tim pretpostavkama odgovaraju

$$e_z=0, \quad g_x=0, \quad g_y=0,$$

te je, prema jednačinama grupe (38),

$$\sigma_z=\mu(\sigma_x+\sigma_y), \quad \tau_x=0, \quad \tau_y=0$$

i

$$\left.\begin{aligned} E\,e_x&=(1-\mu^2)\,\sigma_x-\mu(1+\mu)\,\sigma_y,\\ E\,e_y&=(1-\mu^2)\,\sigma_y-\mu(1+\mu)\,\sigma_x,\\ E\,g_z&=2(1+\mu)\,\tau_z. \end{aligned}\right\} \tag{143}$$

Diferenciranjem jednačina grupe (39) po z nalazimo takođe

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial\sigma_y}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial\sigma_z}{\partial z}=0, \quad \frac{\partial\tau_z}{\partial z}=0.$$

*) Jedan od najvećih fizičara kraja prošlog stoleća formulisao je stanje Matematičke fizike ovim rečima: „...*all that we can do is to solve those problems whose mathematical conditions are sufficiently simple to admit of solution, and to trust to them and to general principles not to leave us quite in the dark with respect to other questions in which we may be interested*“ (*Lord Rayleigh*).

Jednačine ravnoteže (7') se svode na dve

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+X=0, \quad \frac{\partial\sigma_x}{\partial y}+\frac{\partial\tau_z}{\partial x}+Y=0, \tag{144}$$

a za određivanje pomeranja tačaka iz jednačina grupa (19) i (20)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=e_x, \quad \frac{\partial v}{\partial y}=e_y, \quad \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=g_z.$$

Diferenciranjem ovih jednačina nalazimo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial e_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=\frac{\partial g_z}{\partial y}-\frac{\partial e_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial g_z}{\partial x}-\frac{\partial e_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial e_y}{\partial x}.$$

Saint-Venant-ovi uslovi, odnosno uslovi za postojanje integrala ovih jednačina svode se na jednu jednačinu,

$$\frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 g_x}{\partial x\,\partial y}, \tag{145}$$

ili, ako unesemo u tu jednačinu izraze (143) za komponentne deformacije

$$(1-\mu)\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial x^2}\right)-\mu\left(\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}\right)=2\,\frac{\partial^2\tau_z}{\partial x\,\partial y}. \tag{146}$$

Ovoj jednačini možemo dati jednostavniji oblik ako uzmemo u obzir da se, parcijalnim diferenciranjem i sabiranjem izvoda jednačina (144), dobiva

$$2\,\frac{\partial^2\tau_z}{\partial x\,\partial y}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y}.$$

Tada se uslov (146) svodi na

$$(1-\mu)\,\Delta_1(\sigma_x+\sigma_y)+\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}=0, \tag{147}$$

gde je uvedena oznaka

$$\Delta_1=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Sistem jednačina (144) i (147) za ravnu deformaciju odgovara sistemu jednačina (B) opšteg slučaja.

Pretpostavimo da su zapreminske sile konservativne, tj. da je

$$X=-\frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y=-\frac{\partial U}{\partial y},$$

gde je U funkcija od x i y. Jednačine (144) možemo onda zadovoljiti ako uvedemo novu, zasad proizvoljnu, funkciju ϕ od x i y pomoću

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\tau_z;$$

iz tih jednačina dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - U\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - U\right) = 0,$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U. \tag{148}$$

Unesemo li ove izraze u jednačinu (147) dobivamo

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \Delta_1 U = 0, \tag{149}$$

gde je uvedena skraćena oznaka

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}.$$

Na taj način je problem ravne deformacije sveden na iznalaženje funkcije ϕ*) koja bi zadovoljila diferencijalnu jednačinu (149) i površinske uslove (β) koji, za tačke cilindrične površine u datom slučaju, glase

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U\right) - \beta \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_x, \qquad \beta\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U\right) - \alpha \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_y,$$

dok na osnovama cilindra mora delovati normalna površinska sila

$$\pm p_z = \pm \sigma_z = \pm \mu (\Delta_1 \phi + 2U);$$

Ova razlaganja mogu se nešto i proširiti, i to na slučaj kada ravnu deformaciju prati jednolika dilatacija e_0 u uzdužnom pravcu, kao što je to, na pr., slučaj kod dugačke cevi napregnute jednolikim pritiskom spolja ili iznutra. Za taj slučaj iz treće jednačine grupe (38) imamo

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) + E e_0.$$

Jednačine (148) i (149) važe i u ovom slučaju, dok je normalna površinska sila na osnovama

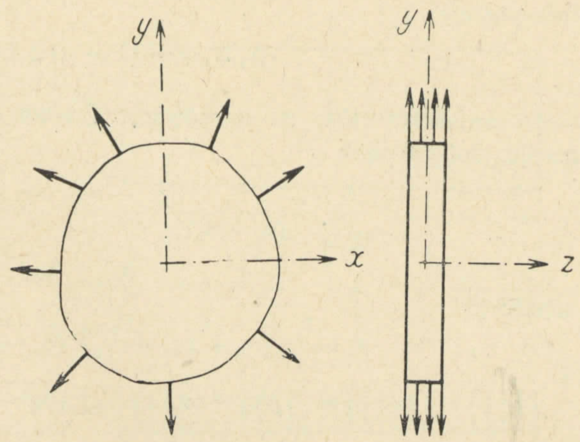
$$\pm p_z = \pm [\mu(\Delta_1 \phi + 2U) + E e_0].$$

Osim kod slučaja naprezanja veoma *dugačkog tela* cilindričnog oblika, koji smo sveli na problem ravne deformacije, dvodimenzionalni problem se javlja

*) Ona se često zove *Airy*-jevom funkcijom napona, po engleskom astronomu *G. B. Airy*, koji ju je uveo 1862 g.

u nešto izmenjenom obliku i kod drugog ekstremnog slučaja, naime kod naprezanja *tanke ploče* silama paralelnim njenim osnovama (sl. 24) i jednoliko podeljenim duž njene debljine $2h$.

Na osnovama ploče ($z = \pm h$) su $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, dakle, ako površinske sile ne napadaju tačke tih osnova moraju u njima biti, na osnovu jednačina (β), τ_x, τ_y i σ_z jednaki nuli. Pošto je, prema pretpostavci, debljina ploče mala u poređenju sa ostalim njenim dimenzijama, može se bez osetne greške smatrati da se ti komponentni naponi vrlo malo razlikuju od nule u tačkama tela između tih osnova, tj. za $-h < z < h$ mogu se, dakle, zanemariti. Prema tome ostaju samo komponentni naponi σ_x, σ_y i τ_z paralelni xy ravni. Mogu se zanemariti i promene ovih napona duž debljine ploče, tj. može se smatrati da ti naponi ne zavise od z, već samo od x i y. Ovo je slučaj *ravnog naprezanja**).



Sl. 24

U tom slučaju se jednačine ravnoteže svode opet na jednačine (144), kao i kod ravne deformacije, dok mesto jednačina (143) dolaze relacije

$$\left.\begin{aligned} E e_x &= \sigma_x - \mu \sigma_y \quad E e_y = \sigma_y - \mu \sigma_x, \\ E g_z &= 2(1+\mu)\tau_z. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Jednačina (145) važi i u ovom slučaju, a kad uvrstimo u nju izraze (150) ona prelazi u

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu \sigma_y).$$

Slično slučaju ravne deformacije, zamenom na osnovu jednačina (144),

$$2\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y},$$

ona postaje

$$\Delta_1(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \tag{151}$$

*) Tačnije rečeno, ovde se mesto napona posmatraju njihove prosečne vrednosti po debljini ploče; na pr., mesto σ_x se posmatra $\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_x dz$. Ista primedba važi i za dalja posmatranja komponentnih deformacija i pomeranja tačaka.

gde je U funkcija od x i y. Jednačine (144) možemo onda zadovoljiti ako uvedemo novu, zasad proizvoljnu, funkciju ϕ od x i y pomoću

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = -\tau_z;$$

iz tih jednačina dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma_x - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - U\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma_y - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - U\right) = 0,$$

odnosno

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U, \qquad \sigma_y = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U. \tag{148}$$

Unesemo li ove izraze u jednačinu (147) dobivamo

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi + \frac{1-2\mu}{1-\mu} \Delta_1 U = 0, \tag{149}$$

gde je uvedena skraćena oznaka

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4}.$$

Na taj način je problem ravne deformacije sveden na iznalaženje funkcije ϕ*) koja bi zadovoljila diferencijalnu jednačinu (149) i površinske uslove (β) koji, za tačke cilindrične površine u datom slučaju, glase

$$\alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U\right) - \beta\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_x, \qquad \beta\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U\right) - \alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_y,$$

dok na osnovama cilindra mora delovati normalna površinska sila

$$\pm p_z = \pm \sigma_z = \pm \mu (\Delta_1 \phi + 2U):$$

Ova razlaganja mogu se nešto i proširiti, i to na slučaj kada ravnu deformaciju prati jednolika dilatacija e_0 u uzdužnom pravcu, kao što je to, na pr., slučaj kod dugačke cevi napregnute jednolikim pritiskom spolja ili iznutra. Za taj slučaj iz treće jednačine grupe (38) imamo

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y) + E e_0.$$

Jednačine (148) i (149) važe i u ovom slučaju, dok je normalna površinska sila na osnovama

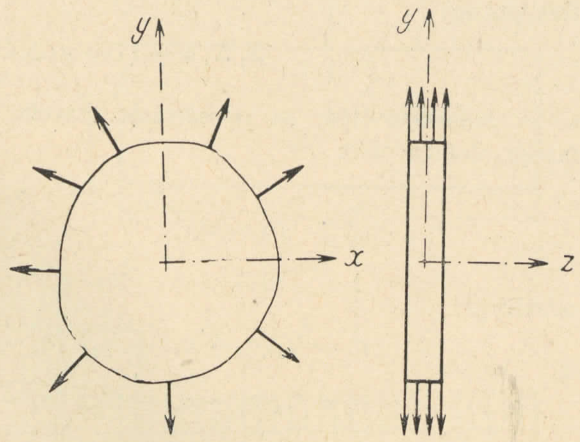
$$\pm p_z = \pm [\mu(\Delta_1 \phi + 2U) + E e_0].$$

Osim kod slučaja naprezanja veoma *dugačkog tela* cilindričnog oblika, koji smo sveli na problem ravne deformacije, dvodimenzionalni problem se javlja

*) Ona se često zove *Airy*-jevom funkcijom napona, po engleskom astronomu *G. B. Airy*, koji ju je uveo 1862 g.

u nešto izmenjenom obliku i kod drugog ekstremnog slučaja, naime kod naprezanja *tanke ploče* silama paralelnim njenim osnovama (sl. 24) i jednoliko podeljenim duž njene debljine $2h$.

Na osnovama ploče ($z = \pm h$) su $\alpha = 0$ i $\beta = 0$, dakle, ako površinske sile ne napadaju tačke tih osnova moraju u njima biti, na osnovu jednačina (β), τ_x, τ_y i σ_z jednaki nuli. Pošto je, prema pretpostavci, debljina ploče mala u poređenju sa ostalim njenim dimenzijama, može se bez osetne greške smatrati da se ti komponentni naponi vrlo malo razlikuju od nule u tačkama tela između tih osnova, tj. za $-h < z < h$ mogu se, dakle, zanemariti. Prema tome ostaju samo komponentni naponi σ_x, σ_y i τ_z paralelni xy ravni. Mogu se zanemariti i promene ovih napona duž debljine ploče, tj. može se smatrati da ti naponi ne zavise od z, već samo od x i y. Ovo je slučaj *ravnog naprezanja**).



Sl. 24

U tom slučaju se jednačine ravnoteže svode opet na jednačine (144), kao i kod ravne deformacije, dok mesto jednačina (143) dolaze relacije

$$\left.\begin{aligned} E e_x &= \sigma_x - \mu \sigma_y \quad E e_y = \sigma_y - \mu \sigma_x, \\ E g_z &= 2(1+\mu)\tau_z. \end{aligned}\right\} \tag{150}$$

Jednačina (145) važi i u ovom slučaju, a kad uvrstimo u nju izraze (150) ona prelazi u

$$2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu \sigma_x) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu \sigma_y).$$

Slično slučaju ravne deformacije, zamenom na osnovu jednačina (144),

$$2\frac{\partial^2 \tau_z}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y},$$

ona postaje

$$\Delta_1(\sigma_x + \sigma_y) = -(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y}\right). \tag{151}$$

*) Tačnije rečeno, ovde se mesto napona posmatraju njihove prosečne vrednosti po debljini ploče; na pr., mesto σ_x se posmatra $\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \sigma_x dz$. Ista primedba važi i za dalja posmatranja komponentnih deformacija i pomeranja tačaka.

Kao i kod ravne deformacije, i ovde se jednačine (144) mogu zadovoljiti uvođenjem *Airy*-jeve funkcije pomoću izraza (148), a kada uvedemo te izraze u jednačinu (151) i zamenimo X i Y sa $-\partial U/\partial x$, odnosno $-\partial U/\partial y$, ta jednačina postaje

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi + (1-\mu)\Delta_1 U = 0. \qquad (152)$$

Jednačina (13), za određivanje glavnih napona u slučaju ravne deformacije, dobiva oblik

$$(\sigma_z - \sigma_i)\begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_i & \tau_z \\ \tau_z & \sigma_y - \sigma_i \end{vmatrix} = 0,$$

odakle je

$$\sigma_1 = {}^1/_2(\sigma_x + \sigma_y) + {}^1/_2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2},$$

$$\sigma_2 = {}^1/_2(\sigma_x + \sigma_y) - {}^1/_2\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_z^2},$$

$$\sigma_3 = \sigma_z.$$

Pravac σ_3 se poklapa sa z osom, dok za ugao θ, koji pravac σ_1 čini sa x osom, nalazimo iz prve i druge jednačine grupe (14)

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 - \beta^2} = \frac{2\tau_z}{\sigma_x - \sigma_y}.$$

Isti obrasci važe i za ravno naprezanje, ako σ_z zamenimo nulom.

24. Rešenja u obliku polinoma. — Zapreminske sile kod većine tehničkih problema su stalne (obično, čak, jednake nuli). Diferencijalne jednačine za *Airy*-jevu funkciju (149) i (152) prelaze tada u

$$\Delta_1 \Delta_1 \phi = 0.$$

To znači da ta funkcija, i u slučaju ravne deformacije i u slučaju ravnog naprezanja, mora biti *ravna biharmoniska funkcija*.*) koja bi zadovoljila konturne uslove.

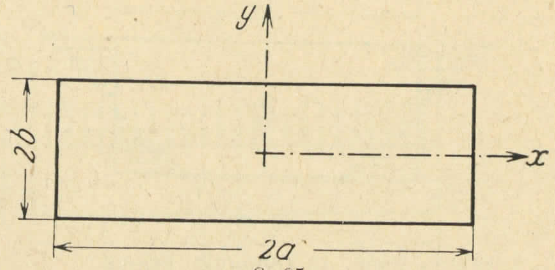
$$\alpha\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + U\right) - \beta\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_x.$$

$$\beta\left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + U\right) - \alpha\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} = p_y.$$

*) *Poisson*-ov koeficijent μ u tom slučaju ne ulazi u diferencijalnu jednačinu, dakle naprezanje tela ne zavisi od njegovih elastičnih osobina. Ova činjenica je od bitne važnosti za eksperimentalno proučavanje ravnog naprezanja pomoću polarizovane svetlosti na modelima od stakla, nitroceluloze i drugih providnih materijala.

Za ravno naprezanje pravougaone ploče (sl. 25) možemo naći više takvih funkcija u obliku polinoma. Uzmimo, na pr.,

$$\phi = {}^1/_2 A x^2, \qquad (153)$$

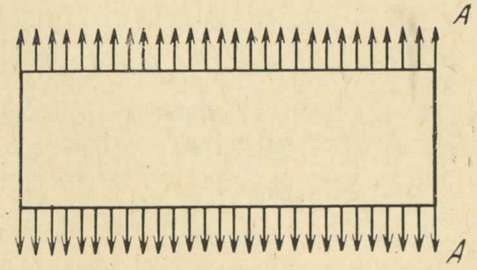


Sl. 25

gde je A proizvoljan koeficijent. Ova funkcija je, očigledno, biharmoniska. Ako nema zapreminskih sila, uslovi na konturi daju

$$\left.\begin{array}{lll} \text{za } x = \pm a: & p_x = 0, & p_y = 0; \\ \text{za } y = \pm b: & p_x = 0, & p_y = \pm A. \end{array}\right\} \qquad (154)$$

Imamo, dakle, ploču jednoliko zategnutu u pravcu y ose (sl. 26) silama intenziteta A.



Sl. 26

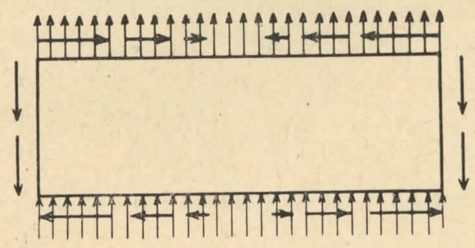
Ma kakva funkcija trećeg stepena je takođe biharmoniska. Na pr.,

$$\phi = {}^1/_2 B x^2 y, \qquad (155)$$

gde je B proizvoljan koeficijent. Iz konturnih uslova imamo:

$$\left.\begin{array}{lll} \text{za } x = \pm a: & p_x = 0, & p_y = -Ba; \\ \text{za } y = \pm b: & p_x = \mp Bx, & p_y = Bb. \end{array}\right\} \qquad (156)$$

To odgovara (sl. 27) naprezanju tangencijalnim i normalnim silama. Intenzitet tangencijalnih sila na stranama $y = \pm b$ je proporcionalan x, dok je na stranama $x = \pm a$ stalan.


Sl. 27

Ako uzmemo

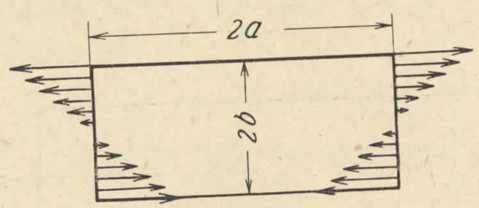
$$\phi = {}^1/_6 C y^3, \qquad (157)$$

gde je C proizvoljan koeficijent, iz konturnih uslova nalazimo

$$\left.\begin{array}{lll} \text{za } x = \pm a: & p_x = \pm Cy, & p_y = 0; \\ \text{za } y = \pm b: & p_x = 0, & p_y = 0, \end{array}\right\}$$

tj. čisto savijanje (sl. 28) spregovima momenata $\pm {}^2/_3 C b^3$. $\qquad$ (158)

Kod funkcija četvrtog i viših stepena, koeficijenti uopšte nisu proizvoljni. Na primer, ako uzmemo



Sl. 28

$$\phi = {}^1/_6\, D\, x^2 y^3 + {}^1/_{20}\, F\, y^5, \qquad (159)$$

gde su D i F proizvoljni koeficijenti, i taj izraz unesemo u biharmonisku jednačinu, dobivamo

$$F = -{}^2/_3\, D,$$

i, prema tome, iz konturnih uslova

$$\left.\begin{aligned} &\text{za } x = \pm a: \quad p_x = \pm D\,(a^2 - {}^2/_3\, y^2)\, y, \qquad p_y = D\, a\, y^2;\\ &\text{za } y = \pm b: \quad p_x = \mp D\, b^2\, x, \qquad p_y = {}^1/_3\, b^3. \end{aligned}\right\} \quad (160)$$

Zbir nađenih rešenja (153), (155), (157) i (159)

$$\phi = {}^1/_2\, A\, x^2 + {}^1/_2\, B\, x^2 y + {}^1/_6\, C\, y^3 + {}^1/_6\, D\,(x^2 - {}^1/_5\, y^2)\, y^3 \qquad (161)$$

takođe je rešenje biharmoniske jednačine. Sile na konturi nalazimo sabiranjem izraza (154), (156), (158) i (160).

Ako uzmemo

$$B = -D\, b^2,$$

nestaće tangencijalne sile na stranama $y = \pm b$, a uzmemo li još i

$$A = B\, b + {}^1/_3\, D\, b^3 = -{}^2/_3\, D\, b^3,$$

nestaće i normalne sile na stranama $y = -b$, dok će normalne sile na strani $y = b$ biti $-{}^4/_3\, D\, b^3$. Obeležimo ovo jednoliko opterećenje sa $-q$; onda je

$$D = \frac{3}{4}\frac{q}{b^3}, \qquad B = -\frac{3}{4}\frac{q}{b}, \qquad A = -\frac{1}{2}\, q.$$

Sile na stranama $x = \pm a$ svode se, u slučaju ako je debljina ploče jednak jedinici, na vertikalne sile

$$D\, a \int_{-b}^{b} (b^2 - y^2)\, dy = \frac{4}{3}\, D\, a\, b^3 = q\, a$$

i spregove sa momentima

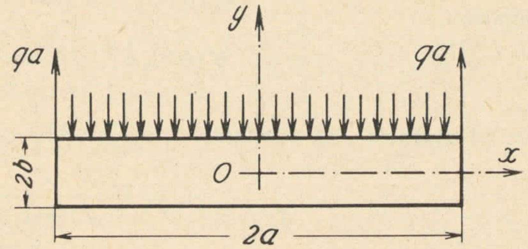
$$\pm \int_{-b}^{b} [(C + D\, a^2)\, y - \frac{2}{3}\, D\, y^3]\, y\, dy = \pm \frac{2}{3}\, [C + D\,(a^2 - \frac{2}{5}\, b^2)]\, b^3,$$

koji će biti jednaki nuli, ako uzmemo

$$C = -D\,(a^2 - \frac{2}{5}\, b^2) = -\frac{3}{4}\frac{q}{b}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{2}{5}\right).$$

Na taj način našli smo rešenje*) za prostu gredu (sl. 29) male debljine, opterećenu jednoliko podeljenim teretom. Na stranama $x = \pm a$ deluju, osim vertikalnih sila koje se redukuju na sile $q\, a$, još i normalne sile

$$p_x = \pm 2D\left(\frac{1}{5}\, b^2 - \frac{1}{3}\, y^2\right) y = \pm \frac{3}{2}\, q\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{y}{b},$$



Sl. 29

koje su uravnotežene na svakoj od tih strana. Kao što će se videti iz daljeg izlaganja (pogl. **IV**) te sile izazivaju samo *lokalno naprezanje krajeva* grede.

Iz jednačina (148) i (161) nalazimo komponentne napone

$$\sigma_x = C\, y + D\,(x^2 - \frac{2}{3}\, y^2)\, y = -\frac{3}{4}\frac{q}{b^3}\left[(a^2 - x^2) - \frac{2}{5}\, b^2\left(1 - \frac{5}{3}\frac{y^2}{b^2}\right)\right] y,$$

$$\sigma_y = A + B\, y + \frac{1}{3}\, D\, y^3 = -\frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\frac{y}{b} - \frac{1}{2}\frac{y^3}{b^3}\right) q,$$

$$\tau_z = -B\, x + D\, x\, y^2 = \frac{3}{4}\frac{x}{b}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) q.$$

Prvi član u [ ] obrascu za σ_x i ceo obrazac za τ_z se podudaraju sa obrascima Otpornosti materijala, dok su ostali članovi, kao i σ_y, u odnosu prema njima male veličine reda b^2/a^2, ako je visina $2\, b$ grede mala u odnosu prema rasponu $2\, a$.

Izraz (161) sa $A = 0$ daće nam rešenje i za prostu gredu opterećenu sopstvenom težinom. Ako specifičnu težinu obeležimo sa δ, dobiće jednačine (148) oblik

$$\sigma_x = -y\,\delta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -y\,\delta + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad \tau_z = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y}, \qquad (162)$$

a iz uslova na konturi sleduje

$$\begin{aligned} &\text{za } x = \pm a: \quad p_x = -y\delta \pm [C\, y + D\,(a^2 - \frac{2}{3}\, y^2)\, y],\\ &\qquad\qquad\quad\;\; p_y = -B\, a - D\, a\, y^2;\\ &\text{za } y = \pm b: \quad p_x = \mp (B + D\, b^2)\, x,\\ &\qquad\qquad\quad\;\; p_y = \mp (\delta + B + {}^1/_3\, D\, b^2)\, b. \end{aligned}$$

*) Ovo rešenje je dao 1901 g. francuski naučnik *A. Mesnager*.

Da bi nestale sile na stranama $y = \pm b$, moramo uzeti

$$B + D b^2 = 0\,, \quad \delta + B + {}^1/_3 D b^2 = 0\,,$$

odnosno

$$B = {}^3/_2 \delta\,, \quad D = -{}^3/_2 \frac{\delta}{b^2}\,.$$

Da bi momenti na stranama $x = \pm a$ bili jednaki nuli, moramo još uzeti

$$C = \delta\left(\frac{3}{2}\frac{a^2}{b^2} + \frac{2}{5}\right).$$

Kad uvedemo ove vrednosti u jednačine (161) i (162), nalazimo

$$\sigma_x = \left[\frac{3}{2}\left(\frac{a^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2}\right) - \left(\frac{3}{5} - \frac{y^2}{b^2}\right)\right] y\,\delta\,,$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) y\,\delta\,,$$

$$\tau_z = -\frac{3}{2}\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) x\,\delta\,.$$

Ovi izrazi se razlikuju od obrazaca Otpornosti materijala samo članovima reda b^2/a^2. Do sličnog zaključka došli bismo, kad bismo pomoću polinoma šestog i sedmog stepena rešili zadatak za prostu gredu opterećenu trouglasto, odnosno parabolično.

25. Primena trigonometriskih redova. — Potražimo rešenje biharmoniske jednačine za pravougaonu ploču u obliku

$$\phi = f(y) \cos k\,x\,, \qquad (163)$$

gde je $f(y)$ zasad proizvoljna funkcija od y, a k proizvoljna konstanta. Kad uvedemo taj izraz u diferencijalnu jednačinu, nalazimo

$$k^4 f(y) - 2\,k^2 f''(y) + f^{(IV)}(y) = 0\,, \qquad (164)$$

gde su sa $f'(y)$, ... obeleženi izvodi funkcije $f(y)$. Rešenje ove diferencijalne jednačine nalazimo, na poznati način, u obliku

$$f(y) = (A + B\,y)\,e^{ky} + (C + D\,y)\,e^{-ky}\,,$$

gde su A, B, C i D proizvoljne konstante. Ako mesto eksponencijalnih uvedemo hiperboličke funkcije nalazimo

$$f(y) = (A + B\,ky)\,\mathrm{Ch}\,ky + (C + D\,ky)\,\mathrm{Sh}\,ky. \qquad (165)$$

Ako nema zapreminskih sila, tom izrazu odgovaraju komponentni naponi

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= f''(y)\cos kx,\\ \sigma_y &= -\,k^2 f(y)\cos kx,\\ \tau_z &= k\,f'(y)\sin kx \end{aligned}\right\} \qquad (166)$$

i, prema (38), komponentne deformacije

$$\left.\begin{aligned} E\,e_x &= [f''(y) + \mu\,k^2 f(y)]\cos kx,\\ E\,e_y &= -[k^2 f(y) + \mu\,f''(y)]\cos kx,\\ E\,g_z &= 2\,(1+\mu)\,k\,f'(y)\sin kx. \end{aligned}\right\} \qquad (167)$$

Iz druge jednačine grupe (32) nalazimo onda

$$E\,v = \left[\frac{1}{k^2} f'''(y) - (2+\mu)\,f'(y)\right]\cos k\,x - \frac{1}{k^2} f'''(0) + (2+\mu)\,f'(0) + r\,x + b\,.$$

Ako uzmemo

$$r = 0, \qquad b = \frac{1}{k^2} f'''(0) - (2+\mu)\,f'(0), \qquad k = \frac{n\pi}{2a},$$

gde je n proizvoljan neparan ceo broj, biće

$$E\,v = \left[\frac{1}{k^2} f'''(y) - (2+\mu)\,f'(y)\right]\cos\frac{n\pi}{2a}x; \qquad (168)$$

na stranama $x = \pm a$ biće $v = 0$ i $p_x = \pm\sigma_x = 0$, tj. na krajevima ploče ostvariće se uslovi slobodno poduprte grede.

Zbir rešenja oblika (163), i to

$$\phi = \sum_n f_n(y)\cos\frac{n\pi x}{2a}, \qquad (169)$$

gde je

$$f_n(y) = \left(A_n + B_n\frac{n\pi y}{2a}\right)\mathrm{Ch}\frac{n\pi y}{2a} + \left(C_n + D_n\frac{n\pi y}{2a}\right)\mathrm{Sh}\frac{n\pi y}{2a}, \qquad (170)$$

a $n = 1, 3, 5, \ldots$, biće takođe rešenje biharmoniske jednačine za slobodno poduprtu tanku gredu. Na stranama $y = \pm b$ biće opterećenje

$$p_x = \pm\tau_z = \pm\sum_n \frac{n\pi}{2a} f_n'(\pm b)\sin\frac{n\pi x}{2a}, \qquad (171)$$

$$p_y = \pm\sigma_y = \mp\sum_n \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 f_n(\pm b)\cos\frac{n\pi x}{2a}. \qquad (172)$$

Pomoću izraza (169) i (170) možemo naći rešenja*) za kakvo bilo dato opterećenje tanke proste grede, kad to opterećenje pretstavimo u obliku trigonometriskih redova i izjednačimo im koeficijente sa koeficijentima redova (171) i (172).

*) Ovo rešenje pripada francuskom naučniku *C. Ribière*-u, 1889 g.

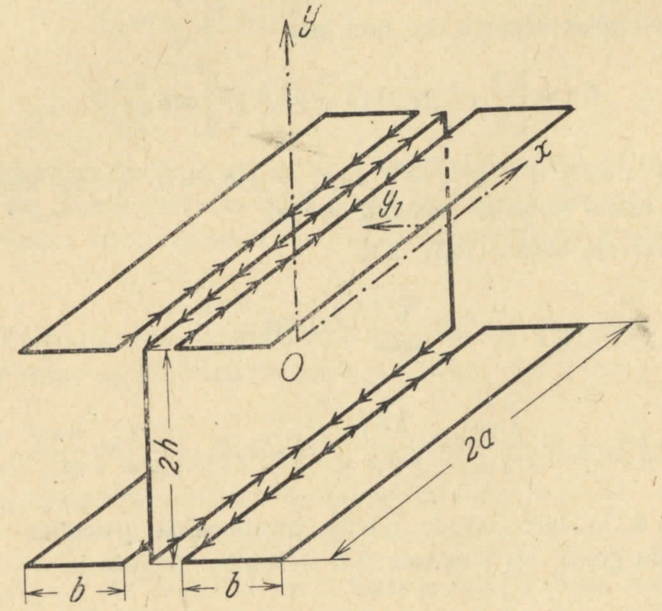
Potpuno slično izrazu (163) mogli bismo uzeti ϕ u obliku

$$\phi = f(y) \sin k x .$$

Tada bismo našli rešenje kod kojeg je, za $x = \pm a$, $v = 0$ i $\partial v/\partial x = 0$, tj. na krajevima ploče ostvareno bi bilo potpuno uklještenje.*)

26. Naprezanje limanog nosača. — U t. **24** proučili smo naprezanje proste grede opterećene jednoliko podeljenim teretom, kad je presek grede uzani pravougaonik. Ako je raspon $2a$ grede pri tome znatno veći od njene visine $2h$ možemo, kao što smo videli, zanemarujući male veličine reda h^2/a^2, smatrati da su

$$\sigma_y = 0, \qquad \tau_z = \frac{3}{4}\frac{x}{h}\left(1 - \frac{y^2}{h^2}\right) q, \qquad \sigma_x = -\frac{3}{4}\frac{a^2 y}{h^3}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) q.$$



Sl. 30

Desnu stranu poslednje jednačine možemo razviti u trigonometriski red

$$\sigma_x = -\frac{24}{\pi^3}\frac{q a^2 y}{h^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{1/2\,(n-1)}}{n^3} \cos\frac{n\pi x}{2a}, \tag{173}$$

gde je $n = 1, 3, 5 \ldots$

Dodavanje rebru simetričnih i tankih pojaseva (sl. 30) izazvaće na stranama rebra tangencijalne sile veličine p_x, a uticaju rebra na svaku polovinu

*) Ovo rešenje pripada engleskom naučniku *L. N. G. Filon*-u, 1903 g.

pojasa odgovaraće tangencijalne sile dvaput manje veličine i suprotnog smera, tj.: $-{}^1/_2\, p_x$. Ove dopunske sile tražimo u obliku trigonometriskog reda

$$p_x = \pm \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \sin\frac{n\pi x}{2a}. \tag{174}$$

Koeficijente λ_n ovog reda moramo naći iz uslova da je dilatacija e_x u svakoj tački strane rebra jednaka dilataciji u istoj tački strane pojasa, koji zamišljamo da je čvrsto spojen sa rebrom.

Iz obrasca (171) vidimo da funkcija $f'(y)$ za rebro mora biti parna, odnosno $f(y)$ neparna; dakle, u obrascu (170) za rebro moraju biti jednaki nuli svi koeficijenti A_n i D_n. Iz uslova da na stranama rebra, tj. za $y = \pm h$ mora biti $p_y = 0$, na osnovu (172) nalazimo

$$C_n \,\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{2a} + B_n \frac{n\pi h}{2a}\,\mathrm{Ch}\frac{n\pi h}{2a} = 0,$$

ili

$$C_n = -B_n \frac{n\pi h}{2a}\,\mathrm{Cth}\frac{n\pi h}{2a}.$$

Kad uvedemo taj izraz u jednačinu (170), biće

$$f_n(y) = B_n\left(\frac{n\pi y}{2a}\,\mathrm{Ch}\frac{n\pi y}{2a} - \frac{n\pi h}{2a}\,\mathrm{Cth}\frac{n\pi h}{2a}\,\mathrm{Sh}\frac{n\pi y}{2a}\right);$$

onda je, na osnovu jednačine (171),

$$p_x = \pm \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 B_n \frac{\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}}{2\,\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{2a}} \sin\frac{n\pi x}{2a}.$$

Iz upoređenja ovog izraza sa jednačinom (174) dobivamo

$$B_n = \lambda_n \frac{2\,\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{2a}}{\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\left(\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}\right)},$$

te je, prema obrascu (166),

$$E(e_x)_{y=\pm h} = (\sigma_x)_{y=\pm h} = \pm \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\lambda_n \,\mathrm{Sh}^2\frac{n\pi h}{2a}}{\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \cos\frac{n\pi x}{2a}. \tag{175}$$

Pređimo sad na izvođenje obrasca za dilataciju u tački strane pojasa sa kojom, kao što smo naveli, moramo izjednačiti dilataciju u tački strane rebra.

Strana pojasa $y_1=0$ nije uopšte opterećena spoljnim silama, tj. prema jednačinama (171) i (172) je $f(0)=0$ i $f'(0)=0$. Kada u te uslove uvedemo izraz (170), nalazimo

$$A_n=0, \qquad B_n=-C_n,$$

dakle

$$f_n(y)=B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\,\mathrm{Ch}\frac{n\pi y_1}{2a}+\left(-B_n+D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right)\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}.$$

Jednačine (166) onda daju

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\left\{\left(2D_n+B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right)\mathrm{Ch}\frac{n\pi y_1}{2a}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(B_n+D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right)\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}\right\}\cos\frac{n\pi x}{2a},\\
\sigma_y&=-\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\left\{B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\,\mathrm{Ch}\frac{n\pi y_1}{2a}+\right.\\
&\qquad\left.+\left(-B_n+D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right)\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}\right\}\cos\frac{n\pi x}{2a},\\
\tau_z&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\left\{\left(D_n+B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right)\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}+\right.\\
&\qquad\left.+D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\,\mathrm{Ch}\frac{n\pi y_1}{2a}\right\}\sin\frac{n\pi x}{2a}.
\end{aligned}\right\}\qquad(176)$$

Iz prve jednačine grupe (167) nalazimo

$$\left.\begin{aligned}
Ee_x&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2\left\{\left[2D_n+(1+\mu)B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right]\mathrm{Ch}\frac{n\pi x_1}{2a}+\right.\\
&\qquad\left.+\left[(1-\mu)B_n+(1+\mu)D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right]\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}\right\}\cos\frac{n\pi x}{2a},
\end{aligned}\right\}\qquad(177)$$

a iz jednačine (168)

$$\begin{aligned}
E\,v&=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)\left\{\left[(1-\mu)D_n-(1+\mu)B_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right]\mathrm{Sh}\frac{n\pi y_1}{2a}+\right.\\
&\qquad\left.+\left[2B_n-(1+\mu)D_n\frac{n\pi y_1}{2a}\right]\mathrm{Ch}\frac{n\pi y_1}{2a}\right\}\cos\frac{n\pi x}{2a}.
\end{aligned}$$

Ovaj izraz mora biti jednak nuli za $y_1=b$, jer se iz simetrije vidi da ta linija ostaje prava i u deformisanom stanju. Dakle, mora biti

$$\left[(1-\mu)D_n-(1+\mu)B_n\frac{n\pi b}{2a}\right]\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}=\left[-2B_n+(1+\mu)D_n\frac{n\pi b}{2a}\right]\mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a},$$

ili

$$D_n=\frac{2-(1+\mu)\dfrac{n\pi b}{2a}\mathrm{Th}\dfrac{n\pi b}{2a}}{(1+\mu)\dfrac{n\pi b}{2a}-(1-\mu)\,\mathrm{Th}\dfrac{n\pi b}{2a}}\,B_n.$$

Kad ovu vrednost uvedemo u poslednju jednačinu grupe (176) i zamenimo y_1 sa b, dobivamo

$$(\tau_x)_{y=b}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi}{2a}\right)^2 B_n\,\frac{\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{a}+\dfrac{n\pi b}{a}}{(1+\mu)\dfrac{n\pi b}{2a}\mathrm{Ch}\dfrac{n\pi b}{2a}-(1-\mu)\,\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{2a}}\sin\frac{n\pi x}{2a}.$$

Ovaj izraz mora biti jednak $-{}^1\!/_2\,p_x$, gde je p_x određeno jednačinom (174). Upoređujući te izraze nalazimo

$$B_n=\lambda_n\frac{(1-\mu)\,\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{2a}-(1+\mu)\dfrac{n\pi b}{2a}\mathrm{Ch}\dfrac{n\pi b}{2a}}{2\left(\dfrac{n\pi}{2a}\right)^2\left(\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{a}+\dfrac{n\pi b}{a}\right)}\qquad(178)$$

i stoga

$$D_n=\lambda_n\frac{(1+\mu)\dfrac{n\pi b}{2a}\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{2a}-2\,\mathrm{Ch}\dfrac{n\pi b}{2a}}{2\left(\dfrac{n\pi}{2a}\right)^2\left(\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{a}+\dfrac{n\pi b}{a}\right)}.\qquad(179)$$

Kad ove vrednosti za B_n i D_n uvedemo u obrazac (177) i zamenimo y_1 sa b, nalazimo

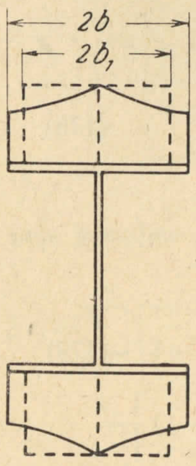
$$E(e_x)_{y=b}=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n\frac{(1-\mu^2)\,\mathrm{Sh}^2\dfrac{n\pi b}{2a}-4\,\mathrm{Ch}^2\dfrac{n\pi b}{2a}-(1+\mu)^2\left(\dfrac{n\pi b}{2a}\right)^2}{2\left(\mathrm{Sh}\dfrac{n\pi b}{a}+\dfrac{n\pi b}{a}\right)}\cos\frac{n\pi x}{2a}.$$

Ova dilatacija mora biti jednaka dilataciji u tački strane rebra usled savijanja jednoliko podeljenim teretom (173) i naprezanja tangencijalnim silama (175). Dakle imamo

$$\lambda_n \left\{ \frac{(1-\mu^2)\,\mathrm{Sh}^2 \frac{n\pi b}{2a} - 4\,\mathrm{Ch}^2 \frac{n\pi b}{2a} - (1+\mu)^2 \left(\frac{n\pi b}{2a}\right)^2}{2\left(\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{a} + \frac{n\pi b}{a}\right)} - \frac{4\,\mathrm{Sh}^2 \frac{n\pi h}{2a}}{\mathrm{Sh}\frac{n\pi h}{a} - \frac{n\pi h}{a}} \right\} = -\frac{24}{\pi^3}\frac{(-1)^{1/2\,(n-1)}}{n^3} \cdot \frac{a^2}{h^2}\, q .$$

Ako su zadati odnosi visine rebra i širine pojaseva u odnosu prema rasponu: h/a i b/a, iz gornje jednačine mogu se odrediti λ_n, zatim iz jednačina (178) i (179) koeficijenti B_n i D_n, a iz jednačina (176) komponentni naponi*).

27. Grede sa širokim pojasevima. — Iz prve jednačine grupe (176) vidi se da normalni napon nije isti u svima tačkama preseka pojasa, kao što se to obično u tehničkoj praksi pretpostavlja, već dostiže najveću vrednost (sl. 31) blizu rebra i postepeno opada ka krajevima. Ta razlika je utoliko veća ukoliko je veća širina pojasa i mora se uzeti u obzir pri proračunu nosača sa širokim pojasevima. To se može postići na taj način što se pri određivanju otpornog momenta preseka, mesto stvarne širine pojasa $2b$, uzme jedan njen deo $2b_1$, gde je



Sl. 31

$$b_1 = \frac{1}{(\sigma_x)_{\max}} \int_0^b \sigma_x \, dy_1 . \qquad (180)$$

Ako se zadovoljimo prvim članom reda**) (175), onda je, prema jednačini (176) za $y_1 = b$,

$$k_1 (\sigma_x)_{\max} = (1-\mu)\,\mathrm{Sh}^2 u - 4\,\mathrm{Ch}^2 u - (1+\mu)\, u^2 ,$$

gde je

$$u = \frac{\pi b}{2a}, \qquad k_1 = \frac{2\,(\mathrm{Sh}\, 2u + 2u)}{\lambda_1} .$$

*) Ovo rešenje je dao 1939 g. ruski inženjer *P. F. Papkovič*

**) Za $x = 0$, tj. tamo gde je napon najveći to unosi grešku oko 3%.

Iz iste jednačine (176) nalazimo

$$k_1 \sigma_x = [(1+\mu)\, u\,\mathrm{Sh}\, u - 2\,\mathrm{Ch}\, u] \left(2\,\mathrm{Ch}\frac{\pi y_1}{2a} + \frac{\pi y_1}{2a}\mathrm{Sh}\frac{\pi y_1}{2a}\right) +$$

$$+ [(1-\mu)\,\mathrm{Sh}\, u - (1+\mu)\, u\,\mathrm{Ch}\, u] \left(\mathrm{Sh}\frac{\pi y_1}{2a} + \frac{\pi y_1}{2a}\mathrm{Ch}\frac{\pi y_1}{2a}\right),$$

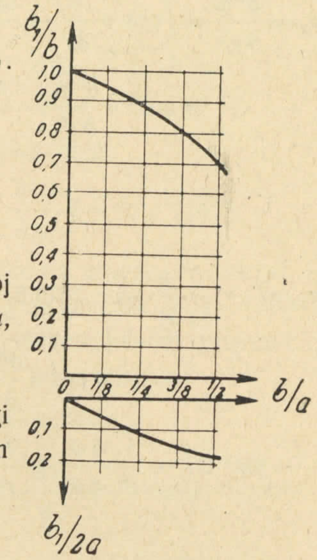
odakle je

$$k_1 \int_0^b \sigma_x \, dy_1 = \frac{2a}{\pi} \Big\{ [(1+\mu)\, u\,\mathrm{Sh}\, u - 2\,\mathrm{Ch}\, u] (\mathrm{Sh}\, u + u\,\mathrm{Ch}\, u) + [(1-\mu)\,\mathrm{Sh}\, u -$$

$$- (1+\mu)\, u\,\mathrm{Ch}\, u]\, u\,\mathrm{Sh}\, u \Big\} = -\frac{2a}{\pi}(\mathrm{Sh}\, 2u + 2u) .$$

Sad možemo iz jednačine (180) naći

$$b_1 = \frac{4\,\mathrm{Ch}^2 u - (1-\mu)\,\mathrm{Sh}\, u + (1+\mu)\, u^2}{\mathrm{Sh}\, 2u + 2u} \cdot \frac{2a}{\pi} .$$



Sl. 32

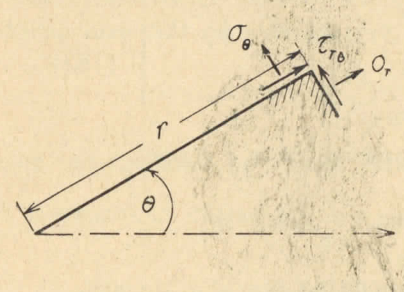
Na sl. 32 pretstavljena je ova veza grafički. Na istoj slici pokazan je u zavisnosti od b/a i odnos $b_1/2a$, koji asimptotski teži vrednosti 0,20.

28. Primena polarnih koordinata. — Mnogi problemi iz ravnog naprezanja mogu se rešiti u polarnim koordinatama,

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \theta = \mathrm{arc\,tg}\, y/x,$$

odnosno

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta .$$



Sl. 33

Iz tih obrazaca dobivamo

$$\partial r/\partial x = x/r = \cos\theta ;$$

$$\partial r/\partial y = y/r = \sin\theta ;$$

$$\partial \theta/\partial x = -y/r^2 = -\sin\theta/r ;$$

$$\partial \theta/\partial y = x/r^2 = \cos\theta/r ,$$

i

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\sin\theta , \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\phi}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\cos\theta .$$

Odavde nalazimo

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \\
&= \sin^2\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + 2\sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right) + \\
&\quad + \frac{\cos\theta}{r^2}\left(-2\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right), \\
\sigma_y &= \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} = \left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \\
&= \cos^2\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} - \frac{\sin\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + 2\cos\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right) + \\
&\quad + \frac{\sin\theta}{r^2}\left(2\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right), \\
\tau_{xy} &= -\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} = -\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) = \\
&= \sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{\cos\theta}{r}\left(-\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right) - \\
&\quad - \sin^2\theta\left(-\frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta}\right) - \frac{\cos\theta}{r^2}\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (181)
$$

Uvešćemo komponentne napone σ_r, σ_θ i $\tau_{r\theta}$ koji padaju u pravac normala na linije $r = \text{const.}$ i $\theta = \text{const}$, (vidi sl. 33). Naponi σ_r i σ_θ vezani su sa naponima σ_x, σ_y i τ_{xy} jednačinom (9), koja sad postaje

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_x\cos^2\theta + \sigma_y\sin^2\theta + 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta, \\
\sigma_\theta &= \sigma_x\sin^2\theta + \sigma_y\cos^2\theta - 2\tau_{xy}\sin\theta\cos\theta,
\end{aligned}\right\} \quad (182)
$$

a iz jednačina (5) nalazimo za projekcije napona p_r na x i y ose

$$\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta, \qquad \sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta .$$

Sa ovim izrazom dobivamo projekciju tog napona na pravac $r = \text{const.}$

$$
\left.\begin{aligned}
\tau_{r\theta} &= -(\sigma_x\cos\theta + \tau_{xy}\sin\theta)\sin\theta + (\sigma_y\sin\theta + \tau_{xy}\cos\theta)\cos\theta = \\
&= -(\sigma_x - \sigma_y)\cos\theta\sin\theta + \tau_{xy}(\cos^2\theta - \sin^2\theta).
\end{aligned}\right\} \quad (183)
$$

Kad uvedemo izraze (181) u jednačine (182) i (183) i uzmemo u obzir da je $\cos^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta = 1$, dobićemo, posle skraćivanja,

$$
\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}, \\
\sigma_\theta &= \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}, \\
\tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \frac{1}{r}\frac{\partial^2\phi}{\partial r\partial\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (184)
$$

Iz ovih jednačina nalazimo

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} = \sigma_x + \sigma_y = s = \sigma_r + \sigma_\theta = \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2},$$

te biharmoniska jednačina u polarnim koordinatama dobiva oblik

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) = 0. \quad (185)$$

Obeležimo sa u_r i u_θ projekcije pomeranja tačaka na pravac $\theta = \text{const.}$ (radijalan) i $r = \text{const.}$ (tangencijalan) (sl. 33). Slično jednačinama (19) i (20) možemo izraziti dilatacije: e_r u radijalnom pravcu, e_θ u tangencijalnom pravcu i klizanje $g_{r\theta}$ između ta dva pravca pomoću pomeranja u_r i u_θ.

Ako je u_r pomeranje elementa AD u radijalnom pravcu, biće $u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r}dr$ pomeranje elementa BC u istom pravcu; prema tome je $\frac{\partial u_r}{\partial r}dr$ priraštaj dužine elementa AB i DC, a dilatacija u radijalnom pravcu je

$$e_r = \partial u_r/\partial r. \quad (186)$$

Dilatacija u tangencijalnom pravcu ($r = \text{const.}$) zavisi ne samo od u_θ, već i od u_r. Naime, kad bi se element AD pomerio samo radijalno za u_r, promenila bi se dužina luka AD od $r\,d\theta$ na $(r + u_r)\,d\theta$, tj. imala bi dilataciju

$$\frac{(r + u_r)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u_r}{r}.$$

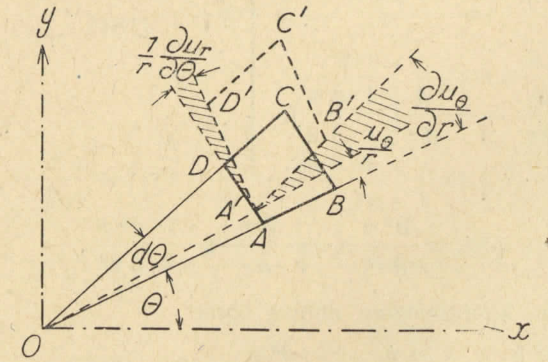
Razlika tangencijalnih pomeranja elemenata DC i AB je $\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}d\theta$, a njoj odgovara tangencijalna dilatacija

$$\frac{\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}d\theta}{r\,d\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta};$$

prema tome je ukupna tangencijalna dilatacija

$$e_\theta = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}. \quad (187)$$

Neka bude $A'B'C'D'$ položaj deformisanog elementa površine $ABCD$ (sl. 34). Ugao koji čine pravci AD i $A'D'$ proizilazi iz razlike $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta$ radijalnih pomeranja tačaka D i A; prema tome je taj ugao jednak $\frac{\partial u_r}{\partial \theta} d\theta : r\, d\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}$.



Sl. 34

Ugao koji čine pravci $A'B'$ i AB proizilazi iz razlike $\frac{\partial u_\theta}{\partial r} dr$, tangencijalnih pomeranja tačaka B i A, i jednak je $\partial u_\theta / \partial r$. Ali samo jedan deo ovog ugla (šrafirani) ulazi u obrazac za klizanje, jer je drugi deo, i to u_θ / r, rezultat okretanja celog elementa $ABCD$ kao krutog tela oko tačke O. Stoga je ukupno klizanje

$$g_{r\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}. \tag{188}$$

29. Simetrično naprezane. — Jednostavniji slučaj ravnog naprezanja dobivamo iz jednačina (184) i (185) kad pretpostavimo da je ono simetrično u odnosu na početak koordinata, tj. da napon ne zavisi od θ

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r}, \quad \sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2}. \quad \tau_{r\theta} = 0 \tag{189}$$

i

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d\phi}{dr}\right) = 0,$$

ili, ako se oslobodimo zagrada

$$\frac{d^4\phi}{dr^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3\phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3}\frac{d\phi}{dr} = 0. \tag{190}$$

Ovu diferencijalnu jednačinu transformisaćemo u linearnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima zamenjujući r sa e^t, gde je $t = \ln r$ nova nezavisna promenljiva. Ako obeležimo sa ϕ', ϕ'', ϕ''' itd. izvode ϕ po t, biće

$$d t / d r = e^{-t},$$
$$d\phi / dr = e^{-t}\phi',$$
$$d^2\phi / dr^2 = e^{-2t}(\phi'' - \phi'),$$
$$d^3\phi / dr^3 = e^{-3t}(\phi''' - 3\phi'' + 2\phi'),$$
$$d^4\phi / dr^4 = e^{-4t}(\phi^{IV} - 6\phi''' + 11\phi'' - 6\phi'),$$

i jednačina (190) prelazi u

$$e^{-4t}(\phi^{IV} - 6\phi''' + 11\phi'' - 6\phi') + 2e^{-4t}(\phi''' - 3\phi'' + 2\phi') - e^{-4t}(\phi'' - \phi') + e^{-4t}\phi' = 0,$$

odnosno

$$\phi^{IV} - 4\phi''' + 4\phi'' = 0.$$

Opšti integral ove diferencijalne jednačine nalazimo na poznati način*) u obliku

$$\phi = At + D + (B + Ct)e^{2t},$$

ili, kada zamenimo t opet sa $\ln r$,

$$\phi = D + A\ln r + (B + C\ln r) r^2, \tag{191}$$

gde su A, B, C i D proizvoljne konstante; poslednja od njih ne utiče na veličine napona koji su određeni jednačinama (189)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= 2B + C + \frac{A}{r^2} + 2C\ln r, \\ \sigma_\theta &= 2B + 3C - \frac{A}{r^2} + 2C\ln r, \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{192}$$

Komponentne deformacije nalazimo iz jednačina (38)

$$\left.\begin{aligned} e_r &= \frac{1}{E}\left\{(1+\mu)\frac{A}{r^2} + 2(1-\mu)(B + C\ln r) + (1 - 3\mu)C\right\}, \\ e_\theta &= \frac{1}{E}\left\{-(1+\mu)\frac{A}{r^2} + 2(1-\mu)(B + C\ln r) + (3-\mu)C\right\}, \\ g_{r\theta} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{193}$$

Pomoću obrazaca (186), (187) i (188) možemo naći pomeranja tačaka. Iz jednačina (186) i (193) dobivamo

$$u_r = \frac{1}{E}\left\{-(1+\mu)\frac{A}{r} + [2(1-\mu)(B + C\ln r) - (1+\mu)C]\,r\right\} + f(\theta), \tag{194}$$

gde je $f(\theta)$ proizvoljna funkcija od θ. Iz jednačina (187), (193) i (194) dobivamo

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = r e_\theta - u_r = \frac{4Cr}{E} - f(\theta),$$

odnosno

$$u_\theta = \frac{4Cr\theta}{E} - \int f(\theta)\, d\theta + f_1(r), \tag{195}$$

*) Karakteristična jednačina: $x^4 - 4x^3 + 4x^2 = 0$ ima četiri korena: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ $x_3 = 2$, $x_4 = 2$.

gde je $f_1(r)$ proizvoljna funkcija od r. Kada unesemo izraze (194) i (195) u obrazac (188) i uzmemo u obzir poslednju od jednačina (193) nalazimo

$$\frac{1}{r} f'(\theta) + f_1'(r) + \frac{1}{r} \int f(\theta)\, d\theta - \frac{1}{r} f_1(r) = 0,$$

gde su sa $f'(\theta)$ i $f_1'(r)$ obeleženi izvodi funkcija $f(\theta)$, odnosno $f_1(r)$. Poslednju jednačinu možemo napisati u obliku

$$f'(\theta) + \int f(\theta)\, d\theta = f_1(r) - r f_1'(r),$$

gde je leva strana funkcija samo od θ, a desna — funkcija samo od r. Iz ove jednačine proizilazi

$$f'(\theta) + \int f(\theta)\, d\theta = L, \quad f_1(r) - r f_1'(r) = L,$$

gde je L proizvoljna konstanta.

Prva od ovih jednačina daje

$$f''(\theta) = - f(\theta),$$

odnosno

$$f(\theta) = K \cos\theta + H \sin\theta, \tag{196}$$

gde su K i H proizvoljne konstante.

Druga jednačina daje

$$f_1''(r) = 0,$$

odnosno

$$f_1(r) = F r, \tag{197}$$

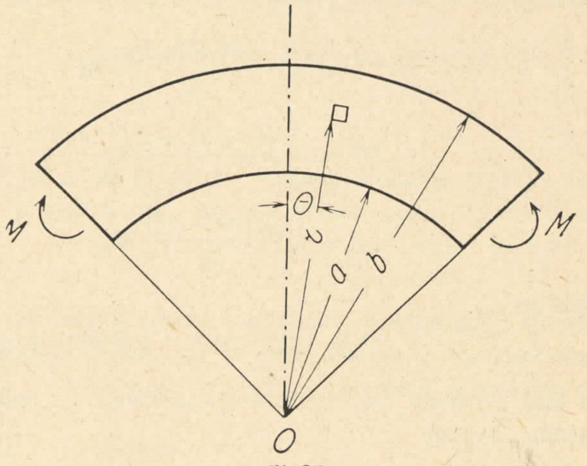
gde je F proizvoljna konstanta.

Ako uvedemo izraze (196) i (197) u jednačine (194) i (195) dobićemo konačno za komponente pomeranja tačaka

$$\left.\begin{aligned} u_r &= \frac{1}{E}\left\{ -(1+\mu)\frac{A}{r} + [2(1-\mu)(B + C \ln r) - (1+\mu) C] r \right\} + \\ &\qquad + K \cos\theta + H \sin\theta, \\ u_\theta &= \frac{4 C r \theta}{E} + H \cos\theta - K \sin\theta + F r. \end{aligned}\right\} \tag{198}$$

Konstante K, H i F u ovim izrazima moraju se odrediti, u svakom problemu ponaosob, iz uslova da pomeranja krutog tela budu eliminisana.

30. Čisto savijanje kružnog luka*) — Primenićemo obrasce t. **29** za rešenje ovog tehničkog problema (sl. 35). U tom slučaju mora duž cele konture biti $\tau_{r\theta} = 0$; osim tog mora, za $r = a$ i $r = b$, biti $\sigma_r = 0$, a na krajnjim presecima



Sl. 35

$$\int_a^b \sigma_\theta\, dr = 0, \quad \int_a^b r \sigma_\theta\, dr = -M.$$

Uslov za $\tau_{r\theta}$ je očigledno zadovoljen rešenjem (191), jer je prema poslednjoj od jednačina (192) $\tau_{r\theta} = 0$ u svakoj tački tela. Uslovi za σ_r, na osnovu prve jednačine grupe (192), postaju

$$\left.\begin{aligned} 2B + C + \frac{A}{a^2} + 2C \ln a = 0, \\ 2B + C + \frac{A}{b^2} + 2C \ln b = 0. \end{aligned}\right\} \tag{199}$$

Prvi od uslova za σ_θ daje

$$\int_a^b \left(2B + 3C - \frac{A}{r^2} + 2C \ln r\right) dr =$$

$$= 2B(b-a) - A\frac{b-a}{ab} + C(b - a + 2b \ln b - 2a \ln a) = 0.$$

Ova jednačina biće očigledno zadovoljena, ako budu zadovoljeni uslovi (199), dakle neće dati ništa novo sa određivanje konstanata. Poslednji od uslova za σ_θ dobiva oblik

$$\left.\begin{aligned} \int_a^b \left(2B + 3C - \frac{A}{r^2} + 2C \ln r\right) r\, dr = (B + C)(b^2 - a^2) - \\ - A \ln\frac{b}{a} + C(b^2 \ln b - a^2 \ln a) = -M. \end{aligned}\right\} \tag{200}$$

---

*) Ovo rešenje je dao 1881 g. ruski inženjer *H. Golovin*.

Rešavajući jednačine (199) i (200), dobivamo konstante

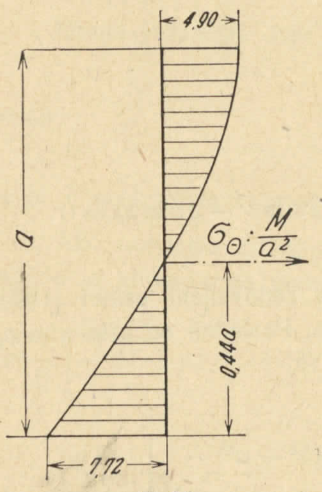
$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{4\,a^2\,b^2 \ln b/a}{N}\,M, \\ B &= -\frac{b^2 - a^2 + 2\,(b^2 \ln b - a^2 \ln a)}{N}\,M, \\ C &= -\frac{2\,(b^2 - a^2)}{N}\,M, \end{aligned}\right\} \qquad (201)$$

gde je

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4\,a^2\,b^2\,(\ln b/a)^2, \qquad (202)$$

a kad uvedemo ove vrednosti konstanata u jednačine (192) nalazimo komponentne napone

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{4\,M}{N}\left(\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r}\right), \\ \sigma_\theta &= -\frac{4\,M}{N}\left(-\frac{a^2 b^2}{r^2} \ln \frac{b}{a} + b^2 \ln \frac{r}{b} + a^2 \ln \frac{a}{r} + b^2 - a^2\right), \\ \tau_{r\theta} &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (203)$$



Sl. 36

Najveći i najmanji napon σ_θ biće u krajnjim tačkama preseka: za $r = a$ i $r = b$. Napon σ_r je u svima tačkama istoga znaka (za usvojeni smisao obrtanja spregova — pozitivan); u krajnjim tačkama preseka jednak je nuli, a u ostalim tačkama je znatno manji od apsolutne vrednosti napona σ_θ. Na primer, za $b = 2\,a$ je

$$(\sigma_\theta)_{\min} = -4{,}90\,\frac{M}{a^2}, \qquad (\sigma_\theta)_{\max} = 7{,}72\,\frac{M}{a^2},$$

$$(\sigma_r)_{\max} = 1{,}07\,\frac{M}{a^2}.$$

Na sl. 36 pokazan je dijagram napona σ_θ za ovaj slučaj. Kao što se iz slike vidi neutralna osa pomerena je ka donjem kraju; njeno otstojanje od donjeg kraja jednako je $0{,}44a$.

Pomeranja tačaka određuju jednačine (198) u kojima treba A, B i C zameniti izrazima (201). Vrednosti ostalih konstanata K, F i H, zavise od načina kako eliminišemo pomeranja krutog tela.

Ako eliminišemo translacije na taj način što ćemo vezati težište srednjeg preseka, onda moraju biti jednaki nuli u_r i u_θ za $\theta = 0$ i $r = {}^1/_2\,(a + b) = r_o$.

Iz toga sleduje

$$K = -\frac{1}{E}\left\{-(1+\mu)\,\frac{A}{r_o} + [2\,(1-\mu)\,(B + C \ln r_o) - (1+\mu)\,C]\,r_o\right\},$$

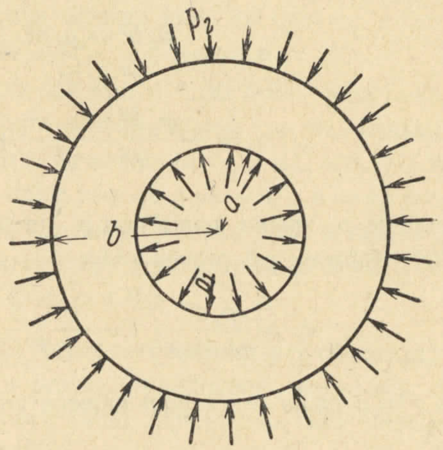
$$H + F\,r_o = 0.$$

Rotaciju možemo eliminisati na taj način što ćemo element srednjeg preseka neposredno do težišta preseka primorati da ostane u svojoj ravni, tj. da bude $\partial\,u_\theta/\partial\,r = 0$ za $\theta = 0$ i $r = r_o$. Iz toga sleduje da je $F = 0$; onda je prema gornjem i $H = 0$.

Time su pomeranja tačaka luka potpuno određena. Posmatrajući pomeranja u_θ upravna na ravan preseka, vidimo da se ona sastoje iz translatornog pomeranja celokupnog preseka za $-K \sin\theta$ i njegovog okretanja oko tačke O za ugao

$$\frac{4\,C\,\theta}{E} = -\frac{8\,(b^2 - a^2)}{E\,N}\,M\,\theta.$$

31. Naprezanje cevi normalnim pritiskom.*) — Iz obrazaca u **t. 29** možemo dobiti rešenje još jednog tehničkog problema, naime naprezanja kružnog prstena (ili beskonačno dugačke cevi) opterećena jednolikim normalnim pritiskom p_1 iznutra i p_2 spolja (sl. 37).



Sl. 37

U tom slučaju, na unutrašnjoj konturi, tj. za $r = a$, mora biti $\sigma_r = -p_1$, a na spoljnoj konturi, tj. za $r = b$ mora biti $\sigma_r = -p_2$. Uvedemo li u ova dva uslova izraz (192) za σ_r, dobivamo

$$2\,B + \frac{A}{a^2} + C\,(1 + 2 \ln a) = -p_1,$$

$$2\,B + \frac{A}{b^2} + C\,(1 + 2 \ln b) = -p_2,$$

odakle je

$$A = -\frac{p_1 - p_2}{b^2 - a^2}\,a^2\,b^2 - 2\,C\,\frac{a^2\,b^2}{b^2 - a^2} \ln \frac{a}{b},$$

$$2\,B = -\frac{p_2\,b^2 - p_1\,a^2}{b^2 - a^2} - C\left(1 + 2\,\frac{b^2 \ln b - a^2 \ln a}{b^2 - a^2}\right),$$

gde je C proizvoljna konstanta.

*) Rešenje ovog problema dao je *G. Lamé*, 1852 g.

Kad unesemo ove vrednosti u obrasce (192), nalazimo komponentne napone

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\left[\frac{p_2 b^2 - p_1 a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_1 - p_2}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r^2}\right] + \\ &+ \frac{2C}{b^2 - a^2}\left(\frac{a^2 b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2 \ln\frac{r}{b} + a^2 \ln\frac{a}{r}\right), \\ \sigma_\theta &= -\left[\frac{p_2 b^2 - p_1 a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_1 - p_2}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r^2}\right] + \\ &+ \frac{2C}{b^2 - a^2}\left(-\frac{a^2 b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2 \ln\frac{r}{b} + a^2 \ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right).\end{aligned}\right\} \quad (204)$$

Ovde pada u oči da su naponi dati kao zbir izraza u [ ], koji zavisi samo od dimenzija cevi i spoljnih sila, i izraza koji su proporcionalni proizvoljnoj konstanti C, a *potpuno nezavisni od spoljnih sila* p_1 i p_2. Ovu drugu vrstu naprezanja, koje bi moglo da postoju i za $p_1 = p_2 = 0$, ili tako zvano *početno naprezanje*, proučićemo docnije. Ovde ćemo nešto podrobnije razmotriti onaj deo naprezanja koji izazivaju spoljni pritisci, i to

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r &= -\frac{p_2 b^2 - p_1 a^2}{b^2 - a^2} - \frac{p_1 - p_2}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r^2}, \\ \sigma_\theta &= -\frac{p_2 b^2 - p_1 a^2}{b^2 - a^2} + \frac{p_1 - p_2}{b^2 - a^2}\frac{a^2 b^2}{r^2}.\end{aligned}\right\} \quad (205)$$

Često je p_2 znatno manje*) od p_1, te se može zanemariti. U tom slučaju obrasci (205) dobivaju još prostiji oblik

$$\sigma_r = \frac{p_1 a^2}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \qquad \sigma_\theta = \frac{p_1 a^2}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right).$$

Za $r = a$ imaju ovi naponi najveće vrednosti

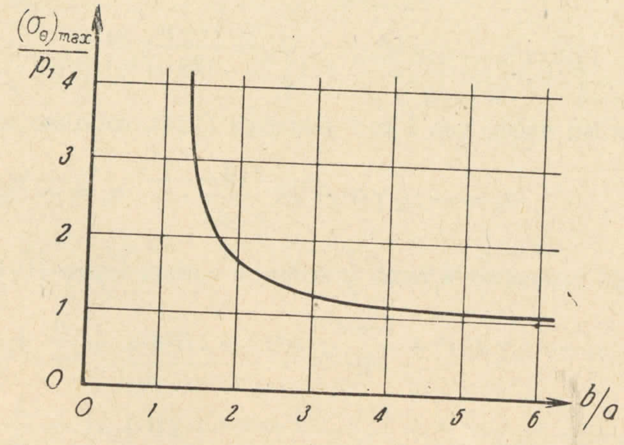
$$(\sigma_r)_{min} = -p_1, \quad (\sigma_\theta)_{max} = \frac{a^2 + b^2}{b^2 - a^2}\, p_1.$$

Od ova dva napona je $(\sigma_\theta)_{max}$, po apsolutnoj vrednosti, očevidno, veći. Na sl. 38 pretstavljena je grafički zavisnost između $(\sigma_\theta)_{max}/p_1$ i b/a. Iz dijagrama se vidi da povećanje debljine cevi preko izvesne granice skoro ne utiče na veličinu $(\sigma_\theta)_{max}$ koja asimptotski teži p_1. U toj činjenici je uzrok tegobe pri projektovanju cevi izloženih velikim pritiscima, kao što je to slučaj pri eksploziji u topovima.

*) Na primer, kad je to pritisak vazduha.

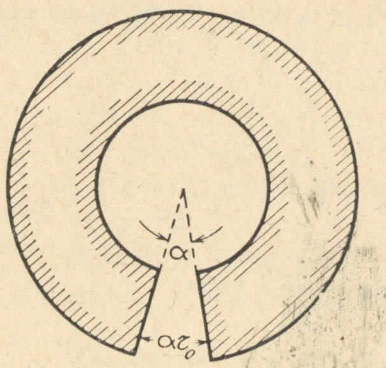
Članovi u izrazima (204) za napone, koji odgovaraju početnom naprezanju, biće jednaki izrazima (203) kad u njima zamenimo, iz jednačine (201),

$$C = -\frac{2M}{N}(b^2 - a^2).$$



Sl. 38

Oni, dakle, određuju napone koji potiču od čistog savijanja prstena. Takvo naprezanje može da nastane, na primer, i usled samog načina izrade prstena (sl. 39). Ako izradimo prsten u obliku ploče, čiji se krajevi nalaze na malom rastojanju αr_0, onda krajeve moramo zbliziti, a zatim ih moramo međusobno povezati. Njihov uzajamni uticaj biće sile koje odgovaraju toj vrsti naprezanja, tj. okretanju jednog kraja prema drugom kraju za ugao α, a to je upravo slučaj kod čistog savijanja luka sa 360°.



Sl. 39

Kao što smo u **t. 30** videli, pomeranja u_θ poprečnih preseka sastoje se iz translacije $-K \sin\theta$ i rotacije za ugao $4C\theta/E$. Na krajevima datog luka je $\theta = -\pi$ i $\theta = \pi$, prema tome je translacija jednaka nuli, a razlika rotacija krajnjih preseka jednaka je $8\pi C/E = \alpha$, odakle je $C = \alpha E/8\pi$.

32. Naprezanje diska pri obrtanju. — U ovom primeru simetričnog naprezanja dolazi u obzir samo zapreminska sila inercije*) $R = \gamma(\tilde{\omega}^2 r)$, gde je γ gustina materijala, a $\tilde{\omega}$ ugaona brzina diska. Ova sila dejstvuje u pravcu radijusa i ima potencijalnu energiju

$$U = -\tfrac{1}{2}\gamma\tilde{\omega}^2 r^2.$$

Jednačine (148) i (147) tada postaju

$$\sigma_x = -\tfrac{1}{2}\gamma\tilde{\omega}^2 r^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = -\tfrac{1}{2}\gamma\tilde{\omega}^2 r^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \quad (206)$$

i

$$\Delta_1\Delta_1\phi = 2(1-\mu)\gamma\tilde{\omega}^2. \quad (207)$$

*) Uticaj sopstvene težine zanemarujemo.

Opšti integral diferencijalne jednačine (207) biće jednak zbiru izraza (191) i partikularnog integrala jednačine (207), koji se može uzeti u obliku

$$\phi_1 = \frac{1-\mu}{32}\gamma \bar{\omega}^2 r^4. \tag{208}$$

Na isti način, kao i kod jednačina (184), nalazimo iz obrazaca (206)

$$\sigma_r = -{}^1/_2\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + \frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}, \qquad \sigma_\theta = -{}^1/_2\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + \frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}.$$

Kad zamenimo u ovim izrazima ϕ zbirom izraza (191) i (208), nalazimo

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= -{}^1/_2\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + \frac{1-\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + 2B + C + \frac{A}{r} + 2C\ln r, \\ \sigma_\theta &= -{}^1/_2\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + \frac{3(1-\mu)}{8}\gamma\bar{\omega}^2 r^2 + 2B + 3C - \frac{A}{r^2} + 2C\ln r. \end{aligned}\right\} \tag{209}$$

Kada disk nema otvora oko središta, mora konstanta A biti jednaka nuli, inače bi odgovarajući član za $r=0$ dao beskonačno veliki sabirak. Iz istog razloga mora biti jednaka nuli i konstanta C. Za određivanje konstante B služi onda uslov da na konturi diska nema spoljnih površinskih sila, tj. da je $\sigma_r = 0$ za $r=b$. Kada u taj uslov uvedemo za σ_r izraz iz jednačina (209), dobivamo

$$2B = {}^1/_2\gamma\bar{\omega}^2 b^2 - \frac{1-\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 b^2 = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 b^2,$$

prema tome je

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 (b^2 - r^2),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 b^2 - \frac{1+3\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 r^2.$$

Najveći napon nalazimo za $r=0$

$$(\sigma_\theta)_{max} = (\sigma_r)_{max} = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 b^2. \tag{210}$$

U slučaju da je oko središta diska isečen koncentrični otvor poluprečnika a, moraju biti zadovoljeni uslovi da je $\sigma_r = 0$ za $r=a$ i $r=b$. Kad u te uslove uvedemo izraze (209), dobivamo

$$-\frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 a^2 + 2B + \frac{A}{a^2} + C(1+2\ln a) = 0,$$

$$-\frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 b^2 + 2B + \frac{A}{b^2} + C(1+2\ln b) = 0,$$

a odatle

$$A = -\frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2 a^2 b^2 + 2C\ln\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2 b^2}{b^2-a^2},$$

$$2B = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2(a^2+b^2) - C\left\{1 + \frac{2(b^2\ln b - a^2\ln a)}{b^2-a^2}\right\};$$

prema tome

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2\left(a^2 + b^2 - \frac{a^2b^2}{r^2} - r^2\right) +$$
$$+ \frac{2C}{b^2-a^2}\left(\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r}\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{3+\mu}{8}\gamma\bar{\omega}^2\left(a^2 + b^2 + \frac{a^2b^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu}r^2\right) +$$
$$+ \frac{2C}{b^2-a^2}\left(-\frac{a^2b^2}{r^2}\ln\frac{b}{a} + b^2\ln\frac{r}{b} + a^2\ln\frac{a}{r} + b^2 - a^2\right).$$

Slično izrazima (204) dobili smo, osim napona koji potiču od obrtanja diska, još i napone od početnog naprezanja.

Najveći napon σ_θ usled obrtanja biće za $r=a$

$$(\sigma_\theta)_{max} = \frac{3+\mu}{4}\gamma\bar{\omega}^2\left(b^2 + \frac{1-\mu}{3+\mu}a^2\right). \tag{211}$$

Kad a teži nuli, ovaj napon teži vrednosti koja je dvaputa veća od one za disk bez otvora [obrazac (210)], no σ_θ veoma brzo opada čim se i za malo pomerimo od $r=a$. O istoj pojavi lokalnog naprezanja u neposrednoj blizini oslabljenog mesta biće govora i u t. **35.**

Najveći radijalni napon $(\sigma_r)_{max}$ za $r=\sqrt{ab}$, dvaputa je manji od vrednosti za $(\sigma_\theta)_{max}$, određene obrascem (211).

33. Savijanje grede promenljiva preseka. — Rešenja proučena u tt. **30—32** potiču iz obrasca (191) za funkciju ϕ zavisnu *samo* od r. Da vidimo sad kakav oblik ima ta funkcija kad zavisi *samo* od θ.

U tom slučaju diferencijalna jednačina (185) dobiva oblik

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{1}{r^2}\frac{d^2\phi}{d\theta^2}\right) = 0,$$

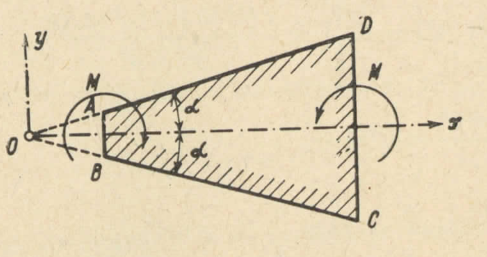
odnosno

$$4\frac{d^2\phi}{d\theta^2} + \frac{d^4\phi}{d\theta^4} = 0.$$

Opšti integral ove jednačine

$$\phi = A\cos 2\theta + B\sin 2\theta + C\theta + D$$

sadrži 4 proizvoljne konstante A, B, C i D. Poslednju možemo uzeti jednakom nuli, jer njena vrednost ne utiče na veličine napona date izrazima (184); ostale tri konstante treba odrediti iz konturnih uslova.



Sl. 40

Ako postavimo uslov da na stranama AD i BC trapeza (sl. 40) nema spoljnih sila, mora za $\theta = \pm \alpha$ biti

$$\sigma_\theta = 0, \qquad \tau_{r\theta} = 0.$$

Kao što se vidi iz obrazaca (184), prvi od tih uslova je uvek zadovoljen, ako ϕ ne zavisi od r, dok iz drugog uslova sledi za $\theta = \pm \alpha$

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \frac{1}{r^2}\left(-2A\sin 2\theta + 2B\cos 2\theta + C\right) = 0,$$

odnosno

$$A = 0, \qquad C = -2B\cos 2\alpha,$$

tako, da je

$$\phi = B(\sin 2\theta - 2\theta\cos 2\alpha).$$

Da bismo izrazili sile u tačkama strana AB i CD, moramo naći σ_x i τ_{xy}, koji su, prema jednačinama (181),

$$\sigma_x = \frac{\cos\theta}{r^2}\left(-2\sin\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \cos\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right) =$$

$$= B\frac{\cos\theta}{r^2}\left\{-4\sin\theta(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) - 4\cos\theta\sin 2\theta\right\} =$$

$$= B\frac{4\sin\theta\cos\theta}{r^2}\left(1 - \cos 2\alpha - 4\cos^2\theta\right),$$

$$\tau_{xy} = \frac{1}{r^2}\left\{\sin^2\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} - \cos\theta\left(\cos\theta\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \sin\theta\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2}\right)\right\} =$$

$$= \frac{B}{r^2}\left\{2\sin^2\theta(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) - \cos\theta\left[2\cos\theta(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) - \right.\right.$$

$$\left.\left. - 4\sin\theta\sin 2\theta\right]\right\} = \frac{B}{r^2}(-\cos 4\theta + \cos 2\alpha\cos 2\theta).$$

Rezultanta normalnih sila u tačkama strane CD ($x = a$), posle zamene

$$r^2 = \frac{a^2}{\cos^2\theta}, \qquad dy = d(\operatorname{arc\,tg}\theta) = \frac{a}{\cos^2\theta}d\theta,$$

biće

$$\int_C^D \sigma_x\,dy = \frac{4B}{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin\theta\cos\theta(1 + \cos 2\alpha - 4\cos^2\theta)\,d\theta = 0.$$

Isto tako biće i rezultanta tangencijalnih sila

$$\int_C^D \tau_{xy}\,dy = \frac{B}{a}\int_{-\alpha}^{\alpha}(-\cos 4\theta + \cos 2\alpha\cos 2\theta)\,d\theta =$$

$$= \frac{B}{a}\left(-{}^1/_2\sin 4\alpha + \cos 2\alpha\sin 2\alpha\right) = 0.$$

Međutim, zbir momenata sila u tačkama strane CD, posle zamene $y = a\operatorname{tg}\alpha$, biće

$$M = -\int_C^D y\,\sigma_x\,dy = -4B\int_{-\alpha}^{\alpha}\sin^2\theta(1 + \cos 2\alpha - 4\cos^2\theta)\,d\theta =$$

$$= -4B\left\{(1 + \cos 2\alpha)(-{}^1/_2\sin 2\alpha + \alpha) + {}^1/_4\sin 4\alpha - \alpha\right\} =$$

$$= 4B({}^1/_2\sin 2\alpha - \alpha\cos 2\alpha).$$

Zbir momenata sila u tačkama strane AB biće $-M$.

Dakle, sa

$$B = \frac{M}{2\sin 2\alpha - 4\alpha\cos 2\alpha},$$

nađena funkcija ϕ odgovara čistom savijanju*) grede, čiji je poprečni presek uzan pravougaonik, a visina $h = 2x\operatorname{tg}\alpha$, odnosno moment inercije površine preseka $I = {}^2/_3 x^3 \operatorname{tg}^3\alpha$.

Sa nađenim izrazom za

$$\phi = \frac{{}^1/_2\sin 2\theta - \theta\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}M,$$

nalazimo iz jednačina (184)

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\theta^2} = -\frac{2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{r^2},$$

$$\sigma_\theta = 0,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial\phi}{\partial\theta} = \frac{\cos 2\theta - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{r^2},$$

*) Ovo rešenje pripada *C. E. Inglis*-u, Cambridge.

a iz jednačina (186), (187) i (188)

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u_r}{\partial r} &= e_r = -\frac{2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2},\\
\frac{u_r}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} &= e_\theta = -\frac{2\mu \sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2},\\
\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} &= g_{r\theta} = \frac{2(1+\mu)(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2}.
\end{aligned}\right\} \quad (212)$$

Iz prve jednačine sledi

$$u_r = \frac{2\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r} + f_1(\theta),$$

gde je $f_1(\theta)$ zasad proizvoljna funkcija od θ. Onda druga jednačina (212) daje

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = -\frac{2(1-\mu)\sin 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r} - f_1(\theta),$$

odnosno

$$u_\theta = \frac{(1-\mu)\cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r} - \int f_1(\theta)\, d\theta + f_2(r),$$

gde je $f_2(r)$ zasad proizvoljna funkcija od r. Treća od jednačina (212) onda daje

$$\frac{2(1+\mu)(\cos 2\theta - \cos 2\alpha)}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2} = \frac{4\cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2} + \frac{1}{r} f_1'(\theta) -$$

$$- \frac{2(1-\mu)\cos 2\theta}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^2} + \frac{1}{r}\int f_1(\theta)\, d\theta + f_2'(r) - \frac{1}{r} f_2(r),$$

ili

$$-\frac{2(1+\mu)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r} - r f_2'(r) + f_2(r) = f_1(\theta) + \int f_1(\theta)\, d\theta.$$

Leva strana ove jednačine zavisi samo od r, dok je desna strana funkcija samo od θ. Moraju, dakle, obe biti jednake nekoj konstanti D, i, prema tome

$$f_1(\theta) = A\cos\theta + B\sin\theta,$$

$$f_2(r) = \frac{(1+\mu)\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r} + C r + D,$$

gde su A, B i C takođe proizvoljne konstante.

Krivina elastične linije

$$\left(\frac{d^2 v}{d x^2}\right)_{y=0} = \left(\frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2}\right)_{\theta=0} = \frac{2[1-\mu+(1+\mu)\cos 2\alpha]}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha}\frac{M}{E r^3} = \frac{M}{EI} f(\alpha),$$

gde je sa $f(\alpha)$ obeležen koeficijent

$$f(\alpha) = \frac{4}{3}\frac{\operatorname{tg}^3\alpha[(1-\mu)+(1+\mu)\cos 2\alpha]}{\sin 2\alpha - 2\alpha\cos 2\alpha},$$

kojim se nađeni obrazac za krivinu razlikuje od onog za grede prizmatičnog oblika. Kao što se vidi iz tablice, $f(\alpha)$ se malo razlikuje od jedinice. Time je, donekle opravdano proširenje *Bernoulli-Euler*-ova obrasca za krivinu

$\alpha =$	0	$^1/_{12}\pi$	$^1/_6\pi$	$1\,^1/_4\pi$
$f(\alpha)=$	1	1,01	1,03	1

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

na grede promenljiva preseka, koje se često vrši u tehnici.

34. Savijanje kružnog luka silom. — Rešenje u **t. 30—32** potiču iz obrasca (191) za funkciju ϕ simetričnu u odnosu na koordinatni početak, a rešenje u **t. 33** od funkcije ϕ zavisne samo od θ. Potražimo sad rešenje diferencijalne jednačine (185) u obliku

$$\phi(r,\theta) = f(r)\sin\theta,$$

gde je $f(r)$ funkcija samo od r. Ako ovaj izraz unesemo u diferencijalnu jednačinu (185), dobićemo

$$\left(\frac{d^2}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{d r} - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{1}{r}\frac{d f}{d r} - \frac{1}{r^2} f\right) = 0,$$

ili, ako se oslobodimo zagrada,

$$\frac{d^4 f}{d r^4} + \frac{2}{r}\frac{d^3 f}{d r^3} - \frac{3}{r^2}\frac{d^2 f}{d r^2} + \frac{3}{r^3}\frac{d f}{d r} - \frac{3}{r^4} f = 0. \quad (213)$$

Na isti način kao i u **t. 29** zamenićemo r sa e^t i ako sa f', f'', f''' i f^{IV} obeležimo izvod od f po t, dobićemo iz jednačine (213)

$$f^{IV} - 4 f''' + 2 f'' + 4 f' - 3 f = 0,$$

tj. linearnu diferencijalnu jednačinu sa konstantnim koeficijentima. Opšti njen integral*) je

$$f = A e^{3t} + B e^{-t} + e^t (C + D t) = A r^3 + \frac{B}{r} + (C + D\ln r)\, r.$$

Prema tome

$$\phi = \left(A r^3 + \frac{B}{r} + C r + D r \ln r\right)\sin\theta$$

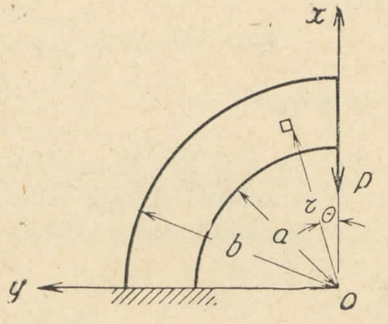
*) Karakteristična jednačina $x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x - 3 = 0$, ima četiri korena: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = -1$.

i

$$\sigma_r = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial r} = \left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} = \left(6Ar + \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\sin\theta,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\right) = -\left(2Ar - \frac{2B}{r^3} + \frac{D}{r}\right)\cos\theta.$$



Sl 41

Iz ovih obrazaca možemo naći rešenje za luk koji je uklješten na jednom kraju, a opterećen silom P na drugom kraju (sl. 41).

Konturni uslovi za $r = a$ i $r = b$ glase u našem slučaju $\sigma_r = 0$ i $\tau_{r\theta} = 0$. Prema tome je

$$\left.\begin{aligned} 2Aa - \frac{2B}{a^3} + \frac{D}{a} = 0, \\ 2Ab - \frac{2B}{b^3} + \frac{D}{b} = 0. \end{aligned}\right\} \quad (214)$$

Osim toga mora za $\theta = 0$ biti

$$\sigma_\theta = 0, \qquad \int_a^b (\tau_{r\theta})_{\theta=0}\, dr = P.$$

Prvi uslov je očevidno zadovoljen, a iz drugog uslova sleduje

$$-A(b^2 - a^2) + \frac{B(b^2 - a^2)}{a^2 b^2} - D \ln\frac{b}{a} = P. \qquad (215)$$

Kad rešimo jednačine (214) i (215), nalazimo

$$A = \frac{P}{2N}, \qquad B = -\frac{P a^2 b^2}{2N}, \qquad D = -\frac{P(a^2 + b^2)}{N},$$

gde je sa N obeležen izraz (202).

Na slobodnom kraju je

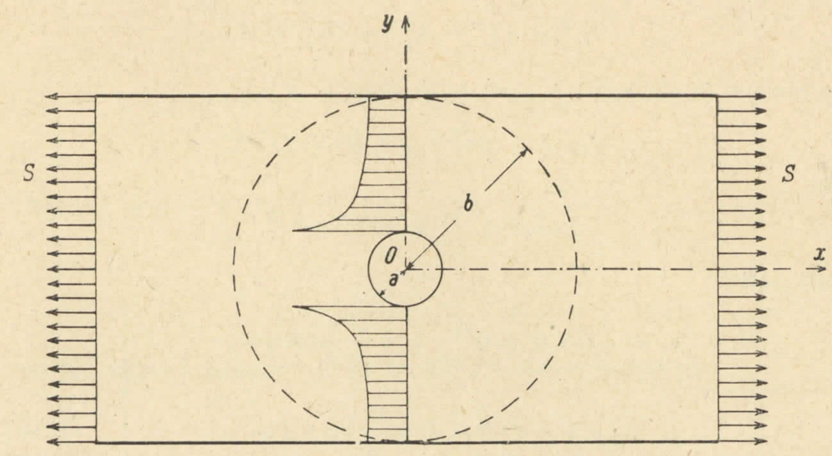
$$\sigma_\theta = 0, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{P}{N}\left(r + \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right),$$

a na uklještenom kraju je

$$\tau_{r\theta} = 0, \quad \sigma_\theta = \frac{P}{N}\left(3r - \frac{a^2 b^2}{r^3} - \frac{a^2 + b^2}{r}\right).$$

Slično ovom rešenju mogli bismo naći rešenje*) oblika $f(r)\cos\theta$. Njemu bi odgovaralo opterećenje slobodnog krajnjeg preseka silom upravnom na njegovoj ravni i spregom. Uticaj sprega može se eleminisati pomoću rešenja (203); u tom slučaju ostala bi samo sila upravna na ravni slobodnog preseka. Ovo rešenje, zajedno sa rešenjem ovog §-a, odgovaralo bi opterećenju slobodnog preseka silom proizvoljnog pravca.

35. Zatezanje ploče oslabljene kružnim otvorom.**) — Posmatrajmo ploču oslabljenu u sredini malim kružnim otvorom, poluprečnika a, zategnutu jednoliko podeljenim silama S u pravcu x ose (sl. 42).



Sl. 42

Pretpostavimo da se u tačkama kruga poluprečnika $r = b$ ne oseća uticaj otvora, kad je b veliko u odnosu prema a. Dakle, u tim tačkama mora biti

$$\sigma_x = S, \qquad \sigma_y = 0, \qquad \tau_{xy} = 0,$$

ili

$$\sigma_r = S\cos^2\theta = {}^1/_2\, S(1 + \cos 2\theta),$$

$$\tau_{r\theta} = -{}^1/_2\, S \sin 2\theta.$$

Posmatrajući sad prsten poluprečnika a i b vidimo da na njegovom spoljnem obimu dejstvuju površinske sile: 1) jednoliko podeljene sile zatezanja $^1/_2\, S$ radijalnog pravca, njima odgovara naprezanje određeno jednačinama (205); 2) opterećenje sa normalnom komponentom $^1/_2\, S\cos 2\theta$ i tangencijalnom komponentom $-\,^1/_2\, S\sin 2\theta$. Funkciju napona ϕ, koja bi odgovarala ovom drugom delu opterećenja, prirodno je da potražimo u obliku

$$\phi = f(r)\cos 2\theta,$$

gde je $f(r)$ funkcija samo od r.

*) Sva ova rešenja pripadaju *H. Golovin*-u.
**) Rešenje ovog problema je dao nemački inženjer *G. Kirsch*, 1898 g.

Kad zamenimo gornji izraz u jednačini (185), imamo

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}-\frac{4}{r^2}\right)\left(\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{df}{dr}-\frac{4f}{r^2}\right)=0,$$

ili

$$\frac{d^4 f}{dr^4}+\frac{2}{r}\frac{d^3 f}{dr^3}-\frac{9}{r^2}\frac{d^2 f}{dr^2}+\frac{9}{r^3}\frac{df}{dr}=0.$$

Ako uvedemo novu promenljivu $t=\ln r$ i obeležimo, kao i ranije, sa $f', f'', \ldots$ izvode od f po t, gornja diferencijalna jednačina transformiše se u diferencijalnu jednačinu

$$f^{V}-4f'''-4f''+16f'=0$$

sa konstantnim koeficijentima; njen opšti integral je*)

$$f=A+Be^{-2t}+Ce^{2t}+De^{4t},$$

odnosno

$$f=D+\frac{C}{r^2}+Ar^2+Br^4$$

i, prema (184)

$$\left.\begin{aligned}\sigma_r&=-\left(2A+6\frac{C}{r^4}+4\frac{D}{r^2}\right)\cos 2\theta,\\ \sigma_\theta&=\left(2A+12Br^2+6\frac{C}{r^4}\right)\cos 2\theta,\\ \tau_{r\theta}&=\left(2A+6Br^2-6\frac{C}{r^4}-2\frac{D}{r^2}\right)\sin 2\theta.\end{aligned}\right\}\quad(216)$$

Konturni uslovi glase da, za $r=a$, mora biti $\sigma_r=0$ i $\tau_{r\theta}=0$, a za $r=b$ mora biti $\sigma_r={}^1/_2 S\cos 2\theta$ i $\tau_{r\theta}=-{}^1/_2 S\sin 2\theta$. Iz ovih uslova proizilazi

$$2A+6\frac{C}{a^4}+4\frac{D}{a^2}=0,$$

$$2A+6Ba^2-6\frac{C}{a^4}-2\frac{D}{a^2}=0,$$

$$2A+6\frac{C}{b^4}+4\frac{D}{b^2}=-\frac{S}{2},$$

$$2A+6Bb^2-6\frac{C}{b^4}-2\frac{D}{b^2}=-\frac{S}{2}.$$

*) Karakteristična jednačina: $x^4-4x^3-4x^2+16x=0$ ima četiri korena: $x_1=0$, $x_2=4$, $x_3=2$, $x_4=-2$.

Rešimo li gornji sistem jednačina, zanemarujući veličine reda a^2/b^2 u odnosu prema jedinici, dobivamo

$$A=-\frac{S}{4},\qquad B=0,\qquad C=-\frac{a^4}{4}S,\qquad D=\frac{a^2}{2}S.$$

Sad možemo iz (216) i (205) naći ukupne napone

$$\sigma_r=\frac{S}{2}\left(1-\frac{a^2}{r^2}\right)+\frac{S}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}-4\frac{a^2}{r^2}\right)\cos 2\theta,$$

$$\sigma_\theta=\frac{S}{2}\left(1+\frac{a^2}{r^2}\right)-\frac{S}{2}\left(1+\frac{3a^4}{r^4}\right)\cos 2\theta.$$

$$\tau_{r\theta}=-\frac{S}{2}\left(1-3\frac{a^4}{r^4}-2\frac{a^2}{r^2}\right)\sin 2\theta.$$

Najveći napon je σ_θ, za $\theta=\frac{\pi}{2}$ ili $\theta=\frac{3\pi}{2}$,

$$\sigma_\theta=\frac{S}{2}\left(2+\frac{a^2}{r^2}+3\frac{a^4}{r^4}\right).$$

Dijagram tog napona pokazan je na sl. 42. Za $r=a$ jednak je

$$(\sigma_\theta)_{max}=3S,$$

tj triput je veći od prosečnog napona u ploči.

IV

LOKALNO NAPREZANJE. DEFORMACIONI RAD

36. Koncentrisana sila. — Kad su zapreminske sile jednake nuli jednačina (41) dobiva oblik *Laplace*-ove jednačine

$$\Delta \varepsilon = 0, \tag{217}$$

dakle, zapreminska dilatacija je u ovom slučaju harmoniska funkcija.

Između velikog broja poznatih harmoniskih funkcija najprostiji oblik imaju t. zv. *sferične funkcije*. Tako se zove funkcija r^{-1} (gde je $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$) i sve funkcije koje se mogu dobiti bilo diferenciranjem, bilo integriranjem te funkcije, jedanput ili više puta po jednoj ili više promenljivih.*) Da je r^{-1} stvarno harmoniska funkcija lako se može utvrditi diferenciranjem. Na primer imamo

$$\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = -r^{-2}\frac{\partial r}{\partial x} = -r^{-2}\cdot\frac{x}{r} = -r^{-3}x,$$

$$\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} = 3r^{-4}\frac{\partial r}{\partial x}x - r^{-3} = 3r^{-5}x^2 - r^3.$$

Slično tome je

$$\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2} = 3r^{-5}y^2 - r^3, \qquad \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2} = 3r^{-5}z^2 - r^3,$$

dakle

$$\Delta r^{-1} = 3r^{-5}(x^2 + y^2 + z^2) - 3r^{-3} = 0.$$

Uzmimo za ε jednu od sferičnih funkcija, na primer,

$$\varepsilon = 2(1 - 2\mu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}. \tag{218}$$

*) Da se diferenciranjem ma koje harmoniske funkcije $\varphi(x, y, z)$ po nekoj promenljivoj t dobiva harmoniska funkcija očigledno je

$$\Delta\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\Delta \varphi) = 0.$$

Isto važi i za integral harmoniske funkcije

$$\Delta \int \varphi\, d t = \int (\Delta \varphi)\, d t = 0.$$

Ako uvedemo taj izraz u jednačine (A'), nalazimo

$$\Delta u = -2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z\, \partial x}, \quad \Delta v = -2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z\, \partial y}, \quad \Delta w = -2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}. \tag{219}$$

Partikularno rešenje ovih jednačina moglo bi da bude

$$u = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}, \qquad v = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}, \qquad w = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}, \tag{220}$$

jer je onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -z\frac{\partial^3 r^{-1}}{\partial x^3}, \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -z\frac{\partial^3 r^{-1}}{\partial x\, \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\, \partial z} - z\frac{\partial^3 r^{-1}}{\partial x\, \partial z^2},$$

te, prema tome,

$$\Delta u = -z\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}\right) - 2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\, \partial z} = -2\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x\, \partial z},$$

i slično za v i w. No rešenje (220) ne bi odgovaralo pretpostavci izraženoj jednačinom (218), jer bi bilo

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -z\left(\frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r^{-1}}{\partial z^2}\right) - \frac{\partial r^{-1}}{\partial z} = -\frac{\partial r^{-1}}{\partial z},$$

mesto

$$\varepsilon = 2(1 - 2\mu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial z}. \tag{218}$$

Pokušajmo da zadovoljimo jednačinu (218) na ovaj način. Iz jednačina (219) vidi se da će izrazi (220) zadovoljavati te jednačine i u slučaju, ako nekom od njih dodamo proizvoljnu *harmonisku* funkciju $\varphi(x, y, z)$. Ako dodamo takvu funkciju, na primer, izrazu za w, biće

$$u = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial x}, \qquad v = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial y}, \qquad w = -z\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} + \varphi \tag{221}$$

i

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Kad uporedimo ovaj izraz sa desnom stranom jednačine (218), vidimo da će ona biti zadovoljena sa

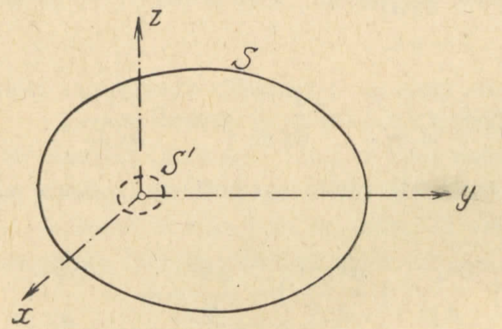
$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = (3 - 4\mu)\frac{\partial r^{-1}}{\partial z};$$

partikularno rešenje ove jednačine je

$$\varphi = (3 - 4\mu)\, r^{-1}.$$

Dakle, kad uvedemo ovaj izraz u jednačinc (221), one će dati partikularno rešenje diferencijalnih jednačina (A′), a pošto su ove linearne, isti izrazi, pomnoženi proizvoljnom konstantom A, biće takođe njihovo rešenje

$$\left.\begin{aligned} u &= -A\,z\frac{\partial r^{-1}}{\partial x} = A\,\frac{x\,z}{r^3}, \\ v &= -A\,z\frac{\partial r^{-1}}{\partial y} = A\,\frac{y\,z}{r^3}, \\ w &= -A\left\{z\frac{\partial r^{-1}}{\partial z} - (3-4\mu)\,r^{-1}\right\} = A\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{3-4\mu}{r}\right). \end{aligned}\right\} \quad (222)$$



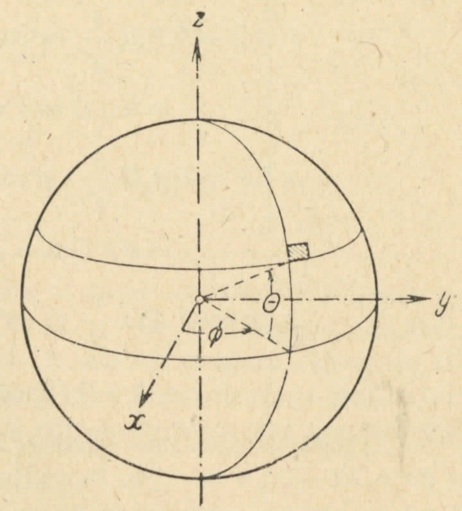
Sl. 43

Izrazi (222) daju partikularni integral*) jednačina (A′); za $r=0$, tj. u početku koordinata, oni gube smisao. Mora se, dakle, početak koordinata smestiti van tela ili u nekoj šupljini u telu (sl. 43). Izrazima (222) odgovaraju komponentni naponi iz jednačina (39)

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= 2\,A\,G\frac{z}{r^3}\left(1-2\,\mu-3\,\frac{x^2}{r^2}\right), \\ \sigma_y &= 2\,A\,G\frac{z}{r^3}\left(1-2\,\mu-3\,\frac{y^2}{r^2}\right), \\ \sigma_z &= -2\,A\,G\frac{z}{r^3}\left(1-2\,\mu+3\,\frac{z^2}{r^2}\right), \\ \tau_x &= -2\,A\,G\frac{y}{r^3}\left(1-2\,\mu+3\,\frac{z^2}{r^2}\right), \\ \tau_y &= -2\,A\,G\frac{x}{r^3}\left(1-2\,\mu+3\,\frac{z^2}{r^2}\right), \\ \tau_z &= -6\,A\,G\,\frac{x\,y\,z}{r^5}. \end{aligned}\right\} \quad (223)$$

*) Ovaj integral je pronašao čuveni engleski fizičar *Lord Kelvin* 1848 g. *J. Boussinesq* jedan od najslavnijih *Saint-Venant*-ovih đaka, našao ga je ponovo 1878 g., i nazvao „prvim tipom prostih rešenja".

Jednačine (222) i (223) izvedene su pod pretpostavkom da zapreminskih sila nema, dakle, površinske sile koje napadaju telo moraju stajati u ravnoteži. To znači, ako je početak koordinata u nekoj šupljini S', rezultanta i redukcioni moment sila na površini te šupljine razlikuju se samo znakom od rezultante i redukcionog momenta sila na ostaloj površini S. Ali, ako je površina S data, sile na njoj potpuno su određene i to jednačinama (222) i (α), a to znači da su potpuno određeni rezultanta i redukcioni moment sila i na površini šupljine S', tj. oni ne zavise ni od oblika, ni od dimenzija te šupljine. Možemo ih izračunati, uzevši šupljinu, na primer, u obliku lopte (sl. 44) proizvoljna poluprečnika ρ.



Sl. 44

Označimo sa φ i θ polarne koordinate tačke na toj lopti; element površine lopte je onda $dS' = \rho^2 \cos\theta\, d\varphi\, d\theta$. Iz jednačina ($\beta$) i (223) nalazimo sile u tački te površine, ako izvršimo zamene $\alpha = -x/\rho$, $\beta = -y/\rho$, $\gamma = -z/\rho$.

$$p_x = -\frac{1}{\rho}(\sigma_x x + \tau_z y + \tau_y z) = 2\frac{A\,G}{\rho^4}\left\{-x\,z\left(1-2\mu-3\,\frac{x^2}{\rho^2}\right)+\right.$$

$$\left. + 3\,\frac{x\,y^2\,z}{\rho^2} + x\,z\left(1-2\mu+3\,\frac{z^2}{\rho^2}\right)\right\} = 6\,A\,G\frac{x\,z}{\rho^4},$$

$$p_y = -\frac{1}{\rho}(\sigma_y y + \tau_x z + \tau_z x) = 2\frac{A\,G}{\rho^4}\left\{-y\,z\left(1-2\mu-3\,\frac{y^2}{\rho^2}\right)+\right.$$

$$\left. + y\,z\left(1-2\mu+3\,\frac{z^2}{\rho^2}\right) + 3\,\frac{x^2\,y\,z}{\rho^2}\right\} = 6\,A\,G\frac{y\,z}{\rho^4},$$

$$p_z = -\frac{1}{\rho}(\sigma_z z + \tau_y x + \tau_x y) = 2\frac{A\,G}{\rho^4}\left\{z^2\left(1-2\mu+3\,\frac{z^2}{\rho^2}\right)+\right.$$

$$\left. + x^2\left(1-2\mu+3\,\frac{z^2}{\rho^2}\right) + y^2\left(1-2\mu+3\,\frac{z^2}{\rho^2}\right)\right\} =$$

$$= 2\frac{A\,G}{\rho^2}\left(3\,\frac{z^2}{\rho^2} + 1 - 2\mu\right),$$

a kad unesemo $x = \rho\cos\theta\,\cos\varphi$, $y = \cos\theta\,\sin\varphi$ i $z = \rho\sin\theta$, dobivamo projekcije sile, koja napada element površine dS',

$$p_x\, dS' = 6\,A\,G\frac{1}{\rho^4}\cdot\rho^2\cos\theta\cos\varphi\,\sin\theta\cdot\rho^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 6\,A\,G\sin\theta\,\cos^2\theta\,\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta\,,$$

$$p_y\, dS' = 6\,A\,G\frac{1}{\rho^4}\cdot\rho^2\cos\theta\,\sin\varphi\,\sin\theta\cdot\rho^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 6\,A\,G\sin\theta\,\cos^2\theta\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta\,,$$

$$p_z\, dS' = 2\,A\,G\frac{1}{\rho^2}\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cdot\rho^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 2\,A\,G\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,.$$

Projekcije rezultante nalazimo integrisanjem ovih izraza po φ od 0 do 2π, i po θ od $-{}^1/_2\pi$ do ${}^1/_2\pi$. Projekcije na x i y ose su jednake nuli, jer su

$$\int_0^{2\pi}\cos\varphi\,d\varphi = 0\,, \qquad \int_0^{2\pi}\sin\varphi\,d\varphi = 0\,.$$

Pre no što pređemo na izračunavanje projekcije na z osu, pokazaćemo da je redukcioni moment jednak nuli.

Momente u pogledu na koordinatne ose dobivamo integrisanjem izraza

$$(p_z\, y - p_y\, z)\, dS' = 2\,A\,G\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos\theta\cdot\rho\cos\theta\,\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta -$$

$$- 6\,A\,G\sin\theta\,\cos^2\theta\,\sin\varphi\cdot\rho\sin\theta\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 2\,A\,G\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos^2\theta\,\sin\varphi\cdot\rho\,d\varphi\,d\theta -$$

$$- 6\,A\,G\sin^2\theta\,\cos^2\theta\,\sin\varphi\cdot\rho\,d\varphi\,d\theta\,,$$

$$(p_x\, z - p_z\, x)\, dS' = 6\,A\,G\sin\theta\,\cos^2\varphi\cdot\rho\sin\theta\,d\varphi\,d\theta -$$

$$- 2\,A\,G\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos\theta\cdot\rho\cos\theta\,\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta =$$

$$= 6\,A\,G\sin^2\theta\,\cos^2\theta\,\cos\varphi\cdot\rho\,d\varphi\,d\theta -$$

$$- 2\,A\,G\,(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos^2\theta\cos\varphi\cdot\rho\,d\varphi\,d\theta\,,$$

$$(p_y\, x - p_x\, y)\, dS' = 6\,A\,G\sin\theta\,\cos^2\theta\,\sin\varphi\cdot\rho\,\cos\theta\cos\varphi\,d\varphi\,d\theta -$$

$$- 6\,A\,G\sin\theta\cos^2\theta\cos\varphi\cdot\rho\cos\theta\sin\varphi\,d\varphi\,d\theta = 0\,.$$

Prva dva od ovih izraza pri integrisanju po φ, od 0 do 2π, slično gornjim, daće nule; treći je izraz jednak nuli. Dakle, sve površinske sile u tačkama šupljine S'

se redukuju na rezultantu upravljenu duž z ose, sa napadnom tačkom u koordinatnom početku. Veličina te sile je

$$\left.\begin{aligned} P &= 2\,A\,G\int_0^{2\pi}\int_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi}(3\sin^2\theta + 1 - 2\mu)\cos\theta\,d\theta\,d\varphi = \\ &= 4\pi\,A\,G\Big|\sin^3\theta + (1-2\mu)\sin\theta\Big|_{-{}^1/_2\pi}^{{}^1/_2\pi} = 16\pi(1-\mu)\,A\,G. \end{aligned}\right\}\qquad(224)$$

Kao što smo i očekivali, veličina sile *ne zavisi* od poluprečnika lopte ρ; to znači da obrasci (222) i (223) važe i za slučaj vrlo male šupljine, drukčije rečeno, važe za *silu koncentrisanu u tački*. Iz nađenih obrazaca vidi se da su pomeranja pri ovoj vrsti naprezanja obrnuto proporcionalna otstojanju posmatrane tačke od napadne tačke sile, dok su naponi obrnuto proporcionalni kvadratu tog otstojanja.

37. Lokalno naprezanje. — Obrasci (222) određuju pomeranja tačaka tela napregnutog koncentrisanom silom $P = 16\pi(1-\mu)\,A\,G$ upravljenom duž z ose, sa napadnom tačkom u koordinatnom početku; ta pomeranja smo obežili sa u, v i w. Pomerimo sad napadnu tačku sile duž z ose za malu dužinu h, dakle u položaj (0, 0, h). Pomeranja tačaka koja odgovaraju tom novom položaju napadne tačke obeležimo sa u', v' i w'. Njih možemo naći iz izraza (222) zamenom z sa $z - h$, a kako je h malo, možemo te izraze razviti u Taylor-ov red i zanemariti članove drugog reda

$$\left.\begin{aligned} u' &= u - \frac{\partial u}{\partial z}h = A\frac{x\,z}{r^3} - A\Big(\frac{x}{r^3} - 3\frac{x\,z^2}{r^5}\Big)h\,, \\ v' &= v - \frac{\partial v}{\partial z}h = A\frac{y\,z}{r^3} - A\Big(\frac{y}{r^3} - 3\frac{y\,z^2}{r^5}\Big)h\,, \\ w' &= w - \frac{\partial w}{\partial z}h = A\Big(\frac{z^2}{r^3} - \frac{3-4\mu}{r}\Big) + A\Big(3\frac{z^3}{r^5} + \frac{1-4\mu}{r^3}z\Big)h\,. \end{aligned}\right\}(225)$$

Pretpostavimo sad, da telo napadaju istovremeno dve sile iste veličine i istog pravca, a suprotnog smera, i to sila P u tački (0, 0, h) i sila $-P$ u tački (0, 0, 0). Toj vrsti naprezanja odgovaraju pomeranja koja možemo naći putem sledećeg razmatranja. Diferencijalne jednačine (A') su linearne, dakle, algebarski zbir partikularnih rešenja tih jednačina je takođe njihovo rešenje. Kad pomnožimo izraze (222) sa (—1), dobićemo rešenje koje odgovara naprezanju silom $-P$, sa napadnom tačkom u koordinatnom početku. Ako mu, zatim, dodamo izraze (225), nalazimo rešenje za telo napregnuto dvema koncentrisanim silama iste veličine: jednom, sa smerom negativne z ose, u koordinantnom početku i drugom, sa smerom pozitivne z ose, u tački pomerenoj od koordinatnog početka u smeru z ose za malu dužinu h

$$\left.\begin{aligned} u''=u'-u&=-\frac{\partial u}{\partial z}h=-A\frac{x}{r^3}\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)h, \\ v''=v'-v&=-\frac{\partial v}{\partial z}h=-A\frac{y}{r^3}\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)h, \\ w''=w'-w&=-\frac{\partial w}{\partial z}h=A\frac{z}{r^3}\left(1-4\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right)h. \end{aligned}\right\} \quad (226)$$

Iz jednačina (226) vidi se da dve sile iste veličine i istog pravca a suprotnog smera, čije se napadne tačke nalaze na malom rastojanju, izazivaju pomeranja tačaka proporcionalna tom rastojanju, a obrnuto proporcionalna kvadratu otstojanja posmatrane tačke od napadne tačke jedne od tih sila.

Komponentne napone za tu vrstu naprezanja možemo naći iz jednačine (223) na isti način*), kao što smo našli i pomeranja tačaka

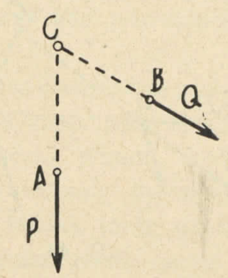
$$\left.\begin{aligned} \sigma_x''&=-\frac{\partial \sigma_x}{\partial z}h=-2\frac{AG}{r^3}\left\{(1-2\mu)\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)-\right. \\ &\qquad\left.-3\frac{x^2}{r^2}\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)\right\}h, \\ \sigma_y''&=-\frac{\partial \sigma_y}{\partial z}h=-2\frac{AG}{r^3}\left\{(1-2\mu)\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)-\right. \\ &\qquad\left.-3\frac{y^2}{r^2}\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)\right\}h, \\ \sigma_z''&=-\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}h=2\frac{AG}{r^3}\left\{(1-2\mu)\left(1-3\frac{z^2}{r^2}\right)+\right. \\ &\qquad\left.+3\frac{z^2}{r^2}\left(3-5\frac{z^2}{r^2}\right)\right\}h, \\ \tau_x''&=-\frac{\partial \tau_x}{\partial z}h=6AG\frac{yz}{r^5}\left(1+2\mu-5\frac{z^2}{r^2}\right)h, \\ \tau_y''&=-\frac{\partial \tau_y}{\partial z}h=6AG\frac{xz}{r^5}\left(1+2\mu-5\frac{z^2}{r^2}\right)h, \\ \tau_z''&=-\frac{\partial \tau_z}{\partial z}h=6AG\frac{xy}{r^5}\left(1-5\frac{z^2}{r^2}\right)h. \end{aligned}\right\} \quad (227)$$

*) Isti rezultat dobiva se, naravno, ako u jednačine (39) uvedemo izraze (226).

Kao što se vidi iz jednačina (227), i naponi su proporcionalni malom rastojanju između napadnih tačaka sila, a obrnuto proporcionalni *trećem stepenu* otstojanja posmatrane tačke od koordinatnog početka, dakle, pri udaljavanju te tačke od napadnih tačaka sila naponi brže opadaju nego pomeranja tačaka.

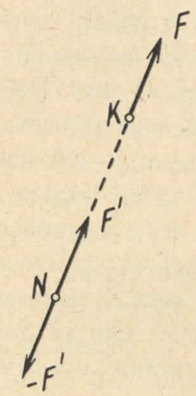
Naprezanje koje se, kao i u gornjem slučaju, *javlja samo u neposrednoj blizini napadnih tačaka sila zove se lokalnim.*

38. Saint-Venant-ov stav. — Zamislimo u ravni (sl. 45) dve sile P i Q čiji se pravci seku, a koje napadaju telo u *različitim* tačkama A i B. U Statici krutog tela takve sile se slažu u rezultantu na taj način što se napadne tačke datih sila *pomeraju* do preseka C njihovih pravaca. Zatim se ove dve sile, koje sad napadaju *istu* tačku, slažu u rezultantu koja se smatra ekvivalentnom datom sistemu sila sa gledišta njenog uticaja na telo.



Sl. 45

Opravdanost takvog pomeranja napadne tačke K (sl. 46) neke sile F u proizvoljno izabranu tačku N na njenom pravcu dokazuje se u Statici ovako. Telu se dodaju dve sile sa napadnom tačkom u N (sl. 46): jedna, sila F', iste veličine i smera kao i data sila F, i druga, sila $-F'$, iste veličine samo suprotnog smera. Zatim se sistem sila F i $-F'$, kao ekvivalentan nuli „oduzima". Ovo oduzimanje znači, u stvari, *dodavanje* sile veličine F a suprotnog joj smera, sa napadnom tačkom u K, i sile iste veličine i smera kao F, sa napadnom tačkom u N. Ako je rastojanje između napadnih tačaka K i N dodatih sila *malo* u poređenju sa dimenzijama tela, takvo dodavanje dveju sila, iste veličine i istog pravca a suprotnog smera, izaziva, kao što je već bilo pokazano, *lokalno naprezanje* u neposrednoj blizini tih tačaka.

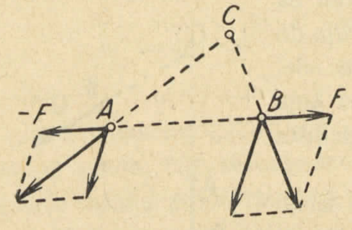


Sl. 46

Slično gornjem, slaganje dveju paralelnih (ili bliskih tom) sila (sl. 47) vrši se u Statici na taj način, što se telu dodaju dve sile F i $-F$ iste veličine i istog pravca AB, a suprotnog smera sa napadnim tačkama u A i B. Zadatak se tako svodi na ranije proučeni zadatak. I u ovom slučaju, ako je rastojanje između tačaka A i B malo, ovo dodavanje izaziva lokalno naprezanje neposredne okoline napadnih tačaka.

Zamislimo štap čije su poprečne dimenzije male u odnosu prema njegovoj dužini, i posmatrajmo sile koje napadaju različite tačke njegove osnove. Svaku od tih sila razložimo u dve komponente, jednu paralelnu osi štapa, a drugu u ravni osnove. Dobivamo jedan sistem *paralelnih* sila i drugi sistem *u ravni* osnove. Svaki od tih sistema možemo, na osnovu ranije izloženog, zameniti rezultantom (ili spregom), ako zanemarimo lokalno naprezanje u neposrednoj blizini osnove. Ovaj stav formulisao je 1855 g. *Saint-Venant* bez dokaza, zato se, često, on naziva *Saint-Venant-ovim postulatom*. On je neobično važan za primenu zaključaka Teorije elastičnosti u tehnici.

Rešenje *Saint-Venant*-ova problema dovelo je do obrazaca za napone i pomeranja tačaka štapa napregnutog aksijalno, na torziju i na savijanje. U svakom pojedinom slučaju površinske sile na osnovama štapa redukovale su se na rezultante i spregove koji su odgovarali postavljenim uslovima problema, ali je raspored površinskih sila po osnovama bio potpuno određen u svakom zadatku. Kod aksijalnog naprezanja morale su te sile u svakoj tački biti upravne na ravni osnove i jednoliko raspoređene po njoj. Kod čistog savijanja one su, opet, bile upravne na ravni osnove, a njihove veličine proporcionalne otstojanju tačke od neutralne ose. Kod savijanja silom pojavile su se još i površinske sile u ravni osnove, raspoređene po složenom zakonu zavisnom od oblika poprečnog preseka štapa. Po sebi se razume da je nemoguće ostvariti neki unapred dati raspored površinskih sila po osnovama kod delova stvarnih konstrukcija. U ogromnoj većini slučajeva čak se i ne zna zakon po kome su te sile stvarno raspoređene. Da li to treba da znači da su sva rešenja *Saint-Venant*-ova problema bez ikakve koristi za tehniku?



Sl. 47

Neka je osnova štapa opterećena nekim sistemom sila (C) proizvoljno raspoređenih po površini te osnove. Zamislimo sistem sila (C') statički ekvivalentan sistemu (C), tj. sa istom rezultantom i istim redukcionim momentom, no sa drukčijim rasporedom po površini osnove, i to baš kako to traži rešenje *Saint-Venant*-ova problema. Dodajmo osnovi opterećenoj sistemom (C) još dva sistema sila: (C') i $(-C')$. Sistem (C) je u ravnoteži sa sistemom $(-C')$, dakle, prema *Saint-Venant*-ovu stavu, zajednički njihov uticaj znači samo lokalno naprezanje u blizini opterećenog preseka. Međutim, treći sistem (C') raspoređen je po traženom zakonu. Dakle, po ceni lokalnog naprezanja okoline opterećenog preseka sme se proizvoljno dati sistem sila zameniti drugim, statički ekvivalentnim prvom, no raspoređenim kako to traži rešenje problema. Zato se *Saint-Venant*-ov stav često zove *principom elastične ekvivalencije statički ekvivalentnih sistema sila.*

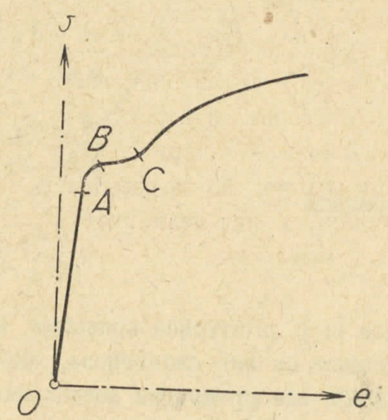
Jasno je da se rešenja *Saint-Venant*-ova problema mogu primenjivati na sve štapove čije su *poprečne dimenzije male* u odnosu prema dužini. Lokalna naprezanja pojaviće se samo na neznatnom delu dužine blizu opterećenih preseka. Bilo bi međutim sasvim pogrešno, na osnovu tih rešenja, izvoditi ma kakve zaključke o naprezanju *kratkih* štapova kod kojih bi „lokalna" naprezanja bila skoro po celoj dužini.

Oslanjajući se na *Saint-Venant*-ov stav možemo još proširiti oblast primene nađenih rešenja ovog problema. Naime, obrasce izvedene za opterećenje štapa silama na njegovim osnovama možemo primeniti i na grede sa dva i više oslonaca. Uticaj tih oslonaca zamenjuju sile u presecima iznad njih. Raspored tih sila po presecima, naravno, ne odgovara rasporedu predviđenom rešenjem *Saint-Venant*-ova problema što izaziva lokalno naprezanje u blizini oslonaca, koje zavisi od stvarnog rasporeda tih sila, a to znači od konstrukcije oslonaca. Ako je greda dugačka, tj. ako su njeni *pojedini rasponi* znatno veći od poprečnih dimenzija, lokalno naprezanje neće osetno uticati na savijanje grede. Iz istog razloga možemo primenjivati nađena rešenja i na slučajeve kad više koncentrisanih tereta napadaju različite preseke grede.

Pored ovog proširenja oblasti primene rešenja *Saint-Venant*-ova problema u tehnici se ide još dalje i ti zaključci se primenjuju i na grede opterećene podeljenim teretom i zapreminskim silama. U **t. 13.** proučeni primeri savijanja tanke grede jednoliko podeljenim teretom i sopstvenom težinom potvrđuju da se u tim slučajevima, pored lokalnog naprezanja okoline ležišta, javlja naknadno naprezanje duž cele grede; no ono je neznatno, ako je raspon grede znatno veći od njenih poprečnih dimenzija.

Proučavajući zatezanje ploče oslabljene malim okruglim otvorom (**t. 35**), videli smo da prisustvo takvog otvora znatno menja raspored napona u poprečnom preseku ploče. Dok su u presecima udaljenim od otvora normalni naponi jednoliko raspoređeni, u preseku kroz otvor nailazimo na koncentraciju napona blizu otvora gde on postaje triput veći od napona u ostalim delovima. Ali pri udaljavanju posmatrane tačke od otvora napon brzo opada (sl. 42): ima dakle izrazito lokalni karakter. Ako je prečnik otvora mali, u poređenju sa širinom ploče, ovo lokalno naprezanje se sme zanemariti. Na taj način se u tehnici primenjuju rešenja *Saint-Venant*-ova problema i na aksijalno napregnute štapove ili pojaseve limenih nosača oslabljene otvorima za zakivke.

Bilo bi sasvim opravdano da se postavi tom prilikom pitanje: zašto se sme zanemariti lokalno naprezanje? Zar ne dolazi u pitanje sigurnost cele konstrukcije, ako naponi pređu granicu velikih izduženja (ili skraćenja) na malom delu štapa? Odgovor na ovo pitanje zavisi od plastičnosti materijala. Dijagram na sl. 48 reprodukuje zavisnost između normalnog napona i dilatacije gvozdene šipke. Tačka B tog dijagrama odgovara granici velikih izduženja materijala. Ako pri postepenom povećanju opterećenja naponi u nekim vlaknima pređu tu kritičnu granicu, materijal počinje da teče, tj. deformacije tih vlakana se znatno povećavaju uz vrlo malo povećanje napona. Tome se protive susedna vlakna,



Sl. 48

primajući na sebe višak napona, dok se i sama ne napregnu do kritične granice; pa se onda i ona rasterećuju: napon primaju na sebe dalja, manje napregnuta, vlakna itd. Na taj način automatski se izjednačuju naponi u najjače opterećenim delovima zapremine tela, tako da naponi u njima ne mogu da pređu kritičnu granicu a da se kritični naponi ne jave u čitavom preseku. Ako bi opšti naponi u nekom preseku prešli kritičnu granicu, dalje povećanje opterećenja bi dovelo do kidanja štapa po tom preseku. Međutim, ako tu granicu pređe samo najveći od lokalnih napona, to znači u stvari samo povećanje broja vlakana napregnutih do kritične granice, dok njihove dilatacije, ograničene prisustvom susednih, manje napregnutih vlakana, ostaju vrlo male prema onima, koje su potrebne za kidanje materijala. Dok se kritični naponi ne prošire po celoj površini preseka, nema opasnosti za sigurnost konstrukcije.

39. Boussinesq-ov problem. — Vratimo se sad osnovnom *Kelvin*-ovom rešenju (222). Ono se može donekle proširiti, ako izrazima (222) za pomeranja tačaka dodamo zasad još proizvoljne harmoniske funkcije ψ_1, ψ_2 i ψ_3.

$$u = A\frac{xz}{r^3} + \psi_1,$$

$$v = A\frac{yz}{r^3} + \psi_2,$$

$$w = A\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{3-4\mu}{r}\right) + \psi_3.$$

Ako uvrstimo ove izraze u jednačine (A') vidimo da te funkcije nisu potpuno proizvoljne, već da moraju zadovoljiti jednačine

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right) = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial x} + \frac{\partial \psi_2}{\partial y} + \frac{\partial \psi_3}{\partial z} = C,$$

gde je C proizvoljna konstanta, koju možemo uzeti da je jednaka nuli. Ova jednačina će biti zadovoljena, ako uzmemo za funkcije ψ_1, ψ_2, i ψ_3 parcijalne izvode iste proizvoljne *harmoniske* funkcije ψ,

$$\psi_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \psi_2 = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \psi_3 = \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

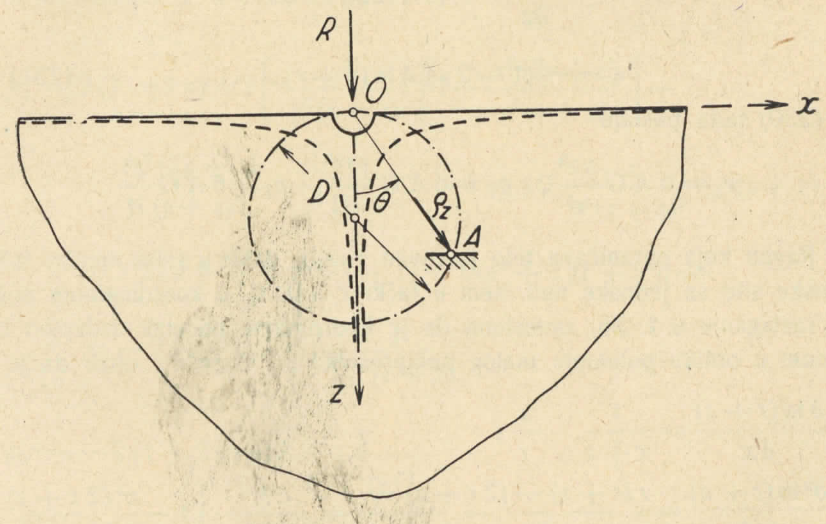
Dakle, rešenje jednačina (A') može se uzeti i u obliku

$$\left.\begin{aligned} u &= A\frac{xz}{r^3} + \frac{\partial \psi}{\partial x}, \\ v &= A\frac{yz}{r^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y}, \\ w &= A\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{3-4\mu}{r}\right) + \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \tag{228}$$

gde je ψ proizvoljna harmoniska funkcija.

Prema jednačinama (39) ovom rešenju odgovaraju komponentni naponi, koji se razlikuju od izraza (223) naknadnim članovima

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}, & \tau_x' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial z}, \\ \sigma_y' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}, & \tau_y' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial z\,\partial x}, \\ \sigma_z' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, & \tau_z' &= 2G\frac{\partial^2 \psi}{\partial x\,\partial y}. \end{aligned}\right\} \tag{229}$$



Sl. 49

Zamislimo sad da je napregnuto telo vrlo veliko i da ga ograničava jedino ravan $z = 0$, tj. da ono zauzima polovinu prostora (sl. 49), i to sa strane pozitivne z ose.

Spoljne površinske sile za svaku ravan čija bi normala imala smer negativne z ose, tj. kao kosinuse smera $\alpha = 0$, $\beta = 0$ i $\gamma = -1$, jednake su prema jednačinama (β), (223) i (229)

$$\left.\begin{aligned} p_x &= 2G\left\{A\frac{x}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right)-\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right\}, \\ p_y &= 2G\left\{A\frac{y}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right)-\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z}\right\}, \\ p_z &= 2G\left\{A\frac{z}{r^3}\left(1-2\mu+3\frac{z^2}{r^2}\right)-\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right\}. \end{aligned}\right\} \quad (230)$$

Harmonisku funkciju ψ, koja je dosad bila proizvoljna, vežimo uslovom

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z} = A\frac{x}{r^3}(1-2\mu) = -(1-2\mu)A\frac{\partial r^{-1}}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial y\,\partial z} = A\frac{y}{r^3}(1-2\mu) = -(1-2\mu)A\frac{\partial r^{-1}}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = A\frac{z}{r^3}(1-2\mu) = -(1-2\mu)A\frac{\partial r^{-1}}{\partial z},$$

odnosno

$$\frac{\partial\psi}{\partial z} = -(1-2\mu)\frac{A}{r},$$

ili

$$\psi = -(1-2\mu)A\ln(z+r). \qquad (231)$$

Izrazi (230) tada postaju

$$p_x = 6AG\frac{xz^2}{r^5}, \quad p_y = 6AG\frac{yz^2}{r^5}, \quad p_z = 6AG\frac{z^3}{r^5}.$$

Ravan koja ograničava telo je ravan $z=0$, dakle u svim njenim tačkama površinske sile su jednake nuli, sem u tački $r=0$, tj. u koordinatnom početku. Slično razlaganju u **t. 36,** zamislimo da je koordinatni početak izdvojen iz tela površinom u obliku polulopte malog poluprečnika ρ. Uzevši u obzir da je

$$\frac{\partial\ln(r+z)}{\partial x} = \frac{1}{r+z}\cdot\frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial^2\ln(r+z)}{\partial x^2} = \frac{r(r+z)-(2r+z)x^2/r}{r^2(r+z)^2} = \frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{x^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right],$$

$$\frac{\partial^2\ln(r+z)}{\partial y^2} = \frac{1}{r(r+z)}\left[1-\frac{y^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right],$$

$$\frac{\partial^2\ln(r+z)}{\partial x\,\partial y} = -\frac{x(2r+z)y/r}{r^2(r+z)^2} = -\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2},$$

nalazimo iz jednačina (229) i (231) naknadne komponentne napone koji odgovaraju uvedenoj funkciju ψ, a koje treba dodati izrazima (223),

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x' &= -\frac{2(1-2\mu)AG}{r(r+z)}\left[1-\frac{x^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right], \\ \sigma_y' &= -\frac{2(1-2\mu)AG}{r(r+z)}\left[1-\frac{y^2(2r+z)}{r^2(r+z)}\right], \\ \sigma_z' &= 2(1-2\mu)AG\frac{z}{r^3}, \\ \tau_x' &= 2(1-2\mu)AG\frac{y}{r^3}, \\ \tau_y' &= 2(1-2\mu)AG\frac{x}{r^3}, \\ \tau_z' &= 2(1-2\mu)AG\frac{xy(2r+z)}{r^3(r+z)^2}. \end{aligned}\right\} \quad (232)$$

Iz ovih izraza i jednačina (β) možemo sad naći one naknadne površinske sile u tačkama površine polulopte sa $\alpha = -x/\rho$, $\beta = -x/\rho$ i $\gamma = -z/\rho$, koje odgovaraju funkciji ψ u izrazima (228)

$$p_x' = 2(1-2\mu)AG\left\{\frac{x}{\rho^2(\rho+z)}\left[1-\frac{x^2(2\rho+z)}{\rho^2(\rho+z)}\right]-\right.$$

$$\left.-\frac{xy^2(2\rho+z)}{\rho^4(\rho+z)^2}-\frac{xz}{\rho^4}\right\} = 2(1-2\mu)AG\frac{x}{\rho^4(\rho+z)^2}[\rho^2(\rho+z)-$$

$$-x^2(2\rho+z)-y^2(2\rho+z)-z(\rho^2+2\rho z+z^2)] =$$

$$= -2(1-2\mu)AG\frac{y}{\rho^2(\rho+z)},$$

$$p_y' = -2(1-2\mu)AG\frac{y}{\rho^2(\rho+z)},$$

$$p_z' = -2(1-2\mu)AG\left(\frac{z^2}{\rho^4}+\frac{x^2}{\rho^4}+\frac{y^2}{\rho^4}\right) = -2(1-2\mu)\frac{AG}{\rho^2}.$$

Zamenom $x = \rho\cos\theta\cos\varphi$, $y = \rho\cos\theta\sin\varphi$ i $z = \rho\sin\theta$ nalazimo izraze za te naknadne površinske sile u polarnim koordinatima, a kad ih pomnožimo elementom površine lopte $\rho^2 \cos\theta\, d\theta\, d\varphi$ nalazimo projekcije naknadne sile na tom elementu,

$$p_x'\, dS = -2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos\theta \cos\varphi}{1+\sin\theta} \cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos^2\theta \cos\varphi}{1+\sin\theta}\, d\theta\, d\varphi,$$

$$p_y'\, dS' = -2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos\theta\, \sin\varphi}{1+\sin\theta} \cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos^2\theta \sin\varphi}{1+\sin\theta}\, d\theta\, d\varphi,$$

$$p_z'\, dS' = -2(1-2\mu)\, AG \cos\theta\, d\theta\, d\varphi.$$

Pri integrisanju po φ, od 0 do 2π, prva dva izraza daju nulu, dok iz trećeg nalazimo integrisanjem po φ od 0 do 2π i po θ od $-{}^1/_2\pi$ do 0 da je

$$P' = -4\pi(1-2\mu)\, AG.$$

Momenti ovih elementarnih sila u pogledu na koordinatne ose su

$$dM_x' = (y p_z' - z p_y')\, dS' =$$

$$= -2(1-2\mu)\, AG \left(\cos^2\theta \sin\varphi - \frac{\sin\theta \cos^2\theta \sin\varphi}{1+\sin\theta}\right) \cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos^3\theta \sin\varphi}{1+\sin\theta}\, d\theta\, d\varphi,$$

$$dM_y' = (z p_x' - x p_z')\, dS' =$$

$$= -2(1-2\mu)\, AG \left(\frac{\sin\theta \cos^2\theta \cos\varphi}{1+\sin\theta} - \cos^2\theta \cos\varphi\right) \cos\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= 2(1-2\mu)\, AG \frac{\cos^3\theta \cos\varphi}{1+\sin\theta}\, d\theta\, d\varphi,$$

$$dM_z' = (x p_y' - y p_x')\, dS' = -2(1-2\mu)\, AG \left(\frac{\cos^3\theta \cos\varphi \sin\varphi}{1+\sin\theta} - \right.$$

$$\left. - \frac{\cos^3\theta \sin\varphi \cos\varphi}{1+\sin\theta}\right) \cos\theta\, d\theta\, d\varphi = 0.$$

Pri integrisanju po φ, od 0 do 2π, prva dva izraza daju nulu, dok je treći sam jednak nuli. Dakle, naknadne sile na površini polulopte, koje odgovaraju funkciji ψ, svode se na rezultantu u pravcu z ose veličine $-4\pi(1-2\mu)\, AG$, koju treba dodati *polovini**) izraza (224),

$$R = 8\pi(1-\mu)\, AG - 4\pi(1-2\mu)\, AG = 4\pi AG.$$

*) Radi se o silama na površini *polovine* lopte.

Tako smo došli do zaključka da zbir izraza (223) i (232) daje komponentne napone za telo ograničeno sa ravni $z=0$, a napregnuto koncentrisanom silom upravnom na toj ravni u koordinantnom početku. Na primer, u nekoj tački A tela za horizontalnu ravan sa normalom u smeru negativne z ose komponentni naponi su

$$\sigma_z = -\frac{3R}{2\pi} \frac{z^3}{r^5}, \qquad \tau_x = -\frac{3R}{2\pi} \frac{z^2 y}{r^5}, \qquad \tau_y = -\frac{3R}{2\pi} \frac{z^2 x}{r^5},$$

gde je uvedeno $R/4\pi G$ mesto A. Kao što se vidi iz tih izraza totalni napon za tu ravan ima veličinu (sl. 49)

$$\rho_{-z} = \frac{3R}{2\pi} \frac{z^2}{r^4} = \frac{3R}{2\pi} \frac{\cos^2\theta}{r^2} = \frac{3R}{2\pi D^2},$$

gde je D prečnik kruga sa središtem na z osi, koji dodiruje xy ravan u koordinatnom početku, a prolazi kroz posmatranu tačku A. Taj totalni napon ima pravac OA.

Za pomeranja nalazimo iz jednačina (222), (228) i (231)

$$u = A\frac{xz}{r^3} - (1-2\mu)\, A \frac{x}{r(r+z)},$$

$$v = A\frac{yz}{r^3} - (1-2\mu)\, A \frac{y}{r(r+z)},$$

$$w = A\left(\frac{z^2}{r^3} + \frac{3-4\mu}{r}\right) - (1-2\mu)\frac{A}{r},$$

odnosno, posle zamene A sa $R/4\pi G$,

$$u = \frac{R}{4\pi G} \frac{x}{r} \left[\frac{z}{r^2} - \frac{1-2\mu}{r+z}\right].$$

$$v = \frac{R}{4\pi G} \frac{y}{r} \left[\frac{z}{r^2} - \frac{1-2\mu}{r+z}\right],$$

$$w = \frac{R}{4\pi G} \frac{1}{r} \left[\frac{z^2}{r^2} + 2(1-\mu)\right].$$

Horizontalno pomeranje tačke A je

$$\sqrt{u^2+v^2} = \frac{R}{4\pi G} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r} \left[\frac{z}{r^2} - \frac{1-2\mu}{r+z}\right] = \frac{R \sin\theta}{4\pi G r}\left(\cos\theta - \frac{1-2\mu}{1+\cos\theta}\right).$$

Ono je upravljeno *prema* z osi, ako je

$$\cos\theta - \frac{1-2\mu}{1+\cos\theta} < 0,$$

odnosno, ako je θ veći od (sa $\mu = {}^1/_4$) $\theta_0 = 68^0 32'$, dok će za tačke sa uglom θ manjim od θ_0 horizontalno pomeranje biti pozitivno, tj. upravljeno *od z* ose. Vertikalno pomeranje

$$w = \frac{R}{4\pi G r}\left[2(1-\mu) + \cos^2\theta\right],$$

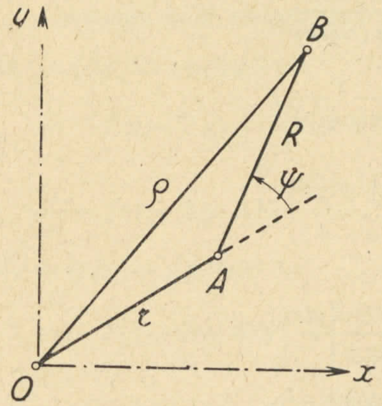
za tačke granične ravni, tj. za $\theta = {}^1/_2\pi$ biće

$$w = \frac{(1-\mu)R}{2\pi\, G r}. \qquad (233)$$

Odavde se vidi da se ta ravan deformiše u površinu koja postaje rotacijom hiperbole (sl. 49)

$$x z = \frac{1-\mu}{2\pi G} R.$$

40. Pritisak na delu površine tela. — Zamislimo telo ograničeno sa ravni $z = 0$, a pritisak podeljen po delu površine te ravni po nekom zakonu. Označimo sa ρ (sl. 50) otstojanje neke tačke B te ravni od koordinatnog početka, a sa p pritisak na jedinicu površine u toj tački; dakle, p je funkcija položaja te tačke. Sa r obeležimo otstojanje posmatrane tačke A te ravni od koordinatnog početka, a sa R njeno otstojanje od tačke B.



Sl. 50

Pomeranje tačke A u pravcu z ose usled sile $p\,dF$, koja napada u tački B elementarnu površinu dF, prema obrascu (233), je

$$dw = \frac{1-\mu}{2\pi G}\,\frac{p\,dF}{R},$$

a ukupno vertikalno pomeranje tačke A biće, prema tome,

$$w = \frac{1-\mu}{2\pi G}\int \frac{p\,dF}{R}, \qquad (234)$$

gde integrisanje treba izvršiti po opterećenom delu površine.

Ako je ψ ugao između pravaca OA i AB, element površine oko tačke B može se pretstaviti u obliku $R\,dR\,d\psi$ i obrazac (234) prelazi u

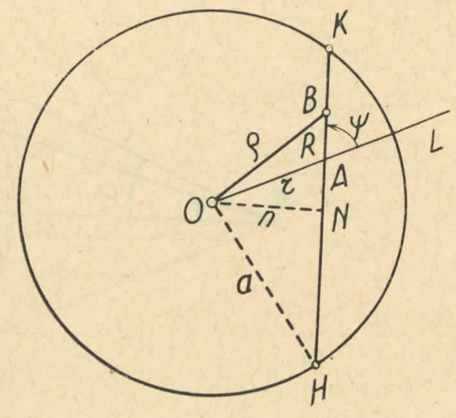
$$w = \frac{1-\mu}{2\pi G}\int\!\!\int p\,dR\,d\psi, \qquad (235)$$

gde p treba smatrati kao funkciju od R i ψ.

Uzmimo, na primer, da je opterećena površina kruga KLH poluprečnika a (sl. 51), i da je pritisak na jedinicu površine u svakoj tački proporcionalan ordinati, u toj tački, polulopte konstruisane na tom krugu, $p = k\sqrt{a^2 - \rho^2}$, gde je k konstantni koeficijent. Ako je $n = \overline{ON} = r\sin\psi$ upravno otstojanje radijusa vektora R od koordinatnog početka, onda je $h = NB = r\cos\psi + R$ i $\rho^2 = h^2 + n^2$, a pritisak u tački B je

$$p = k\sqrt{a^2 - h^2 - n^2}.$$

Pri integrisanju ovog izraza po R treba r i ψ smatrati za konstante; prema tome je $dh = dR$ i



Sl. 51

$$\int p\,dR = k\int\sqrt{a^2 - h^2 - n^2}\cdot dh.$$

Ako izvršimo integrisanje po h, od tačke H do tačke K, granice za integrisanje po ψ treba uzeti od 0 do π. A uzmemo li u obzir da je $HN = NK = \sqrt{a^2 - n^2} = l$ i da su, prema tome, granice integrisanja, po h, $-l$ i l, imaćemo

$$\int p\,dR = k\int_{-l}^{l}\sqrt{l^2 - h^2}\cdot dh = {}^1/_2\,\pi\,k\,(a^2 - n^2) = {}^1/_2\,\pi\,k\,(a^2 - r^2\sin^2\psi),$$

i

$$w = \frac{1-\mu}{4G}\,k\int_0^{\pi}(a^2 - r^2\sin^2\psi)\,d\psi = \frac{(1-\mu)\pi}{4G}\,k\,(a^2 - {}^1/_2\, r^2).$$

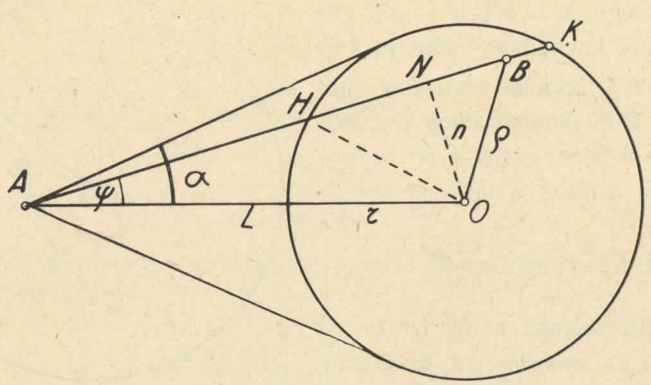
Najveći ugib je, očigledno, u koordinatnom početku,

$$w_0 = \frac{(1-\mu)\pi}{4G}\,k\,a^2,$$

tako da je, za ostale tačke, sa $r < a$,

$$w = w_0\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right]. \qquad (236)$$

Na sličan način možemo naći i pomeranje tačke A (sl. 52), koja leži *van* opterećene površine, tj. za $r > a$. Granice integrisanja po $h = \overline{NB}$ ostaju i u ovom slučaju: $-\sqrt{a^2-n^2}$ i $+\sqrt{a^2-n^2}$, a za integrisanje po ψ granice su: $-\alpha = -\arcsin(a/r)$ i $\alpha = \arcsin(a/r)$. Nalazimo



Sl. 52

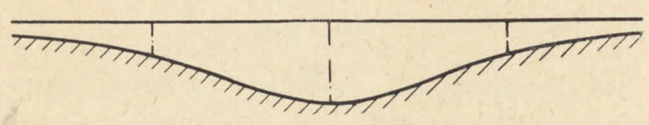
$$w = \frac{1-\mu}{4G} k \int_{-\alpha}^{\alpha} (a^2 - r^2 \sin^2\psi)\, d\psi =$$

$$= \frac{1-\mu}{4G} k \left\{ (2a^2 - r^2)\alpha + {}^1/_2\, r^2 \sin 2\alpha \right\} =$$

$$= \frac{1-\mu}{4G} k \left\{ (2a^2 - r^2) \arcsin\frac{a}{r} + a\sqrt{r^2 - a^2} \right\} =$$

$$= \frac{w_0}{\pi a^2} \left\{ (2a^2 - r^2) \arcsin\frac{a}{r} + a\sqrt{r^2 - a^2} \right\}.$$

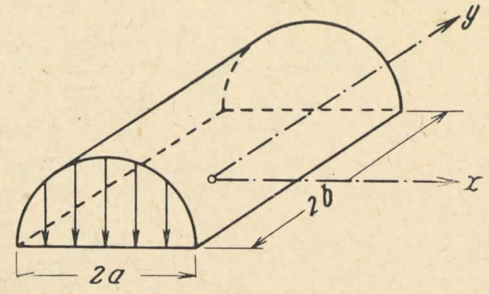
Na sl. 53 je pokazan presek deformisane površine. Ukupan pritisak na površinu je, očigledno,



Sl. 53

$$P = \int p\, dF = \int_0^a 2\pi\rho\, p\, d\rho = 2\pi k \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho^2} \cdot d\rho = \frac{2}{3}\pi k a^3.$$

Kao drugi primer uzmimo da je opterećena površina pravougaonika (sl. 54) dužine $2b$ i širine $2a$, i da je pritisak na jedinicu površine u svakoj tački proporcionalan ordinati polucilindra konstruisana na tom pravougaoniku: $p = k\sqrt{a^2 - \xi^2}$, gde je ξ apscisa te tačke. Pretpostavljajući da je dužina pravougaonika znatno veća od njegove širine, posmatraćemo samo vertikalna pomeranja tačaka na x osi. Za te tačke je otstojanje od neke opterećene tačke sa koordinatama ξ i η: $R = \sqrt{(x-\xi)^2 + \eta^2}$. Vertikalno pomeranje za tačku x ose, prema obrascu (235), je



Sl. 54

$$w = \frac{1-\mu}{2\pi G} k \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{(x-\xi)^2 + \eta^2}\, d\xi\, d\eta.$$

Integrišemo prvo po η

$$\int_{-b}^{b} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{(x-\xi)^2+\eta^2}\, d\eta = 2\sqrt{a^2-\xi^2} \int_0^b \frac{d\eta}{(x-\xi)^2+\eta^2} =$$

$$= 2\sqrt{a^2-\xi^2} \left| \ln\left(\eta + \sqrt{(x-\xi)^2+\eta^2}\right) \right|_0^b =$$

$$= 2\sqrt{a^2-\xi^2} \left\{ \ln\left(b + \sqrt{(x-\xi)^2+b^2}\right) - \ln(x-\xi) \right\}.$$

Pošto smo pretpostavili da je b znatno veće od a, možemo u ovom obrascu zanemariti $(x-\xi)^2$ prema b^2. Tako dobivamo da je

$$\int_{-b}^{b} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{(x-\xi)^2+\eta^2}\, d\eta = 2\sqrt{a^2-\xi^2} \left\{ \ln 2b - \ln(x-\xi) \right\}$$

te je prema tome,

$$w = \frac{1-\mu}{\pi G} k \left\{ \ln 2b \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2-\xi^2}\, d\xi - \int_{-a}^{a} \ln(x-\xi)\sqrt{a^2-\xi^2}\, d\xi \right\}.$$

Prvi član u ovom izrazu ne zavisi od x, dakle, daje translatorno pomeranje x ose kao celine u pravcu z ose. On nas ne interesuje, jer ne utiče na deformaciju x ose. Diferenciranjem po x nalazimo

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1-\mu}{\pi G} k \int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x-\xi} d\xi =$$

$$= -\frac{1-\mu}{\pi G} k \left\{ \int_{-a}^{0} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x-\xi} d\xi + \int_{0}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x-\xi} d\xi \right\} =$$

$$= -\frac{2(1-\mu)}{\pi G} k x \int_{0}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2} d\xi.$$

Zamenom $\xi = a \sin\theta$ i $x = a \sin\alpha$ nalazimo

$$\int_{0}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2} d\xi = \int_{0}^{1/2\pi} \frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\alpha - \sin^2\theta} d\theta = \int_{0}^{1/2\pi} d\theta + \cos^2\alpha \int_{0}^{1/2\pi} \frac{d\theta}{\sin^2\alpha - \sin^2\theta} =$$

$$= {}^1/_2\pi + \cos^2\alpha \int_{0}^{1/2\pi} \frac{d\theta}{\cos^2\theta\,(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\,\mathrm{tg}^2\theta} =$$

$$= {}^1/_2\pi + \int_{0}^{1/2\pi} \frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\theta}.$$

Pri izračunavanju ovog integrala moramo voditi računa da je tačka $\xi = x$, odnosno $\theta = \alpha$ singularna. Zato ćemo taj integral podeliti u dva dela, jedan u granicama od 0 do $\alpha - \varepsilon$, a drugi od $\alpha + \varepsilon$ do ${}^1/_2\pi$, gde je ε proizvoljan mali broj.

$$\int_{0}^{1/2\pi} \frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\theta} = \int_{0}^{\alpha-\varepsilon} \frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\theta} + \int_{\alpha+\varepsilon}^{1/2\pi} \frac{d\,\mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}^2\alpha - \mathrm{tg}^2\theta} =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \left\{ \left| \ln \frac{\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\theta}{\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\theta} \right|_{0}^{\alpha-\varepsilon} - \left| \ln \frac{\mathrm{tg}\,\theta - \mathrm{tg}\,\alpha}{\mathrm{tg}\,\theta + \mathrm{tg}\,\alpha} \right|_{\alpha+\varepsilon}^{1/2\pi} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \left\{ \ln \frac{\sin(2\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon} + \ln \frac{\sin\varepsilon}{\sin(2\alpha+\varepsilon)} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} \ln \frac{\sin(2\alpha-\varepsilon)}{\sin\varepsilon} \frac{\sin\varepsilon}{\sin(2\alpha+\varepsilon)}.$$

Kad ε teži nuli ovaj izraz teži, očigledno, takođe nuli te je

$$\int_{0}^{a} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2}}{x^2-\xi^2} d\xi = {}^1/_2\pi$$

i

$$\frac{dw}{dx} = -\frac{1-\mu}{G} k x.$$

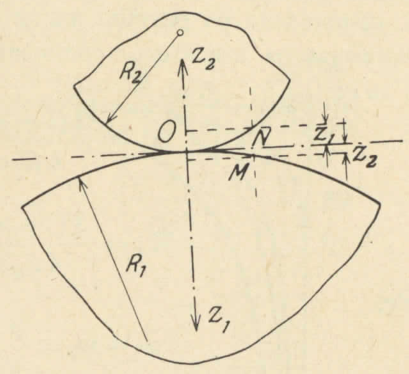
Dakle, je

$$w = C - \frac{1-\mu}{2G} k x^2,$$

gde je C proizvoljna konstanta.

41. Uzajamni pritisak dvaju tela.*) — Zaključci t. **40** mogu se iskoristiti za proučavanje naprezanja pri uzajamnom pritisku dvaju elastičnih tela. Pretpostavimo da su oba tela u blizini dodirnih tačaka ograničena sferičnim površinama sa poluprečnicima R_1 i R_2 (sl. 55).

Dok nema uzajamnog pritiska između tela, ona se dodiruju u jednoj tački O. Rastojanja od tangencijalne ravni OT do tačaka M i N, u kojima prava upravna na toj ravni probija površine tela, iznose



Sl. 55

$$z_1 = R_1\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_1^2}}\right),$$

$$z_2 = R_2\left(1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{R_2^2}}\right),$$

gde je r otstojanje prave MN od zajedničke normale u tački O. Ako je to otstojanje malo u poređenju sa poluprečnicima R_1 i R_2, biće približno

$$z_1 = \frac{r^2}{2R_1}, \qquad z_2 = \frac{r^2}{2R_2},$$

i uzajamno rastojanje tačaka M i N je

$$z_1 + z_2 = \frac{r^2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = \frac{r^2(R_1+R_2)}{2R_1R_2}.$$

Kad se tela uzajamno pritisnu duž zajedničke normale u tački O silom P, okolina te tačke se deformiše, usled čega se međusobni dodir tela proširuje na malu površinu ograničenu krugom. Dve tačke datih tela koje pripadaju zajed-

*) Rešenje ovog problema potiče od nemačkog fizičara *H. Hertz*-a, 1881.

ničkoj normali, a toliko su udaljene od dodirne površine da se u njima ne primećuje lokalna deformacija, zbližiće se usled pritiska za malu dužinu δ. Tačke M i N u oblasti lokalnih deformacija zbližiće se za manju dužinu, jer usled deformacije imaju pomeranja w_1 i w_2 u suprotnom smeru, tako da će se njihovo uzajamno rastojanje, koje je bilo $z_1 + z_2$, smanjiti za $\delta - (w_1 + w_2)$. Ako se pri povećanju pritiska poluprečnik dodirne površine toliko poveća da ona obuhvati i tačke M i N, rastojanje između njih smanjiće se do nule; biće dakle,

$$\delta - (w_1 + w_2) = z_1 + z_2 = \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2} r^2,$$

ili

$$w_1 + w_2 = \delta - \frac{R_1 + R_2}{2 R_1 R_2} r^2. \qquad (237)$$

Pretpostavljajući da je poluprečnik kruga koji ograničava dodirnu površinu vrlo mali u poređenju sa poluprečnicima krivine R_1 i R_2, možemo za proučavanje lokalnih deformacija naših tela primeniti obrasce izvedene u t. **40** za telo ograničeno sa ravni. Iz prvog primera tog §-a znamo ovo. Usled pritiska na telo, raspoređena po površini malog kruga proporcionalno ordinatama polulopte konstruisane na tom krugu, pomeranja tačaka opterećene površine upravna na njoj su

$$w_1 = \frac{3(1 - \mu_1^2)}{4 E_1 a} P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}$$

i

$$w_2 = \frac{3(1 - \mu_2^2)}{4 E_2 a} P \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\},$$

dakle,

$$w_1 + w_2 = \frac{3}{4} \frac{P}{a} \left\{ \frac{1 - \mu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \mu_2^2}{E_2} \right\} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right\}.$$

Nađeni izraz se podudara sa izrazom (237), ako je

$$\delta = \frac{3}{4} \frac{P}{a} \frac{(1 - \mu_2^2) E_1 + (1 - \mu_1^2) E_2}{E_1 E_2},$$

$$\frac{R_1 + R_1}{2 R_1 R_1} = \frac{\delta}{2 a^2}.$$

Odavde je

$$a = \sqrt[3]{\frac{3}{4} P \frac{(1 - \mu_2^2) E_1 + (1 - \mu_1^2) E_2}{E_1 E_2} \cdot \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

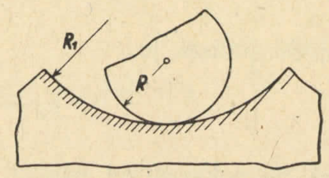
Ako su oba tela od istog materijala, tj. $E_1 = E_2 = E$ i ako je $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$ onda je

$$a = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}.$$

Najveći pritisak u tom slučaju je

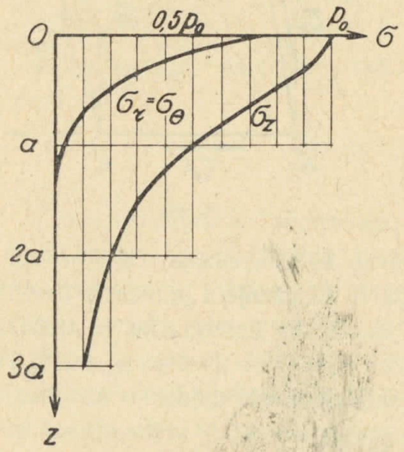
$$p_0 = \frac{2}{3} \frac{P}{\pi a^2} = 0{,}388 \sqrt[3]{P E^2 \frac{(R_1 + R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}.$$

Ako zamenimo R_1 sa ∞ dobivamo obrasce za dodir lopte i ravni. Ako promenimo znak kod R_1 nalazimo obrasce za pritisak lopte na sferično ležište (sl. 56).

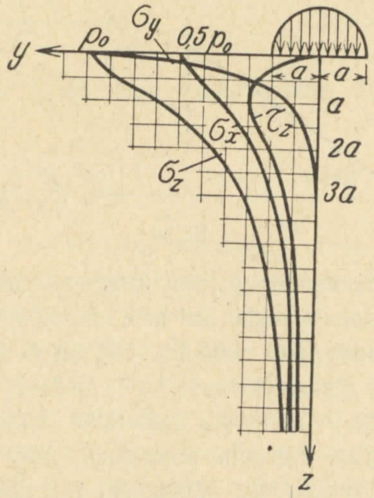


Sl. 56

Pošto smo našli poluprečnik dodirne površine i pritisak na nju, mogli bismo, na isti način kao što smo našli w, naći horizontalna pomeranja tačaka, a zatim i komponentne napone. Rezultati su pretstavljeni dijagramom na sl. 57, gde je za jedinicu napona uzet najveći pritisak p_0, a za jedinicu dužine poluprečnik dodirnog kruga a. Pokazani su naponi σ_z i $\sigma_x = \sigma_y$ za tačke z ose. Najveći napon pritiska je jednak p_0 u tački O. Najveći tangencijalni napon je jednak $0{,}31\, p_0$ u tački koja se nalazi od prilike za $^1/_2\, a$ ispod tačke O. Najveći napon zatezanja se javlja u tačkama dodirnog kruga, i jednak je $0{,}133\, p_0$.



Sl. 57



Sl. 58

Postupak sličan onom koji smo ovde primenili na uzajamni dodir dvaju tela, ograničenih sferičnim površinama u blizini dodirne površine, može se primeniti i na slučaj kad su ta tela ograničena cilindričnim površinama, čije su ose paralelne. Dodirna površina u tom slučaju biće ograničena uzanim pravougaonikom i mogu se primeniti rezultati drugog primera t. **40**. Za polovinu širine dodirnog pravougaonika dobiva se onda

$$a = \sqrt{\frac{4}{\pi} P' \frac{(1 - \mu_2^2) E_1 + (1 - \mu_1^2) E_2}{E_1 E_2} \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}},$$

gde je $P' = {}^1/_2\,\pi\, a\, p_0$ sila pritiska za jedinicu dužine dodirne površine cilindra. Ako su cilindri od istog materijala, onda je, sa $\mu = 0{,}3$,

$$a = 1{,}52\sqrt{\frac{P'}{E}\,\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}\,,$$

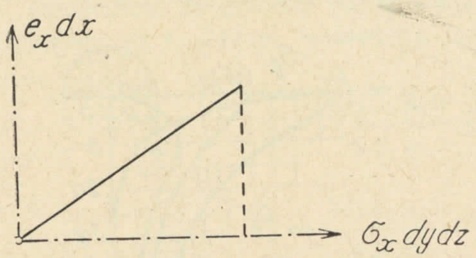
a najveći pritisak je

$$p_0 = 0{,}418\sqrt{\frac{P' E\,(R_1 + R_2)}{R_1 R_2}}\,.$$

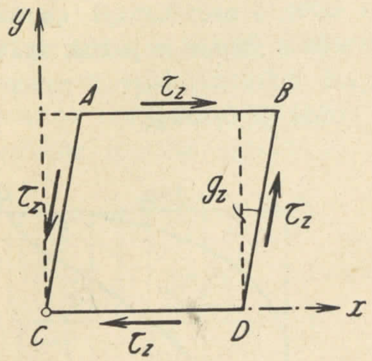
Na sl. 58 pokazani su naponi za taj slučaj u istoj razmeri kao i na sl. 57. Najveći tangencijalni napon je $0{,}304\,p_0$ u tački za $0{,}78\,a$ ispod tačke O.

42. Primena principa virtualnih pomeranja. — Kad spoljne sile deformišu telo, njihove tačke se pomeraju, te sile *vrše* mehanički rad, koji se pretvara u *potencijalnu* energiju deformisanog tela.

Posmatrajmo elementarni paralelepiped isečen iz tela (sl. 3). Kad bi postojao samo normalni napon σ_x, tj. kad



Sl. 59



Sl. 60

bi paralelepiped bio zategnut samo u pravcu x ose, silama čija bi veličina postepeno rasla od nule do $\sigma_x\, dy\, dz$, onda bi izduženje u pravcu x ose takođe postepeno raslo (sl. 59) od nule do $e_x\, dx$. Za tu deformaciju bi trebalo izvšiti mehanički rad: ${}^1/_2\,\sigma_x\, dy\, dz \cdot e_x\, dx$. Slično tome, za klizanje g_z (sl. 60) potrebno je relativno pomeranje strane AB paralelepipeda u odnosu na stranu CD za $g_z\, dy$. Pri tom pomeranju, sila $\tau_z\, dx\, dz$, na strani AB, vrši mehanički rad ${}^1/_2\,\tau_z\, g_z\, dx\, dy\, dz$. Mehanički rad potreban za deformaciju paralelepipeda u opštem slučaju naprezanja je zbir mehaničkih radova potrebnih za pojedine komponentne deformacije

$$d\,U = {}^1/_2\,(\sigma_x\, e_x + \sigma_y\, e_y + \sigma_z\, e_z + \tau_x\, g_x + \tau_y\, g_y + \tau_z\, g_z)\, dx\, dy\, dz = U_0\, dx\, dy\, dz\,,$$

gde je sa U_0 obeležena potencijalna energija jedinice zapremine tela u posmatranoj tački. Mehanički rad koji se vrši pri deformaciji celokupnog tela, odnosno potencijalna energija tela je

$$U = \int\!\!\int\!\!\int U_0\, dx\, dy\, dz\,,$$

gde se integrisanje vrši po celoj zapremini.

U nađeni obrazac možemo uvesti, mesto komponentnih deformacija, komponentne napone, pomoću izraza (38). Tada dobivamo izraz za potencijalnu energiju u koji ulaze *samo komponentni naponi*

$$\left.\begin{aligned} W_0(\sigma_x \ldots, \tau_x \ldots) &= \frac{1}{2E}\,(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2) - \\ &- \frac{\mu}{E}\,(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + \frac{1}{2G}\,(\tau_x^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2). \end{aligned}\right\}\quad (238)$$

Možemo i obratno, mesto komponentnih napona, uvesti komponentne deformacije pomoću izraza (39). Tada dobivamo izraz za potencijalnu energiju u koji ulaze *samo komponentne deformacije*

$$U_0(e_x \ldots, g_x \ldots) = {}^1/_2\,\lambda\,\varepsilon^2 + G\,(e_x^2 + e_y^2 + e_z^2) + {}^1/_2\,G\,(g_x^2 + g_y^2 + g_z^2),\quad (239)$$

gde je upotrebljena oznaka

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}\,.$$

Parcijalni izvodi izraza (238) daju komponentne deformacije, na primer

$$\frac{\partial W_0}{\partial \sigma_x} = \frac{\sigma_x}{E} - \mu\,\frac{\sigma_y + \sigma_z}{E} = e_x\,,\quad (238')$$

itd. Slično ovome, parcijalni izvodi izraza (239) daju komponentne napone, na primer

$$\frac{\partial U_0}{\partial e_x} = \lambda\,\varepsilon + 2\,G\,e_x = \sigma_x\,.\quad (239')$$

Princip virtualnih pomeranja, poznat iz Teoriske mehanike, dosta često se primenjuje i pri rešavanju problema Teorije elastičnosti. Elastično telo je sistem materijalnih tačaka koje napadaju unutrašnje i spoljne sile. Ako je ono u ravnoteži, prema tom principu, mora zbir mehaničkih radova svih spoljnih i unutrašnjih sila na svakom virtualnom pomeranju njegovih tačaka biti jednak nuli, odnosno rad spoljnih sila mora biti jednak priraštaju potencijalne energije tela. Za virtualno se smatra svako malo pomeranje koje dopuštaju zadate veze sistema. U primeni na elastično telo ti uslovi veza su: uslov neprekidnosti materije i uslovi postavljeni za pomeranja tačaka spoljne površine.

Neka su date spoljne zapreminske sile u tačkama tela i spoljne površinske sile u onim tačkama njegove spoljne površine za koje nisu data pomeranja, jer u istim tačkama ne mogu biti data istovremeno i pomeranja i površinske sile.

Obeležimo, kao i pre, sa u, v i w stvarna pomeranja tačaka tela koja odgovaraju uslovima zadatka. Sa δu, δv i δw obeležimo virtualne promene tih pomeranja. Ove promene mogu biti proizvoljno male veličine, koje zadovoljavaju uslov neprekidnosti elastične deformacije; dakle, same su neprekidne funkcije koordinata. Osim toga, te promene moraju biti jednake nuli u onim tačkama tela, čija su pomeranja data. Tim virtualnim promenama pomeranja tačaka odgovaraju promene komponentnih deformacija

$$\delta e_x = \frac{\partial \delta u}{\partial x}, \qquad \delta g_x = \frac{\partial \delta w}{\partial y} + \frac{\partial \delta v}{\partial z},$$

$$\delta e_y = \frac{\partial \delta v}{\partial y}, \qquad \delta g_y = \frac{\partial \delta u}{\partial z} + \frac{\partial \delta w}{\partial x},$$

$$\delta e_z = \frac{\partial \delta w}{\partial z}, \qquad \delta g_z = \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta u}{\partial y},$$

i promena potencijalne energije

$$\left.\begin{aligned} \delta U_0 = \frac{\partial U_0}{\partial e_x}\delta e_x + \frac{\partial U_0}{\partial e_y}\delta e_y + \frac{\partial U_0}{\partial e_z}\delta e_z + \\ + \frac{\partial U_0}{\partial g_x}\delta g_x + \frac{\partial U_0}{\partial g_y}\delta g_y + \frac{\partial U_0}{\partial g_z}\delta g_z, \end{aligned}\right\} \qquad (240)$$

ili

$$\delta U_0 = \sigma_x \delta e_x + \sigma_y \delta e_y + \sigma_z \delta e_z + \tau_x \delta g_x + \tau_y \delta g_y + \tau_z \delta g_z . \qquad (241)$$

Mehanički rad spoljnih sila na tim virtualnim pomeranjima mora se izraziti posebno za zapreminske i posebno za površinske sile. Rad zapreminskih sila je

$$\iiint (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, dV,$$

gde je sa dV obeležen element zapremine, a integrisanje se vrši po celoj zapremini tela. Rad površinskih sila je

$$\iint (p_{nx}\,\delta u + p_{ny}\,\delta v + p_{nz}\,\delta w)\, dS,$$

gde je dS element spoljne površine, a integral je uzet po onom delu te površine za koji su date površinske sile, dakle, nisu data pomeranja tačaka.

Na taj način princip virtualnih pomeranja u primeni na elastično telo možemo izraziti u obliku

$$\iint (p_{nx}\,\delta u + p_{ny}\,\delta v + p_{nz}\,\delta w)\, dS + \iiint (X\,\delta u + Y\,\delta v + Z\,\delta w)\, dV = \\ = \iiint \delta U_0\, dV,$$

ili, pošto se date spoljne sile, ne menjaju, u obliku

$$\left.\begin{aligned} \delta\Big\{\iiint U_0\, dV - \iiint (X u + Y v + Z w)\, dV - \\ - \iint (p_{nx} u + p_{nx} v + p_{nz} w)\, dS\Big\} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (242)$$

Izraz u zagradi zove se potencijalnom energijom celokupnog sistema i dobiveni rezultat se formuliše ovako: *Od svih mogućih pomeranja, koja dopuštaju uslovi na spoljnoj površini, stvarna pomeranja se odlikuju time što za njih potencijalna energija celokupnog sistema ima ekstremnu vrednost.**)

43. Castiglianova teorema. — Dok princip virtualnih pomeranja formuliše karakterističnu osobinu deformacije napregnutog tela, *Castigliano-va teorema*, koju ćemo sad izvesti, formuliše osobinu napona u tom telu.

Uzmimo izraz za potencijalnu energiju u obliku (238), tj. kao funkciju komponentnih napona i izračunajmo mehanički rad koji bi odgovarao malim promenama stvarnih *komponentnih napona*. Pri tim promenama moraju biti zadovoljeni uslovi ravnoteže tačaka tela, tj. prve tri jednačine grupe (B) i površinski uslovi (β). Date spoljne sile pri tim izmenama ostaju nepromenjene. Poznato je da prve tri jednačine grupe (B) i površinski uslovi (β) nisu dovoljni za određivanje komponentnih napona. Znači može se zamisliti beskonačno mnogo sistema komponentnih napona, koji bi zadovoljavali te jednačine. Postavlja se pitanje: čime se odlikuje od ostalih onaj sistem napona koji stvarno odgovara datim spoljnim silama?

Obeležimo, kao i pre, sa $\sigma_x \ldots$, $\tau_x \ldots$, komponentne napone koji stvarno odgovaraju datim silama, a sa $\sigma_x + \delta\sigma_x, \ldots$, $\tau_z + \delta\tau_x, \ldots$ promenjene komponentne napone. Pošto i jedni i drugi moraju zadovoljiti prve tri jednačine grupe (B) i površinske uslove (β), moraju virtualne promene komponentnih napona zadovoljavati jednačine

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial\,\delta\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\tau_z}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\tau_y}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial\,\delta\sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial\,\delta\tau_x}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta\tau_z}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial\,\delta\sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial\,\delta\tau_y}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta\tau_x}{\partial y} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (243)$$

*) Može se dokazati da je ta ekstremna vrednost *minimum*; za to bi trebalo pri izračunavanju priraštaja potencijalne energije uzeti u obzir i male veličine drugog reda.

u tačkama tela i jednačine

$$\left.\begin{aligned}\alpha\,\delta\sigma_x+\beta\,\delta\tau_z+\gamma\,\delta\tau_y&=0,\\ \alpha\,\delta\tau_z+\beta\,\delta\sigma_y+\gamma\,\delta\tau_x&=0,\\ \alpha\,\delta\tau_y+\beta\,\delta\tau_x+\gamma\,\delta\sigma_z&=0,\end{aligned}\right\}\qquad(244)$$

u tačkama spolje površine. Poslednje tri jednačine moraju biti zadovoljene samo u onim tačkama površine u kojima su date površinske sile, dok u tačkama spoljne površine za koje su data pomeranja, mogu se komponentni naponi menjati na isti način, kao i u ostalim tačkama tela.

Promena potencijalne energije koja bi odgovarala tim malim promenama komponentnih napona jednaka je

$$\delta W=\iiint\left(\frac{\partial W_0}{\partial\sigma_x}\delta\sigma_x+\frac{\partial W_0}{\partial\sigma_y}\delta\sigma_y+\frac{\partial W_0}{\partial\sigma_z}\delta\sigma_z+\right.$$
$$\left.+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_x}\delta\tau_x+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_y}\delta\tau_y+\frac{\partial W_0}{\partial\tau_z}\delta\tau_z\right)dV.$$

ili, prema jednačinama (238'), (19) i (20).

$$\delta W=\iiint\left\{\frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x+\frac{\partial v}{\partial y}\delta\sigma_y+\frac{\partial w}{\partial z}\delta_z\sigma+\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)\delta\tau_x+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)\delta\tau_y+\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\delta\tau_z\right\}dV=$$
$$=\iiint\left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta\sigma_x+\frac{\partial u}{\partial y}\delta\tau_z+\frac{\partial u}{\partial z}\delta\tau_y\right)+\left(\frac{\partial v}{\partial x}\delta\tau_z+\frac{\partial v}{\partial y}\delta\sigma_y+\frac{\partial v}{\partial z}\delta\tau_x\right)+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{\partial w}{\partial x}\delta\tau_y+\frac{\partial w}{\partial y}\delta\tau_x+\frac{\partial w}{\partial z}\delta\sigma_z\right)\right\}dV=$$
$$=\iiint\left\{\frac{\partial}{\partial x}(u\,\delta\sigma_x)+\frac{\partial}{\partial y}(u\,\delta\tau_z)+\frac{\partial}{\partial z}(u\,\delta\tau_y)+\right.$$
$$+\frac{\partial}{\partial x}(v\,\delta\tau_z)+\frac{\partial}{\partial y}(v\,\delta\sigma_y)+\frac{\partial}{\partial z}(v\,\delta\tau_x)+$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x}(w\,\delta\tau_y)+\frac{\partial}{\partial y}(w\,\delta\tau_x)+\frac{\partial}{\partial z}(w\,\delta\sigma_z)\right\}dV-$$
$$-\iiint\left\{u\left(\frac{\partial\,\delta\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\sigma_z}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta\tau_y}{\partial z}\right)+v\left(\frac{\partial\,\delta\tau_z}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta\tau_x}{\partial z}\right)+\right.$$
$$\left.+w\left(\frac{\partial\,\delta\tau_y}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta\tau_x}{\partial y}+\frac{\partial\,\delta\sigma_z}{\partial z}\right)\right\}dV.$$

Od ova dva integrala drugi je jednak nuli, na osnovu jednačina (243), dok se prvi integral, prema poznatom *Gauss*-ovu obrascu, može pretvoriti u integral po površini tela

$$\delta W=\iint\left\{u(\alpha\,\delta\sigma_x+\beta\,\delta\tau_z+\gamma\,\delta\tau_y)+\right.$$
$$+v(\alpha\,\delta\tau_z+\beta\,\delta\sigma_y+\gamma\,\delta\tau_x)+$$
$$\left.+w(\alpha\,\delta\tau_y+\beta\,\delta\tau_x+\gamma\,\delta\sigma_z)\right\}dS.$$

Prema jednačinama (244) ispadaju u ovom integralu svi oni delovi površine na kojima su date površinske sile, a ostaju samo oni na kojima su data pomeranja tačaka u, v i w. Pošto se ta pomeranja ne menjaju, može se dobiveni rezultat napisati u obliku

$$\delta\left\{W-\iint(u\,p_{nx}+v\,p_{ny}+w\,p_{nz})\,dS\right\}.\qquad(245)$$

Dakle, od svih sistema komponentnih napona koji mogu da zadovolje prve tri jednačine grupe (B) i površinske uslove (β) stvarno odgovara zadatim spoljnim silama i zadatim pomeranjima tačaka spoljne površine onaj sistem za koji

$$W-\iint(u\,p_{nx}+v\,p_{ny}+w\,p_{nx})\,dS$$

ima ekstremnu vrednost,*) gde se integrisanje vrši samo po onom delu površine za koji su data pomeranja tačaka.

Ako su, prema zadatku, ta pomeranja jednaka nuli, kao što se to najčešće dešava u tehničkim problemima, mora W imati ekstremnu vrednost. Ovaj stav poznat pod nazivom principa najmanjeg rada ili *Castigliano*-va *teorema***) našao je široku primenu u Statici konstrukcija za određivanje „suvišnih nepoznatih" kod statički neodređenih sistema.***)

---

*) Slično stavu iz t. **42** može se i u ovom slučaju dokazati da je ta vrednost *minimum*, i to uzevši u obzir male veličine drugog reda.

**) *A. Castigliano*, tada student tehnike u Torinu, formulisao ga je 1873 u svom diplomskom radu.

***) Ako izostavimo specijalne slučajeve naprezanja tela, kad pomeranja napadnih tačaka spoljnih sila nisu dovoljno mala da bi se mogao zanemariti njihov uticaj na veličine napona (to je slučaj, na primer, kod savijanja i istovremenog aksijalnog naprezanja tankih štapova), onda su naponi *linearne* funkcije spoljnih sila i momenata spregova. Dakle, W se može pomoću obrasca (238) pretstaviti u obliku kvadratične funkcije suvišnih nepoznatih sila $P, Q, \ldots$ i momenata $L, M \ldots$ Tada je, na osnovu *Castigliano*-va teorema

$$\frac{\partial W}{\partial P}=0,\quad\frac{\partial W}{\partial Q}=0,\ldots,\quad\frac{\partial W}{\partial L}=0,\quad\frac{\partial W}{\partial M}=0\ldots,$$

a to pretstavlja onoliko linearnih jednačina koliko ima suvišnih nepoznatih.

44. Ritz-ova metoda.*) — Ova metoda osnovana na *Castigliano*-vu teoremu u poslednje vreme mnogo se primenjuje za približno rešavanje problema Teorije elastičnosti. Da bi računske radnje ispale što prostije i time se bolje ispoljila suština samo metode, pokazaćemo njenu primenu na problem ravnog naprezanja.

U slučaju ravnog naprezanja obrazac (238) za deformacioni rad dobiva prostiji oblik

$$W_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_x^2 + \sigma_y^2) - \frac{\mu}{E}\sigma_x\sigma_y + \frac{1}{2G}\tau_z^2.$$

Kad nema zapreminskih sila, ovaj izraz se može i dalje uprostiti, jer u slučaju ravnog naprezanja, kao što smo videli u **III** poglavlju, veličine komponentnih napona ne zavise od *Poisson*-ova koeficijenta μ. Oslanjajući se na to, možemo izvesti ceo račun uzevši za μ vrednost nulu. Tada će potencijalna energija celokupne ploče, čija je debljina jedinica, biti

$$W = \frac{1}{2E}\int\int(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + 2\tau_z^2)\,dx\,dy,$$

ili, kad, mesto napona, uvedemo njihove izraze pomoću *Airy*-jeve funkcije

$$W = \frac{1}{2E}\int\int\left[\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]dx\,dy, \qquad (246)$$

gde je integral uzet po celoj površini ploče. Prema *Castigliano*-vu teoremu *Airy*-jeva funkcija mora zadovoljiti konturne uslove i dati ekstremnu vrednost izrazu (246).

Uzmimo mesto funkcije ϕ zbir izraza

$$\phi = \phi_0 + C_1\phi_1 + C_2\phi_2 + C_3\phi_3 + \ldots\ldots, \qquad (247)$$

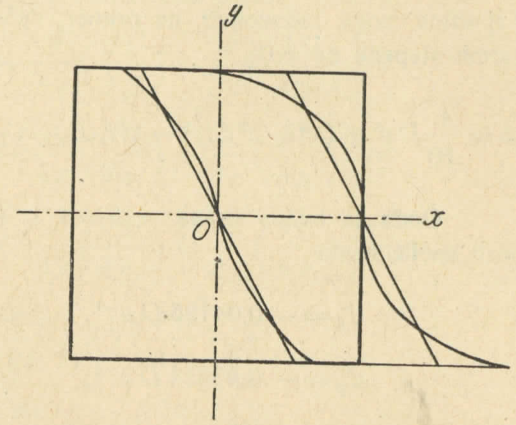
gde su $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \ldots$ funkcije od x i y koje treba da zadovolje konturne uslove, a $C_1, C_2, \ldots$ zasad proizvoljni koeficijenti. Kad uvedemo ovaj zbir u izraz (246), dobiće se izraz za W u obliku polinoma drugog stepena u pogledu na $C_1, C_2, \ldots$ Ove koeficijente biramo sad tako da izraz (246) dobije ekstremnu vrednost, tj.

$$\frac{\partial W}{\partial C_1} = 0, \quad \frac{\partial W}{\partial C_2} = 0, \ldots. \qquad (248)$$

a to će nam dati sistem linearnih jednačina za određivanje koeficijenata $C_1, C_2, \ldots$

*) Ovu metodu je dao 1909 švajcarski matematičar *W. Ritz*,

Više ili manje pogodnim izborom funkcija $\phi_0, \phi_1, \ldots$ može se obično postići, da izraz (247) bude dovoljno tačan i pri malom broju članova. Sam izbor ostavlja se intuiciji istraživača. Kao što se vidi iz izloženog, problem varijacionog računa o iznalaženju funkcije ϕ koja bi dala ekstremnu vrednost integralu (246), zamenjuje se mnogo prostijim problemom iznalaženja ekstremne vrednosti polinoma drugog stepena, odnosno rešavanjem sistema linearnih jednačina (248).



Sl. 61

Kao primer za primenu *Ritz*-ove metode proučićemo lokalno naprezanje krajeva proste grede koju smo posmatrali u **t. 24** Tamo smo već postigli da momenti sila koje napadaju osnove budu jednaki nuli, ali normalne sile u pojedinim tačkama nisu postale jednake nuli, nego

$$p_x = \pm\frac{9}{20}q\left(1 - \frac{5}{3}\frac{y^2}{b^2}\right)\frac{y}{b}. \qquad (249)$$

Da vidimo sad koliki je uticaj tog lokalnog opterećenja osnova na izvesnom udaljenju od krajeva grede.

Posmatrajmo, dakle, ploču (sl. 61) opterećenu na stranama $x = \pm a$ normalnim silama datim izrazom (249). Naponi koji odgovaraju prvom članu tog izraza, tj. čistom savijanju raspoređeni su, kao što znamo, linearno po presecima. Zadatak se time svodi na iznalaženje napona od drugog člana u izrazu (249), tj. od

$$p_x = \pm\frac{3}{4}\frac{q}{b^3}y^3 = \pm D y^3.$$

Konturni uslovi za taj slučaj glase

$$\left.\begin{array}{lll} \text{za } x = \pm a: & \sigma_x = D y^3, & \tau_z = 0, \\ \text{,, } y = \pm b: & \tau_z = 0, & \sigma_y = 0. \end{array}\right\} \qquad (250)$$

Ovi uslovi biće zadovoljeni ako za prvi sabirak u izrazu (247) uzmemo

$$\phi_0 = \frac{1}{20} D y^5, \qquad (251)$$

a sve ostale funkcije $\phi_1, \phi_2, \ldots$, izaberemo tako da budu jednake nuli sile na konturi koje odgovaraju tim funkcijama. To se može postići, na primer, na taj način što se svakoj od funkcija doda množilac $(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2$; drugi izvodi tih funkcija na konturi postaju tada jednaki nuli. Uzmimo u obzir i to da su naponi u našem slučaju, očigledno, parne funkcije od x i neparne funkcije od y. Taj uslov mogu zadovoljuti, na primer, *cele* funkcije parnih stepena od x i neparnih stepena od y, tj.

$$\phi=\frac{1}{20}Dy^5+(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2(C_1+C_2x^2+C_3y^2+C_4x^2y^2+\ldots)y. \quad (252)$$

Onda za odnos strana $a:b=1$ iz jednačina (248) nalazimo ove vrednosti koeficijenata

$$C_1=-0{,}04196\,D\,a^{-4}, \qquad C_3=-0{,}004108\,D\,a^{-6},$$

$$C_2=-0{,}03654\,D\,a^{-6}, \qquad C_4=-0{,}04179\,D\,a^{-8}.$$

Tome odgovara napon

$$\sigma_x=\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}=2Da^3[{}^1/_2\eta^3-(1-\xi^2)^2\eta\{(5\eta^2-3)(0{,}08392+0{,}07308\xi^2)+$$

$$+(21\eta^4-20\eta^2+3)(0{,}004108+0{,}04179\xi^2)\}],$$

gde je $\xi=x/a$ i $\eta=y/b$. Na sl. 61 je prikazan raspored napona u srednjem preseku; kao što se vidi, dijagram se vrlo malo odvaja od prave linije.

45. Teorema uzajamnosti. — Neka su u, v i w pomeranja tačaka, a $e_x,\ldots,g_x,\ldots$ komponentne deformacije, koje odgovaraju naprezanju datog tela sistemom zapreminskih sila X, Y, Z i površinskih sila p_x, p_y, p_z. Označimo sa u' v' i w' pomeranja, a sa $e_x',\ldots,g_x'\ldots$ komponente deformacije, koje bi odgovarale naprezanju istog tela nekim drugim sistemom zapreminskih sila X', Y', Z' i površinskih sila p_x', p_y' i p_z'. Teorema uzajamnosti*) glasi: Mehanički rad prvog sistema sila na pomeranjima koja bi odgovarala drugom sistemu jednak je radu drugog sistema na pomeranjima koja odgovaraju prvom sistemu.

Treba, dakle, dokazati da je

$$\left.\begin{aligned}&\iiint(Xu'+Yv'+Zw')\,dV+\iint(p_xu'+p_yv'+p_zw')\,dS=\\&=\iiint(X'u+Y'v+Z'w)\,dV+\iint(p_x'u+p_y'v+p_z'w)\,dS.\end{aligned}\right\}\quad(253)$$

*) Postavio je 1872 italijanski matematičar *E. Betti.*

Koristeći se jednačinama (7), (β) i (239') možemo uvesti na levoj strani ove jednačine, mesto sila, njihove izraze pomoću komponentnih napona, odnosno pomoću izvoda potencijalne energije. Ta strana tada dobiva oblik

$$-\iiint\Big\{u'\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U}{\partial e_x}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_z}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_y}\Big)\Big]+$$

$$+v'\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_z}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial e_y}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_x}\Big)\Big]+$$

$$+w'\Big[\frac{\partial}{\partial x}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_y}\Big)+\frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial U}{\partial g_x}\Big)+\frac{\partial}{\partial z}\Big(\frac{\partial U}{\partial e_z}\Big)\Big]\Big\}\,dV+$$

$$+\iint\Big\{u'\Big[\alpha\Big(\frac{\partial U}{\partial e_x}\Big)+\beta\Big(\frac{\partial U}{\partial g_z}\Big)+\gamma\Big(\frac{\partial U}{\partial g_y}\Big)\Big]+$$

$$+v'\Big[\alpha\Big(\frac{\partial U}{\partial g_z}\Big)+\beta\Big(\frac{\partial U}{\partial e_y}\Big)+\gamma\Big(\frac{\partial U}{\partial g_x}\Big)\Big]+$$

$$+w'\Big[\alpha\Big(\frac{\partial U}{\partial g_y}\Big)+\beta\Big(\frac{\partial U}{\partial g_x}\Big)+\gamma\Big(\frac{\partial U}{\partial e_z}\Big)\Big]\Big\}\,dS.$$

Transformacijom drugog od ovih integrala u zapreminski dobivamo, posle skraćenja, levu stranu jednačine (253) u obliku:

$$\iiint\Big(e_x'\frac{\partial U}{\partial e_x}+e_y'\frac{\partial U}{\partial e_y}+e_z'\frac{\partial U}{\partial e_z}+g_x'\frac{\partial U}{\partial g_x}+g_y'\frac{\partial U}{\partial g_y}+g_z'\frac{\partial U}{\partial g_z}\Big)\,dV=$$

$$=\iiint[\lambda\varepsilon'\varepsilon+2G(e_x'e_x+e_y'e_y+e_z'e_z)+$$

$$+G(g_x'g_x+g_y'g_y+g_z'g_z)]\,dV,$$

gde je uvedena oznaka $\varepsilon'=e_x'+e_y'+e_z'$.

Iz simetrije nađenog izraza u pogledu na $e_x\ldots$, $g_x\ldots$, s jedne, i $e_x'\ldots$, $g_x'\ldots$, s druge strane, jasno je da bi slična transformacija desne strane jednačine (253) dala isti izraz. Time je dokazana Teorema uzajamnosti koja je našla široku primenu u Statici konstrukcija.

V

NAPREZANJE GREDA

46. Primene teorije elastičnosti u tehnici. — Delovi konstrukcija dimenzionišu se ili na osnovu upoređenja sa postojećim sličnim konstrukcijama, ili putem proračuna.

Prvi način primenjuje se kad se ne može dovoljno sigurno utvrditi opterećenje posmatranog dela konstrukcije, ili kad je raspodela napona u tom delu suviše složena, te se ne može obuhvatiti poznatim rešenjima. Istoj grupi pripadaju i oni delovi konstrukcija, čiji je rad skopčan sa zagrejavanjem usled trenja o druge pokretno vezane delove, ili sa habanjem, rđanjem i t. sl. Dešava se, takođe, da su dimenzije nekog dela već unapred određene uslovima njegove upotrebe ili mogućnosti izrade. U svim tim slučajevima dimenzije se utvrđuju ili neposrednim upoređenjem sa postojećim konstrukcijama, ili pomoću interpolacionih tablica i obrazaca, postavljenih na osnovu naročitih ispitivanja sličnih konstrukcija u sličnim uslovima rada.

Pored ovih ima mnogo konstrukcija čiji se delovi mogu dimenzionisati na osnovu proračuna, iz uslova dovoljne otpornosti zadatom opterećenju. To je slučaj, na pr., kod mostova, brodova, krovnih konstrukcija i t. sl. Metode proračunavanja takvih konstrukcija se osnivaju na zaključcima i obrascima Teorije elastičnosti.

Za razliku od obrazaca Matematike, koja operiše sa apstraktnim pojmovima, obrasci Teorije elastičnosti postavljaju vezu između stvarnih veličina: spoljnih sila, dimenzija tela i osobina materijala. Zato ti obrasci i ne mogu biti toliko besprekorni i univerzalni, kao što su obrasci čiste Matematike. Često, kad je nemoguće obuhvatiti složenu fizičku pojavu u potpunosti, ona se pojednostavljuje, shematizuje uvođenjem naknadnih ograničenja i pretpostavki. Na takav način izvedeni obrazac, po svojoj suštini, nije ništa drugo do simbolički izraz tih pretpostavki. Njegova je primena opravdana samo utoliko, ukoliko su pretpostavke ostvarene. Ova činjenica se ne sme nikad gubiti iz vida.

Videli smo u **I** poglavlju da svi obrasci Teorije elastičnosti pretpostavljaju:

a) da su dilatacije i klizanja male veličine;

b) da je materijal apsolutno elastičan, tj. po prestanku dejstva spoljnih sila da se telo potpuno vraća svom prvobitnom obliku;

c) da su naponi linearne funkcije deformacija, tj. za materijal važi generalisani *Hooke*-ov zakon;

d) da je materijal potpuno homogen i izotropan, što znači da su koeficijenti u izrazima za veze između napona i deformacija isti za sve tačke i za sve pravce u telu.

Obrasci Teorije elastičnosti mogu se, dakle, primenjivati samo na materijale koji odgovaraju gornjim pretpostavkama u dovoljnoj meri (a to su, u glavnom čelik i neke legure aluminiuma i bakra), i to samo u opitom za njih utvrđenim granicama elastičnosti materijala, tj. u granicama važenja *Hooke*-ova zakona.*) Ako se ti obrasci (ili iz njih izvedeni) primenjuju na materijale čije osobine ne odgovaraju tom zakonu, oni ne mogu dati stvarni raspored napona i deformacija u telu, te se moraju smatrati samo za interpolacione. Tada se u te obrasce, obično, uvodi „koeficijent sigurnosti", koji treba, bar donekle, da ispravi netačnost obrasca. Primena takvih obrazaca je, naravno, ograničena konstrukcijama, za koje je iskustvo potvrdilo pogodnost izabratog koeficijenta.

Jedan od najvažnijih delova koustrukcija sačinjavaju grede, tj. štapovi prizmatična oblika, čiji je zadatak da svoje opterećenje prenesu na oslonce. To opterećenje može da deluje:

a) u tačkama osnova štapa,

b) u tačkama njegove bočne površine,

c) u svim tačkama njegove zapremine (sopstvena težina, sile inercije).

U **II** poglavlju proučena rešenja *St.-Venant*-ova problema pretpostavljaju:

1) da opterećenje sačinjavaju sile koje napadaju samo tačke osnova grede;

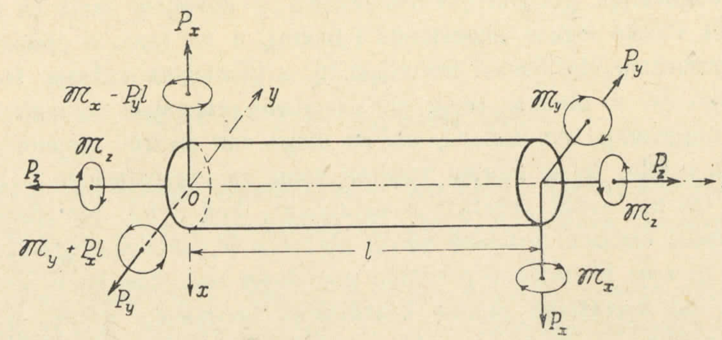
2) da su te sile raspoređene po površinama osnova po naročitom zakonu, određenom oblikom poprečnog preseka štapa (profilom grede);

3) pomeranja tačaka osovine grede da su toliko mala, da se njima prouzrokovane promene napadnih momenata mogu zanemariti.

Uzmimo, kao i dosad, za početak koordinata (sl. 62) težište površine jedne od osnova, a za ose x i y glavne ose inercije te površine. Redukujemo sile koje napadaju tačke druge osnove ($z = l$) na težište njene površine. Pri takvoj redukciji dobićemo, uopšte rečeno: aksijalnu silu P_z, dve poprečne sile P_x i P_y, dva sprega sa momentima $\mathfrak{M}_y$ i $\mathfrak{M}_x$ u ravnimu xz, odnosno yz i torzioni spreg sa momentom $\mathfrak{M}_z$ u ravni te osnove. Da bi štap ostao u ravnoteži, moraju se sile koje napadaju prvu osnovu ($z = 0$) redukovati na sile iste veličine a suprotnog smera, i spregove sa momentima $(-\mathfrak{M}_y - P_x l)$, $(-\mathfrak{M}_x + P_y l)$ i $-\mathfrak{M}_z$. U t. **12** proučili smo posebice naprezanje štapa aksijalnom silom P_z i spregovima $\mathfrak{M}_y$ i $\mathfrak{M}_x$, u tt. **13**—**16** naprezanje spregom $\mathfrak{M}_z$, a u tt. **17**—**22** savijanje silom P_x; za savijanje silom P_y važe, naravno, slični zak-

*) Granica elastičnosti je uvek znatno niža od granice kidanja, zato se iz obrazaca Teorije elastičnosti ni u kom slučaju ne mogu odrediti veličine opterećenja koje bi izazvale kidanje materijala.

ljučci. Svi dobiveni obrasci su partikularna rešenja osnovnih jednačina Teorije elastičnosti, a kako su te jednačine linearne to će ih i zbir takvih rešenja takođe zadovoljavati. To znači da se rešenje za najopštiji slučaj opterećenja osnova (sl. 62) može dobiti sabiranjem ranije nađenih rešenja za ove posebne slučajeve, može se, dakle, primeniti superpozicija. Ova važna činjenica, naravno, znatno olakšava proučavanje naprezanja štapova.



Sl. 62

Utvrdili smo da se, ukoliko su ostvarene gore pobrojane pretpostavke, u tačkama štapa javljaju samo komponentni naponi σ_z, τ_y, τ_x, dok su tri ostala komponentna napona σ_z, σ_y, τ_z jednaka nuli. Videli smo iz rešenja *St.-Venant*-ova problema ovo.

1) U pogledu normalnog napona σ_z:

a) normalni napon od aksijalne sile P_z je isti u svim tačkama tela, a jednak

$$\frac{P_z}{F};$$

b) normalni napon od sprega $\mathfrak{M}_y$ i sile P_x,

$$-\frac{\mathfrak{M}_y + P_x(l-z)}{I_y}\,x = -\frac{M_y}{I_y}\,x,$$

proporcionalan je napadnom momentu M_y u posmatranom preseku i apscisi tačke tog preseka, a obrnuto proporcionalan momentu inercije površine preseka u odnosu na osu y.

c) analogno tom, normalni napon od sprega $\mathfrak{M}_x$ i sile P_y,

$$\frac{\mathfrak{M}_x - P_y(l-z)}{I_x}\,y = \frac{M_x}{I_x}\,y,$$

proporcionalan je napadnom momentu M_x i ordinati tačke, a obrnuto proporcionalan momentu inercije površine preseka u odnosu na osu x.

d) torzioni moment $\mathfrak{M}_z$ ne utiče na veličinu normalnog napona.

2) U pogledu tangencijalnih napona:

a) tangencijalni napon ne zavisi od z, tj. od položaja posmatranog poprečnog preseka duž štapa;

b) aksijalna sila P_z i spregovi $\mathfrak{M}_x$ i $\mathfrak{M}_y$ ne izazivaju tangencijalne napone;

c) tangencijalni naponi koje izazivaju sile P_x i P_y i spreg $\mathfrak{M}_z$, raspoređeni su po površini preseka prema naročitim zakonima, određenim profilom grede. Za profile koji se najčešće primenjuju u tehnici (**I**, **[**, **ꓶ**, **L**) ti zakoni nisu poznati i o rasporedu tangencijalnih napona u njima može se samo donekle stvoriti pretstava na osnovu analogija;

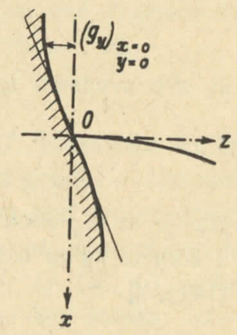
d) iz dosad proučenih slučajeva savijanja štapova može se zaključiti da je pri savijanju silom P_x, raspored tangencijalnih napona τ_y u pravcu ose y, tj. upravnom na ravan savijanja, blizak jednolikom, ako je dimenzija grede u tom pravcu mala u upoređenju sa drugom poprečnom dimenzijom. Tada i napon τ_x postaje mali u upoređenju sa τ_y. Za savijanje silom P_y važi sličan zaključak, naravno, uz zamenu x sa y i obrnuto. Ako se taj zaključak proširi i na grede oblika **I** i njima slične, dolazi se do poznatog obrasca Otpornosti materijala

$$\tau_y = \frac{P_x S_y}{I_y t}, \tag{254}$$

gde je sa t označena debljina grede, a sa S_y moment u odnosu na osu y onog dela površine preseka koji se nalazi ispod posmatrane tačke.

Ovi zaključci o rasporedu napona važe samo dotle, dok su ispunjene sve navedene pretpostavke. Jedna od njih je, da je opterećenje raspoređeno po površini osnove prema naročitom zakonu. Ostvariti tu pretpostavku u praksi je, očigledno, nemoguće, no to, kao što smo videli u **IV** poglavlju, znači da zaključci izvedeni iz rešenja *St.-Venant*-ova problema gube smisao samo u neposrednoj blizini opterećenih osnova. Videli smo, takođe, da je uz isto ograničenje opravdana primena tih zaključaka na grede sa više oslonaca. Čak i primena njihova na grede opterećene podeljenim opterećenjem i zapreminskim silama, kao što smo videli u poglavlju **III**, ne unosi osetnu grešku u rezultat, ako su poprečne dimenzije grede male u poređenju sa rasponom.

Pri iznalaženju pomeranja tačaka grede u t. **7** odredili smo integracione konstante a, b, c, p, q, r na taj način, što smo vezali koordinatni početak za težište površine jedne od osnova i time eliminisali translaciju. Da bi se eliminisala rotacija oko osa x i y, postavili smo uslov da element ose z zadržava svoj pravac u telu. Najzad smo eliminisali rotaciju oko ose z, postavivši uslov da element tela koji je pripadao xz ravni ostane u njoj. Ovi uslovi, su dali



Sl. 63

$$a = 0, \quad b = 0, \quad c = 0,$$

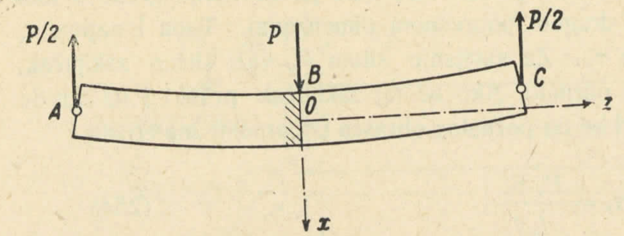
$$p = (g_x)_{\substack{x=0\\y=0}}, \quad q = 0, \quad r = 0;$$

to znači da je za osu z bila uzeta tangenta elastične linije u početku koordinata (sl 63). Element te osnove koji se poklapao sa osom x odvojiće se onda od nje i obrazovaće sa njom ugao

$$(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}}.$$

Levi kraj grede je onda „uklješten" u tom smislu što je element elastične linije vezan za početak ose z. To je dovelo do jednačine (141) za elastičnu liniju.

No „uklještenje kraja" može se i drukčije zamisliti. Na pr., ako imamo gredu (sl. 64) koju napadaju tri sile u presecima A, B i C, iz simetrije je očevidno da će element tela koji je pripadao osi x zadržati svoj pravac u prostoru, tj. moraju se eliminisati rotacije tog elementa oko osa y i z. Morao bi se, dakle, mesto elementa ose z, vezati za telo element ose x*), tj. postaviti uslov da je za tačku $(dx, 0, 0)$ $v=0$ i $w=0$. Tada druga i treća jednačina (32) daju



Sl. 64

$$r=0,\quad q=(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}},$$

dok poslednji uslov, da element ravni xy ostane u njoj, tj. da je za tačku $(0, dy, 0)$ $w=0$, daje

$$p=0.$$

U tom slučaju osa z nije tangenta elastične linije u koordinatnom početku, već obrazuje sa tom tangentom ugao $(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}}$. Jednačina elastične linije dobiva onda oblik

$$u_0=\frac{P_x}{6EI_y}(3l-z)^2+(g_y)_{\substack{x=0\\y=0}}z,$$

ili, ako uvedemo za τ_y izraz (254),

$$u_0=\frac{P_x}{6EI_y}(3l-z)^2+\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{P_xS_0}{I_yt}z,$$

gde je sa S_0 obeležen moment onog dela površine osnove koji je ispod ose y u odnosu na tu osu. Naknadni član, kojim se ovaj izraz razlikuje od izraza (141), tj.

$$\frac{2(1+\mu)}{E}\frac{P_xS_0}{I_yt}z,$$

za razliku od prvog člana „ugiba od savijanja", zove se „ugib od smicanja".

*) Za konzolu bi to značilo da je element dx osnove „prilepljen" za zid.

Uporedimo najveće vrednosti ovih ugiba na kraju grede. Njihov odnos je

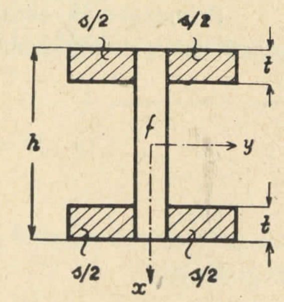
$$6(1+\mu)\frac{S_0}{tl^2}.$$

Za gredu pravougaonog preseka visine h je $S_0={}^1/_8\,th^2$, i prema tome, odnos ugiba je

$$6(1+\mu)\frac{h^2}{l^2}.$$

Za gredu **I** profila (sl. 65) sastavljenu od dva pojasa površina s i debljine t i rebra površine f je

$$S_0={}^1/_2\,h\left[s\left(1-\frac{t}{h}\right)+{}^1/_4 f\right],$$



Sl. 65

ili, ako zanemarimo mali razlomak t/h,

$$S_0\approx {}^1/_2\,h(s+{}^1/_4 f).$$

Za taj profil je odnos najvećih ugiba

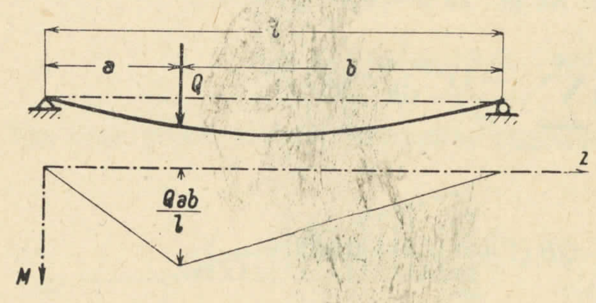
$$3(1+\mu)\left({}^1/_4+\frac{s}{f}\right)\frac{h^2}{l^2}.$$

Kao što se iz ova dva primera vidi, za grede čija je visina mala prema dužini taj je odnos mala veličina drugog reda. Sa tog razloga se u tehničkim proračunima, obično, ne uzima u obzir ugib od smicanja. Ovaj zaključak, slično gornjem, proširuje se i na kontinuirane nosače, a i na podeljeno opterećenje.

Diferencijalna jednačina elastične linije,

$$\frac{1}{\rho}\approx\frac{d^2u_0}{dz^2}=\frac{M_y}{EI_y}, \tag{255}$$

primenjuje se u tehnici ne samo na grede prizmatičnog oblika, već, štaviše i na grede promenljiva preseka, što je donekle opravdano zaključcima t. **33.**



Sl. 66

47. Elastična linija proste grede. — Napadni moment kod proste grede opterećene koncentrisanim teretom Q (sl. 66) može se, kao što znamo, izraziti obrascem

$$M=Q\left[\frac{b}{l}z-\left|(z-a)\right|\right], \tag{256}$$

gde se član desno od | dodaje samo za preseke uzete desno od tereta, tj. za $z > a$. Ovde su spojene u jednom izrazu dve jednačine, od kojih jedna,

$$M = Q\frac{b}{l}z,$$

važi za $z < a$, a druga,

$$M = Q\frac{a}{l}(l - z),$$

za $z > a$.

Primena ovih obrazaca znatno je olakšana ako funkciju M razvijemo, na poznati način, u trigonometriski red,

$$M = \frac{2}{\pi^2} Ql \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}, \qquad (257)$$

koji važi za ceo raspon grede. Tada iz jednačine (255) nalazimo dvostrukim integralenjem

$$u = \frac{2}{\pi^4} QB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi z}{l} + Cz + C_1,$$

gde je sa $B = l^3/EI$ obeležen t. zv. „koeficijent gipkosti" grede a kod u_0 izostavljen indeks. Iz uslova da je $u = 0$ za $z = 0$ i $z = l$, sledi $C = 0$ i $C_1 = 0$, tako da je za prostu gredu opterećenu koncentrisanim teretom

$$u = \frac{2}{\pi^4} QB \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}. \qquad (258)$$

Ovaj red konvergiše vrlo brzo. Na pr., za $a = b = {}^1/_2 l$ je

$$u = \frac{2}{\pi^4} QB \sum_{n=1,3,5..}^{\infty} \frac{(-1)^{{}^1/_2(n-1)}}{n^4} \sin\frac{n\pi z}{l},$$

i najveći ugib je

$$(u)_{z={}^1/_2 l} = \frac{2}{\pi^4} QB\,(1 + 0{,}012 + 0{,}002 + \ldots).$$

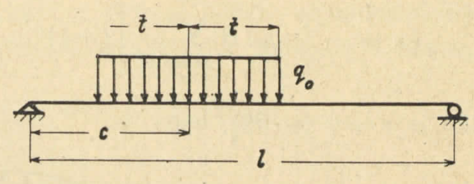
Kao što se iz ovog primera vidi, često je dovoljno zadržati samo prvi član reda, što u datom slučaju unosi grešku nešto veću od 1 %.

Pomoću obrasca (258) može se naći integralenjem jednačina elastične linije ma za koje podeljeno opterećenje inteziteta $q(a)$

$$u = \frac{2}{\pi^4} B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin\frac{n\pi z}{l} \int_0^l q(a) \sin\frac{n\pi a}{l}\, da.$$

Na pr., za opterećenje jednoliko podeljeno na delu $2t$ raspona (sl. 67), tj. za

$$q(a) = \begin{cases} 0 & \text{za} \quad 0 < a < c - t, \\ q_0 & \text{,,} \quad c - t < a < c + t, \\ 0 & \text{,,} \quad c + t < a < l, \end{cases}$$



Sl. 67

je

$$\int_0^l q(a) \sin\frac{n\pi a}{l}\, da = q_0 \int_{c-t}^{c+t} \sin\frac{n\pi a}{l}\, da = \frac{2}{n\pi} q_0 l \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi t}{l}$$

i

$$u = \frac{4}{\pi^5} q_0 l B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\frac{n\pi c}{l} \sin\frac{n\pi t}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}. \qquad (259)$$

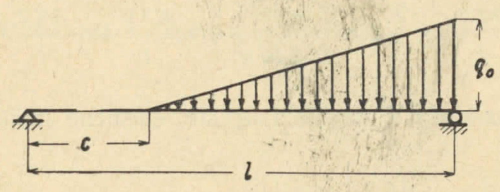
Ovaj red konvergiše još brže od (258). Na pr., za $c = t = {}^1/_2 l$, tj. za jednoliko opterećenje po celom rasponu je

$$u = \frac{4}{\pi^5} q_0 l B \sum_{n=1,3..}^{\infty} \frac{1}{n^5} \sin\frac{n\pi z}{l},$$

i najveći ugib na sredini je

$$(u)_{z={}^1/_2 l} = \frac{4}{\pi^5} q_0 l B\,(1 - 0{,}004 + \cdots).$$

Kao drugi primer uzmimo *hidrostatičko* opterećenje (sl. 68), tj.



Sl. 68

$$q(a) = \begin{cases} 0 & \text{za } 0 < a < c, \\ q_0 \dfrac{a - c}{l} & \text{,, } c < a < l; \end{cases}$$

onda je

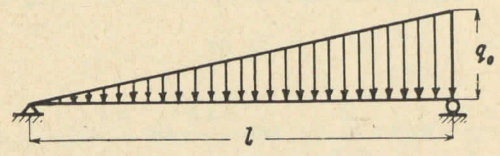
$$\int_0^l q(a)\sin\frac{n\pi a}{l}\,da=\frac{q_0}{l}\int_c^l (a-c)\sin\frac{n\pi a}{l}\,da=$$

$$=-\frac{q_0}{n\pi}\left[(-1)^n(l-c)+\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{l}\right],$$

i

$$u=-\frac{2}{\pi^5}q_0 l B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^5}\left[(-1)^n\frac{l-c}{l}+\frac{1}{n\pi}\sin\frac{n\pi c}{l}\right]\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

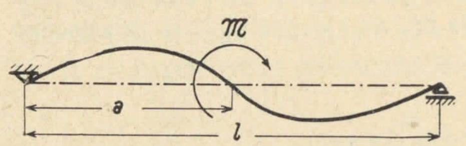
Ako je $c=0$ (sl. 69), onda je



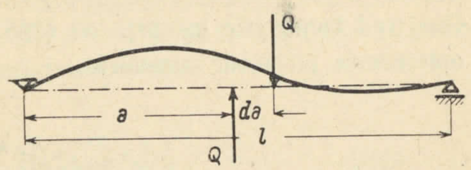
$$u=-\frac{2}{\pi^5}q_0 l B\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^5}\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Sl. 69

Iz osnovnog obrasca (258) može se izvesti i jednačina elastične linije za gredu opterećenu spregom $\mathfrak{M}$ na otstojanju a od levog kraja (sl. 70). Zamislimo da gredu napadaju dve sile $-Q$ i Q na otstojanjima a i $a+da$ od levog kraja



Sl. 70



Sl. 70a

(sl. 70a). Onda će ordinata elastične linije biti algebarski zbir ordinata koje odgovaraju svakoj od tih sila posebice

$$u=u(z,a+da)-u(z,a)=\frac{\partial u(z,a)}{\partial a}\,da=$$

$$=\frac{2}{\pi^3}Q\,da\,\frac{B}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}=\frac{2}{\pi^3}\mathfrak{M}\frac{B}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}\cos\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Diferencijalenjem po z možemo sad naći ugao nagiba tangente elastične linije

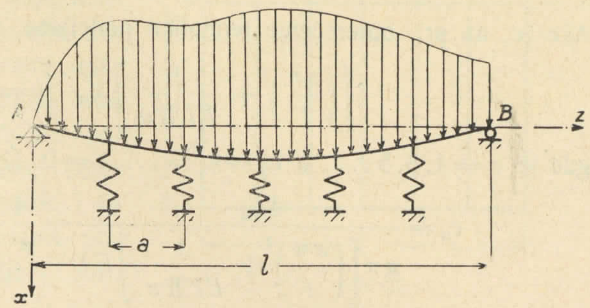
$$u'=\frac{2}{\pi^2}\mathfrak{M}\frac{B}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi z}{l}.$$

Uglovi nagiba krajeva su

$$\alpha=\frac{2}{\pi^2}\mathfrak{M}\frac{B}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{l},$$

$$\beta=\frac{2}{\pi^2}\mathfrak{M}\frac{B}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi a}{l}.$$

Primena izvedenih obrazaca za elastične linije u obliku trigonometriskih redova često znatno olakšava rešavanje statički neodređenih zadataka. Uzmimo, kao prvi primer takve primene, gredu čiji su krajnji oslonci (sl. 71) potpuno kruti, dok $(j-1)$ srednjih ekvidistantnih oslonaca imaju isti koeficijent elastičnosti $\mathfrak{A}$*). Ako je broj tih elastičnih oslonaca dovoljno veliki, primenjuje se poznata približna metoda iz Otpornosti materijala, zasnovana na zameni elastičnih oslonaca neprekidnom elastičnom podlogom duž cele grede; otpor te podloge po jedinici dužine je onda $u/(\mathfrak{A}a)$.



Sl. 71

Diferencijalenjem jednačine elastične linije (255) dvaput po z, uzevši pritom u obzir da je drugi izvod napadnog momenta jednak opterećenju po jedinici dužine grede, nalazimo

$$E\,I\,u^{IV}=q(z)-\frac{u}{\mathfrak{A}\,a},$$

gde je sa q obeležen intenzitet opterećenja po dužini grede, proizvoljno zadat u obliku funkcije od z.

Rešenje diferencijalne jednačine

$$u^{IV}+\frac{u}{E\,I\,\mathfrak{A}\,a}=\frac{q(z)}{E\,I}$$

potražimo u obliku trigonometriskog reda

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

*) Taj slučaj javlja se, na pr., kad se greda AB oslanja na ekvidistantne poprečne grede istog profila i iste dužine.

Kad uvrstimo taj izraz u diferencijalnu jednačinu, biće

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4+\frac{1}{E\,I\,\mathfrak{A}\,a}\right]c_n\sin\frac{n\pi z}{l}=\frac{q}{E\,I},$$

odakle se koeficijenti reda određuju na običan način množenjem jednačine sa $\sin n\pi z/l$ i integralenjem po z u granicama od 0 do l

$$\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4+\frac{1}{E I\,\mathfrak{A}\,a}\right]c_n\,\frac{l}{2}=\frac{1}{E\,I}\int_0^l q\sin\frac{n\pi z}{l}\,dz\,.$$

Ako je, na pr., opterećenje jednoliko podeljeno, tj, $q=q_0$, biće

$$\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4+\frac{1}{E I\,\mathfrak{A}\,a}\right]c_n\,\frac{l}{2}=\frac{2}{n\pi}\,\frac{q_0\,l}{E\,I},$$

gde je $n=1,3,5\ldots$, a $c_2=c_4=\ldots\ldots=0$. Odavde je

$$c_n=\frac{4\,q_0}{n\pi\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^4+\frac{1}{E I\,\mathfrak{A}\,a}\right]E\,I}=\frac{4}{\pi^5}\,q_0\,l\,B\,\frac{1}{n\,(n^4+\alpha)},$$

gde je uvedena oznaka

$$\alpha=\frac{l^4}{\pi^4\,E\,I\,\mathfrak{A}\,a}=\frac{l\,B}{\pi^4\,\mathfrak{A}\,a},$$

i

$$u=\frac{4\,q_0\,l\,B}{\pi^5}\sum_{n=1,3\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\pi z/l}{n\,(n^4+\alpha)}. \tag{260}$$

Napadni moment

$$M=-E\,I\,u''=\frac{4}{\pi^3}\,q_0\,l^2\sum_{n=1,3\ldots}^{\infty}\frac{\sin n\pi z/l}{n^4+\alpha}$$

ima najveću vrednost na sredini raspona,

$$M_{max}=\frac{4}{\pi^3}\,q_0\,l^2\sum_{n=1,3\ldots}^{\infty}\frac{n\,(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^4+\alpha}=\frac{1}{8}\,q_0\,l^2\,U_2\,,$$

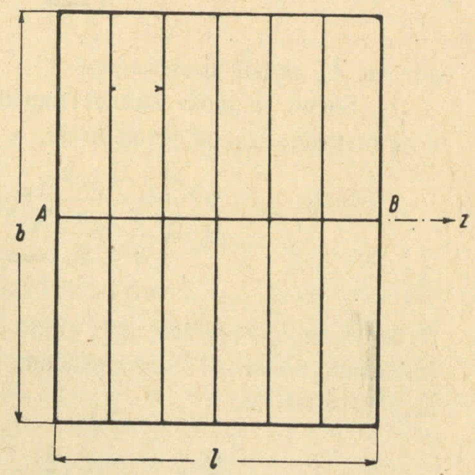
gde kooeficijent*)

$$U_2=\frac{32}{\pi^3}\sum_{n=1,3\ldots}^{\infty}\frac{n\,(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{n^4+\alpha} \tag{261}$$

*) v. *Otpornost materijala*, str. 128, 129 i 212.

karakteriše smanjenje napadnog momenta proste grede izazvato dodavanjem elastičnih ležišta.

Ako opterećenje ne deluje neposredno na poprečnu gredu, već na grede glavnog pravca (sl. 72), kojima poprečna služi kao oslonac, onda, kao što znamo*), treba u našim obrascima zameniti q_0 sa $^5/_8 Q/a$, i $\mathfrak{A}$ sa $b^3/(48\,E\,I_1)$, gde je Q teret koji nosi *jedna* greda glavnog pravca, b njen raspon i I_1 moment inercije njenog profila.



Sl. 72

Izrazi (260) i (261) imaju tu prednost nad poznatim obrascima Otpornosti materijala što njihova primena nije vezana za tablice, odnosno dijagrame, glomaznih funkcija. Redovi konvergišu brzo i za tehničke proračune je obično dovoljno zadržati prva dva člana. Osim toga, može se ista metoda proširiti i na druge zakone opterećenja u pravcu poprečne grede, za koje funkcije U nisu utabličene.

48. Greda na elastičnim ležištima. — Pri rešavanju zadataka postavljena u t. **47** pretpostavljali smo, kao i obično, da je broj elastičnih oslonaca, odnosno greda glavnog pravca, dovoljno velik da bi se njihovi otpori smeli zameniti otpornom neprekidne elastične podloge. Nezgodna strana te pretpostavke je u neodređenosti pojma „dovoljno veliki“ broj, tj. u neodređenosti granica greške, koju pretpostavka unosi u račun. Pretpostavljali smo takođe da su oslonci ekvidistantni i da imaju iste koeficijente elastičnosti. Pri primeni trigonometriskih redova te pretpostavke nisu neophodne, jer se problem rešava dosta jednostavno za koji bilo broj proizvoljno raspoređenih oslonaca, a sa različitim koeficijentima elastičnosti.

Kao što smo videli u t. **47,** napadni moment koncentrisanog tereta Q koji deluje na otstojanju a od levog kraja grede može se uvek pretstaviti u obliku trigonometriskog reda

$$\frac{2}{\pi^2}\,Q\,l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}.$$

Sabiranjem sličnih izraza dobiva se izraz za napadni moment od više koncentrisanih tereta, a zamenom Q sa $q(a)da$ i integralenjem po a može se dobiti izraz za napadni moment od proizvoljno zadatog podeljenog opterećenja. Na taj se

*) *ibid.* str. 130.

način napadni moment od ma kakvog zadatog opterećenja grede može uvek pretstaviti u obliku trigonometriskog reda

$$M_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi z}{l}, \tag{262}$$

gde su A_n zadati koeficijenti.

Slično se može izraziti i napadni moment od otpora $R_i = u_i / \mathfrak{A}_i$ ležišta broj i na otstojanju a_i od levog kraja, a koje ima koeficijent elastičnosti $\mathfrak{A}_i$

$$M_i = \frac{2}{\pi^2} l \frac{u_i}{\mathfrak{A}_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sin \frac{k \pi z}{l}.$$

Ovde je sa u_i obeležen ugib grede u preseku iznad ležišta broj i, tj. za $z = a_i$. Obeležimo sa $m-1$ broj elastičnih oslonaca. Tada je napadni moment od otpora svih ležišta

$$M = \sum_{i=1}^{m-1} M_i = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{u_i}{\mathfrak{A}_i} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sin \frac{k \pi z}{l}.$$

Elastičnu liniju grede potražimo, kao i pre, u obliku trigonometriskog reda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi z}{l}, \tag{263}$$

gde su C_n zasad nepoznati koeficijenti. Naš izraz za napadni moment, prouzrokovan otporima lešišta, dobiva tada oblik

$$M = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\mathfrak{A}_i} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi a_i}{l} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sin \frac{k \pi z}{l},$$

ili, ako izvršimo uzajamnu zamenu slova k i n,

$$M = \frac{2l}{\pi^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\mathfrak{A}_i} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n \pi a_i}{l} \sin \frac{n \pi z}{l}. \tag{264}$$

Diferencijalna jednačina elastične linije u datom slučaju postaje

$$E I u'' = M_0 + M.$$

Kad uvrstimo u nju izraze (262), (263) i (264) i izjednačimo koeficijente pored

$\sin n \pi z / l$, nalazimo za određivanje koeficijenata C_n u izrazu (263) sistem linearnih algebarskih jednačina

$$E I \left(\frac{n \pi}{l}\right)^2 C_n + \frac{2l}{\pi^2 n^2} \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\mathfrak{A}_i} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sin \frac{n \pi a_i}{l} = A_n,$$

$n = 1, 2, 3 \ldots\ldots,$

ili, ako promenimo red sabiranja,

$$n^4 C_n + \frac{2}{\pi^4} B \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\mathfrak{A}_i} \sin \frac{k \pi a_i}{l} \sin \frac{n \pi a_i}{l} = \frac{B}{\pi^2 l} n^2 A_n. \tag{265}$$

Ovaj sistem od beskonačnog broja jednačina ($n = 1, 2, \ldots$), gde u svaku jednačinu ulaze sve nepoznate ($k = 1, 2 \ldots$), rešava se uopšte, aproksimacijama. Zanemaruju se u prvoj jednačini ($n = 1$) svi članovi sa $k > 1$, te se određuje prva aproksimacija za C_1. U drugoj jednačini ($n = 2$) se zanemaruju članovi sa $k > 2$, a mesto C_1 se unosi njegova malopre nađena približna vrednost, te se određuje C_2. U trećoj jednačini ($n = 3$) se zanemaruju članovi sa $k > 3$ i sa nađenim vrednostima za C_1 i C_2 određuje se C_3 itd. Zatim, kad je sračunat izvesan broj koeficijenata, iz prve jednačine se određuje prva korektura za C_1, iz druge za C_2, itd. Obično su te korekture, sem kod C_1, neznatne, te nije potrebno postupak aproksimacija ponavljati više puta.

Za slučaj *ekvidistantnih ležišta sa istim koeficijentom elastičnosti*, sistem jednačina (265) dobiva jednostavniji oblik, te se koeficijenti C_n reda (263) mogu čak eksplicitno izraziti. Kad zamenimo $\mathfrak{A}_i$ sa $\mathfrak{A}$ i a_i sa $i\,l/m$, jednačina (265) dobiva oblik

$$n^4 C_n + \frac{B}{\pi^4 \mathfrak{A}} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \cdot K(n, k) = \frac{B}{\pi^2 l} n^2 A_n, \tag{266}$$

gde je uvedena skraćena oznaka

$$K(n, k) = 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{k \pi i}{m} \sin \frac{n \pi i}{m}. \tag{267}$$

Ovaj izraz je, očigledno, jednak nuli za vrednosti k i n deljive sa m. Za ostale vrednosti k i n on se može napisati u obliku

$$K(n, k) = \sum_{i=1}^{m-1} \left[\cos \frac{i(k-n)\pi}{m} - \cos \frac{i(k+n)\pi}{m}\right]. \tag{268}$$

Ali, iz poznatog obrasca za trigonometriski polinom

$$\sum_{i=1}^{m-1} \cos i\theta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\frac{\sin(m+{}^1/_2)\,\theta}{\sin {}^1/_2\,\theta}$$

vidi se da je za $k=n+2mj$, gde je $j=1, 2, 3\ldots$,

$$K(n,k)=\sum_{i=1}^{m-1}\left(\cos 2\,j\,i\pi-\cos\frac{2\,n\,i\pi}{m}\right)=m-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin(2n\pi-n\pi/m)}{\sin n\pi/m}=m,$$

dok je za $k=-n+2mj$

$$K(n,k)=\sum_{i=1}^{m-1}\left(\cos\frac{2\,n\,i\pi}{m}-\cos 2\,j\,i\,\pi\right)=-m.$$

Za *sve* ostale vrednosti k je

$$K(n,k)=\frac{\sin(m+{}^1/_2)\,(k-n)\,\pi/m}{\sin {}^1/_2\,(k-n)\,\pi/m}-\frac{\sin(m+{}^1/_2)\,(k+n)\,\pi/m}{\sin {}^1/_2\,(k+n)\,\pi/m}=(-1)^{k-n}-(-1)^{k+n}=0.$$

Na taj način, za vrednosti n deljive sa m, dobivamo iz (266) *nezavisne* jednačine oblika

$$j^2\,m^2\,C_{jm}=\frac{B}{\pi^2 l}A_{jm}, \qquad (269)$$

gde je $j=1,2,\ldots$, a za vrednosti $n=1,2,\ldots\,(m-1),(m+1)\ldots$ dobivamo $(m-1)$ *sistema* od beskonačnog broja jednačina oblika

$$\left.\begin{aligned}
&n^4 C_n+\frac{B\,m}{\pi^4\mathfrak{A}}C_n+C_{2m+n}+C_{4m+n}+\cdots-\\
&\qquad -C_{2m-n}-C_{4m-n}-\cdots)=n^2\frac{B}{\pi^2 l}A_n,\\
&(2\,m-n)^4\,C_{2m-n}-\frac{B\,m}{\pi^4\mathfrak{A}}(C_n+C_{2m+n}+C_{4m+n}+\cdots-\\
&\qquad -C_{2m-n}-C_{4m-n}-\cdots)=(2\,m-n)^2\frac{B}{\pi^2 l}A_{2m-n},\\
&(2\,m+n)^4\,C_{2m+n}+\frac{B\,m}{\pi^4\mathfrak{A}}(C_n+C_{2m+n}+C_{4m+n}+\cdots-\\
&\qquad -C_{2m-n}-C_{4m-n}-\cdots)=(2\,m+n)^2\frac{B}{\pi^2 l}A_{2m+n},\\
&(4\,m-n)^4\,C_{4m-n}-\frac{B\,m}{\pi^4\mathfrak{A}}(C_n+C_{2m+n}+C_{4m+n}+\cdots-\\
&\qquad -C_{2m-n}-C_{4m-n}-\cdots)=(4\,m-n)^2\frac{B}{\pi^2 l}A_{4m-n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \qquad (269')$$

Dodavanjem druge jednačine ovog sistema prvoj nalazimo

$$C_{2m-n}=-\left(\frac{n}{2m-n}\right)^4 C_n+\frac{n^2}{\pi^2}\frac{B}{l}\frac{A_n}{(2m-n)^4}+\frac{1}{\pi^2}\frac{B}{l}\frac{A_{2m-n}}{(2m-n)^2}.$$

Oduzimajući treću jednačinu od prve, dobivamo

$$C_{2m+n}=\left(\frac{n}{2m+n}\right)^4 C_n-\frac{n^2}{\pi^2}\frac{B}{l}\frac{A_n}{(2m+n)^4}+\frac{1}{\pi^2}\frac{B}{l}\frac{A_{2m+n}}{(2m+n)^2}.$$

Na isti način možemo dodavanjem četvrte jednačine prvoj, odnosno oduzimanjem pete jednačine od prve, izraziti C_{4m-n} i C_{4m+n} pomoću C_n, itd. Kad uvrstimo sve te izraze u prvu jednačinu i podelimo sa n^4, biće

$$C_n\left\{1+\frac{m}{\pi^4}\frac{B}{\mathfrak{A}}\left[\frac{1}{n^4}+\frac{1}{(2m-n)^4}+\frac{1}{(2m+n)^4}+\frac{1}{(4m-n)^4}+\cdots\right]\right\}-$$
$$-\frac{m}{\pi^6}\frac{B^2}{\mathfrak{A}\,l}\frac{A_n}{n^2}\left[\frac{1}{(2m-n)^4}+\frac{1}{(2m+n)^4}+\frac{1}{(4m-n)^4}+\cdots\right]=$$
$$=\frac{m}{\pi^6}\frac{B^2}{\mathfrak{A}\,l}\frac{1}{n^4}\left[\frac{A_{2m-n}}{(2m-n)^2}-\frac{A_{2m+n}}{(2m+n)^2}+\frac{A_{4m-n}}{(4m-n)^2}-\cdots\right].$$

Ako se od te jednačine oduzme

$$\frac{m}{\pi^6}\frac{B^2}{\mathfrak{A}\,l}\frac{A_n}{n^6}$$

ona će se moći napisati u kraćem obliku

$$\left(C_n-\frac{B}{\pi^2 l}\frac{A_n}{n^2}\right)\left[1+\frac{m}{\pi^4}\frac{B}{\mathfrak{A}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^4}\right]=$$
$$=\frac{m}{\pi^6}\frac{B^2}{\mathfrak{A}\,l}\frac{1}{n^4}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{A_{2jm-n}}{(2jm-n)^2}-\sum_{j=0}^{\infty}\frac{A_{2jm+n}}{(2jm+n)^2}\right]. \qquad (270)$$

Ova jednačina određuje eksplicitno koeficijente C_n reda (263) za vrednosti n koje nisu deljive sa m.

Zbir reda na levoj strani te jednačine može se napisati i u konačnom obliku

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^4}=\frac{\pi^4}{48\,m^4}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right)\left(1+3\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right). \qquad (271)$$

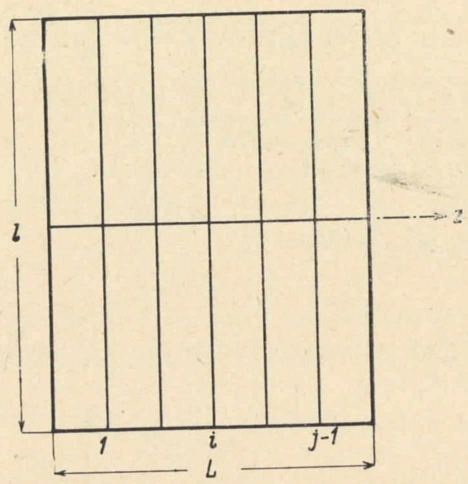
Poslednji izraz može se izvesti, na pr., trostrukim diferencijalenjem poznatog reda

$$\operatorname{ctg} \theta = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{j\pi + \theta} \tag{271 a}$$

i zamenom

$$\theta = \frac{n\pi}{2m}.$$

49. Savijanje rešetke. — U slučaju rešetke sa jednim stringerom (poprečnom gredom) (sl. 73), može se primeniti razlaganje potpuno slično prethodnom.



Sl. 73

Ako je Q opterećenje jedne grede glavnog pravca, a $B = l^3/EI$ njen koeficijent gipkosti, onda je ugib u čvoru broj i

$$u_i = B(\alpha Q - \beta R_i), \tag{272}$$

gde su α i β koeficijenti u izrazima za ugib grede glavnog pravca. Na pr., za slučaj jednoliko podeljenog opterećenja duž te grede i čvora na njenoj sredini je $\alpha = 5/384$ i $\beta = 1/48$. Iz jednačine (272) je pritisak na stringer u tom čvoru

$$R_i = \frac{\alpha}{\beta} Q - \frac{u_i}{B\beta} = $$

$$= \frac{\alpha}{\beta} Q - \frac{1}{B\beta} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi i}{m},$$

gde je za elastičnu liniju stringera uzet izraz (263).

Napadni moment usled tog pritiska za stringer je

$$M_i = \frac{2}{\pi^2} L R_i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi i}{m} \sin \frac{n\pi z}{L} =$$

$$= \frac{2}{\pi^2} L \left[\frac{\alpha}{\beta} Q \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi i}{m} \sin \frac{n\pi z}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{B\beta} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sin \frac{k\pi i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi i}{m} \sin \frac{n\pi z}{L} \right],$$

a napadni moment od pritisaka svih $(m-1)$ greda glavnog pravca

$$M = \frac{2}{\pi^2} L \left[\frac{\alpha}{\beta} Q \sum_{n-1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{n\pi i}{m} \sin \frac{n\pi z}{L} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{B\beta} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi i}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin \frac{n\pi i}{m} \sin \frac{n\pi z}{L} \right].$$

Kad uvrstimo taj izraz u diferencijalnu jednačinu elastične linije stringera nalazimo, kao i pre,

$$EJ\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 C_n = \frac{2}{\pi^2} L \left[\frac{\alpha}{\beta} Q \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{n\pi i}{m} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{B\beta} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{k\pi i}{m} \sin \frac{n\pi i}{m} \right],$$

gde je J moment inercije površine poprečnog preseka stringera.

Odavde je

$$C_n + \frac{1}{\pi^4 \beta} \frac{B'}{B} \frac{1}{n^4} \sum_{k=1}^{\infty} C_k K(n,k) = \frac{2}{\pi^4} \frac{\alpha}{\beta} B' Q \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{n\pi i}{m},$$

gde je

$$B' = \frac{L^3}{EJ}$$

koeficijent gipkosti stringera. Uzevši u obzir da je trigonometriski polinom

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{i n\pi}{m} = \frac{\sin \frac{n\pi}{2} \sin \frac{m-1}{m} \frac{n\pi}{2}}{\sin \frac{n\pi}{2m}} = \sin^2 \frac{n\pi}{2} \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{2m}$$

jednak nuli za sve parne vrednosti broja n, a i za neparne deljive za m, vidimo da su koeficijenti C_n sa takvim indeksima jednaki nuli.

Za ostale koeficijente je

$$\sum_{i=1}^{m-1} \sin \frac{i n\pi}{m} = \operatorname{ctg} \frac{n\pi}{2m}, \tag{272}$$

te nalazimo za njih $(m-1)$ sistema jednačina sličnih (269) sa tom razlikom što, mesto koeficijenata A_n, dolazi $\operatorname{ctg} n\pi/2m$. Rešavajući taj sistem na isti način, kao i pre našli bismo

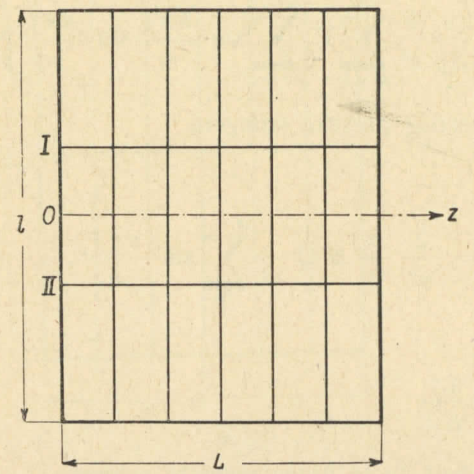
$$C_n\left[1+\frac{1}{48\beta m^3}\frac{B'}{B}\left(1+\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right)\left(1+3\operatorname{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right)\right]=$$

$$=\frac{2}{\pi^4}\frac{\alpha}{\beta}B'Q\frac{1}{n^4}\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{2m}, \qquad (273)$$

$n=1, 3, \ldots, (m-1), (m+1)\ldots.$

Isti bi se rezultat dobio i iz jednačine (270), ako se zameni l sa L, I sa J, $\mathfrak{A}$ sa $^1/_{48}\,B$ i uzme

$$A_n=\frac{5}{8}Q\,l\cdot\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{m-1}\sin\frac{n\pi i}{m}=\frac{5}{8}Q\,l\cdot\frac{2}{\pi^2}\frac{1}{n^2}\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{2m}.$$



Sl. 74

Obrazac (273) može se koristiti i za slučaj rešetke sa dva simetrična stringera (sl. 74) sa istim momentom inercije; treba samo za β uzeti vrednost što odgovara ugibu od dva jednaka i simetrična tereta. Ako dva stringera nisu simetrična, onda se, kao što je niže pokazano, mesto jednačine (273), dobiva sistem od dve jednačine za koeficijente C_n' i C_n'' u izrazima za elastičnu liniju tog stringera. Isti sistem jednačina važi i za slučaj dva para simetričnih stringera (sl. 75), ili tri stringera, od kojih su dva simetrična (sl. 76).

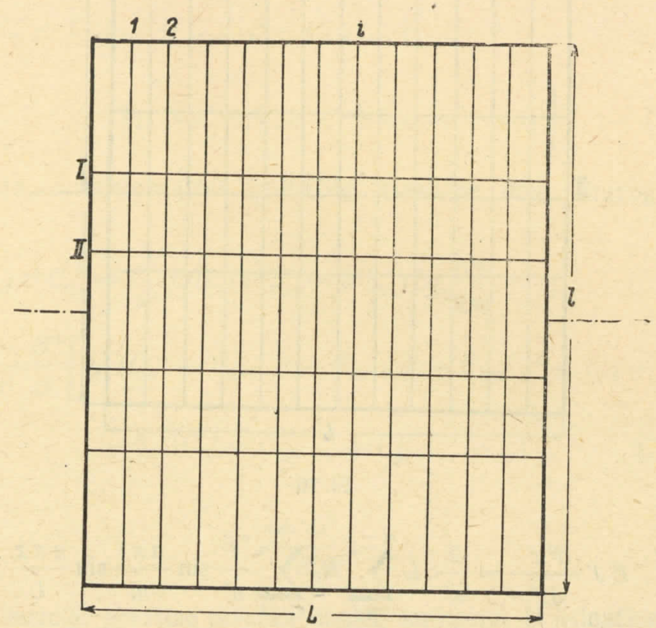
Obeležimo sa u_i' i u_i'' ugibe grede glavnog pravca broj i u njenom prvom i drugom čvoru, a sa R_i' i R_i'' otpore prvog, odnosno drugog stringera u tim čvorovima. Onda je

$$\left.\begin{aligned} u_i'&=(\alpha' Q-\beta_{11}R_i'-\beta_{12}R_i'')\,B,\\ u_i''&=(\alpha'' Q-\beta_{21}R_i'-\beta_{22}R_i'')\,B,\end{aligned}\right\} \qquad (274)$$

gde su α', α'', β_{11}, β_{12}, β_{21}, β_{22}, kao i pre, koeficijenti u izrazima za ugibe grede glavnog pravca u čvorovima. Na pr., β_{12} je koeficijent u izrazu za njen ugib u prvom čvoru od sile, koja napada drugi čvor.*) Iz jednačine (274) imamo

*) U slučaju dva stringera ili dva para simetričnih stringera je $\beta_{12}=\beta_{21}$, ali u slučaju tri stringera, od kojih su dva simetrična, $\beta_{21}=2\,\beta_{12}$.

$$\left.\begin{aligned}(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,R_i'B&=(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})\,QB-(u_i'\beta_{22}-u_i''\beta_{12}),\\ (\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,R_i''B&=(\alpha''\beta_{11}-\alpha'\beta_{21})\,QB-(u_i''\beta_{11}-u_i'\beta_{21}).\end{aligned}\right\} \quad (275)$$



Sl. 75

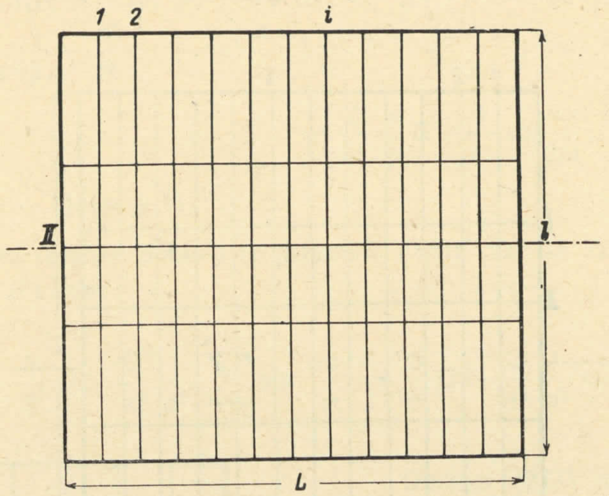
Uzmemo li izraze za elastične linije stringera u obliku redova

$$u'=\sum_{n=1}^{\infty}C_n'\sin\frac{n\pi z}{L},\quad u''=\sum_{n=1}^{\infty}C_n''\sin\frac{n\pi z}{L},$$

dobićemo jednačine (275) u obliku

$$\left.\begin{aligned}(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,R_i'B&=(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})\,QB-\\ &\quad-\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{22}C_k'-\beta_{12}C_k'')\sin\frac{k\pi i}{m},\\ (\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,R_i''B&=(\alpha''\beta_{11}-\alpha'\beta_{21})\,QB-\\ &\quad-\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_{11}C_k''-\beta_{21}C_k')\sin\frac{k\pi i}{m}.\end{aligned}\right\} \quad (276)$$

Iz diferencijalne jednačine elastične linije prvog stringera,



Sl. 76

$$E\,J'\frac{d^2u'}{dz^2}=\frac{2}{\pi^2}\,L\sum_{i=1}^{m-1}R_i'\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi i}{m}\sin\frac{n\pi z}{L},$$

gde je J' moment inercije površine njegovog preseka, sledi

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\sum_{n=1}^{\infty}n^2C_n'\sin\frac{n\pi z}{l}=$$

$$=\frac{2}{\pi^4}QB'(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi z}{L}\sum_{i=1}^{m-1}\sin\frac{n\pi i}{m}-$$

$$-\frac{2}{\pi^4}\frac{B'}{B}\sum_{k=1}^{\infty}(C_k'\beta_{22}-C_k''\beta_{12})\sum_{i=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi i}{m}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi i}{L}\sin\frac{n\pi z}{L},$$

gde je

$$B'=\frac{L^3}{EJ'}.$$

Iz ove jednačine imamo

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,n^4C_n'=$$

$$=\frac{2}{\pi^4}QB'(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})\sum_{i=1}^{m-1}\sin\frac{n\pi i}{m}-$$

$$-\frac{2}{\pi^4}\frac{B'}{B}\sum_{k=1}^{\infty}(C_k'\beta_{22}-C_k''\beta_{12})\sum_{i=1}^{m-1}\sin\frac{k\pi i}{m}\sin\frac{n\pi i}{m},$$

ili, slično prethodnom,

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,n^4C_n'=\frac{2}{\pi^4}QB'(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{2m}-$$

$$-\frac{m}{\pi^4}\frac{B'}{B}\Big[\beta_{22}(C_n'-C_{2m-n}'+C_{2m+n}'-C_{4m-n}'+\ldots)-$$

$$-\beta_{12}(C_n''-C_{2m-n}''+C_{2m+n}''-\ldots)\Big]. \qquad (277)$$

Potpuno analogno, iz diferencijalne jednačine elastične linije drugog stringera može se naći

$$(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21})\,n^4C_n''=\frac{2}{\pi^4}QB''(\alpha''\beta_{11}-\alpha'\beta_{21})\operatorname{ctg}\frac{n\pi}{2m}-$$

$$-\frac{m}{\pi^4}\frac{B''}{B}\Big[\beta_{11}(C_n''-C_{2m-n}''+C_{2m+n}''-C_{4m-n}''+\ldots)-$$

$$-\beta_{21}(C_n'-C_{2m-n}'+C_{2m+n}'-\ldots)\Big], \qquad (278)$$

gde je

$$B''=\frac{L^3}{EJ''},$$

a J'' je moment inercije površine preseka drugog stringera. U jednačinama (277) i (278) je $n=1,3,5,\ldots$, sem brojeva deljivih sa m.

Kao i pre, iz jednačina (277) i (278) nalazimo

$$C_{2m-n}'=-C_n'\left(\frac{n}{2m-n}\right)^4,\qquad C_{2m-n}''=-C_n''\left(\frac{n}{2m-n}\right)^4,$$

$$C_{2m+n}'=C_n'\left(\frac{n}{2m+n}\right)^4,\qquad C_{2m+n}''=C_n''\left(\frac{n}{2m+n}\right)^4,$$

$$C_{4m-n}'=-C_n'\left(\frac{n}{4m-n}\right)^4,\qquad C_{4m-n}''=-C_n''\left(\frac{n}{4m-n}\right)^4,$$

. . . .

i, prema tome,

$$\left.\begin{aligned}&(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}+K_n\beta_{22}\frac{B'}{B})\,C_n'-K_n\beta_{12}\frac{B'}{B}C_n''=\\&\qquad=G_n(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12})QB',\\&-K_n\beta_{21}\frac{B''}{B}C_n'+(\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}+K_n\beta_{11}\frac{B''}{B})\,C_n''=\\&\qquad=G_n(\alpha''\beta_{11}-\alpha'\beta_{21})QB'',\end{aligned}\right\}\qquad(279)$$

gde su uvedene skraćene oznake

$$K_n = \frac{m}{\pi^4} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(2jm+n)^4} = \frac{1}{48\,m^3}\left(1+\mathrm{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right)\left(1+3\,\mathrm{ctg}^2\frac{n\pi}{2m}\right), \quad (280)$$

$$G_n = \frac{2}{\pi^4 n^4}\sum_{i=1}^{m-1} \sin\frac{in\pi}{m} = \frac{2}{\pi^4 n^4}\,\mathrm{ctg}\frac{n\pi}{2m}. \quad (281)$$

Iz jednačina (279) imamo

$$\left.\begin{aligned}
&\left[\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}+K_n\left(\beta_{22}\frac{B'}{B}+\beta_{11}\frac{B''}{B}\right)+K_n^2\frac{B'}{B}\frac{B''}{B}\right]C_n' = \\
&\qquad = \left(\alpha'\beta_{22}-\alpha''\beta_{12}+K_n\alpha'\frac{B''}{B}\right)G_nQB', \\
&\left[\beta_{11}\beta_{22}-\beta_{12}\beta_{21}+K_n\left(\beta_{22}\frac{B'}{B}+\beta_{11}\frac{B''}{B}\right)+K_n^2\frac{B'}{B}\frac{B''}{B}\right]C_n'' = \\
&\qquad = \left(\alpha''\beta_{11}-\alpha'\beta_{21}+K_n\alpha''\frac{B'}{B}\right)G_nQB''.
\end{aligned}\right\} \quad (282)$$

Pomoću jednačina (276) mogu se sada naći otpori u svakom čvoru.

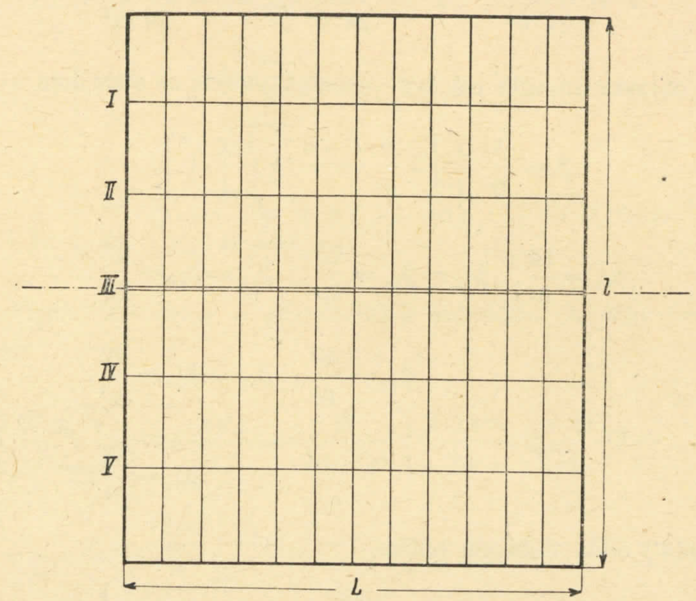
Iz dosad proučenih slučajeva rešetke sa 1 i 2 stringera jasno je da se problem svodi na dvokratno rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina, kao što su (274) i (279). Broj tih jednačina jednak je broju stringera, dok bi pri rešavanju problema bez primene trigonometriskih redova trebalo rešiti sistem, gde je broj jednačina jednak bar polovini broja čvorova, tj. $^1/_2(m-1)$ puta veći.

Ako bi se, slično **t. 47,** primenila približna metoda, osnovana na zameni pritisaka glavnih greda neprekidno podeljenim opterećenjem stringera, problem bi se sveo na integralenje sistema simultanih diferencijalnih jednačina, čiji je broj jednak broju stringera. To integralenje ne pretstavlja načelne poteškoće, ali je zbog velikog broja računskih radnji skoro nemoguće račun izvesti do kraja, tj. naći otpore.

50. Savijanje rešetke sa više stringera. — Primenu izložene metode na slučajeve, kad je broj stringera veći od dva, pokazaćemo na brojnom primeru, da bi se izbegli suviše glomazni obrasci.

Posmatrajmo rešetku od 11 ekvidistantnih greda, opterećenih jednolikim teretima Q, i 5 ekvidistantnih stringera, od kojih srednji ima dva put veći moment inercije od ostalih (sl. 77)*). Pošto je konstrukcija simetrična u oba pravca, zadatak je $6 \times 3 = 18$-puta statički neodređen; svodi se, dakle, na rešavanje sistema od 18 linearnih algebarskih jednačina, od kojih svaka sadrži 8 nepoznatih, tj. na računsku radnju, koja je praktički neizvodljiva. Približna metoda bi svela zadatak na integralenje sistema od tri simultane diferencijalne jednačine, linearne, četvrtog reda sa konstantnim koeficijentima, gde svaka jednačina sadrži sve tri tražene funkcije. Da vidimo kako se ovaj problem rešava izloženom metodom.

*) Može da odgovara, na pr., konstrukciji dna okeanskog parobroda.



Sl. 77

Obeležimo sa R_i' pritisak grede broj i na stringere broj I i V, sa R_i'' pritisak iste grede na stringere broj II i IV i na R_i''' *polovinu* njena pritiska na srednju gredu („kobilicu"). Tada se ta greda može posmatrati kao da je opterećena, sem zadatog tereta Q, još i sa dva simetrična otpora R_i' na otstojanju $^1/_6\,l$ od krajeva, sa dva simetrična otpora R_i'' na otstojanju $^1/_3\,l$ od krajeva i sa dva simetrična otpora R_i''' na otstojanju $^1/_2\,l$ od krajeva.

Ugibi posmatrane grede u čvorovima biće onda

$$\left.\begin{aligned}
u_i' &= (\alpha' Q - \beta_{11} R_i' - \beta_{12} R_i'' - \beta_{13} R_i'''), \\
u_i'' &= (\alpha'' Q - \beta_{21} R_i' - \beta_{22} R_i'' - \beta_{23} R_i'''), \\
u_i''' &= (\alpha''' Q - \beta_{31} R_i' - \beta_{32} R_i'' - \beta_{33} R_i''').
\end{aligned}\right\} \quad (274')$$

Brojne vrednosti koeficijenata α', α'' i α''' u tim jednačinama nalazimo iz poznatog obrasca za ugib od jednolikog opterećenja

$$\alpha = \frac{1}{24}\frac{x}{l}\left[1 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3\right],$$

zamenom x sa $^1/_6\, l$, $^2/_6\, l$, $^3/_6\, l$:

$$\alpha' = \frac{205}{24 \cdot 6^4}, \quad \alpha'' = \frac{352}{24 \cdot 6^4}, \quad \alpha''' = \frac{405}{24 \cdot 6^4}.$$

Isto tako iz obrasca za ugib od dva simetrička tereta na otstojanju a od krajeva,

$$\beta = \frac{1}{6} \frac{x}{l} \left[3 \frac{a}{l} \frac{l-a}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right],$$

imamo

$$\beta_{11} = \frac{14}{6^4}, \quad \beta_{12} = \beta_{21} = \frac{23}{6^4}, \quad \beta_{13} = \beta_{31} = \frac{26}{6^4},$$

$$\beta_{22} = \frac{40}{6^4}, \quad \beta_{23} = \beta_{32} = \frac{46}{6^4},$$

$$\beta_{33} = \frac{54}{6^4}.$$

Jednačine (274′) onda dobivaju oblik

$$\left.\begin{aligned} 14 R_i' + 23 R_i'' + 26 R_i''' &= \frac{205}{24} Q - \frac{u_i'}{B} 6^4, \\ 23 R_i' + 40 R_i'' + 46 R_i''' &= \frac{352}{24} Q - \frac{u_i''}{B} 6^4, \\ 26 R_i' + 46 R_i'' + 54 R_i''' &= \frac{405}{24} Q - \frac{u_i'''}{B} 6^4. \end{aligned}\right\} \qquad (274'')$$

Odavde je

$$\left.\begin{aligned} R_i' &= \frac{1}{26} \left[\frac{118}{24} Q - \frac{6^4}{B} (44 u_i' - 46 u_i'' + 18 u_i''') \right], \\ R_i'' &= \frac{1}{26} \left[\frac{100}{24} Q - \frac{6^4}{B} (-46 u_i' + 80 u_i'' - 46 u_i''') \right], \\ R_i''' &= \frac{1}{26} \left[\frac{53}{24} Q - \frac{6^4}{B} (18 u_i' - 46 u_i'' + 31 u_i''') \right], \end{aligned}\right\} \qquad (275')$$

ili, kad zamenimo

$$u' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n' \sin \frac{n \pi z}{L}, \quad u'' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n'' \sin \frac{n \pi z}{L}, \quad u''' = \sum_{n=1}^{\infty} C_n''' \sin \frac{n \pi z}{L},$$

biće

$$\left.\begin{aligned} R_i' &= \frac{1}{26} \left[\frac{118}{24} Q - \frac{6^4}{B} \sum_{k=1}^{\infty} (44 C_k' - 46 C_k'' + 18 C_k''') \sin \frac{k \pi i}{12} \right], \\ R_i'' &= \frac{1}{26} \left[\frac{100}{24} Q - \frac{6^4}{B} \sum_{k=1}^{\infty} (-46 C_k' + 80 C_k'' - 46 C_k''') \sin \frac{k \pi i}{12} \right], \\ R_i''' &= \frac{1}{26} \left[\frac{53}{24} Q - \frac{6^4}{B} \sum_{k=1}^{\infty} (18 C_k' - 46 C_k'' + 31 C_k''') \sin \frac{k \pi i}{12} \right]. \end{aligned}\right\} \qquad (276')$$

Kad uvrstimo ove izraze u diferencijalnu jednačinu elastične linije prvog stringera, biće

$$\begin{aligned} C_n' = \frac{2 B'}{\pi^4 n^4} \sum_{i=1}^{11} R_i' \sin \frac{n \pi i}{12} = \frac{B'}{26 \pi^4 n^4} \Bigg\{ & \frac{2 \cdot 118}{24} \operatorname{ctg} \frac{n \pi}{24} \cdot Q - \\ & - \frac{12 \cdot 6^4}{B} \Big[44 (C_n' - C'_{24-n} + C'_{24+n} - \cdots) - \\ & - 46 (C_n'' - C_{24-n}'' + C_{24+n}'' - \cdots) + \\ & + 18 (C_n''' - C_{24-n}''' + C_{24+n}''' - \cdots) \Big] \Bigg\}. \end{aligned} \qquad (277')$$

Odavde, kao i pre, nalazimo

$$\begin{aligned} C_n' + \frac{12 \cdot 6^4}{26 \pi^4} \frac{B'}{B} (44 C_n' - 46 C_n'' + 18 C_n''') \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(24 j + n)^4} &= \\ = \frac{2 Q B'}{26 \pi^4 n^4} \cdot \frac{118}{24} \operatorname{ctg} \frac{n \pi}{24}. \end{aligned} \qquad (279')$$

Uvedemo li skraćene oznake

$$N_n = \frac{12 \cdot 6^4}{26 \pi^4} \frac{B'}{B} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(24 j + n)^4} = \frac{6^4}{26 \cdot 48 \cdot 12^3} \frac{B'}{B} \left(1 + 4 \operatorname{ctg}^2 \frac{n \pi}{24} + 3 \operatorname{ctg}^4 \frac{n \pi}{24} \right),$$

$$L_n = \frac{2}{24 \cdot 26 \cdot \pi^4} \frac{1}{n^4} \operatorname{ctg} \frac{n \pi}{24} Q B',$$

biće

$$\left.\begin{array}{l}(1+44\,N_n)\,C_n' - 46\,N_n\,C_n'' + 18\,N_n\,C_n''' = 118\,L_n\,,\\ \text{i, slično tome, za dva ostala stringera}\\ -46\,N_n\,C_n' + (1+80\,N_n)\,C_n'' - 46\,N_n\,C_n''' = 100\,L_n\,,\\ 18\,N_n\,C_n' - 46\,N_n\,C_n'' + (1+31\,N_n)\,C_n''' = 53\,L_n\,.\end{array}\right\} \qquad (282')$$

Iz ovih jednačina je

$$C_n' = (118 + 16\,744\,N_n + 138\,500\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\,,$$

$$C_n'' = (100 + 15\,366\,N_n + 237\,952\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\,,$$

$$C_n''' = (\;53 + \;9\,048\,N_n + 273\,780\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\,,$$

$$D_n = 1 + 155\,N_n + 2\,808\,N_n^2 + 676\,N_n^3\,.$$

Iz jednačina (275'), dobićemo s obzirom na (282'),

$$R_i' = \frac{1}{26}\left[\frac{118}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n}(118\,L_n - C_n')\sin\frac{n\pi i}{12}\right],$$

$$R_i'' = \frac{1}{26}\left[\frac{100}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n}(100\,L_n - C_n'')\sin\frac{n\pi i}{12}\right],$$

$$R_i''' = \frac{1}{26}\left[\frac{53}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{N_n}(53\,L_n - C_n''')\sin\frac{n\pi i}{12}\right];$$

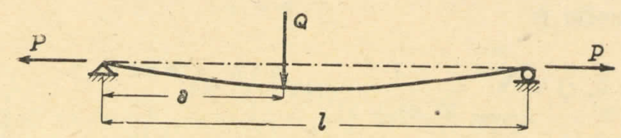
a kad uvrstimo nađene vrednosti C_n', C_n'' i C_n''', dobićemo otpore

$$R_i' = \frac{1}{26}\left[\frac{118}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}(1\,546 + 192\,764\,N_n + 79\,768\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\sin\frac{n\pi i}{12}\right],$$

$$R_i'' = \frac{1}{26}\left[\frac{100}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}(134 + 42\,848\,N_n + 67\,600\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\sin\frac{n\pi i}{12}\right],$$

$$R_i''' = \frac{1}{26}\left[\frac{53}{24}Q - \frac{6^4}{B}\sum_{n=1}^{\infty}(-833 - 124\,956\,N_n + 35\,823\,N_n^2)\frac{L_n}{D_n}\sin\frac{n\pi i}{12}\right].$$

51. Aksijalno naprezanje složeno sa savijanjem. — Jedna od osnovnih pretpostavki u t. 46 glasi, da su pomeranja tačaka osovine grede toliko mala da se mogu zanemariti promene koje ona prouzrokuje u napadnim momentima.



Sl. 78

Iz Otpornosti materijala su već poznati slučajevi kad se ta pretpostavka ne može ostvariti. Uglavnom se to odnosi na aksijalno naprezanje štapova složeno sa njihovim savijanjem. Proučavanje te vrste naprezanja se znatno olakšava primenom trigonometriskih redova.

Ako pretstavimo napadni moment od koncentrisanog tereta redom (sl. 78)

$$M = \frac{2}{\pi^2}\,Q\,l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}\,,$$

i dodamo napadni moment od aksijalne sile zatezanja P, tj. $-Pu$, diferencijalna jednačina elastične linije dobiće oblik

$$E\,I\,u'' = -\frac{2}{\pi^2}\,Q\,l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l} + Pu.$$

Rešenje ove jednačine potražimo, kao i pre, u obliku trigonometriskog reda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi z}{l}\,.$$

Kad uvrstimo taj izraz u diferencijalnu jednačinu

$$u'' - \frac{P}{E\,I}\,u = -\frac{2}{\pi^2}\frac{Q\,l}{E\,I}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi z}{l}\,,$$

nalazimo

$$\left[\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 + \frac{P}{E\,I}\right]C_n = \frac{2}{\pi^2}\frac{Q\,l}{E\,I}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi a}{l}$$

i

$$C_n = \frac{2}{\pi^4}\,Q\,B\,\frac{1}{n^2\,(n^2 + \alpha)}\sin\frac{n\pi a}{l}\,,$$

gde je uvedena oznaka

$$\alpha = \frac{P}{\pi^2 E I / l^2}\,. \tag{283}$$

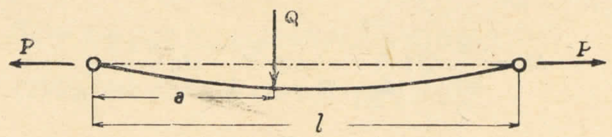
Na taj način je

$$u = \frac{2}{\pi^4} Q B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2+\alpha)} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}\ ^{*)} \tag{284}$$

i, ako zadržimo samo prvi član ovog reda dobivamo

$$u \approx \frac{2}{\pi^4} Q B \frac{1}{1+\alpha} \sin\frac{\pi a}{l} \sin\frac{\pi z}{l}\,. \tag{285}$$

Kad se ovaj rezultat uporedi sa izrazom (258), gde ćemo, takođe, zadržati samo prvi član, vidi se da aksijalne sile smanjuju ordinate elastične linije u odnosu $1/(1+\alpha)$.



Sl. 79

Nađeni resultat može se primeniti, na pr., na slučaj (sl. 79) grede sa *nepomičnim* ležištima opterećene koncentrisanim teretom Q. Usled deformacije ta se greda izduži za

$$\int_0^l \sqrt{(dz)^2 + (du)^2} - l = \int_0^l \sqrt{1 + u'^2}\ dz - l\,,$$

gde je sa $u' = du/dz$ obeležen ugao nagiba tangente elastične linije. Kao što znamo, to je mala veličina te je, prema tome,

$$\sqrt{1+u'^2} \approx 1 + {}^1/_2\, u'^2,$$

tako, da je priraštaj dužine grede

$$\int_0^l (1 + {}^1/_2\, u'^2)\, dz - l = {}^1/_2 \int_0^l u'^2\, dz\,.$$

Taj priraštaj dužine je izravnat aksijalnim silama $\pm P$, koje se javljaju u nepomičnim ležištima, dakle

$${}^1/_2 \int_0^l u'^2\, dz = \frac{Pl}{EF} = \alpha \frac{\pi^2 I}{l F}\,. \tag{286}$$

*) Ovom odgovara izraz (176) u *Otpornosti materijala*, str. 150.

Prema (285) je

$$u' = \frac{1}{1+\alpha} \frac{2}{\pi^3} \frac{Q B}{l} \sin\frac{\pi a}{l} \cos\frac{\pi z}{l}$$

i

$${}^1/_2 \int_0^l u'^2\, dz = \frac{2}{\pi^6} \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\frac{QB}{l}\right)^2 \sin^2\frac{\pi a}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi^2}{4(1+\alpha)^2} \frac{u_0^2}{l}\,, \tag{287}$$

gde je sa u_0 obeležen ugib koji bi imala na sredini raspona greda istih dimenzija, no sa pokretnim ležištem

$$u_0 \approx \frac{2}{\pi^4} Q B \sin\frac{\pi a}{l}\,.$$

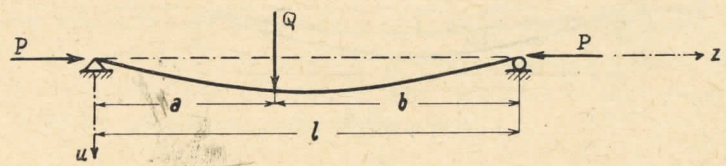
Iz upoređenja izraza (286) i (287) proizilazi

$$\alpha(1+\alpha)^2 = \frac{1}{4} \frac{F}{I} u_0^2.$$

Ova jednačina može se napisati u obliku, naročito podesnom za numeričko izračunavanje α,

$$(1+\alpha)^3 - (1+\alpha)^2 = \frac{1}{4} \frac{F}{I} u_0^2. \tag{288}$$

Kad je određeno α, a time, prema (283), i sila P, jednačina (285) daje ugib, a njen drugi izvod napadni moment za gredu sa nepomičnim ležištima



Sl. 80

Ako aksijalne sile *pritiskuju* gredu (sl. 80), menja se znak sile, a, prema tome, i uz α, tako da obrazac (284) dobiva oblik,

$$u = \frac{2}{\pi^4} Q B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2(n^2-\alpha)} \sin\frac{n\pi a}{l} \sin\frac{n\pi z}{l}\,.$$

Iz ovog obrasca vidimo da ugib neodređeno raste kad se α približava n^2, odnosno aksijalna sila P približava jednoj od kritičnih vrednosti $n^2 \pi^2 E I / l^2$. Ova pojava je već poznata iz Otpornosti materijala.

Slično postupku primenjenom u **t. 47** mogu se iz obrazaca (284) i (289) izvesti obrasci za slučaj kad je poprečni teret raspoređen po dužini grede prema datom zakonu $q(a)$. Za to treba zameniti u tim obrascima Q sa $q\, da$ i integragde je uvedena oznaka

$$\alpha = \frac{P}{\pi^2 E I / l^2}. \tag{283}$$

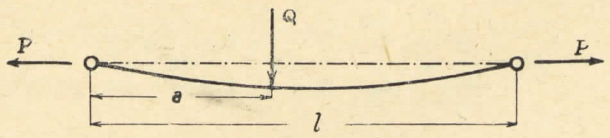
Na taj način je

$$u = \frac{2}{\pi^4} Q B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 + \alpha)} \sin \frac{n \pi a}{l} \sin \frac{n \pi z}{l} \, {}^{*)} \tag{284}$$

i, ako zadržimo samo prvi član ovog reda dobivamo

$$u \approx \frac{2}{\pi^4} Q B \frac{1}{1+\alpha} \sin \frac{\pi a}{l} \sin \frac{\pi z}{l}. \tag{285}$$

Kad se ovaj rezultat uporedi sa izrazom (258), gde ćemo, takođe, zadržati samo prvi član, vidi se da aksijalne sile smanjuju ordinate elastične linije u odnosu $1/(1+\alpha)$.



Sl. 79

Nađeni resultat može se primeniti, na pr., na slučaj (sl. 79) grede sa *nepomičnim* ležištima opterećene koncentrisanim teretom Q. Usled deformacije ta se greda izduži za

$$\int_0^l \sqrt{(dz)^2 + (du)^2} - l = \int_0^l \sqrt{1 + u'^2} \, dz - l,$$

gde je sa $u' = du/dz$ obeležen ugao nagiba tangente elastične linije. Kao što znamo, to je mala veličina te je, prema tome,

$$\sqrt{1 + u'^2} \approx 1 + {}^1/_2 u'^2,$$

tako, da je priraštaj dužine grede

$$\int_0^l (1 + {}^1/_2 u'^2) \, dz - l = {}^1/_2 \int_0^l u'^2 \, dz.$$

Taj priraštaj dužine je izravnat aksijalnim silama $\pm P$, koje se javljaju u nepomičnim ležištima, dakle

$${}^1/_2 \int_0^l u'^2 \, dz = \frac{Pl}{EF} = \alpha \frac{\pi^2 I}{l F}. \tag{286}$$

*) Ovom odgovara izraz (176) u *Otpornosti materijala*, str. 150.

Prema (285) je

$$u' = \frac{1}{1+\alpha} \frac{2}{\pi^3} \frac{Q B}{l} \sin \frac{\pi a}{l} \cos \frac{\pi z}{l}$$

i

$${}^1/_2 \int_0^l u'^2 \, dz = \frac{2}{\pi^6} \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(\frac{Q B}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi a}{l} \cdot \frac{l}{2} = \frac{\pi^2}{4(1+\alpha)^2} \frac{u_0^2}{l}, \tag{287}$$

gde je sa u_0 obeležen ugib koji bi imala na sredini raspona greda istih dimenzija, no sa pokretnim ležištem

$$u_0 \approx \frac{2}{\pi^4} Q B \sin \frac{\pi a}{l}.$$

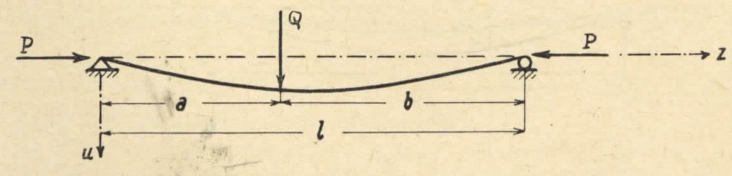
Iz upoređenja izraza (286) i (287) proizilazi

$$\alpha (1+\alpha)^2 = \frac{1}{4} \frac{F}{l} u_0^2.$$

Ova jednačina može se napisati u obliku, naročito podesnom za numeričko izračunavanje α,

$$(1+\alpha)^3 - (1+\alpha)^2 = \frac{1}{4} \frac{F}{l} u_0^2. \tag{288}$$

Kad je određeno α, a time, prema (283), i sila P, jednačina (285) daje ugib, a njen drugi izvod napadni moment za gredu sa nepomičnim ležištima



Sl. 80

Ako aksijalne sile *pritiskuju* gredu (sl. 80), menja se znak sile, a, prema tome, i uz α, tako da obrazac (284) dobiva oblik,

$$u = \frac{2}{\pi^4} Q B \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 (n^2 - \alpha)} \sin \frac{n \pi a}{l} \sin \frac{n \pi z}{l}.$$

Iz ovog obrasca vidimo da ugib neodređeno raste kad se α približava n^2, odnosno aksijalna sila P približava jednoj od kritičnih vrednosti $n^2 \pi^2 E I / l^2$. Ova pojava je već poznata iz Otpornosti materijala.

Slično postupku primenjenom u **t. 47** mogu se iz obrazaca (284) i (289) izvesti obrasci za slučaj kad je poprečni teret raspoređen po dužini grede prema datom zakonu $q(a)$. Za to treba zameniti u tim obrascima Q sa $q \, da$ i integraliti po a od 0 do l. Tako je za savijanje teretom Q jednoliko podeljenim duž grede složeno sa aksijalnim naprezanjem

$$u = \frac{4}{\pi^5} Q B \sum_{n=1,3\ldots}^{\infty} \frac{1}{n^3 (n^2 \pm \alpha)} \sin \frac{n \pi z}{l}, \qquad (290)$$

gde gornji znak uz α odgovara pozitivnoj aksijalnoj sili, tj. zatezanju.

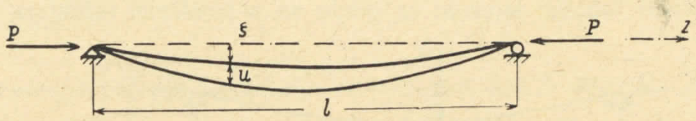
Isto onako može se izvesti jednačina elastične linije za gredu opterećenu spregom sa momentom $\mathfrak{M}$ i aksijalnim silama. Treba diferencijaliti izraze (284), odnosno (289), po a i zameniti Q sa $\mathfrak{M}$. Na taj način bismo našli

$$u = \frac{2}{\pi^3} \mathfrak{M} \frac{B}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n (n^2 \pm \alpha)} \cos \frac{n \pi a}{l} \sin \frac{n \pi z}{l}. \qquad (291)$$

Ako dva sprega sa momentima iste veličine, a suprotnog smisla napadaju gredu na krajevima, biće

$$u = \frac{4}{\pi^3} \mathfrak{M} \frac{B}{l} \sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty} \frac{1}{n (n^2 \pm \alpha)} \sin \frac{n \pi z}{l}. \qquad (292)$$

Primena trigonometriskih redova olakšava takođe i proučavanje naprezanja štapova koji imaju *malu početnu krivinu*. Pretpostavimo da je osa grede iskrivljena (sl. 81) i da je ordinata te krive linije ξ pretstavljena trigonometriskim redom



Sl. 81

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n \pi z}{l}, \qquad (293)$$

gde su A_n zadati koeficijenti.

Ako je ta greda napregnuta aksijalnim silama P koje je pritiskuju, ta će se ordinata povećati za neku malu veličinu u, pa će napadni moment biti $P(\xi + u)$, a krivina će se povećati za d^2u/dz^2, tako da će diferencijalna jednačina za priraštaj ordinate u biti

$$EIu'' = -P(\xi + u).$$

Ako potražimo rešenje ove jednačine u obliku reda

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi z}{l},$$

uzevši u obzir (293), nalazimo

$$C_n \left(\frac{n \pi}{l}\right)^2 = \frac{P}{EI}(C_n + A_n),$$

odnosno

$$C_n = \frac{\alpha}{n^2 - \alpha} A_n,$$

gde je α, kao i pre, dato jednačinom (283). Na taj način je ugib

$$u = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{n^2 - \alpha} \sin \frac{n \pi z}{l}. \qquad (294)$$

U slučaju kad sile P *zatežu* štap, znak uz α treba promeniti.

U najjednostavnijem slučaju, kad iskrivljena osa štapa ima oblik polutalasa sinusne linije

$$\xi = \xi_0 \sin \frac{\pi z}{l},$$

gde je ξ_0 najveća ordinata na sredini dužine, biće

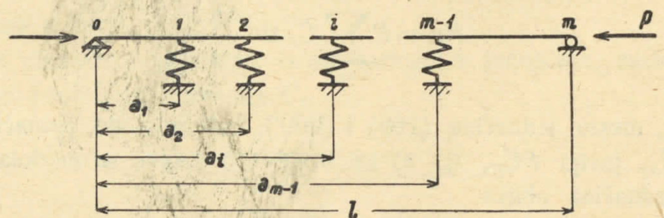
$$u = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \xi_0 \sin \frac{\pi z}{l}$$

i najveći ugib

$$u_0 = \frac{\alpha}{1 - \alpha} \xi_0.$$

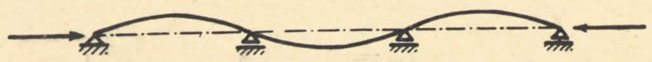
Ako aksijalne sile pritiskuju štap, biće $\alpha < 1$, jer bi vrednosti $\alpha = 1$ odgovarala sila izvijanja $P_{cr} = \pi^2 EI/l^2$; to znači da pritisak povećava početnu ordinatu ξ u odnosu $\alpha/(1 - \alpha)$. Ako pak sile zatežu štap, množilac $-\alpha/(1 + \alpha)$ je negativan, a to znači da se početne ordinate smanjuju.

52. Izvijanje grede na elastičnim ležištima. — Zamislimo gredu (sl. 82) na $m - 1$ ležišta pritisnutu aksijalno na krajevima silama P. Kad te sile



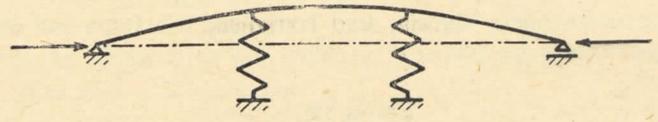
Sl. 82

dostignu kritičnu vrednost, ona će se izviti. Ako su sva ležišta potpuno kruta, zadatak se svodi na iznalaženje one kritične vrednosti P_m koja bi izazvala izvijanje u m polutalasa (sl. 83), tj. u najmanji mogući njihov broj. Veće kritične sile, koje bi odgovarale izvijanju grede u veći broj polutalasa, deljivi sa m, ne dolaze u obzir za tehničku primenu.



Sl. 83

Ako su srednja ležišta br. $1, 2, \ldots, (m-1)$ elastična, javlja se mogućnost izvijanja u broj polutalasa *manji* od m, eventualno silom manjom od P_m (sl. 84 i 85). Da bi se izključila takva mogućnost izvijanja silom *manjom* od P_m, nije neop-



Sl. 84

Sl. 85

hodno potrebno da budu ležišta potpuno kruta, već je dovoljno da njihovi koeficijenti elastičnosti budu ispod izvesne konačne vrednosti. Ta vrednost zavisi od broja i rasporeda ležišta i od dimenzija i materijala grede.

Za napadni moment prouzrokovan otporima elastičnih ležišta možemo koristiti ranije izveden izraz (264), samo, mesto izraza (262) za napadni moment poprečnog opterećenja, moramo u datom slučaju uneti u diferencijalnu jednačinu elastične linije napadni moment od aksijalne sile P, tj.

$$Pu = P \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n \pi z}{l}.$$

Tada, mesto jednačina (269) i (269'), dolazimo do jednačina u kojima se, mesto A_n, javlja PC_n, tj.: a) za brojeve n deljive sa m dolazimo do niza *nezavisnih* jednačina oblika

$$j^2 m^2 = \frac{B}{\pi^2 l} P = \alpha, \tag{295}$$

gde je $j = 1, 2, \ldots$, a α, kao i pre, određeno izrazom (283), i b) za cele brojeve n nedeljive sa m dolazimo do niza *sistema* jednačina oblika

$$\left.\begin{aligned} n^2(n^2-\alpha)\,C_n + \frac{Bm}{\pi^4 \mathfrak{A}} S_n &= 0, \\ (2m-n)^2\left[(2m-n)^2-\alpha\right] C_{2m-n} - \frac{Bm}{\pi^4 \mathfrak{A}} S_n &= 0, \\ (2m+n)^2\left[(2m+n)^2-\alpha\right] C_{2m+n} + \frac{Bm}{\pi^4 \mathfrak{A}} S_n &= 0, \\ (4m-n)^2\left[(4m-n)^2-\alpha\right] C_{4m-n} - \frac{Bm}{\pi^4 \mathfrak{A}} S_n &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &, \end{aligned}\right\} \tag{296}$$

gde je uvedeno skraćeno obeležavanje

$$S_n = C_n + C_{2m+n} + C_{4m+n} + \cdots - C_{2m-n} - C_{4m-n} - \cdots \tag{296'}$$

Jednačine oblika (295) određuju niz kritičnih vrednosti za α, odnosno, za aksijalnu silu P,

$$P_{jm} = j^2 m^2 \pi^2 \frac{l}{B} = j^2 m^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2},$$

koje odgovaraju izvijanju nosača u jm polutalasa, dakle, onim oblicima izvijanja koji bi bili mogući i kod potpuno krutih ležišta (sl. 83). Od tih kritičnih sila je, sa tehničkog gledišta, merodavna najmanja, koja odgovara

$$\alpha = m^2, \tag{297}$$

odnosno

$$P_m = m^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2}. \tag{298}$$

Sistemi jednačina oblika (296) su linearni i homogeni u odnosu nepoznatih koeficijenata C_n, C_{2m-n}, $C_{4m-n} \ldots C_{2m+n} \ldots$ Trivijalno rešenje ($C_n = C_{2m-n} = C_{2m+n} = \ldots = 0$) ne dolazi u datom slučaju u obzir, jer bi odgovaralo $u = 0$, tj. čisto aksijalnom pritisku, a ne izvijanju. Da bi bilo moguće drugo rešenje, odnosno izvijanje, u broj polutalasa nedeljivi sa m, mora biti jednaka nuli eliminanta tog sistema.

Da bismo eliminisali nepoznate iz tih homogenih jednačina, možemo, kao i pre, izraziti sve koeficijente pomoću C_n

$$C_{2m-n} = -\left(\frac{n}{2m-n}\right)^2 \frac{n^2-\alpha}{(2m-n)^2-\alpha} C_n,$$

$$C_{2m+n} = \left(\frac{n}{2m+n}\right)^2 \frac{n^2-\alpha}{(2m+n)^2-\alpha} C_n,$$

$$C_{4m-n} = -\left(\frac{n}{4m-n}\right)^2 \frac{n^2-\alpha}{(4m-n)^2-\alpha} C_n,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

i, kad uvrstimo te izraze u (296′) pa, zatim, u prvu od jednačina (296), dobićemo

$$1+\frac{Bm}{\pi^4\mathfrak{A}}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^2\,[\,(2mj+n)^2-\alpha]}=0\,. \tag{299}$$

Ova jednačina određuje niz kritičnih vrednosti za α, odnosno, za aksijalnu silu, dovoljnih da bi nastalo isvijanje u brojeve polutalasa nedeljive sa m, što je moguće samo kod elastičnih ležišta. Najmanja od tih vrednosti *može da ispadne manja* od izraza (298), ako je koeficijent elastičnosti ležišta $\mathfrak{A}$ dovoljno velik.

Obično se za taj koeficijent postavlja uslov, da najmanja sila izvijanja ne bude manja od izraza (298), a to znači da elastična ležišta treba da odigraju istu ulogu kao i da su potpuno kruta. Da bismo našli vrednost koeficijenta $\mathfrak{A}$ koja odgovara tom uslovu, treba zameniti u jednačini (299) α sa m^2 i rešiti je po $\mathfrak{A}$. Najmanji od njenih korena odrediće graničnu vrednost koju ne sme da pređe $\mathfrak{A}$, da bi bio ostvaren postavljeni uslov.

Pre no što pređemo na rešavanje te jednačine zamenimo red

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^2\,[(2mj+n)^2-m^2]}=\frac{1}{2m^3}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2mj+n-m}-$$

$$-\frac{1}{2m^3}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2mj+n+m}-\frac{1}{m^2}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^2}$$

njegovim zbirom. Zato ga prepišimo u obliku

$$\frac{\pi}{4m^4}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(j\pi+\frac{n-m}{2m}\pi)}-\frac{\pi}{4m^4}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(j\pi+\frac{n+m}{2m}\pi)}-$$

$$-\frac{\pi^2}{4m^4}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(j\pi+\frac{n}{2m}\pi)^2}\,.$$

Onda, koristeći izraz (271 a) i njegov prvi izvod

$$\frac{1}{\sin^2\theta}=\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(j\pi+\theta)^2}\,,$$

nalazimo, posle zamene θ sa $(n-m)\pi/2m$, odnosno $(n+m)\pi/2m$ i $n\pi/2m$,

da je

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(2mj+n)^2\,[(2m+n)^2-m^2]}=$$

$$=\frac{\pi}{4m^4}\left(\operatorname{ctg}\frac{n-m}{2m}\pi-\operatorname{ctg}\frac{n+m}{2m}\pi\right)-\frac{\pi^2}{4m^4}\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2m}}=$$

$$=\frac{\pi}{4m^4}\frac{\sin\pi}{\sin\frac{n-m}{2m}\pi\sin\frac{n+m}{2m}\pi}-\frac{\pi^2}{4m^4}\frac{1}{\sin^2\frac{n\pi}{2m}}=$$

$$=-\frac{\pi^2}{4m^4\sin^2\frac{n\pi}{2m}}\,.$$

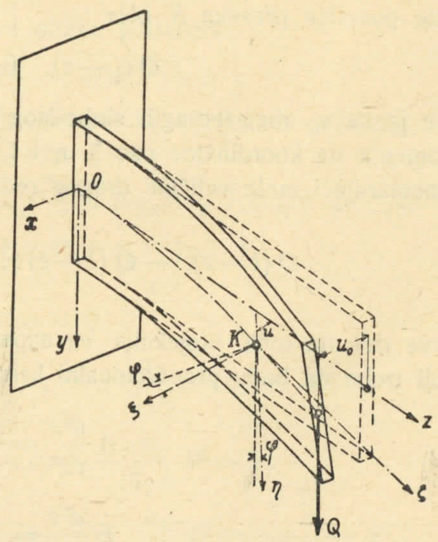
Posle te zamene iz jednačine (299) sledi za $\alpha=m^2$

$$\mathfrak{A}=\frac{B}{4\pi^2m^3\sin^2\frac{n\pi}{2m}}\,.$$

Najmanju vrednost $\mathfrak{A}$ nalazimo, očigledno, za $n=m-1$, tj.

$$\mathfrak{A}=\frac{B}{4\pi^2m^3\cos^2\frac{\pi}{2m}}\,. \tag{300}$$

53. Poprečno izvijanje grede. — Dosad smo u **t.t. 51** i **52** posmatrali slučajeve kada deformacija ose aksijalno pritisnutog štapa stvara naknadne *napadne* momente. Videli smo da se naprezanje usled tih momenata ne samo ne sme zanemariti, već da ono može postati odlučni faktor. Ovde, ćemo proučiti slučaj kada se mora povesti računa o naknadnom *torzionom* momentu, prouzrokovanom deformacijom štapa. Taj se slučaj javlja kada postoji velika razlika između glavnih momenata inercije površine preseka savijene grede, tj. kada je njena gipkost u poprečnoj ravni znatno veća od one u ravni savijanja.



Sl. 86

Na sl. 86 je pokazana konzola čiji je poprečni presek pravougaonik visine h i širine b, gde je b znatno manje od h. Za izvođenje jednačine elastične linije te konzole (u datom slučaju prostorne krive) uvešćemo, osim koordinatnog sistema x, y, z sa početkom u težištu uklještenog preseka, drugi koordinatni sistem ξ, η, ζ sa početkom u težištu nekog preseka K, na otstojanju z od uklještenog kraja. Dok su ose x i y upravljene duž glavnih osa inercije uklještenog preseka, upravimo ose ξ i η duž glavnih osa inercije preseka K. Tada će osa ζ pasti u pravac tangente elastične linije u tom preseku.

Obeležimo sa u i v koordinate tačke elastične linije u tom preseku u odnosu na koordinatni sistem x, y, z, a sa φ ugao za koji se presek K okrenuo prema uklještenom preseku. Pretpostavljajući da su du/dz, dv/dz i φ male veličine, možemo sastaviti tablicu kosinusa smera koordinatnog sistema ξ, η, ζ

	x	y	z
ξ	1	φ	$-du/dz$
η	$-\varphi$	1	$-dv/dz$
ζ	du/dz	dv/dz	1

Ovde su sinusi uglova nagiba tangente elastične linije zamenjeni tangensima tih uglova, sinus ugla φ zamenjen samim uglom, a kosinusi tih uglova zamenjeni jedinicom. Zanemarene su, dakle, male veličine drugog reda.

Dopuštajući grešku istog reda možemo smatrati da su krivine elastične linije u ravnima xz i yz jednake d^2u/dz^2, odnosno d^2v/dz^2, a pošto smo kosinuse uglova između osa ξ i x, odnosno η i y, i ζ i z uzeli jednake jedinici, isti izrazi važe i za krivine u ravnima $\xi\zeta$ i $\eta\zeta$.

Projekcija na koordinatne ose x, y i z momenta sile Q u odnosu na težište površine preseka K biće

$$Q(l-z), \quad 0, \quad -Q(u_0-u),$$

gde je sa u_0 obeležen ugib slobodnog kraja konzole u ravni xz. Projekcije istog momenta na koordinatne ose ξ, η i ζ nalazimo pomoću gornje tablice kosinusa, zanemarujući male veličine drugog reda

$$Q(l-z), \quad -Q(l-z)\varphi, \quad Q\left[(l-z)\frac{du}{dz}-(u_0-u)\right].$$

Prve dve od ovih projekcija su napadni momenti u ravnima yz, odnosno xz, koji treba da budu proporcionalni krivinama elastične linije u tim ravnima

$$\left.\begin{aligned} A\frac{d^2u}{dz^2} &= -Q(l-z)\varphi, \\ B\frac{d^2v}{dz^2} &= -Q(l-z), \end{aligned}\right\} \tag{301}$$

gde su uvedene skraćene oznake

$$A = EI_y = \frac{1}{12}b^3hE; \quad B = EI_x = \frac{1}{12}bh^3E.$$

Ігеća od projekcija momenta sile Q je *torzioni* moment, koji je prema jednačini (99) proporcionalan uglu torzije $\theta = d\varphi/dz$,

$$C\frac{d\varphi}{dz} = Q\left[(l-z)\frac{du}{dz}-(u_0-u)\right], \tag{302}$$

gde je

$$C = \frac{1}{3}b^3h - \frac{64}{\pi^5}b^4 \operatorname{Tgh}\frac{\pi b}{a}.$$

Sistem simultanih diferencijalnih jednačina (301) i (302) može se ovako rešiti. Diferencijalenjem jednačine (302) nalazimo

$$C\frac{d^2\varphi}{dz^2} = Q(l-z)\frac{d^2u}{dz^2},$$

i kad u njoj zamenimo d^2u/dz^2 njegovim izrazom iz prve jednačine (301) dobivamo

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{Q^2}{AC}(l-z)^2\varphi = 0.$$

Obeležimo li

$$\frac{Q^2}{AC} = k^2; \quad l-z=t, \tag{303}$$

dobićemo linearnu diferencijalnu jednačinu sa promenljivim koeficijentom

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + k^2t^2\varphi = 0. \tag{304}$$

Integral ove jednačine potražimo u obliku polinoma

$$\varphi = a_0 + a_1t + a_2t^2 + \cdots + a_nt^n + \cdots,$$

i pokušajmo da je zadovoljimo pogodnim izborom kooeficijenata polinoma. Kad uvrstimo taj polinom u jednačinu (304), biće

$$2\cdot 1\,a_2 + 3\cdot 2\,a_3t + 4\cdot 3\,a_4t^2 + 5\cdot 4\,a_5t^3 + 6\cdot 5\,a_6t^4 + 7\cdot 6\,a_7t^5 + \ldots =$$
$$= -k^2(a_0t^2 + a_1t^3 + a_2t^4 + a_3t^5 + \ldots).$$

Odavde je

$$a_2 = 0, \qquad a_3 = 0,$$
$$a_4 = -\frac{a_0}{4\cdot 3}k^2, \qquad a_5 = -\frac{a_1}{5\cdot 4}k^2,$$
$$a_6 = -\frac{a_2}{6\cdot 5}k^2 = 0, \qquad a_7 = -\frac{a_3}{7\cdot 6}k^2 = 0,$$
$$a_8 = -\frac{a_4}{8\cdot 7}k^2 = \frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 8\cdot 7}k^4, \qquad a_9 = -\frac{a_5}{9\cdot 8}k^2 = \frac{a_1}{5\cdot 4\;9\cdot 8}k^4,$$

$$a_{10} = -\frac{a_6}{10\cdot 9}k^2 = 0\,, \qquad a_{11} = -\frac{a_7}{11\cdot 10}k^2 = 0\,,$$

$$a_{12} = -\frac{a_8}{12\cdot 11}k^2 = \qquad a_{13} = -\frac{a_9}{13\cdot 12}k^2 =$$

$$= -\frac{a_0}{4\cdot 3\cdot 8\cdot 7\cdot 12\cdot 11}k^6\,, \qquad = -\frac{a_1}{5\cdot 4\cdot 9\cdot 8\cdot 13\cdot 12}k^6\,,$$

itd. Dakle,

$$\varphi = a_0\left(1 - \frac{k^2 t^4}{3\cdot 4} + \frac{k^4 t^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{k^6 t^{12}}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \ldots\right) +$$

$$+ a_1 t\left(1 - \frac{k^2 t^4}{4\cdot 5} + \frac{k^4 t^8}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9} - \frac{k^6 t^{12}}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9\cdot 12\cdot 13} + \ldots\right),$$

gde su koeficijenti a_0 i a_1 proizvoljni.

Ova dva koeficijenta odredićemo iz uslova na krajevima konzole, naime: za $z = 0$, odnosno $t = l$, mora biti $\varphi = 0$, dok za $z = l$, odnosno $t = 0$, mora biti $d\varphi/dz = -d\varphi/dt = 0$. Iz drugog od ova dva uslova nalazimo $a_1 = 0$; onda prvi uslov daje jednačinu

$$1 - \frac{(kl^2)^2}{3\cdot 4} + \frac{(kl^2)^4}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8} - \frac{(kl^2)^6}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8\cdot 11\cdot 12} + \ldots = 0\,,$$

iz koje treba da odredimo najmanju vrednost kl^2, odnosno, prema (303), silu Q, koja bi bila dovoljna da izazove pretpostavljenu deformaciju. *L. Prandtl* koji je prvi proučio ovu vrstu izvijanja, izračunao je i najmanji koren te jednačine:

$$kl^2 = 4{,}013,$$

kojem odgovara, prema (303), najmanja kritična sila

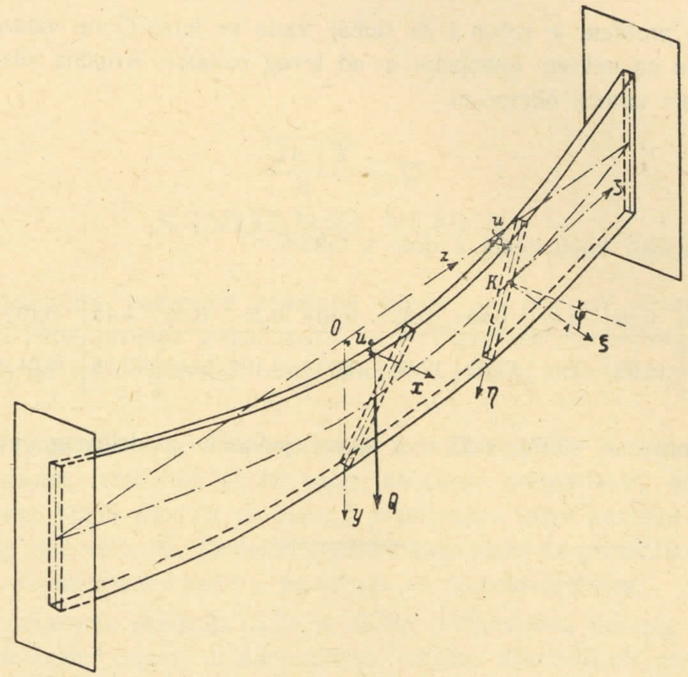
$$Q_{cr} = \frac{4{,}013\sqrt{A\,C}}{l^2}\,. \tag{305}$$

Na isti način može se naći i kritična sila koja bi izazvala poprečno izvijanje proste grede opterećene koncentrisanim teretom na sredini raspona (sl. 87). Pretpostavlja se da ležišta ne sprečavaju okretanja osnova oko glavnih osa inercije njihovih površina, no ne dopuštaju okretanje oko osa upravnih na tim površinama.

Uzevši početak koordinata x, y, z u težištu površine srednjeg preseka i posmatrajući moment otpora desnog ležišta u pogledu težišta površine nekog preseka K, imamo za projekcije tog momenta na ose x, y, z

$$-\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right), \quad 0, \quad \frac{Q}{2}(u_0 - u),$$

gde je sa u_0 obeležen poprečni ugib u srednjem preseku. Projekcije tog momenta na ose ξ, η, ζ sa početkom u težištu površine preseka K nalazimo, kao i u gore proučenom slučaju, pomoću iste tablice kosinusa



Sl. 87

$$-\frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right), \quad \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right)\varphi,$$

$$-\frac{Q}{2}\left[\left(\frac{l}{2} - z\right)\frac{du}{dz} - (u_0 - u)\right].$$

Na isti način dobivamo i diferencijalne jednačine

$$A\frac{d^2u}{dz^2} = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right)\varphi,$$

$$B\frac{d^2v}{dz^2} = \frac{Q}{2}\left(\frac{l}{2} - z\right),$$

$$C\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{Q}{2}\left[\left(\frac{l}{2} - z\right)\frac{du}{dz} - (u_0 - u)\right]$$

i, slično gornjem,

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \frac{Q^2}{4\,AC}\left(\frac{l}{2} - z\right)^2\varphi = 0.$$

Integralenjem te jednačine pomoću redova, kao i pre, nalazimo

$$Q_{cr}=\frac{16{,}93\sqrt{AC}}{l^2}\,. \tag{306}$$

Ovaj problem je rešen i za slučaj kada se teret Q ne nalazi na sredini raspona, već na nekom otstojanju a od levog oslonca. Kritična sila može se i u tom slučaju izraziti obrascem,

$$Q_{cr}=\frac{k\sqrt{AC}}{l^2}\,, \tag{307}$$

gde su vrednosti koeficijenta k date u tablici.

a/l	0,50	0,45	0,40	0,35	0,30	0,25	0,20	0,15	0,10	0,05
k	16,93	17,15	17,82	19,04	21,02	24,10	29,11	37,88	56,01	111,6

Isti obrazac (307) važi i za slučaj jednoliko podeljenog opterećenja sa $k=28{,}3$.

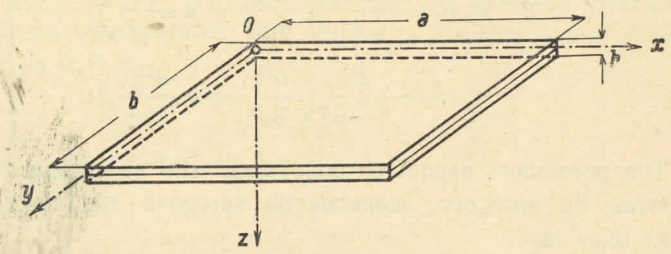
VI

SAVIJANJE PLOČA

54. Elastična površina savijene ploče. — Osnovni obrazac za krivinu elastične linije savijene grede izvodi se u Otpornosti materijala, obično, iz pretpostavke*) da pri deformaciji ostaju poprečni preseci ravni i upravni na elastičnoj liniji.

Dublje proučavanje te vrste naprezanja u t. **22** potvrdilo je tačnost obrasca za normalni napon, izvedenog na taj način, no sama pretpostavka potvrđena je samo delimično. Videli smo da se preseci pretvaraju u krive površine na kojima elastična linija nije upravna. Međutim, greška koju unosi ta pretpostavka vrlo je mala, ako je visina grede mala u poređenju sa njenom dužinom.

Pri proučavanju savijanja ploče je slična pretpostavka tim pre opravdana što je, obično, odnos njene debljine prema ostalim dimenzijama znatno manji, od odnosa visine grede prema njenoj dužini.



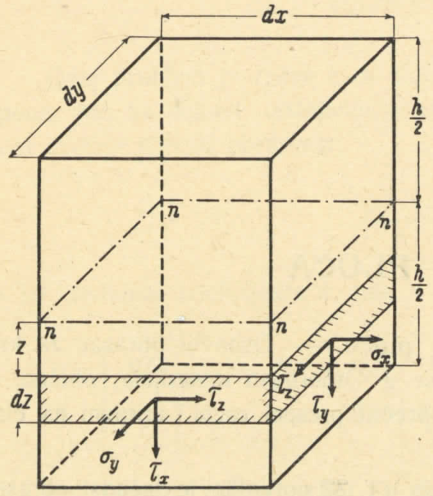
Sl. 88

Obeležimo sa h debljinu ploče (sl. 88); uzmimo njenu srednju ravan za xy ravan, a osu z upravimo na dole. Opterećenje na jedinicu površine, za koje pretpostavljamo da je upravljeno na dole, obeležimo sa q; ono je, uopšte rečeno, funkcija od x i y.

Posmatrajmo element zapremine isečen iz ploče sa dva para ravni paralelnih xz i yz ravnima (sl. 89). Pretpostavimo da poprečne strane tog paralelepipeda ostaju ravne i normalne na deformisanoj srednjoj ravni, *elastičnoj površini*, ali da se okreću oko neutralnih osa nn**). Razlaganja potpuno slična onima

*) T. zv. *Bernoulli*-eva hipoteza.
**) Ovu pretpostavku je uveo nemački fizičar *G. Kirchhoff* 1850.

pri proučavanju savijanja greda u Otpornosti materijala dovela bi i ovde do zaključka da elastična površina nije napregnuta, tj. da je to *neutralna površina*.



Sl. 89

Neka budu ρ_x i ρ_y poluprečnici krivine te površine u ravnima paralelnim xz-, odnosno yz- ravni. Tada su dilatacije u tački koja je bila na otstojanju z od neutralne površine

$$e_x = \frac{z}{\rho_x}, \quad e_y = \frac{z}{\rho_y},$$

i, prema tome, normalni naponi

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{\rho_x} + \frac{\mu}{\rho_y}\right),$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{1}{\rho_y} + \frac{\mu}{\rho_x}\right).$$

Obeležimo sa ζ ugib elastične površine u tački sa koordinatama x, y. Slično obrascu za krivinu elastične linije savijene grede nalazimo i ovde za *male* ugibe

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2},$$

i, prema tome,

$$\left.\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (308)$$

Tim normalnim naponima odgovaraju sile na stranama paralelepipeda, koje se svode na spregove; *momente* tih spregova *za jedinicu širine strane* beležimo sa m_x i m_y

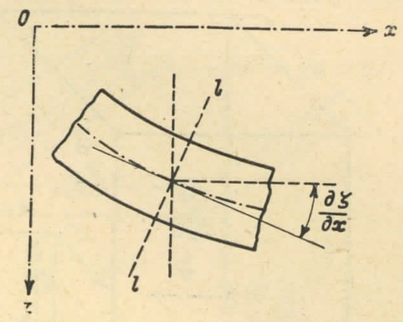
$$\left.\begin{aligned} m_x &= -\int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_y z\,dz = D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right), \\ m_y &= \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \sigma_x z\,dz = -D\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (309)$$

gde je sa D obeležena t.zv. *krutost ploče* (*flexural rigidity*)

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}. \qquad (310)$$

Posmatrajući presek ploče paralelan ravni xz (sl. 90), vidimo da se vlakno ll, koje je bilo vertikalno, nagnulo za ugao $\partial\zeta/\partial x$ Dakle, tačka tog vlakna koja je se nalazila na otstojanju z od neutralne površine pomerila se u pravcu ose x za

$$u = -z\frac{\partial\zeta}{\partial x}.$$



Sl. 90

Analogno nalazimo da je pomeranje u pravcu ose y

$$v = -z\frac{\partial\zeta}{\partial y},$$

i, prema tome,

$$\tau_z = G\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = -2Gz\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}. \qquad (311)$$

Ovim tangencijalnim naponima odgovaraju sile na stranama posmatranog paralelepipeda koje se redukuju na torzione momente; te momente za jedinicu širine strane beležimo sa $\pm t$

$$t = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_z z\,dz = -(1-\mu)D\frac{\partial^2\zeta}{\partial x\,\partial y}. \qquad (312)$$

Tangencijalnim naponima τ_y i τ_x odgovaraju sile na stranama paralelepipeda koje se redukuju na transverzalne sile; te sile za jedinicu širine strane paralelepipeda beležimo sa r_x i r_y

$$r_x = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_y\,dz, \qquad r_y = \int_{-\frac{1}{2}h}^{\frac{1}{2}h} \tau_x\,dz.$$

Ako, posmatrajući uslove ravnoteže našeg paralelepipeda, uzmemo u obzir da su sve sile (sl. 91) paralelne osi z, a momenti spregova upravni na toj osi, imamo da zadovoljimo svega tri jednačine ravnoteže.

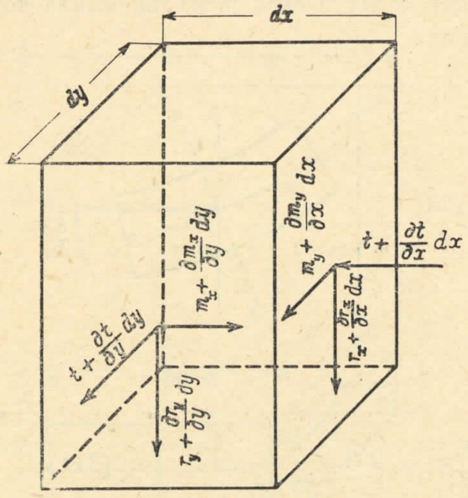
Kad izjednačimo sa nulom zbir projekcija sila na osu z

$$-r_x dy + \left(r_x + \frac{\partial r_x}{\partial x}dx\right)dy - r_y\,dx + \left(r_y + \frac{\partial r_y}{\partial y}dy\right)dx + q\,dx\,dy = 0,$$

nalazimo

$$\frac{\partial r_x}{\partial x} + \frac{\partial r_y}{\partial y} + q = 0. \qquad (313)$$

Kad izjednačimo sa nulom zbir momenata u odnosu na osu x



Sl. 91

$$-m_x dx + (m_x + \frac{\partial m_x}{\partial y} dy)\, dx + t\, dy -$$

$$-(t + \frac{\partial t}{\partial x} dx)\, dy + r_y dx\, dy = 0\,,$$

imaćemo

$$\frac{\partial m_x}{\partial y} - \frac{\partial t}{\partial x} + r_y = 0\,. \quad (314)$$

Analogno, posmatrajući zbir momenata u odnosu na osu y, dobićemo

$$\frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} - r_x = 0\,. \quad (315)$$

Iz jednačina (314) i (315), s jedne, i jednačina (309) i (312) s druge strane, izlazi

$$\left.\begin{aligned} r_y &= -\frac{\partial m_x}{\partial y} + \frac{\partial t}{\partial x} = -D\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right), \\ r_x &= \frac{\partial m_y}{\partial x} + \frac{\partial t}{\partial y} = -D\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (316)$$

A kad uvrstimo te izraze u jednačinu (313), nalazimo osnovnu diferencijalnu jednačinu savijene ploče*)

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = \frac{q}{D}\,. \quad (317)$$

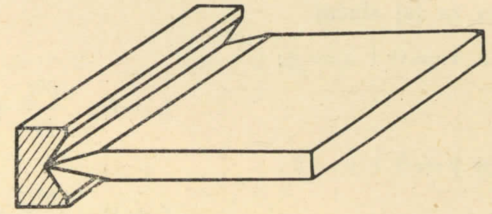
Sad smo sveli iznalaženje oblika elastične površine savijene ploče na integralenje linearne parcijalne diferencijalne jednačine četvrtog reda (317). Ako je ta jednačina rešena, onda se iz jednačina (309) i (312) dobivaju napadni i torzioni momenti, a iz jednačina (316) transverzalne sile. Rešenje diferencijalne jednačine mora zadovoljiti i konturne uslove. Te uslove ćemo sad proučiti, i to za pravougaonu ploču, jer su sva dalja izlaganja ograničena na taj oblik ploče.

Ako je neka *strana* ploče *uklještena*, onda je ugib ζ u tim tačkama jednak nuli. Sem toga, u njima se tangencijalna ravan na elastičnu površinu poklapa sa ravni xy, tj., ako je to, na pr., strana $x = a$ (sl. 88), onda je u njenim tačkama $(\partial\zeta/\partial x)_{x=a} = 0$.

*) Ovu jednačinu je postavila 1815 *Sophie Germain*, iako je polazila od pogrešnih hipoteza.

Ako je neka strana ploče, na pr., $x = 0$, slobodno poduprta, onda je ugib (sl. 92) u njenim tačkama jednak nuli. Sem toga, taj se kraj može slobodno okretati oko prave $x = 0$, a to znači da je jednak nuli napadni moment m_y za $x = 0$, ili

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_{x=0} = 0.$$

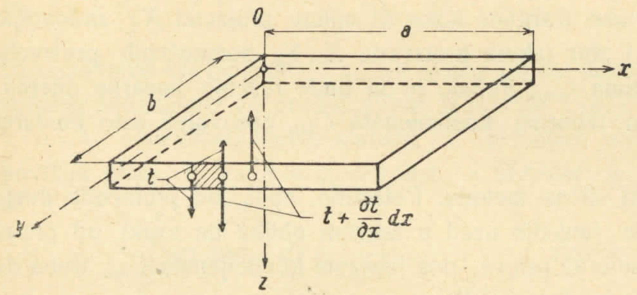


Sl. 92

Ako je *strana ploče potpuno slobodna* (na pr., $y = b$ na sl. 93), onda duž te strane nema ni napadnog, ni torzionog momenta, niti transverzalne sile, tj. za $y = b$ moralo bi da bude

$$m_x = 0, \quad t = 0, \quad r_y = 0, \quad (318)$$

što bi značilo *tri uslova*, dok smo za uklještene i poduprte krajeve imali po dva uslova. Međutim, dva poslednja uslova, stvarno, se svode na jedan*), što se vidi iz ovog razlaganja. Ako horizontalne sile koje sačinjavaju spreg $t\,dx$ na elementu dx posmatrane strane zamenimo dvema vertikalnim silama $-t$ i t na rastojanju dx, takva zamena izazvaće samo lokalno naprezanje kraja ploče. Spreg $(t + \partial t/\partial x \cdot dx)dx$, koji



Sl. 93

napada susedni element, zamenićemo analogno dvema vertikalnim silama $-(t + \partial t/\partial x \cdot dx)$ i $t + \partial t/\partial x \cdot dx$ na rastojanju dx, itd. Sa slike se vidi da će, kad takve zamene učinimo duž cele posmatrane strane ploče, ostati samo transverzalne sile, koje za jedinicu dužine strane iznose $\partial t/\partial x$; a pošto celokupna transverzalna sila na toj strani mora biti jednaka nuli, drugi i treći od uslova (318) su istovetni sa uslovom

$$\left(r_y - \frac{\partial t}{\partial x}\right)_{y=b} = -D\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + (2-\mu)\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right]\right\}_{y=b} = 0\,, \quad (319)$$

dok prvi od tih uslova glasi

$$(m_x)_{y=b} = D\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{y=b} = 0\,. \quad (320)$$

*) To je dokazao *G. Kirchhoff* 1850 na drugi način.

Uslovi (319) i (320) su, prema gornjem, neophodni i dovolji na slobodnoj strani ploče.

55. Savijanje poduprte ploče. — Kao što smo videli, konturni uslovi su za taj slučaj

za $x=0$ i $x=a$:

$$\zeta=0\,,\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}=0\,,$$

za $y=0$ i $y=b$:

$$\zeta=0\,,\quad \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}+\mu\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=0\,.$$

U tt. **16** i **20** imali smo sličan problem, s tom razlikom što smo tada tražili rešenje diferencijalne jednačine (95), odnosno (126′), drugog reda sa konturnim uslovom (71), odnosno (128) i (129.) Međutim ovde imamo jednačinu *četvrtog* reda (317) i *dva* konturna uslova.

Tamo smo, tražeći rešenje diferencijalne jednačine, polazili od proizvoda dveju funkcija X i Y, od kojih bi X bila funkcija samo od x, a Y funkcija samo od y. Te funkcije su bile tako izabrane kako bi njihov proizvod XY zadovoljio diferencijalnu jednačinu, a i zbir takvih proizvoda $X_m Y_n$ pomnoženih proizvoljnim konstantnim koeficijentima C_{mn} trebalo je da bude rešenje linearne diferencijalne jednačine. Pogodnim izborom koeficijenata C_{mn} zadovoljili smo konturni uslov.

Ovde ćemo primeniti sličnu metodu. Polazimo, opet, od proizvoda dveju funkcija $X_m Y_n$, ali ćemo te funkcije uzeti u takvom obliku da svaki od proizvoda posebice zadovolji konturne uslove, dok izborom koeficijenata C_{mn} treba da zadovoljimo diferencijalnu jednačinu (317).

Ako uzmemo funkcije X_m i Y_n u obliku

$$X_m=\sin m\pi\frac{x}{a}\,,\quad Y_n=\sin n\pi\frac{y}{b}\,,$$

gde su m i n proizvoljni celi brojevi, jasno je da su konturni uslovi zadovoljeni. Kad uvrstimo izraz

$$\zeta=\sum_m\sum_n C_{mn}\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b} \qquad (321)$$

u diferencijalnu jednačinu, nalazimo

$$\pi^4\sum_m\sum_n C_{mn}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2\sin m\pi\frac{x}{a}\sin n\pi\frac{y}{b}=\frac{q}{D}\,. \qquad (322)$$

Zadatak je sad sveden na to da zadatu funkciju q od x i y razvijemo u trigonometriski red po x i po y. Koeficijenti C_{mn} određuju se tada na poznati

način; naime množimo jednačinu (322) sa $\sin i\pi x/a$ i $\sin j\pi y/b$, gde su i i j celi brojevi, i integralimo levu i desnu stranu te jednačine po x od 0 do a i po y od 0 do b.

Uzevši u obzir da je

$$\int_0^a \sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin i\pi\frac{x}{a}\,dx=0 \qquad \text{za } i\neq m,$$

i

$$\int_0^b \sin n\pi\frac{y}{b}\cdot\sin j\pi\frac{y}{b}\,dy=0 \qquad \text{za } j\neq n,$$

a da je

$$\int_0^a \sin^2 m\pi\frac{x}{a}\,dx=\frac{a}{2}\,,\qquad \int_0^b \sin^2 n\pi\frac{y}{b}\,dy=\frac{b}{2}\,,$$

imamo onda

$$\frac{\pi^4}{4}ab\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2 C_{mn}=\frac{1}{D}\int_0^a\int_0^b q\sin m\pi\frac{x}{a}\cdot\sin n\pi\frac{y}{b}\,dx\,dy. \qquad (323)$$

Izračunavanje koeficijenata C_{mn} za svaku zadatu funkciju q svedeno je na izračunavanje kvadrature na desnoj strani jednačine (323).

U najjednostavnijem slučaju, tj. jednoliko raspoređenog opterećenja po površini ploče, tj. za $q=q_0=\text{const.}$, s obzirom da je

$$\int_0^a \sin m\pi\frac{x}{a}\,dx=\frac{2a}{m\pi}\,, \qquad \text{ako je } m \text{ neparan broj,}$$

$$\int_0^a \sin m\pi\frac{x}{a}\,dx=0\,, \qquad \text{ako je } m \text{ paran broj,}$$

$$\int_0^b \sin n\pi\frac{y}{b}\,dy=\frac{2b}{n\pi} \qquad \text{ako je } n \text{ neparan broj,}$$

$$\int_0^b \sin n\pi\frac{y}{b}\,dy=0 \qquad \text{ako je } n \text{ paran broj,}$$

nalazimo*) iz jednačine (323)

$$C_{mn}=\frac{16\,Qb^3}{\pi^6 a\,D\,mn\left[(mb/a)^2+n^2\right]^2}\,, \qquad (324)$$

*) Ovo rešenje pripada *L. Navier*-u.

gde je $Q = q_0 ab$ ukupan teret na ploči, a m i n su *neparni* celi brojevi 1, 3, 5...
Najveći ugib je na sredini ploče, tj. za $x = {}^1/_2\, a$, $y = {}^1/_2\, b$

$$\zeta_{max} = -\frac{16\, Q b^3}{\pi^6 a D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{{}^1/_2(m+n)}}{mn\,[(mb/a)^2 + n^2]^2} = \varkappa\, \frac{Q b^3}{E h^3 a}. \qquad (325)$$

Ovaj red konvergira vrlo brzo.

Pošto su napadni momenti na krajevima ploče jednaki nuli, moramo zaključiti iz simetrije da je najveći normalni napon na sredini ploče. Iz obrasca (308) imamo da je za $z = {}^1/_2\, h$

$$\sigma_x = -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right),$$

$$\sigma_y = -\frac{Eh}{2(1-\mu^2)} \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right),$$

a pošto je

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = -\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b},$$

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} = -\left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 C_{mn} \sin m\pi \frac{x}{a} \sin n\pi \frac{y}{b},$$

odnosno za $x = {}^1/_2\, a$, $y = {}^1/_2\, b$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right)_{max} = \frac{16\, Q b^3}{\pi^4 D a^3} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m^2 (-1)^{{}^1/_2(m+n)}}{mn\,[(mb/a)^2 + n^2]^2},$$

$$\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)_{max} = \frac{16\, Q b}{\pi^4 D a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 (-1)^{{}^1/_2(m+n)}}{mn\,[(mb/a)^2 + n^2]^2},$$

dakle,

$$(\sigma_x)_{max} = -\frac{96}{\pi^4} \frac{Qb}{h^2 a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(mb/a)^2 + \mu n^2](-1)^{{}^1/_2(m+n)}}{mn\,[(mb/a)^2 + n^2]^2},$$

$$(\sigma_y)_{max} = -\frac{96}{\pi^4} \frac{Qb}{h^2 a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[n^2 + \mu (mb/a)^2](-1)^{{}^1/_2(m+n)}}{mn\,[(mb/a)^2 + n^2]^2} = \lambda\, \frac{Qb}{h^2 a}. \qquad (326)$$

Ovi redovi konvergiraju sporije od reda (325). Od dva normalna napona veći je onaj u pravcu kraće strane ploče.

Vrednosti ugiba i napadnih momenata, izračunate za $\mu = 0{,}3$ date su u donjoj tablici za različite odnose strana ploče

SLOBODNO PODUPRTA PLOČA SAVIJENA JEDNOLIKO PODELJENIM OPTEREĆENJEM q

Ugib, napadni momenti i transversalne sile

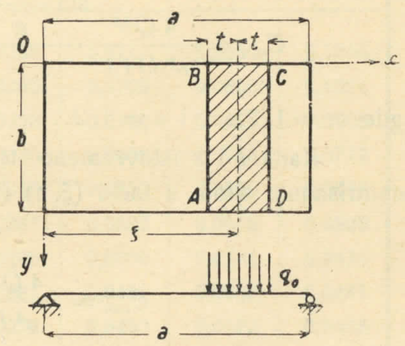
b/a	$\zeta_{max} : \frac{qa^4}{Eh^3}$	$(m_y)_{max} : qa^2$	$(m_x)_{max} : qa^2$	$(r_x)_{max} : qa$	$(r_y)_{max} : qa$
1,0	0,0443	0,0479	0,0479	0,338	0,338
1,1	0,0530	0,0553	0,0494	0,360	0,347
1,2	0,0616	0,0626	0,0501	0,380	0,353
1,3	0,0697	0,0693	0,0504	0,397	0,357
1,4	0,0770	0,0753	0,0506	0,411	0,361
1,5	0,0843	0,0812	0,0499	0,424	0,363
1,6	0,0906	0,0862	0,0493	0,435	0,365
1,7	0,0964	0,0908	0,0486	0,444	0,367
1,8	0,1017	0,0948	0,0479	0,452	0,368
1,9	0,1064	0,0985	0,0471	0,459	0,369
2,0	0,1106	0,1017	0,0464	0,465	0,370
3,0	0,1336	0,1189	0,0404	0,493	0,372
4,0	0,1400	0,1235	0,0384	0,498	0,372
5,0	0,1416	0,1246	0,0375	0,500	0,372
∞	0,1422	0,1250	0,0375	0,500	0,372

Kao drugi primer primene obrasca (323) uzmimo opterećenje jednoliko podeljeno na delu $ABCD$ površine ploče (sl. 94). U tom slučaju je

$$\int_0^a q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}\, dx \int_{\xi - t}^{\xi + t} q_0 \sin m\pi \frac{x}{a}\, dx =$$

$$= \frac{q_0 a}{m\pi} \left| -\cos m\pi \frac{x}{a} \right|_{\xi - t}^{\xi + t} =$$

$$= \frac{2\, q_0 a}{m\pi} \sin m\pi \frac{\xi}{a} \sin m\pi \frac{t}{a},$$



Sl. 94

i jednačina (323) dobiva oblik

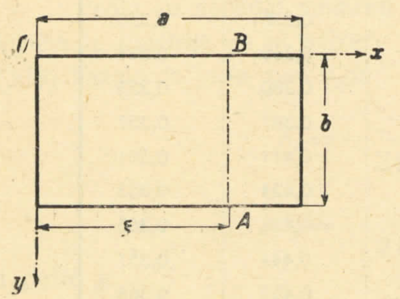
$$\frac{\pi^4}{4} ab \left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right]^2 C_{mn} = \frac{4\, q_0 ab}{\pi^2 D} \frac{\sin m\pi \frac{\xi}{a} \sin m\pi \frac{t}{a}}{mn},$$

odnosno

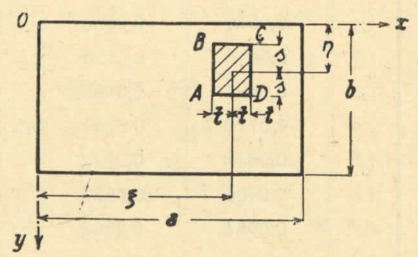
$$C_{mn}=\frac{8\,Qb^3\sin m\pi\frac{\xi}{a}\sin m\pi\frac{t}{a}}{\pi^6\,D\,t\,m\,n\,[(mb/a)^2+n^2]^2}, \tag{327}$$

gde je $m=1,2,3\ldots$, a $n=1,3,5\ldots$.

Kada t teži nuli, odnosno $\sin m\pi t/a$ teži



Sl. 95



Sl. 96

$m\pi t/a$, imamo slučaj ploče opterećene duž prave AB (sl. 95). Za taj slučaj je

$$C_{mn}=\frac{8\,Qb^3\sin\frac{m\pi\xi}{a}}{\pi^5\,D\,a\,n\,[(mb/a)^2+n^2]^2}. \tag{328}$$

Ako je opterećenje i u pravcu ose y raspoređeno samo na jednom delu $ABCD$ (sl. 96), iz obrasca (323) dobivamo

$$C_{mn}=\frac{4\,Qb^4}{\pi^6\,D\,t\,s}\,\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{m\pi t}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}\sin\frac{n\pi s}{b}}{mn\,[(mb/a)^2+n^2]^2}, \tag{329}$$

gde $m=1,2,\ldots$ i $n=1,2,\ldots$

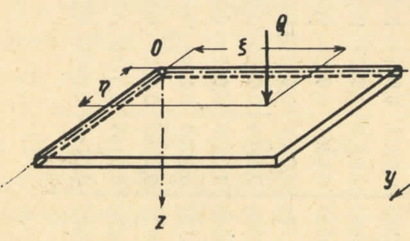
Kada t i s istovremeno teže nuli, imamo slučaj ploče opterećene koncentrisanom silom u tački (ξ,η) (sl. 97). Obrazac (329) dobiva onda oblik

$$C_{mn}=\frac{4\,Qb^3}{\pi^4\,D\,a}\,\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{[(mb/a)^2+n^2]^2}, \tag{330}$$

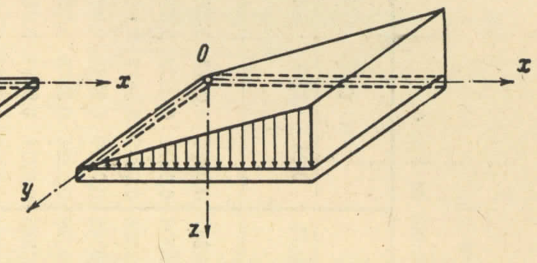
i

$$\zeta_1=\frac{4\,Q}{\pi^4\,D\,a\,b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b}}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{331}$$

Ovo rešenje može se smatrati za osnovno, jer se iz njega mogu odmah izvesti rešenja za bilo koje proizvoljno zadato podeljeno opterećenje slobodno poduprte ploče, čiji je intezitet q zadata funkcija od ξ i η. Za to treba samo u izrazu (331) zameniti Q sa $q\,d\xi\,d\eta$ i integraliti ga po opterećenom delu površine.



Sl. 97



Sl. 98

Na pr., za slučaj hidrostatičkog opterećenja (sl. 98) $q=\gamma\xi$, gde je γ specifična težina tečnosti, je

$$C_{mn}=\frac{(-1)^{m+1}\,8\,b^4\,a\,\gamma}{\pi^6\,Dmn\,[(mb/a)^2+n^2]^2}, \tag{332}$$

gde je $m=1,2,\ldots$, $n=1,3,\ldots$

U donjim tablicama date su brojne vrednosti ugiba i napadnih momenata za različite odnose strana ploča.

SLOBODNO PODUPRTA PLOČA SAVIJENA HIDROSTATIČKIM PRITISKOM $\gamma\xi$

Ugib

$\zeta:\frac{\gamma a^5}{Eh^3}$ za $b>a$					$\zeta:\frac{\gamma ab^4}{Eh^3}$ za $b<a$				
$\frac{b}{a}$	$\frac{x}{a}=0{,}25$	$\frac{x}{a}=0{,}50$	$\frac{x}{a}=0{,}60$	$\frac{x}{a}=0{,}75$	$\frac{a}{b}$	$\frac{x}{a}=0{,}25$	$\frac{x}{a}=0{,}50$	$\frac{x}{a}=0{,}60$	$\frac{x}{a}=0{,}75$
1	0,0143	0,0221	0,0220	0,0177	∞	0,0355	0,0711	0,0853	0,1066
1,1	0,0173	0,0265	0,0264	0,0210	5	0,0355	0,0708	0,0850	0,1054
1,2	0,0203	0,0308	0,0305	0,0241	4	0,0355	0,0700	0,0820	0,0908
1,3	0,0231	0,0348	0,0344	0,0271	3	0,0350	0,0688	0,0756	0,0772
1,4	0,0257	0,0385	0,0380	0,0298	2	0,0315	0,0553	0,0592	0,0537
1,5	0,0281	0,0421	0,0414	0,0323	1,9	0,0307	0,0532	0,0566	0,0508
1,6	0,0303	0,0453	0,0444	0,0346	1,8	0,0295	0,0508	0,0536	0,0474
1,7	0,0323	0,0482	0,0472	0,0366	1,7	0,0285	0,0482	0,0506	0,0441
1,8	0,0342	0,0508	0,0497	0,0385	1,6	0,0272	0,0453	0,0472	0,0406
1,9	0,0358	0,0532	0,0519	0,0402	1,5	0,0256	0,0421	0,0436	0,0370
2,0	0,0373	0,0553	0,0539	0,0417	1,4	0,0238	0,0385	0,0397	0,0332
3,0	0,0454	0,0668	0,0647	0,0498	1,3	0,0217	0,0348	0,0355	0,0294
4,0	0,0477	0,0700	0,0679	0,0521	1,2	0,0195	0,0308	0,0312	0,0255
5,0	0,0482	0,0708	0,0687	0,0527	1,1	0,0167	0,0265	0,0268	0,0217
∞	0,0484	0,0711	0,0690	0,0529	1	0,0143	0,0221	0,0220	0,0177

SLOBODNO PODUPRTA PLOČA SAVIJENA HIDROSTATIČKIM PRITISKOM $\gamma\xi$

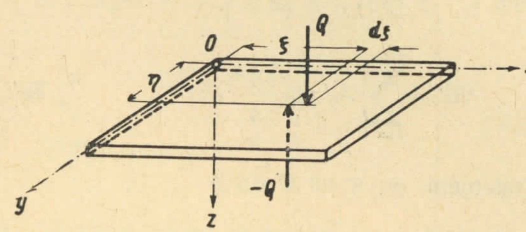
Napadni momenti za $b > a$

x/a / b/a	$m_y : \gamma a^3$, $y = {}^1/_2\, b$ 0,25	0,50	0,60	0,75	$m_x : \gamma a^3$, $y = {}^1/_2\, b$ 0,25	0,50	0,60	0,75
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207
1,1	0,0156	0,0276	0,0302	0,0289	0,0155	0,0247	0,0251	0,0211
1,2	0,0179	0,0313	0,0338	0,0318	0,0158	0,0250	0,0254	0,0213
1,3	0,0200	0,0346	0,0371	0,0344	0,0160	0.0252	0,0255	0,0213
1,4	0,0221	0,0376	0,0402	0,0367	0,0160	0,0253	0,0254	0,0212
1,5	0,0239	0,0406	0,0429	0,0388	0,0159	0,0249	0,0252	0,0210
1,6	0,0256	0,0431	0,0454	0,0407	0,0158	0,0246	0,0249	0,0207
1,7	0,0272	0,0454	0,0476	0,0424	0,0155	0,0243	0,0246	0,0205
1,8	0,0286	0,0474	0,0496	0,0439	0,0153	0,0239	0,0242	0,0202
1,9	0,0298	0,0492	0,0513	0,0452	0,0 50	0,0235	0,0238	0,0199
2,0	0,0309	0,0508	0,0529	0,0463	0,0148	0,0232	0,0234	0,0197
3,0	0,0369	0,0594	0,0611	0,0525	0,0128	0,0202	0,0207	0,0176
4,0	0,0385	0,0617	0,0632	0,0541	0,0120	0,0192	0,0196	0,0168
5,0	0,0389	0,0623	0,0638	0,0546	0,0118	0,0187	0,0193	0,0166
∞	0,0391	0,0625	0,0640	0,0547	0,0117	0,0187	0,0192	0,0165

Napadni momenti za $b < a$

x/a / a/b	$m_y : \gamma a b^2$, $y = {}^1/_2\, b$ 0,25	0,50	0,60	0,75	$m_x : \gamma a b^2$, $y = {}^1/_2\, b$ 0,25	0,50	0,60	0,75
∞	0,0094	0,0187	0,0225	0,0281	0,0312	0,0625	0,0750	0,0937
5,0	0,0094	0,0187	0,0230	0,0309	0,0312	0,0623	0,0742	0,0877
4,0	0,0094	0,0192	0,0237	0,0326	0,0312	0,0617	0,0727	0,0820
3,0	0,0096	0,0202	0.0256	0,0345	0,0309	0,0594	0,0678	0,0715
2,0	0,0108	0,0232	0,0285	0,0348	0,0284	0,0508	0,0554	0,0523
1,9	0,0111	0,0235	0,0288	0.0345	0,0278	0,0492	0,0533	0,0498
1,8	0,0115	0,0239	0,0291	0,0341	0,0269	0,0474	0,0509	0,0470
1,7	0,0117	0,0243	0,0293	0,0337	0,0261	0,0454	0,0485	0,0442
1,6	0,0120	0,0246	0,0294	0,0331	0,0251	0,0431	0,0457	0,0412
1,5	0,0123	0,0249	0,0294	0,0324	0,0239	0,0406	0,0428	0,0381
1,4	0,0126	0,0253	0,0292	0,0315	0,0225	0,0376	0,0396	0,0348
1,3	0,0129	0,0252	0,0290	0,0304	0,0209	0,0346	0,0360	0,0314
1,2	0,0131	0,0250	0,0284	0,0291	0,0192	0,0313	0,0323	0,0279
1,1	0,0134	0,0247	0,0276	0,0276	0,0169	0,0276	0,0285	0,0245
1,0	0,0132	0,0239	0,0264	0,0259	0,0149	0,0239	0,0245	0,0207

56. Uklještenje strana ploče. — Iz osnovnog rešenja (331) može se izvesti i rešenje za slučaj kada su jedna ili više strana te ploče uklještene, a ostale poduprte. Zamislimo slobodno poduprtu ploču, opterećenu istovremeno koncentrisanom silom Q u tački $(\xi + d\xi, \eta)$ i silom iste veličine a suprotnog smera u tački (ξ, η) (sl. 99), tj. spregom u ravni upravnoj na osu y, a sa momentom $\mathfrak{M} = Q\, d\xi$.



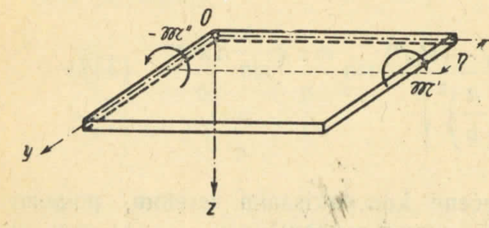
Sl. 99

Ugib u nekoj tački (x, y) biće algebarski zbir ugiba od svake sile posebice

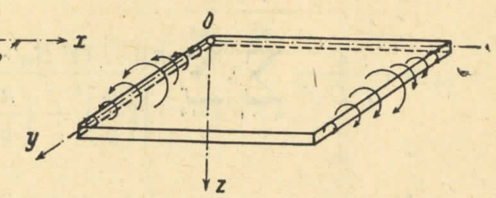
$$\zeta_1(\xi + d\xi, \eta) - \zeta_1(\xi, \eta) = \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi}\, d\xi = \frac{\mathfrak{M}}{Q} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi},$$

gde je ζ_1 dato izrazom (331).

Ako istovremeno deluju dva sprega u toj ravni, sa momentima $\mathfrak{M}'$ i $-\mathfrak{M}''$: prvi u tački (a, η), drugi u tački $(0, \eta)$, biće ugib (sl. 100)



Sl. 100



Sl. 101

$$\frac{1}{Q}\left[\mathfrak{M}'\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi}\right)_{\xi = a} - \mathfrak{M}''\left(\frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi}\right)_{\xi = 0}\right]. \tag{333}$$

Zamislimo takve spregove neprekidno raspoređene duž strana $x = a$ i $x = 0$ tako, da se inteziteti tih opterećenja, tj. momenti za jedinicu dužine (sl. 101), mogu izraziti trigonometriskim redovima

$$\sum_{i=1}^{\infty} A_i' \sin \frac{i\pi\eta}{b}; \qquad \sum_{i=1}^{\infty} A_i'' \sin \frac{i\pi\eta}{b}, \tag{334}$$

gde, zasad još neodređeni, koeficijenti A_i' odgovaraju strani $x = a$, a koeficijenti A_i'' strani $x = 0$. Ugib usled takvog opterećenja nalazimo iz izraza (333) zamenom ζ_1, iz (331), a sa

$$\mathfrak{M}' = \sum_{i=1}^{\infty} A_i' \sin \frac{i \pi \eta}{b} \, d\eta; \qquad \mathfrak{M}'' = \sum_{i=1}^{\infty} A_i'' \sin \frac{i \pi \eta}{b} \, d\eta$$

i integralenjem po η od 0 do b

$$\zeta_2 = \frac{2}{\pi^3 D a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m[(-1)^m A_n' - A_n'']}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} ; \tag{335}$$

Potpuno analogno, ako opteretimo strane $y = b$ i $b = 0$ spregovima neprekidno raspoređenim duž tih strana, a sa intezitetima momenata

$$\sum_{j=1}^{\infty} B_j' \sin \frac{j \pi \xi}{a}, \qquad \sum_{j=1}^{\infty} B_j'' \sin \frac{j \pi \xi}{a}, \tag{336}$$

ugib usled takvog opterećenja biće

$$\zeta_3 = \frac{2}{\pi^3 D b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n[(-1)^n B_m' - B_m'']}{\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2\right]^2} \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} . \tag{337}$$

Ako su sve strane ploče, opterećene koncentrisanim teretom, potpuno uklještene, moraju se inteziteti momenata (334) i (336), odnosno koeficijenti A_i', A_i'', B_j' i B_j'' odrediti iz uslova da je na stranama $x = 0$ i $x = a$: $\partial \zeta / \partial x = 0$, a na stranama $y = 0$ i $y = b$ da je $\partial \zeta / \partial y = 0$, gde je $\zeta = \zeta_1 + \zeta_2 + \zeta_3$, tj. zbir izraza (331) (335) i (337). Iz prvog uslova nalazimo dve jednačine

$$\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 [(-1)^m A_n' - A_n'']}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b}\right)^2\right]^2} + \frac{n}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m[(-1)^n B_m' - B_m'']}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b}\right)^2\right]^2} =$$

$$= - \frac{2 Q}{\pi a b} \sin \frac{n \pi \eta}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m \pi \xi}{a}}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b}\right)^2\right]^2} , \tag{338}$$

$$\frac{1}{a^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 [A_n' - (-1)^m A_n'']}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b}\right)^2\right]^2} + \frac{n}{b^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m [(-1)^n B_m' - B_m'']}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b^2}\right)^2\right]^2} =$$

$$= - \frac{2 Q}{\pi a b} \sin \frac{n \pi \eta}{b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \sin \frac{m \pi \xi}{a}}{\left[m^2 + \left(\frac{n a}{b}\right)^2\right]^2} . \tag{339}$$

Zbirovi koji ulaze u te jednačine mogu se izraziti i u konačnom obliku. Uzmimo dva poznata trigonometriska reda

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin m \varphi}{m^2 - p^2} = \frac{\pi}{2} \frac{\sin p(\pi - \varphi)}{\sin p \pi} , \qquad 0 < \varphi < 2 \pi ,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \sin m \varphi}{m^2 - p^2} = - \frac{\pi}{2} \frac{\sin p \varphi}{\sin p \pi} \qquad - \pi < \varphi < \pi .$$

Diferencijalimo ove jednakosti po p i zamenimo

$$p = n \frac{a}{b} \sqrt{-1}, \qquad \varphi = \pi \frac{\xi}{a} ;$$

tada dobivamo

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \sin \frac{m \pi \xi}{a}}{\left[m^2 + \left(\frac{na}{b}\right)^2\right]^2} = \\
&= \frac{\pi^2}{4n} \frac{b}{a} \frac{\frac{\xi}{a} \operatorname{Coh} \frac{n\pi (a - \xi)}{b} \operatorname{Sih} \frac{n \pi a}{b} - \operatorname{Sih} \frac{n \pi \xi}{b}}{\operatorname{Sih}^2 \frac{n \pi a}{b}} , \\
&\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m m \sin \frac{m \pi \xi}{a}}{\left[m^2 + \left(\frac{na}{b}\right)^2\right]^2} = \\
&= \frac{\pi^2}{4n} \frac{b}{a} \frac{\frac{\xi}{a} \operatorname{Coh} \frac{n \pi \xi}{b} \operatorname{Sih} \frac{n \pi a}{b} - \operatorname{Coh} \frac{n \pi a}{b} \operatorname{Sih} \frac{n \pi \xi}{b}}{\operatorname{Sih}^2 \frac{n \pi a}{b}} ,
\end{aligned}\right\} \tag{340}$$

tj. zbirove, koji se javljaju na desnim stranama jednačina (338) i (339).

Ako jednakosti (340) diferencijalimo po $\varphi = \pi\xi/a$, onda je za $\varphi = 0$

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m m^2}{\left[m^2+\left(n\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}=\frac{\pi}{4n}\frac{b}{a}\,\frac{\operatorname{Sih}\frac{n\pi a}{b}-\frac{n\pi a}{b}\operatorname{Coh}\frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{Sih}^2\frac{n\pi a}{b}},\\
&\sum_{m=1}^{\infty}\frac{m^2}{\left[m^2+\left(n\frac{a}{b}\right)^2\right]^2}=\frac{\pi}{4n}\frac{b}{a}\,\frac{\frac{1}{2}\operatorname{Sih}\frac{2n\pi a}{b}-\frac{n\pi a}{b}}{\operatorname{Sih}^2\frac{n\pi a}{b}},
\end{aligned}\right\}\quad(341)$$

a to su koeficienti uz A_n' i A_n'' u jednačinama (338) i (339).

Ako su i strane $y=0$ i $y=b$ uklještene, onda, iz uslova da je na tim stranama $\partial\zeta/\partial y=0$, slede još dve jednačine, koje možemo dobiti i neposredno iz (338) i (339) zamenom slova A sa B, m sa n, a sa b, ξ sa η i obrnuto. Te dve jednačine, zajedno sa (338) i 339), sačinjavaju sistem jednačina, iz kojih se koeficijenti A', A'', B' i B'' određuju aproksimacijama. One daju rešenje problema za pravougaonu ploču uklještenu na okviru, a opterećenu koncentrisanim teretom u tački (ξ, η).

Iz ovog rešenja može se neposredno izvesti i rešenje za proizvoljno zadato podeljeno opterećenje q. Za to treba zameniti u izrazima na desnoj strani dobivenih jednačina Q sa $q\,d\xi\,d\eta$ i integraliti te izraze po ξ od 0 do a i po η od 0 do b, da bi se dobile jednačine koje odgovaraju zadatom opterećenju. Ako se teret nalazi na sredini ploče, ili ako je raspoređen jednoliko po celoj površini, onda je, usled simetrije, $A' = A''$ i $B' = B''$, te se broj jednačina dvaput smanjuje. Ako je neka strana slobodno poduprta, treba zameniti sa 0 koeficijente koji odgovaraju opterećenju momentima na toj strani i odbaciti jednačine dobivene iz uslova uklještenja te strane.

Rešavanje ovog sistema jednačina, kao što smo rekli, vrši se aproksimacijama. Primenu te metode pokazaćemo na najjednostavnijem slučaju, kvadratne ploče opterećene jednoliko podeljenim opterećenjem q_0 po celoj površini, a uklještenoj po celokupnom okviru, dok su u tablicama na kraju knjige navedeni rezultati sličnih računa za različite slučajeve opterećenja i uklještenja strana ploče.

Kod kvadratne ploče opterećene jednoliko po celoj površini usled simetrije u pogledu na sredinu su $A' = A'' = B' = B''$. Prema tom jednačine se redukuju na sistem (338), gde treba zameniti A', A'' B' i B'' sa A, a izraz na desnoj strani integraliti po ξ i η, kao što je gore rečeno:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{A_n}{n}\left(\operatorname{Tgh}\frac{n\pi}{2}+\frac{{}^1\!/_2\,n\pi}{\operatorname{Coh}^2\frac{n\pi}{2}}\right)+\frac{8n}{\pi}\sum_{m=1,3,5\ldots}^{\infty}\frac{A_m}{m^3}\,\frac{1}{\left(1+\frac{n^2}{m^2}\right)^2}=\\
&=-\frac{4q_0a^2}{\pi^3}\,\frac{1}{n^4}\left(\frac{{}^1\!/_2\,n\pi}{\operatorname{Coh}^2\frac{n\pi}{2}}-\operatorname{Tgh}\frac{n\pi}{2}\right).
\end{aligned}\right\}\quad(342)$$

Ako zadržimo samo 4 jednačine u ovom sistemu i zanemarimo koeficijente sa indeksima većim od 7, imaćemo

$$\begin{array}{lllll}
1{,}8033\,A_1 & +0\,0764\,A_3 & +0{,}0188\,A_5 & +0{,}0071\,A_7 & =0{,}6677\,K\\
0{,}0764\,A_1 & +0{,}4045\,A_3 & +0{,}0330\,A_5 & +0{,}0159\,A_7 & =0{,}01232\,K\\
0{,}0188\,A_1 & +0{,}0330\,A_3 & +0{,}2255\,A_5 & +0{,}0163\,A_7 & =0{,}00160\,K\\
0{,}0071\,A_1 & +0{,}0159\,A_3 & +0{,}0163\,A_5 & +0{,}1558\,A_7 & =0{,}00042\,K,
\end{array}$$

gde je $K = -4\,q_0a^2/\pi^3$.

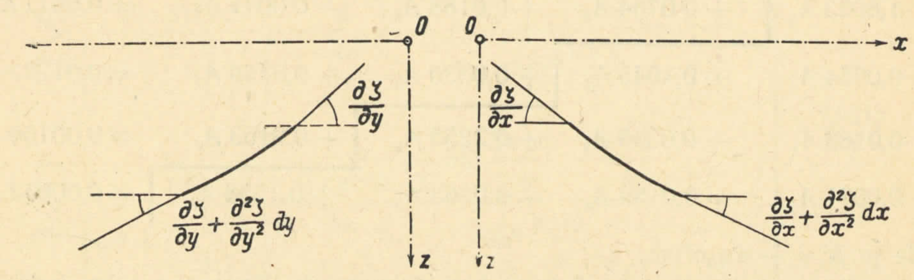
Pada u oči da su koeficijenti kod dijagonalnih članova u ovim jednačinama znatno veći od ostalih. Koristeći tu činjenicu, nalazimo prvu aproksimaciju za A_1 iz prve jednačine, zanemarivši u njoj sve članove desno od dijagonale: $A_1 = 0{,}3700\,K$. Kad uvrstimo ovu vrednost u drugu jednačinu i zanemarimo u njoj članove desno od dijagonale, nalazimo $A_3 = -0{,}0395\,K$. Sa tim vrednostima za članove A_1 i A_3 u trećoj jednačini nalazimo $A_5 = -0{,}0180\,K$, opet zanemarivši član desno od crte. Najzad, iz poslednje jednačine dobivamo $A_7 = -0{,}0083\,K$. Nađene vrednosti treba uvrstiti u članove desno od crte u našim jednačinama i ponoviti postupak; dobiva se: $A_1 = 0{,}3722\,K$; $A_3 = -0{,}0380\,K$; $A_5 = -0{,}0178\,K$ i $A_7 = -0{,}0085\,K$. Ponavljanjem se može doći do treće aproksimacije itd. Upoređenje sa rezultatima sračunatim na drugi način*) pokazalo je da se sa 4 koeficijenta može postići tačnost u brojnim vrednostima napadnih momenata do 1%. Sa 7 koeficijenata mogu se tačno odrediti prve 4 cifre.

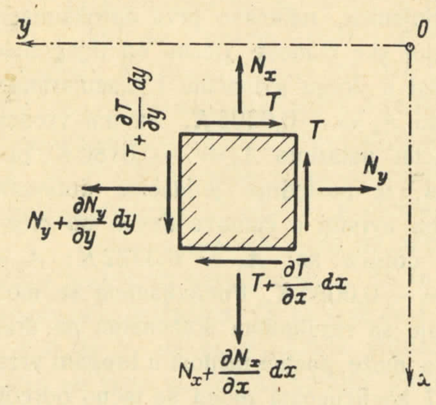
UKLJEŠTENA PLOČA SAVIJENA JEDNOLIKO PODELJENIM PRITISKOM

$\frac{b}{a}$	$(\zeta)_{max}:\frac{qa^4}{Eh^3}$	$m_y:qa^2$		$m_x:qa^2$	
		$x=0,\ y=\frac{b}{2}$	$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$	$x=\frac{a}{2}\ y=0$	$x=\frac{a}{2},\ y=\frac{b}{2}$
1,0	0,0138	−0,0513		0,0513	
1,1	0,0164	−0,0581	0,0264	0 0538	0,0231
1,2	0,0188	−0,0639	0,0299	0,0554	0,0228
1,3	0,0209	−0,0687	0,0327	0,0563	0,0222
1,4	0,0226	−0,0726	0,0349	0,0568	0,0212
1,5	0,0240	−0,0757			
1,6	0,0251	−0,0780	0,0381	0,0571	0,0193
1,7	0,0260	−0,0799	0,0392	0,0571	0,0182
1,8	0,0267	−0,0812	0,0401	0,0571	0,0174
1,9	0,0272	−0,0822	0,0407	0,0571	0,0165
2,0	0,0277	−0,0829		0,0571	
∞	0,0284	−0,0830			

*) Prva rešenja za uklještenu pravougaonu ploču, opterećenu jednoliko podeljenim teretom, koja su dala pouzdane brojne vrednosti za napadne momente, dali su skoro istovremeno *I. Bubnov*, St. Peterburg, 1914 i *H. Hencky*, München, 1913. Jednačine oblika (338) i (339) za jednoliko opterećenje je izveo *J. Šimanski*, Leningrad, 1934, a za teret koncentrisan na sredini *S. Timoshenko*, 1938. Brojne vrednosti navedene niže u tablicama su sračunali *I. Bubnov*, *H. Hencky*, *Timoshenko* i njegovi đaci.

57. Ispupčenje ploča. — Dosad smo pretpostavljali da je ploča savijena silama upravnim na njoj, a da su njeni ugibi vrlo mali. Ako ploču na-





Sl. 102

padaju, sem takvih sila, još i sile koje izazivaju njeno ravno naprezanje, moraju se i ove uvesti u posmatranje ravnoteže elementa isečenog iz ploče (sl. 89); to znači (sl. 102) sile

$$N_x = \int_{-h}^{h} \sigma_x \, dz, \; N_y = \int_{-h}^{h} \sigma_y \, dz,$$

$$T = \int_{h}^{h} \tau_z \, dz.$$

Zbir projekcija sila na osu x mora biti jednak nuli,

$$-N_x \, dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy - T \, dx + \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy\right) dx = 0$$

ili

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial y} = 0. \qquad (343)$$

Slično tome, iz uslova da je zbir projekcija sila na osu y jednak nuli, nalazimo

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \qquad (344)$$

Levoj strani jednačine (313), koja pretstavlja zbir projekcija sila na osu z, u datom slučaju, moramo dodati još i projekcije sila $N_x dy$, $N_y dx$, $T dx$ i $T dy$, na tu osu. Pri izračunavanju tih projekcija vodićemo računa o tome da su nagibi $\partial\zeta/\partial x$ i $\partial\zeta/\partial y$ male veličine, i, prema tome, kosinusi uglova, između te sile i ose z jednaki su $\partial\zeta/\partial x$, odnosno $\partial\zeta/\partial y$.

Zbir projekcija sila $-N_x dy$ i $\left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy$ na osu z je

$$-N_x \, dy \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} dx\right) =$$

$$= \left(N_x \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial N_x}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right) dx \, dy, \qquad (345)$$

ako zanemarimo malu veličinu višeg reda

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} dx \, dy \frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} dx.$$

Slično tome je zbir projekcija sila $-N_y dx$ i

$$\left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx$$

na istu osu

$$\left(N_y \frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right) dx \, dy. \qquad (346)$$

Sile $-T dx$ i

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy\right) dx,$$

odnosno $-T dy$ i

$$\left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) dy$$

imaju projekcije na osu z

$$-T \, dx \frac{\partial\zeta}{\partial x} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial y} dy\right) dx \left(\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \, \partial y} dy\right) -$$

$$-T \, dy \frac{\partial\zeta}{\partial y} + \left(T + \frac{\partial T}{\partial x} dx\right) dy \left(\frac{\partial\zeta}{\partial y} + \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \, \partial y} dx\right) =$$

$$= 2 \, T \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \, \partial y} dx \, dy + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial y} dx \, dy + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial x} dx \, dy, \qquad (347)$$

gde je zanemarena mala veličina višeg reda

$$\left(\frac{\partial T}{\partial y} dy + \frac{\partial T}{dx} ax\right) \frac{\partial^2\zeta}{\partial x \, \partial y} dx \, dy.$$

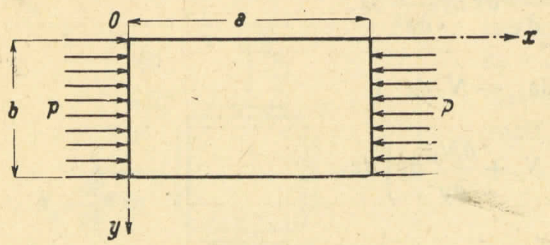
Ako uzmemo u obzir jednačine (343) i (344), zbir izraza (345), (346) i (347) biće

$$\left(N_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \right) dx\, dy.$$

Ovaj se zbir mora dodati vertikalnoj sili $q\, dx\, dy$ u jednačini (313). Tada za posmatrani slučaj mesto do jednačine (317), dolazimo do diferencijalne jednačine*)

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = \frac{1}{D} \left(q + N_x \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + 2T \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} \right). \quad (348)$$

U gornjem razlaganju je pretpostavljeno da sile N_x i N_y *zatežu* ploču; u slučaju da te sile *pritiskuju*, treba promeniti znak uz njih u jednačini (348).



Sl. 103

Na pr., ako je pravougaona ploča napregnuta na savijanje podeljenim opterećenjem q, a osim toga, jednoliko podeljenim pritiskom intenziteta p duž strana $x = 0$ i $x = a$, (sl. 103) jednačina (348) dobiva oblik

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = \frac{1}{D} \left(q - p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \right). \quad (349)$$

Da vidimo sad, je li moguće rešenje ove jednačine i u slučaju kad je $q = 0$, to znači, kad deluje *samo* pritisak u ravni ploče. Drukčije rečeno, je li moguće ispupčenje ploče usled jednoliko podeljenog pritiska p duž strana $x = 0$ i $x = a$. I, ako je moguće, koliki bi pritisak to ispupčenje izazvao. Pretpostavljamo da je ploča na konturi slobodno poduprta.

Rešenje diferencijalne jednačine

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = -\frac{p}{D} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} \quad (350)$$

za slučaj slobodno poduprte ploče potražimo, opet, u obliku dvostrukog trigonometriskog reda (321). Kad uvrstimo taj izraz u diferencijalnu jednačinu, nalazimo

$$\pi^4 \sum_m \sum_n C_{mn} \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b} =$$

$$= \pi^2 \frac{p}{D} \sum_m \sum_n C_{mn} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \sin \frac{m \pi x}{a} \sin \frac{n \pi y}{b},$$

odnosno

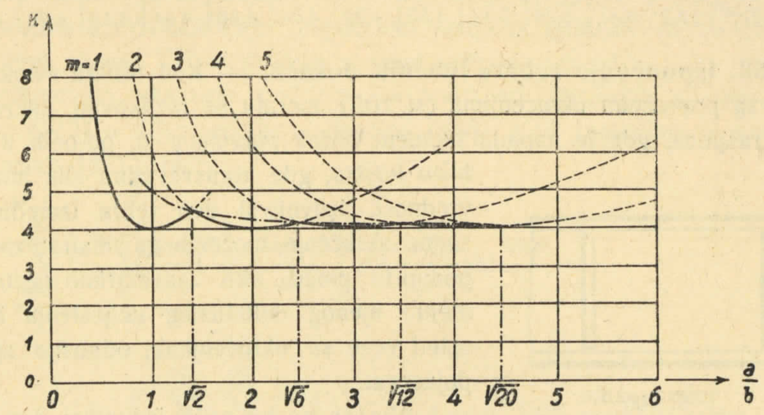
$$C_{mn} \left\{ \pi^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2 - \frac{p}{D} \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right\} = 0.$$

*) Ovu jednačinu je postavio *St.-Venant*, 1883.

Ako eliminišemo, kao i pre, iz našeg razmatranja trivijalno rešenje ove jednačine, $C_{mn} = 0$, pošto ono ne odgovara ispupčenju, dolazimo do zaključka da je

$$p_{cr} = \pi^2 \frac{D}{a^2} \left[m + \frac{n^2}{m} \left(\frac{a}{b} \right)^2 \right]^2 = k \pi^2 \frac{D}{b^2}. \text{*)} \quad (351)$$

Kao uvek, za primene je najvažniji *najmanji* od pritisaka određenih ovom jednačinom, dakle, treba naći cele brojeve m i n, kod kojih koeficijent k ima najmanju vrednost, odnosno brojeve polutalasa ispupčene površine u pravcu osa x i y, koji tom odgovaraju. Što se tiče broja n, koji ulazi samo u brojitelj, najmanjoj vrednosti koeficijenta k, očigledno, odgovara $n = 1$. Zavisnost tog koeficijenta od m se može proučiti pomoću dijagrama data na sl. 104, gde je grafički prikazana zavisnost k od a/b za $m = 1, 2, 3, \ldots$ Iz tog dijagrama se vidi da najmanju vrednost k ima za



Sl. 104

$$\left.\begin{aligned} m &= 1, \text{ ako je} & 0 < \frac{a}{b} &< \sqrt{1 \cdot 2}, \\ m &= 2 \;\;\text{,,}\;\;\text{,,} & \sqrt{1 \cdot 2} < \frac{a}{b} &< \sqrt{2 \cdot 3}, \\ m &= 3 \;\;\text{,,}\;\;\text{,,} & \sqrt{2 \cdot 3} < \frac{a}{b} &< \sqrt{3 \cdot 4}, \text{ itd.} \end{aligned}\right\} \quad (352)$$

Diferencijalenjem izraza

$$k = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{bm} \right)^2 = \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \left(\frac{a}{mb} \right)^2 + 2$$

*) Ovaj izraz je izveo *G. H. Bryan*, London 1891.

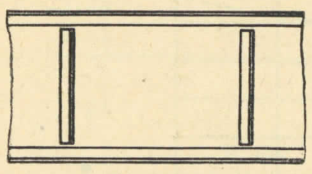
po a/b, može se utvrditi da je minimum k jednak 4. Isto tako, kad potražimo koordinate preseka dveju krivih što odgovaraju m i $m+1$, nalazimo da te tačke preseka leže na krivoj

$$k=4+\left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Vrednosti koeficijenta k, (352) nalaze se, dakle, uvek između prave $k=4$ i krive $k=4+(b/a)^2$, pokazane na sl. 104, a koja asimptotski teži pravoj, $k=4$, kada a/b raste.

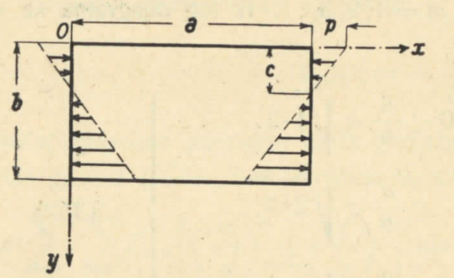
a/b	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4	1,41
k	27,0	13,2	8,41	6,25	5,14	4,53	4,20	4,04	4,00	4,04	4,13	4,28	4,47	4,49

58. Ispupčenje rebara limenih nosača. — Kod rebara visokih limenih nosača sa poprečnim ukrućenjima (sl. 105) moraju se razlikovati uslovi u delovima raspona, gde je napadni moment blizak *maximum*-u, od onih u delovima blizu ležišta, gde transversalna sila ima najveću vrednost. Izdvojivši deo rebra između dva susedna ukrućenja, možemo ga smatrati za slobodno poduprtu ploču, ako zanemarimo neznatne momente njenog delimičnog uklještenja na okviru usled veze sa ukrućenjima, odnosno ugaonicima pojaseva.

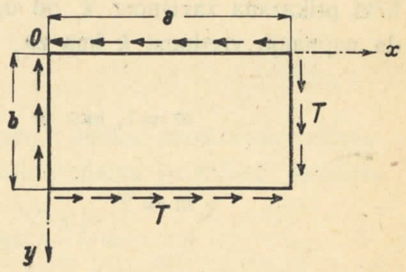


Sl. 105

Ako se na taj način izdvojeni deo rebra nalazi blizu preseka, gde napadni moment ima *maximum*, biće transversalna sila na tom delu neznatna. Ne mora se, dakle, voditi računa o tangencijalnom naponu τ_z, odnosno sili T, već samo o normalnom naponu σ_x, ili sili N_x. U granicama posmatranog dela dužine grede napadni



Sl. 106



Sl. 107

moment se menja neznatno; može se, dakle, ta sila smatrati nezavisnom od x. U isto vreme ona je proporcionalna otstojanju tačke od neutralne ose (sl. 106); može se, dakle, napisati u obliku

$$N_x=-p\left(1-\frac{y}{c}\right), \tag{353}$$

gde je c otstojanje neutralne ose od ose x. a p se smatra konstantom.

Međutim, ako isto tako izdvojimo deo rebra između dva susedna ukrućenja, ali blizu ležišta, tamo su napadni momenti i sile N_x neznatne, dok transversalna sila, a prema tome i tangencijalna sila T, imaju najveću vrednost. Slično gornjem, možemo smatrati da se u granicama između dva susedna ukrućenja transversalna sila i sila T menjaju neznatno, tj. ne zavise od x. Što se tiče zavisnosti od y, i za tu se zna da se tangencijalni napon u poprečnom preseku rebra znatno i prekidno menja samo pri prelazu sa rebra na pojaseve, dok između njih neprekidno i neznatno opada od neutralne ose prema pojasevima. Za tako grub račun, kao što je određivanje sile ispupčenja, može se smatrati da je sila T stalna na celokupnoj visini rebra, tj. ne zavisi ni od y. Tada je problem sveden na proučavanje mogućnosti izvijanja poduprte ploče opterećene tangencijalnim silama T iste veličine u svim tačkama (sl. 107).

Prelazeći na rešavanje problema za prvi*) od navedenih slučajeva, uvrstimo izraz (353) u diferencijalnu jednačinu (348). Kad zamenimo u njoj, kao i pre, ζ izrazom (321), biće

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=$$

$$=\frac{p}{D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 C_{mn}\left(1-\frac{y}{c}\right)\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b},$$

odnosno

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2 \sin\frac{n\pi y}{b}=\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn}\left(1-\frac{y}{c}\right)\sin\frac{n\pi y}{b}.$$

Izmnožimo obe strane ove jednakosti sa $\sin k\pi y/b$ i integralimo po y od 0 do b. Uzevši u obzir da je

$$\int_0^b \sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}=\begin{cases} 0 \text{ za } k\neq n, \\ \frac{b}{2} \text{ za } k=0, \end{cases}$$

$$\int_0^b y\sin\frac{n\pi y}{b}\sin\frac{k\pi y}{b}\,dy=\begin{cases} -\frac{4b^2}{\pi^2}\frac{kn}{(k^2-n^2)^2} \text{ za } k\pm n \text{ neparno,} \\ =0 \text{ za } k\pm n \text{ parno, ali } k\neq n, \\ \frac{b^2}{4} \text{ za } k=0, \end{cases}$$

*) Rešenje pripada *I. Bubnov*-u, 1914.

nalazimo

$$C_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right]^2=\frac{p}{D}\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left\{C_{mn}\left(1-\frac{b}{2c}\right)+\right.$$

$$\left.+\frac{8}{\pi^2}\frac{b}{c}\sum_{k=1}^{\infty}C_{mk}\frac{nk}{(n^2-k^2)^2}\cdot\right. \qquad (354)$$

gde k dobiva samo one vrednosti za koje je $n\pm k$ neparno. Sistem homogenih linearnih jednačina (354) može imati rešenje različito od trivijalnog (koje ne bi odgovaralo mogućnosti ispupčenja), ako je njegova eliminanta jednaka nuli. Taj uslov dovodi do jednačine iz koje nalazimo beskonačni broj kritičnih vrednosti za p; najmanja od njih će faktički izazvati ispupčenje ploče.

Pre no što pređemo na rešavanje tog sistema, možemo svesti zadatak na jednostavniji, ako uočimo da nisu sve nepoznate ušle u svaku jednačinu. Naime, sistem se raspada u beskonačni broj sistema, od kojih svaki odgovara određenoj vrednosti indeksa m. Eliminanta svakog od tih sistema, izjednačena sa nulom, odrediće niz vrednosti za p; najmanji od najmanjih korena svakog od tih sistema je ona kritična sila koju tražimo.

Za neku zadatu vrednost c i odnosa a/b ove jednačine se rešavaju aproksimacijama. Pokažimo, kako se to radi na primeru, uzevši za to najjednostavniji slučaj, kad je $a=b$ i $c={}^1/_2\,a$, tj. kada je greda simetrična, a rastojanje između ukrućenja jednako njenoj visini.

U tom slučaju sistem (354) dobiva oblik

$$\frac{\pi^4}{16}\frac{D}{pa^2}\left(m+\frac{n^2}{m}\right)^2C_{mn}=\sum_{k=1}^{\infty}C_{mk}\frac{nk}{(n^2-k^2)^2},$$

tako da, obeleživši

$$K=\frac{\pi^4}{16}\frac{D}{pa^2},$$

imamo eliminantu u obliku

$$\begin{vmatrix} \left(m+\frac{1}{m}\right)^2K & \frac{2}{9} & 0 & \frac{4}{225} & \cdot\cdot \\ \frac{2}{9} & \left(m+\frac{4}{m}\right)^2K & \frac{6}{25} & 0 & \cdot\cdot \\ 0 & \frac{6}{25} & \left(m+\frac{9}{m}\right)^2K & \frac{12}{49} & \cdot\cdot \\ \frac{4}{225} & 0 & \frac{12}{49} & \left(m+\frac{16}{m}\right)^2K & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\cdot \end{vmatrix}=0.$$

Potražimo, prvo, najveći koren ove jednačine za $m=1$. Kao prvu aproksimaciju zadržimo u eliminanti po dve vrste i dve kolone. Tada dobivamo za K kvadratnu jednačinu

$$(1+1)^2(1+4)^2K^2=\left(\frac{2}{9}\right)^2;\quad K'=\frac{1}{45}.$$

Uzevši po tri vrste i kolone, našli bismo jednačinu trećeg stepena

$$(1+1)^2\cdot(1+4)^2\cdot(1+9)^2K^3=\left[(1+9)^2\cdot\left(\frac{2}{9}\right)^2+(1+1)^2\cdot\left(\frac{6}{25}\right)^2\right]K^2,$$

čiji se najveći koren

$$K''=\frac{1{,}023}{45}$$

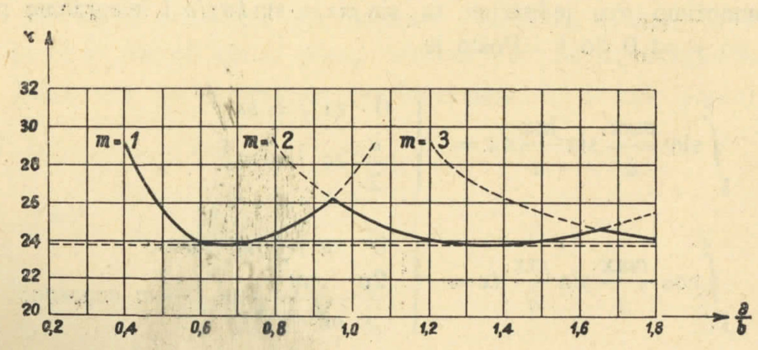
razlikuje od prethodnog za svega 3%.

Za $m=2$, na sličan način našli bismo

$$K'=\frac{1}{45};\quad K''=\frac{1{,}083}{45};\quad K'''=\frac{1{,}087}{45}.$$

Na sl. 108 je prikazana grafički zavisnost koeficijenta k u obrascu

$$p_{cr}=k\pi^2\frac{D}{b^2} \qquad (355)$$



Sl. 108

od odnosa a/b za $c={}^1/_2b$, a za različite vrednosti m. Dijagram je sličan onom na sl. 104, a iz njega se vidi da je, na pr., za $a=b$ merodavna eliminanta sa $m=2$, čiji smo koren malo pre našli, dakle ispupčenje u dva polutalasa u pravcu x.

Najmanje vrednosti koeficijenta k u obrascu (355) su date u donjoj tablici za različite odnose strana ploče i različite vrednosti c/b.

Kod drugog od postavljena dva problema diferencijalna jednačina (348) dobiva oblik

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = 2 \frac{T}{D} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x \, \partial y} ;$$

c/b \ a/b	0,4	0,5	0,6	0,667	0,75	0,8	0,9	1,0	1,5	2,0	3,0
0,50	29,1	25,6	24,1	23,9	24,1	24,4	25,6	25,6	24,1	23,9	24,1
0,75	18,7	·	12,9	·	11,5	11,2	·	11,0	11,5	11,0	11,0
1,00	15,1	·	9,7	·	8,4	8,1	·	8,7	8,4	7,8	7,8
1,25	13,3	·	8,3	·	7,1	6,9	·	6,6	7,1	6,6	6,6
1,50	10,8	·	7,1	·	6,1	6,0	·	5.8	6,1	5,8	5.7

$m = 1$ $\qquad$ $m = 2$ $\qquad$ $m = 3$

i, kad uvrstimo u nju izraz (321), nalazimo

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} =$$

$$= 2 \frac{T}{D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} ,$$

Pomnožimo ovu jednačinu sa $\sin j\pi x/a \cdot \sin k\pi y/b$ i integralimo po x od 0 do a i po y od 0 do b. Pošto je

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{j\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{za } j \neq m , \\ \frac{a}{2} & \text{za } j = m , \end{cases}$$

$$\int_0^a \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{j\pi x}{a} dx = \begin{cases} 0 & \text{za } j \pm m \text{ parno,} \\ \frac{2a}{\pi} \frac{m}{m^2 - j^2} & \text{za } j \pm m \text{ neparno,} \end{cases}$$

i

$$\int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{za } k \neq n , \\ \frac{b}{2} & \text{za } k = n , \end{cases}$$

$$\int_0^b \cos \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{k\pi y}{b} dy = \begin{cases} 0 & \text{za } k \pm n \text{ parno,} \\ \frac{2b}{\pi} \frac{n}{n^2 - k^2} & \text{za } k \pm n \text{ neparno,} \end{cases}$$

nalazimo

$$C_{mn} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right]^2 =$$

$$= \frac{32 \, T}{ab \, D} m \, n \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk} \frac{jk}{(m^2 - j^2)(n^2 - k^2)} ;$$

ili, kad uvedemo oznaku

$$K = - \frac{\pi^4}{32} \frac{D}{T a b} ,$$

imamo

$$C_{mn} \left[\frac{b}{a} m^2 + \frac{a}{b} n^2 \right]^2 K + m n \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{jk} \frac{jk}{(m^2 - j^2)(n^2 - k^2)} = 0 .$$

U ovoj jednačini, kao što smo malo pre videli, brojevi j i k imaju samo one vrednosti, koje čine $j + m$ i $k + n$ neparnim brojem. To znači da, ako su oba broja m i n parni, moraju se oba broja j i k uzeti neparna, a ako su m i n oba neparna, moraju j i k biti oba parna. Na taj način, za $m + n$ parno biće i $j + k$ parno. Slično tome, ako je $m + n$ neparno, biće i $j + k$ neparno. Sistem se, dakle, raspada u dva nezavisna sistema: jedan sa indeksima čiji je zbir paran, i drugi, gde je zbir indeksa neparan. Eliminante tih sistema odrediće niz vrednosti za K, odnosno za tangencijalnu silu T, koje odgovaraju ispupčenju ploče. Najmanja od tih sila, odnosno najveći koren K je za nas merodavan.

Niže je pokazan način izračunavanja tog korena za prvi od ova dva sistema. Isti način primenjuje se, naravno, i na drugi sistem. Rezultati računa pokazuju da je najveći koren prvog sistema veći od najvećeg korena drugog.

Eliminanta prvog sistema (sa indeksima, čiji je zbir paran) ima oblik

$$\begin{array}{ccccc} 1,2 & 2,2 & 1,3 & 3,1 & 3,3 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} K\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 & \frac{4}{9} & 0 & 0 & 0 & . \\ \frac{4}{9} & K4^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{36}{25} & \\ 0 & -\frac{4}{5} & K\left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 & 0 & 0 & . \\ 0 & -\frac{4}{5} & 0 & K\left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 & 0 & . \\ 0 & \frac{36}{25} & 0 & 0 & K9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 & . \\ . & & . & & . & \end{vmatrix} = 0 .$$

Ova jednačina se rešava aproksimacijama, kao i u prethodnom zadatku. Ako zadržimo, na pr., samo dve kolone i dve vrste u eliminanti, biće

$$9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^4 K^2 = 1.$$

Kad zadržimo pet kolona i pet vrsta, nalazimo

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \begin{vmatrix} 4^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{36}{25} \\ -\frac{4}{5} & \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 K & 0 & 0 \\ -\frac{4}{5} & 0 & \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K & 0 \\ \frac{36}{25} & 0 & 0 & 9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{4}{9} \begin{vmatrix} \frac{4}{9} & -\frac{4}{5} & -\frac{4}{5} & \frac{36}{25} \\ 0 & \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 K & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \end{vmatrix}$$

ili

$$\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \Bigg\{ -\left(\frac{36}{25}\right)^2 \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K^2 +$$

$$+9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \left[4^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K^3 - \right.$$

$$\left. -\left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 K - \left(\frac{4}{5}\right)^2 \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K \right] \Bigg\} =$$

$$= \left(\frac{4}{9}\right)^2 9^2 \left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2 \left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 K^3;$$

i odavde je

$$9^2\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^4 K^2 = 1 + \frac{81}{625} + \frac{81}{25}\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2 \left[\frac{1}{\left(\frac{b}{a}+9\frac{a}{b}\right)^2} + \frac{1}{\left(9\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)^2} \right].$$

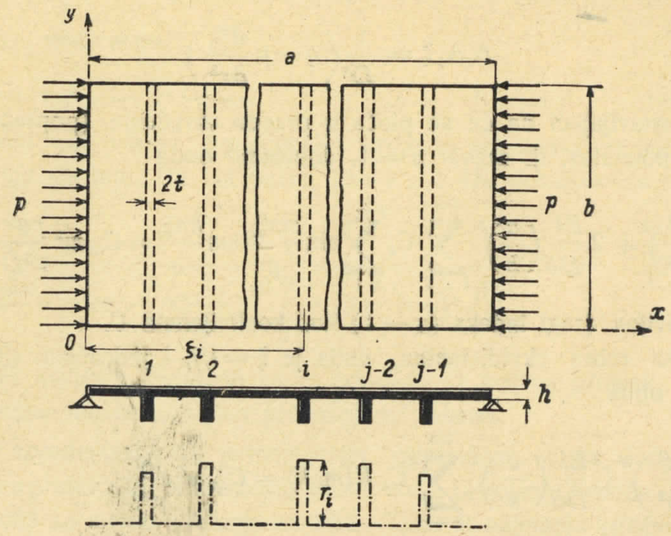
Na takav način sračunate (sa šest kolona i šest vrsta) vrednosti koeficijenta k u obrascu

$$T_{cr} = k\,\pi^2 \frac{D}{b^2}$$

date su niže u tablici*)

$a/b =$	1,0	1,2	1,4	1,5	1,6	1,8	2,0	2,5	3,0
$k =$	9,4	8,0	7,3	7,1	7,0	6,8	6,6	6,3	6,1

59. Ukrućenja pritisnute ploče. — Pri proučavanju mogućnosti ispupčenja pritisnute ploče pretpostavljali smo dosad da se ona oslanja na potpuno krut okvir. Slično problemu izvijanja grede na elastičnim ležištima, proučenom u **t. 52**, često se postavlja pitanje takva dimenzionisanja ukrućenja ploče (sl. 109), da ta ukrućenja, iako elastična, odigraju istu ulogu, kao i da su potpuno kruta.



Sl. 109

To znači da pri ispupčenju ploče, linije njena dodira sa ukrućenjima treba da ostanu prave, tj. da budu „čvorne linije" elastične površine ploče.

Obeležimo sa r_i pritisak što ga vrši ploča na jedinicu dodirne površine ukrućenja broj i na otstojanju ξ_i od kraja ukrućenja. Ako je $2t$ širina te dodirne površine, a ζ_i ugib ploče u toj tački, iz diferencijalne jednačine elastične linije ukrućenja nalazimo dvostrukim diferencijalenjem

$$EI\frac{d^4\zeta_i}{dy^4} = -\frac{d^2M_i}{dy^2} = -2\,t\,r_i. \qquad (355)$$

*) Prema *S. Timoshenko*-vim podacima, koji je dao rešenje ovog problema 1915.

Isto toliki je i pritisak ukrućejna na ploču, prema tome pritisak koji vrše *sva* ukrućenja u nekoj tački ploče sa koordinatama x, y može se pretstaviti trigonometriskim redom

$$q = \frac{4}{\pi} \sum_{i=1}^{j-1} r_i \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin \frac{k\pi t}{a} \sin \frac{k\pi \xi_i}{a} \sin \frac{k\pi x}{a}. \tag{356}$$

Kad zamenimo u ovoj jednačini r_i njegovim izrazom iz (355), uvedemo mesto ζ izraz (321) i, uzimajući u obzir da je širina ukrućenja mala u poređenju sa dužinom ploče, zamenimo $\sin k\pi t/a$ sa $k\pi t/a$, nalazimo

$$q = -2\pi^4 \frac{EI}{ab^4} \sum_{i=1}^{j-1} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} C_{kn} n^4 \sin \frac{k\pi\xi_i}{a} \sin \frac{m\pi\xi_i}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Ovo opterećenje treba sad uvrstiti u diferencijalnu jednačinu elastične površine ploče

$$\Delta_1 \Delta_1 \zeta = \frac{1}{D}\left(q - p \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}\right).$$

Pretpostavljajući da će se ploča u pravcu ukrućenja (poprečnom) ispupčiti u jedan polutalas, tj. uzevši $n = 1$, dobićemo onda

$$C_m \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + 2 \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k \sum_{i=1}^{j-1} \sin \frac{m\pi\xi_i}{a} \sin \frac{k\pi\xi_i}{a} = C_m m^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D}, \text{*)} \tag{357}$$

gde je izostavljen drugi indeks ($n = 1$) kod koeficijenata C.

Ako su rebra ekvidistantna, onda je $\xi = i/j$, i jednačina (357) dobiva jednostavniji oblik

$$C_m \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 \sum_{k=1}^{\infty} C_k K(m, k) = C_m m^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D}, \tag{358}$$

gde je, slično predašnjem, uvedena oznaka

$$K(m,k) = 2 \sum_{i=1}^{j-1} \sin \frac{m\pi i}{a} \sin \frac{k\pi i}{a}.$$

Koristeći rezultate za vrednost koeficijenta $K(m,k)$, dobivene u **t. 48,** dolazimo na isti način do:

a) nezavisnih jednačina oblika

$$\left(s^2 j^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 = s^2 j^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D}, \tag{359}$$

*) Ovu jednačinu izveo je (na drugi način) *S. Timoshenko* 1915.

gde je $s = 1, 2, 3, \ldots$, a koje određuju kritične sile dovoljne za ispupčenje ploče u broj deljivi sa j polutalasa u pravcu ose x, kad ukrućenja ostaju prava, kao da su potpuno kruta. Ovaj obrazac se, naravno poklapa sa ranije nađenim izrazom u **t. 57** za ploču poduprtu potpuno krutim okvirom.

b) niza sistema jednačina oblika

$$C_m \left(m^2 + \frac{a^2}{b^2}\right)^2 + \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 j\, S_m = C_m m^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D},$$

$$\left.\begin{aligned}
&C_{2j-m}\left[(2j-m)^2 + \frac{a^2}{b^2}\right]^2 - \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 j\, S_m = C_{2j-m}(2j-m)^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D},\\
&C_{2j+m}\left[(2j+m)^2 + \frac{a^2}{b^2}\right]^2 + \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 j\, S_m = C_{2j+m}(2j+m)^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D},\\
&C_{4j-m}\left[(4j-m)^2 + \frac{a^2}{b^2}\right]^2 - \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 j\, S_m = C_{4j-m}(4j-m)^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{360}$$

gde je, kao i pre, obeleženo

$$S_m = C_m + C_{2j+m} + C_{4j+m} + \cdots - C_{2j-m} - C_{4j-m} - \cdots \tag{361}$$

Ovi sistemi odgovaraju ispupčenju u brojeve polutalasa nedeljive sa j, kada se ukrućenja savijaju. Na isti način, kao i u **t. 48,** dolazimo do eliminante

$$1 + \frac{EI}{Db}\left(\frac{a}{b}\right)^3 j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[(2nj+m)^2 + \frac{a^2}{b^2}\right]^2 - (2nj+m)^2 \frac{pa^2}{\pi^2 D}} = 0 \tag{362}$$

koja određuje niz kritičnih vrednosti za p, odnosno za kritični pritisak. Red koji ulazi u tu jednačinu možemo, slično predašnjem, sabrati.

Da bi ta izvođenja ispala jednostavnija, ograničimo se na slučajeve koji su jedino mogući u praktičnim primenama, naime, da je rastojanje između ukrućenja, koje ćemo obeležiti sa $c = a/j$, manje od $b\sqrt{2}$. Tada za najmanju kritičnu silu kod potpuno krutih ukrućenja u obrascu (359) treba uzeti $s = 1$. Ako postavimo uslov da kritična sila za ispupčenje sa elastičnim ukrućenjima treba da bude bar isto tolika, moramo u jednačinu (362) uvesti

$$\frac{pa^2}{\pi^2 D} = \left[1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right]^2 j^2.$$

Tada će naš red biti

$$\frac{1}{(2j)^4} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\left[\left(n + \frac{m}{2j}\right)^2 + \frac{1}{4}\frac{c^2}{b^2}\right]^2 - \frac{1}{4}\left(n + \frac{m}{2j}\right)^2 \left(1 + \frac{c^2}{b^2}\right)^2}.$$

Opšti član reda razlažemo na elementarne razlomke i dobivamo onda njegov zbir u obliku

$$\frac{4}{(2j)^4\left(1-\frac{c^4}{b^4}\right)}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{n+\frac{m}{2j}-\frac{1}{2}}-\frac{1}{n+\frac{m}{2j}+\frac{1}{2}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{b^2}{c^2}\left(\frac{1}{n+\frac{m}{2j}-\frac{1}{2}\frac{c^2}{b^2}}-\frac{1}{n+\frac{m}{2j}+\frac{1}{2}\frac{c^2}{b^2}}\right)\right\}=$$

$$=\frac{\pi}{4j^4\left(1-\frac{c^4}{b^4}\right)}\left\{\operatorname{ctg}\left(\frac{m}{j}-1\right)\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg}\left(\frac{m}{j}+1\right)\frac{\pi}{2}+\right.$$

$$\left.+\frac{b^2}{c^2}\left[\operatorname{ctg}\left(\frac{m}{j}-\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{\pi}{2}-\operatorname{ctg}\left(\frac{m}{j}+\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{\pi}{2}\right]\right\},$$

ili, uzevši u obzir da je

$$\operatorname{ctg}\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=0$$

i

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)-\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=$$

$$=\frac{\cos(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}=$$

$$=\frac{(\sin 2\alpha+\sin 2\beta)-(\sin 2\alpha-\sin 2\beta)}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta}=\frac{2\sin 2\beta}{\cos 2\alpha-\cos 2\beta},$$

u obliku

$$\frac{\pi}{2j^4\left(1-\frac{c^4}{b^4}\right)}\,\frac{\sin\pi\frac{c^2}{b^2}}{\left(\cos\pi\frac{m}{j}-\cos\pi\frac{c^2}{b^2}\right)\frac{c^2}{b^2}}.$$

Iz jednačine (362) nalazimo onda za najmanju vrednost momenta inercije površine preseka jednog ukrućenja uslov

$$\frac{EI}{Db}\geqslant-\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{c^4}{b^4}\right)\frac{\cos\pi\frac{m}{j}-\cos\pi\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c}{b}\sin\pi\frac{c^2}{b^2}},$$

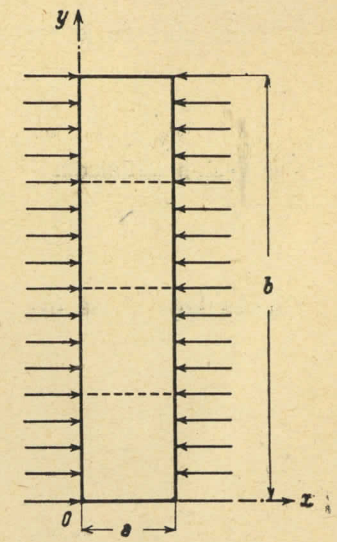
gde za m treba uzeti najmanji nedeljivi sa j ceo broj, kojem odgovara najveća vrednost tog izraza. To je, očigledno, $m=j\pm 1$ i tada je

$$\frac{EI}{Db}\geqslant\frac{2}{\pi}\left(1-\frac{c^4}{b^4}\right)\frac{\cos\frac{\pi}{j}-\cos\pi\frac{c^2}{b^2}}{\frac{c}{b}\sin\pi\frac{c^2}{b^2}}.\tag{363}$$

U dosadašnjem izlaganju bilo je pretpostavljeno da su ukrućenja upravna na pravcu pritiska, tj. *poprečna*. Ako su ona postavljena *u pravcu pritiska*, problem se rešava na potpuno sličan način (sl. 110).

U tom slučaju je sasvim prirodno pretpostaviti da će se ploča ispupčiti u uzdužnom pravcu u jedan polutalas. Tada, za slučaj ekvidistantnih ukrućenja dolazimo mesto do jednačine (358), do njoj slične jednačine

$$C_n\left(1+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2+\frac{EI}{Db}\sum_{k=1}^{\infty}C_k K(n,k)=C_n\frac{pa^2}{\pi^2 D},$$



Sl. 110

ili do: a) niza nezavisnih jednačina koje, slično jednačinama (359), određuju kritične sile potrebne za ispupčenje ploče u *poprečnom* pravcu u deljive sa j brojeve polutalasa

$$\left(1+n^2\frac{a^2}{b^2}\right)^2=\frac{pa^2}{\pi^2 D},\tag{364}$$

i b) niza sistema jednačina, sličnih (360), koje odgovaraju ispupčenju u brojeve nedeljive sa j polutalasa u poprečnom pravcu

$$\left.\begin{array}{l}C_n\left(1+n^2\frac{a^2}{b}\right)^2+\frac{EI}{Db}jS_n=c_n\frac{pa^2}{\pi^2 D},\\ C_{2j-n}\left[1+(2j-n)^2\frac{a^2}{b^2}\right]^2+\frac{EI}{Db}jS_n=C_{2j-n}\frac{pa^2}{\pi^2 D},\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{array}\right\}\tag{365}$$

a čija eliminanta određuje kritične sile potrebne za takvo ispupčenje

$$j\frac{EI}{Db}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\left[1+(2ij+n)^2\frac{a^2}{b^2}\right]^2-\frac{pa^2}{\pi^2 D}}+1=0.\tag{366}$$

I ovde se možemo ograničiti na praktički važan slučaj $aj/b < \sqrt{2}$, kada je najmanja kritična sila potrebna sa ispupčenje ploče na potpuno krutom okviru određena jednačinom

$$\frac{p_{cr}\,a^2}{\pi^2 D} = \left(1 + j^2 \frac{a^2}{b^2}\right)^2.$$

Kad postavimo uslov da toj sili bude jednaka najmanja cd sila datih jednačinom (366) i na isti način, kao i malo pre, saberemo red, dobićemo

$$\frac{EI}{Db} \geqslant \frac{4}{\pi}\,\frac{a}{b}\left(1 + j^2 \frac{a^2}{b^2}\right)\sqrt{2 + j^2 \frac{a^2}{b^2}}\,. \tag{367}$$

U ovom obrascu je zanemaren $\cos \pi/j$ prema

$$\mathrm{Coh}\,\frac{\pi\, b}{ja}\sqrt{2 + j^2 \frac{a^2}{b^2}}$$

i zamenjen jedinicom

$$\mathrm{Tgh}\,\frac{\pi\, b}{ja}\sqrt{2 + j^2 \frac{a^2}{b^2}}\,.$$

Greška koju unose ove zamene manja je od 2,5 %.