

MF2154

FRAN BOŠNJAKOVIĆ

# NAUKA O TOPLINI

DIO PRVI

SA ZBIRKOM PRIMJERA I TABELOM TE SA 6 DIJAGRAMAMA

Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet  
MATEMATIČKI FAKULTET  
BIBLIOTEKA  
Broj 27442 Datum 27. 10. 1992.

IZDANJE STRUČNE SEKCije STUDENATA TEHNIČKOG FAKULTETA

Z A G R E B  
1 9 4 7

Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet  
MATEMATIČKI FAKULTET  
BIBLIOTEKA

Broj \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_

## P R E D G O V O R

Hrvatsko dopunjeno izdanje ove knjige namijenjeno je potrebama naših studenata i inženjera, koji se susreću s toplinskim problemima. Način izlaganja i zbirka primjera oslanjaju se na dugogodišnje iskustvo, steceno djelovanjem na više tehničkih fakulteta.

U teškim poratnim prilikama prevladavat će u djelovanju toplinskog inženjera dvije dominante. To su ekonomija energijom i ekonomija s građevnim materijalom. Ispravno ocijeniti i uspješno provoditi prikladne tehničke mјere moguće je samo s dobrim poznavanjem osnovnih zakona termodinamike i prelaza topline. Zato se u prvom svesku baš ovim poglavljima ustupilo najviše mјesta. U drugom svesku obradit će se specijalniji problemi, kao što su kapljeviti i vlažni uzduh, binarne smjese te kemijsko-toplinski i još neki drugi problemi.

U našoj se industriji osim toga osjeća potreba za neku vrstu simbioze strojarskog inženjera i inženjera kemičara. Pri tom ne mislimo na kemičara koji bi znao rukovoditi sa strojarskim postrojenjima, već na inženjera, koji bi bio dovoljno izobrazen kako u kemijskim procesima tako i u osnovnim strojarskim naukama, da može s razumijevanjem pristupiti projektiranju i gradnji toliko važnih kemijskih aparatura, peći i uredaja, te svladavanju njihova pogona. Od osnovnih strojarskih nauka u tu su svrhu pored poznавanja materijala najvažnije nauka o toplini uključivši prelaz topline, nauka o strujanju a donekle i nauka o čvrstoći. Samo poznavanjem ovih disciplina moći će se projektant kemijskih aparata oslobođiti tjeskobnog tapkanja u neizvjesnosti ili pak slijepog oponašanja zastarjelih izvedbi.

Ako ova knjiga bar nešto pridonese svladavanju spomenutih problema, a time podizanju naše toliko postradale zemlje, bit će njenam namjena ispunjena.

Savjesnu pomoć pri uređivanju ovog izdanja, a naročito kod izradbe mnogobrojnih tabela i dijagrama, kao i kod čitanja korektura pružili su piscu kolege i asistenti M. Viličić i V. Brlek. Tehničku stranu u vezi s izdavanjem vodio je požrtvovno cand. ing. Z. Rister, dok je zasluga Stručne sekcije NSO Tehničkog fakulteta, da je pristupila izdavanju ove knjige. Tiskara Nakladnog zavoda Hrvatske je sa svojim slagarima uznastojala da knjizi da doličnu opremu. Pisac se svim tim suradnicima najtoplje zahvaljuje.

U Zagrebu, siječnja 1947.

PISAC

## S A D R Ž A J :

	Strana
Oznake . . . . .	IX
Uvod . . . . .	1
Toplinsko stanje 1. — Mjerjenje temperature 2. — Toplinska ravnoteža 4.	1
Prvi glavni stavak . . . . .	5
Preaz topline 5. — Zakon uzdržanja energije 6. — Pokusi Joule-a 5. — Unutarnja energija 8. — Prvi glavni stavak 10. — Agregatna stanja 11. — Homogene tvari 12. — Pritisak 13. — Jednadžba stanja 14. — Kalorička jednadžba stanja 15. — Rad 16. — PV-dijagram 18.	1
Odredivanje jednadžbe stanja . . . . .	20
Jednadžba stanja idealnih plinova 22. — Avogadro-v zakon 23. — Odredivanje molne težine 24. — Opća plinska konstanta 25. — Normni kubni metar 25.	20
Unutarnja energija . . . . .	26
Pokusi Gay-Lussac-a 26. — Specifična toplina 28. — Unutarnja energija 31. — Molarna specifična toplina 34. — Mješavine plinova 38. — Dalton-ov zakon 39.	26
Posebne promjene stanja idealnih plinova . . . . .	42
Promjena stanja kod $V=\text{konst}$ (izohora) 43. — Promjena stanja kod $P=\text{konst}$ (izobara) 43. — Promjena stanja kod $t=\text{konst}$ (izoterma) 45. — Promjena stanja kod $Q=0$ (adijabata) 46. — Politrope 47.	42
Kružni procesi . . . . .	51
Toplinski spremici 53. — Carnot-ov proces 54. — Ogrjevni spremnik i rashladni spremnik 54. — Proizvodnja topline iz rada 56.	51
Drugi glavni stavak . . . . .	57
Povratni procesi 58. — Nepovratni procesi 59. — Nepovratnost i dobivanje rada 60. — Analitička formulacija drugog glavnog stavka 63. — Carnot-ova temperaturna funkcija 67. — Apsolutna temperatura 69. — Entropija 71. — Entropija i nepovratnost 72. — Nepovratnost i dobivanje rada 74. — Općenito svojstvo entropije 77. — Opći analitički izraz drugog glavnog stavka 79. — Maksimalni rad 81. — Proučavanje entropije 84. — Entropija bilo kakvih tvari 86.	57
Tipični povratni procesi . . . . .	88
Zaliha stlačenog uzduha 88. — Spremnik s podtlakom 90. — Proces među stalnim pritiscima 91. — Rad iz vrućih plinova 93.	88

	Strana
<b>Tipični nepovratni procesi</b>	94
Prigušivanje 94. — Entalpija ili sadržaj topline 96. — Primjena entalpije 99. — Temperatura na kraju ekspanzije i u ispušnoj cijevi 100. — Punjenje spremnika 102. — Miješanje plinova: a) Miješanje kod $V=konst$ 104. — b) Miješanje plinskih struja 106. — Nepovratnost miješanja 107. — Gubici uslijed nepovratnosti 110.	
<b>Termodinamička temperatura</b>	113
<b>Bit entropije</b>	117
Makrostanje i mikrostanje 117. — Statistička težina ili termodinamička vjerojatnost stanja 119. — Entropija i termodinamička vjerojatnost 121. — Kolebanja oko stanja ravnoteže 123.	
<b>Isparivanje i ukapljivanje</b>	126
Linija napetosti 127. — Granične linije 127. — Pregrijana para 129. — Kritičko stanje 130. — Taljenje (kopnenje) i sublimacija 131. — Pritisak pare u neutralnom plinu 134. — Razmjena topline kod isparivanja 134. — Sadržaj pare 137. — Obujam mokre pare 138. — Kaloričke veličine mokre pare 138. — Entalpija mokre pare 140. — Pokusi Regnault-a 140. — Razmjena topline kod topljenja i sublimacije 142. — Clapeyron-Clausius-ova jednadžba 142. — Linija stalnog sadržaja x 144.	
<b>Naročite promjene stanja pare</b>	145
Izobara, $p=konst$ . 145. — Izohora $v=konst$ . 146. — Adijabatska (izentropijska) promjena stanja $dQ=0$ 147.	
<b>Pregrijana para</b>	149
Jednadžba stanja van der Waals-a 150. — Kontinuiranost prelaza pare u kapljevinu 153. — Položaj graničnih kružnica 154. — Zakon korespondentnih stanja 155. — Jednadžba Callendara i Mollier-a 156.	
<b>Procesi parnog stroja</b>	161
Temperatura dovođenja topline 161. — Carnot-ov proces s idealnim plinom 162. — Proses vrućeg užduha 163. — Prosesi parnog stroja 165. — Pregrijavanje pare 169. — Regenerativno predgrijavanje vode 170. — Tok proračuna 172. — Is-dijagram Mollier-a 173. — Tehnička radna sposobnost 176.	
<b>Problemi parnog stroja</b>	180
Gubici na stijenkama 181. — Štetni prostor 182. — Veličina gubitaka na stijenkama 183. — Prednost pregrijane pare 184. — dvostepena ekspanzija (kompaundni stroj) 185. — Nepotpuna ekspanzija 186. — Gubici prigušivanja 187. — Nepotpuna kompresija 189. — Ukupni gubitak 189.	
<b>Strujanje</b>	191
Izbor presjeka strujanja 192. — Jednadžba neprekinutosti (kontinuiteta) 193. — Razmjena energije 193. — Toplina trenja 195. — Strujanje kroz mlaznice 196. — Oblik mlaznice 202. — Koeficijent istjecanja 210. — Temperatura u struji 210. — Brzina zvuka 214.	
<b>O pojavama miješanja</b>	218
Stupanj nepovratnosti 221. — Miješanje s dovođenjem topline 223. — Diferencijalno miješanje 224. — Napajanje kotla 225. — Injektor 226.	

	Strana
<b>Rashladni procesi</b>	230
Rashladni uždušni stroj 235. — Parni rashladni stroj 238. — Regulacioni ventil 241. — Suho usisavanje 242. — Pothlađivanje 244. — Dvostepena kompresija 245. — Rashladni uredaj s mlaznim duvaljkama 246. — Proračun mlazne duvaljke 247. — Suhi led 251. — Dizalica topline 254.	
<b>Izgaranje i rasplinjivanje</b>	256
<b>Izgaranje</b>	256
Temperatura zapaljenja 257. — Stihometrički odnosi 258. — Kruta i kapljivita goriva 529. — Plinovita goriva 263. — Kontrola ložišta 264. — Upotrebljivost jednadžbi 269. — Toplinske pojave kod izgaranja 271. — Temperatura izgaranja 277. — Toplinski gubici kod izgaranja 279.	
<b>Rasplinjivanje</b>	279
Stupanj preobraženja 282. — Dodavanje vode 283. — Uždušni plin 285. — Miješani plin 286. — Voden plin 287. — Dodavanje kisika 288. — Pojava ugljikovodiča 288.	
<b>Procesi eksplozionih strojeva</b>	289
Otto-proces 291. — Diesel-ov proces 293.	
<b>Nauka o prelazu topline</b>	296
Područje primjene 296. — Osnovni oblici prelaza topline 297.	
<b>Izmjena topline vezana na tvar</b>	289
Stacionarno provođenje topline 298. — Toplinski otpor 299. — Uzastopni i usporedni smještaj vodiča 300. — Koeficijent prelaza topline 302. — Stijenka cijevi 303. — Općeniti slučaj 304.	
<b>Prelaz topline konvekcijom</b>	307
Pad pritiska 308. — Diferencijalne jednadžbe strujanja i prelaza topline 310.	
<b>Svojstva tvari</b>	313
Žilavost kapljevine 313. — Žilavost plinova 314. — Kinematska žilavost 316. — Provodjenje topline kod plinova 316. — Vodljivost kapljevina 319. — Provodjenje topline krutih tvari 319.	
<b>Tipične metode rješavanja</b>	320
Stacionarno strujanje kroz ravnu stijenku 320. — Vremenski promjenljive temperature 322. — Rvana stijenka 32. — Brzina ohlađivanja 326. — Grafičko određivanje temperaturnog toka 327.	
<b>Teorem sličnosti</b>	330
Diferencijalne jednadžbe prelaza topline u modelu 334. — Hidrodinamička sličnost 336. — Termička sličnost 340. — Nametnuto strujanje 343. — Kritična brzina 344. — Prelaz topline u cijevi 344. — Ekvivalentni promjer 345. — Poprečno nastrujane cijevi 346. — Snopovi cijevi 346. — Ravna uspravna stijena 346. — Slobodna konvekcija 347. — Promjena agregatnog stanja 348. — Filmska kondenzacija 348. — Kapljičasta kondenzacija 350. — Isparivanje 350.	
<b>Prelaz topline</b>	356
Prelaz topline kroz stijenku cijevi 359.	

	Strana
Tehnički izmjenjivači topline . . . . .	361
Istosmjerno strujanje 362. — Protusmjerno strujanje 365. — Unakrsno strujanje 366. — Jedinstveni proračun za sve izmjenjivače 369. — Iskoristivost topline 373. — Stupanj djelovanja izmjenjivača 375. — Najpovoljnija veličina površine 375. — Usporedba istosmjernog, unakrsnog i protusmjernog izmjenjivača 380. — Zaključne primjedbe tehničkim izmjenjivačima 381.	
Zračenje topline . . . . .	382
Temperaturno zračenje 383. — Refleksija, absorpcija, propusnost 384. — Crno tijelo 386. — Zračenje iz šupljine, Kirchhoff-ov stavak 387. — Stefan-Boltzmann-ov zakon 388. — Lambert-ov kosinusov zakon 389. — Zračenje u potku prostora 389. — Razdioba energije u spektru 391. — Zračenje prirodnih tijela 394. — Izlučno (selektivno) zračenje plinova 399.	
Izmjena topline zračenjem . . . . .	402
Usporedne stijenke 402. — Obuhvaćeno tijelo 405. — Općeniti smještaj ploha 407. — Koeficijent prelaza topline zračenja 409.	

#### U posebnom prilogu:

Parne tabele, svojstva tvari i zbirka primjera s rješenjima;  
is-dijagram za vodenu paru;  
is-dijagram za amonijak NH<sub>3</sub>;  
is-dijagram za ugljični dvokis CO<sub>2</sub>;  
3 lista sa 6 Φ-dijagraama za proračun izmjenjivača topline.

$$A = \frac{1}{427} \text{ kcal/mkg}$$

$$C, C_p, C_v \text{ kcal/Mol}^{\circ}\text{C}$$

$$c, c_p, c_v \text{ kcal/kg}^{\circ}\text{C}$$

$$[C_p]_{t_1}^{t_2}, [C_v]_{t_1}^{t_2} \text{ kcal/Mol}^{\circ}\text{C}$$

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{AL}$$

$$\eta = \frac{AL}{Q}$$

$$F \text{ m}^2$$

$$f = \frac{F}{G} \text{ m}^2 \text{ sek/kg}$$

$$\varphi$$

$$G \text{ kg ili kg/sek}$$

$$G \text{ (broj)}$$

$$g \text{ m/sek}^2$$

$$g \text{ kg/kg}$$

$$\gamma \text{ kg/m}^3$$

$$h \text{ m}$$

$$I \text{ kcal}$$

$$i \text{ kcal/kg}$$

$$K$$

$$\alpha = \frac{c_p}{c_v}$$

$$L \text{ mkg ili mkg/kg}$$

$$M \text{ Mol}$$

$$m \text{ kg}$$

$$m$$

$$n$$

## Oznake

(Alfabetski poredane)

### Opće oznake

mehanički ekvivalent topline

molarne specifične topline

specifične topline za 1 kg

srednje specifične topline između temperaturu t<sub>1</sub> i t<sub>2</sub>.

rashladni množilac

toplinski stupanj djelovanja

površina; presjek

specifični presjek strujanja

koeficijent brzine; upadni ugao

količina tvari

statistička težina ili toplinska vjerojatnost nekog stanja

ubrzanje zemljine teže

težinski udio nekog sudionika u smjesi

specifična težina

visina nad zemljom

sadržaj topline; entalpija

sadržaj topline jedinice težine

oznaka za stupanj Kelvin-a jednoznačan s abs (stupanj apsolutni)

eksponent adijabate

mehanički rad

broj molova

težina mola; također molarna težina (bez dimenzije)

eksponent istjecanja

eksponent politrope

$$Nm^3 = \frac{1}{224} Mol$$

$$nm^3 = \frac{1}{24} Mol$$

$$\nu = \frac{\Delta AL}{AL \cdot s}$$

$$P \text{ kg/m}^2, p \text{ kg cm}^2 (\text{at})$$

$$Q \text{ kcal}, iii \text{ kcal/kg}$$

$$R \text{ mka/kg K}$$

$$r \text{ kcal/kg}$$

$$r \text{ m}^3/\text{m}^3, \text{ Mol/Mol}$$

$$S \text{ kcal/K}$$

$$s \text{ kcal/kg K ili kcal/Mol K}$$

$$T \text{ K}$$

$$t \text{ } ^\circ C$$

$$\tau \text{ sek (h)}$$

$$U \text{ kcal}$$

$$u \text{ kcal/kg}$$

$$V \text{ m}^3$$

$$v \text{ m}^3/kg$$

$$v_r \text{ m}^3/\text{Mol}$$

$$w \text{ m/sec}$$

$$w_z \text{ m/sec}$$

$$x \text{ kg/kg}$$

normni kubni metar (mjera količine)

(mali) normni kubni metar (mjera količine)

stupanj gubitka neke nepovratnosti

pritisak

količina topline

plinska konstanta

toplina isparivanja

prostorni udio nekog sudionika u smjesi

entropija

entropija jedinice količine

apsolutna temperatura (u stupnjevima Kelvin a)

temperatura u stupnjevima Celsiusa

vrijeme

unutarnja energija

unutarnja energija jedinice količine

volumen, obujam

specifični volumen jedinice težine

specifični volumen za 1 Mol

brzina

brzina zvuka

sadržaj pare

$$M_C, M_{CO}, M_{NO}, \dots \text{ Mol/kg : } \frac{M_C}{M_O} \text{ Mol}$$

$$M_C, M_{CO}, M_{NO}, \dots \text{ Mol/kg : } \frac{M_C}{M_O} \text{ Mol}$$

$$N_2, CO_2, O_2, CO, \dots \text{ Mol/Mol}$$

$$\nu = \frac{M_{N_2}}{M_C} \text{ Mol/Mol}$$

$$O_m \text{ Mol/kg ; Mol/Mol ; Mol/Nm}^3$$

$$\nu = \frac{O_m}{M_O} \text{ Mol/Mol}$$

$$V_D, V_s \text{ Mol/kg ; Mol/Mol ; } \frac{Nm^3/kg}{Nm^3/Nm^3}$$

molarne količine pojedinih elemenata ili spojeva po jedinici goriva prije izgaranja

molarne količine pojedinih elemenata ili spojeva po jedinici goriva poslije izgaranja

prostorni udjeli pojedinih plinova u dimu, svedeni na jedinicu količine osušenog dima

dušična karakteristika goriva

karakteristika goriva

količina vlažnog, odnosno suhog dima po jedinici količine goriva

## Prelaz topline

koeficijent absorpcije (zračenje)

koeficijent temperaturne vodljivosti (vodenje topline)

koeficijent prelaza topline

konstanta zračenja

konstanta zračenja crne stijenke

brzina svjetlosti

promjer

koeficijent prozračnosti, dijatermanosti (zračenje)

debljina stijenke

energija zračenja

energija crnog zračenja

energija zračenja u smjeru normale

baza prirodnih logaritama

energija crnog selektivnog zračenja

emisioni koeficijent, emisioni broj, emisioni odnos; iskoristivost topline

omjer temperaturnih razlika

visina

Planck-ov elementarni kvant

dinamička žilavost

stupanj djelovanja izmjenjivača

temperaturna razlika

intenzitet zračenja

svjetlost površine

Boltzmann-ova konstanta

## Izgaranje i rasplinjivanje

$$\alpha \text{ kg/kg}$$

$$\alpha \text{ kg/kg}$$

$$(1-\alpha) \text{ kg/kg}$$

$$c, h, n, s, w \text{ kg/kg}$$

$$G \text{ kg ili Mol ili Nm}^3$$

$$\dot{q} \text{ kcal/kg ; kcal/Nm}^3$$

$$I_i \text{ Mol/kg ; Nm}^3/\text{kg ; Mol/Mol ; }$$

$$Nm^3/Nm^3$$

$$k = \frac{L}{F_{min}}$$

sadržaj pepela goriva

udio izgorenog ugljika pri izgaranju prema ukupnom ugljiku goriva

udio neizgorenog ugljika nakon izgaranja (čada, neizgoreno u pepelu) prema ukupnom ugljiku gorivog materijala

težinski udjeli pojedinih elemenata, odnosno vode u gorivu

količina goriva

ogrjevna moć

količina uzduha potrebna za izgaranje

koeficijent pretička uzduha

$$\Phi$$

$$h \text{ m}$$

$$h \text{ kcal/h}$$

$$\eta \text{ gase/cm sek ; }$$

$$kg sek/m^2$$

$$\eta$$

$$\eta^0$$

$$I \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$$

$$K \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$$

$$k \text{ kcal/K}$$

$k \text{ kcal}/\text{m}^2 \text{ h}^\circ\text{C}$	koeficijent prolaza topline
$l \text{ m}$	dužina
$ln$	prirodni logaritam
$log$	dekadski logaritam
$\lambda \text{ kcal}/\text{m} \text{ h}^\circ\text{C}$	koeficijent toplinske vodljivosti
$\lambda \text{ m}$	dužina vala nekog zračenja
$r \text{ cm}^2/\text{sek}; \text{ m}^2/\text{h}; \text{ m}^2/\text{sek}$	kinematska žilavost
$Q_h \text{ kcal}/\text{h}$	količina topline na sat
$q \text{ kcal}/\text{m}^2 \text{ h}$	gustoća toplinske struje; toplinski protok
$q_i \text{ kcal}/\text{m}^3 \text{ h}$	izdašnost nekog toplinskog izvora
$r$	koeficijent refleksije
$\gamma \text{ g/mse/cm}^3$	gustoća
$W_1 \text{ kcal}/\text{h}$	vodena vrijednost struje 1
$t \text{ sek}; \text{ h}$	vrijeme
$W_\lambda; W_a \dots \text{ h}^\circ\text{C}/\text{kcal}$	toplinski otpor provođenja topline, odnosno prelaza topline
$\omega \text{ m h}^\circ\text{C}/\text{kcal}$	specifični toplinski otpor, kod zračenja također faktor oblika (bez dimenzije)
$Eu = \frac{p - p_0}{\gamma w^2}$	Euler-ova značajka
$Gr = \frac{\gamma - \gamma_0}{\gamma} \cdot \frac{g l^3}{v^2}$	Grashoff-ova značajka
$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda}$	Nusselt-ova značajka
$Pe = \frac{wl}{a}$	Péclet-ova značajka
$Pr = \frac{\nu}{a}$	Prandtl-ova značajka
$Re = \frac{wl}{\nu}$	Reynolds-ova značajka
$St = \frac{a}{v}$	Stanton-ova značajka

## UVOD

### Toplinsko stanje

Toplinskim stanjem nekoga tijela zovemo sklop čitavoga niza njegovih fizikalnih svojstava, koja su posredno ili neposredno pristupačna mjerjenju. Ovakvo je svojstvo na pr. obujam jedinice težine tijela ili njegov jedinični volumen  $v \text{ m}^3/\text{kg}$ , pak pritisak  $P \text{ kg/m}^2$  t. j. sila kojom tijelo tlači na površinu od  $1 \text{ m}^2$  svoje opne, nadalje temperatura  $t^\circ\text{C}$  i mnoga druga. Svako je od ovih mnogobrojnih svojstava jedna veličina stanja, jer je njegova vrijednost značajna za dotično stanje.

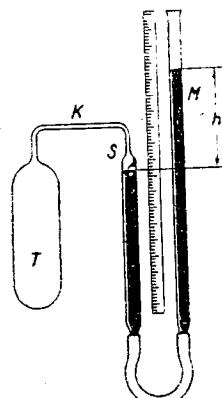
Neke od tih veličina odlikuju se time, što su im brojčane vrijednosti vrlo ovisne o toplinskom stanju tijela. Ove će biti naročito podesne za proučavanje promjena stanja, pak će se toplinsko stanje moći definirati s ograničenim brojem takvih veličina.

Dovedemo li u dodir dva tijela  $A$  i  $B$ , koja se nalaze u različitim toplinskim stanjima, to će im se ova izmjeničnim djelovanjem tako dugo mijenjati, dok se ne ustali toplinska ravnoteža. Od sad ne ćemo više opaziti nikakvu promjenu, i to tako dugo dok su naša tijela izdvojena iz utjecaja ostalog svijeta. Postoji li između nekog trećeg tijela  $C$  i promatranog tijela  $A$  toplinska ravnoteža, to će i tjelesa  $B$  i  $C$  biti u ravnoteži.

Ovi iskustveni zakoni dopuštaju nam upoređiti toplinska stanja razmaknutih tijela  $D$  i  $E$ . Neko treće tijelo  $C$ , na pr. neki termometar, dovedemo dodirom u toplinsku ravnotežu uzastopce sa  $D$  i sa  $E$ . Pri tom će se ustaliti ista ili različita stanja po-

moćnoga tijela  $C$ . To možemo opažati na pr. na ponašanju obujma tijela  $C$ . Taj obujam ostat će ili nepromijenjen, ili će zauzeti razlike, ali sasvim određene vrijednosti, koliko mi god puta doveli tijelo  $C$  u dodir s tijelima  $D$  i  $E$ .

**Mjerenje temperature.** Kao tijelo  $D$  odaberimo vodu, koja se smrzava. Živa termometra  $C$ , koji dovodimo u ravnotežu s tom vodom, zauzet će neki obujam, koji obilježimo na kapilari termometra sa znakom 0. U ravnoteži s vodom, koja vrije kod atmosferskog pritiska, a koja nam predočuje tijelo  $E$ , zauzet će živa neki drugi obujam, koji obilježimo s oznakom 100. Ponavljanjem ovog pokusa na raznim mjestima i u razno vrijeme dobili bismo spomenute oznake točno na istom mjestu kapilare, iz čega zaključujemo, da su toplinska stanja, a to znači pripadne temperature ledene i vrele vode neovisne o mjestu i vremenu. Obujmima žive između obih spomenutih oznaka pridajemo linearnu „skalu temperature po Celsiusu“, koju proširujemo i ispod  $0^{\circ}$  i iznad  $100^{\circ} \text{C}$ . Tako smo svojevoljno stvorili skalu temperature na temelju promjenljivosti obujma žive. S takvom temperaturnom skalom živinog termometra možemo uspoređivati temperature istoga tijela ili različitih tjelesa. Kad se umjesto žive u termometru upotrijebi neka druga tvar  $C$ , na pr. alkohol ili pentan, mora se pokazivanje ovakvoga termometra prilagoditi živinom termometru nejednolikom razdiobom dotične skale. Kod različitih pomoćnih tijela  $C$  poklapaju se naime podaci temperature kod osnovnih (fundamentalnih) točaka  $0^{\circ}$  i  $100^{\circ}$ . Kod ostalih se temperatura skale linearne razdiobe ne bi poklapale, budući da zakonitost promjene obujma u ovisnosti od temperature može kod svakog tijela biti drugačija.



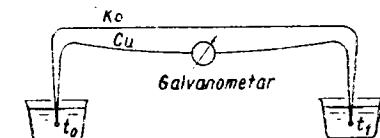
Sl. 1. Plinski termometar.

Pored živinog termometra upotrebljavaju se kao polazne skale i plinski termometri, sl. 1. Plinovi se s porastom temperature vrlo pravilno šire, a osim toga im je prednost, da ih se

može upotrijebiti i do vrlo niskih temperatura. No zbog svoje nespretnosti upotrebljavaju se plinski termometri samo za baždarenje najpreciznijih drugih termometara.

Vrlo se često upotrebljavaju termometri, koji se oslanjaju na druga fizikalna svojstva. Takav je termometar na pr. vrlo važni termoelement, sl. 2. Ovaj se sastoji iz dviju različitih kovina, obično u obliku žica, koje su na svojim krajevima prisno spojene, na pr. pajanjem (lemljenjem) ili zavarivanjem. Smjestimo li jedno pajalište u posudu s poznatom temperaturom  $t_0$  (na pr. u kupelj ledene vode, koja se smrzava, gdje je  $t_0 = 0^{\circ}\text{C}$ ) a drugo pajalište na višu temperaturu  $t_1$ , to između obih pajališta nastaje elektromotorna sila, koju ovdje zovemo i termoelektričkom silom. Ona ovisi o visini obih temperatura i od vrste odabranih kovina, a može se odrediti baždarenjem kod raznih poznatih temperatura. Elektromotorna sila izaziva struju, koja je ovisna o otporu električnog kruga. Postoji čitav niz takvih termoelektričkih parova, koji su tehnički upotrebljivi, tako na pr. element iz bakra i konstantana<sup>1</sup>). Ovaj se odlikuje naročito jakom elektromotornom silom. U području visokih temperatura najvažniji je termoelement iz platine i platinrodiuma. Velika je prednost termoelemenata, što zbog sitnoće pajališta dopušta mjerjenje temperature praktički u jednoj točki, i što je zbog malene mase pajališta tromost termoelementa izvanredno malena. Tako se mogu i brze promjene temperature ispravno registrirati. Daljnja im je prednost, što se mjerjenja mogu električkim putem prenositi na daljinu.

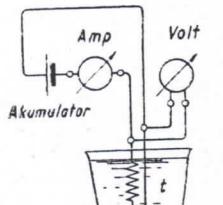
Druga važna metoda mjerjenja temperature služi se pojmom promjenljivog električnog otpora nekog vodiča s temperaturom. U tu svrhu se obično upotrebljava žica iz platine. Kod mjerjenja se vodič mora opteretiti strujom, da bi se mogao odrediti električki otpor. Ta struja ne smije biti prejaka, da se njome ne bi temperatura žice povisila iznad dopuštene gra-



Sl. 2. Termoelement.

<sup>1</sup> Konstantan je slitina bakra i niklja.

nice netočnosti, jer bi se u protivnom slučaju krivotvorila mjerena temperatura.



Sl. 3. Otpornik termometar.

Za mjerjenje visokih temperatura upotrebljavaju se pirometri zračenja (isijavanja). Pomoću njih mjeri se nepoznata temperatura užarenoga tijela ili uspoređivanjem sjaja tog tijela sa sjajem električki užarene žice poznate temperature ili se pak mjeri količina topline, koju užareno tijelo dozračuje termometru (bolometar), a u tom se slučaju može temperaturu odrediti uz pomoć STEFAN-BOLTZMANNOVA zakona zračenja<sup>1)</sup>.

Iz mnoštva svih mogućih termometričkih supstanca odbiremo za osnovnu skalu za sada takvu, koja je najprikladnija. To je iz više razloga skala vodikovog ili s ovom skoro identična skala helijevog termometra. Ostale termometre, kao živin itd., baždarimo uspoređivanjem s takvom osnovnom skalom. Kasnije ćemo upoznati univerzalnu skalu temperatura, t. zv. termodinamičku skalu, koja je neovisna o fizikalnim svojstvima termometričke tvari.

**Toplinska ravnoteža** Spomenuli smo, da se tijela iste temperature nalaze u toplinskoj ravnoteži, i obratno, da tijela, koja su u toplinskoj ravnoteži, imaju istu temperaturu. Prema tome za toplinsku ravnotežu nije potrebna jednakost svih funkcija toplinskog stanja, već samo jednakost temperature. Zato će i različita tijela različitih pritisaka moći biti u toplinskoj ravnoteži, samo ako su im temperature jednake.

Svi spomenuti termometri moraju se baždariti s t. zv. normalnim instrumentom, koji je opet baždaren posredno ili neposredno plinskim termometrom.

Za mjerjenje visokih temperatura upotrebljavaju se pirometri zračenja (isijavanja). Pomoću njih mjeri se nepoznata temperatura užarenoga tijela ili uspoređivanjem sjaja tog tijela sa sjajem električki užarene žice poznate temperature ili se pak

mjeri količina topline, koju užareno tijelo dozračuje termometru (bolometar), a u tom se slučaju može temperaturu odrediti uz pomoć STEFAN-BOLTZMANNOVA zakona zračenja<sup>1)</sup>.

Iz mnoštva svih mogućih termometričkih supstanca odbiremo za osnovnu skalu za sada takvu, koja je najprikladnija. To je iz više razloga skala vodikovog ili s ovom skoro identična skala helijevog termometra. Ostale termometre, kao živin itd., baždarimo uspoređivanjem s takvom osnovnom skalom. Kasnije ćemo upoznati univerzalnu skalu temperatura, t. zv. termodinamičku skalu, koja je neovisna o fizikalnim svojstvima termometričke tvari.

**Toplinska ravnoteža** Spomenuli smo, da se tijela iste temperature nalaze u toplinskoj ravnoteži, i obratno, da tijela, koja su u toplinskoj ravnoteži, imaju istu temperaturu. Prema tome za toplinsku ravnotežu nije potrebna jednakost svih funkcija toplinskog stanja, već samo jednakost temperature. Zato će i različita tijela različitih pritisaka moći biti u toplinskoj ravnoteži, samo ako su im temperature jednake.

## PRVI GLAVNI STAVAK

### Prelaz topline

Tjelesa različitih temperatura djeluju međusobno tako, da nastaje izjednačiti svoje temperature, ili drugim riječima, ona teže toplinskoj ravnoteži. Tjelesa u tom slučaju izmjenjuju međusobno energiju, što ukratko nazivamo prelazom topline. Prelaz se topline može vršiti na dva vrlo različita načina. Kod tjelesa, koja se dodiruju, predaju dijelići jednoga tijela energiju neposredno dijelićima drugoga tijela, pak toplina ostaje trajno vezana na tvar. No toplina se može primati i odavati i u obliku toplinskog zračenja — koje je pojava elektromagnetskih valova. Prijenos zračene energije nije vezan na materiju, već se može vršiti kroz vakuum ili kroz prozračna tijela. Oba načina prelaza topline su bitno različita i međusobno neovisna. Dok kod prelaza topline, koji je vezan na tvar, temperature moraju monotono opadati u smjeru strujanja topline, dotle to kod zračenja nije potrebno. Tako na pr. možemo sunčevim zrakama i hladnom lećom upaliti papir, a da se pri tom sama leća ne ugrije bitno.

Promotrijmo opet oba tijela, koja jednim od obih načina izmjenjuju toplinu. Jedno se tijelo pri tom hlađi, a drugo se grijije. Prelaz topline teče uvijek iz područja više u područje niže temperature. Odmah primjećujemo, da ovdje mislimo samo na onu izmjenu energije, koja je prouzrokovana razlikom temperature. Zato u prelaz topline ne uključujemo energije, koje su možda zbog neke razlike električnog potencijala prešle u obliku električne energije iz jednoga tijela u drugo. Isto tako ni primjeni ili odani mehanički rad ne računamo u pojmu izmjenjene topline. Prema tome mi onu količinu energije, koju je zbog razlike temperature jedno tijelo odalo, a drugo primilo, identificiramo s pojmom prenesene topline. Ova je spoznaja tek tokom vremena mogla prodrijeti u naučnim naziranjima.

<sup>1)</sup> Vidi poglavlje „Zračenje topline“.

Tek godine 1842. spoznao je lječnik Robert Julius MAYER, da pojava topline nije vezana na neku posebnu tvar, koja bi — sama bez težine — prelazila od jednoga tijela na drugo, već da toplina predstavlja samo jedan od mnogobrojnih oblika u preobraženjima energije. Tako se i toplina mora podvrći općem zakonu uzdržanja energije, koji izričemo u odlomku, koji slijedi.

**Zakon uzdržanja energije** Energija se neke tvorevine može očitovati u različitim oblicima, na pr. kao električka, kinetička, zračena energija. U tvorevini, koja nije u vezi s okolinom, zbroj se svih količina energije vremenom ne mijenja.

To je iskustveni stavak, koji se ponovno preispitiva, te koji se uvijek iznova dokazuje bilo izravno laboratorijskim pokusima, bilo neizravno s nebrojenim neuspjelim pokušajima, da se izvede perpetuum mobile. Ovaj zakon ne trpi izuzetaka. Naprotiv se može jedan oblik energije preobraziti u drugi. Tako možemo kinetičku energiju pretvoriti u potencijalnu ili u elektromagnetsku, ili pak možemo njome izvršiti mehanički rad.

Uviježilo se, da se energija mjeri raznim mjerilima. Obično se kinetička i potencijalna energija kao i rad izvršen na nekom putu mjeri kilogrammetrima [kgm] električka energija u kilovat-satima [kWh], toplinska energija, uključivši i unutarnju energiju u kilokalorijama [kcal].

Kilokalorija je ona količina topline, koja se mora dovesti jednom kilogramu vode od  $14,5^{\circ}\text{C}$  da bi se ugrijao za  $1^{\circ}$  na  $15,5^{\circ}\text{C}$ . To je t. zv. kalorija petnaestoga stupnja. Točno označivanje temperature potrebno je ovdje iz razloga, što se specifična toplina vode s temperaturom nešto mijenja. Po zakonu o uzdržanju energije mora jedinica energije jednog sustava mjera odgovarati točno određenom broju jedinica drugoga sustava mjera. Zato možemo kako električku tako i toplinsku energiju mjeriti na pr. u kilogrammetrima [kgm], što se gdje-kada i čini.

**Pokus JOULE-a** Vodu u kalorimetru, sl. 4., možemo uz pomoć mješalice ugrijati, i to tako, da mehanički rad miješanjem i trenjem pretvorimo u toplinu. Mehanički rad vršimo i mjerimo spuštanjem poznatog tereta, koji

pokreće mješalicu. Za ugrijavanje jednog kilograma vode od  $14,5$  na  $15,5^{\circ}\text{C}$ , dakle za dovođenje od 1 kcal, potreban je prema pokusima rad od 427 [kgm/kcal], pri čem je

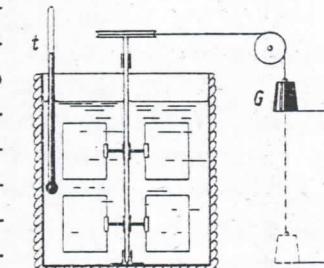
$$J = \frac{1}{A} = 427 \text{ [kgm/kcal]}$$

Ovu veličinu  $J$  zovemo mehaničkim ekvivalentom topline. Recipročna je vrijednost

$$A = \frac{1}{J} = \frac{1}{427} \text{ [kcal/kgm]}$$

toplinski ekvivalent mehaničkog rada. Prema tome 1 kcal i 427 kgm označuju iste ili jednake količine energije, samo mjerene u različitim sustavima mjera.

Prve svjesne i uspjele pokuse u ovom smjeru proveo je J. P. JOULE, jedan od najvećih eksperimentatora prošloga vijeka te je pri tom toplinski ekvivalent odredio s točnosti, koja nas danas upravo začuđuje. Prve je pokuse proveo godine 1843. Godinu dana ranije proračunao je R. J. MAYER isti ekvivalent iz razlike specifičnih toplina plinova kod stalnoga pritiska i kod stalnoga obujma. Zbog manjkavih podataka, kojima se onda raspolagalo, MAYER-ova se proračunana vrijednost znatno razlikovala od vrijednosti, do kojih se kasnije došlo neposrednim pokusima. Nekoliko takvih vrijednosti prikazujemo u priloženoj skrižaljci.



Sl. 4. K pokusu Joule-a

Neki eksperimentalni podaci o mehaničkom ekvivalentu

A mkg/kcal

1842	R. MAJER, iz razlike specifičnih toplina $c_p$ i $c_v$ (prvo proračunsko određivanje)	367,1
1843	J. P. JOULE, Pomicanje elektr. vodiča u magnet- skom polju (prvi eksperiment)	459,8
1843	„ Strujanje kapljevine kroz uske cijevi	424,9

1847	J. P. JOULE, Lopatično kolo u vodi	429,1
1850	" " " "	426,7
1867	iz električne energije	426,0
1897	REYNOLDS i MOORBY, Kočnica na parnom stroju	426,5
1898	LÉDUC, iz razlike specifičnih toplina $c_p$ i $c_v$	427,2
1914	SUTTON-HENINNG, iz CLAPEYRON-ove jedn. (II. gl. zakon)	426,7
1910	RISPAIL, Lopatično kolo u vodi ili ulju	425,5
1915	JAEGER i STEINWEHR, električki	426,9

Od kalorije petnaestoga stupnja razlikuje se nešto t. zv. internacionalna kilokalorija, koja je definirana kao

$$1 \text{ kcal} = \frac{1}{860} \text{ kWh}$$

Definicija pomoću kilovatsata usvojena je u internacionalnim krugovima zato, što je mjerjenje električne energije točnije provedivo nego li toplinska mjerjenja. Između obih veličina postoji odnos, prema kojemu je

$$\begin{aligned} 1 \text{ kcal}_{int} &= 1,00046 \text{ kcal}_{15^\circ} \\ 1 \text{ kcal}_{15^\circ} &= 0,99954 \text{ kcal}_{int} \end{aligned}$$

#### Unutarnja energija

Energija, koja je u navedenom pokusu JOULE-a bila ekvivalentna potrošenom mehaničkom radu, ne može se po zakonu o uzdržanju energije izgubiti, već se morala nagomilati u vodi u nekom drugom obliku. Taj je rad odista poslužio za povećanje unutarnje energije vode. Iz činjenice, da je pri tom temperatura vode porasla, zaključujemo, da je unutarnja energija vode kod viših temperatura veća nego li kod nižih.

Jasno je, da će i druga tijela sadržavati slično kao i voda, stanovitu količinu unutarnje energije, te da ta količina ovisi o temperaturi, ili općenitije, o toplinskem stanju dotičnog tijela. Do ove smo spoznaje došli bez obzira na kakvu ispravnu ili neispravnu predodžbu o unutarnjoj izgradnji tvari, a to samo uz pretpostavku postojanja zakona o uzdržanju energije. U tu je svrhu predbježno svejedno, na koji si način zamišljamo, da je spremljena unutarnja energija. Za najveći dio tehničkih problema ne će nas zanimati ni kolika je njena absolutna vrijed-

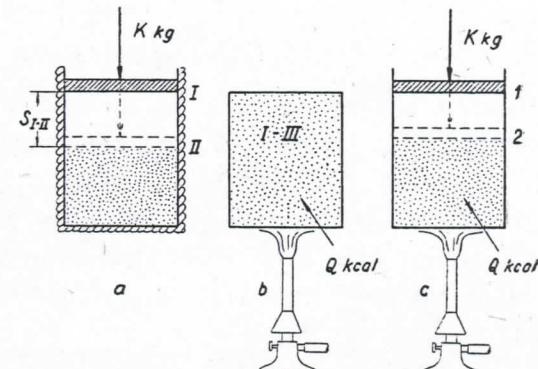
nost. Trebat ćemo samo podatke o povećanju ili smanjenju unutarnje energije.

Usprkos toga osvrnut ćemo se na današnju predodžbu o molekularnoj izgradnji tvari. Unutarnju energiju tijela zamišljamo kao zbroj energija gibanja (kinetičkih energija) i energija položaja (potencijalnih energija) pojedinih molekula. Energiju gibanja molekula daje njihova često zamjerna brzina, kojom oni kod plinova lete prostorom, ili kojom oni kod krutih tijela titraju oko nekog srednjeg položaja. Energija položaja posljedica je sila, koje djeluju između molekula, a koje su to veće, što su si molekuli bliži. Priroda takvih sila može biti različita. No i u nutrinji pojedinih molekula smještena je velika količina energije u obliku kemijske energije, koja se osniva na energiji gibanja i energiji položaja atoma i elektrona. Kad dolazi do kemijskih reakcija, oslobođa se jedan dio ove kemijske unutarnje energije, jer se iz starih molekula stvaraju nove, od prvih raznovrsne molekule. U tom se slučaju mora oslobođena kemijska energija kod računa uzeti u obzir.

Sl. 5. Povećanje unutarnje energije: a) vanjskim radom b) dovodenjem topline c) vanjskim radom i grijanjem.

Unutarnju energiju  $U$  mjerimo obično u kcal, gdjekada i u kgm. Što je veća količina tvari, to je pod inače istim uvjetima i količina unutarnje energije veća. Od prednosti je navesti onu količinu energije  $u$  kcal/kg, koja je sadržana u 1 kg dotičnog tijela. Budući da je unutarnja energija  $u$  ovisna samo o toplinskem stanju nekoga tijela, kao i o njegovoj vrsti i količini, to su  $U$  i  $u$  čiste veličine stanja. One nisu ovisne o stanju ostalih tjelesa okoline.

Količinu unutarnje energije možemo mijenjati na razne načine. U tu svrhu možemo iz vana dovoditi toplinu, no i



mehanički rad možemo kompresijom tijela ili trenjem pretvoriti u unutarnju energiju. Isto tako možemo kroz tijelo provoditi električku struju i njome proizvoditi toplinu neposredno u tijelu (JOULE-ova toplina). U svakom slučaju mora suma energija prije procesa biti jednaka onoj poslije procesa.

Želimo li u nekoj posudi sl. 5a, zgasnuti neki plin, to moramo primijeniti neku silu  $K$  [kg], da bismo mogli savladati pritisak plina. Izvršeni rad  $L$  [kgm] bit će kod promjenljive sile  $K$  na putu  $s$  [m]

$$L = \int_1^H K ds$$

Ako kod dobro izolirane posude nema izmjene topline s okolinom, povećat će izvršeni vanjski rad  $L$  unutarnju energiju za iznos

$$U_H - U_I = AL \text{ [kcal]}$$

gdje je  $A$  toplinski ekvivalent rada. Indeksi  $I$  i  $H$  odnose se na stanja plina na početku i na koncu procesa.

Ovaj isti plin možemo i grijati, sl. 5b, gdje potrebnu količinu energije uzimamo na pr. vrućim plinovima nekoga plamena. Ukratko: mi tijelu dovodimo toplinu  $Q$  [kcal], pak mu na taj način povećavamo unutarnju energiju na vrijednost  $U_{III}$ . Tu je

$$Q = U_{III} - U_I.$$

Postignuto je stanje  $III$  različito od prije postignutog stanja  $II$ . Troše li se u isti mah i mehanički rad i toplina, sl. 5c, to je

$$Q + AL = U_2 - U_I.$$

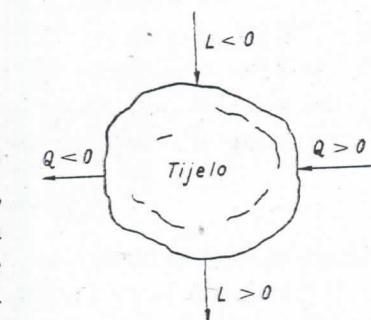
Ovdje su početno i konačno stanje označeni indeksima  $I$  i  $2$ .

**Prvi glavni stavak.** Većina tehničkih zadataka traži, da se potroškom jeftine topline  $Q$  proizvodi skupocjeni mehanički rad  $L$ . Energiju topline  $Q$  dobivamo iz goriva. Predznak tih veličina odabiremo tako, da ih u spomenutom normalnom slučaju računamo pozitivno. Prema sl. 6 računat ćemo tijelu doveđenu toplinu  $Q$  i ovedeni mehanički rad  $L$  kao pozitivne veličine. Tijelu oduzeta toplina, kao i do-

vedeni mu mehanički rad bit će po tome negativni. U tom slučaju glasi zakon o uzdržanju energije

$$Q = U_2 - U_1 + AL \quad (1)$$

Ovaj se zakon u nauci o toplini zove još i prvi glavni stavak termodinamike. Po njemu služi dovedena toplina  $Q$  dijelom za povećanje unutarnje energije ( $U_2 - U_1$ ) tijela, a dijelom za vršenje mehaničkoga rada  $L$ . Proizvode li se još i drugi oblici energije, to i njih moramo uzeti u obzir. Tako se tijelo možda diglo za visinu  $h$ , čime bi se promjenila njegova potencijalna energija za  $E_p$  [kgm]. Kod strujanja plinova, na pr. u parnim turbinama, može se kinetička energija kod porasta brzine strujanja povećati za  $E_k$  [kgm]. Tako dobivamo



Sl. 6. Dogovor za predznaće za  $L$  i  $Q$ .

$$Q = U_2 - U_1 + AL + AE_p + AE_k + \Sigma AE \quad (2)$$

gdje smo u  $\Sigma AE$  sabrali priraste svih ostalih oblika energije, koji nisu posebno imenovani. Za sad ćemo promatrati takve probleme, kod kojih posljednja tri člana jednadžbe (2) nisu od značenja.

Za takve promjene, kod kojih se stanje tijela tek neznatno mijenja, potrebna je samo mala količina topline, a i izvršeni rad je tek neznatan. Za taj slučaj možemo prvi glavni stavak termodinamike pisati u diferencijalnom obliku

$$dQ = dU + AdL \quad (3)$$

**Agregatna stanja.** U nekoliko navrata govorili smo o stanjima i njihovim promjenama, a da ih nismo brojčano pobliže opisali. Ovo je međutim moguće pomoći pojedinim veličinama stanja. Pri opisivanju toplinskog stanja ne uzimamo u obzir ona svojstva, koja za toplinsko stanje nisu bitna. Tako na pr. za naša daljnja razmatranja nisu zanimiva električna i slična svojstva tvari.

Zadovoljavamo se razdiobom stanja na tri glavna oblika i to na plinoviti, kapljeviti i kruti oblik. Po potrebi upozorit ćemo na diferenciranju razdiobu.

U krutom se stanju tvar s velikim otporom protiv namjeravanoj promjeni oblika kao i promjeni obujma. Kapljevite i plinovite tvari naprotiv dopuštaju promjenu oblika bez primjetljivog radnog napora, samo ako obujam ostaje nepromijenjen, i ako deformacije teku dosta polagano. Prema tome su sile preobličenja (deformiranja) kod krutih tjelesa od drugog reda veličine, nego li kod kapljevitih i plinovitih. Kod ovih je sila preobličenja to manja, što se polaganje vrši promjena oblika. Po PRANDTL-u možemo tako reći: u plinu ili kapljevini, koja je u unutarnjoj ravnoteži, isčezava svaki otpor protiv polagane promjene oblika.

Kapljevite tvari protive se namjeravanoj promjeni obujma velikim otporom, za razliku od plinovitih. Kapljevine su praktički nestišljive, dok se plinove može s prikladno visokim pritiskom po volji zgusnuti. Plinovi mogu pri dovoljnom sniženju pritiska zauzeti po volji veliki obujam, dok to kod kapljevina nije moguće.

**Homogene tvari.** Proučavat ćemo ponajprije promjene stanja takvih tvari, koje su fizičko homogene. Neku tvar smatramo homogenom, kad su joj kemijske sastojine i u najmanjim prostornim dijelićima jednolično gusto razdjeljene. Kao najmanji prostorni dijelić mislimo takav, koji je prema običnim tjelesnim dimenzijama po volji sitan, no koji još uvek obuhvaća golemi broj molekula. Tako na pr. kod plinova u sitnom prostoru od  $1\mu^3 = 10^{-9} mm^3$  ima još uvek na milijune molekula. Uvjet homogeniteta ispunjen je kod kemički čistih tvari, u koliko takve u opće postoje, i u koliko nije međusobno izmiješano više agregatnih stanja. No i dobro promješane smjese plinova zadovoljavaju taj uvjet, tako na pr. atmosferski uzduh. Ovdje su razni plinovi do najmanjih čestica, t. j. molekularno dobro izmiješani.

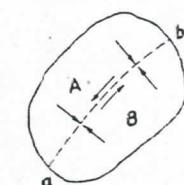
Stanje neke tvari u prvom je redu ovisno o količini  $G$  [kg] ili točnije o njenoj masi. Dvostruka količina tvari zauzima

pod istim uvjetima i dvostruki obujam  $V$  [ $m^3$ ]. Ograničujemo se na promatranje takvih stanja, koja su neovisna o obliku. Prema rečenome to su kapljevita i plinovita tjelesa, u kojima se može zanemariti nutarnje trenje. U tom slučaju ne mogu u nekom umišljenom presjeku  $ab$ , sl. 7, djelovati bilo kakve sile smicanja (tangencijalne sile), ako se samo pojedini slojevi ne smiču prebrzo. U protivnom bi slučaju za smicanje obiju dijelova u razdjelnici  $ab$  bio potreban neki rad, što bi se protivilo iskustvu. To vrijedi za bilo koji umišljeni presjek, dakle i za granicu plinovitog ili kapljevitog tijela. Na takve plohe mogu djelovati sile samo u smjeru normale, jer bi sile drugih smjerova imale komponente u tangencijalnom smjeru, što je prema našim izlaganjima zabranjeno.

**Pritisak.** Normalnu silu, koju računamo na  $1 m^2$  plohe, zovemo pritiskom, a mjerimo je u  $kg/m^2$ . Kad vlada mehanička ravnoteža, pritisak je unutar tijela svuda isti, ako tijelo nije prostorno suviše rasprostranjeno, tako da se djelovanje sile teže može zanemariti. Za mjerjenje su pritiska u upotrebi i druge mjere. Tako ćemo sa  $p$  označiti pritisak u  $kg/cm^2$ , koju jedinicu nazivamo i tehničkom atmosferom s oznakom at. Od nje se razlikuje fizikalna atmosfera [Atm], koja odgovara pritisku, što ga na svoju podlogu vrši stupac žive od 760 mm visine (760 mm Hg), a za slučaj kad je temperatura žive  $0^\circ C$ , a mjerjenje se vrši u visini morske razine i na  $45^\circ$  geografske širine. Ovi točni podaci potrebni su za sasvim točna mjerjenja, budući da se jedinična težina žive mijenja s temperaturom i s ubrzanjem zemljine teže. U kaloričkoj je mjeri dimenzija pritiska  $kcal/m^3$ .

U tvarima bez trenja djeluje pritisak u svim smjerovima podjednako, uz predpostavku, da nema ubrzavanja čestica, na kakvo se gdjekad nailazi kod strujanja. Ovakva ubrzavanja za sad zanemaruјemo.

U nekom cilindru s lako pomičnim stапом, koji je primjereno opterećen, zatvoren je plin. U ravnoteži mora opterećenje stapa biti toliko, da je pritisak, koji vrši stап s presjekom



Sl. 7. K djelovanju pritiska.

$F$  na plin, jednaknutarnjem pritisku plina. Postoje li ovdje razlike pritisaka, to se izazivaju ubrzavanja masa.

**Jednadžba stanja** Nutarnji pritisak kod plinova i kapljevina neovisan je o obliku zauzetog prostora. On je ovdje ovisan samo o vrsti tvari, o njenoj temperaturi i o gustoći  $\rho$  (masi u jedinici obujma) ili što je isto, o njenom jediničnom obujmu

$$v = \frac{V}{G} [m^3/kg]$$

Veličine  $P, v, t$  povezane su prema iskustvu izrazom

$$F(P, v, t_i) = 0 \quad \text{ili} \quad F(P, \frac{V}{G}, t) = 0 \quad (4)$$

kojega je matematički oblik karakterističan za svaku tvar. Ovakvu vezu zovemo termičkom jednadžbom stanja. Ovdje smo prečutno pretpostavili, da je tijelo homogeno, te da u svim svojim dijelovima posjeduje istu označivu temperaturu  $t$ , isti pritisak  $P$  i isti jedinični obujam  $v$  (t. j. istu gustoću  $\rho$ ). Prema tome ima jednadžba stanja smisla samo za one dijelove medija, koji se nalaze u nutarnjoj ravnoteži. Ako je nasuprot tome na pr. temperatura u raznim točkama nekoga plina različita, to u plinu nema ravnoteže. U tom se slučaju ne može govoriti o nekoj vezi između  $P, v$  i  $t$  po (4), ako nije poznato, kako je temperaturno polje rasprostranjeno po čitavom tijelu. To isto vrijedi i za nehomogene mješavine plinova, kad im je sastav na raznim mjestima različit. Za homogenu smjesu, na pr. za uzduh postoji naprotiv jednadžba stanja po (4), naravno tako dugo dok vlada ravnoteža.

Da bi se o ovom ograničenju vodilo računa može se u slučaju potrebe prostor, koji ispunjava naša tvar, u mislima tako razdijeliti na manja područja, da se za svako područje smije dovoljnom točnosti pretpostaviti, da u njem vlada nutarnja ravnoteža i homogenost. Za svako takvo područje mora se uvrstiti pripadne vrijednosti za  $P, v, t$ . Na taj način dobit ćemo toliko jednadžbi stanja istoga oblika, koliko smo područja odabrali. Kod tijela, koje nije homogeno preko svih odabranih područja, mijenja se još i sastav od područja do

područja. Prema tom sastavu mijenja se tada i oblik jednadžbe stanja od područja do područja. Zato svaka primjena jednadžbe stanja (4) znači, da se automatski prepostavlja homogenost tvari kao i mehanička i termička ravnoteža, ali samo unutar promatranog tijela ili promatranog područja. Ovo tijelo ili područje ne treba međutim biti u ravnoteži sa svojom okolinom, jer smo naglasili, da jednadžba stanja povezuje samo veličine stanja unutar promatranog područja, a nikako ne vodi računa o prilikama izvan tog područja.

Termičku jednadžbu stanja možemo pisati još i eksplikite u obliku

$$P = f_1(v, t) \quad \text{ili} \quad v = f_2(P, t) \quad \text{ili} \quad t = f_3(P, v). \quad (5)$$

Da pronađemo termičku jednadžbu stanja u bilo kojem od četiri navedena oblika, potrebni su pokusi. Za najjednostavnije slučajeve možemo međutim poći i od nekih pretpostavki o nutarnjoj izgradnji tvari, pak onda analitičkim putem doći do jednadžbe stanja tijela. Ovim su putem pošli osnivači kinetičke teorije plinova, pretpostavivši, da molekule lete slobodno prostorom, i da se pri svojem gibanju i sudaranju pokoravaju poznatim zakonima mehanike. Primijenivši još, zbog golemog broja molekula, i matematsko-statističke zakonitosti, došlo se do rezultata, koji su se izvrsno poklapali s neposrednim pokusima, a koji su osim toga dali duboki uvid u čitav niz do onda nepoznatih problema. Mi ćemo međutim ovdje poći onim prvim, eksperimentalnim putem, i prikazati najvažnije rezultate nekih osnovnih pokusa.

**Kalorička jednadžba** S podacima o dvim veličinama stanja svezana ukupno je toplinsko stanje jednoznačno određeno. Tako je onda i svaka druga veličina stanja jednoznačno određena. Tako je na pr. i unutarnja energija  $u$  [kcal/kg] jednoznačno određena poznavanjem dviju veličina stanja

$$u = \varphi_1(P, t) \quad \text{ili} \quad u = \varphi_2(v, t) \quad \text{ili} \quad u = \varphi_3(P, v). \quad (6)$$

Ovu vezu zovemo kaloričkom jednadžbom stanja. Valjanost ove jednadžbe ograničena je u istom opsegu i s istim primjedbama, koje smo učinili kod razglasanja jednadžbe (4).

Poznavajući vezu između pojedinih veličina stanja bilo u analitičkom, bilo u grafičkom obliku, bit će kod zadanih dviju

veličina stanja ostale veličine ne samo jednoznačno određene, već ih možemo i izračunati. No i bez pobližeg poznavanja neke jednadžbe stanja, možemo izvesti neke općenite povezanosti između pojedinih veličina. Tako na pr. možemo smatrati, da je veličina  $v$  funkcija od  $P$  i  $t$ , ali s isto takvim opravdanjem i da je  $t$  funkcija od  $P$  i  $v$ . Tako možemo prema jednadžbi (5) pisati

$$dv = \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_P dt + \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_t dP \quad (7)$$

$$dt = \left( \frac{\partial t}{\partial P} \right)_v dP + \left( \frac{\partial t}{\partial v} \right)_P dv. \quad (8)$$

Nadomjestimo li  $dv$  u (8) izrazom (7), to slijedi općenito

$$\left( \frac{\partial t}{\partial P} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_P \left( \frac{\partial P}{\partial v} \right)_t = -1. \quad (9)$$

Ljeva strana prikazuje produkt parcijalnih derivacija pojedinih promjenljivica pri čemu svaku promjenljivicu nalazimo jedanput u brojniku a jedanput u nazivniku. Izraz (9) vrijedi onda kad uopće postoji neka jednadžba stanja  $f(P, v, t) = 0$ , dakle u slučaju kad dvije veličine stanja određuju treću. Kod ovoga razmatranja možemo poći od kaloričke jednadžbe stanja (6), pak dobivamo slično

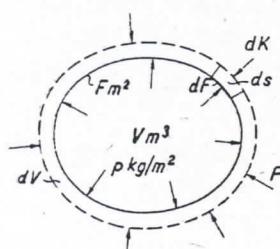
$$\left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_u \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t \left( \frac{\partial t}{\partial u} \right)_v = -1. \quad (10)$$

Rad.

Prije nego li pronađemo oblik jednadžbi stanja za različite tvari, ispitajmo, da li i u kojem odnosu стоји promjena obujma neke tvari s radom, koji se pri tom vrši. Ako se granična ploha  $F$  nekog tijela, sl. 8., na pr. nekoga plina, pomakne za pomak  $ds$ , to se obuhvaćeni prostor poveća za prirast volumena  $dV$ , pak je

$$dV = \int_F ds dF \quad (11)$$

Sl. 8. Rastezanje i vanjski rad.



Integraciju treba provesti preko čitave površine  $F$ . Kad je vanjski pritisak  $P_a$  jednak unutarnjem  $P$ , ili kad se od njega tek neznatno razlikuje, to se

tijelo nalazi u mehaničkoj ravnoteži s okolinom. U tom slučaju svaki će element površine  $dF$  kod spomenutog pomicanja izvršiti protiv sile

$$dK = P dF$$

neki rad

$$dK ds = P dF ds$$

Kod malenoga pomaka čitave površine bit će elementarni rad

$$dL = \int_F P dF ds = P \int_F dF ds$$

a po (11)

$$dL = P dV \text{ (za mehaničku ravnotežu)} \quad (12)$$

Za konačno velike promjene stanja dobivamo integracijom

$$L = \int_{V_i}^{V_f} P dV \quad (13)$$

Za izračunavanje integrala mora ovdje biti poznata ovisnost pritiska  $P$  od obujma  $V$ . To vrijedi za bilo kakvo preobličenje obujma tvari, ali ipak uz ograničenje, da je na graničnoj plohi  $F$  trajno vladala mehanička ravnoteža. Osim toga mora i pritisak preko čitave granične plohe biti jednoličan.<sup>1)</sup> To ne će biti zadovoljeno kod jakog vrtloženja plina i kod naglih promjena stanja, budući da se u tom slučaju u plinu pojavljuje nutarnje trenje, koje prouzrokuje nejednoliku razdiobu pritiska u unutrašnjosti, a koje trenje ovdje ne uzimamo u obzir. Iz (13) vidimo, da se kod promjena stanja, kod kojih nema promjena obujma,  $dV = 0$ , ne vrši nikakav rad, bez obzira na to, da li pri tom pritisak pada ili raste.

Kad je naprotiv mehanička ravnoteža poremećena, pak naravito, kad je vanjski pritisak manji od unutarnjega,  $P_a < P$ , to plin vrši korisni rad  $dL$  samo protiv vanjskog pritiska  $P_a$ , dakle  $dL = P_a dV$ , što je manje od  $P dV$

$$dL < P dV \text{ (mehanička neravnoteža)} \quad (14)$$

Ostatak  $(P dV - P_a dV)$  pretvara se u toplinu trenja i sudara. No izraz (14) vrijedi i za slučaj, da je  $P_a > P$ . U tom slučaju

<sup>1)</sup> U protivnom slučaju trebalo bi jednim dvostrukim integralom uzeti u obzir i nejednolikosti pritiska preko plohe.

nastaje zguščivanje plina, pak se u tu svrhu troši više rada  $|dL| > |PdV|$  nego li to pokazuje izraz (12). No kako se kod kompresije dovedeni rad računa negativno, to je algebarski  $dL < 0$  i  $dV < 0$  tako da i u ovom slučaju vrijedi izraz (14).

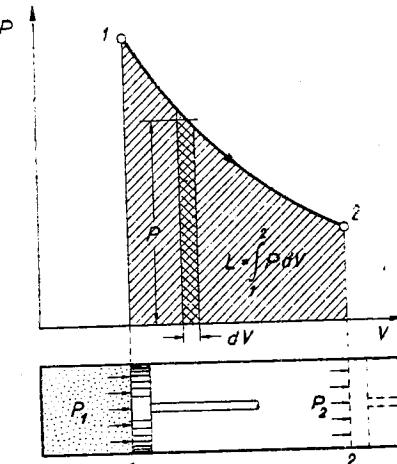
### PV-dijagram

Izvršeni se rad  $L$  može dobro prikazati u t. zv. *PV*-dijagramu. Nanese li se iznad obujma  $V$  promatrane tvari pripadne pritiske  $P$ , koji mu odgovaraju u pojedinim trenucima, to se fizikalna promjena stanja preslikava u tom dijagramu kao linija sl. 9. Površina ispod ove linije predočena je integralom  $\int_1^2 PdV$ , tako da prema (13) ova

površina prikazuje rad izvršen pri promjeni stanja od 1 do 2. Taj je način prikazivanja naročito podesan za stapne strojeve, budući da je kod ovih stajaju neposredna mjera za volumen, koji se oslobađa gibanjem stapa.

U tom slučaju možemo pripadne položaje stapa nacrtati neposredno ispod *PV*-dijagrama, sl. 9. No *PV*-dijagram jednako je podesan i za prikazivanja promjeñanosti stanja, koja se ne odvijaju u stapnim strojevima, nego na pr. u parnim turbinama ili mlaznicama itd.

Za određivanje rada  $L$  nije potrebno izraziti vezu između  $P$  i  $V$  analitički, već je samo potrebno poznavati grafički tok linije 12 u *PV*-dijagramu. Površina ispod linije 12 prikazuje traženi rad  $L$ , a ova se može odrediti planimetrijanjem.



Sl. 9. Prikazivanje mehaničkog rada u *PV*-dijagramu

Za procese, koji se odvijaju u mehaničkoj ravnoteži, možemo prvi stavak prikazati i u slijedećem obliku

$$Q = U_2 - U_1 + A \int_1^2 PdV \quad (15)$$

$$dQ = dU + APdV \quad (15b)$$

Promatrajući prvu jednadžbu primjećujemo, da su unutarnje energije  $U_1$  i  $U_2$  jednoznačno određene početnim i konačnim stanjem 1 i 2. Za veličinu rada, t. j. za određivanje integrala  $\int_1^2 PdV$  naprotiv ne dostaju podaci o početnom i konačnom stanju, već je vrijednost tog integrala u bitnoj mjeri ovisna i o putu prelaza od jedne granične točke do druge. Kod promjene stanja po putu a sl. 10, dobiva se neki rad, koji se razlikuje od onoga kod promjene stanja po putu b. Ovdje je

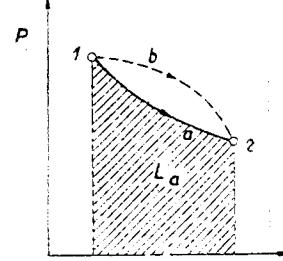
$$\int_a PdV \neq \int_b PdV \quad (16)$$

To znači, da je elementarni rad  $dL = PdV$  nepotpuni diferencijal, budući da je njegov integral ovisan o putu integracije. Matematski razlog treba tražiti u činjenici, što  $P$  nije ovisno samo o  $V$  već i o još jednoj promjenljivici, tako na pr. o temperaturi  $t$ . Dok i o ovoj nije nešto pobliže poznato, može se  $P$  na vrlo različite načine mijenjati, tako da u svakom pojedinom slučaju možemo samo onda nešto računati, ako damo pobliže podatke o promjeni veličine  $P$ .

To isto vrijedi i za toplinu, koju za neke promjene stanja tvari moramo dovesti ili odvesti. Ako naime na desnoj strani jednadžbe (15) nastupa neki član, koji je ovisan o putu, to mora i lijeva strana, u tom slučaju  $Q$ , ovisiti o putu integracije. Zato je i  $dQ$  nepotpuni diferencijal, pak da se to istakne, trebalo bi diferencijalnu jednadžbu prvoga glavnoga stavka termodinamike pisati na pr. u obliku

$$\partial Q = dU + A\partial L \quad (17)$$

Tu je tek  $dU$  potpuni (totalni) diferencijal. To termodinamički znači, da je samo  $dU$  diferencijal jedne prave veličine stanja, dok niti  $dQ$  niti  $\partial L$  ne predstavljaju diferencijale nekih veličina



Sl. 10. Utjecaj toka promjene stanja na mehanički rad

stanja. Iako se ova razlaganja možda čine suvišnima, to su ona ipak važna, što će se kasnije jasnije ispoljiti.

### Određivanje jednadžbe stanja

Oblik jednadžbe stanja proučit ćemo ponajprije za najjednostavnije tvari — za plinove. U sl. 11. prikazana je potrebna naprava za pripadne pokuse. U kalibriranu posudu *A* zatvori se plin, koji ispitujemo<sup>1)</sup>. Obujam plina možemo očitati uz pomoć meniskusa žive na skali za volumen. Posuda se nalazi u termostatu *B*, kojega temperaturu možemo po volji udesiti. Pritisak u posudi *A* možemo po volji udesiti pomoću živinog manometra *C* i pomjčne posude *D*. Mijenjamo li temperaturu kupelji uz postojano podržavanje pritiska *p*, to mjerena pokazuju, da se obujam plina mijenja linearno s temperaturom po jednadžbi

$$v = \frac{v_0}{273,16} (273,16 + t), \quad (18)$$

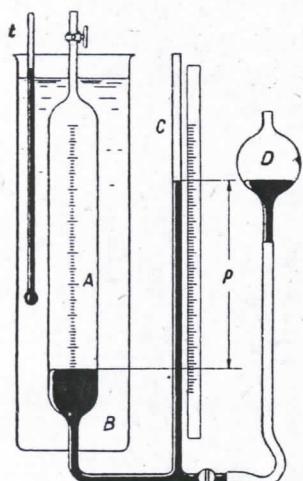
poznatoj pod imenom GAY-LUSSAC-ova zakona. GAY LUSSAC pronašao je tu zakonitost godine 1816. Ovdje je *v* [ $\text{m}^3/\text{kg}$ ] jedinični obujam plina pri temperaturi *t*, a *v<sub>0</sub>* onaj mjerен pri  $0^\circ\text{C}$ , pri čem se obje vrijednosti odnose na isti pritisak. Unesemo li podatke u *vt*-dijagram, to dobivamo sl. 12. Za svaki pritisak dobije se po jedan pravac, od kojih svaki odsjeca na ordinati kod  $0^\circ\text{C}$  vrijednost *v<sub>0</sub>*.

Sl. 11. Naprava za ispitivanje jednadžbe stanja

Svi pravci sačinjavaju snop zraka, sa sjecištem u onoj točki osi abscisa, koja leži pri temperaturi *t* =  $-273,16^\circ\text{C}$ . Jednadžbu možemo pojednostaviti nadomjestkom

$$T = t + 273,16 \quad (19)$$

<sup>1)</sup> Kalibrirana je posuda snabdjevena sa skalom za volumen.



pak dobivamo

$$v = \frac{v_0}{273,16} T \quad (20)$$

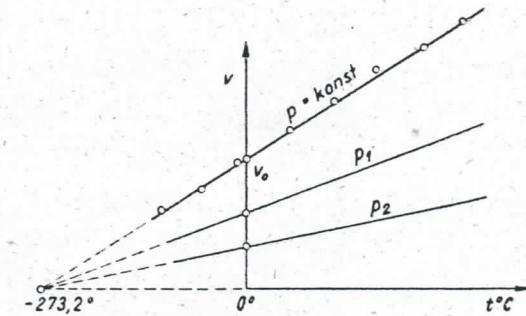
Veličinu *T* možemo prema (19) shvatiti kao temperaturu, koje je nultočka pomjerena prema Celsiusovoj skali za  $273,16^\circ\text{C}$ . Za razliku od Celsiusove skale nazivamo je „apsolutnom temperaturom“. Mi si za sad pod absolutnom temperaturom *T* ne zamišljamo ništa drugo, no kraticu za jednostavnije pisanje GAY-LUSSACOVA zakona. Obično se označuje sa  $T^\circ\text{abs}$ , no bolja je oznaka  $T^\circ\text{K}$  (stupanj Kelvina) ili kraće  $T\text{K}$ . Posljednja oznaka mnogo je ugodnija u dimenzijskim oznakama izvedenih veličina, gdje nastupaju i potencije temperature<sup>1)</sup>. Ako za razliku spram opisanog pokusa držimo temperaturu u termostatu konstantnom, a mijenjamo pritisak, to ćemo dobiti jednostavni odnos između obujma i pritiska plina, kako su to pronašli već BOYLE (1664) i od njega neovisno MARIOTTE (1676). Oni su pronašli da je kod neke konstantne temperature produkt (*Pv*) nepromjenljiv

$$(Pv)_t = \text{konst} \quad (21)$$

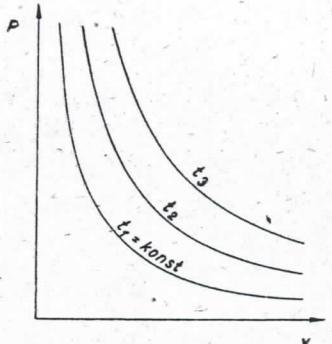
Pri raznim teperaturama i ova konstanta ima razne vrijednosti, tako da je produkt (*Pv*) ovisan o temperaturi. Prema tome je

$$Pv = F(t) = F(T - 273,16) = F_1(T) \quad (22)$$

<sup>1)</sup> Treba li stupnjeve temperatura potencirati, to bi se moralo pisati na pr.  $(^\circ\text{abs})^4$  prema  $K^4$ , dakle sedam prema dva znaka.



Sl. 12. Rezultati pokusa Gay-Lussaca



Sl. 13. Rezultati pokusa Boyle-a i Mariotte-a

Ucrtamo li ove linije u  $Pv$ -dijagram, sl. 13, to dobivamo niz istostranih hiperbola s parametrom  $T$ , ili što je isto s parametrom  $t$ .

**Jednadžba stanja idealnih plinova** Kako je jedinični volumen  $v_0$  kod  $0^\circ C$  ovisan od pritiska, to je

$$v = f(P) T$$

pa kad to pomnožimo s  $P$

$$Pv = Pf(P) T = \varphi(P) T \quad (23)$$

Usporedbom s (22) slijedi

$$F_1(T) = \varphi(P) T \quad (24)$$

Kako je  $F_1(T)$  isključivo funkcija temperature  $T$ , to može  $\varphi(P)$  u (24) biti samo konstanta. Označujemo je sa

$$\varphi(P) = R [kgm/kg K] \quad (25)$$

pak je zovemo plinskom konstantom dotičnoga plina. Njena je vrijednost za svaki plin druga. Tako dobivamo s (22) jednadžbu stanja plinova

$$Pv = RT \quad (\text{za } 1 \text{ kg plina}) \quad (26)$$

$$PV = GRT \quad (\text{za } G \text{ kg plina}) \quad (27)$$

Ova jednadžba vrijedi strogo samo za vrlo razrijeđene „idealne“ plinove. Kod viših pritisaka otstupaju pravi plinovi od te jednadžbe. Kod pritisaka, koji nisu previški, otstupanja su neznatna, tako da ih često možemo zanemariti. Iz (26) je

$$R = \frac{Pv}{T} = \frac{P}{T\gamma} \quad (28)$$

to jest teški plinovi imaju manju plinsku konstantu. Plinska konstanta ovisna je samo o kemijskom sastavu plina. Ovu vezu možemo spoznati promatranjem kemijskih pretvorbi plinova. Kemijske promjene odvijaju se za razliku od fizikalnih skokimice, pak jedna kemijska tvar ne prelazi u drugu preko neprekinitog niza međutvari.

Kod kemijskih su promjena dva zakona za nas naročito važna. Prvi zakon veli, da tvari međusobno reagiraju samo u

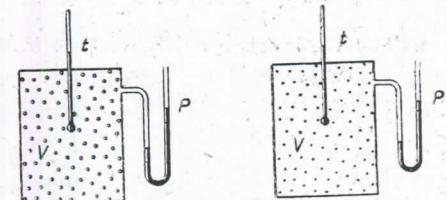
određenim težinskim omjerima ili njihovim višekratnicima. Tako sa 1 kg vodika ne možemo vezati po volji mnogo kisika, već samo ili 8 kg, pri čem nastaje voda ( $H_2O$ ), ili 16 kg kisika kad se stvara vodikov prekis ( $H_2O_2$ ). Prema tome je količina kisika, koja ulazi u  $H_2O_2$ , točno dvostruka od one, koja se potrošila za stvaranje  $H_2O$ , naravno uz pretpostavku, da smo u oba slučaja potrošili istu količinu vodika. I između ostalih tvari često postoji više vrsti spojeva, koji se pokoravaju istoj zakonitosti. Ta je spoznaja stečena promatranjem. Drugi zakon, kojega je pronašao GAY-LUSSAC, izriče, da idealni plinovi međusobno reagiraju ne samo u jednostavnim težinskim omjerima, već i u jednostavnim prostornim omjerima. Tako na pr. uz pretpostavku istoga pritiska i iste temperature reagira  $1 m^3$  plinovitog vodika  $H_2$  sa  $\frac{1}{2} m^3$  plinovita kisika  $O_2$  u  $1 m^3$  vodene pare  $H_2O$ , dok sa  $1 m^3$  kisika  $O_2$  stvara vodikov prekis  $H_2O_2$ .

**Avogadroov stavak** Povežu li se spomenute iskustvene zakonitosti s predodžbom, da se plinovi sastoje iz molekula, to se odavde može izvesti stavak AVOGADRA: U jednakim obujmima pri istom pritisku i istoj temperaturi sadrže svi plinovi isti broj molekula, sl. 14. U tom se slučaju odnose težine zatvorenih plinova kao težine njihovih pojedinih molekula, t. j. kao molekularne težine  $m$ . Molekularna težina je broj, koji veli, koliko puta je molekula neke tvari teža od jednog atoma vodika.

Za jedinicu količine nekoga plina zgodnije je mjesto težinske jedinice odabrati onu količinu, koja sadrži  $m$  kg dotičnog plina. Ovu količinu zovemo 1 Mol. Volumen  $v_m$  ove količine veći je od jediničnog volumena  $v$ , pak je

$$v_m = mv \quad m^3/Mol \quad (29)$$

$v_m$  zovemo molnim volumenom. Odaberemo li posude u sl. 14. tako, da je u njima smješteno  $m_1$  i  $m_2$  kg dvaju različitih pli-



Sl. 14. K Avogadroovom stavku

nova, to se težine tih plinova odnose kao njihove molekularne težine, a po AVOGADRU moraju zapremine ovih posuda  $v_{m_1}$  i  $v_{m_2}$  biti jednake. Prema tome je kod jednakih pritisaka i temperatura za razne plinove

$$v_{m_1} = v_{m_2} = \dots = v_m \quad (30)$$

Molni su volumeni različitih plinova kod istih pritisaka i temperatura jednaki. Kako je po AVOGADRU u tom prostoru kod raznih plinova sadržan isti broj molekula, to slijedi, da 1 Mol svakoga plina sadrži isti broj molekula. Zato se jedinica količine 1 Mol odnosi spram jedinice količine 1 kg slično kao mjeru „tucet“ spram mjeru 1 kg. Kao što tucet sadrži točno određeni broj komada, tako i 1 Mol sadrži točno određeni broj molekula.

Mi možemo napisati jednadžbu stanja nekog plina za količinu od 1 Mola, dakle za  $m$  kg. Za ovu je količinu pripadni obujam  $V = v_m$ , pak jednadžbe stanja za dva različita plina glase

$$Pv_{m_1} = m_1 R_1 T; \quad Pv_{m_2} = m_2 R_2 T \quad (31)$$

Obzirom na (30) slijedi

$$m_1 R_1 = m_2 R_2 = \dots = mR \quad (32)$$

Umnožak iz molne težine  $m$  i pripadne plinske konstante  $R$  za sve je plinove jednak, a zove se opća plinska konstanta.

**Određivanje molne težine.** Molna se težina<sup>1)</sup>  $m$  nekog plina može lako odrediti mjerenjem njegove gustoće. Prema (28) je

$$R_1 = \frac{P}{T\gamma_1} \text{ te } R_h = \frac{P}{T\gamma_h} \quad (33)$$

odakle se sa (32) dobije

$$\frac{m_1}{m_h} = \frac{R_h}{R_1} = \frac{\gamma_1}{\gamma_h} \quad (34)$$

Mjerenjem treba samo odrediti omjer jediničnih težina plina  $\gamma_1$  i vodika  $\gamma_h$  te se tako molna odnosno molekularna težina može izračunati, čim se pretpostavi veličina  $m_h$ . Kako je vodik prema drugim istraživanjima dvoatomni plin, kojemu

<sup>1)</sup> Molekularna težina  $m$  je bezimeni broj i predstavlja omjer između težine nekog molekula i težine vodikova atoma. Molna težina  $m$  je težina jednog mola u kg/Mol, dakle nije bezimeni broj. Brojčana je vrijednost obih veličina ista.

se svaka molekula sastoji iz dva atoma, to se za molekularnu težinu vodika uzima  $m_h = 2$ . U novije vrijeme daje se prednost izboru molne težine kisika kao polazne molne težine, budući da se kod kisika raspolaže točnjim kemijskim analizama nego li kod vodika. U tom se slučaju odabire molna težina kisika  $m_o = 32,000$ , čime postaje za vodik  $m_h = 2,016$ . Kod toplinskih računa međutim obično dostaje računati sa zaokruženom vrijednosti  $m_h = 2$ .

**Opća plinska konstanta.** Vrijednost opće plinske konstante u (32)

pronaći ćemo mjerenjem pripadne molne težine  $m$  i plinske konstante  $R$ , za bilo koji plin. Tako je na pr. za kisik postavljeno  $m_o = 32$ , dok je plinska konstanta mjerjenjima određena sa  $R_o = 26,50$ . Odavde se može izračunati opća plinska konstanta po (32)

$$mR = 848 \text{ [kgm/Mol K]} \quad (35)$$

Uvezši u obzir (31) glasi jednadžba stanja za 1 Mol plina

$$Pv_m = 848T \quad (36)$$

dok za bilo koju drugu količinu plina od  $M$  Molova, dakle od  $MM$  kg ona glasi

$$PV = M 848 T \quad (37)$$

Iz ove jednadžbe stanja nestala je svaka oznaka osobnosti promatranog plina, pak ta jednadžba vrijedi sasvim općenito za bilo koji idealni plin. To je jedna od znatnih prednosti uvođenja pojma o molovima.

Molni obujam  $v_m$  [ $\text{m}^3/\text{Mol}$ ] ovisan je samo o  $P$  i o  $T$ , a ne-ovisan o vrsti promatranoga plina. Tako je na pr. za  $p = 1 \text{ Atm}$  ( $760 \text{ mm Hg}$  ili  $P = 10333 \text{ kg/m}^2$ ) i za  $t = 0^\circ\text{C}$  ( $T = 273,16 \text{ K}$ )

$$v_{m, 0^\circ, 760} = \frac{848 \cdot 273,16}{10333} = 22,4 \text{ m}^3/\text{Mol} \quad (38)$$

**Normni kubni metar** Količinu plina, koja je kod pritiska od  $760 \text{ mm Hg}$  i kod  $0^\circ\text{C}$  zatvorena u prostoru od  $1 \text{ m}^3$ , zovemo normnim kubičnim metrom ili normalnim kubičnim metrom. Oznaka mu je  $\text{Nm}^3$ . Pri tom je

$$1 \text{ Nm}^3 = \frac{1}{22,4} \text{ Mol} \equiv \frac{m}{22,4} \text{ kg}$$

dok je

$$1 \text{ Mol} = 22,4 \text{ Nm}^3 \equiv m \text{ kg} \quad (39)$$

Prema tome ovaj  $Nm^3$  ne označuje neki obujam, već jednu sasvim određenu težinu (masu) plina. Zato mu ime nije najzgodnije odabранo. Tako možemo na pr. i kod  $200^\circ C$  i kod  $3\text{ at}$  imati količinu plina od  $1 Nm^3 = \frac{1}{22,4} \text{ Mol}$ , samo njezin obujam nije više  $1 m^3$  već

$$V = \frac{848}{22,4} \frac{T}{P} = \frac{848 \cdot 473,16}{22,4 \cdot 30000} = 0,597 m^3$$

Za tehničke je račune normni kubni metar prikladniji od 1 Mola jer je manja jedinica, i jer nam osim toga daje odmah predodžbu o veličini prostora, koji bi taj plin pri okolišnoj temperaturi i okolišnom pritisku zapremio.

Za mnoge je račune, naročito za one kod izgaranja, od prednosti, ako se po prijedlogu Mollier-a odabere za jedinicu ona količina plina, koja je u jednostavnom brojčanom omjeru s molom. Tako se pokazala vrlo prikladnom količina  $\frac{1}{24}$  Mola, koja je po težini nešto manja od  $1 Nm^3$ . Pak je možemo označiti kao mali normni kubni metar,  $1 nm^3$ . Tu je

$$1 nm^3 = \frac{1}{24} \text{ Mol}; \quad 1 \text{ Mol} = 24 nm^3 \quad (39a)$$

Količina plina od  $1 nm^3$  zauzima prostor od  $1 m^3$  pri  $1 \text{ at}$  ( $10000 kg/m^2$ ) i pri  $10^\circ C$ , što još bolje odgovara okolišnom stanju, nego li je to bilo pri  $1 Nm^3$ .

Kadkada se nailazi na podatke za pravi (zbiljski) normni kubni metar za razliku od teoretskoga. Pji tom zbiljski  $Nm^3$  označuje onu količinu plina, koja je pri odabranome normalnom stanju zbilja sadržana u prostoru od  $1 m^3$ . Ova se količina nešto razlikuje od one, koju bismo teoretski izračunali po zakonu idealnih plinova, a to zato, što se sitna otstupanja od zakona idealnih plinova mogu opaziti već i kod atmosferskog pritiska.

Kod normnog kubnog metra, koji se definira kao dio jednoga mola izbjegava se ovakvoj neugodnoj dvoznačnosti.

## Unutarnja energija

**Pokusi** Već godine 1806. istraživao je GAY-GAY-LUSSAC-a. LUSSAC pokusima kaloričku jednadžbu stanja unutarnje energije plinova

$$u = f(P, t) \quad (40)$$

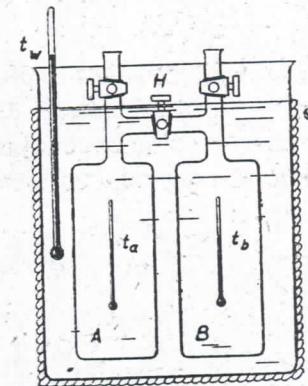
U tu svrhu izveo je pokus, kojega je kasnije JOULE još dotjerao. Dvije posude  $A$  i  $B$ , sl. 15, smještene su u zajedničku vo-

denu kupku, a mogu se međusobno spojiti otvaranjem pipca  $H$ . Posuda  $B$  evakuirana je na niski pritisak  $p_b$ , dok se posudu  $A$  napuniло s pokusnim plinom (na pr. uzduhom) pritska  $p_a$ . Pošto su se temperature kupke i obih posuda izjednačile, a to se može kontrolirati termometrima, otvorimo pipac  $H$ . Pritisici se u posudama  $A$  i  $B$  izjednačće time, što jedan dio plina prestruji u posudu  $B$ . Plin se u posudi  $A$  rastegne od  $p_a$  na  $p$  pak se pri tom možda i nešto ohladi. U posudi se  $B$  plin naprotiv komprimira od  $p_b$  na  $p$ , pak temperatura u  $B$  trenutačno nešto poraste. Za kratko vrijeme izjednače se temperature obih posuda i kalorimetarske vode na  $t^0 C$ .

Poslije pokusa plin je pod drugim pritiskom nego li s početka, pak bi se po (37) očekivalo, da će plin u tom novom stanju imati i drugu vrijednost unutarnje energije  $U_g$  nego li je bila  $U_g'$  prije izjednačenja pritiska. Budući da se kalorimetru nije ni dovela ni odvela toplina, to mora po prvom glavnom stavku zbir unutarnjih energija plina  $U_g'$  i vodene kupke  $U_w$  prije pokusa i poslije pokusa ostati jednak

$$U_g' + U_w = U_w + U_g \text{ ili } U_g' - U_w = U_g - U_g' \quad (41)$$

Pokus s idealnim plinovima pokazao je međutim, da nakon izjednačenja nije bilo razlike između temperature kupke  $t_w$  prije pokusa i  $t_w$  poslije pokusa. To znači da je i unutarnja energija kupke ostala ista,  $U_w' = U_w$ , a po (41) i unutarnja energija plina  $U_g' = U_g$ . Prema tome se kod idealnih plinova unutarnja energija kod ovoga pokusa nije promijenila. Zato je ona kod idealnih plinova neovisna o pritisku, dakle i o gustoći. Gustoća se plina naime pri opisanom pokusu također znatno promjenila. Vidimo, da je kod idealnih plinova — jer se samo s ovakvim plinovima dobilo opisani rezultat — unutarnja energija



Sl. 15. Određivanje ovisnosti unutarnje energije od gustoće

samo funkcija temperature, budući da je to jedina veličina stanja, koja je pored unutarnje energije prije i poslije pokusa ostala ista. Ovu spoznaju možemo sažeti u oblik

$$u = f(t) \quad (\text{za idealne plinove}) \quad (42)$$

No kako ova funkcija pobliže izgleda, to nam opisani pokusi ne mogu reći.

Kod pravih se plinova kod viših pritisaka opaža, da se pri opisanom pokusu temperatura u kalorimetru nešto mijenja. U tom je slučaju unutarnja energija ovisna kako o temperaturi, tako i o pritisku, dotično o gustoći plina.

Točnost netom opisanog pokusa nije bila velika, budući da se u kalorimetar može smjestiti tek nekoliko grama plina, dok je težina kalorimetarske vode daleko veća, što je nepovoljno za točnost mjerena. No kasniji pokusi, koji su izvedeni na drugi povoljniji način, u cijelosti su potvrdili gornja razlaganja.

**Specifična toplina** Ovisnost se unutarnje energije od temperature može dobro prikazati uvedenjem pojma specifične topline. Ovu ćemo definirati izrazom

$$c = \frac{dQ}{dt} \quad [\text{kcal}/\text{kg } {}^{\circ}\text{C}] \quad (43)$$

kao onu količinu topline, koju treba dovesti jedinici količine tvari (ovdje jednom kilogramu) da bi joj temperatura porasla za  $1 {}^{\circ}\text{C}$ . Specifična je toplina općenito promjenljiva s temperaturom. Tako na pr. kod vode od nekih  $30 {}^{\circ}\text{C}$  pokazuje specifična toplina minimum, kako se to vidi iz sl. 16a. Za točne račune treba ponekad uzeti u obzir i promjenljivost specifične topline s pritiskom.

Vrijednosti specifičnih toplina dobivenih pokusom, mogu se dovoljnom točnosti prikazati empiričkim redom potencija, u kojem pojedine koeficijente određujemo iz eksperimentalnih podataka. Broj članova ovakvoga reda ovisi o tome, do koje

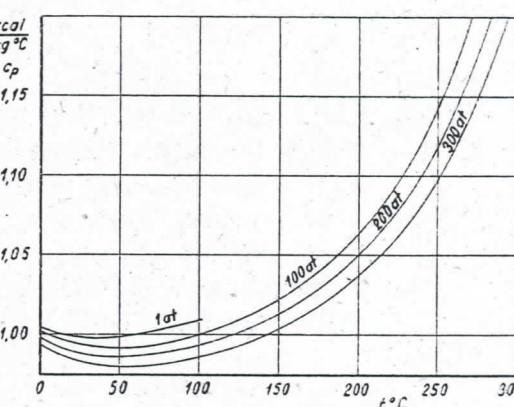
točnosti želimo reproducirati eksperimentalne podatke. U takvom je slučaju

$$c = \alpha + \beta t + \gamma t^2 + \dots \quad (44)$$

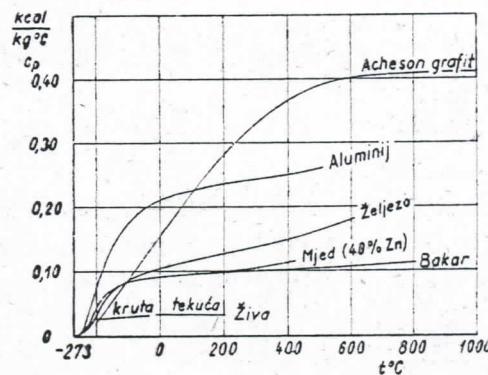
U Sl. 16b prikazan je tok specifične topline za neke tvari u ovisnosti od temperature.

Spomenuta definicija određuje specifičnu toplinu jednoznačno kako kod kručnih tjelesa tako i kod nestišljivih kapljivina. Tome nije tako kod plinova. Neka nam dva primjera posluže za razjašnjenje.

U posudi s nepotpustljivim stijenkama, sl. 17, zatvoren je 1 kg nekoga plina. Zbog nepotpustljivosti stijenke posude ne može se mijenjati obujam plina, pak je  $v = \text{konst}$ . Dovedemo li tom plinu količinu topline  $\Delta Q$ , to će temperatura porasti, a kao popratna pojava povisit će se i pritisak. Specifična je toplina kod ovakve promjene stanja pri  $v = \text{konst}$



Sl. 16a. Specifična toplina kapljive vode



Sl. 16b. Specifična toplina nekih tvari

$$\left( \frac{\Delta Q}{\Delta t} \right)_v = c_v \quad (45)$$

Ponovimo li slični pokus s plinom zatvorenim u posudi s pomičnim stапом, sl. 18., i to kod konstantnoga pritiska, to će

se obujam s porastom temperature povećati. Specifična toplina kod ugrijavanja kod stalnog pritiska bit će



Sl. 17. Grijanje pri konstantnom volumenu

U tom se slučaju toplina troši kako za ugrijavanje plina tako i za vršenje rada spram stapa-noga pritiska. Zato možemo očekivati, da će se specifične topline  $c_p$  i  $c_v$  primjetno razlikovati. To se potvrđuje slijedećim razmatranjima. Prema (15b) općenito je

$$c = \frac{dQ}{dt} = \frac{du}{dt} + AP \frac{dv}{dt} \quad (47)$$

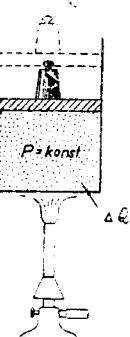
Za proces pri  $v = \text{konst}$ , t. j. za  $dv = 0$ , bit će

$$c_v = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_v \quad (48)$$

Za ugrijavanje kod stalnoga pritiska  $p = \text{konst}$ , bit će

$$c_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_p = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_p + AP \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_p \quad (49)$$

U slučaju da promatramo idealne plinove, unutarnja je energija neovisna o pritisku  $P$  i o volumenu  $v$ , dakle



Sl. 18. Grijanje pri stalnom tlaku

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_v = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_p = \frac{du}{dt} = c_v \quad (\text{idealni plinovi}) \quad (50)$$

Tako dobivamo iz (49)

$$c_p = c_v + AR; \quad c_p - c_v = AR \quad (\text{idealni plinovi}) \quad (52)$$

Kod grijanja se pri stalnom pritisku troši toplina  $c_p$  u prvom redu za povećanje unutarnje energije  $u$  idealnoga plina, što se očituje članom  $c_v$  u jednadžbi (52). U drugom se redu mora namaknuti energija za svladavanje rada rastezanja kod pomicanja stapa, a to se opet očituje članom  $AR$  u (52).

Po ovim primjerima vidimo, da za specifičnu toplinu nije odlučna samo vrsta promatrano plina, već u znatnoj mjeri i način promjene stanja pri ugrijavanju. Zato možemo kod plinova definirati čitav niz specifičnih toplina, već prema vrsti promjene stanja, koju se izvelo. Ovdje smo naveli samo dvije ovakve specifične topline i to  $c_p$  i  $c_v$ . No ove su naročito karakteristične, a osim toga bit će nam od velike koristi pri dalnjim razmatranjima.

Za druge tvari, koje se ne pokoravaju zakonu idealnih plinova, mogu se također naći opći odnosi kako slijedi. Za takve je tvari općenito unutarnja energija  $u = f(t, v)$  funkcija stanja, pak je

$$du = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_v dt + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t dv \quad (53)$$

ili

$$\frac{du}{dt} = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_v + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t \frac{dv}{dt} \quad (54)$$

Vrši li se promjena temperature  $dt$  pri stalnom pritisku  $p = \text{konst}$  to je

$$\left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_p = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_v + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_p \quad (55)$$

Iz (48), (49) i (55) slijedi sasvim općenito

$$c_p = c_v + \left| \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t + A P \right| \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)_p \quad (56)$$

Kod tvari, koje nisu idealni plinovi, pojavljuje se pri grijanju pri konstantnom pritisku još i prirast unutarnje energije s gustoćom, t. j. izraz  $\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_t$ , kako se to vidi iz (56). Kod idealnih plinova ovaj član isčezava, o čemu se na temelju jednadžbe idealnih plinova možemo lako uvjeriti.

**Unutarnja energija.** Prije nego li nastavimo razmatranjima o specifičnim toplinama idealnih plinova odredit ćemo iz (53) unutarnju energiju, uvezvi u obzir (48). Za slučaj, da je unutarnja energija ovisna samo o temperaturi a ne

i o volumenu, t. j. kad je  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t = 0$  (na pr. pri idealnim plinovima) to će u stanju 1 biti

$$u_1 = \int_{t_0}^{t_1} c_v dt + u_0 \quad (\text{idealni plinovi}), \quad (57)$$

gdje  $c_v = \varphi(t)$  mora biti poznato, na pr. na temelju mjerena. Tako smo za idealne plinove našli funkciju  $u$  (42). Za najjednostavniji slučaj, kad je  $c_v = \text{konst}$ , postaje

$$u_1 = c_v (t_1 - t_0) + u_0 \quad (c_v = \text{konst} \text{ i } \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t = 0), \quad (58)$$

gdje je  $u_0$  neodređena unutarnja energija tijela pri polaznoj temperaturi  $t_0$ .

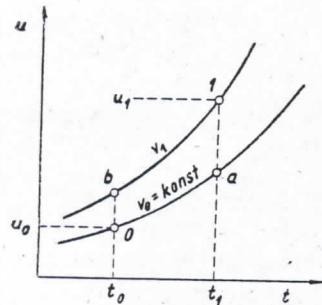
Kad se ovisnost unutarnje energije od gustoće ne može zanemariti to treba pažljivije integrirati. Opće je rješenje prema (53)

$$u_1 = \int_{t_0}^{t_1} (c_{v_0}) dt + \int_{v_0}^{v_1} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{t_1} dv + u_0 \quad (59)$$

ili

$$u_1 = \int_{t_0}^{t_1} (c_{v_1}) dt + \int_{v_0}^{v_1} \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_{t_0} dv + u_0, \quad (60)$$

gdje  $c_v$  i  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t$  treba odrediti pokusom.



Sl. 19. Ovisnost unutarnje energije o temperaturi i o gustoći

Izraz u (59) znači, da se prvi integral integrira pri stalnom volumenu  $v_0$ , što je istaknuto indeksom  $v_0$  u  $c_{v_0}$ , pri čemu se dobiva  $u$  za stanje  $(v_0, t_1)$ , točka 1 u sl. 19. Zatim se odredi drugi integral, s podržavanjem stalne temperature  $t_1$ , što je označeno indeksom  $t_1$ , te se tako dobiva unutarnja energija  $u_1$  za stanje  $(v_1, t_1)$ , točka 1. Analogno možemo jednadžbu (60) integrirati preko točke b. Na oba

načina mora se naravno dobiti isti rezultat. Za idealne plinove pasti će sve linije  $v = \text{konst}$  u ovom  $ut$ -dijagramu, sl. 19, zajedno, budući da je tu  $u$  neovisno od  $v$ . Ako je osim toga  $c_v = \text{konst}$ , bit će ta linija pravac, s nagibom  $\frac{du}{dt} = c_v$ , što slijedi neposredno iz (58).

Pravu unutarnju energiju  $u_0$  za polazno stanje ne možemo odrediti samo uz pomoć čiste termodinamike. Tako će unutarnja energija  $u_0$  predbjeko ostati neodređena.<sup>1)</sup> No ova neodređenost od  $u_0$  neće nas smetati. U svim računima, na koje ćemo naići, nastupit će samo razlike unutarnjih energija, tako da će konstanta  $u_0$  svuda ispasti odbijanjem. No kod neke promatrane tvari moramo  $u_0$  uvijek svoditi na isto odabrano osnovno stanje na pr. pri  $p_0 = 1 \text{ at}$  i  $t_0 = 0^\circ\text{C}$ . Drugim riječima u jednadžbama (59) i (60) mora se kod jedne tvari integrirati od jednog te istog osnovnog stanja. Kad ćemo dakle u računima, koji slijede, prečutno izostaviti konstantu  $u_0$ , to nemojmo pustiti izvida, da smo tu svojevoljno uzeli, da je  $u_0 = 0$ . Tako će unutarnja energija  $u$  kod temperature  $t < t_0$  imati negativne brojčane vrijednosti, što treba shvatiti samo relativno, budući da energija kao ni materija zapravo ne može biti negativna.

Jednadžbe (59) i (60) daju nam dakle mogućnost, da unutarnju energiju nekog tijela izračunamo iz eksperimentalno određenih specifičnih toplina pri raznim temperaturama. Pri tom treba posebnim pokusima odrediti još i ovisnost unutarnje energije o gustoći, t. j. veličinu  $\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_t$ , ili pak treba ovu veličinu izraziti pomoću drugih svojstava, koja se lakše mijere. To ćemo pokazati kasnije u jednadžbi (175).

Kako je kod idealnih plinova unutarnja energija  $u$  isključivo ovisna o temperaturi, to prema (48) mora i  $c_v$  biti neovisno o pritisku i volumenu. To isto vrijedi i za  $c_p$ , te ove obje specifične topline mogu kod idealnih plinova ovisiti samo

<sup>1)</sup> Tek dalnjim hipotezama o izgradnji materije (teorija kvanata po Plancku) možemo odgovoriti na ovo pitanje. Ovdje međutim ne možemo dublje u to ulaziti.

o temperaturi. Ova se ovisnost zapaža u znatnijoj mjeri tek kod viših temperatura.

**Molarna specifična toplina** Svedemo li specifičnu toplinu ne na 1 kg već na 1 Mol ( $m$  kg) tvari, to dobivamo molarnu specifičnu toplinu, koja je  $m$  puta veća

$$C_p = mc_p; C_v = mc_v \text{ [kcal/Mol } ^\circ\text{C]} \quad (61)$$

i

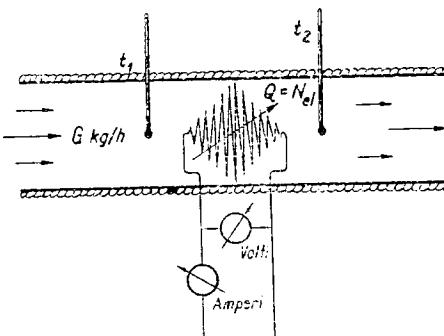
$$mc_p - mc_v = C_p - C_v = mAR = \frac{848}{427} = 1,987 \cong 2. \quad (62)$$

Razlika molarnih specifičnih toplina kod idealnih plinova neovisna je dakle i od same temperature, te je ista za sve plinove. To je od važnosti zato, što se  $C_p$  eksperimentalno lako određuje, za razliku od  $C_v$ , koja je veličina vrlo nepristupačna iole točnjim mjerjenjima. Čim se  $C_p$  odredilo eksperimentom pri raznim temperaturama, može se  $C_v$  lako izračunati prema (62).

$C_p$  možemo mjeriti kod strujanja plina. U neku cijev, sl. 20., smjestimo dva termometra te električku grijalicu. Toplina se grijanja može odrediti iz potroška električke energije. Kroz cijev puštamo struju dotičnog plina, koji ispitujemo. Količinu plina  $G$  kg/h mjerimo plinskom urom, a osim toga određujemo

topljinu grijanja  $Q$  kcal/h i prirast temperature, te tako možemo lako izračunati specifičnu toplinu  $c_p$ .

Mjerjenje se veličine  $c_p$  ni izdaleka ne može provesti istom točnosti, budući da se pri tom mora stanovita količina plina u kalorimetru smjestiti u posudu konstantnoga obujma. Samim time bit će težina zatvorenoga plina vrlo malena prema težini kalorimetra, što je vrlo nepovoljno za točnost mjerjenja.



Sl. 20. Mjerjenje specifične topline  $C_p$ .

Prema mjerjenjima imaju svi jednoatomni plinovi jednake molarne specifične topline, koje su neovisne o temperaturi, a koje iznose za jednoatomne plinove:

$$(C_p)_{1 \text{ atom}} = 5; (C_v)_{1 \text{ atom}} = 3 \text{ [kcal/Mol } ^\circ\text{C]} \quad (63)$$

Kod dvoatomnih su plinova molarne specifične topline također gotovo jednake za razne plinove, ali nisu više neovisne o temperaturi. Kod srednjih je temperature za dvoatomne plinove;

$$(C_p)_{2 \text{ atom}} = 7; (C_v)_{2 \text{ atom}} = 5 \text{ [kcal/Mol } ^\circ\text{C]} \quad (64)$$

Kod višeatomnih plinova ove su vrijednosti još veće, ali pri raznim plinovima istog broja atoma specifične topline nisu više međusobno jednake.

Pored razlike još je od posebnog značenja i omjer specifičnih toplina

$$\chi = \frac{c_p}{c_v} = \frac{C_p}{C_v} \quad (65)$$

Kod jednoatomnih je plinova  $\chi = \frac{5}{3} = 1,667$ , kod dvoatomnih  $\chi = 1,4$  dok se kod višeatomnih plinova  $\chi$  to više približava jedinici, što je veći broj atoma u molekuli. Veličina se  $\chi$  neposredno može odrediti mjerjenjem brzine zvuka nekoga plina (vidi odlomak „Brzina zvuka“) tako, da  $C_p$  i  $C_v$  možemo dobiti i bez kaloričkih mjerjenja. Iz (62) i (65) slijedi naime

$$C_p = \frac{1,987 \chi}{\chi - 1} = \frac{\chi mAR}{\chi - 1} \quad \text{te} \quad C_v = \frac{1,987}{\chi - 1} = \frac{mAR}{\chi - 1} \quad (66)$$

Tako se pri poznavanju veličine  $\chi$  specifične topline  $C_p$  i  $C_v$  mogu lako izračunati. Treba spomenuti, da je  $\chi$  kod dvo- i više- atomnih plinova ovisno o temperaturi.

Kad se mora uzeti u obzir ovisnost specifičnih toplina o temperaturi, što će biti potrebno kod viših temperatura, to je izračunavanje unutarnje energije u pomoću integracije suviše zamorno. U takvim se slučajevima preporuča računati s pojmom srednje specifične topline  $[C_v]_{t_1}^{t_2}$  i  $[C_p]_{t_1}^{t_2}$  između temperatura  $t_1$  i  $t_2$ . U tu svrhu definiramo \*

$$[C_v]_{t_1}^{t_2} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} C_v dt}{(t_2 - t_1)} \quad (67)$$

$$[C_p]_{t_1}^{t_2} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} C_p dt}{(t_2 - t_1)} \quad (68)$$

S tim možemo izračunati prirast unutarnje energije za 1 Mol prema

$$mu_2 - mu_1 = [C_v]_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) \quad (69)$$

a za 1 kg

$$u_2 - u_1 = \frac{[C_v]_{t_1}^{t_2}}{m} (t_2 - t_1) \quad (70)$$

Sl. 21a pokazuje tok srednjih molarnih specifičnih toplina  $[C_p]_o^t$  nekih plinova između  $0^\circ C$  i  $t^\circ C$ , u ovisnosti od temperature<sup>1)</sup>.

Srednju specifičnu toplinu  $[C_v]_o^t$  određujemo iz sl. 21a prema

$$[C_v]_o^t = [C_p]_o^t - 1,987$$

što je naravno točno za sve idealne plinove pri svim temperaturama.

Iako su u sl. 21a napijete samo vrijednosti  $[C_p]_o^t$  a ne  $[C_p]_{t_1}^{t_2}$ , kakve trebamo za račune karaktera jednadžbe (69), to ovakve račune ipak možemo i s ovim podacima točno provesti jer je

$$[C_p]_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) = [C_p]_o^{t_1} (t_2 - 0) - [C_p]_o^{t_1} (t_1 - 0)$$

tako da je

$$[C_p]_{t_1}^{t_2} (t_2 - t_1) = [C_p]_o^{t_1} t_2 - [C_p]_o^{t_1} t_1 \quad (71)$$

To vrijedi i za račune sa  $[C_v]_o^t$ . U slučaju, da se  $t_1$  ne razlikuje

<sup>1)</sup> Vrijednosti su preuzete iz tabele Henning: Wärmetechnische Richtwerte (Berlin 1938.)

mnogo od  $0^\circ C$ , to se dobrim približenjem može pisati

$$[C_p]_{t_1}^{t_2} \approx [C_p]_o^{t_1} + t_2$$

Kad je  $[C_p]_o^t$  linearna funkcija temperature (kako je to na pr. približno kod metana  $CH_4$  u sl. 21a) to je posljednji izraz sasvim točan.

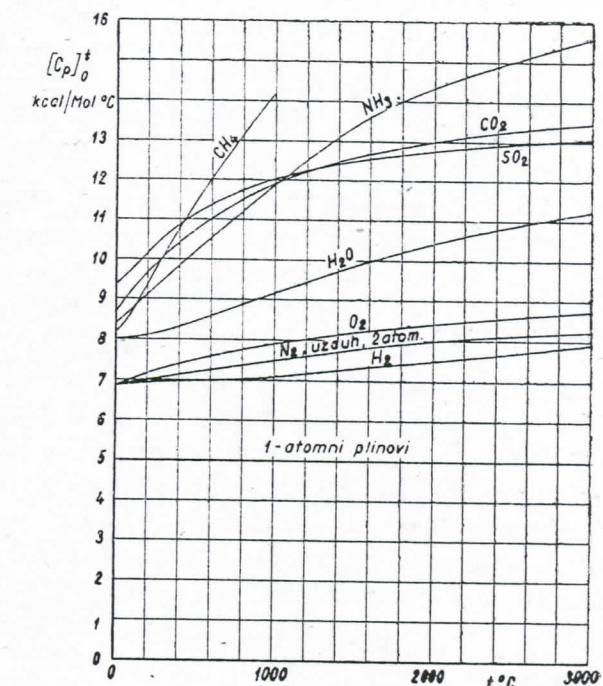
Iz sl. 21a možemo odrediti i pravu (lokalnu) specifičnu toplinu  $C_p$  pri temperaturi  $t$ . Iz (68) slijedi diferenciranjem kad uvrstimo  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = t$

$$t d[C_p]_o^t + [C_p]_o^t dt = C_p dt$$

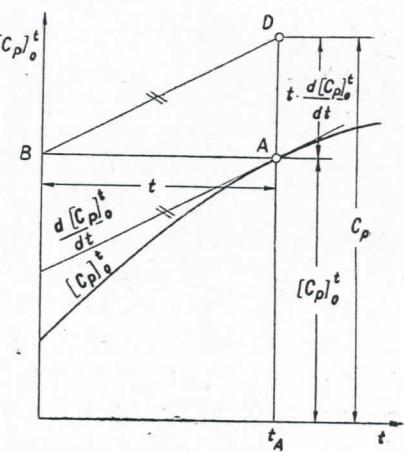
a odavle

$$C_p = [C_p]_o^t + t \frac{d[C_p]_o^t}{dt}$$

Pravu specifičnu toplinu  $C_p$  određujemo po toj jednadžbi iz srednje specifične topline  $[C_p]_o^t$  prema konstrukciji, sl. 21b. Na osi ordinata potražimo točku  $B$  u istoj visini sa zadanim točkom  $A$ . Ova je odabrana na liniji srednje specifične topline  $[C_p]_o^t$  pri zadanoj temperaturi  $t_A$ . Kroz



Sl. 21a. Srednja specifična toplina plinova



Sl. 21b. Određivanje prave specifične topline iz srednje specifične topline

*B* vučemo paralelu s tangentom u točci *A*, pak točka *D* daje traženu vrijednost prave specifične topline za zadatu temperaturu  $t_A$ .

Za tvari, kojima je termički koeficijent rastezanja  $\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)_p$  vrlo malen, kako je to kod kapljivina i kod krutih tijela, postaje po (56)  $C_p = C_v = C$ . Odavde se vidi, da je kod takvih tvari specifična toplina jednoznačno određena, bez obzira na vrstu promatrane promjene stanja.

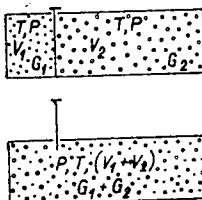
**Mješavine plinova** U tehničkim problemima nailazimo vrlo često na radna sredstva, koja su mješavine dvaju ili više plinova. Tako je i atmosferski uzduh mješavina od više plinova, a u glavnom od dušika i kisika. Ispitati ćemo, da li se i na koji način mogu zakoni jednostavnih plinova primijeniti i na njihove mješavine.

U posudi sl. 22., odijeljeni su plinovi 1 i 2 nekom pregradom. Sudionici neka prije miješanja imaju temperaturu  $t$  i isti pritisak  $P$ , a zauzimaju obujmove  $V_1$  i  $V_2$ . Maknemo li

pregradu to nastupa međusobna difuzija, pak će se plinovi nakon nekog vremena izmiješati do najsitnijih dijelića. Pri tom će se kako plin 1 tako i plin 2 rasprostraniti preko cijelog zajedničkog prostora  $V = V_1 + V_2$ . Ovo su iskustvena opažanja.

Kod idealnih se plinova prema opažanjima pri miješanju ne mijenja ni temperatura ni pritisak, a to vrijedi i za miješanje većeg broja sudionika.

Nutarnji sastav ovakve mješavine mogli bismo si pokušati predvići tako, da se svaki od plinova rasprišio u sitne izolirane djeliće, koji sadrže samo dotični plin, a da pri tom svaki ovakav dijelić stoji pod punim pritiskom mješavine. Djelići pojedinih plinova bili bi međusobno izmijenjeni. Ova se predodžba međutim ne može održati kod promatranja plinskih mješavina, u kojima ima i para, kakva je na pr. mješavina vlažni uzduh. Ako naime uzduh kod  $0^\circ\text{C}$  i 1 Atm sadrži vodenu paru, to bi po toj predodžbi sitni djelići vodene



Sl. 22. Miješanje plinova

pare morali biti pod punim pritiskom od 1 Atm. Mi znamo međutim iz iskustva, da se vodena para od 1 Atm već kod  $100^\circ\text{C}$  ukapljuje, i ne može kod nižih temperatura postojati u plinovitom stanju. O tome će se uostalom govoriti u poglavljiju o parama. Kod temperature od  $0^\circ\text{C}$  može pritisak vodene pare iznositi najviše nekoliko milimetara živinog stupca, a nikako 1 Atm. Prema tome rečena predodžba o sastavu plinskih mješavina ne zadovoljava.

Danas prihvaćamo kao jedino ispravnu predodžbu o sastavu plinskih mješavina onu, koju je postavio DALTON: svaki se plin kod otstranjuvanja pregrade širi preko čitavog raspoloživog prostora ( $V_1 + V_2$ ) i proizvodi pri tom svoj pritisak, kao da drugi plinovi nisu ni prisutni. Dotični plin nakon miješanja zauzme prema tome pojedinačni pritisak  $P_1$  odnosno  $P_2$ , koji odgovara njegovoj jednadžbi stanja za povećani prostor, t. j.

$$P_1(V_1 + V_2) = R_1 T \quad \text{za plin 1}$$

odnosno

$$P_2(V_1 + V_2) = R_2 T \quad \text{za plin 2}$$

**Dalton-ov zakon** Sveukupni pritisak  $P$  mješavine sabire se iz svih pojedinačnih (parcijalnih) pritisaka  $P_1$ ,  $P_2$  itd. pojedinih sudionika (DALTON-ov zakon). Prema tome je za  $n$  sudionika

$$P = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i \quad (72)$$

Kako su temperature prije i poslije miješanja ostale iste, to mora po jednadžbi stanja za plin 1 biti

$$PV_1 = P_1(V_1 + V_2 + \dots + V_n) \text{ ili } \frac{P_1}{P} = \frac{V_1}{V_1 + V_2 + \dots + V_n} = \frac{V_1}{V} \quad (73)$$

gdje je  $V$  sveukupni obujam mješavine. Označimo li sa

$$r_1 = \frac{V_1}{V}; \quad r_2 = \frac{V_2}{V} \quad (74)$$

prostorne (zapreminske) udjele pojedinih plinova u mješavini, to vidimo, da se pojedinačni pritisici raznih sudionika odnose kao prostorni udjeli. Osim toga je

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 1 \quad (75)$$

Prostorni udjeli daju zornu predodžbu o sastavu smjese. Oni označuju obujme, koje bi zauzeli pojedini sudionici, kad bi ih izdvojili iz  $1 \text{ m}^3$  mješavine i stavili ih pojedinačno pod puni pritisak mješavine  $P$ , pri istoj temperaturi  $t$ .

Uska veza postoji i između prostornih udjela i težinskih udjela pojedinih sudionika. Kao težinske udjele označujemo odnose

$$g_1 = \frac{G_1}{G}, \quad g_2 = \frac{G_2}{G} \quad \text{itd.} \quad (76)$$

gdje su težine  $G_1$  i  $G_2$  itd. težine pojedinih plinova, dok  $G$  prikazuje težinu sveukupne mješavine. Po tome je

$$\begin{aligned} G_1 + G_2 + \dots + G_n &= G \\ g_1 + g_2 + \dots + g_n &= 1 \end{aligned} \quad (77)$$

Kod istih pritisaka i temperatura težine su pojedinih sudionika razmjerne obujmu i molnoj težini, pak je

$$\frac{G_1}{G_2} = \frac{V_1 m_1}{V_2 m_2}$$

ili sa (74) i (76)

$$\frac{g_1}{g_2} = \frac{r_1 m_1}{r_2 m_2}$$

Kod većeg broja sudionika izrazuje se to razmjerom

$$g_1 : g_2 : \dots : g_n = r_1 m_1 : r_2 m_2 : \dots : r_n m_n \quad (78)$$

a odavde sa (77) za  $i$ -ti plin mješavine

$$g_i = \frac{r_i m_i}{\sum_{i=1}^n (r_i m_i)} \quad (79)$$

Sad ispitajmo jednadžbu stanja mješavine! Zbrojimo li jednadžbe stanja (71) pojedinih sudionika, to dobivamo

$$\sum_{i=1}^n (P_i V) = \sum_{i=1}^n (G_i R_i T)$$

ili pak

$$V \sum P_i = G T \sum (g_i R_i)$$

Ako za posljednju sumu na desnoj strani zbog kratkoće uvrstimo

$$R = \sum_{i=1}^n (g_i R_i) = g_1 R_1 + g_2 R_2 + \dots + g_n R_n \quad (80)$$

pak to stavimo u (72), to slijedi

$$PV = GRT \quad (81)$$

t. j. izraz, koji je formalno identičan s jednadžbom stanja nekog idealnog plina. Tu su veličine  $P$ ,  $V$ ,  $T$  i  $G$  veličine stanja mješavine, po čemu vidimo, da se jednadžba stanja mješavine poklapa s jednadžbom stanja nekog idealnog plina, kojega bi plinska konstanta bila  $R$ . Tu plinsku konstantu mješavine možemo izračunati iz težinskih udjela i plinskih konstanti pojedinih sudionika i to po (80). Iz (35), (79) i (80) slijedi

$$R = \frac{r_1 m_1}{\sum (r_i m_i)} \frac{848}{m_1} + \frac{r_2 m_2}{\sum (r_i m_i)} \frac{848}{m_2} + \dots = \frac{848}{\sum (r_i m_i)} (r_1 + r_2 + \dots) \quad (82)$$

a zbog (75)

$$R = \frac{848}{\sum_{i=1}^n (r_i m_i)} = \frac{848}{m} \quad (83a)$$

gdje je

$$m = \sum_{i=1}^n r_i m_i \quad (83b)$$

Veličinu  $m$  možemo shvatiti kao prividnu molnu težinu mješavine, budući da se mješavina vlada kao neki umišljeni idealni plin s molnom težinom  $m$ . Time je količina plina izražena u molovima

$$M = \frac{G}{m} [\text{Mol}] \quad (84)$$

pak opća jednadžba stanja mješavine glasi

$$PV = 848 M T \quad (85)$$

Molna količina mješavine sastoji se iz molnih količina sudionika

$$M = M_1 + M_2 + \dots M_n \quad (86)$$

tako, da iz jednadžbe stanja jednog sudionika

$$PV_i = 848 M_i T \quad (87)$$

i iz (74) i (85) slijedi

$$r_i = \frac{V_i}{V} = \frac{M_i}{M} \quad (88)$$

Po ovome izrazu prostorni udjeli ujedno predočuju i molne udjele pojedinih sudionika u mješavini. To je od višestrukih prednosti. Tako na pr. uobičajena plinska volumetrička analiza neposredno daje analitičke podatke u prostornim udjelima pojedinih sudionika, a po (88) to odmah znači i molne udjele.

Spomenuli smo, da se kod miješanja idealnih plinova ne mijenja temperatura. Osim toga se kod miješanja ne mijenja unutarnja energija, budući da se posudi niti dovodi, niti odvodi toplina niti troši vanjski rad. Iz toga slijedi, da se unutarnja energija mješavine sastoji iz unutarnjih energija pojedinih sudionika iste temperature. To isto vrijedi naravno i za specifične topline

$$c_v = g_1 c_{v_1} + g_2 c_{v_2} + \dots + g_n c_{v_n} = \sum_{i=1}^n (g_i c_{v_i}) \quad (89)$$

i

$$c_p = \sum_{i=1}^n (g_i c_{p_i}) \quad (90)$$

Molarne specifične topline dobivamo analogno

$$C_v = \sum_{i=1}^n r_i C_{v_i}; \quad C_p = \sum_{i=1}^n r_i C_{p_i} \quad (91)$$

Naravno, da i ovdje važe jednadžbe (61), (62), (65) i (66), ako u njih za  $m$  uvrstimo prividnu molnu težinu po (83).

### Posebne promjene stanja idealnih plinova

Kod tehničkih procesa, kojima je svrha proizvesti mehanički rad, inženjera zanimaju oni faktori, koji su od utjecaja na način rada kao i na čvrstoću i veličinu uređaja. To su u prvom redu pritisak  $P$ , temperatura  $T$  i obujam  $V$  radnog medija u raznim otsjecima procesa. Pored toga nas osobito zanimaju potrebne količine topline  $Q$  i rad  $L$ , koji se može dobiti, budući da su pogonski troškovi u nazujoj vezi s ovim veličinama. U tu svrhu promotrit ćemo između svih mogućih promjena stanja idealnih plinova naročito onakve, koje kod tehničkih procesa naročito često susrećemo, a koje se i po svom obliku naročito ističu.

**Promjena stanja kod  $V = \text{konst}$  (izohora)** Ovu smo promjenu stanja već upoznali kod razmatranja o specifičnoj toplini  $c_v$ . Plinu u posudi s krutim stijenkama, sl. 23., dovodimo kod konstantnog volumena  $V$  toplinu. Tako raste pritisak plina u posudi, ali on ne može izvršiti neki rad, jer je  $V = \text{konst}$ , dakle  $dV = 0$ , pa prema tome i  $dL = PdV = 0$ .

Dovedena se toplina može po prvom glavnom stavku izraziti kao

$$Q = U_2 - U_1 = Gc_v(t_2 - t_1) \quad (93)$$

ako smijemo pretpostaviti, da je  $c_v$  unutar temperaturnog područja  $(t_2 - t_1)$  neovisno o temperaturi, t. j. konstantno. Po (27) može se odrediti konačna temperatura iz pritisaka

$$T_2 = \frac{p_2}{p_1} T_1 \quad (94)$$

a time se dobiva

$$Q = G c_v T_1 \frac{p_2 - p_1}{p_1}$$

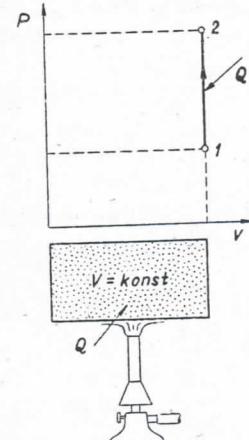
ili

$$\frac{p_2 - p_1}{p_1} = \frac{Q}{G c_v T_1} \quad (95)$$

Pritisak i temperatura rastu, kad se toplina dovodi ( $Q > 0$ ), a padaju kad se toplina odvodi ( $Q < 0$ ). Promjena stanja prikazana je u  $PV$ -dijagramu u sl. 23.

**Promjena stanja kod  $p = \text{konst}$  (izobara).** Ovu promjenu stanja također smo već spomenuli, i to kod promatranih specifične topline  $c_p$ . Izvest je možemo, bar u zamisli, u nekom cilindru, kojega je stap opterećen nepromjenljivom vanjskom silom, a stap se može pomicati bez trenja, sl. 18 i 24. Grijemo li plin, to se njegovo stanje mijenja od stanja 1 do stanja 2. Prema (10) je dovedena toplina

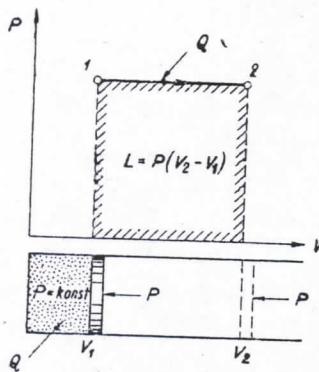
$$Q = U_2 - U_1 + A \int_1^2 P dV = U_2 - U_1 + AP(V_2 - V_1) = \\ = G \{c_v(t_2 - t_1) + AR(t_2 - t_1)\} \quad (96)$$



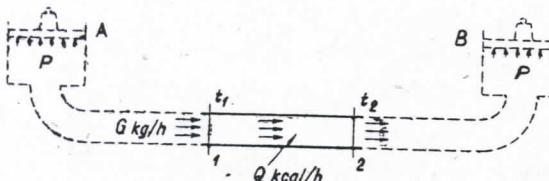
Sl. 23. Promjena stanja pri  $V = \text{konst}$

a sa (52)

$$Q = G c_p (t_2 - t_1) \quad (97)$$

Sl. 24. Promjena stanja pri  $p = \text{konst}$ 

u nekoj cijevi možemo zamisliti dva stapa  $A$  i  $B$ , sl. 25. Ovi procesi od važnosti su za izmjenjivače topline. Dovodimo li između presjeka  $1$  i  $2$  toplinu  $Q$  kcal/h, to će čestica plina, koja se upravo nalazi u presjeku  $1$  biti u stanju  $p, t_1, v_1$ , a dok dospije u presjek  $2$  zauzeti će stanje  $p, t_2, v_2$ . U

Sl. 25 Strujanje pri  $p = \text{konst}$ 

jednom satu prostruji mnogo takvih čestica kroz oba presjeka, a sveukupna im je težina  $G$  kg/h, pak je

$$Q = G c_p (t_2 - t_1) \quad [\text{kcal}/\text{h}]$$

To je ista jednadžba kao i (97), s tom razlikom, da se ovdje toplina i težina moraju uvrstiti u količinama, koje prolaze na pravom u jednom satu ili kojoj drugoj jedinici vremena. Na taj se način mogu svi odnosi, koje smo dobili kod izobarnih procesa primjeniti i na strujanja. Rad  $L$  utroši se kod stru-

janja na to, da se obujam plina, koji se povećao za  $(V_2 - V_1)$  potisne kroz presjek  $2$ . Taj bi se rad mogao dobiti u obliku korisnog rada kao differenca radova u zamišljenim cilindrima  $A$  i  $B$ . On se i u tehničkim procesima opet dobiva, kad je na pr. na cijev priključena parna turbina ili stupni parni stroj, u kojem se proizvodi rad.

**Promjena stanja kod** Kod veoma polaganog rastezanja plina u  $t = \text{konst}$  (izoterma) nekom cilindru, koji nije izoliran, dostrjavat će plinu kroz stijenke toplina iz okoline. Rasteže li se plin dovoljno polagano, to će dostrjavati toliko topline, da se temperatura plina i okoline neće primjetno razlikovati. Ako je temperatura tog toplinskog izvora (okoline) stalna, to će i temperatura plina prigodom takve polagane ekspanzije ostati konstantna. U tom je slučaju

$$P_1 V_1 = GRT = P_2 V_2 = PV = \text{konst} \quad (100)$$

To je jednadžba izoterme, koja se u  $PV$ -dijagramu, sl. 26., prikazuje kao istostrana hiperbola.

Konstanta ove hiperbole određuje njen položaj u dijagramu. Ta konstanta ovisna je o temperaturi koja vlada. Zbog  $t = \text{konst}$  mora kod idealnih plinova biti i  $U_1 = U_2$ , pak je za taj slučaj po prvom glavnom stavku

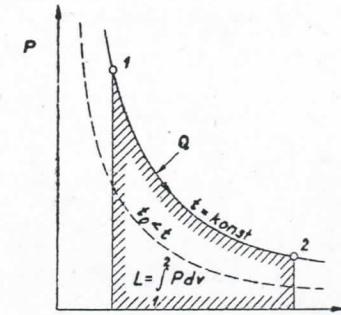
$$Q_{12} = AL_{12} \quad (101)$$

Kod izotermne ekspanzije nekog plina namiče se izvršeni rad isključivo iz dovedene topline, dok se unutarnja energija uopće ne troši.

Rad možemo izračunati iz podataka o početnom i konačnom stanju

$$L_{12} = \int_1^2 P dV = \int_1^2 \frac{GRT}{V} dV = GRT \ln \frac{V_2}{V_1} = GRT \ln \frac{P_1}{P_2} \quad (102)$$

ili pak



Sl. 26 Izotermička promjena stanja

$$L_{12} = P_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_2} = P_2 V_2 \ln \frac{p_1}{p_2} = PV \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (103)$$

Ovdje ne treba prirodni logaritam  $\ln$  zamijenit s BRIGGS-ovim (dekadskim) logaritmom  $lg$ .

**Promjena stanja pri  $Q=0$  (adijabata)** Ova se važna promjena stanja pojavljuje, kad je ili cilindar tako potpuno izoliran, ili kad je ekspanzija tako brza, da se za vrijeme promjene stanja ne mogu izmijeniti primjetne količine topline između plina i okoline cilindra. Rastezanje međutim ne smije teći tako naglo, da bi se poremetila ravnoteža, jer u protivnom slučaju ne bi više vrijedile jednadžbe (13) i (15). Kad je  $Q=0$  i  $dQ=0$ , bit će po prvom glavnom stavku

$$U_1 - U_2 = AL_{12}$$

ili

$$dU = -AdL \quad (104)$$

ili drugim riječima: pri adijabatskoj se ekspanziji dobiveni rad vrši isključivo na račun unutarnje energije tijela. Zato adijabatska ekspanzija prouzrokuje hlađenje medija. Izračunat ćemo ovdje, koliki je taj pad temperature. Po (27) je

$$d(PV) = GRdT$$

ili

$$GdT = \frac{d(PV)}{R} \quad (105)$$

a prema tome

$$dU = Gc_v dT = \frac{c_v}{R} d(PV)$$

Uvrstimo li ovaj izraz u (104) i uzmemmo li u obzir, da je

$$dL = PdV = PV \frac{dV}{V}$$

to dobivamo

$$c_v \frac{d(PV)}{AR} + PV \frac{dV}{V} = 0$$

Uzmemmo li još u obzir (66) i (61), to slijedi

$$\frac{1}{\gamma-1} \frac{d(PV)}{PV} + \frac{dV}{V} = 0 \quad (106)$$

kao diferencijalna jednadžba adijabate. Integracijom dobiva se

$$PV^\gamma = \text{konst} = P_1 V_1^\gamma = P_2 V_2^\gamma$$

ili opet

$$Pv^\gamma = \text{konst} \quad (107)$$

Ova jednadžba adijabate daje u  $PV$ -dijagramu općenitu hiperbolu, sl. 27., koja je nešto strmija od istostrane hiperbole izoterme. Konstantu u (107) određujemo iz bilo kojeg poznatog stanja, na pr. iz polaznog stanja 1 adijabate

$$\text{konst} = P_1 v_1^\gamma$$

Iz (27) i (107) slijede za adijabatu ovi odnosi

$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\gamma = \left( \frac{v_2}{v_1} \right)^\gamma \quad (108)$$

Izvršeni rad adijabate, koji se u sl. 27. predučuje kao obrubljena površina, mogli bismo odrediti integracijom jednadžbe (107). Na elegantniji način dolazimo do cilja slijedećim putem. Izvršeni je rad po (104)

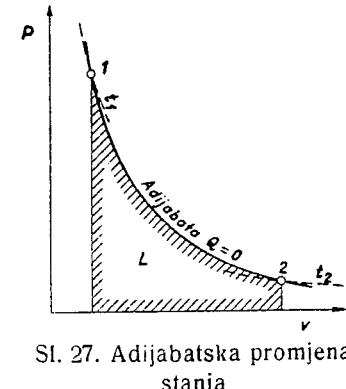
$$AL = U_1 - U_2 = Gc_v(T_1 - T_2) = Gc_v T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] [\text{kcal}] \quad (109)$$

Uz pomoć jednadžbe stanja i uvezvi u obzir, da je  $c_v = \frac{AR}{\gamma-1}$  dobivamo

$$L = \frac{P_1 V_1}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] = \frac{GRT}{\gamma-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] [\text{mkg}] \quad (110)$$

To je izraz, do kojega bismo naravno došli i običnom integracijom jednadžbe (107) u granicama od 1 do 2.

Strogo uvezvi, u strojevima se ne postizava točno **Politrop** ni izotermna ni adijabatska ekspanzija, budući da gotovo nikad nisu ispunjeni uvjeti ni za jednu od ovih promjena stanja. Stvarne linije ekspanzije ili kompresije, na kakve



nailazimo kod strojeva, možemo međutim vrlo dobro predočiti općim hiperbolama, kojih se eksponent  $n$  razlikuje od adijabatskog eksponenta  $\gamma$ . To se opazilo analizom mnogobrojnih indikatorskih dijagrama, snimljenih mehaničkim načinom na cilindrima parnih strojeva, kompresora itd. Takve linije slijede obično dovoljno točno jednadžbu

$$Pv^n = \text{konst} \quad (111)$$

Nazivamo ih politropama, što znači, „mnogovrsnima“. Upotrebom jednadžbe stanja, dobivamo za politropske promjene slične odnose kao i kod adijabate

$$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{n-1}{n}}; \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^{n-1}; \quad \frac{p_1}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^n = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^n \quad (112)$$

Kod politropske se promje stanja, za razliku od adijabatske, izmjenjuje toplina. Zanima nas, kolika je ona. Diferenciranjem politropske jednadžbe (111) slijedi

$$nPdV + VdP = 0 \quad (113)$$

Po jednadžbi stanja, koja mora biti zadovoljena u svakom trenutku, bez obzira na to, o kakvoj se promjeni stanja radi, diferenciranjem se dobiva

$$PdV + VdP = GRdT \quad (114)$$

Odbijanjem (114) od (113) slijedi

$$(n-1) PdV = -GRdT$$

Time se dobije

$$\begin{aligned} dQ &= dU + APdV = Gc_vdT - \frac{GARdT}{n-1} = \\ &= G \left( c_v - \frac{c_p - c_v}{n-1} \right) dT = Gc_v \frac{n-\gamma}{n-1} dT \end{aligned} \quad (115)$$

Uvrstimo li ovdje

$$c_v \frac{n-\gamma}{n-1} = c_n \quad [\text{kcal/kg } {}^\circ\text{C}] \quad (116)$$

to slijedi

$$dQ = Gc_n dT \quad (117)$$

Veličina  $c_n$  ima dimenziju i značenje neke specifične topline. Kad se eksponent  $n$  prilikom ekspanzije ne mijenja, to će po (116) i  $c_n$  biti konstantno. Obično će  $c_n$  biti negativno, i to uvijek, kad je  $1 < n < \gamma$ . U tom se slučaju toplina za vrijeme ekspanzije dovodi mediju, a njemu usprkos toga pada temperatura. Za vrijeme kompresije odvodi mu se toplina, a ipak mu temperatura raste.

Rad dobiven ekspanzijom između dvaju stanja odredit ćemo za politropu po prvom glavnom stavku uz pomoć (117)

$$AdL = dQ - dU = Gc_n dT - Gc_v dT = -Gc_v \frac{\gamma-1}{n-1} dT$$

Odavle dobivamo integracijom

$$AL = Gc_v \frac{\gamma-1}{n-1} T_1 \left( 1 - \frac{T_2}{T_1} \right) \quad (118)$$

a kad je preudesimo

$$L = \frac{P_1 V_1}{n-1} \left[ 1 - \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \right] \quad (119)$$

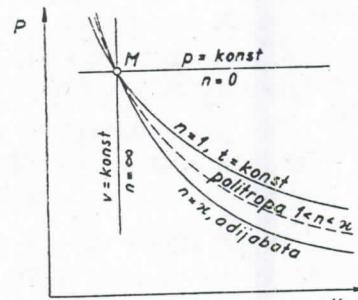
Do istog bi rezultata došli analitičkom integracijom izraza (111).

Tom zgodom potrebno je upozoriti na to, da su promjene stanja, koje smo prije razmotrili, samo posebni slučajevi poltropi. Tako se dobiva za

- $n = 1$  izoterma
- $n = \gamma$  adijabata
- $n = 0$  izobara
- $n = \infty$  izohora

Kroz zadatu točku  $M$  u  $PV$ -dijagramu teku ove razne linije prema shematskoj slici 28. Pri tom je adijabata uvijek strmija od izoterme iste točke.

Postojanje politropske specifične topline  $c_n$  pokazuje, da kod plinova nalazimo čitav niz specifičnih toplina, koje su



Sl. 28. Politropska promjena stanja

opada usprkos dovođenju topline.

Da bismo iz mehanički snimljenih ekspanzionih linija nekoga stroja, koje dobivamo pomoću t. zv. indikatora, mogli odrediti politropski eksponent, možemo postupiti ovako. Logaritmiranjem politropske jednadžbe dobivamo

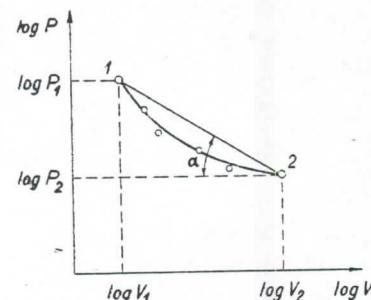
$$\lg P_1 + n \lg V_1 = \lg P_2 + n \lg V_2$$

a odavle

$$n = \frac{\lg P_1 - \lg P_2}{\lg V_2 - \lg V_1} \quad (120)$$

Unesemo li u koordinatni sustav po sl. 29. logaritme pritisaka i volumena za pojedine točke ekspanzije linije, koje smo dobili iz indikatorskog dijagrama, to je po slici i po (120)

$$n = \tan \alpha$$



Sl. 29. Određivanje politropskog eksponenta iz podataka eksperimenta

osim o samome plinu ovisne još i o promatranoj promjeni stanja. Specifične topline  $c_p$  i  $c_v$  su samo posebni oblici od  $c_n$ .

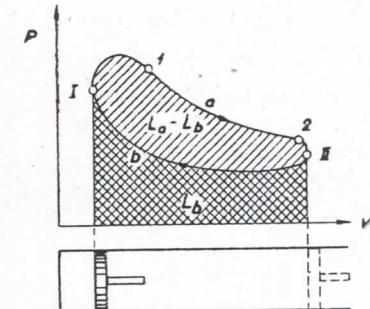
Razlog, što je  $c_n$  obično negativan, nalazimo u činjenici, što se pri takvim ekspanzijama plinu dovodi premalo topline, a da bi se njome mogla snabdjeti energija izvršenog rada. Naprotiv se jedan dio rada mora uzeti iz zalihe unutarnje energije plina, zbog čega njegova temperatura

Kod konstruiranja ekspanzionih ili kompresionih linija najbolje je pojedine točke proračunati. S logaritmarom teče to vrlo jednostavno. Ima i grafičkih metoda, kao ona po BRAUER-u<sup>1)</sup> no manjak im je, što one davaju samo ograničeni broj točaka takve krivulje.

### Kružni procesi

Procese, o kojima smo govorili, možemo ponoviti samo kad radnu tvar vratimo u isto početno stanje. Ponavljanje takvih procesa za tehniku je od najveće važnosti. Gotovo svi strojevi rade ritmički, t. j. oni trajno ponavljaju radni kret, koji se može sastojati i iz više elemenata.

Da bismo neki proces mogli ponoviti, treba se vratiti u polazno stanje, t. j. na isti pritisak, istu temperaturu itd. Ako je radna tvar izvršila ekspanziju od 1 do 2, sl. 30., dakle na putu  $a$  neki rad, to tu tvar moramo nekako vratiti u početno stanje 1, ako vršenje rečenog rada želimo po volji često puta ponoviti. Put, kojim tu tvar vraćamo u početno stanje, mora se naravno razlikovati od puta  $a$ , jer bismo inače sav netom dobiveni rad utrošili za izvođenje ovakvoga natražnog procesa. Odabrat ćemo zato za vraćanje put  $b$  (linija  $2 \rightarrow I \rightarrow 1$ ) po kojem dolazimo opet u polazno stanje 1. I u tom slučaju trošimo neki rad za kompresiju, ali je ovaj ipak manji od prije dobivenog rada ekspanzije na putu  $a$ . U  $PV$ -dijagramu predočuje se rad kao površina ispod linije promjene stanja, a ova je površina pozitivna, kad se integrira u smjeru pozitivne  $V$ -osi, a negativna kad se napreduje u smjeru negativne  $V$ -osi. Kako točke  $I$  i  $II$  predstavljaju krajnje položaje gibanja stapa u cilindru (t. zv. obratišta ili mrtve točke), to se



Sl. 30. Zatvoreni proces (Kružni proces)

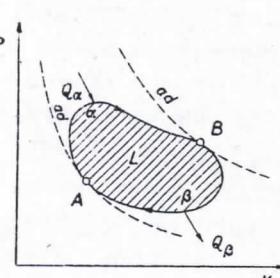
<sup>1)</sup> E. A. Brauer, Z. d. VDI 29 (1885) str. 433. Vidi također Hütte I otsjek Wärme.

od I do II po putu a dobiva rad  $L_a$ , dok se od II do I preko b troši rad  $L_b$ . Sveukupno je dobiveni rad

$$L = L_a - L_b \quad (121)$$

a taj je predložen površinom, koju zatvara naš „zatvoren“ ili „kružni“ proces 1 a 2 II b I 1. Naziva se još i ciklusom ili cikličkim procesom. U našem je slučaju tekla promjena stanja u  $Pv$ -diagramu u smislu kretanja kazaljke na uru — t. zv. desnokretni ili desni proces — a sveukupni rad bio je dobiven, dakle pozitivan. No isto tako možemo zamisliti i zatvoren proces, kod kojega linija b leži iznad a. U tom slučaju kružni proces obilazi suprotno smjeru kretanja kazaljke na uru — t. zv. lijevakretni ili lijevi proces — a sveukupni rad postaje negativan, t. j. mi ga za izvršenje procesa moramo utrošiti.

Da bismo uzmogli izvršiti kružni proces, moramo prikladno upravljati dovodenjem topline. U jednom dijelu kružnoga procesa mora se toplina radnoj tvari dovoditi, u drugom dijelu



Sl. 31. Prometanje topline kod kružnog procesa

naprotiv odvoditi. Da bi ove dijelove procesa odijelili, položimo dvije adijabate tako, sl. 31., da diraju proces, pri čem dobivamo dirališta A i B. Linijski elementi procesa u točkama A i B podudaraju se s tokom adijabata, a to znači, da se na ovim mjestima procesu niti dovodi niti odvodi topline. U svakom drugom dijelu procesa, gdje nema podudaranja s tokom adijabata, mora se naravno izmjenjivati toplina. Kod desnokretnog se procesa mora radnoj tvari u području iznad A i B dovoditi toplina  $Q_\alpha$ , a u donjem dijelu odvoditi toplina  $Q_\beta$ . Kod lijevakretnog procesa naišli bismo na sličnu izmjenu topline, samo u suprotnom smjeru.

Promatramo li kod kružnog procesa unutarnju energiju radnog medija, to vidimo, da ona prilikom promjene stanja doduše mijenja svoju vrijednost, ali tako da konačno opet zadođije svoju polaznu vrijednost, jer se medij vraća u početno stanje. Kod zatvorenog procesa prema tome unutarnja energija

na početku i na kraju procesa zauzima iste vrijednosti, tako da je konačna promjena unutarnje energije

$$\Delta U = 0$$

Po prvom je glavnom stavku

$$Q = \Delta U + AL,$$

pri čem je sveukupno dovedena toplina u našem slučaju

$$Q = Q_\alpha - Q_\beta \quad (122)$$

Zbog  $\Delta U = 0$  dobivamo tako

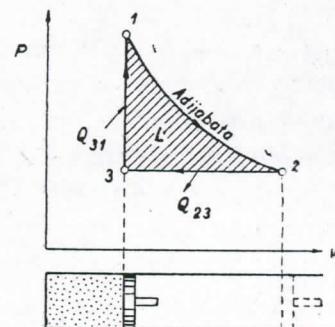
$$AL = Q_\alpha - Q_\beta \quad (123)$$

Kod kružnog je procesa dobiveni rad jednak razlici dovedene i odvedene topline.

**Toplinski spremnici** Pri našim razmatranjima nemojmo previdjeti činjenicu, da plin sam po sebi nije bio u stanju izvršiti kružni proces, dakle ni rad, već da smo se prečutno ispmogli s topinskim spremnicima izvan plina, od kojih je jedan doбавio toplinu  $Q_\alpha$ , a drugi preuzeo toplinu  $Q_\beta$ . Ovakvi spremnici bit će i u razmatranjima koja slijede, bitni sudionici procesa.

Kod desnokretnog je procesa  $AL > 0$ , pak stoga i  $Q_\alpha > Q_\beta$ . Kod lijevakretnog procesa naprotiv je  $AL < 0$ , a  $Q_\alpha < Q_\beta$ , no kako se tu mijenjaju predznaci obih toplina, to su i ovdje apsolutne vrijednosti  $|Q_\alpha| > |Q_\beta|$ .

Zbog zornosti promotrimo neke jednostavne kružne procese. Da složimo neki zatvoren proces, nadovežimo uzastopce nekoliko poznatih nam osnovnih promjena stanja tako, da se na koncu proces zatvori. Tako na pr. možemo u nekom cilindru poći od stanja 1, sl. 32., pak adijabatskom ekspanzijom doći do 2, na to nadovezati hlađenjem kompresiju pod konstantim pritiskom do 3, te se odavle dovodenjem topline pri konstantnom volumenu vratiti u polazno stanje 1. Izmjenjene topline i izvršeni rad možemo kod idealnog plina računati iz formula, koje smo gore upoznali za adijabatu, izobaru i

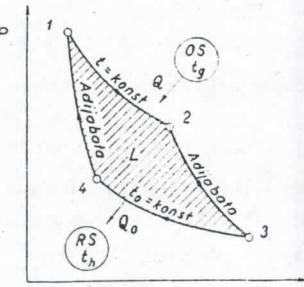


Sl. 32. Kružni proces s tri ogranka krivulja

izohoru. Ovakvi kružni procesi, koji su sastavljeni samo iz tri dijela, prilično su rijetki u tehnici.

Mnogo češće nailazimo na procese, koji su sastavljeni iz dva para istovrsnih krivulja. Takvi vrlo važni proces opisao je i proučio prvi puta francuski inženjer-oficir CARNOT.<sup>1)</sup>

#### Carnot-ov proces



Sl. 33. Carnot-ov kružni proces

ekspandirati adijabatski do stanja 3. Zbog adijabatske ekspenzija ohladi se radni medij do temperature  $t_3$ . Sad počinje kompresija, koju vodimo izotermno do 4, a u tu svrhu treba plinu odvoditi toplinu  $Q_0$ . To postizavamo tako, da cilindar stavimo u izmjenu topline s hladnjim rashladnim spremnikom ( $RS$ ) kojega je temperatura hlađenja  $t_h$  niža od temperature kompresione izoterme  $t_3 = t_4 = t_0$ . U stanju 4 prekidamo hlađenje cilindra prikladnom izolacijom, pak će nastavak kompresije od 4 do polaznog stanja 1 teći adijabatski.

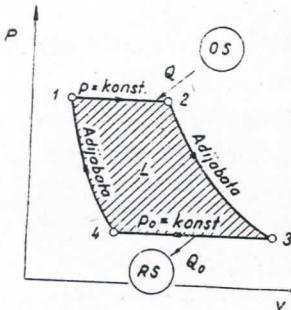
Ogrjevni spremnik i rashladni spremnik Prema izloženome je postojanje ogrjevnog rashladnog spremnika i rashladnog spremnika upravo uvjet za mogućnost provođenja CARNOT-ova kružnog procesa. I taj proces možemo izvoditi na lijevo. U tom se slučaju isti rad troši pri čem se od 4 do 3 odvodi toplina rashladnom spremniku, dok se od 2 do 1 dovodi toplina ogrjevnom spremniku. Na taj način u neku ruku dižemo toplinu od niže tem-

<sup>1)</sup> Sadi Carnot, *Reflexions sur la puissance motrice du feu*, Paris, 1824. Ponovni otisak ovoga rada kod Gauthier-Villars, Paris 1878. Njemački prijevod u Ostwald's Klassiker.

perature rashladnog spremnika na višu temperaturu ogrjevnog spremnika (dizalica topline). Da bi se to postiglo, moraju se temperature radnog procesa odabrati tako, da je  $t > t_g$  a  $t_o < t_h$ , jer samo u tom slučaju prelazit će toplina u željenom smjeru. Ali načelno dostaje, da se ove razlike temperatura odaberu po volji malene, tako da temperature odnosnih izoterma u desnom i lijevom procesu kod zadanih toplinskih spremnika mogu u graničnom slučaju postati jednake. I ako bi pri tom prelaz topline tekao beskonačno polagano, ipak taj krajnji slučaj smatramo neobično važnim, kako će se vidjeti iz nekih kasnijih razmatranja.

Produbimo li naša razmatranja o vršenju rada kod desnog CARNOT-ovog procesa, to ponajprije opažamo, da se i ovdje, kao i kod svakog drugog kružnog procesa plin na koncu vratio u početno stanje. Ali za odvijanje procesa bilo je vrlo bitno, da su postojala dva toplinska spremnika  $OS$  i  $RS$  s raznolikim temperaturama  $t_g \geq t$  i  $t_h \leq t_o$ , jer su tek ovi omogućili potrebnu izmjenu topline. Rad se mogao izvršiti tek uz pomoć ove izmijene topline, a uz posredovanje radnog medija u CARNOT-ovu procesu. Radna tvar je dakle samo radni posrednik, dok je pravi dobavljač rada zapravo ova izmjena topline, koju se omogućilo tek uz pomoć obih toplinskih spremnika. Prema tome su toplinski spremnici mnogo važniji nego li radni plin, koji smo slučajno izabrali za posrednika. To postaje još očitije, kad se pitamo, koje veličine moramo smatrati zadanim. Stanja 1, 2, 3 možemo po volji odabrati, ali opet samo tako, da se pri tom ne prekorače temperature toplinskih spremnika, jer inače ne bi bio moguć prelaz topline u željenom smjeru. Tako toplinski spremnici sa svojim temperaturama stavljaju granice kružnom procesu, te se i time očituje njihova otsudna važnost za dobivanje rada.

Ima čitav niz drugih kružnih procesa, no i kod ovih su opet potrebni toplinski spremnici različitih temperatura. Jedan je vrlo važni proces sastavljen od dviju izobara i dviju adijabata (JOULE-proces, sl. 34). Iz ogrjevnog spremnika dovodimo plinu toplinu prilikom izobarne ekspanzije od 1 do 2. Adijabatskom ekspanzijom, koja se nadovezuje, snizi se temperatura plina, te



Sl. 34. Stalnotlačni proces (Joule-proces)

perature rashladnog spremnika. Ni ovdje nije dostajao jedan spremnik za podavanje rada, već su bila potrebna dva toplinska spremnika s različitim temperaturama.

**Proizvodnja topline iz rada** Nasuprot tome sasvim se lako može pretvoriti mehanička energija u toplinu, na pr. trenjem, pa tako dobivenu toplinu predati jednom toplinskom spremniku. U tu svrhu dostaje jedan jedini toplinski spremnik.

Obzirom na razliku broja potrebnih toplinskih spremnika kod proizvodnje rada iz toplinske energije prema proizvodnji topline iz rada nameće se osnovno pitanje: postoji li možda neka osnovna razlika u proizvodnji rada iz toplinske energije s jedne strane i u proizvodnji topline iz mehaničkog rada s druge strane? Ili je ta razlika samo prividna, iz razloga što možda nismo bili dovoljno domisljati, da za prvi zadatak izmislimo neki kružni ili slični proces, koji bi se zadovoljio sa samo jednim toplinskim spremnikom? Kad bi takav proces postojao, to bi na pr. oceanski brodovi mogli svoju pokretnu snagu crpsti iz gotovo neizmjernog spremišta energije u morskoj vodi oceana, pak bi bilo suvišno da tovare i troše pogonsko gorivo. To se ne bi nikako kosilo s prvim glavnim stavkom, te to ne bi bio obični perpetuum mobile. No takav bi stroj bio za čovječanstvo od istog praktičnog značenja, kao i običan perpetuum mobile, jer je spremište energije naše okoline praktički neizmjerno veliko, te stoji badava na upotrebu. Iz tog razloga nazvao je W. OSTWALD takav stroj „perpetuum mobile druge vrste“.

postizavamo stanje 3. Ovdje počinje djelovati rashladni spremnik, pak se plin uz odvođenje topline komprimira izobarski do 4. Adijabatska komprezija, koja slijedi, dovodi plin u polazno stanje 1. Najviša temperatura plina u procesu, t. j. temperatura u stanju 2, mora biti još niža od temperature ogrjevnog spremnika, kojim se raspolaze. Najniža temperatura u procesu, stanje 4, mora još biti viša od zadane tem-

perature rashladnog spremnika. Ni ovdje nije dostajao jedan spremnik za podavanje rada, već su bila potrebna dva toplinska spremnika s različitim temperaturama.

## DRUGI GLAVNI STAVAK

Na pitanje, koje smo netom postavili, možemo jednoznačno odgovoriti s „drugim glavnim stavkom termodinamike“. Prvi su ga izrekli R. CLAUSIUS (1850) i od njega neovisno W. THOMSON (1851), kao rezultat neobično opširnog iskustva. M. PLANCK sažeо je drugi glavni stavak, oslanjajući se na THOMSONA, u ovu iskustvenu izreku: „Nije moguće izraditi periodički stroj, koji ne bi ništa drugo proizvodio, do dizanja nekog tereta uz primjereni ohlađivanje jednog toplinskog spremnika“. Drugim riječima nemoguće je ostvariti perpetuum mobile druge vrste. Time smo odgovorili na postavljeno pitanje, pak se prema tome pretvaranje topline u rad doista načelno razlikuje od pretvaranja rada u toplinu.

Navodimo i drugu formulaciju drugog glavnog stavka, kako ju je dao CLAUSIUS, a koja se osniva na drugoj iskustvenoj pojavi: „Toplina ne može sama od sebe preći od hladnjeg na toplije tijelo, i to niti neposredno, niti posredno“. Dodatkom „sama od sebe“ misli se istaknuti, da se osim spomenute izmjene topline isključuje svaka druga trajna promjena na drugim tjelesima okoline, koju bismo promjenu mogli zabilježiti našim instrumentima. Ako pak dopustimo ovakve trajne promjene na tjelesima, koja sudjeluju, ili na okolini, to se toplinu može pače vrlo lako „dignuti“ na višu temperaturu, kako to danomice provodimo s rashladnim strojevima<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Kod rashladnih strojeva troši se pogonski rad, a za dobavu tog rada mora se negdje, na pr. u električnoj centrali, izvesti neki kružni proces. Za pogon ovog kružnog procesa mora opet preći toplina od nekog ogrjevnog spremnika k nekom rashladnom spremniku, te je time nastala spomenuta trajna promjena u okolini, t. j. na spomenutim spremnicima, koju promjenu možemo naravno dokazati našim instrumentima.

Mogli bismo pokazati, da su obje formulacije drugog glavnog stavka od istog značenja, te da jedna nužno slijedi iz druge. Tome nasuprot su prvi i drugi glavni stavak potpuno neovisni zakoni, pak su zato morali zakazati pokušaji nekih autora, koji su pokušali izvesti jedan zakon iz drugoga. Oba stavka su strogi prirodni zakoni, koji ne trpe nikakve izuzetke, i koji se oslanjaju, kao i svaki drugi prirodni zakon, na vrlo bogato životno i laboratorijsko iskustvo.

**Povratni procesi** Drugi glavni stavak je princip, po kojem se nauka o toplini iz osnove razlikuje od ostale mehanike, uključivši i nauku o elektriciteti. To ima svojih razloga. Svi procesi, koji se obraduju u netom spomenutim strukama, mogu se odvijati u jednom i u njemu suprotnom smjeru, u koliko nisu skopčani s toplinskim pojavama, kao što su trenje, JOULE-ova toplina i slično. Tako na pr. možemo kod jednog proteklog mehaničkog procesa svim brzinama dati protivni predznak, pak će se proces odviti natražno, prolazeći natraške sva stanja i to bez viška na radu. Drugim riječima, svaki je mehanički proces povratan — reverzibilan —, samo ako je protekao bez trenja<sup>1)</sup>. Mi možemo takav protekli proces tako reći opozvati i čitav sustav vratiti u početno stanje, a da nigdje ne ostane nikakav vidljivi trag o izvršenoj i opet opozvanoj promjeni stanja. I u nauci o toplini već smo upoznali ovakve povratne proceze. Bili su to takvi, koji su se odvijali uz trajno održavanje kako termičke tako i mehaničke ravnoteže. To su bile na pr. izotermna, adijabatska, politropska ekspanzija i kompresija. Takvi procesi mogu naravno teći samo sporo, pak ih zato treba smatrati kao granične slučajeve.

Predočimo si na pr., da vršimo rad pomoću CARNOT-ova kružnog procesa, koji smo točno prilagodili temperaturama plinskih spremnika. Taj rad možemo upotrijebiti za to, da

<sup>1)</sup> Pojavljuje li se u nekom mehaničkom procesu trenje, to se izvodi toplina, pak proces bar djelomice spada u područje nauke o plini. To onda nije više čisto mehanički problem. Mehanički proces sa trenjem ne možemo bez daljnega obrnuti i sustav vratiti u početno stanje, jer se trenjem uništio jedan dio rada (mehaničke energije), koji nam kod vraćanja procesa manjka.

gonimo jednaki ali suprotni (lijevi) CARNOT-ov proces, kako smo to prikazali u vezi s opisom tog procesa. U tom slučaju odvodimo toplinu rashladnom spremniku, a dovodimo ogrjevnom spremniku (t. zv. dizalica topline). Sad izmjenjujemo iste topline, ali u suprotnome smjeru od onoga, kod desnokretnog procesa. Na taj način ustalit ćemo prvo bitno stanje toplinskih spremnika. Kako se i plin posrednik u kružnom procesu vraća u svoje prvo bitno stanje, to su na koncu svi sudionici vraćeni u svoje prvo bitno stanje. Drugim riječima, spomenuti CARNOT-ov proces potpuno je povratan, jer sve sudionike možemo bez ikakvih drugih trajnih promjena okoline vratiti u svoja prvo bitna stanja.

**Nepovratni procesi** No postoji čitava skupina toplinskih procesa, koji su nepovratni ili ireverzibilni, t. j. takvi, kod kojih ne možemo sve sudionike vratiti u prvo bitno stanje, ako ne dopustimo neke trajne promjene u okolini. Takav je na pr. svaki proces sa pojmom trenja, koje je uvijek skopčano sa stvaranjem topline, uz pripadni gubitak rada. Zamislimo CARNOT-ov proces, ali tako, da se jedan dio prizvedenog rada trenjem pretvorio u toplinu. Ovu možemo na pr. dovesti ogrjevnom spremniku. Kad sad želimo izvesti suprotni lijevi proces, raspoloživi rad je premalen, jer je jedan dio prije prizvedenog rada progutalo trenje. Zato odaberimo za vršenje lijevog procesa nešto manju količinu plina, tako da smanjeni raspoloživi rad upravo dostaje za pogon tog lijevog procesa, Zbog manje količine raspoloživog rada bit će i toplina, koju možemo dignuti od rashladnog u ogrjevni spremnik manja. Raspoloživi rad, koji je zbog trenja manji, ne dostaje više, da se rashladnom spremniku odvede ona toplina, koja mu je kod prethodnog desnog procesa bila dovedena, pak ga tako ne možemo vratiti u prvo bitno stanje. Promjena, koja je pojmom trenja izazvana u stanju tjelesa, koja su sudjelovala, takva je, da je više ne možemo ispraviti. Jedino kad bismo uzeli u pomoć druga tijela iz okoline, mogli bismo tu promjenu ispraviti, ali bi se onda promijenilo nešto na ovim novim tijelima. Iz razloga, što se procesi, u kojima se pojavilo trenje, makar i djelomice ne mogu „povratiti“, nazivamo trenje nepovratnim

procesom. Trenjem, kao i svakim drugim nepovratnim procesom priroda se u neku ruku razvila u smjeru, iz kojega nikako više nema povratak.

Drugi jedan nepovratni proces je izmjena topline između tjelesa s većom razlikom u temperaturama. Toplina prelazi u smjeru niže temperature, a po iskustvu — drugi glavni stavak — nije moguće tu toplinu bez nekih drugih trajnih i zamjetljivih promjena vratiti natrag na višu temperaturu. Tako nije više moguće uspostaviti svuda opet ista stanja, koja su vladala prije prelaza topline.

Za neki je povratni proces značajno, da se prvo bitna stanja mogu uspostaviti, a ne da ih se zbilja uspostavlja. Tako na pr. ne moramo neku adijabatsku ekspanziju izvesti natražno, da bismo joj priznali povratnost, već je naprotiv dovoljno znati, da bismo je mogli provesti, kad bismo to htjeli. Periodični stroj može vršiti rad povratnim putem, a da time ne mislimo reći, da stroj vrši taj proces i u suprotnom smjeru.

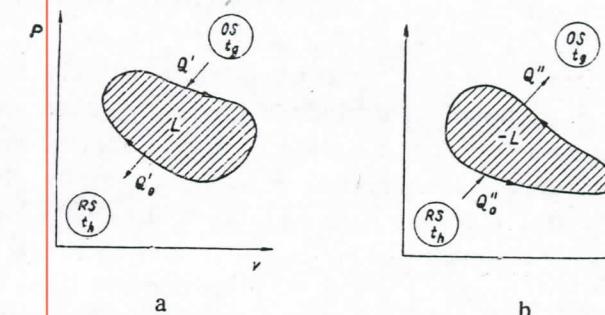
No potpuno povratni procesi uopće ne postoje u zbilji. Ta svuda i uvijek pojavljivat će se makar i slabo trenje, a za svaku izmjenu topline potrebne su makar i neznatne razlike temperature. Ali to nas neće prijeći u tome, da povratne procese smatramo kao vrlo korisne granične slučajevе, kojima se može po volji približiti, samo ako procese izvodimo sa dovoljno pažnje, dovoljno polagano i sa što manje trenja.

Ni činjenica, da se u kružnom procesu uvijek opet postizava prvo stanje radnog plina nije nikakav znak za povratnost tog procesa. Moramo naprotiv strogo lučiti pojma povratnosti i nepovratnosti od pojma kružnog procesa. Imamo kako povratnih tako i nepovratnih kružnih procesa, dok opet postoje povratni i nepovratni procesi, koji nisu kružni.

**Nepovratnost i dobivanje rada** Istražit ćemo općenito od kakvog je značenja nepovratnost nekog procesa za dobivanje rada. Kod toplinskih spremnika, kojima su temperature  $T$  i  $T_o$  ( $T > T_o$ ) određene i zadane, možemo od ogrjevnog spremnika oduzeti toplinu  $Q$ , te je dovesti mediju, koji vrši kružni proces. Pri tome ćemo već prema vrsti odabranog kružnog procesa dobiti više ili manje rada  $AL$ , dok se nepreobra-

ženi ostatak topline  $Q_o$  predaje rashladnom spremniku. Pitamo se u kakvoj je vezi količina iskoristivog rada s povratnosti ili s nepovratnosti procesa.

Promotrijmo ponajprije povratne procese, koji se vrše između zadanih toplinskih spremnika! Kad bi dva različita, ali inače sasvim povratna kružna procesa, za jednake rade  $AL$ , trošili različite ogrjevne topline  $Q$ , to bi se ovo protivilo drugom glavnom stavku termodynamike. Mi bismo naime mogli onaj proces, koji troši manje ogrjevne topline, odabrati za dobavljanje rada, sl. 35., u desnokretnom procesu. Onaj drugi



Sl. 35a i b. Razni kružni procesi između istih toplinskih spremnika.

proces naprotiv gomimo kao lijevokretni, što zbog pretpostavljene povratnosti možemo bez zapreke učiniti. Rad, koji smo prije dobili upravo ćemo utrošiti za pogon ovog lijevokretnog procesa. No pri tom bismo po pretpostavci s ovim drugim kružnim procesom vratili ogrjevnom spremniku veću količinu topline, nego li smo je prije potrošili. Taj višak topline oduzeli bismo hladnjem rashladnom spremniku. Drugim riječima toplina bi prešla od hladnjeg spremnika na topliji, a da ni na sudio-nicima ni u okolini ne bi nastupile neke druge trajne promjene. To se očito protivi drugom glavnom stavku. Zato stvaramo vrlo važni zaključak: kružni procesi bilo koje vrste, izvedeni s bilo kakvim sretstvom, dobavljaju iste rade, samo ako su potpuno povratni i ako se izvode između istog ogrjevnog i istog rashladnog spremnika uz potrošak iste ogrjevne topline.

Sad neka bude jedan od odabralih kružnih procesa povratan, a drugi nepovratan. Tvrdimo, da nepovratni proces,

izveden između zadanih spremnika i s potroškom jednakog količine ogrjevne topline  $Q$  kao i povratni, dobavlja manje rada od ovog potonjeg. Kad bi dobavljeni radovi u oba slučaja bili jednaki, to bismo nepovratni proces mogli uz potrošak topline iskoristiti za dobavljanje rada, a taj rad upotrijebiti za pogon povratnog procesa, koji u tu svrhu izvodimo lijevokretno. U tom bismo slučaju ogrjevnom spremniku po pretpostavci mogli vratiti svukoliku, prije potrošenu toplinu. Na završetku ne bismo ni na jednom sudioniku opazili bilo kakvu promjenu, što bi značilo, da o nekoj nepovratnosti onog prvog procesa nije moglo biti ni govora, a to je u protivnosti s učinjenom pretpostavkom.

Dopustimo li naprotiv, da nepovratni proces daje više rada od povratnog, to pustimo, da nam nepovratni proces dobavlja rad u desnokretnom toku, a s ovim radom gonimo opet povratni, kojega vršimo lijevokretno. Povratni će lijevokretni proces po pretpostavci s istim radom vratiti veću količinu ogrjevne topline ogrjevnom spremniku, nego li se potrošilo za pogon nepovratnog desnokretnog procesa. Višak topline uzeo bi se iz rashladnog spremnika. Drugim riječima, toplina bi bez nekih drugih trajnih promjena prešla od hladnjeg spremnika na topliji, što se očito protivi drugom glavnom stavku. Tako smo indirektno dokazali, da nepovratni kružni proces mora obzirom na dobavljanje rada biti lošiji od povratnog kružnog procesa između istih toplinskih spremnika.

Kod zadanih su toplinskih spremnika i kod zadane ogrjevne topline svi povratni procesi obzirom na vršenje rada jednako vrijedni. Svi su nepovratni procesi naprotiv lošiji, t. j. oni preobrazuju manji udio ogrjevne topline u mehanički rad od povratnih. Svaka je nepovratnost prema tome skopčana s nekim gubitkom rada.

Pri ocjenjivanju nepovratnosti nije dovoljno promatrati samo radno sretstvo i njegove promjene stanja, već se u ovakvo razmatranje moraju uključiti sva tjelesa, koja su sudjelovala kod procesa. Tako se na pr. neki CARNOT-ov proces, koji je sam po sebi povratan, odvija između dva toplinska spremnika. Ako je pri tom njegova najviša temperatura bitno niža od tem-

perature ogrjevnog spremnika, to se prelaz topline ovdje vrši nepovratnim načinom, pak se u tom slučaju ni čitav proces ne može smatrati povratnim. On će postati povratnim tek onda, kad se temperature radnoga sretstva u CARNOT-ovom procesu potpuno prilagode temperaturama zadanih toplinskih spremnika, jer samo u tom slučaju se prelaz topline vrši povratnim načinom. Tek u tom slučaju moguće je proces po volji i bez naročitih mjera izvoditi i desnokretno i lijevokretno, a da se ne nađe na teškoće kod dovođenja i odvođenja topline.

Ove općenite spoznaje treba sad sažeti u matematski oblik. Samo na taj način moći ćemo dati brojčane podatke o veličini pojedinih nepovratnosti, o najvećem mogućem radu i t. d.

**Analitička formulacija drugog U izraza (5b) za prvi glavni stava.** Vak može se za tvari, kojih je stanje određeno sa dvije neovisne veličine stanja, na pr. sa  $P$  i sa  $v$ , napisati  $u = f(P, v)$ <sup>1)</sup> pak dobivamo

$$dQ = df(P, v) + AP dv \quad (124)$$

Prema (17) ovaj je izraz nepotpuni diferencijal. Postoje međutim takve funkcije stanja  $x$  i  $y$ <sup>2)</sup>

$$y = \varphi(P, v) \quad x = \psi(P, v) \quad (125)$$

da pomoću njih možemo (124) pisati u obliku

$$dQ = df(P, v) + AP dv = \varphi(P, v) \cdot d\psi(P, v) \quad (126)$$

ili

$$dQ = y dx \quad (127)$$

<sup>1)</sup> Za tvari, za koje su za određivanje stanja potrebni podaci od više veličina stanja, kako je to kod mješavina, gdje je i koncentracija jedna neovisna veličina, mora se u (124) za  $u$  pisati funkcija  $u = f(P, v, X, Y\dots)$ . Tu su  $X, Y\dots$  pored  $P$  i  $v$  one veličine stanja, koje su potrebne za jednoznačno određenje stanja. Niža razmatranja vrijede i za taj slučaj, ako se na mjesto  $f(P, v)$ ,  $\varphi(P, v)$  i t. d. uvrste funkcije  $f(P, v, X, Y\dots)$ ,  $\varphi(P, v, X, Y\dots)$ .

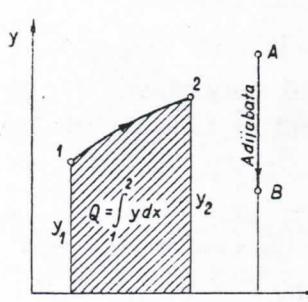
<sup>2)</sup> Da takve funkcije  $\varphi(P, v)$  i  $\psi(P, v)$  uistinu postoje, ne trebamo i ne želimo ovdje općenito dokazivati. Nama dostaje znati, da one postoje u našem slučaju, a da je tome tako, vidjet će se najbolje iz činjenice, što ćemo kasnije naći sasvim općeniti izraz za funkcije  $\varphi(P, v)$  i  $\psi(P, v)$  pak prema tome one moraju postojati.

Ovdje su  $x$  i  $y$  čiste veličine stanja (funkcije stanja), budući da ovise od  $P$  i od  $v$ , dakle od dviju neovisnih vetičina stanja i samo od njih. U matematici je funkcija  $y = \varphi(P, v)$  poznata pod imenom integrirajućeg nazivnika. Taj ima dragocjeno svojstvo, da pretvori nepotpuni diferencijal  $dQ$  u potpuni diferencijal

$$\frac{dQ}{y} = dx \quad (128)$$

Osnovna je razlika u tome, što vrijednost integrala  $\int_I^2 dQ = Q_{12}$ , prema onome što je izloženo za izraz (17), ovisi o putu promjene stanja, dok integral  $\int_I^2 \frac{dQ}{y} = \int_I^2 dx = x_2 - x_1$  ovisi samo o veličinama stanja  $x_1$  i  $x_2$ , a ne i o putu (načinu) prelaza iz stanja 1 u stanje 2. To je za naša daljna razmatranja vrlo ugodno, budući da za određivanje integrala  $\int_I^2 \frac{dQ}{y}$  moramo poznavati samo polazno stanje 1 i konačno stanje 2, dok onaj možda nepoznati put kod prelaza od 1 do 2 ne trebamo uzeti u obzir.

Uzmemo li ove za sad još nepoznate funkcije  $y = \varphi(P, v)$  i  $x = \psi(P, v)$  kao koordinate za dijagram, to možemo svako stanje tijela pomoću pripadnih vrijednosti  $x$  i  $y$  preslikati kao jednu točku novog dijagramskog polja, sl. 36. Kako je svaka



Sl. 36. Toplinski dijagram

promjena stanja neprekinuti niz (kontinuum) različitih stanja, to će se ona u tom dijagramu preslikati kao neka crta (linija 12). Kako je  $Q = \int y dx$ ,

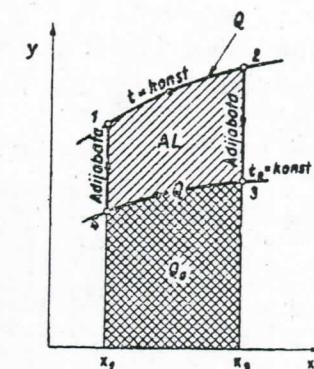
to je površina ispod ove crte mjeru za toplinu, koja se tokom promjene stanja dovela tijelu. U tom vidimo prvu veliku prednost novo uvedenih funkcija  $x$  i  $y$ . Sad nam još preostaje

da pobliže odredimo ove funkcije, budući da bi one inače bile za nas bez vrijednosti.

Odmah možemo reći, kako će se predočiti adijabate u tom  $xy$ -dijagramu. Za adijabatu je  $dQ = 0$ , pak prema (127) nužno i  $dx = 0$  ili  $x = \text{konst}$ . Tako se adijabate preslikavaju ovdje kao vertikalne linije, linija  $AB$ , sl. 36. Tok izoterma nam u tom dijagramu još nije poznat, ali njihov međusobni poredak možemo lako odrediti. Preslikamo li naime ovamo CARNOT-ov proces, to ga moramo, kako znamo, omediti dvim adijabatama i dvim izotermama  $t$  i  $t_0$ , sl. 37. Obje adijabate neka su predočene linijama  $x_1 = \text{konst}$  i  $x_2 = \text{konst}$ , t. j. vertikalama 14 i 23. Izoterme su predočene krivuljama, kojih tok doduše još ne poznamo, ali ih pretpostavimo onako, kako su ucrtane. Poznato nam je, da moramo radnom sretstvu kod više temperature  $t$  dovesti ogrjevnu toplinu  $Q$ , koja se dijelom preobrazuje u mehanički rad  $AL$ , a dijelom odvodi kao toplina  $Q_0$  pri nižoj temperaturi  $t_0$ . Odvedena je toplina  $Q_0$  manja od dovedene  $Q$ , jer je  $Q_0 = Q - AL$ , a obje topline predočuju se po (127) površinama ispod pripadnih izoterma  $t$  i  $t_0$ . Površina ispod niže temperature  $t_0$  mora prema tome biti manja od one ispod  $t$ . Zato mora i linija hladnije izoterme  $t_0$  ležati ispod linije toplice  $t$ , kako smo i ucrtali.

Kako je kod kružnog procesa  $AL = Q - Q_0$ , to odmah vidimo, da se rad  $AL$  kružnog procesa predočuje kao površina, koju zatvara slika kružnog procesa u  $xy$ -dijagramu. Ovaj rad je pozitivan, kad se promjena stanja odvija u smjeru kretanja kazaljke na uri, a negativan, kad je taj smjer suprotan.

Toplina  $Q$ , odnosno pripadna joj površina u  $xy$ -dijagramu pozitivna je, ako promjena stanja napreduje u smjeru pozitivne  $x$ -osi, dok je negativna, kad promjena stanja napreduje u smjeru negativne  $x$ -osi.

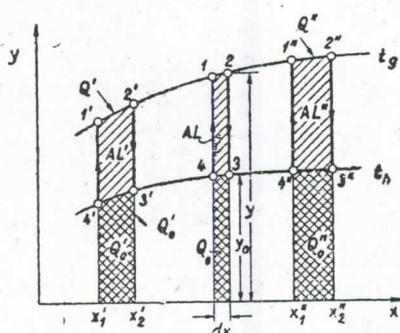


Sl. 37. Međusobni položaj izoterma

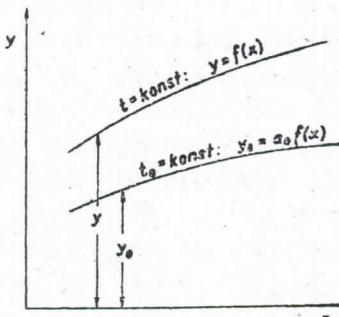
**Termički stupanj djelovanja.** Posebnu smo pažnju posvetili iskorištenju ogrjevne topline  $Q$  za proizvodnju mehaničkog rada. Stupanj iskorištenja možemo vrlo dobro ocijeniti pomoću t. zv. termičkog stupnja djelovanja

$$\eta = \frac{AL}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q} \quad (129)$$

Svi povratni procesi, koji se odvijaju između toplinskih spremnika sa stalnim temperaturama  $t$  i  $t_0$ , preobrazuju jednaki dio ogrjevne topline u mehanički rad, kako to slijedi iz naših prijašnjih razjašnjenja<sup>1)</sup>. Za takve je procese termički stupanj djelovanja jednak, bez obzira bilo na vrstu procesa, bilo na radno sretstvo. Stupanj djelovanja može ovisiti još samo o temperaturama  $t$  i  $t_0$  toplinskih spremnika. Primjenimo li to kod predviđanja u  $xy$ -dijagramu, sl. 38., to slijedi, da CARNOT-



Sl. 38. Termička iskoristivost i pad temperature



Sl. 39. Tok izoterma u toplinskem dijagramu

proces, koji se odvija pri niskim vrijednostima od  $x$ , na pr. proces  $1', 2', 3', 4'$  mora imati isti termički stupanj djelovanja kao i onaj, koji teče u području velikih  $x$ -vrijednosti ( $1'', 2'', 3'', 4''$ ), samo ako se u oba slučaja radi o istim temperaturama  $t$  i  $t_0$ . No za neki je uski CARNOT-ov proces po dijagramu

$$\eta = \frac{AL}{Q} = \frac{Q - Q_0}{Q} = \frac{ydx - y_0dx}{ydx} = 1 - \frac{y_0}{y} \quad (130)$$

<sup>1)</sup> Vidi osim toga i odlomak „Nepovratnost i dobivanje rada“.

Kako je kod zadanih temperatura  $t$  i  $t_0$  ovaj  $\eta$  konstantan, to je i pripadna vrijednost  $\frac{y_0}{y}$  za te temperature duž čitavog dijagrama konstantna, a pored toga i za bilo koje radno sredstvo jednaka. Kad ćemo za neku temperaturu  $t = \text{konst}$  tok izoterma  $y = f(x)$  nekako poznavati, to će prema gornjemu za drugu temperaturu  $t_0$  biti

$$y_0 = \text{konst} \cdot y = a_0 f(x) \quad (131)$$

ili drugim riječima, ordinate su  $y_0$  za temperaturu  $t_0$  spram ordinata  $y$  proporcionalno smanjenje ili povećane. Za niz drugih temperatura  $t_1, t_2$  itd. bit će

$$y_1 = a_1 f(x)$$

$$y_2 = a_2 f(x)$$

.....

.....

$$y = a f(x) \quad (132)$$

gdje smo izostavili indekse, budući da su koeficijenti  $a_1, a_2, a_3$  itd. ovisni samo o temperaturi, t. j.  $a = \varphi(t)$ .

**Carnot-ova temperaturna funkcija**

Temperaturna funkcija  $\varphi(t)$  mora biti neovisna o svojstvima promatranočeg sretstva, jer inače ne bi mogao omjer

$$\frac{y_0}{y} = \frac{\varphi(t_0) \cdot f(x)}{\varphi(t) \cdot f(x)} = \frac{\varphi(t_0)}{\varphi(t)}$$

za razna sretstva biti jednak. Po (127) bilo je

$$dQ = y dx = \varphi(t) \cdot f(x) \cdot dx = \varphi(t) \cdot [f(x) \cdot dx]$$

Posljednji izraz na desnoj strani možemo istovremeno integrirati i diferencirati, jer se te dvije operacije poništavaju, pak dobivamo

$$dQ = \varphi(t) \cdot d \int f(x) dx = \varphi(t) \cdot d\Phi(x) \quad (133)$$

pa ako ovdje pišemo  $\Phi(x) = s$ , to slijedi

$$dQ = \varphi(t) ds \quad (134)$$

\*

Tako smo dobili, da se toplina dovedena nekom sretstvu može prikazati pomoću jedne čiste funkcije temperature  $\varphi(t)$ , koja je neovisna o svojstvima toga sretstva, te od neke veličine  $s$ , za koju znamo, da je parametar adijabate ovoga sretstva, budući da za  $dQ = 0$  postaje i  $ds = 0$  (uvjet adijabate). Funkcija  $\varphi(t)$  zove se još i CARNOT-ova funkcija, budući, da ju je prvi otkrio CARNOT i ako je on nije potanje odredio. Parametar  $s$  bit će naprotiv neka veličina stanja, budući da se adijabate različitih tvari pokoravaju raznim zakonima. Treba naglasiti, da  $s = \Phi(x)$  mora biti čista funkcija stanja promatranoga sredstva, budući da je prema (125) veličina  $x$  ovisila isključivo o dvim neovisnim veličinama stanja (na pr. o  $P$  i  $v$ ) promatranoga sredstva, tako da stanje najbliže okoline nije od utjecaja na veličinu  $s$ .

Dosadanja razmatranja možemo primijeniti na  $xy$ -dijagram. Jednadžbu

$$dQ = y dx$$

zadovoljiti ćemo, ako pišemo

$$y = \varphi(t), \quad x = s \quad (135)$$

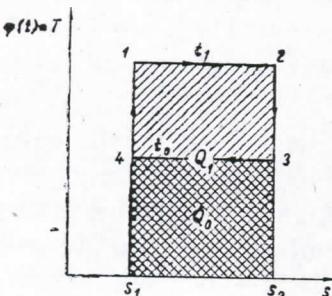
čime dobivamo jednadžbu (134). Time dobivamo termički stepen djelovanja CARNOT-ovog kružnog procesa, sl. 40., između zadanih temperatura  $t_1$  i  $t_0$  prema (130)

$$\eta = 1 - \frac{\varphi(t_1)}{\varphi(t_0)} = \text{konst} \quad (136)$$

tako, da je termički stepen djelovanja CARNOT-ova procesa određen jedino njegovim graničnim temperaturama  $t_1$  i  $t_0$ . Osim toga je za izotermu  $t = \text{konst}$  i funkciju  $y = \varphi(t) = \text{konst}$ , pak

se zato izoterme preslikavaju u  $\varphi(t)$ -s-dijagramu kao horizontalni pravci. CARNOT-ov kružni proces predočuje se dakle ovdje kao pravokutnik, sl. 40.

Budući da je  $\varphi(t)$  neka općenita funkcija, koja je neovisna o promatranom sretstvu, to dostaje, da je odredimo za bilo koje sredstvo, pa da dobijemo općenito rješenje. U tu svrhu odabrat ćemo naravno takvo tijelo, koje nam ra-



Sl. 40. Carnot-ov proces u toplinskom dijagramu

čunski čini najmanje poteškoća, a to je idealni plin. Tako dobiveni rezultat ipak će vrijediti sasvim općenito, jer univerzalna funkcija  $\varphi(t)$  ne može ovisiti o slučajno odabranom sredstvu. Tome nasuprot moramo veličinu  $s$ , kao individualnu funkciju stanja promatranog sretstva odrediti za svako tijelo posebice.

Za idealne plinove vrijedi jednadžba stanja  $Pv = RT$ , odakle logaritmiranjem i diferenciranjem dobivamo

$$\frac{dP}{P} + \frac{dv}{v} = \frac{dT}{T} \quad (137)$$

Time možemo izraz prvog glavnog stavka za idealne plinove nešto preobraziti

$$dQ = du + APdv = c_v dT + A \frac{RT}{v} dv \quad (138)$$

S prijašnjom jednadžbom i sa  $c_v = \text{konst}$ , što vrijedi na pr. za jednoatomne idealne plinove, dobije se

$$\begin{aligned} dQ &= T \left( c_v \frac{dP}{P} + c_v \frac{dv}{v} + AR \frac{dv}{v} \right) = \\ &= T [c_v d(\ln P) + c_v d(\ln v) + AR d(\ln v)] \end{aligned} \quad (139)$$

Integriranjem i diferenciranjem izraza u zagradi dobiva se uz pomoć (52)

$$dQ = T d(c_v \ln P + c_v \ln v + \text{konst}) \quad (140)$$

**Apsolutna temperatura**

Usporedbom izraza (140) sa (134) viđimo, da se za općenitu funkciju temperature dobiva

$$\varphi(t) = T \quad (141)$$

t. j. da je ova funkcija identična s absolutnom temperaturom  $T$ , koju smo upoznali kod idealnih plinova, a da se njome nismo pobliže pozabavili. Treba naglasiti, da obzirom na tok izvoda ova na taj način određena CARNOT-ova funkcija temperature vrijedi sasvim općenito, i da nije ograničena na jednoatomne idealne plinove.

Uvrstimo li (141) u (136), to ćemo dobiti termički stepen djelovanja CARNOT-ovog procesa između temperatura  $T_1$  i  $T_0$  u obliku

$$\eta_c = \frac{AL}{Q} = \frac{T_1 - T_0}{T_1} = 1 - \frac{T_0}{T_1} \quad (142)$$

Budući da je uvijek temperatura rashladnog spremnika daleko iznad apsolutne ništice, t. j.  $T_0 \gg 0\text{ K}$ , to će i  $\eta_c$  uvijek biti znatno manje od jedinice,  $\eta_c < 1$ . Time je brojčano izrečena poznata već spoznaja, po kojoj se samo jedan dio ogrjevne topline  $Q$  može preobraziti u mehanički rad  $AL$ , dok se preostali dio mora odvoditi u obliku topline  $Q_0$ , te se ne može pretvoriti u mehanički rad. Što je viša temperatura  $T_1$ , a što niža  $T_0$ , to je iskoristivost ogrjevne topline bolja. Svi tehnički kružni procesi, koji rade između temperatura  $T_1$  i  $T_0$ , rade s termičkim stepenom djelovanja, koji je lošiji od CARNOT-ovog, a to iz razloga, što se ne mogu izbjegći nepovratni procesi. CARNOT-ov termički stepen djelovanja prikazuje graničnu vrijednost, koju praktički ne samo da nikad i nikakvim mjerama ne možemo premašiti, već je ne možemo ni postignuti.

Sa (134) i sa (141) možemo pisati

$$dQ = Tds = du + APdv \quad (143)$$

gdje je  $ds$  prema (128) totalni diferencijal. To je traženi analitički izraz drugog glavnog stavka termodinamike, a to zato, što smo veličinu  $s$  mogli definirati tek pošto smo se pomogli razmatranjima, kod kojih je drugi glavni stavak činio osnovu.

Iz (143) slijedi integracijom

$$Q = \int_1^2 Tds \quad (143a)$$

kao dovedena toplina kod promjene stanja promatranog međija od stanja 1 do stanja 2. To je ujedno integralni izraz drugog glavnog stavka.

Opseg valjanosti jednadžbe (143) ograničen je pretpostavkama, koje smo prilikom izvođenja učinili. Tako smo u (124) pretpostavili, da uopće postoji kalorička jednadžba stanja oblika

$u = f(P, v)$ . Ovakva je jednadžba primjenljiva samo na tijelo ili dijelove tijela, u kojima vlada termička, mehanička i kemij-ska ravnoteža, što je bilo naglašeno u odlomku „Jednadžbe stanja“. Osim toga primjenili smo u (124) izraz  $dL = Pdv$ , koji je ispravan, kad na granici tijela vlada dovoljnom točnosti mehanička ravnoteža, kako se to istaklo u odlomku „Rad“.

Prema svemu ovome spomenuti analitički izraz (143) važi samo tako dugo, dok se ga primjenjuje na tijelo, kod kojega se promjena stanja vrši pri potpunoj nutarnjoj ravnoteži, i koje osim toga stoji u mehaničkoj ravnoteži s okolinom.

Sastoji li se neki sustav iz više dijelova, od kojih je doduše svaki za sebe u nutarnjoj ravnoteži, ali koji međusobno nisu u ravnoteži, to se jednadžba (143) smije primjeniti samo na pojedine dijelove, ali ne i na sustav kao cjelinu. Kasnije ćemo dati izraz, koji vrijedi za promjene stanja bilo kakvih, dakle i neuravnoteženih sustava.

Za takve idealne plinove, kod kojih se može smatrati  $c_p = \text{konst}$  i  $c_v = \text{konst}$ , bit će po (134) i (140)

$$s = c_v \ln P + c_p \ln v + \text{konst} \quad (144)$$

Spomenuli smo, da je veličina  $s$  funkcija stanja, ili, što je isto, veličina stanja, svojstvena promatranom sretstvu. Svakom stanju tijela pripada druga brojčana vrijednost ove veličine, slično kako je to bilo i kod unutarnje energije. Veličinu  $s$  doduše ne možemo tako lako mjeriti instrumentom, kao na pr. pritisak ili temperaturu. Ali budimo svjesni toga, da ni unutarnju energiju nismo direktno mjerili, već smo je proračunali pomoću drugih veličina stanja, tako na pr. pomoću temperature  $t$ . Pa ipak se unutarnja energija pokazala i kao pojmovno shvatljiva i kao računski vrlo korisna veličina.

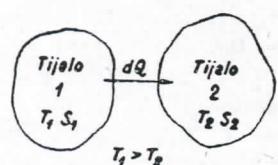
Veličina  $s$  od mnogo je veće važnosti, nego li **Entropija** bi se to moglo zaključiti samo iz njenog svojstva jednostavnog proračunavanja topline. Pomoću nje možemo šta više analitički izraziti drugi glavni stavak termodinamike, pak na taj način kvantitativno obuhvatiti i ocijeniti nepovratnosti različitih procesa. Ova veličina dat će nam među ostalim i mjerilo za ocjenjivanje savršenosti preobrazbe topline u me-

hanički rad, pak joj je po tom i CLAUSIUS dao ime „entropija“ ili veličina preobraženja.

Dovedena toplina nekome tijelu prema (143) jednaka je produktu apsolutne temperature  $T$  ovoga tijela i prirasta entropije istoga tijela. Budući da može biti  $dQ \geq 0$ , već prema tome, da li se toplina dovodi ili odvodi, to može i entropija nekoga tijela rasti ili opadati,  $ds \geq 0$ .

**Entropija i nepovratnost** Za izmjenu topline  $dQ$  potrebna su barem dva tijela ili dva dijela nekoga tijela. Toplina, koja se jednom tijelu dovodi mora se drugom oduzeti. Ako se dakle ovome entropija smanjuje, to će se kod prvoga ona povećati. O kojim se iznosima tu radi?

Tijelo 1, s temperaturom  $T_1$ , sl. 41., neka izmjenjuje toplinu s tijelom 2, kojega je temperatura  $T_2$  niža od  $T_1$ ,  $T_1 > T_2$ . Kad okolina ne sudjeluje na ovom procesu, može toplina po drugom glavnom stavku prelaziti samo od 1 na 2, a ne obrnuto. Takav prelaz topline tipično je nepovratan. Tijelu 2 dovodimo (pozitivnu) toplinu  $dQ = T_2 ds_2$ . Tijelu 1 odvodimo istu toplinu  $dQ = -T_1 ds_1$ . Prirast entropije obiju



Sl. 41. Prirast entropije kod prelaza topline.

tijela je  $ds_2 = \frac{dQ}{T_2}$  i  $ds_1 = -\frac{dQ}{T_1}$ . Sveukupni prirast entropije  $ds$  čitavog sustava je jednak zbroju pojedinačnih prirasta

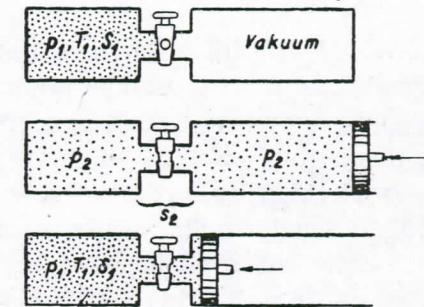
$$ds = ds_2 + ds_1 = \frac{dQ}{T_2} - \frac{dQ}{T_1} = \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) dQ > 0 \quad (145)$$

Kako je  $dQ$  pozitivno, a  $T_1$  je veće od  $T_2$ , to je čitav izraz veći od nule, što znači, da u cijelosti entropija čitavog sustava raste, i ako se entropija jednog sudionika smanjila. U najpovoljnijem slučaju moglo bi biti  $ds = 0$ , i to onda, kad bi temperature  $T_1$  i  $T_2$  bile jednakе,  $T_1 = T_2$ , jer bi za te vrijednosti izraz u zagradi u (145) isčeznuo. U tom bi slučaju toplina mogla prelaziti ili u jednom ili u drugom smjeru, i ako tek beskočno polagano, pak bi takav prelaz topline kod jednakih temperatura bio povratan.

Tako smo došli do vrlo zanimljive spoznaje. Sveukupna entropija nekog sustava, u kojem se odvija neki nepovrtni proces, može samo rasti, ona ne može postati manja. U najpovoljnijem slučaju, naime kod potpuno povratnih procesa, ostaje sveukupni iznos entropije nepromijenjen. Ovaj zaključak, koji smo stvorili opažanjem na samo jednom primjeru, potkrijepit ćemo s još nekim nepovratnim procesima, da ga onda dokazemo općenito za bilo koji nepovrtni proces.

Tipični je nepovrtni proces trenje. Kad se neki teret spušta za stanovitu visinu  $h$ , vrši on na tom putu neki rad. Ovaj rad pretvorimo trenjem u toplinu, pri čem se dobiva  $\Delta Q = AL \text{ kcal}$ . Ovu toplinu predajmo nekome spremniku, koji je izoliran od okoline, a koji ima temperaturu  $T$ . Ako zanemarimo prirast temperature tog spremnika, to se njegova entropija mijenja za iznos  $\Delta S = \frac{\Delta Q}{T}$ , koja je veličina svakako pozitivna. I pri ovom je nepovratnom procesu entropija porasla.

Još jedan nepovrtni proces je prestrujavanje nekog plina sa stanjem 1 iz prostora višega pritiska, sl. 42., u prostor nižega pritiska, nakon čega se ustaljuje stanje 2. Taj se plin ne može vratiti sam od sebe u prvi prostor, i tako u drugom stvoriti vakuum. I ako se pri ovome procesu nije izmjenilo topline, ipak je entropija porasla. Taj prirast ne možemo izračunati neposredno, budući da promjena stanja nije tekla pod uvjetima, za koje vrijedi jednadžba (143). Kod prestrujavanja bio je naime pritisak u oba prostora bitno različit, tako da za vrijeme promjene stanja plin nije bio u nutarnjoj ravnoteži. No prirast entropije kod ovoga procesa možemo pronaći posredno i to ovim razmatranjem. Prevedimo plin povratnim načinom iz postignutog stanja 2 u



Sl. 42. Prirast entropije pri prestrujavanju i pri izjednačenju početnih različitih pritiska

početno stanje 1 u prvi prostor. To se može postići na pr. tako, da desnu stijenk prostora 2 nadomjestimo jednim stalom, pak da plin potroškom rada polagano komprimiramo. Kako bismo zadržali polaznu temperaturu  $t_1$ , moramo plin za vrijeme kompresije hladiti, t. j. odvoditi toplinu, i na taj način kompresiju izvesti izotermički. Zbog odvođenja topline smanjuje se kod ove zamišljene kompresije entropija plina tako, da je na kraju kompresije u stanju 1 manja od entropije na početku kompresije u stanju 2,  $S_1 < S_2$ . Ovo smanjenje entropije plina mogli bismo neposredno izračunati, jer zamišljena kompresija teče povratno, dakle u punoj ravnoteži. No ako je  $S_1 < S_2$  onda smo dokazali ono što smo htjeli, a to je bilo da kod nepovratnog prestrujavanja plina od stanja 1 u stanje 2 entropija poraste od  $S_1$  na  $S_2$ .

**Nepovratnost i dobivanje rada** Da bismo dokazali, da ovo čudno svojstvo dobivanje rada entropije nije ograničeno samo na navedene primjere, proširit ćemo naše znanje o utjecaju nepovratnosti na dobivanje rada. U prijašnjim razmatranjima o ovom utjecaju ograničili smo se na kružne procese, koji su bili uključeni između dva toplinska spremnika. No postoji niz procesa, koji nisu kružni procesi, a iz kojih ipak možemo dobiti rad. To su t. zv. monotermini ili otvoreni procesi. Zapravo je i CARNOT-ov proces samo u toliko kružni proces, u koliko se ograničimo na promatranje radnoga plina, budući da se samo taj plin ponovno vraća u početno stanje. Čim našim razmatranjima obuhvatimo i toplinske spremnike, opažamo, da ovi ne vrše neki kružni proces, već da oni zbog odavanja odnosno zbog primanja topline trajno promijene svoje stanje.

Zato ćemo stavljamo ovo vrlo važno pitanje: Uz koje se uvjetne može pri zadanim početnom i zadanim konačnom stanju nekog sustava dobiti najveći rad, ako dopustimo, da taj sustav izmjenjuje toplinu s jednim toplinskim spremnikom (na pr. s okolinom)? Odgovor, koji ćemo odmah razložiti i dokazati glasi: ako prelaz iz polaznog stanja 1 u konačno stanje 2 teče u svim svojim otsjećcima potpuno povratno. Naravno da pri tom i sve možebitne izmjene topline s okolinom moraju biti povratne.

Pokazat ćemo jednim primjerom, da se prelaz između dva zadanih stanja nekog tijela ili sustava može postići na razne načine i to kako povratnim, tako i nepovratnim putem. Neki plin sa stanjem 1 sl. 43., s okolišnom temperaturom  $t$  neka ekspandira na stanje 2 s nižim pritiskom, ali pri istoj temperaturi. Prelaz se može vršiti izotermno, pri čemu se plinu mora dovoditi toplina  $Q$ . Ovu oduzimamo okolini, pa kako su temperature plina i okoline svuda jednake, to je ovaj proces u svim svojim otsjećcima povratan.

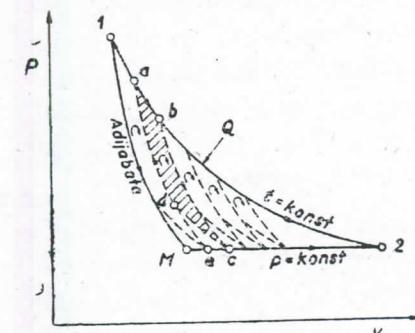
No od 1 do 2 možemo plin prevesti i drugim putem. Tako na pr. nadovezivanjem jedne adiabatske i jedne izobarske promjene stanja,  $1M2$ . Kad bismo toplinu, koja je potrebna za grijanje plina na putu  $M2$ , uzeli okolini neposredno, jednostavnim prelazom topline, to bismo dobili nepovratni proces, budući da je temperatura okoline  $t = t_1 = t_2$  primjetno veća od temperature u stanju  $M$ , t. j.  $t > t_M$ . Takav prelaz od 1 do 2 bio bi dakle u nekim svojim otsjećcima nepovratan.

Pogodnim sretstvima možemo i ovaj prelaz učiniti povratnim. To se može postići na pr. uključenjem jednog niza uskih kružnih Carnot-ovih procesa  $abcd$  između okoline i našeg plina, pri čem će nam ovi procesi dobavljati neki rad. Što su ovi pomoćni procesi uži, to prije možemo zanemariti sitne trokute  $edc$ , i to ćemo se tjesnije priljubiti donjim dijelom ovih pomoćnih procesa izobari  $M2$ . Sad je prelaz topline postao povratnim, jer na gornji dio pomoćnih procesa prelazi toplina od okoline gdje vlada ista temperatura  $t$ , dok se za izobaru  $M2$  našega plina uzima toplina iz donjega dijela ovih procesa, a tu su temperature opet jednakе.

Tako smo pokazali, da se prelaz plina od stanja 1 u stanje 2 može vršiti na razne povratne ili nepovratne načine. Svakako ne treba smetnuti s umom, da sudjelovanje okoline na procesima nije jednako za sve te slučajeve.

U promatrani sustav ubrojiti ćemo sva ona tijela, koja bilo kako sudjeluju u procesu, u koliko ih obzirom na njihovo stanje ne pripisujemo okolini. Okolina doduše također sudjeluje u procesu, na pr. kao rashladna voda, no mi je ne ubrajamo u naš sustav.

Ponajprije ćemo vidjeti, da je obzirom na izvršivi rad sve jedno na kakav način prelazimo od stanja 1 do 2, samo ako



Sl. 43. Razni povratni putevi između dva stanja 1 i 2

sve teče povratno. Jer kad bi između 1 i 2 bilo boljih i lošijih povratnih puteva, to bismo bolji put mogli odabrati za dobivanje rada između 1 i 2. Lošiji put odabrali bismo za vraćanje našega sustava od stanja 2 u stanje 1, pri čem bismo utrošili neki rad, koji bi bio manji od prije dobivenog. Zbog pretpostavljene povratnosti ovih procesa vratili bismo se u početno stanje 1, a da u sustavu ne bi ostalo ni traga nekoj izvršenoj i opozvanoj promjeni stanja. Međutim preostao bi nam neki višak mehaničkog rada, budući da se je po pretpostavci za drugi polazni put potrošilo manje rada, nego li se je na prvom putu dobilo. Kako se sustav vratio u svoje početno stanje, to bi se taj višak rada mogao dobiti samo na račun unutarnje energije okoline, t. j. jednog jedinog toplinskog spremnika. No to se protivi drugom glavnom stavku. Tako smo dokazali slijedeće: Obzirom na dobavljeni rad sve su promjene stanja između zadanog početnog i zadanog konačnog stanja nekog sustava potpuno ravnopravne, samo kad su u svim svojim otsjećima, uključivo izmjene topline s okolinom, potpuno povratne.

Ovo nije nikako vezano na izotermne procese. To treba posebno naglasiti, budući da se o tom u literaturi gdjekad nalaže na nejasne ili krive prikaze.

Sad ćemo pokazati, da neki nepovratni proces između istih stanja 1 i 2 našega sustava kao i prije, dobavlja neminovno manje rada, nego li povratni proces između ovih stanja. Kad ne bi bilo tako, t. j. kad bi nepovratni proces bio bolji, to bismo ovaj mogli upotrijebiti za vršenje rada od 1 do 2, pak tako dobiveni rad djelomice upotrijebiti za pogon povratnog procesa u suprotnom smjeru, t. j. od 2 do 1. Pri tom bi nam preostao neki pretičak mehaničkog rada. Budući da je sustav vraćen u početno stanje, to bi taj višak bio mogao nastati samo na račun energije okoline, t. j. jednog jedinog toplinskog spremnika, a to se protivi drugom glavnom stavku.

Na isti način možemo pokazati, da neki nepovratni proces izveden u suprotnom smjeru, t. j. od 2 do 1 troši više rada nego li neki povratni.

Kad bismo dopustili mogućnost, da neki nepovratni proces dobavlja isti rad kao i povratni, to kod gornjeg umovanja ne

bi preostao nikakav višak rada, tako da se ni unutarnja energija okoline ne bi na kraju promijenila. No na taj način ne bi ni u sustavu ni u okolini preostao nikakav trajni trag o izvršenim promjenama stanja, pak prema tome ne bi moglo biti govor o nekoj nepovratnosti.

Zaključak iz dojakošnjih razmatranja je prema tome slijedeći: Nepovratni proces između stanja 1 i 2 označenog sustava dobavlja neminovno manje rada, nego li povratni proces između istih stanja. Ako je ta promjena stanja skopčana s potroškom rada, to nepovratni proces troši više rada od povratnog. Kod ocjenjivanja povratnosti i nepovratnosti mora se naravno i ovdje uvijek uzeti u obzir možebitnu razmjenu sustava sa svojom okolinom.

Tako smo spoznaju o prednostima povratnih procesa, koju smo prije stekli samo za kružne procese, proširili i na otvorene ili monotermne procese bilo koje vrsti. Pri tom nismo učinili nikakva ograničenja obzirom na homogenost ili obzirom na kemičke promjene, tako da je ta zakonitost sasvim općenita, te se njoj pokoravaju i kemički procesi. Kod prijašnjih razmatranja mogao se sustav u stanju 2 kemički razlikovati od stanja 1, što se događa na pr. kod promjena stanja povezanih s disocijacijom plinova pri raznim temperaturama.

**Općenito svojstvo** Da bismo ova razmatranja doveli u vezu s entropijom, proširimo naš sustav u toliko, da obuhvatimo i ona tijela okoline, koja bilo kako sudjeluju na procesu. Tako dobivamo prošireni sustav, koji je sasvim odijeljen od vanjskih utjecaja, ili drugim riječima, koji je izoliran.

Kad taj prošireni sustav prevedemo nepovratnim načinom iz stanja 1 u stanje 2, to dobivamo neki rad  $L_n$ . Indeks  $n$  ukaže na nepovratnost prelaza. Isti sustav možemo vratiti iz stanja 2 u stanje 1 povratnim putem, t. j. tako, da sve promjene stanja teku uz trajno podržavanje ravnoteže<sup>1)</sup>. Pri tom ćemo utrošiti

<sup>1)</sup> Postoje li u sustavu područja raznih temperatura, to ćemo svaku neposrednu izmjenu topline između takvih područja spriječiti. U tu svrhu izolirajmo ova područja toplinski, a izolaciju otstranimo tek pošto su se temperature izjednačile na neki povratni način, na pr. uslijed adijabatske ekspanzije s vršenjem rada.

neki rad  $L_p$ , koji je po prijašnjim izlaganjima veći od  $L_n$ . Kako pri toj obrnutoj promjeni stanja našem sustavu dovodimo više rada nego li smo prije oduzeli, to moramo pretičak energije u obliku topline predati nekome tijelu (spremniku) izvan sustava. U tu svrhu dakle moramo bar povremeno prekinuti izoliranost našega sustava, jer bi inače njegova unutarnja energija bila na koncu veća, nego li na početku. Pri ovom odavanju topline mora se entropija našega sustava smanjiti. To vidimo iz izraza  $ds = \frac{dQ}{T}$  koji sad zbog održavanja ravnoteže kod povratne promjene stanja smijemo primijeniti. Po tome je entropija u stanju 1 manja od one u stanju 2. Time smo dokazali, da je kod prvotne nepovratne promjene stanja od 1 do 2 našeg izoliranog proširenog sustava entropija porasla. Tako dobivamo važnu izreku: Svaka nepovratnost povlači povećanje entropije nekog izoliranog sustava. Pri tom se naravno entropija pojedinih dijelova sustava može smanjiti, ali samo tako, da entropija preostalih dijelova sustava još više poraste.

Pretpostavimo li, da je promjena stanja između dviju stanja 1 i 2 protekla povratno, to sustav možemo sličnim umovanjem prevesti iz stanja 2 u stanje 1, i to opet povratnim načinom. Pri tom ćemo utrošiti isti rad, koji smo prije dobili prelazom od 1 do 2. Sustavu ne trebamo odvesti nikakav pretičak energije u obliku topline, tako da mu se entropija nije promijenila, pak je entropija u stanju 1 jednaka onoj u stanju 2. Odavle slijedi važni zaključak: Kod bilo kakve povratne promjene stanja ostaje entropija nekog izoliranog sustava nepromijenjena.

Tako možemo po MAXWELLU reći: Entropija svijeta kao ograničenog sustava teži svojem maksimumu. Svaka promjena, koja u svijetu nastaje, dovodi svijet iz stanja manje entropije u stanje veće sveukupne entropije<sup>1)</sup>. Entropiju možemo shvatiti

<sup>1)</sup> Pri tom smo čutke pretpostavili, da je svijet obzirom na prostor, masu i na energiju konačan i u sebi zatvoren (izoliran) ne ulazeći u filozofsko pitanje, da li je, i u koliko, ova pretpostavka ispravna. Ovu primjedbu treba to kritičnije primiti, što se za postavljanje bilansa entropije, kao i mase i energije, prečutno barata s pojmom istovremenosti, a taj pojam zadobiva u svemirskim dimenzijama obzirom na teoriju relativnosti posebno i fundamentalno značenje.

kao mjeru za „istrošenost“ (dotrajalost) nekog sustava, slično, kao što nam je vrijeme mjera za njegovu vremensku starost. Što je više nepovratnih procesa proteklo, to je entropija sustava postala veća, to je on više istrošen, dotrajao. Kad entropija postigne svoju najveću vrijednost, koja je postizvana kod zadanih vanjskih uvjeta, sustav je potpuno istrošen, te je svaka daljnja promjena stanja nemoguća. T. j. u sustavu je postignuta potpuna nutarnja ravnoteža, što je istovjetno s mrtvilom tog sustava. Zato se to i nazvalo „toplinska smrt“ sustava. Tek nekim vanjskim zahvatom, a to znači promjenom vanjskih nametnutih uvjeta, mogu se izazvati nove promjene stanja. No to dolazi u obzir samo ondje, gdje osim promatranog sustava postoji i drugi vanjski svijet, pomoću kojega je moguće izvesti spomenuti zahvat.

#### Opći analitički izraz drugog glavnog stavka

Zadatak nam je, da sad nađemo analitički izraz drugog glavnog stavka i za takve sustave, kojih promjene stanja ne teku u trajnoj ravnoteži, t. j. koje teku nepovratno. Pri tom skrenimo našu pažnju naročito i takvim promjenama, kod kojih se odvijaju i kemijski procesi. Takav sustav, u koji sad ne uključujemo tijela okoline, može stajati u izmjeni topline sa svojom okolinom.

Ovaj sustav temperature  $T$  prelazi od polaznog stanja 1 u takvo stanje 2, koje se samo neznatno razlikuje od 1. Pri tom će se unutarnja energija promijeniti za mali iznos  $U_2 - U_1 = dU$ , a entropija za  $S_2 - S_1 = dS$ . Teče li ova promjena stanja povratno, to ćemo dobiti neki rad  $dL_p$ , dok će se s okolinom izmijeniti toplina  $dQ_p$ . Za pretpostavljenu povratnu promjenu stanja dobivamo onda

$$TdS = dU + AdL_p \quad (146)$$

No kad bi se stanje 2 postiglo nepovratnim načinom, to bi dobiveni rad po prijašnjim razlaganjima bio manji i to  $dL$ , a isto tako bi se razlikovala i toplina  $dQ$  izmijenjena s okolinom od topline  $dQ_p$  povratnog procesa, pak bi bilo

$$dL \leq dL_p \quad (147)$$

Zato je prema (146) i (147) za neku nepovratnu promjenu stanja uvijek i u svakom slučaju

$$TdS \geq dU + AdL \quad (148)$$

gdje se  $dL$  može pojaviti u obliku mehaničkog rada  $dL_m$ , ili u obliku električke energije  $dL_{el}$ , kao kod akumulatora, itd., tako da je

$$dL = dL_m + dL_{el} + \dots = dL_m + \Sigma lL_x \quad (149)$$

Sumom  $\Sigma dL_x$  obuhvaćeni su svi ostali, posebice ne navedeni oblici energije, koji se za razliku od toplinske energije daju potpuno preobraziti u mehanički rad. Zato će obzirom na (147) i (149) uvijek biti

$$TdS \geq dU + AdL_m + A\Sigma dL_x \quad (150)$$

što pretstavlja najopćenitiji izraz drugog glavnog stavka za bilo kakve, možda i vrlo burne promjene stanja našega sustava, uključivši i kemičke procese.

Za posebni slučaj, da proces teče u trajnoj mehaničkoj ravnoteži, za koju po (12) vrijedi  $dL_m = PdV$ , pa kad je osim toga i  $\Sigma dL_x \geq 0$ , t. j. kad proces ne troši energiju u nekom drugom obliku, bit će

$$TdS \geq dU + APdV \quad (\text{za meh. ravnotežu i za } \Sigma dL_x \geq 0) \quad (150a)$$

Ovaj izraz valjan je unutar netom spomenutih ograničenja sa svim općenito. Naročita mu je vrijednost u tome, što sadržava sve same veličine stanja samoga promatranih sustava, te se tako eliminiralo sve, možda i nepoznate pojave neposredne okoline, koja se ne ubraja u promatrani sustav. Znak jednakosti u (150a) vrijedi za takve povratne promjene stanja sustava, kod kojih je  $\Sigma lL_x = 0$ , t. j. kod kojih se osim mehaničkog rada  $dL_m = PdV$  i unutarnje energije  $U$  ne pojavljuju drugi oblici energije, kao što bi mogli biti električna struja i slično. U protivnom se slučaju može pribjeći izrazu (150) u kojem znak jednakosti vrijedi za bilo koju povratnu promjenu stanja, bez obzira na oblike energije, koji se pojavljuju.

Ove spoznaje, koje smo stekli dosadanjim razmatranjima, u buduće će nas izvanredno poslužiti.

### Maksimalni rad

- Prije svega nas zanimaju ova tri pitanja:
1. Kad možemo iz nekog sustava dobiti rad?
  2. Koliko rada možemo dobiti iz takvoga sustava?
  3. Kojim putem moramo krenuti, da iz takvog sustava dobijemo što više rada?

Evo odgovora na prvo pitanje: Rad možemo dobiti samo od takvog sustava, koji još nije u ravnoteži s tjelesima svoje okoline. Samo u tom je slučaju još moguća promjena stanja sustava, bez koje nije moguće vršiti neki rad. U ravnoteži naprotiv sve miruje, te nema povoda, koji bi mogao izazvati neku promjenu.

Da odgovorimo na drugo pitanje, treba prozrijeti prilike, u kojima živimo. Mi živimo u okolini, čije je stanje gotovo nepromijenljivo, odnosno što je najbitnije, na čije stanje mi ne možemo utjecati. Okolina, koju čine atmosferski uzduh, morska voda, tlo i t. d. toplinski je spremnik silnih razmjera, kojega su temperatura  $T_0$  i pritisak  $P_0$  praktički neovisni od nas i od vrste i količine tehničkih procesa, koje provodimo. Možemo okolini dovoditi količine topline, koje su za naše tehničke pojmove ogromne, pa ipak ne ćemo temperaturu okoline bitno promjeniti. Tako nam se zadatak pojednostavljuje, pak se za dobivanje rada moramo pobrinuti još samo za jedan toplinski spremnik, koji se po temperaturi ili pritisku ili inače razlikuje od okoline. Za drugi toplinski spremnik, koji je potreban za dobivanje rada, moći ćemo uvijek uzeti samu okolinu.

Iz ovih dviju toplinskih spremnika možemo rad dobivati tako dugo, dok postoji razlika u njihovim stanjima, ili ispravnije, dok spremnici nisu došli u međusobnu ravnotežu. Kako je stanje okoline neovisno o toku pojedinih tehničkih procesa, to će se rad moći vršiti tako dugo, dok se pritisak i temperatura odabranog toplinskog spremnika, koji možemo nazvati i davaocem rada, nisu izjednačili s pritiskom i temperaturom okoline. Samo se pod ovim uvjetom može iskoristiti čitava radna sposobnost davaoca rada, t. j. dobiti najveći rad. Ostavimo li sunčanu energiju za tehničke procese po strani, to naš prošireni sustav (davaoc rada plus okolina) možemo smatrati zatvo-

renim — izoliranim —, kojemu iz vana niti dovodimo, niti odvodimo energiju bilo kojeg oblika. Tako je  $Q = 0$ . Označimo li sa  $U'$  i  $U''$  sveukupnu unutarnju energiju našeg proširenog sustava na početku i na kraju provedene promjene stanja, to po prvom glavnem stavku mora biti

$$U'' - U' + AL = Q = 0$$

a odavle izvršeni rad

$$AL = U' - U'' \quad (151)$$

Energija sveukupnog sustava  $U'$  sastoji se iz unutarnje energije okoline  $U_{01}$  i iz energije davaoca rada  $U_1$

$$U' = U_1 + U_{01}; \quad U'' = U_2 + U_{02} \quad (152)$$

Onda je

$$AL = U' - U'' = U_1 - U_2 + U_{01} - U_{02} \quad (153)$$

Kod promjene stanja raširit će se davaoc rada od obujma  $V_1$  na  $V_2$ . Pri tom se mora potisnuti okolišni uzduh pri stalnom atmosferskom pritisku  $P_0$  za obujam  $(V_2 - V_1) [m^3]$ , a za to je potreban rad

$$L_0 = P_0(V_2 - V_1) \quad (154)$$

koji se kao rad potiskivanja („kompresija okoline“!) uzima od davaoca rada i predaje okolini, i tako povećava njena unutarnja energija  $U_0$ . No okolini dovodićemo od davaoca rada valjda i neku toplinu  $Q_0$ . Postavimo li bilancu energije samo za okolinu, to dobivamo po prvom glavnem stavku, koji primjenimo na okolinu

$$Q_0 + AL_0 = U_{02} - U_{01} \quad (155)$$

Pri tom je zbog nepromjenljive okolišne temperature  $T_0$  toplina  $Q_0 = T_0 \Delta S_0$ , gdje je  $\Delta S_0 = (S_{02} - S_{01})$  prirast entropije okoline. Obzirom na (154) dobivamo time

$$U_{01} - U_{02} = -T_0 \Delta S_0 - AP_0(V_2 - V_1) \quad (156)$$

Promjena je sveukupne entropije našeg proširenog sustava (davaoc rada plus okolina)

$$\Delta S_0 + S_2 - S_1 \geq 0 \quad (157)$$

ako se ovdje  $S_1$  i  $S_2$  odnose na davaoca rada. Uvrstimo li (156) i (157) u (153), to ćemo kao dobiveni rad naći

$$AL \leqq U_1 - U_2 - T_0(S_1 - S_2) + AP_0(V_1 - V_2) = AL_{max} \quad (158)$$

Za postizavanje maksimalnoga rada  $AL_{max}$  svejedno je, kojim putem davaoc rada mijenja stanje od 1 do 2 no uz uvjet, da se sve vrši povratno. Naprotiv ne ćemo ni sa kakvim, ma kako domišljatim mjerama ili izumima moći dobiti veći rad, nego li je izračunan u (158). Rad  $AL$  bit će uistinu zbog neizbjegljivih nepovratnosti uvijek manji od  $AL_{max}$ .

U (158) odnosi se indeks  $_0$  na okolinu, indeks  $_1$  na početno, a indeks  $_2$  na konačno stanje davaoca rada. Kod potpunog iskorištenja radne sposobnosti davaoca rada treba njegovo stanje izjednačiti sa stanjem okoline, tako da postane  $P_2 = P_0$  i  $T_2 = T_0$ . Time je kod jednostavnih tjelesa unaprijed jednoznačno određeno konačno stanje davaoca rada, a time i vrijednost njegove unutarnje energije  $U_2$  odnosno njegove entropije  $S_2$ . Kod takvih davaoca rada, kod kojih nastupaju i kemijske promjene, ovisit će entropija konačnog stanja još i o stvorenom kemijskom spoju, što ovdje ne ćemo dalje razmotriti.

Tako možemo jednoznačno odgovoriti i na drugo postavljeno pitanje u pogledu najvećeg mogućeg rada  $AL_{max}$ : Maksimalni je rad  $AL_{max}$  kod zadanog stanja okoline ovisan samo o početnom stanju i o fizikalnim svojstvima, na pr. o  $c_v$  davaoca rada.

Odgovor na treće pitanje slijedi sam od sebe: Za dobivanje maksimalnoga rada mora davaoc rada preći u stanje, u kojem će biti u ravnoteži s okolinom, a taj prelaz se mora vršiti povratnim načinom. Zadatak je inženjera, da od slučaja do slučaja pronalazi puteve, koji su tehnički savladivi, a koji što bolje ispunjuju postavljene zahtjeve.

Velika vrijednost izraza (158) očituje se u tome, što njime možemo ocijeniti najveći mogući rad i za one tehničke procese, za koje danas još ne znamo označiti tehnički postupak, koji bi bio povratan. Takav je na pr. danas proces izgaranja goriva, kao tipično nepovratni proces, za koji još nismo pronašli rje-

šenje povratnog izgaranja, a ipak već znamo, koliko bismo najviše rada mogli dobiti, kad bi nam jedanput uspjelo pronaći povratan način izgaranja.

**Proračunavanje entropije** Kako ćemo ponajprije promatrati proces s idealnim plinovima, potrebno je poznavanje njihove entropije. Prema (144) za one je idealne plinove, kod kojih smijemo dovoljno točno pretpostaviti, da je  $c_v = \text{konst}$  i  $c_p = \text{konst}$ .

$$s = c_v \ln P + c_p \ln v + \text{konst}$$

Odbijemo li to od (159), to dobivamo

$$s = c_v \ln \frac{P}{P_o} + c_p \ln \frac{v}{v_o} + s_o \quad (160)$$

Odaberemo li kod svih računa za  $P_o$  i  $v_o$  isto osnovno stanje, na pr.  $0^\circ C$  i  $1 \text{ at}$ , to će konstanta  $s_o$  ispasti iz računa. To će biti uvijek onda, kad u proračunima dolaze razlike entropije istoga tijela. U tom slučaju uopće nije potrebno poznavanje absolutne vrijednosti za  $s_o$ , pak je možemo tako reći prešutjeti, time da pišemo  $s_o = 0$ . No kod kemijskih problema, gdje se jedna tvar mijenja u drugu, to više ne dostaže, već tamo treba odrediti i absolutnu vrijednost za  $s_o$ .

Obzirom na jednadžbu stanja idealnih plinova  $Pv = RT$  kao i na izraz  $c_p - c_v = AR$  dobivamo iz (160)

$$s - s_o = c_v \ln \frac{P}{P_o} + c_p \ln \frac{v}{v_o} \quad (160a)$$

$$s - s_o = c_v \ln \frac{T}{T_o} + AR \ln \frac{v}{v_o} \quad (161)$$

$$s - s_o = c_p \ln \frac{T}{T_o} - AR \ln \frac{p}{p_o} \quad (162)$$

Ove tri jednadžbe vrijedě za takve idealne plinove, kod kojih možemo zanemariti promjenljivost specifičnih toplina s temperaturom. U protivnom slučaju mora se upotrijebiti zamršeniji izraz (183).

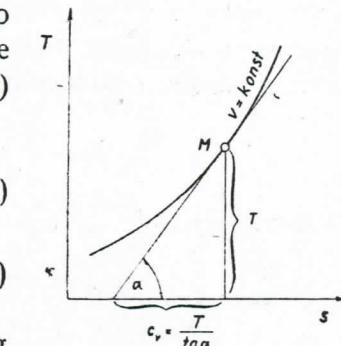
Pomoću (160), (161) i (162) možemo za idealne plinove odmah ucrtati tok linija  $v = \text{konst}$  i  $p = \text{konst}$  u  $Ts$ -dijagramu. To je za slikovito prikazivanje različitih procesa vrlo korisno. Za  $v = \text{konst}$  postaje

$$s_v = c_v \ln \frac{T}{T_o} + \text{konst} \quad (163)$$

tako, da je u tom slučaju entropija logaritmička funkcija temperature. Kod raznih volumena razlikuju se linije  $v = \text{konst}$  samo za neku aditivnu konstantu, tako da su te linije u smjeru apscise paralelno pomaknute. To isto važi i za linije  $p = \text{konst}$ . Po sl. 44 i prema (163) je subtangenta ovih linija

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = c_v \quad (164)$$

$$T \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = c_p \quad (165)$$



Kako je  $c_p > c_v$ , to linije konstantnog pritiska tek u  $Ts$ -dijagramu položiti je Sl. 44. Izohora u  $Ts$ -dijagramu od linija konstantnog volumena, sl. 45.

Pošto smo našli tok adijabata, izoterma, izobara i izohora u  $Ts$ -dijagramu, učinit ćemo to još i za važnu skupinu politropskih promjena stanja.

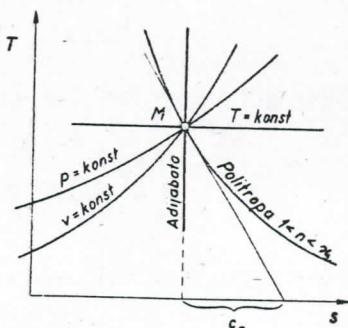
Po (117) bilo je za politropsku promjenu stanja

$$dQ = c_n dT = T ds \quad (166)$$

Ako vrijednosti  $s_1$ ,  $T_1$  odgovaraju polaznom stanju, a  $s$  i  $T$  bilo kojem politropski postignutom stanju, to integracijom dobivamo jednadžbu politrope s eksponentom  $n$  u  $Ts$ -dijagramu

$$(s - s_1)_n = c_n \ln \frac{T}{T_1} = \\ = c_v \frac{n - \gamma}{n - 1} \ln \frac{T}{T_1} \quad (167)$$

I ovo je logaritmička linija sa subtangentom  $c_n$ , sl. 45. Kako je obično  $1 < n < \gamma$ , to je najčešće  $c_n < 0$ ,



Sl. 45. Politrope u  $Ts$ -dijagramu

pak takve politrope opadaju u  $Ts$ -dijagramu od lijeva na desno. Kad je  $n = \infty$  prelazi politropa u adijabatu, kod koje je  $c_n = 0$ , pak prema (167) i  $s = s_1 = \text{konst}$ , što već i od prije znamo.

**Entropija bilo kakvih tvari** Kad je promjenljivost specifičnih toplina takva, da je ne smijemo zanemariti, ili kad promatrana tvar nije idealni plin, to je izračunavanje entropije zamršenije. Općenito je  $s = f(T, v)$ , t. j. funkcija dviju neovisnih veličina stanja, odakle diferenciranjem slijedi

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T dv \quad (168)$$

Prema (143) je

$$ds = \frac{du}{T} + \frac{AP}{T} dv = \frac{\left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T dv}{T} + \frac{AP}{T} dv \quad (169)$$

ili preuređeno

$$ds = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v dT + \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + AP \right\} dv \quad (170)$$

Izrazi (168) i (170) su identični, pak moraju koeficijenti pred istoimenim diferencijalima biti jednaki, t. j.

$$\left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial u}{\partial T} \right)_v \quad (171)$$

$$\left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = \frac{1}{T} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + AP \right\} \quad (172)$$

Diferenciranjem izraza (171) po  $v$  slijedi

$$\left( \frac{\partial \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_v}{\partial v} \right)_T = \frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial T \partial v} \quad (173)$$

a analogno iz (172)

$$\left( \frac{\partial \left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T}{\partial T} \right)_v = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T} =$$

$$= \frac{1}{T} \frac{\partial^2 u}{\partial v \partial T} + A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - \frac{1}{T^2} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T + AP \right\} \quad (174)$$

Budući da je  $ds$  totalni diferencijal, to po pravilima diferenciranja mora biti  $\frac{\partial^2 s}{\partial T \partial v} = \frac{\partial^2 s}{\partial v \partial T}$ .

Izjednačenjem izraza (173) i (174) slijedi prema tome

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_T = AT \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v - AP \quad (175)$$

Uvrstivši to u (172) dobivamo

$$\left( \frac{\partial s}{\partial v} \right)_T = A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \quad (176)$$

Uvedemo li konačno ovaj izraz u (171), i uzmemu li pri tom u obzir (48) i (168), to slijedi

$$ds = \frac{c_v}{T} dT + A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v dv \quad (177)$$

To je već izraz, kojim možemo izračunati entropiju. No  $ds$  možemo izraziti i pomoću  $c_p$ . Iz (56) i (175) slijedi

$$c_v = c_p - AT \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \quad (178)$$

a time i

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - A \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_v \left\{ \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT - dv \right\} \quad (179)$$

Zadnji je izraz u zagradi međutim po (7)

$$\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dT - dv = - \left( \frac{\partial v}{\partial P} \right)_T dP \quad (180)$$

Obzirom na (9) postaje (179)

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - A \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dP \quad (181)$$

Ovaj je izraz za izračunavanje entropije pogodniji od (177), budući, da se  $c_p$  može eksperimentalno točnije odrediti od  $c_v$ .

Sad možemo nakon izbora nekog osnovnog stanja  $p_0$ ,  $T_0$  integrirati izraz (181), i tako odrediti  $s_1$  za željeno stanje  $p_1$ ,  $T_1$ . Dobiva se

$$\begin{aligned} s_1 &= \left[ \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_p}{T} dT \right]_{p_0} - \left[ A \int_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dP \right]_{T_1} + s_0 \\ &= \left[ \int_{T_0}^{T_1} \frac{c_p}{T} dT \right]_{p_1} - \left[ A \int_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dP \right]_{T_0} + s_0 \end{aligned} \quad (182)$$

Indeksi na uglatim zagradama ukazuju na to, da pripadne integrale treba računati za konstantno  $p_0$  odnosno  $T_1$  itd., slično kako smo to učinili kod izračunavanja unutarnje energije  $u_1$  po (59) i (60), jer  $c_p$  može još ovisiti o pritisku, a  $\left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)$  još i o temperaturi. Za rezultat je naravno svejedno, koji od obih izraza u (182) upotrebljavamo za računanje.

Za idealne plinove izraz se (182) pojednostavnjuje, jer kod ovih plinova specifične topline nisu ovisne o pritisku, već samo o temperaturi. Uz (51) dobiva se time

$$s = \int_{T_0}^T \frac{c_p}{T} dT - AR \ln \frac{p}{p_0} + s_0 \quad (\text{za idealne plinove}) \quad (183)$$

No za idealne plinove najčešće dostaju jednadžbe (160a), (161) i (162), gdje se ovisnost specifične topline o temperaturi zanemarila.

### Tipični povratni procesi

**Zaliha stlačenog uzduha.** Uzdušni spremnik sa sadržajem  $V_1$  sadržaje uzduh pod pritiskom  $p_1$ , koga je temperatura  $t$  jednaka okolišnoj temperaturi  $t_0$ . Koliki rad možemo u najpovoljnijem slučaju zadobiti iz tog spremnika? Po smjernicama, koje smo gore postavili, treba stlačeni

uzduh prevesti u stanje koje odgovara okolišnom, a to se mora izvršiti na povratan način. Zamislimo, da smo jedno dno našega spremnika nadomjestili pomicnim stapaom, te tako spremnik pretvorili u cilindar, sl. 46., u kojem se pomicanjem stapa može vršiti rad. Polaganim pomicanjem stapa stlačeni se uzduh rasteže, i to izotermički, ako cilindar nije izoliran, te ako se pobrinemo za nesmetanu izmjenu topline s okolinom. U stanju 2 postiglo se okolišni pritisak  $p_0$ . Budući da je temperatura uzduha u cilindru trajno bila jednaka okolišnoj temperaturi, to se u stanju 2 uzduh cilindra prilagodio okolišnom stanju, pak daljnje dobivanje rada nije više moguće. Rad, koji je izvršio uzduh cilindra predočen je površinom 12 ab ispod izoterme 12 u  $Pv$ -diagramu. Jedan dio toga rada troši se za potiskivanje okolišnog uzduha kod stalnog vanjskog pritiska  $p_0$ , i to prigodom gibanja stapa od 1 do 2. Prema (103) je

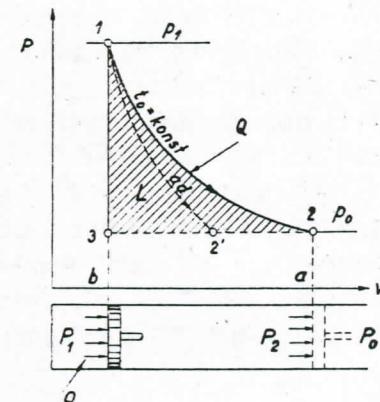
$$L_{12ab} = P_1 V_1 \ln \frac{p_1}{p_0}$$

a

$$\begin{aligned} L_{32} &= P_0 (V_2 - V_1) = P_0 V_2 \left( 1 - \frac{V_1}{V_2} \right) = P_1 V_1 \left( 1 - \frac{V_1}{V_2} \right) = \\ &= P_1 V_1 \left( 1 - \frac{p_0}{p} \right) \end{aligned}$$

Sveukupno dobiveni rad jednak je razlici ovih radova

$$L = L_{12ab} - L_{32} = P_1 V_1 \left( \ln \frac{p_1}{p_0} - 1 + \frac{p_0}{p_1} \right) \quad (184)$$

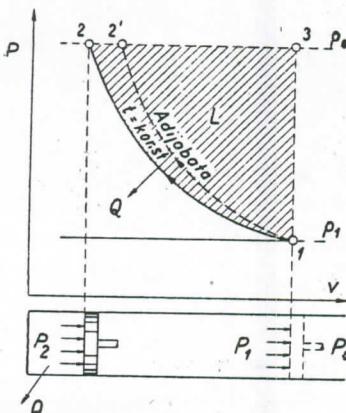


Sl. 46. Maksimalni rad tlačnog spremnika.

Adijabatska ekspanzija od 1 do 2' takođe je povratni proces, no njome bismo došli u konačno stanje 2', u kojem se doduše postigao okolišni pritisak, ali gdje je temperatura spala ispod temperature okoline. Prema tome uzduh cilindra u tom stanju još nije prilagođen okolini, te proces zapravo još nije dovršen. Zbog toga je ovako dobiveni rad manji od izotermički dobivenoga. Kad bismo naknadno od 2' do 2 dovodili toplinu od više okolišne temperature, to bi se uzduh cilindra još rastegnuo. Dobili bismo doduše željeno stanje 2, no ovaj prelaz topline bio bi nepovratan zbog konačnih razlika temperatura kod prelaza topline tako da bi dobiveni rad i u tom slučaju ostao manji od izotermički dobivenoga. Treba međutim naročito naglasiti, da za dobivanje najvećeg rada nije u pitanju, da li eks pandiramo adijabatski ili izotermno ili kako drugačije, već da li je proces izvršen povratnim ili nepovratnim načinom.

**Spremnik s podtlakom.** Kako bismo postupili, kad u spremniku ne vlada pretlak već podtlak, t. j. kad je  $p_1 < p_0$ ? Budući da i ovdje pretpostavljamo, da je temperatura spremnika jednaka temperaturi okoline  $t_0$ , to ćemo pritisak  $p_1$  izotermički izjednačiti s  $p_0$  tako, da si spremljeni uzduh zamislimo, da je zatvoren u cilindar s pomičnim stапом, sl. 47.

U tom slučaju okolišni uzduh vrši rad, koji je predložen površinom ispod linije 32, budući da pred sobom gura stап sa stalnim vanjskim pritiskom  $p_0$ . Jeden dio ovoga rada utroši se za kompresiju spremljenog uzduha, linija 12. Dobiveni rad predložen je razlikom, t. j. crtkom površinom 123. I u ovom slučaju dala bi adijabatska kom presija manje rada, budući da bi u tako postignutom stanju 2' temperatura bila znatno viša od okolišne.



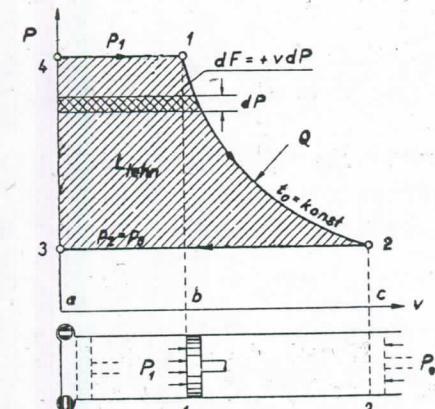
Sl. 47. Maksimalni rad podtlačnog spremnika

**Proces među stalnim pritiscima.** U praksi se pritisak u tlačnom spremniku, na pr. za pneumatički alat, podržava na istoj visini. Da bi se ovaj stlačeni uzduh iskoristio, priključimo na spremnik jedan radni cilindar, koji kod svakog stupaja usiše potrebnu količinu stlačenog uzduha kod stalnog tlaka  $p_1$ , linija 41, sl. 48.

U položaju 1 obustavlja se daljnje punjenje cilindra. Pri tom se stupu predao rad predložen površinom 41ba. Sa zatvorenim upusnim ventilom eks pandira se izotermno do pritiska  $p_0$  dakle do 2, pri čem površina 12cb predložuje rad predan stupu. U obratištu stapa 2 otvara se ispušni ventil, pak se za istiskivanje istrošenog uzduha stапom mora vršiti rad istiskivanja predložen površinom 23ac. Postupom i ustupom stapa radovi se potiskivanja i nadolaženja atmosfere međusobno poništavaju. Ako je štetni prostor cilindra zanemariv, to dostaje neznatna količina uzduha, da kod otvaranja upusnog ventila pritisak poraste od 3 do 4. Odavde pak možemo čitav ciklus ponoviti. Tako smo uzduh povratnim načinom prilagodili stanju okoline i na taj način moramo dobiti najveći mogući rad.

Sveukupno dobiveni rad kod potpunog hoda stapa (postup i ustup) predložen je površinom 4123. Ovaj rad nazvat ćemo tehničkim radom  $L_{tehn}$ , budući da je baš ovakav proces između stalnih pritiska tehnički neobično čest i važan. Površinu 4123 može se odrediti integralom  $\int PdV$  za pojedine otsječke procesa. Pri tom moramo paziti na predznak pojedinih integrala.

Tako je u sl. 48. brojčana vrijednost integrala  $\int PdV > 0$ , dok



Sl. 48. Rad tehničkog stalnotlačnog procesa

je  $\int_2^3 PdV < 0$ . Prema tome je sveukupni rad

$$L_{sveuk} = L_{tehn} = \int_4^1 PdV + \int_1^2 PdV + \int_2^3 PdV + \int_3^4 PdV = \oint Pdv$$

gdje  $\oint$  neka označi integraciju oko čitavog procesa. Radnu površinu 4123 možemo međutim matematički izraziti još jednostavnije. Iz  $Pv$ -dijagrama razabiremo naime, da se ova površina može shvatiti i kao  $\int_1^2 VdP$ , pak je

$$L_{tehn} = - \int_1^2 VdP$$

Negativni predznak dolazi zato, što (pozitivni) rad dobivamo onda, kad ekspanzija, a time i integracija teku u smjeru negativne  $P$ -osi.

Indeks  $tehn$  označuje rad tehnički najvažnijeg procesa, t. j. procesa među stalnim pritiscima, pak izraz  $-\int_1^2 VdP$  samo u

tom slučaju predočuje izvršeni rad, t. j. sumu  $\Sigma L = \sum \int PdV$ . Procesom među stalnim pritiscima označujemo takvi, kod kojeg se medij dovodi stroju pri stalnom pritisku. Ekspazionala linija može pri tom biti raznovrsna, na pr. izoterna, adijabata, politropa itd.

U posebnom slučaju, kad se ova linija pokorava zakonu  $PV = konst$ , što kod idealnih plinova odgovara izotermi, važi izraz

$$PdV = -VdP$$

i

$$\int_1^2 PdV = - \int_1^2 VdP \quad (\text{za } PV = \text{konst}) \quad (186)$$

Prema tome je kod idealnih plinova pri izotermnoj ekspanziji

$$L_{iz} = (L_{iz})_{tehn}$$

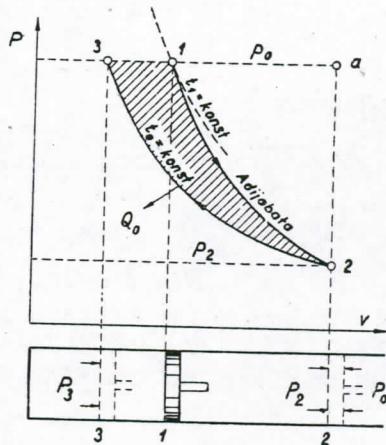
Ako se naprotiv ekspanzija ne vrši po zakonu  $PV = \text{konst}$ , to se tehnički rad i pojedinačni rad linije rastezanja međusobno razlikuju, tako na pr. pri adijabati

$$(L_{ad})_{tehn} > L_{ad}$$

Stalnotlačni proces pojavljuje se kod mnogih strojeva i ako je pri tom ekspazionala linija ponajčešće neka politropa. Po tom procesu rade na pr. stupni parni stroj, parna turbina, uzdušni kompresor, rashladni stroj, pneumatički strojevi. Kod strojeva, koji davaju snagu vrši se taj proces desnokretno, kod onih, koji troše snagu, lijevokretno.

**Rad iz vrućih plinova**

Promotrit ćemo sada slučaj, da izvor rada ne leži u razlikama pritisaka prema okolini, već u razlikama temperature. Koliko bismo na pr. mogli dobiti rada iz vrućih plinova, koji se stvaraju u nekom ložištu? Ovi plinovi obično nastaju pri okolišnom pritisku  $p_0$ . Njihova količina neka je  $V_1 [m^3]$ , a temperatura  $t_1 [^{\circ}\text{C}]$ . Polazeći od ovoga stanja 1, sl. 49. eksplandirajmo plinove adijabatski na tako niski pritisak, da se ohlade na okolišnu temperaturu  $t_0$ . Pri tom se naravno mora vršiti rad spram višeg okolišnog pritisaka  $p_0$ , koji je rad predočen površinom ispod linije 1a. Pošto smo u 2 postigli okolišnu temperaturu na povratni način, treba plinove od preniskoga pritisaka  $p_2$  prevesti na okolišni pritisak  $p_0$ . Komprimirat ćemo plinove od 2 izotermno do 3, pri čem toplinu kompresije predajemo okolini pri stalnoj temperaturi  $t_0$  s neprimjetnim padom tem-



Sl. 49. Maksimalni rad vrućih plinova

perature, t. j. povratno. Viši vanjski pritisak  $p_0$  vrši sad rad predočen površinom ispod  $a\beta$ . Razlika radova, predočena površinom  $123$  daje nam sveukupno dobiveni i u isti mah najveći mogući rad  $L$ . Ovaj se proces praktički teško može provesti, i to prvo zbog visokih temperatura plinova, koje štetno djeluju na obrađene dijelove stroja, a onda i zbog velikog volumena plinova kod vrlo niskog konačnog pritiska ekspanzije. Rad, koji možemo dobiti, računa se na pr. po (158), pak taj izraz u našem slučaju glasi

$$AL_{max} = U_1 - U_3 - T_0(S_1 - S_3) + AP_0(V_1 - V_3)$$

Tu su zadani temperatura  $T_1$  i volumen  $V_1$  plinova. Prema (162) i sa  $T_3 = T_0$ ,  $P_1 = P_3 = P_0$  dobiva se

$$S_1 - S_3 = G \left( c_p \ln \frac{T_1}{T_3} - AR \ln \frac{P_1}{P_3} \right) = Gc_p \ln \frac{T_1}{T_0}$$

Zbog  $P_0V_3 = GRT_0$  i zbog  $\frac{V_1}{V_3} = \frac{T_1}{T_0}$  slijedi

$$AP_0(V_1 - V_3) = ARG T_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

Sa

$$U = Gc_v T + konst$$

dobiva se

$$AL_{max} = Gc_v T_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right) - Gc_p T_0 \ln \frac{T_1}{T_0} + ARG T_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 \right)$$

a odavle sa (52)

$$AL_{max} = Gc_p T_0 \left( \frac{T_1}{T_0} - 1 - \ln \frac{T_1}{T_0} \right).$$

Isti rezultat dobili bismo naravno sabirajući radove pojedinačnih otsječaka prikazanog procesa.

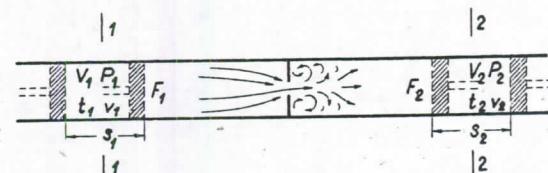
### Tipični nepovratni procesi

**Prigušivanje** Prigušivanje nekoga plina ili kapljevine nastaje, kad se slobodni presjek strujanja naglo suzi i opet proširi. Posljedica je nagli pad pritiska iza prigušilišta.

Za daljnja razmatranja nije bitno, na koji je način suženje presjeka izvedeno. Svejedno je, da li se radi o nekoj ugrađenoj prirubnici ili o pritvorenom ventilu, ili o umetnutom pamučnom čepu, kako ga se upotrebljava kod laboratorijskih ispitivanja prigušivanja. Raznovrsnim prigušilištima ne mijenja se sama bit prigušivanja.

U prigušilištu izvrgavaju se razni dijelići plina promjenama stanja, koje će zbog trenja, vrtloženja i pada pritiska za svaki dijelić biti drugačije. Zbog toga ne možemo ovaj proces pratiti u svim njegovim otsječcima. No na svaki način možemo očekivati, da će se dosta daleko ispred i iza prigušilišta ustaliti stanja plina, koja su donekle jednolična, tako da se može računati s dobrim srednjim vrijednostima preko čitavoga presjeka. Tako neka vlada dovoljno daleko pred prigušilištem srednje stanje 1, a dovoljno daleko iza prigušilišta stanje 2, sl. 50. Sa „dovoljno daleko“ mislimo takvu udaljenost, na kojoj se već mogu zanemariti smetnje jednoličnom strujanju, prouzrokovane samim prigušilištem. U obim promatranim presjecima neka se brzine strujanja tako malo razlikuju, da se može zanemariti promjena kinetičke energije. U ustaljenom stanju neka u presjeku 1 vlada starni pritisak  $P_1$ , a u presjeku 2 pritisak  $P_2$ . U mislima možemo pritiske plinskih masa, koje nadolaze i koje odilaze nadomjestiti sa dva umišljena stapa, koji se giblju potrebnom brzinom. Kad je cijev izolirana, ne će se za vrijeme prigušivanja dovoditi toplina. Prigušivanje teče međutim obično tako brzo, da se i kod manjake izolacije plinu praktički ne može dovesti neka primjetna količina topline.

U ustaljenom stanju pridolaze i odilaze od prigušilišta u istim vremenskim razmacima iste količine plina. Pri tom su se umišljeni stupovi pomakli za dužine  $s_1$  i  $s_2$ . Volumeni, koji se pri tom istiskuju ili oslobođaju kretanjem ovih stupova odgo-



Sl. 50. Prigušivanje

varaju volumenu plina. Ako su odnosne površine stupova  $F_1$  i  $F_2$ , to je

$$V_1 = F_1 s_1 = G v_1; \quad V_2 = F_2 s_2 = G v_2 \quad (187)$$

Za utiskivanje stapa 1 troši se na putu  $s_1$  rad  $L_1$  (rad utiskivanja) dok stap 2 vrši rad  $L_2$  (rad potiskivanja). Na stap 1 djeluje stalna sila  $P_1 F_1$ , a radovi su

$$L_1 = P_1 F_1 s_1 = P_1 V_1 \quad \text{i} \quad L_2 = P_2 F_2 s_2 = P_2 V_2 \quad (188)$$

Kako se za vrijeme prigušivanja ne dovode neke primjetne količine topline, to se po prvom glavnom stavku mora sveukupno izvršeni rad  $L = L_2 - L_1$  namiriti iz unutarnje energije plina, pak je

$$AL = AL_2 - AL_1 = U_1 - U_2 \quad (189)$$

gdje  $U_1 = Gu_1$  i  $U_2 = Gu_2$  znače unutarnje energije promatrane količine plina pri prolazu kroz oba presjeka. Iz (189) slijedi

$$U_1 + AP_1 V_1 = U_2 + AP_2 V_2; \quad u_1 + AP_1 v_1 = u_2 + AP_2 v_2 \quad (190)$$

Kod prigušivanja se doduše može promijeniti unutarnja energija prigušenog medija, ali zato ostaje nepromijenjena jedna druga veličina, a ta je

$$I = U + APV \quad \text{ili} \quad i = u + APv \text{ kcal/kg} \quad (191)$$

budući da je prema (190)  $i_1 = i_2$ .

**Entalpija ili sadržaj topline** Veličinu  $i$ , koju smo definirali prema (191) zovemo entalpijom ili sadržajem topline, a da joj tim imenom ne želimo dati neki naročiti fizikalni smisao. Entalpija je  $i$  isto kao i unutarnja energija  $u$  čista veličina stanja, budući da ovisi samo o veličinama stanja. Uvođenjem entalpije mogu se razni proračuni znatno pojednostaviti. Tako je na pr. za svako prigušivanje, koje teče bez dovođenja topline, i kod kojeg brzine strujanja pred i iza prigušilišta nisu previše različite, značajno, da se entalpija ne mijenja,  $i_1 = i_2 = i = \text{konst}$ , čime se našla neobično jednostavna značajka tog procesa. Ovo nije ograničeno na idealne plinove, već to vrijedi za bilo koje tvari, tako na pr. i za kapljevine.

Novo definiranu veličinu stanja  $i$  možemo uvesti umjesto unutarnje energije  $u$  u izraz za prvi glavni stavak. Po (121) je  $di = du + APdv + AvdP$  a  $du + APdv = di - AvdP$  (192) pak s (15b) dobivamo

$$dQ = di - AvdP \quad \text{i} \quad Q = i_2 - i_1 - A \int \limits_{\bar{l}}^{\bar{2}} vdP \quad (193)$$

Sa (143) možemo i drugi glavni stavak izraziti pomoću  $i$

$$Tds = di - AvdP \quad (194)$$

Entalpiju ćemo izdašno primijeniti pri proračunavanju izmjene topline pri stalnom pritisku, koja je od tolike važnosti za tehniku. Za takve je procese  $dP = 0$ , odakle se sa (193) može izračunati dovedena toplina  $Q_p$

$$dQ_p = di \quad \text{ili} \quad Q_p = i_2 - i_1 \quad (195)$$

Samu entalpiju možemo računati iz specifične topline. Kako je po definiciji  $c_p = \left( \frac{\partial Q}{\partial t} \right)_p$ , to slijedi iz (195)

$$c_p = \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)_p \quad (196)$$

Zbog  $i = f(P, t)$  dobivamo

$$di = \left( \frac{\partial i}{\partial t} \right)_p dt + \left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_t dP = c_p dt + \left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_t dP \quad (197)$$

a slično izrazu (59)

$$i_1 = \int \limits_{t_0}^{t_1} c_{p_0} dt + \int \limits_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_{t_1} dP + i_0 \quad (198)$$

$$i_1 = \int \limits_{t_0}^{t_1} c_{p_1} dt + \int \limits_{p_0}^{p_1} \left( \frac{\partial i}{\partial P} \right)_{t_0} dP + i_0 \quad (199)$$

gdje su indeksi za tok integracije od istog značenja kao i u (59) i (60). Konstanta je  $i_0$

$$i_0 = u_0 + AP_0 v_0$$

za sad isto tako neodređena kao i  $u_0$  i ne može se izračunati samo pomoću čiste termodinamike.

Za  $\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_t$  može se kod izračunavanja uvrstiti izraz (207).

Za idealne je plinove  $Pv = RT$ , pak je

$$i = u + ART \quad (\text{idealni plinovi}) \quad (200)$$

isto tako neovisno o pritisku kao i unutarnja energija  $u$ , t. j.

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_t = 0 \quad (\text{idealni plinovi}) \quad (201)$$

Time slijedi iz (198)

$$i = \int_{t_0}^t c_p dt + i_0 \quad (\text{idealni plinovi}) \quad (202)$$

ili s upotrebom srednje specifične topline po (68)

$$i = [c_p]_{t_0}^t (t - t_0) + i_0 = \frac{[C_p]_{t_0}^t}{m} (t - t_0) + i_0 \quad (202a)$$

Za najjednostavniji slučaj, kad je  $c_p = \text{konst}$ , imamo

$$i = c_p (t - t_0) + i_0 \quad (\text{idealni plinovi i } c_p = \text{konst}) \quad (203)$$

Uvrstimo li pri  $t_0 = 0^\circ C$  vrijednost  $i_0 = 0$  (osnovno stanje za računanje entalpije) to postaje

$$i = c_p t \quad (203a)$$

što je vrlo jednostavni izraz.

Evo još nekoliko važnijih izraza. Znamo, da je  $s = f(P, t)$  pak prema tome

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_t dP \quad (204)$$

Osim toga je po (194) i po (197)

$$ds = \frac{di}{T} - A \frac{v}{T} dP = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_t dP - A \frac{v}{T} dP \quad (205)$$

odakle sličnim razmatranjima, kao pri (169) i (175) slijedi

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p; \quad \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_t = \frac{1}{T} \left[ \left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_t - Av \right] \quad (206)$$

$$\left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_t = A \left[ v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right] \quad (207)$$

Uvrstimo li (207) u (198), to slijedi

$$i_1 = \int_{t_0}^{t_1} c_p dt + A \int_{p_0}^{p_1} \left[ v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \right]_{t_1} dP + i_0 \quad (208)$$

gdje indeks u drugom integralu ukazuje na integraciju kod konstantne temperature  $t_1$ , koja je bila gornja granica prvog integrala.

Pomoću (201) možemo na jednostavni način ispitati, da li se neki plin vlada idealno ili ne. Treba samo pomno izvesti pokus prigušivanja, pak pri tom mjeriti temperature pred i iza prigušilišta. Kod prigušivanja je  $i_1 = i_2$ , pak kod idealnih plinova mora biti i  $t_1 = t_2$ , budući da kod ovih entalpija  $i$  ovisi samo o temperaturama. Kad na pr. entalpija ovisi i o gustoći, kako će to biti kod pravih plinova naročito kod većih pritisaka, to će se pri tlaku  $p_2$  iza prigušilišta ustaliti neka druga temperatura  $t_2$ , nego li pri  $p_1$  pred prigušilištem. Ova pojava poznata je pod imenom THOMSON-JOULE-ovog efekta.

**Primjena entalpije** Entalpiju ćemo u izdašnoj mjeri primijeniti pri proračunavanju procesa među stalnim pritiscima, t. j. pri t. zv. stalnotlačnom procesu, koji smo prije upoznali. Po (185) za takvi je proces izvršeni rad

$$L_{12\text{tehn}} = - \int_1^2 v dP$$

bez obzira na vrstu linije ekspanzije, samo kad se radna tvar stroju dovodi i odvodi pri stalnim pritiscima. Ova je pretpostavka praktički ispunjena pri svim stupnim parnim strojevima, parnim turbinama, stupnim kompresorima i turbokompresorima. Za slučaj, da se za vrijeme ekspanzije ne dovodi toplina,  $dQ = 0$ , postaje po (193)

$$di = AvdP \quad (209)$$

te

$$i_2 - i_1 = A \int_1^2 v dP \quad (210)$$

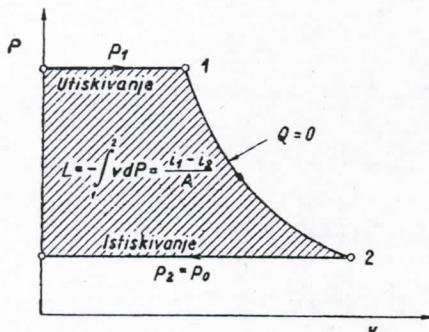
Sl. 51. Tehnički rad i sadržaj topline

predočuje se to u  $Pv$ -dijagramu iscrtkanom površinom lijevo od ekspanzione linije. S gornjim izrazom za izvršeni rad stalnotlačnog procesa dobiva se

$$L_{12tch} = i_1 - i_2 \quad (211)$$

tako, da poznavajući entalpije možemo dobiti rad sasvim jednostavno izračunati. Želimo još jednom naglasiti, da (211) važi samo za stalnotlačne procese s ekspanzijom bez dovođenja topline, među koje spada i adijabatska ekspanzija, sl. 51.

**Temperatura na kraju ekspanzije i u ispušnoj cijevi** Ispušni se ventil nekoga stupnog stroja otvara obično prije, no što je pri ekspanziji postignut vanjski pritisak (protutlak)  $p_2$ . Pri tom jedan dio plinova prodre iz cilindra, koji ima obujam  $V_1$ , u ispušnu cijev, pak se pritisci u cilindru i u ispušnoj cijevi izjednače. Ostatak se plina u cilindru zbog ove ekspanzije naknadno nešto ohladi. Kakva će biti prosječna temperatura u ispušnoj cijevi? Protutlak u ispušnoj cijevi, koji je zapravo uvjetovan istiskivanjem prijašnjih ispušnih plinova, proizvedimo u mislima nekim zamišljenim stupom  $K_2$ , na koji iz vana djeluje protutlak  $p_2$ . Neposredno po otvaranju ispušnog ventila, nadrijet će jedan dio sadržaja cilindra u ispušnu cijev, sl. 52b, pa se



tako tlak u cilindru izjednači s tlakom u ispušnoj cijevi. Po tom slijedi istiskivanje preostalog dijela plina iz cilindra, pri čem se stup cilindra  $K_1$  giba do desno obratišta, sl. 52c. Sva sadržina cilindra prešla je u ispušnu cijev, gdje je zadobila stanje  $V_2, P_2, T_2$ . Istisnuti plin neka ima jednoličnu prosječnu temperaturu  $T_2$ . Kod istružavanja vrši plin na stup  $K_2$  rad potiskivanja  $P_2 V_2$ . Za istiskivanje ostatka plina iz cilindra moralo se međutim pomicanjem stapa  $K_1$  utrošiti rad  $P_2 V_1$ .

Sveukupni rad, koji je plin izvršio, prema tome je  $P_2 (V_2 - V_1)$ . Kako se nije dovodila toplina, to je po prvom glavnom stavku

$$U_1 = U_2 + AP_2 (V_2 - V_1)$$

a za 1 kg plina

$$u_1 = u_2 + AP_2 (v_2 - v_1)$$

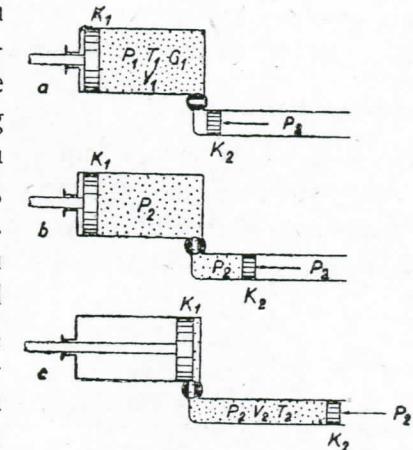
Uvrstimo li ovamo  $u = i - APv$  s pripadnim indeksima, to će za bilo koji, i neidealni plin, biti

$$i_1 - i_2 = AP_1 v_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right)$$

Za idealne je plinove, kod kojih je  $(i_1 - i_2) = c_p (T_1 - T_2)$  i  $P_1 v_1 = RT_1$

$$T_1 - T_2 = \frac{AP_1}{c_p} \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} T_1 \left(1 - \frac{p_2}{p_1}\right) \quad (212)$$

Po tome može prosječna temperatura ispuha biti znatno niža od temperature  $T_1$  na kraju ekspanzije. Zbog toga se mora biti na oprezu, kad se od mjerene ispušne temperature zaključuje na temperaturu na kraju ekspanzije.

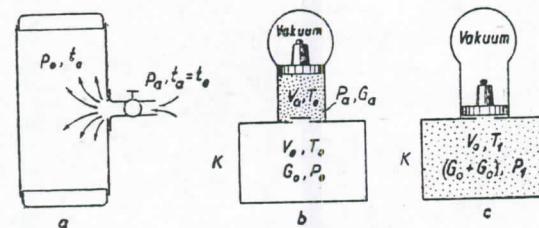


Sl. 52. Ispušni proces.

Opisani se proces razlikuje od običnog prigušivanja u tome, što pritisak  $p_1$  pred prigušilištem (ispušni ventil) nije stalan, već se za vrijeme procesa snizuje na  $p_2$ .

**Punjene spremnika** Često se pojavljuje problem punjenja ne-

kog spremnika s plinom višega pritiska. Pusti li se na pr. u spremnik, u kojem vlada niži pritisak  $p_0$ , sl. 53a, strujati uzduh vanjskog (atmosferskog) pritiska  $p_a$ , to će pritisak u spremiku nakon nekog vremena porasti na  $p_1$ . Pritisak  $p_1$  bit će to viši, što je dulje otvoren ventil.



Sl. 53. Punjenje spremnika

Shematisirajmo si ovaj proces tako, da zamislimo model po sl. 53b i 53c. Spremnik smo nadomjestili evakuiranim kotlićem  $K$ . Iznad njega je pripremljena ona porcija uzduha  $G_a$ , koju doduše još ne poznamo, ali koju ćemo pomoći zamišljenog stapa utisnuti u kotlić. Atmosferski pritisak je u tom modelu nadomješten pritiskom zamišljenog stapa, koji je opterećen prikladnim utegom. Obujam ove porcije uzduha  $G_a$  neka je pred kotlićem  $V_a$ . Za utiskivanje ovog uzduha izvršit će zamišljeni stap neki rad  $L = P_a V_a$ . (U zbilji će taj rad izvršiti okolišni uzduh, gurajući pred sobom spomenutu porciju). Za ovaj iznos mijenja se unutarnja energija sustava, budući da pretpostavljamo, da se niti dovodi niti odvodi toplina. Dakle je

$$U_{II} - U_I = AP_a V_a$$

Prije punjenja neka su temperature obih količina uzduha  $G_0$  u kotliću i  $G_a$  pred kotlićem jednake i to  $T_0$ . Po izvršenom punjenju obje se količine uzduha u kotliću izmiješaju pri zadnjicijkoj temperaturi  $T_1$ . Zato možemo posljednju jednadžbu pisati u obliku

$$(G_0 + G_a) c_v (T_1 - T_0) = AP_a v_a G_a = ART_0 G_a \quad (213)$$

Nezgodne težine  $G_0$  i  $G_a$  možemo izraziti s jednadžbom stanja. Težina je uzduha u kotliću prije punjenja

$$G_0 = \frac{P_0 V_0}{R T_0}$$

a nakon punjenja

$$(G_0 + G_a) = \frac{P_1 V_0}{R T_1}$$

Odavle

$$G_a = (G_0 + G_a) - G_0 = \frac{P_1 V_0}{R T_1} - \frac{P_0 V_0}{R T_0}$$

Iz (213) slijedi onda, uvezvi u obzir, da je  $\frac{AR}{c_v} = \gamma - 1$

$$T_1 = T_0 \frac{\gamma}{1 + (\gamma - 1) \frac{p_0}{p_1}}$$

kao temperatura na kraju punjenja, ako je punjenje proteklo tako brzo, da se kotlić u međuvremenu nije imao prilike ohladiti. Zanimljivo je, da je ova temperatura neovisna o vanjskom pritisku  $p_a$ , i da je ovisna, osim o svojstvu plina, t. j. o  $\gamma$ , samo o tlačnom omjeru prirasta tlaka unutar spremnika, ili točnije o tlačnom omjeru  $\frac{p_1}{p_0}$ . Količina uzduha  $G_a$ , koja je nadrla u spremnik i proizvela porast pritiska od  $p_0$  na  $p_1$ , dobiva se iz predzadnje jednadžbe, kad uvrstimo izraz za  $T_1$ . Nakon uređenja dobiva se

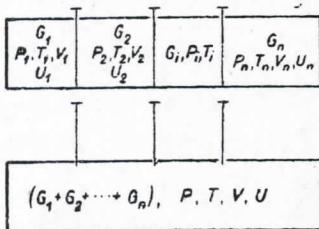
$$G_a = G_0 \frac{p_0}{\gamma} = \frac{P_0 V_0}{R T_0} \frac{p_1}{\gamma} - 1$$

**Tipični nepovratni proces**, s kojim miješanje plinova. imamo vrlo često posla, miješanje je plinova. Pri postavljanju problema zanima nas u prvom redu konično stanje mješavine, koje moramo očekivati, kad su poznata početna stanja sudionika i, naravno, kad su poznati vanjski uvjeti, pod kojima se vrši miješanje. Tako će miješanje pri stalnom obujmu dati drugi rezultat, nego li miješanje pri stal-

nom pritisku. Zadatak si pojednostavljujemo pretpostavljajući, da se za vrijeme miješanja niti dovodi niti odvodi toplina. Ako bi se toplina ipak dovodila, to za račune uvijek možemo uzeti, kao da je ona dovedena neposredno po završetku miješanja, budući da je za bilancu energije svejedno, u kojem se vremenskom slijedu izmjenjuju pojedini iznosi energije.

### a) Miješanje pri $V = \text{konst}$

U izoliranoj posudi sveukupnog obujma  $V \text{ m}^3$ , sl. 54, u odijeljenim su komorama pojedini plinovi s težinama  $G_1, G_2$  itd,



Sl. 54. Miješanje kod stalnog obujma

Kako je  $V = \text{konst}$  to je sveukupno izvršeni rad  $L = 0$ . Budući da se ne dovodi toplina, to mora po prvom glavnom stavku unutarnja energija prije i poslije miješanja ostati ista, pak je

$$\begin{aligned} G_1 c_{v1} T_1 + G_2 c_{v2} T_2 + \dots + G_n c_{vn} T_n &= \\ = (G_1 c_{v1} + G_2 c_{v2} + \dots + G_n c_{vn}) T & \end{aligned} \quad (214)$$

a odavde temperatura mješavine

$$T = \frac{G_1 c_{v1} T_1 + G_2 c_{v2} T_2 + \dots + G_n c_{vn} T_n}{G_1 c_{v1} + G_2 c_{v2} + \dots + G_n c_{vn}} = \frac{\sum_{i=1}^n (G_i c_{vi} T_i)}{\sum_{i=1}^n (G_i c_{vi})} \quad (215)$$

Sa  $G_i = \frac{P_i V_i}{R_i T_i}$  i dijeljenjem u brojniku i nazivniku sa  $A$ , dobivamo

$$T = \frac{\sum P_i V_i \frac{c_{vi}}{A R_i}}{\sum \frac{P_i V_i}{T_i} \frac{c_{vi}}{A R_i}} = \frac{\sum \frac{P_i V_i}{\kappa_i - 1}}{\sum \frac{P_i V_i}{(\kappa_i - 1) T_i}} \quad (216)$$

Za plinove s jednakim  $\kappa_i$ , na pr. kad se miješaju sami dvoatomni plinovi, može se kratiti s  $(\kappa_i - 1)$  pak slijedi

$$T = \frac{\sum P_i V_i}{\sum \frac{P_i V_i}{T_i}} \quad (\text{za } \kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n) \quad (217)$$

Za izračunavanje pritiska smjese podimo od DALTON-ova zakona

$$P = P' + P'' + \dots + P^{(n)}$$

gdje  $P'$  itd. predstavljaju parcijalne pritiske sudionika u mješavini. Ovi pritisci se naravno razlikuju od  $P_1, P_2$  itd. Po jednadžbi je stanja

$$P' = \frac{G_1 R_1 T}{V} \quad \text{i} \quad P_1 = \frac{G_1 R_1 T_1}{V_1} \quad (218)$$

odakle slijedi

$$P' = P_1 \frac{V_1 T}{V T_1} \text{ a analogno } P'' = P_2 \frac{V_2 T}{V T_2}$$

Time se dobiva pritisak mješavine

$$P = \frac{T}{V} \sum \frac{P_i V_i}{T_i} \quad (219)$$

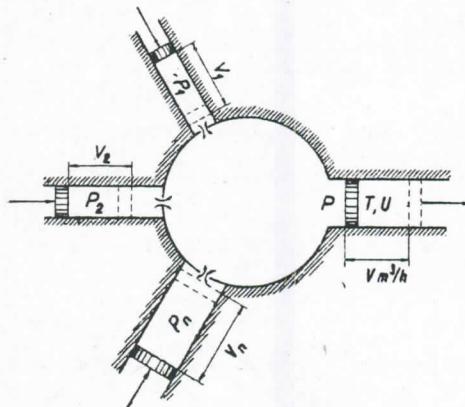
Za smjesu, u kojoj ovi sudionici imaju jednake  $\kappa_i$ , bit će sa (217)

$$P = \frac{\sum P_i V_i}{V} = \frac{\sum P_i V_i}{\sum V_i} \quad (\text{za } \kappa_1 = \kappa_2 = \dots = \kappa_n) \quad (220)$$

Indeks  $i$  odnose se na stanja sudionika prije miješanja.

b) Miješanje plinskih struja

Ovaj zadatak imamo na pr. kod miješanja dimova većeg broja kotlova, koji se dovode u zajednički dimnjak. Shematski si možemo zamisliti, kao da neki stupovi, sl. 55, guraju pojedine plinove k prostoru miješanja. Tako se miješalištu dovode  $G_1, G_2$  i t. d. kg/h ili  $V_1, V_2$  i t. d. m<sup>3</sup>/h plinova pri stalnim pritiscima  $P_1, P_2$  i t. d., dok se od miješališta odvodi  $G$  kg/h ili  $V$  m<sup>3</sup>/h smjese pri stalnom pritisku  $P$ .



Sl. 55. Miješanje struja.

jedne strane mora biti jednaka unutarnjoj energiji i radu istiskivanja smjese s druge strane, t.j.

$$U_1 + U_2 + \dots + AP_1 V_1 + AP_2 V_2 + \dots = U + APV \quad (221)$$

ili sa (191)

$$I_1 + I_2 + \dots + I_n = I \quad (222)$$

Za  $i$ -ti dovedeni plin je

$$I_i = G_i c_{pi} T_i$$

a time

$$T = \frac{\sum G_i c_{pi} T_i}{\sum G_i c_{pi}} \quad (223)$$

analognog izrazu (216) dobiva se

$$T = \frac{\sum \frac{x_i}{x_i - 1} P_i V_i}{\sum \frac{x_i}{x_i - 1} \frac{P_i V_i}{T_i}} \quad (224)$$

Imadu li svi plinovi jednako  $x_i$ , to je

$$T = \frac{\sum P_i V_i}{\sum \frac{P_i V_i}{T_i}} \quad (\text{za } x_1 = x_2 = \dots = x_n) \quad (225)$$

No ovdje se  $\sum V_i$  razlikuje od  $V$ ! Ako  $V' = r'V$ ,  $V'' = r''V$  označuju parcijalne obujme plinova u nastaloj smjesi, to je po jednadžbi stanja za prvi plin

$$V' = \frac{G_1 R_1 T}{P} \quad \text{i} \quad V_1 = \frac{G_1 R_1 T_1}{P_1}$$

a time

$$V' = V_1 \frac{P_1 T}{P T_1} \quad \text{i} \quad V'' = V_2 \frac{P_2 T}{P T_2}$$

Uvrstimo li to u izraz

$$V = V' + V'' + \dots + V^{(n)}$$

to dobivamo obujam nastale smjese

$$V = \frac{T}{P} \sum \frac{P_i V_i}{T_i} \quad (226)$$

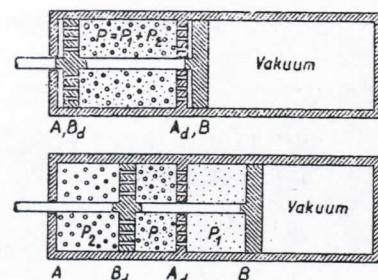
Za posebni slučaj da svi plinovi struje pod istim pritiskom, dobivamo jednostavniji izraz

$$V = T \sum \frac{V_i}{T_i} \quad (\text{za } P_1 = P_2 = \dots = P_n = P) \quad (227)$$

**Nepovratnost miješanja**

Činjenica, da se miješanje plinova vrši samo od sebe, dok se naprotiv razlučivanje plinskih smjesa na pojedine sudionike, koje bi teklo samo od sebe, nikad ne opaža, daje naslutiti, da je miješanje nepovratni proces. Da bismo to pitanje pročistili, moramo znati, kolika je entropija nastale smjese, budući da je prirast entropije mjera za nepovratnost, kako ćemo to još razložiti u slijedećem odlomku. Poznavanje entropije neke smjese osim toga je potrebno i kod proučavanja mnogih toplinskih problema.

U tu svrhu izvest ćemo u mislima eksperimentat, s dokazivo povratnim miješanjem odnosno razlučivanjem. Naprava u sl. 56, sastoji se od cilindra s krutim stijenkama i krutim po-



Sl. 56. Razlučivanje polupropusnim stijenkama

propusnu stijenku ili ne, nije bitno. Za nas dostaže saznanje, da baratanje ovakvim polupropusnim stijenkama nije protuprirodno, te da su ove stijenke u zamisljenom eksperimentu snošljive s prvim i drugim glavnim stavkom. U cilindru naše naprave može se pomicati dvostruki stap s nepropusnom stijenkom  $B$  i s polupropusnom stijenkom  $B_d$ . Prostor među stavnim stijenkama baš je tako velik kao i prostor između stijenki cilindra  $A$  i  $A_d$ . U lijevom obratištu stapa napunimo cilindarski prostor između  $B_d$  i  $A_d$  plinskom smjesom, koju želimo razlučiti, i to pod pritiskom  $P = P_1 + P_2$ . Polupropusna stijenka  $A_d$  neka je propusna za plin 1, dok je nepropusna za plin 2. Polupropusna stijenka  $B_d$  naprotiv neka je propusna za plin 2, dok je nepropusna za plin 1.

Pomičemo li stap polagano na desno, to će plin 2 prodirati kroz stijenku  $B_d$  bez zaprijeke u prostor, koji se lijevo oslobada, dok ista stijenka zadržava plin 1, kao neko pregusti. Budući da stijenka  $B_d$  plinu 2 ne čini neku preprijeku, to će ovaj lijevo i desno od  $B_d$  stajati pod istim pritiskom  $P_2$ . Isto razmatranje vrijedi i za plin 1 obzirom na polupropusnu stijenku  $A_d$ , pak se kod nekog srednjeg položaja dvostrukog stapa nailazi slijedeća situacija: U lijevom prostoru je plin 2 pod pritiskom  $P_2$ , u desnom prostoru plin 1 pod pritiskom  $P_1$ , u srednjem prostoru ostatak još nerazlučene smjesa pod pritiskom  $P = P_1 + P_2$ . Daljnjim pomicanjem dvostrukog stapa sudarit će se konačno stijenke  $B_d$  i  $A_d$ , a smjesa se potpuno

razlučila u svoje sastojine 1 i 2. Pri tom zauzima svaki od sudionika obujam  $V$ , koji je jednak početnom obujmu smjesa, dok su pojedinačni pritisci  $P_1$  i  $P_2$  jednaki prijašnjim parcijalnim pritiscima obih sudionika u nerazlučenoj smjesi. Svaki od njih je naravno manji od sveukupnog pritiska smjesa  $P$ . Temperatura se sudionika razlučivanjem smjesa nije promjenila.

Za pomicanje stapa se nije utrošio rad, o čemu se možemo uvjeriti ovim razmatranjem. Na dvostruki stap djeluje s lijeva na stijenku  $B_d$  pritisak  $P_2$ , a na  $B$  pritisak  $P_1$ , dakle u smjeru s lijeva na desno u svemu ( $P_1 + P_2$ ). S desna djeluje na  $B_d$  iz srednjeg prostora pritisak ( $P_1 + P_2$ ), tako da se pritisci suprotnoga smjera ponistavaju, te se za pomicanje stapa ne mora svladavati nikakva sila, pa prema tome nije potreban ni nikakav rad. Proces možemo bez potroška rada izvesti i u suprotnom smjeru, te tako sudionike opet izmiješati. Prema tome je takav način miješanja odnosno razlučivanja potpuno povratan, što treba naročito istaći. Zato moraju entropije u obim graničnim stanjima biti jednake. To isto bismo mogli pokazati i za smjesu većeg broja sudionika. Dobiveni zaključak sažimamo u stavak GIBBS-a: Entropija smjesa idealnih plinova sabire se iz entropija pojedinih sudionika, koje bi ovi imali, kad bi svaki za sebe pojedinačno ispunjavali prostor, u kojem se nalazi smjesa. U tom bi slučaju svaki sudionik po DALTONOV-u zakonu stajao pod pojedinačnim pritiskom  $P_i$ . Pojedinačna je entropija  $s_i$  za jedan Mol ovakvog sudionika

$$s_i = C_{p_i} \ln \frac{T}{T_0} - A \cdot 848 \ln \frac{p_i}{p_0} + s_{i_0} \quad (228)$$

U jednom Molu smjese sadržano je  $r_i$  Mola  $i$ -tog sudionika, pak je sveukupna entropija za 1 Mol smjesa po GIBBS-ovu stavku

$$s = \sum r_i \left( C_{p_i} \ln \frac{T}{T_0} - 1,987 \ln \frac{p_i}{p_0} + s_{i_0} \right) [kcal/Mol K] \quad (229)$$

Sad možemo izračunati prirast entropije, koji nastaje kad miješamo plinove pri stalnom pritisku, kako se to redovito događa u tehničkim procesima. Prije miješanja neka su svi sudionici pod jednakim pritiscima  $p$  i kod iste temperature  $t$

kao i smjesa, koja se dobiva. Sveukupna entropija  $s'$  prije miješanja jednaka je sumi entropija neizmiješanih sudionika

$$s' = \sum r_i \left( C_{p_i} \ln \frac{T}{T_0} - 1,987 \ln \frac{p}{p_0} + s_{i_0} \right) \quad (230)$$

Entropija nastale smjesi određena je izrazom (229), pak je prirast entropije spram izraza (230)

$$\Delta s = s - s' = \sum r_i \cdot 1,987 \ln \frac{p}{p_i} = \sum r_i \cdot 1,987 \ln \frac{1}{r_i} \quad (231)$$

Budući da je prostorni udio  $r_i$  uvijek manji od jedinice, to je  $\Delta s$  uvijek pozitivno, pak prema tome je miješanje plinova pri stalnom pritisku uvijek nepovratno, kako smo i naslućivali.

**Gubici uslijed nepovratnosti.** Za nepovratne procese bilo je znajčajno, da je entropija sustava manje ili više porasla. Nameće se samo po sebi, da taj sveukupni prirast entropije uzmemo za mjerilo stepena nepovratnosti nekog procesa. No za tehničara dobivamo još zorniju sliku, kad za mjerilo nepovratnosti uvedemo gubitak rada, koji nastaje u poredbi s potpuno povratnim procesom.

U tu svrhu svrstat ćemo sve sudionike nekog procesa u dvije skupine. Prvu skupinu neka čini okolina, kao okolišni uzduh, rashladna voda, tlo i slično, kojih stanje označimo s indeksom  $_0$ . Druga skupina neka obuhvati sve ostale sudionike, uključivši ovamo i toplinske spremnike, koji možda sudjeluju na procesu. Ovu skupinu nazovimo „radnim sustavom“. Na taj smo način preostali svijet, koji i onako ne sudjeluje na procesu, izlučili iz razmatranja.

Radni se sustav može iz nekog početnog stanja 1 prevesti u konačno stanje 2 bilo povratnim, bilo nepovratnim načinom. U oba se slučaja entropija radnoga sustava promjeni od početne vrijednosti  $S_1$  na konačnu vrijednost  $S_2$ . No pri toj promjeni stanja radnog sustava sudjelovat će i okolina. Njena se entropija u slučaju povratne (reverzibilne) promjene radnog sustava mijenja za  $\Delta S_r$ , a u slučaju nepovratne (ireverzibilne) promjene za iznos  $\Delta S_i$ .

U slučaju reverzibilne promjene stanja ostaje sveukupna entropija, t. j. zbir entropija radnog sustava i okoline, konstantna

$$S_2 - S_1 + \Delta S_r = 0 \quad (232)$$

Kod ireverzibilnog procesa sveukupna entropija naprotiv raste, pak je zbog nepovratnosti prirast entropije  $\Delta S$  radnog sustava i okoline

$$\Delta S = S_2 - S_1 + \Delta S_i > 0 \quad (233)$$

Iz (232) i (233) slijedi

$$\Delta S = \Delta S_i - \Delta S_r \quad (234)$$

Ovdje je  $\Delta S$  prirast sveukupne entropije, prouzrokovani nepovratnostima. Taj prirast možemo u svakom slučaju izračunati, na pr. tako, da izračunamo entropije sviju sudionika prije procesa i sviju sudionika poslije procesa. Diferenca nam odmah daje prirast entropije. Kadkada ne će biti moguće računati entropiju pojedinog sudionika, kao što je na pr. okolina, ali tu možemo računati prirast entropije tog sudionika iz dovedene i odvedene topline, koja će biti poznata iz samog toka procesa. Svakako ovakav sveukupni prirast entropije radnog sustava i okoline daje jednoznačno mjerilo za veličinu nepovratnosti promatranog procesa.

Kod promatranog reverzibilnog procesa izmijenit će se između radnog sustava i okoline neka količina topline  $Q_r$ , a kod ireverzibilnog procesa neka druga količina topline  $Q_i$ . Računamo ih pozitivno, kad ih dovodimo okolini. Budući da je temperatura okoline stalna i to  $T_0$ , bit će po (143a)

$$Q_r = T_0 \Delta S_r \quad \text{a} \quad Q_i = T_0 \Delta S_i \quad (235)$$

Pri nepovratnom se procesu dovodi okolini za  $\Delta Q$  kcal više topline nego li pri povratnom, što vidimo iz razlike

$$\Delta Q = Q_i - Q_r = (\Delta S_i - \Delta S_r) T_0 = \Delta S T_0 \quad (236)$$

Po pretpostavci radnom sustavu iz vanjskog svijeta ne dovodimo toplinu, te se dobiveni rad i toplina, koja se predaje okolini, moraju pokriti iz unutarnje energije radnog sustava, tako da je za povratni odnosno za nepovratni proces

$$U_1 - U_2 = Q_r + AL_r \text{ odnosno } U_1 - U_2 = Q_i + AL_i \quad (237)$$

Rad  $AL_i$  ireverzibilnog procesa naravno da je manji od rada  $AL_r$  reverzibilnog procesa. Razliku čini upravo onaj gubitak rada  $\Delta AL$ , koji je uvjetovan nepovratnostima, pak je iz (237)

$$\Delta AL = AL_r - AL_i = Q_i - Q_r = \Delta Q \quad (238)$$

odakle pomoću (236) konačno dobivamo jednostavni izraz za izgubljeni rad uslijed nepovratnosti

$$\Delta AL = T_o \Delta S \quad (239)$$

Radni gubitak nekog nepovratnog procesa prema ovom je izrazu jednak umnošku apsolutne temperature okoline, i izvanog sveukupnog prirasta entropije. Radni se gubitak gubi beskorisno u obliku topline u okolini, t. j. on prelazi u unutarnju energiju okoline. To vrijedi sasvim općenito. Naravno, da se za proračunavanje sveukupnog prirasta entropije  $\Delta S$  mora uzeti u obzir promjena entropije kako samog radnog sustava tako i okoline, u koliko je ona bila u razmjeni topline s radnim sustavom za vrijeme procesa.

S entropijom smo, osim ostalih njenih prednosti, dobili još i sretstvo, kojim možemo jednostavnim načinom proračunati gubitke u vezi s nepovratnim procesima. To se može učiniti za svaki pojedini slučaj, što više i za svaki po volji odabrani otsječak nekog zamršenijeg procesa. Tako se može izviditi, da li su, i u kojem dijelu procesa odnosno postrojenja potrebna neka poboljšanja.

U pojedinim slučajevima treba razmotriti, da li se otstranjivanjem nepovratnosti u jednom otsječku nekog procesa ne mijenjaju bitno radni uvjeti u nekom drugom otsječku procesa. Kad na pr. uspije poboljšanjem nepovratnosti smanjiti gubitke u nekom tehničkom postrojenju, to će i toplina  $Q_i$  koju predajemo okolini, postati manja. Ovu se obično predaje rashladnoj vodi u nekom izmenjivaču topline. Pri istoj prelaznoj površini ovog izmenjivača smanjiti će se u tom slučaju temperaturne razlike, koje su potrebne za prelaz topline, pak će se posredno smanjiti i nepovratnosti ovog prelaza topline. Tu je onda ušteda u neku ruku dvostruka. No isto tako može poboljšanje u jednom dijelu procesa ili naprave izazvati pogoršanje u nekom drugom otsječku tog procesa, pak zato ova delikatna pitanja treba pomno proučavati.

## Termodinamička temperatura

U pomanjkanju neke fundamentalne skale temperature dogovorili smo se, da ćemo za mjerjenje i označivanje temperature uzeti neku svojevoljno odabranu termometričku supstancu, pri čem, naravno, dobivena skala postaje ovisna o odabranoj tvari. Pri tom smo se odlučili za skalu vodikova termometra, prema kojoj smo udesili i ostale vrste kao živin termometar, termo-element itd. No kako smo u nastavku naših razlaganja uvrkljili temperaturu i u definiciju drugog glavnog stavka, vidi (143), te joj tako pridali univerzalni karakter, to je neodrživo, da bi apsolutne temperature i dalje ostale ovisne o slučajno odabranoj termometričkoj supstanci. No usprkos toga upućeni smo kod eksperimenata baratati s pravim termometrima. Zato moramo naći neku vezu između svojevoljne uobičajene — konvencionalne — skale temperature i ove druge apsolutne skale univerzalnog karaktera.

Univerzalna CARNOT-ova funkcija temperature  $\varphi(t) = T$  dobivena je u (140) uz pretpostavku nekog idealnog plina, kojega smo jednadžbe stanja definirali u obliku

$$Pv = RT \text{ i } u = c_v T + u_0.$$

Kad bismo raspolagali s ovakvim plinom u svim područjima mjerjenja temperature, mogli bismo ga odmah upotrijebiti kao termometričku supstancu, pak mjerenjem veličina  $P$  i  $v$  i pomoću jednadžbe stanja po volji točno izračunati apsolutnu temperaturu dotičnog stanja.

No drugi glavni stavak dopušta nam i pomoću mjerjenja na realnim supstancama, na pr. na realnim plinovima ili na živi odrediti apsolutnu temperaturu bilo kojom točnosti, koja je jedino uvjetovana točnostima mjerjenja. To možemo učiniti na slijedeći način. Prema (175) je

$$\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T = AT \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v - AP.$$

U ovom su izrazu sve veličine, osim  $T$ , pristupačne neposrednom mjerenu. Za mjerjenje temperature poslužit ćemo se pri

tom nekim svojevoljno odabranim termometrom, koji nam pokazuje konvencionalnu temperaturu  $\vartheta$ . Takvu nam daje na pr. obični živin termometar, kojim se u najvećem opsegu služimo u životu i u laboratoriju. O toj konvencionalnoj temperaturi znamo za sada samo to, da je u nekoj jednoznačnoj vezi s absolutnom temperaturom  $T$  t. j. da je

$$T = f(\vartheta) \text{ a time i } dT = \frac{\partial T}{\partial \vartheta} d\vartheta.$$

Uvrstimo li to u predzadnji izraz, to dobivamo

$$\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_\vartheta = AT \left( \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right)_v \frac{d\vartheta}{dT} - AP \quad (240)$$

a odavde

$$\frac{dT}{T} = \frac{A \left( \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right)_v}{\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_\vartheta + AP} d\vartheta \quad (241)$$

Integracijom

$$\ln \frac{T}{T_0} = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \frac{A \left( \frac{\partial P}{\partial \vartheta} \right)_v d\vartheta}{\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_\vartheta + AP} \quad (242)$$

Tu smo pronašli traženu termodinamičku vezu između apsolutne temperature  $T$  i konvencionalne, bilo kojom termometričkom supstancom definirane temperaturе  $\vartheta$ . Brojnik je koeficijent nagiba izohore dotične supstance u  $P\vartheta$ -dijagramu za volumen  $v$ . Takav dijagram dobivamo, kad dotičnoj supstanci kod volumena  $v$  mjerimo za razne konvencionalne temperature  $\vartheta$  priпадne pritiske  $P$ . U nazivniku nalazimo pored pritiska  $P$ , koji se lako mjeri, još i član  $\left( \frac{\partial u}{\partial v} \right)_\vartheta$ , t. j. ovisnost unutarnje energije o gustoći pri stalnoj temperaturi, a ovu ovisnost možemo također eksperimentalno odrediti. Kod idealnog plina ovaj član isčešava.

Kod brojčane primjene izraza (242) moramo se odlučiti na izbor nekih jedinica za skalu od  $\vartheta$  i za skalu od  $T$ . Pri  $\vartheta$

odabiremo kao osnovne točke dvije nepromjenljive temperaturne točke. To su ledište vode, kojemu pridajemo vrijednost  $\vartheta_0 = 0^\circ$  i vrelište vode pri pritisku od 760 mm Hg, koje označujemo sa  $\vartheta_{100} = 100^\circ$ . Za temperaturnu skalu od  $T$  smijemo onda još samo jednu takvu točku utvrditi i pridati joj brojčanu vrijednost, jer će time i izrazom (242) čitava skala biti jednoznačno određena. No mjesto utvrđivanja ove jedne točke možemo za temperaturnu skalu  $T$  propisati, da bude na pr. razlika između ledišta i vrelišta vode  $100^\circ$  K, t. j. da je

$$T_{100} - T_0 = 100 \text{ K} \quad (243)$$

Samu brojčanu vrijednost za  $T_{100}$  i za  $T_0$ , dakle za dvije nepoznanice, dobivamo onda iz dvije jednadžbe (243) i (242), a čim je poznato  $T_0$ , to onda za bilo koju konvencionalnu temperaturu  $\vartheta$  slijedi pripadna apsolutna temperatura  $T$  iz jednadžbe (242).

Apsolutnu temperaturu  $T$ , definiranu po jednadžbi (242), zovemo termodinamičkom skalom temperatura, budući da je ona definirana ne empiričkim iskustvom već termodinamičkim razmatranjima, te je tako neovisna o slučajno upotrebljenoj termometričkoj supstanci. Praktički to znači, da ćemo za termički stepen djelovanja nekog zadanog CARNOT-ovog procesa dobiti uvijek istu vrijednost, mjerili mi temperature njegovih toplinskih spremnika sa bilo kakvim termometrima s bilo kakvim možda i nejednoličnim skalama, samo ako ih pomoću jednadžbe (242) preračunamo u termodinamičku temperaturu  $T$ .

Za izračunavanje integrala u (242) može se naravno upotrijebiti bilo koji termometar, s bilo kakvom termometričkom supstancom. U tu se svrhu moraju za tu supstancu odrediti posebnim mjeranjima veličine u brojniku i nazivniku za željeno temperaturno područje. Najprikladnije je odabrati takvu supstancu, koja osigurava najveću eksperimentalnu točnost. To su iz više razloga plinovi. Kad bismo na pr. istraživali neki vrlo razrijeđeni plin pomoću plinskog termometra, koji bi bio punjen plinom također vrlo niskog pritiska, dobili bismo kao rezultat, da se plin pokorava jednadžbama stanja, izraženim konvenci-

onalnom temperaturom dotičnog plinskog termometra, slijedećeg oblika

$$Pv = R(273,16 + \vartheta) \quad \text{i} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_\vartheta = 0 \quad (244)$$

Primjenom izraza (242) i (243) dobit ćemo odavle jednostavnim računom

$$T_0 = 273,16 \text{ K}$$

kao brojčanu vrijednost termodinamičke temperaturne skale za ledište vode, koje smo inače označili sa  $t = 0^\circ \text{C}$ . Za vrelište vode isto tako slijedi termodinamička temperatura  $T_{100} = 373,16$ .

Kod vrlo niskih temperatura ne ćemo više dobiti eksperimentom jednostavni izraz (244), pak u tom slučaju moramo integral u (242) računati možda grafički, a svakako na temelju mjereneh vrijednosti. No pri tom moramo uvijek dobiti istu vrijednost  $T_0 = 273,16$ , budući da po drugom glavnem stavku termodinamička temperatura  $T$  ne može biti ovisna u slučajno odabranoj supstanci ili o eksperimentalnom području. Baš zato se i izraz (242) može upotrijebiti za neposredno eksperimentalno provjeravanje drugog glavnog stavka, i to na taj način, da vrijednost  $T_0$  odredimo eksperimentom za razne supstance i razna područja, te tako dobivene vrijednosti  $T_0$  međusobno usporedimo. Razlike ne smiju biti veće, nego li to odgovara točnosti mjerjenja, koja se dade ocijeniti.

Termodinamička se skala temperature praktički podudara s Celsiusovom skalom plinskog (vodikovog) termometra. U pri-loženoj skrižaljci vidi se razlika skale vodikovog odnosno dušikovog termometra spram termodinamičke skale po podacima NUSSELT-a:

$t^\circ \text{C}$	$\Delta_{H_2}$	$\Delta_{N_2}$
-200	+0,06	+0,90
0	0	0
60	-0,0005	-0,0079
100	0	0
200	+0,003	+0,046
1000	+0,05	+0,77

## Bit entropije

Da bismo zadovoljili želju za boljim misaonim tumačenjem pojma entropije, taknut ćemo se pitanja, kakvo spoznajno značenje treba pripisati entropiji. Time ne mislimo reći, da će se tek odgovorom na to pitanje moći s razumijevanjem raditi s tom veličinom. Spoznajama, koje želimo razmotriti, samo ćemo u neku ruku zaključiti pojmove o shvaćanju kao i o povijesnom razvitku entropije.

Promatrajmo neki sustav sa zadanim toplinskim stanjem malo pomnije. Razabrat ćemo, da je taj sustav izgrađen od ogromnog mnoštva najmanjih čestica, od molekula, a kod još veće pažnje naići ćemo na još sitnije i mnogobrojnije čestice, na elektrone. Svaka od ovih čestica pokorava se poznatim zakonima mehanike i elektrodinamike. No unatoč toga nismo kadri individualnim razmatranjem tih čestica izračunati totalno stanje našeg sustava, a kamo li proračunati daljnji tok njegove promjene stanja. Razlog je u tome, što nam je trenutačno stanje najmanjih čestica nepoznato već zbog njihovog ogromnog broja. No pored toga je i kod pojedine najmanje čestice načelno nemoguće mjerenjima točno ustanoviti njezino trenutačno stanje budući da je po HEISENBERG-ovoj relaciji neodređenosti nemo-guće eksperimentom istovremeno odrediti točni položaj i točnu brzinu takve najmanje čestice.

**Makrostanje i mikrostanje** Toplinsko stanje nekog sustava, nazvat ćemo ga u kratko njegovo makrostanje, uzmogli smo opisati s nekoliko veličina stanja, koje se dadu mjeriti uobičajenim instrumentima. Kad je na pr. 1 kg nekoga plina zatvoren u posudi volumena  $v$ , a ima unutarnju energiju  $u$ , to je makrostanje ovim dvim veličinama određeno, ako se sustav nalazi u ravnoteži. Pri tom će se dogoditi, a i trajno se događa, da se molekuli sudaraju, pa da jedni molekuli predaju jedan dio svoje energije gibanja drugima, pri čem se naravno ne mijenja sveukupna unutarnja energija sustava. No kako je sad ova energija u pojedinostima drugačije raspodijeljena na pojedine molekule, to smo dobili neki drugi

skup pojedinačnih stanja molekula, koji se razlikuje od prvog. Svaka ovakva specijalna „mikrorazdioba“ energije, t. j. svaki novi skup pojedinačnih stanja molekula odgovara po jednom posebnom mikrostanju našeg sustava<sup>1)</sup>. Jasno je, da će postojati vrlo veliki broj takvih različitih mikrostanja, koja daju isto makrostanje sustava, i ako se sva ta mikrostanja međusobno razlikuju<sup>2)</sup>. Ova se mikrostanja trajno mijenjaju jer se molekuli sudsaraju i time izmjenjuju energiju, i jer ni jedno mikrostanje nema neku prednost pred ostalima. Drugim riječima sva su mikrostanja obzirom na svoje pojavljivanje jednako vjerojatna. Treba spomenuti, da neko mikrostanje nije dovoljno označeno samo razdiobom energije na pojedine najmanje čestice. I kod jednakih razdiobe energije na te čestice bit će još raznih mikrostanja, jer za njihovo razlikovanje postoje još i druge bitne značajke. Tako je na pr. važno, kako su molekuli razdijeljeni u prostoru. Time se naravno broj mogućih raznolikih mikrostanja sasvim znatno povećava. Taj broj označit ćemo sa  $G_1$ .

Možemo teoretski zamisliti, da kod promatranog plina sa zadanim volumenom i zadanim sveukupnom unutarnjom energijom slučajem nastupi takva konstelacija molekula, da se u lijevoj polovici posude nađu molekuli s pretežno velikim pojedinačnim energijama (brzinama), a u desnoj polovici posude onakvi s pretežno malim brzinama. U tom bi slučaju pri inače istoj sveukupnoj energiji plina, u lijevoj polovici posude bila veća energija nego li u desnoj. Kao posljedica, vladat će u obim polovicama razne temperature, te se ovo toplinsko stanje i kao makrostanje razlikuje od prvoga, i ako su sveukupni volumen i sveukupna energija ostali isti. Sadašnje makrostanje razlikuje

<sup>1)</sup> Mikrostanje ne smije se shvatiti kao stanje jedne molekule!

<sup>2)</sup> Evo nekoliko mikrostanja, koja daju isto makrostanje: Mikrostanje br. 1: Sveukupna energija plina je sasvim jednolično razdijeljena na sve molekule; mikrostanje br. 2: Na polovicu molekula jednolično je razdijeljeno  $\frac{2}{3}$  sveukupne energije, na preostalu polovicu molekula samo  $\frac{1}{3}$  energije; no molekuli su dobro promiješani; mikrostanje br. 3: Energija je na pojedine molekule razdijeljena po aritmetskom redu, no svi molekuli su dobro izmiješani itd. itd.

se od prvoga već time, što plin obzirom na nejednoliku razdiobu energije na obje polovice posude, kao i obzirom na nejednolikost temperatura nije više homogen. I ovo se novo makrostanje može ostvariti s bezbrojem različitih mikrostanja, od kojih će sva dati istu nejednoliku sveukupnu razdiobu energije i istu nejednolikost temperatura u obim polovicama posude. Broj ovakvih mikrostanja označimo sa  $G_2$ . Ovaj se broj znatno razlikuje od broja  $G_1$  u prvom slučaju.

**Statistička težina ili termo-dinamička vjerojatnost stanja.** zbog sasvim nesređenog gibanja molekula, kako jednolike, tako i nejednolike makrorazdiobe energije, tako da se trajno izmjenjuju najrazličitija mikrostanja, od kojih je svako jednako ravnopravno, t. j. jednako vjerojatno. Ono makrostanje, koje se da ostvariti s većim brojem mikrostanja, imat će više izgleda da nastupi, od onakvoga, koji za svoje ostvarenje raspolaže samo s manjim brojem prikladnih mikrostanja. Šanse (izgledi) za ostvarenje nekog makrostanja odbrojene su brojem  $G$  onih mikrostanja, koja ostvaruju dotično makrostanje. Zato se broj  $G$  naziva „statističkom težinom“ ili takođe „termodynamičkom vjerojatnosti“ dotičnog makrostanja. Termodynamička vjerojatnost, za razliku od matematske vjerojatnosti, nije neki pravi razlomak, već naprotiv neki, obično sasvim ogromni, cijeli broj.

Kod dosadanjih razmatranja čutke smo pretpostavili, da broj mogućih mikrostanja može doduše biti silno velik, ali da je ipak konačan. Po starijoj klasičnoj teoriji plinova to se ne bi moglo zamisliti, jer se tamo računalo time, da se prelaz energije od jedne čestice na drugu može vršiti kontinuirano, t. j. da se mogu izmjenjivati po volji male količine energije. Time bi se izbrisala granica razlikovanja dviju različitih mikrostanja, a broj bi mogućih mikrostanja uvijek bio beskonačan. No po teoriji kvanata od PLANCK-a sastoji se energija nekog tijela od bezbroj najmanjih, ali dalje nedijeljivih dijelića (čestica) energije, slično kao što si i materiju zamišljamo izgrađenu od najmanjih dalje ne dijeljivih materijalnih čestica. Po toj predodžbi onda nije više moguća kontinuirana izmjena energije, već energija može porasti ili se smanjiti samo za ove najsitnije ener-

getske iznose, ili njihove mnogokratnike, dakle tako reći samo skokimice. Ovi najmanji stepeni energije su sasvim izvanredno sitni, ali su ipak konačni. Naslućujemo, da će time broj kombinatorskih mogućnosti za ostvarivanje raznih mikrostanja postati konačan. To je jasno rečeno ovom hipotezom od PLANCKA:

Svakolika mikrostanja čine diskretnu raznolikost. Svako makrostanje nekog sustava obuhvaća sasvim određeni broj mikrostanja toga sustava, a taj broj daje termodinamičku vjerojatnost odnosno statističku težinu  $G$  ovoga makrostanja.<sup>1)</sup>

Sad promjenimo vanjske uvjete našega plina tako, da se na pr. povećanjem obujma posude dopusti neko novo makrostanje, koje ima mnogo veću statističku težinu, nego li prvotno makrostanje. Kod dovoljno čestog promatranja opazit će se ovo drugo stanje mnogo češće nego li prvotno. Ako je red veličine obih statističkih težina vrlo različit, to će prednost vjerojatnijeg stanja biti tako velika, da će se uspostavljanje manje vjerojatnog prvotnog stanja pod novim uvjetima sasvim izvanredno rijetko opažati. I zbilja, mi ne ćemo valjda nikad vidjeti, da se plin sam od sebe povuče u manji prvotni obujam. Drugim riječima: svaka promjena stanja teče u smjeru termodinamički vjerojatnijih stanja. Statistička je težina nekog kasnjeg makrostanja u daleko pretežnom broju slučajeva, dakle u prosjeku uvijek, veća od one nekog prethodnog stanja, jer inače se kasnjem stanju ne bi bila dala prednost postojanja.

Mogao bi se steći dojam, kao da ova razmatranja nisu od neke naročite vrijednosti, budući da se mogu uspostaviti kako makrostanja, koja su više vjerojatna, tako i makrostanja, koja su manje vjerojatna. No kad se uoči, da se statističke težine raznih makrostanja pri istim vanjskim uvjetima ne odnose kao  $1:1$ , nego obično kao  $1:10^x$ , gdje se vrijednost eksponenta  $x$  kreće u biljonima, to se razabire, kojom će se strogošću morati pojave pokoravati ovim razmatranjima o vjerojatnosti. Načelno postoji doduše mogućnost, da se kod mnogih promatranja jednom opazi i takvo makrostanje, koje je različno od onoga s najvećom statističkom težinom. No izgledi za takav slučaj

<sup>1)</sup> M. Planck: Einführung in die theoretische Physik 5. Bd. Einführung in die Theorie der Wärme, 4. Teil, Atomistik. Leipzig 1930.

tako su beznadno maleni, da više nagnjemo tomu, neko opažanje, koje bi slučajno ispalio u tom smislu, pripisati nekoj eksperimentalnoj pogrešci ili krivom opažanju.

**Entropija i termodinamička vjerojatnost.** Prema dosadašnjim razmatranjima kod svih se promjena stanja statistička težina sustava u prosjeku povećava. Samo se od sebe nameće, da ovaj stalni porast statističke težine dovedemo u uzročnu vezu s poznatim porastom entropije  $S$ . Tako postavljamo daljnju hipotezu

$$S = f(G) \quad (245)$$

po kojoj bi entropija bila preko univerzalne funkcije  $f$  ovisna o jednom jedinom argumentu  $G$ . Po tome entropija nekog sustava nebi bila drugo, nego neka mjera za termodinamičku vjerojatnost stanja toga sustava i obrnuto. Ova se hipoteza u vezi s gore spomenutom hipotezom Plancka mogla sjajno potvrditi posljedicama koje iz nje slijede.

Da bismo ovu univerzalnu funkciju pronašli, promotrit ćemo dva međusobno neovisna sustava 1 i 2 na pr., dva plinska spremnika. Ova dva neovisna sustava neka sačinjavaju promatrani sveukupni sustav. Pripadne entropije i statističke težine jesu  $S_1$ ,  $S_2$  i  $G_1$ ,  $G_2$ . Entropija sveukupnog sustava jednaka je zbroju pojedinačnih entropija neovisnih sustava

$$S = S_1 + S_2 \quad (246)$$

Statističku težinu sveukupnog sustava dobit ćemo, kad promislimo, da svako mikrostanje prvoga sustava kombinirano sa svakim mikrostanjem drugoga sustava daje po jedno mikrostanje sveukupnog sustava. Broj svih tih kombinacija je

$$G = G_1 \cdot G_2 \quad (247)$$

Sa (245), (246) i (247) dobivamo

$$f(G_1 \cdot G_2) = f(G_1) + f(G_2) \quad (248)$$

Odavde možemo odrediti karakter funkcije  $f$ . U tu svrhu diferencirajmo taj izraz parcijalno po  $G_1$ , pri konstantnom  $G_2$

$$G_2 f'(G_1 \cdot G_2) = f'(G_1) \quad (249)$$

a daljnjom diferencijacijom po  $G_2$  kod konstantnog  $G_1$

$$G_1 \cdot G_2 f''(G_1 \cdot G_2) + f'(G_1 \cdot G_2) = 0 \quad (250)$$

ili sa (247)

$$G \cdot f''(G) + f'(G) = 0 \quad (251)$$

Opće rješenje ove diferencijalne jednadžbe drugoga reda je

$$f(G) = k \ln G + k_0 \quad (252)$$

Uvrstimo li to s pripadnim indeksima u (248) to slijedi

$$k \ln(G_1 \cdot G_2) + k_0 = k \ln G_1 + k_0 + k \ln G_2 + k_0$$

što može biti zadovoljeno, samo ako je  $k_0 = 0$ . Tako dobivamo konačno sa (245) i (252) sasvim univerzalnu vezu između entropije i termodinamičke vjerojatnosti nekog sustava u izrazu

$$S = k \ln G. \quad (253)$$

Time smo jednoznačno odgovorili i na pitanje o biti entropije i to u smislu, da entropija nekog sustava pretstavlja logaritam termodinamičke vjerojatnosti dotičnog stanja, gdje je  $k$  neka univerzalna konstanta, koja nije ovisna o tvari, koju promatramo. Po prijašnjoj spoznaji entropija nekog zatvorenog sustava, na pr. našega svijeta, trajno raste. To znači, da se takav sustav (svijet) tako razvija, da uzastopce slijede stanja, koja su obzirom na razdiobu energije i materije vjerojatnija od prethodnih. Pri tom pripada kod povratnih promjena konačnom stanju ista termodinamička vjerojatnost kao i prethodnom stanju, jer se inače sustav nebi mogao vratiti u to početno stanje. Tome nasuprot je vjerojatnost konačnog stanja kod nekog nepovratnog procesa uvijek veća od vjerojatnosti polaznog stanja. Na taj je način razumljiva naklonost prirode nepovratnim procesima.

Za određivanje konstante  $k$  potrebni su opsežni računi teorije kvanata, koji ne spadaju u naš program. M. PLANCK je s takvim računima, a na temelju mjerjenja odredio veličinu  $k = 3,28 \cdot 10^{-27}$  kcal/K. Kako se brojčana vrijednost apsolutne entropije za 1 m<sup>3</sup> nekog plina kreće u redu veličine 1, što ovdje također ne želimo razlagati, to za takav plin okolišnjeg stanja dobivamo red veličine statističke težine  $G = 10^{10^{26}}$ . Broj ovih

međusobno različitih mikro-stanja, s kojima se može realizirati okolišne makro-stanje rečenog plina, prema tome je sasvim ogroman.

**Kolebanja oko stanja** Istaknuli smo, da će se stanja s najvećom ravnotežom statističkom težinom, i ako rijetko, izmjeniti kratkotrajno sa stanjima sa manjom statističkom težinom. Time će se trajno izvoditi kolebanja, otstupanja, od termodinamičkog ravnotežnog stanja. Pokušajmo ocijeniti jačinu tih kolebanja. Tako bi se mogla na pr. u jednom dijelu posude kratkotrajno pojaviti povišena temperatura, na račun energije iz jednog drugog dijela posude. Termodinamička ravnoteža nekog zatvorenog sustava odlikuje se od ostalih mogućih stanja time, što mu je entropija morala imati najveću vrijednost, koja je kod zadanih vanjskih uvjeta bila moguća. Sustav će samo onda moći trajno ustrajati u nekom stanju (ravnoteža), ako sva susjedna<sup>1)</sup> stanja koja su pri zadanim vanjskim uvjetima moguća, imaju manju entropiju, budući da neka promjena stanja nikad ne teče u smjeru opadanja entropije. Maksimum je entropije po (253) istovjetan s maksimumom termodinamičke vjerojatnosti. Označimo li sa  $G_m$  statističku težinu ravnotežnog stanja, sa  $G$  onu za neko susjedno stanje, pri čem je  $G < G_m$ , to je omjer  $\frac{G}{G_m}$  kvantitativna mjera za učestalost uspostavljanja ovog susjednog stanja. Kad je  $G \approx G_m$  uspostaviti će se susjedno stanje tako često kao i ravnotežno stanje. Kad je  $G \ll G_m$ , to će se ono mnogo rjeđe pojaviti. Mjeru za razlikovanje obih stanja nalazimo s druge strane u entropiji: maksimum entropije  $S_m$  u ravnotežnom stanju, i manju entropiju  $S$  u susjednom stanju. Kad je  $S \approx S_m$  to su oba stanja ravnotežna. Što je veća razlika  $(S_m - S)$ , to je susjedno stanje labilnije, tako da  $(S_m - S)$  može služiti kao mjera za otstojanje susjednog stanja od ravnoteže. Iz (253) dobivamo

$$\frac{G}{G_m} = e^{\frac{S - S_m}{k}} \quad (254)$$

<sup>1)</sup> Izraz „susjedan“ ne smije se shvatiti prostorno, već tako da se oba stanja međusobno ne razlikuju mnogo.

Kako je  $S < S_m$ , to ćemo za svako kolebanje oko ravnotežnog stanja, a koje je karakterizirano promjenom entropije ( $S - S_m$ ),

dobiti omjer  $\frac{G}{G_m}$  kao pravi razlomak, kako mora i biti. Da

bismo ovakvo kolebanje mogli zamijetiti mora ( $S - S_m$ ) biti bar toliko veliko, da je pristupačno točnosti mjerjenja, jer inače ne bismo mogli stvarna kolebanja razlikovati od pogriješaka uvjetovanih netočnošću naših instrumenata. Kod vrlo razrijedjenih plinova mogu se tako još razlikovati stanja, kojima su entropijske razlike manje nego li kod plinova pod običnim pritiskom, budući da je entropija proporcionalna težini plina. No da bismo dobili kakav, takav oslon, uzmimo da je ta granična vrijednost, koju instrumentima možemo još pouzdano zamijetiti,  $(S - S_m) = 10^{-6} \text{ kcal}/K$ . Kako je  $k < 10^{-26}$ , to će izraz (254) pri tom još uvijek biti manji od  $10^{-10^{19}}$ . Zato je učestalost, kojom će se pojaviti neko susjedno stanje, koje se od stanja ravnoteže razlikuje sasvim neznatno za još jedva zamjetljivi iznos entropije od  $10^{-6} \text{ kcal}/K$ , u omjeru spram učestalosti pojavljivanja ravnotežnog stanja tako izvanredno malena, da je sasvim bez ikakvog izgleda, da će se bilo kad ovo kolebanje moći dočekati. Pa kad bi se ono kojim slučajem najednom i uspostavilo, to bi njegova pojava bila tako kratkotrajna, da je ni najosjetljiviji instrumenti ne bi imali vremena zabilježiti. Kolebanja s još većim entropijskim razlikama još su kudikamo rjeđa. Da se neko kolebanje pojavljuje zamjetljivo često, morale bi veličine  $G$  i  $G_m$  biti od istog reda veličine, dakle bi  $(S - S_m)$  moralo biti od istog reda veličine kao i univerzalna konstanta  $k$ . Takve su male entropijske razlike međutim, pod običnim uslovima, sasvim izvan dohvata našim mjerjenjima i opažanjima tako, da ih mi ne možemo ni zamijetiti. No kod sasvim razrijedjenih plinova u uskim cijevima mogu se štupljnim mjerjenjima ovakva kolebanja i eksperimentalno opažati.

Obzirom na dosadanja razmatranja zaključujemo: U načelu se mogu kratkotrajno pojavljivati i stanja s manjom termodinamičkom vjerojatnosti, no u prosjeku se uvijek uspostavlja termodinamički najvjerojatnije stanje. S dodatkom „u prosjeku“

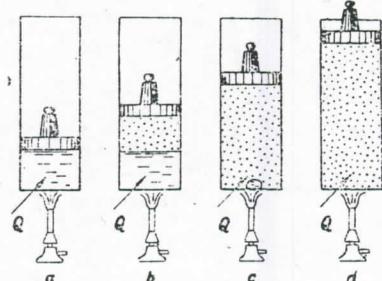
važi ovaj zakon istom strogošću, kao i svaki drugi prirodni zakon. Iz ovog razloga nije moguće iz spomenutih kolebanja kod sustava obične gustoće i običnih razmjera postignuti bilo kakve tehničke prednosti, i to ne samo praktički već niti teoretski.

Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet  
MATEMATIČKI FAKULTET  
BIBLIOTEKA

Broj \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_

## ISPARIVANJE I UKAPLJIVANJE

Priklonimo sad našu pažnju takvim stanjima, kod kojih su nazočna dva agregatna oblika. Neka kapljevina, na pr. voda (1 kg) neka je zatvorena u posudi sl. 57. Stap sa stalnim opterećenjem osigurava nepromjenjivi pritisak na zatvorenu tvar, dok se na nekoj skali može u svakom trenutku očitati volumen,



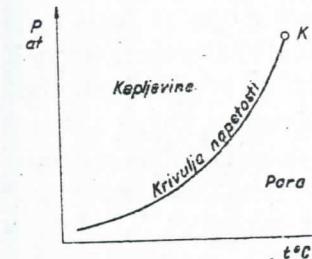
Sl. 57 Isparivanje pri  $p = \text{konst}$

Ovi se dižu i uzburkavaju vodu. Termometri nam pokazuju, da proizvedena para ima istu temperaturu kao i voda. Pritisak od 1 Atm (760 mm Hg) vrije voda kod točno 100° C. Kod povećanog pritiska i temperatura je vrijenja viša. Vodena para, koja nastaje, ima mnogo veći obujam od vode, iz koje je nastala. Para se sakuplja iznad još neisparene vode, a stap se diže, sl. 57b. Pomno opažanje pokazuje, da se za vrijeme vrijenja kod stalnog pritiska ne mijenja ni temperatura kapljive ni temperatura pare, već da su i one konstantne i među sobno jednake.

Pojačamo li grijanje (na pr. pojačavši plamen), to opažamo življe isparivanje, no temperatura se pri tom ne mijenja. Tek kad isčeznu posljednji tragovi kapljevine, sl. 57c., počinje

temperatura vodene pare opet rasti. Sad se dovodenjem topline para rasteže kao svaki drugi plin, sl. 57d.

**Linija napetosti** Svakom tlaku odgovara jedna sasvim određena temperatura vrijenja. Pripadne vrijednosti nazivaju se temperaturom zasićenja  $T$  i pritiskom zasićenja  $p^1$ ). Nanesemo li ih u  $pT$ -dijagram, to dobivamo neku liniju  $p = f(T)$ , sl. 58.1, t. zv. „liniju napetosti“, koja je svojstvena svakoj tvari, a koja ima eksponencijalni karakter. Što lakše neka tvar vrije, to je položaj ove linije u dijagramu viši. Desno od te linije područje je pare, lijevo od nje područje je kapljevine. U sl. 58. 2. prikazan je tok linija napetosti za niz tehnički važnih kapljevina. Tu su nanijeti iznad temperature  $t$  logaritmi pritiska  $p$  u Atm (1 Atm = 1,033 at).



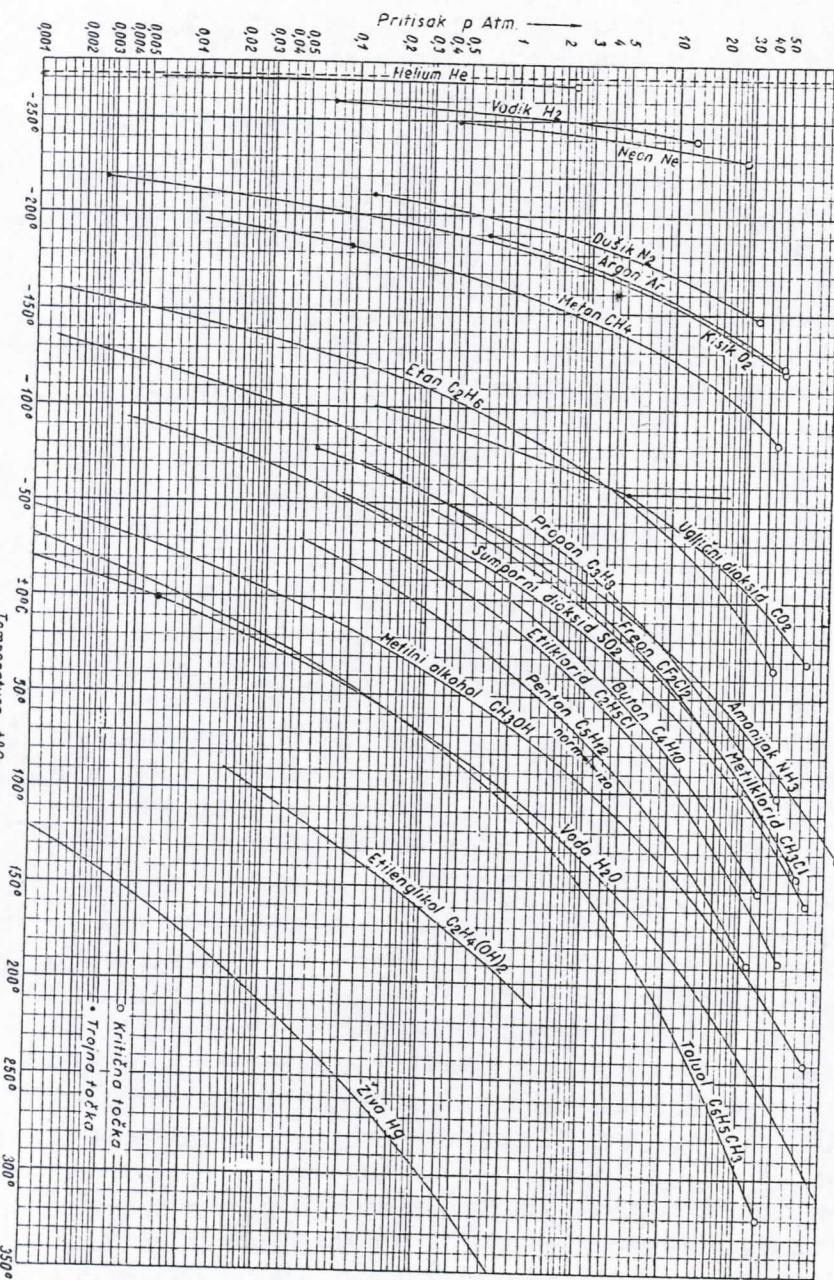
Sl. 58.1 Krivulja napetosti.

Prema tome u zasićenom području pritisak i temperatūra nisu više međusobno neovisne veličine stanja već jedna od njih uvijek određuje drugu. U tome se načelno razlikuju stanja, sastavljena iz dviju agregatnih oblika, koji su u heterogenoj ravnoteži<sup>3)</sup>, od stanja nekog homogenog tijela.

**Granične linije.** Nanesemo li temperaturu  $t$  i volumena  $v$ , koje smoочitali kod isparivanja pri raznim stalnim pritiscima, u  $tv$  — dijagram, to dobivamo sl. 59. U stanju  $1'$  postigla je voda pri pritisku  $p_1$  temperaturu zasićenja i jedinični obujam  $v'$ . U zasićenom području nailazimo smjesu vode i pare, točka  $A$ , dok je jedinični volumen ove smjese ovisan o omjeru količine vode i pare. Točka  $A$  odgovara stanju smjese u sl. 57b. Ovakvu smjesu zovemo vlažnom ili mokrom parom ili

<sup>1)</sup> Uvriježilo se je temperaturu zasićenja neke tvari pri atmosferskom tlaku (760 mm Hg) nazivati „temperaturom vrijenja“ ili „vrelistom“.

<sup>2)</sup> Izraz „heterogen“ pokazuje ovdje na postojanje dviju (ili više) faza nekog tijela, kojih se neka fizikalna svojstva na pr. gustoća bitno razlikuju. Tako je gustoća kapljevine mnogo veća od gustoće pare, tako da sadržaj posude u sl. 57b. nije homogen već heterogen.

Sl. 58.2 Krivulje napetosti nekih tvari u  $t$ - $v$ -dijagramu.

zasićenom parom. Vlaga pare isčezava tek u trenutku, kad se isparila i posljednja kapljica vode, pa tako nastaje suhozasićena para predočena točkom  $T''$ , sl. 59, koja odgovara stanju u sl. 57c. Zasićenom parom nazivamo je zato, što će takva para i kod najneznatnijeg odvođenja topline (hlađenje) početi rositi. Stvarat će se kapljice, para počinje kondenzirati. Volumen suhozasićene pare označujemo sa  $v''$ .

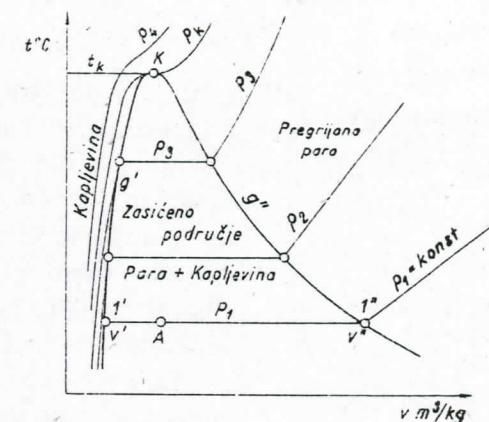
Spojnica  $g'$  svih vrelista zove se lijevom ili donjom graničnom krivuljom. Spojnica  $g''$  sviju rosišta zove se desnom ili gornjom graničnom krivuljom.

#### Pregrijana para.

Između obih graničnih krivulja leži područje zasićenosti. Lijevo od njega je hladnija kapljevina, desno od njega pregrijana para. Temperatura je pregrijane pare uvijek viša od temperature zasićenosti za promatrani parni pritisak  $p$ . U buduće označivat ćemo svojstva, koja se odnose na stanje na donjoj graničnoj krivulji sa ' (na pr.  $v'$ ,  $u'$  i t. d.), dok ćemo svojstva za stanja na gornjoj graničnoj krivulji označiti sa '' (na pr.  $v''$ ,  $u''$  i t. d.).

Pregrijana se para ni u koliko ne razlikuje u svojim svojstvima od nekog pravog plina. Pače, odaberemo li dosta niske pritiske, to će se svaka pregrijana para vladati kao idealni plin. No uvriježilo se onaj plin, koji se nalazi u stanju blizom suhozasićenoj pari, u govoru prosto nazvati parom. Svaki plin možemo prikladnim izborom gustoće i temperature prevesti u stanje zasićenosti.

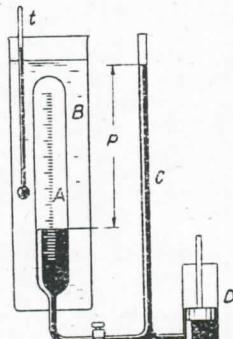
Prirast volumena ( $v'' - v'$ ) pri isparivanju biva to manji, što je viši pritisak zasićenja. Kod određenog pritiska nazvanog kritički pritisak, isčezava uopće taj prirast obujma, točka  $K$ .

Sl. 59. Zasićeno područje u  $t$ - $v$  — dijagramu.

Neobično zanimive pojave u tom području svojstvene su svim tvarima<sup>1)</sup> a prvi ih je proučavao ANDREWS na ugljičnom dvokisu  $\text{CO}_2$ .

#### Kritičko stanje

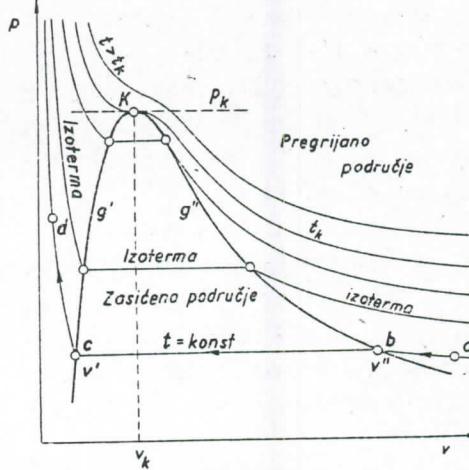
U posudu  $A$  dovoljne čvrstoće, sl. 60, zatvori se odmjerena količina pokušnog plina. Za zapor služi živa koja se posebnom pumpom može po volji utisnuti u posudu. Baždarena skala za volumen dopušta u svakom trenutku očitati veličinu prostora u koju je pomoću žive zatvoren medij. Termostat se  $B$  brine za održavanje željene pokušne temperature. Zgušnjujemo li plin postepeno pri stalnoj temperaturi tako da pomoću pumpe  $D$  utiskujemo živu, to će rasti tlak u  $A$ , što možemo pratiti na manometru  $C$ . Volumen se smanjuje (izoterma  $ab$  u  $Pv$ -dijagramu sl. 61.). U točci  $b$  pri volumenu  $v_b = v''$ , pojavljuje se prva kondenzacija, što se opaža na zamagljivanju inače prozirnoga plina. Otsad se pri dalnjem zgušćivanju stvara sve više magle, na stijenci se talože kapljice, a ove klize i sabiru se nad meniskom žive u sloj kapljevine. Pritisak se pri tom ne mijenja, samo ako se termostatom održava stalna temperatura. Tek pošto se ukapljila čitava para, pri čem ona zauzme obujam vrele kapljevine  $v_c = v'$ , poraste pritisak i to sad izvanredno naglo pri dalnjem smanjivanju volumena (luk  $cd$  sl. 61.). Ponovimo li pokus kod



Sl. 60. Mjerenje svojstava para

na zamagljivanju inače prozirnoga plina. Otsad se pri dalnjem zgušćivanju stvara sve više magle, na stijenci se talože kapljice,

a ove klize i sabiru se nad meniskom žive u sloj kapljevine. Pritisak se pri tom ne mijenja, samo ako se termostatom održava stalna temperatura. Tek pošto se ukapljila čitava para, pri čem ona zauzme obujam vrele kapljevine  $v_c = v'$ , poraste pritisak i to sad izvanredno naglo pri dalnjem smanjivanju volumena (luk  $cd$  sl. 61.). Ponovimo li pokus kod



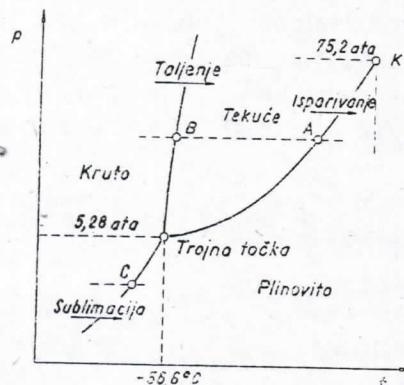
Sl. 61. Zasićeno područje u  $Pv$ -dijagramu

1) Ovdje se misli na jednostavne tvari, kao što su voda, alkohol i t. d., dok su pojave kod mješavina na pr. kod smjese vode i alkohola, zamršenije.

nekoliko stalnih temperatura, to se dobiva snop izoterma u sl. 61. I ovdje možemo ucrtati gornju ( $g''$ ) i donju ( $g'$ ) graničnu krivulju. Donja granična krivulja pasti će praktički u os ordinata, jer su volumeni  $v'$  prema  $v''$  obično zanemarivo maleni.

Kod neke određene temperature  $t_K$  (kritička temperatura) para se u točci  $K$  pretvara u kapljevinu tako, da se ne opaža stvaranje magle. Položeni dio izoterme zasićenog područja degenerira ovdje u vodoravnu tangentu u točci infleksije  $K$ , a osim toga prelaze ovdje obje granične linije jedna u drugu bez loma. Ovo je kritičko stanje tvari. Označeno je kritičkim pritiskom  $p_K$ , kritičkom temperaturom  $T_K$  i kritičkim volumenom  $v_K = v_K'' = v_K'$ , koje su vrijednosti svojstvene svakoj tvari. U kritičnom stanju gustoća je suhe pare ista kao i ona vrele kapljevine, te se u tom stanju para i kapljevina međusobno ne razlikuju ni u kojem drugom svojstvu. Kod još viših temperatura izoterme nemaju više horizontalnih tangenata, pak tu uopće ne možemo označiti granicu između parnog i kapljevitog stanja. Prelaz iz pare u kapljevinu ovdje je besprekidan (kontinuiran). Tu više nismo u stanju razlikovati dvije faze. Kritično je stanje otsudno za tehnički važno ukapljivanje plinova. Želimo li ukapljiti neki plin, to ga treba prije bezuvjetno ohladiti ispod kritičke temperature  $T_K$ . Ako to ne učinimo, nećemo ni s najvišim pritiscima moći postići, da se kapljevina izdvoji iz pare. Zbog toga su zatajili svi pokušaji oko ukapljivanja uzduha, izvođeni prije otkrića kritičkog stanja.

**Talenje (kopnjjenje i sublimacija** Linija napetosti sl. 58.1 prekida se u kritičkoj točci. Pitamo se, kako se daleko proteže linija napetosti prema dolje. Kod ugljičnog dvokisa  $\text{CO}_2$  opazit ćemo, da se ispod temperature od  $-56,6^\circ\text{C}$ , što odgovara pritisku zasićenja od 5,28 at, kapljeviti dvokis zadeđuje u snijeg (led) ugljičnog dvokisa. Kruti i kapljeviti ugljični dvokis imaju pri  $-56,6^\circ\text{C}$  istu napetost pare od 5,28 at, tako da pri toj temperaturi mogu istovremeno postojati sve tri faze, dakle i para i kapljevina i krutnina. Ovdje vlada ravnoteža između triju faza, a pripadno stanje zove se tripel-točka ili trojna točka, sl. 62. Ispod  $-56,6^\circ\text{C}$  nestaje kapljeviti ugljični dvokis, pak



Sl. 62. Trofazno područje ugljičnog dvokisa  $\text{CO}_2$

obje linije sijeku. Isparivanje krutnine (led ugljičnog dvokisa i t. d.) nazivamo sublimacijom. Ova nije tako dobro vidljiva, jer se u krutom ledu ne mogu stvarati pomični parni mjeherići. Isparivanje se ovdje vrši samo na površini leda. No to nije ni kod kapljevine drugačije. Ta i stvaranje mjeherića nije ništa drugo nego isparivanje na nutarnjoj površini parnoga mjehera zbog čega mjeher raste na grijanoj stijenci i pri dizanju na površinu kroz tekućinu.

Pretvaranje kapljevine u led — zaledivanje — teče također diskontinuirano. Kod  $-56,6^\circ\text{C}$  temperatura se ugljičnog dvokisa tako dugo zaustavi dok se zbog nastavljenog odvođenja topline nije zaledio i posljednji ostatak tekućine. Tek sada ćemo opaziti daljnje ohlađivanje. Kod zaledivanja mijenja se specifični volumen skokimice, budući da je volumen leda manji nego li volumen kapljevitog ugljičnog dvokisa. Stojna točka od  $-56,6^\circ\text{C}$  između krutog i kapljevitog stanja nastupa samo kod pritiska od 5,28 at. Kod viših pritisaka na pr. kod 100, 1000, 10000 at kapljevina se počinje zaledivati već kod viših temperatura tako, da se i za smjesu leda i kapljevine dobiva neka linija napetosti slična liniji napetosti između kapljevine i pare ili onoj između leda i pare. Razlika je u tome, što ona teče znatno strmije, nego li obje netom spomenute linije. Kod vode dobivamo u načelu istu sliku, samo što je

je ovdje mjerodavna linija napetosti pare iznad krutog leda. I led proizvodi isto tako kao i kapljevina neku napetost pare. Samo je zato moguće zimi osušiti smrznuto (zaledeno) rublje, jer se voda načelno isto tako vlada kao i ugljični dvokis.

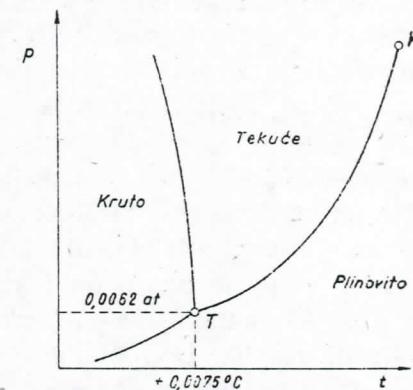
Linija se napetosti leda proteže do najnižih temperatura, a teče nešto strmije od linije napetosti iznad kapljevine, pak se u trojnoj točci

nagib linije napetosti vodenog led-voda drugoga smjera, sl. 63. nego li kod ugljičnog dvokisa. Prema tom toku može se voden led povećanjem pritiska okopniti i ispod  $0^\circ\text{C}$ . To je u vezi sa činjenicom što se ugljični dvokis kod zaledivanja stegne dok se voda rastegne.

Trajna ravnoteža može vladati samo između takvih faza, koje imaju kako isti pritisak tako i istu temperaturu.

Takvo stanje prikazuje se nekom točkom na pripadnoj liniji napetosti. Iz sl. 62. vidi se, da općenito mogu postojati samo dvije faze istovremeno jedna do druge. Tako mogu kod 50 at u nekoj posudi istovremeno postojati ili kapljeviti i paroviti ugljični dvokis, točka A, ili kapljeviti i kruti, točka B, ali ne mogu biti nazočni kruti i paroviti a pogotovo ne sve tri faze najedamput. Naprotiv, kod pritiska, koji je manji od pritiska u trojnoj točki (5,28 at) mogu istovremeno u posudi biti nazočni samo kruti i paroviti ugljični dvokis, točka C. Kapljevita faza ne može uopće postojati. I zbilja, otvorimo li ventil na jednoj naglavci postavljenoj čeličnoj boci sa ugljičnim dvokisom<sup>1)</sup>, to iz boce ne će teći kapljevina, kako bismo možda očekivali, već će strujati smjesa pare i snijega ugljičnog dvokisa, koji možemo uhvatiti u jednu vrećicu. To je u vezi s time što je atmosferski pritisak manji nego li pritisak trojne točke ugljičnog dvokisa.

Trojna točka vode leži kod  $+0,0075^\circ\text{C}$  i kod 0,0062 at. Ledište vode kod atmosferskog je pritiska jedva zamjetljivo niže t. j. kod točno  $0^\circ\text{C}$ . U prirodi mogu kod te temperature



Sl. 63. Trofazno područje vode  $\text{H}_2\text{O}$

<sup>1)</sup> U čeličnoj boci nalazi se  $\text{CO}_2$  pod pritiskom od nekih 70 at, te je u kapljevitom stanju, ako temperatura boce ne prekoračuje kritičku temperaturu ugljičnog dvokisa ( $+31^\circ\text{C}$ ). Ovakve se čelične boce često upotrebljavaju za pretakanje pive u točionicama.

ipak sve tri vodene faze biti istovremeno nazočne, jer zbog prisutnosti uzduha nemamo više jednostavni sustav tvari, već binarnu smjesu uzduha i vode, kod koje su prilične zamršenije.

**Pritisak pare u neutralnom plinu** Kad u nekom prostoru, napunjeno uzduhom od 1 at ishlapljuje vodena površina, to će se između ovlaženog uzduha i vode nakon nekog vremena ustaliti ravnotežno stanje. Kemičkom analizom vlažnog uzduha možemo dokazati prisutnost vodene pare u uzduhu i to baš u onoj količini, koliko bismo vodene pare pronašli, kad bi se ona nalazila u istom prostoru bez nazočnosti uzduha. U oba slučaja pretpostavljamo istu temperaturu. Ovu pojavu možemo razjasniti pomoću DALTON-ovog zakona, kad uzmemo, da je parcijalni pritisak vodene pare u vlažnom zasićenom uzduhu točno jednak pritisku zasićenja vodene pare za dotičnu temperaturu. Po tome na pritisak neke pare koji se ustaljuje u ravnoteži iznad kapljivite ili krute faze, ne utiče prisutnost nekog neutralnog plina. U ovom se slučaju pritisak pare očituje kao parcijalni pritisak u parno-plinskoj smjesi, a kod zasićene smjese ovisan je samo o temperaturi. Neutralnim nazivamo svaki takvi plin, koji se kemički ne veže sa hlapljivom tvaru i koji se ne otapa u primjetnim količinama u dotičnoj kapljivini. Neovisnost parnog pritiska o neutralnom plinu vezana je na idealne plinove, a kod pravih plinova na područje ne previšokih pritisaka.

**Razmjena topline kod isparivanja** Za isparivanje neke kapljivine moramo dovoditi toplinu. Unutarnja energija proizvedene pare razlikuje se od unutarnje energije kapljivine. Dovedenom toplinom moramo snabdjeti taj prirast energije, ali osim toga i rad koji se potroši za potiskivanje vanjskog pritiska, na pr. za odmicanje opterećenog stapa u sl. 57., što je posljedica znatnog povećanja volumena kod isparivanja.

Izmijenjene topline možemo naročito zorno pratiti u  $Ts$ -diagramu. Kapljevinu treba najprije ugrijati do temperature vrijenja. Grijemo li je pri  $p = \text{konst.}$ , to je u tu svrhu potrebna toplina

$$Q_f = \int_1^2 c_f dT \quad (255)$$

gdje je  $c_f$  specifična toplina kapljivine kod  $p = \text{konst.}$  Kod kapljivina se specifične topline pri konstantnom pritisku i konstantnom volumenu obično samo neznatno razlikuju. One su pače kod dostaće udaljenosti od kritične točke slabo ovisne i o temperaturi. Kako je  $dQ = Tds = c_f dT$ , to je

$$ds = c_f \frac{dT}{T} \quad \text{te} \quad s = \int_{T_0}^T c_f \frac{dT}{T} + s_0 \quad (256)$$

a ako je  $c_f = \text{konst.}$ , to je

$$s = c_f \ln \frac{T}{T_0} + s_0 \quad (257)$$

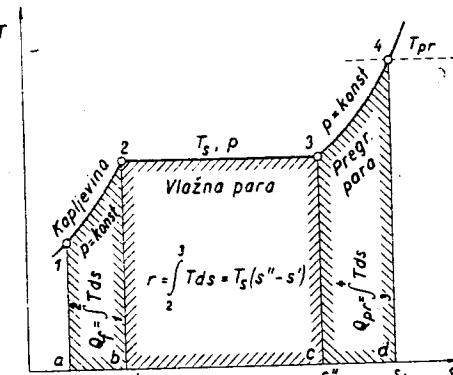
Po tome se izobara kapljivite vode prikazuje u  $Ts$ -diagramu kao krivulja, koja vrlo sliči logaritmičkoj, sl. 64. Za blizinu kritičke točke to više nije točno, budući da ovdje pretpostavka  $c_f = \text{konst}$  nije ni približno dopustiva.

Neodređenu konstantu u (256) i (257) odaberimo svojevoljno  $s_0 = 0$  za osnovno stanje  $T_0 = 273,2K$   $p_0 = 0,006228 \text{ at}$ , što odgovara vreloj vodi od  $0^\circ C^1$ .

Površina 12ba prikazuje u  $Ts$ -diagramu, sl. 64. dovedenu toplinu  $Q_f$  kad točka 1 odgovara polaznoj temperaturi vode. U stanju vrijenja 2, koje je označeno veličinama stanja  $T, p, s', v', u'$ , i t. d. voda počinje vreti, no pri tom moramo dovoditi toplinu. Kod prevodenja 1 kg vode u suho zasićenu paru potrošit će se t. zv. toplina isparivanja  $r \text{ kcal/kg}$ , kod konstantnog pritiska  $p$ . Kako je pri tom  $T = \text{konst.}$ , to je ova toplina prema  $Q = \int_1^2 Tds$

Sl. 64. Razmjena topline kod isparivanja

<sup>1)</sup> O dopustivosti takvog svojevoljnog odabiranja vidi kod razlaganja jednadžbe (159).



$$r = T(s'' - s'). \quad (258)$$

Veličine s dvije crtice odnose se na suhozasićenu paru, a one s jednom na vrelu vodu. Toplina isparivanja  $r$  predočuje se prema (258) površinom pravokutnika  $23cb$ . Linija  $23$  leži na izotermi zasićenja  $T$ . Suhozasićena para sa stanjem  $3$  pregrijava se daljnjim dovođenjem topline možda do temperature  $T_{pr} = T_4$ , pri čem se troši toplina pregrijanja  $Q_{pr}$ . Kako se ta toplina dovodi kod  $p = konst$  to je

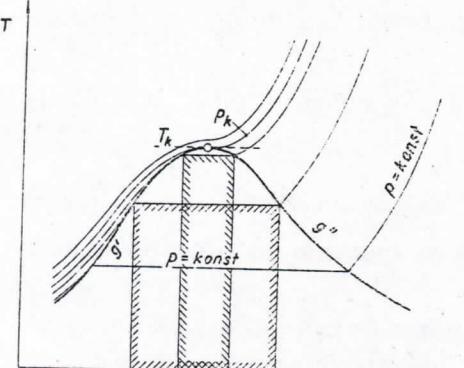
$$dQ_{pr} = c_p dt = T ds \quad \text{a} \quad ds = c_p \frac{dT}{T} \quad (259)$$

gdje  $c_p$  treba uvrstiti za paru. Računamo li za sada sa  $c_p = konst$ , to je

$$s \approx c_p \ln \frac{T}{T_s} + s'', \quad (260)$$

što u pregrijanom području za  $p = konst$  opet daje neku logaritmičku liniju sl. 64.  $T_s$  označava ovdje temperaturu zasićenosti. Toplinu  $Q_{pr}$  predočuje površina  $34dc$ . Tako smo pronašli tok izobare 1234 za svekoliko područje. Ponovimo li pokus kod različitih pritisaka, to ćemo mjeranjem potrošenih toplina dobiti sl. 65. Što se više približavamo kritičkom pritisku i kritičkoj

temperaturi to toplina isparivanja postaje manja (usporedi crtkane površine u sl. 65.). U kritičnoj točci toplina isparivanja isčezne sasvim  $r_K = 0$ . Kod još većih pritisaka uopće nema topline isparivanja a prelaz je iz kapljevine u paru sasvim kontinuiran. Kako se u tom području ni približno nesmije uzeti  $c_p = konst$ , to ni izobare



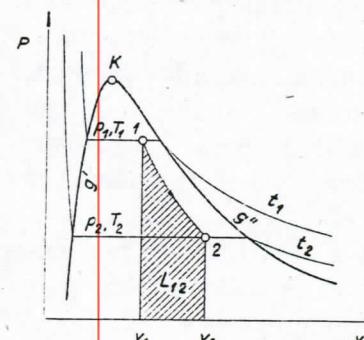
Sl. 65. Zasićeno područje u  $Ts$ -dijagramu. Nisu ovdje više logaritmičke linije.

Isparivanje je samo po sebi povratni proces. Hladimo li naime pregrijanu paru od točke  $4$ , to se u pojedinim otsjećcima

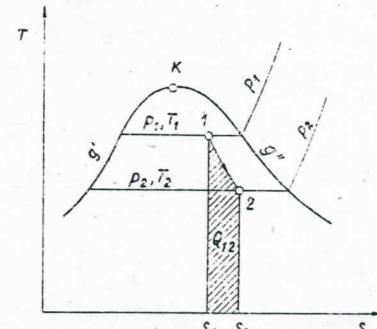
ohlađivanja moraju odvoditi iste količine topline, koje su se trošile prije pri isparivanju. Kod ohlađivanja i s tim spojene kondenzacije prolazi para ista stanja samo u obrnutom poretku nego li kod prijašnjeg isparivanja. No od zadanih vanjskih uvjeta ovisi, da li će izmjena topline s okolinom biti kod isparivanja povratna. Ako je temperatura plamena znatno viša od temperature vrenja bit će prelaz topline nepovratan. No za to nije odgovorna sama para.

U sl. 65. ucrtane su linije  $p = konst$  u području kapljevine s pretjerano velikim razmakom. Uistinu će ove linije često u granicama točnosti crtanja pasti jedna u drugu, a praktički paće i u donju graničnu liniju.

Smjesu kapljevine i pare zasićenog područja, koju naprsto zovemo mokrom parom sa stanjem 1, sl. 66. i 67. možemo slično



Sl. 66. Promjena stanja u zasićenom području,  $Pv$ -dijagram



Sl. 67. Promjena stanja u zasićenom području,  $Ts$ -dijagram

kao i neki plin izvrgnuti promjenama stanja. Mokra para može na pr. eksplandirati na niži pritisak u stanje  $2$ , pri čem će izvršiti neki rad  $L_{12}$ . U tu se svrhu mora pari dovoditi toplina  $Q_{12}$ .  $L_{12}$  odnosno  $Q_{12}$  predočuju se kao površine u  $Pv$ -odносно u  $Ts$ -dijagramu, sl. 66. i 67. Kako ćemo računski pratiti ova- kove promjene stanja?

**Sadržaj pare** Za označivanje bilo kojeg stanja u zasićenom području (mokra para) nedostaje poznавanje pritiska  $p$  i temperature  $T$ , jer ove veličine nisu neovisne. One su povezane izrazom  $T = f(p)$ . Da bi smo mogli označiti stanje

I moramo dakle zadati još jednu neovisnu veličinu stanja. Kao vrlo zgodna se pri tom pokazala veličina  $x$ , t. zv. udio pare ili sadržaj pare. Mokra para je kako znamo smjesa suho zasićene pare i vrele vode, koja obično lebdi u pari u obliku sićušnih kapljica te tako čini neku vrst magle. Sadržaj pare  $x$  označuje onu količinu suhe pare koja je zadržana u 1 kg sveukupne smjese, dakle u 1 kg mokre pare. Ostatak  $y = 1 - x$  označuje sadržaj vlage to jest količinu neisparene vode u 1 kg mokre pare. Ova voda čini t. zv. mokrinu ili vlagu mokre pare. No odmah ističemo, da se kod raznih problema u vlagu pare može uključiti i ona voda koja se prihvatala stijenki ili koja se izlučila na dnu posude. Tako na pr. može u jednoj parnoj cijevi zbog gubitaka ohlađivanja nastati pravi tanki sloj vode, koji na najnižem dijelu cijevi otiče. Ovu struju vode možemo također računati u vlažnost pare. Ako vlažnu zamagljenu paru zatvorimo u neku posudu, pa je pri stalnoj temperaturi prepustimo mirovanju, to će se nakon stanovitog vremena i najsitnije kapljice, dakle sva vлага, istaložiti na dnu posude a preostat će nad vodenom površinom prozirna suho zasićena para. Zato pojma vlažnosti pare ( $1 - x$ ) općenito ne ćemo vezati isključivo na raspršene kapljice vode u pari.

**Obujam mokre pare** Za vrelu vodu je  $x = 0$ , za suho zasićenu paru je  $x = 1$ . Ako za neku mokru paru znamo kolike su količine suhe pare  $x$  kg/kg i vrele vode ( $1 - x$ ) kg/kg to možemo odrediti i specifični volumen ove mokre pare. Taj volumen  $v$  sabire se iz volumena suho zasićene pare  $xv''$  i iz volumena vrele vode  $(1 - x)v'$ ,

$$v = (1 - x)v' + xv'' = v' + x(v'' - v') \quad [m^3/kg] \quad (261)$$

Volumene  $v'$  i  $v''$  moramo za dotični pritisak ili temperaturu zasićenja nekako poznavati, a to nam je moguće uz pomoć parnih tabela, koje su za čitav niz tehnički važnih supstanca i objavljenje.

**Kaloričke veličine stanja mokre pare.** Da bismo mogli slijediti razmjenu energije potrebno je poznавање kaloričkih veličina stanja. Prema (193) za 1 kg tvari važi

$$dQ = di - AvdP.$$

Primjenimo li to na proces isparivanja pri  $P = konst$ , to je  $dP = 0$ , a

$$\begin{aligned} dQ &= di \\ Q_p &= i_2 - i_1 \end{aligned} \quad (262)$$

Za 1 kg dovodi se pri isparivanju toplina isparivanja  $r$ , pak je prema (262)

$$r = i'' - i' \quad (263)$$

gdje su  $i'$ ,  $i''$  entalpije vrele vode odnosno pare koja kondenzira. Tako se čitava toplina isparivanja troši na povećanje entalpije. Po definiciji je, vidi (191)

$$i' = u' + APv'; i'' = u'' + APv'' \quad (264)$$

a time opet

$$r = u'' + APv'' - u' - APv' = (u'' - u') + AP(v'' - v') \quad (265)$$

Odavde vidimo, da toplina isparivanja, koju dovodimo kod  $p = konst$  i  $T = konst$  najvećim dijelom služi za povećanje unutarnje energije. Ostatak topline isparivanja troši se na vanjski rad  $\psi = AP(v'' - v')$ , koji se mora kod isparivanja vode izvršiti zbog povećanja volumena.

Obično se označuje

$$\begin{aligned} r &= i'' - i' \text{ kcal/kg} \text{ kao toplina isparivanja} \\ \rho &= u'' - u' \text{ kca/kg} \text{ kao unutarna (latentna) toplina isparivanja} \end{aligned} \quad (266)$$

$$\psi = AP(v'' - v') \text{ kcal/kg} \text{ kao vanjska toplina isparivanja} \quad (267)$$

Iz (265) slijedi

$$r = \rho + \psi \quad \text{a} \quad \rho = r - \psi \quad (268)$$

Unutarnju toplinu isparivanja  $\rho$  ne možemo tako zorno prikazati kao toplinu isparivanja  $r$ .

**Entalpija mokre pare** Kad su poznate kaloričke veličine  $u'$ ,  $u''$ ,  $i'$ ,  $i''$ ,  $s'$ ,  $s''$  za stanje vrijenja i stanje kondenzacije, to takve možemo lako odrediti i za bilo koje stanje unutar područja zasićenosti. Ako se od 1 kg vode ispari samo  $x$  kg, to se u tu svrhu mora dovesti toplina  $Q = xr \text{ kcal}$  pak je prema (262)

$$Q = i - i' = xr = x(i'' - i'), \quad (269)$$

gdje je  $i$  kcal/kg entalpija mokre pare sa sadržajem pare  $x$ . Otud slijedi

$$i = i' + xr = i' + x(i'' - i') = i'' - (1-x)(i'' - i'). \quad (270)$$

Entalpiju  $i$  mokre pare možemo izračunati iz jednoga od ovih izraza kad su poznati  $x$ ,  $i''$  i  $i'$ .

**Unutarnja energija mokre pare** Za unutarnju energiju mokre pare slijedi

$$u = i - APv = i' + x(i'' - i') - AP[v' + x(v'' - v')].$$

Uzveši u obzir (264) dobivamo

$$u = u' + x(u'' - u') = u' + xp. \quad (271)$$

Ovaj izraz mogli bismo i neposredno napisati, uzevši u obzir da unutarnju energiju mokre pare sačinjavaju unutarnje energije od  $(1-x)$  kg/kg kapljevine i od  $x$  kg/kg suhe pare.

**Entropija mokre pare** Sličnim razmatranjem mogli bismo napisati i izraz za entropiju mokre pare. No da bismo predusreli svakoj sumnji, poslužimo se slijedećim razmatranjem. Polazeći od vrele tekućine, točka 1 sl 68., dobit ćemo mokru paru, točka X, sa sadržajem pare  $x$ , ako kod konstantne temperature  $T$  dovodimo toplinu

$$Q = xr = T(s - s').$$

Odavle slijedi

$$s = s' + x \frac{r}{T} \quad (272)$$

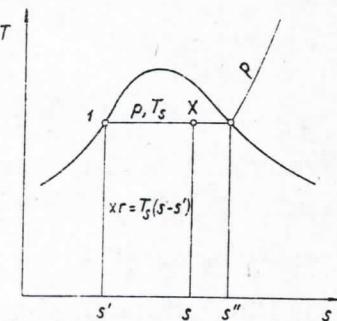
a sa (258)

$$s = s' + x(s'' - s') = (1-x)s' + xs'' \quad (273)$$

Sl. 68. Entropija vlažne pare

t. j. i entropija mokre pare se aditivno sabire iz entropija vrele kapljevine i suhe pare.

**Pokus Regnault-a** Prve klasične i sistematske pokuse za određivanje topline isparavanja vode izveo je REGNAULT. Pokusna je naprava šematski prikazana u sl. 69. U isparivaču isparuje se voda kod odabranog pritiska  $p$ . Isparavanje ne smije biti preburno, da se izbjegne prskanje vodenih



Sl. 68. Entropija vlažne pare

kapljica koje bi inače došle u odvodnu cijev. Tako možemo dobiti suho zasićenu paru s entalpijom  $i''$ . Proizvedenu paru vodimo kroz prigušni ventil  $D$  u ukapljivač (kondenzator)  $B$ . Kod prigušivanja na pritisak ukapljivanja  $p_0$  entalpija se suhe pare ne mijenja te zadržaje svoju vrijednost  $i''$ . Odvodenjem topline u ukapljivaču para se ukapljuje kod pritiska  $p_0$ , i još se ohladi ispod pripadne temperature zasićenja na temperaturu  $t_0$  te pri tom primi entalpiju  $i_0$ . U posudi  $C$  može se izmjeriti količina ukapljene pare. Toplinu koju odvodimo u ukapljivaču možemo za 1 kg ukapljene pare odrediti mjerom količine rashladne vode  $W$  kg/kg i iz njenog prirasta temperature  $(t_2 - t_1)$ . Specifična je toplina rashladne vode  $c = 1$  [kcal/kg]. Slijedi

$$Q = Wc(t_2 - t_1),$$

$$Q = i'' - i_0.$$

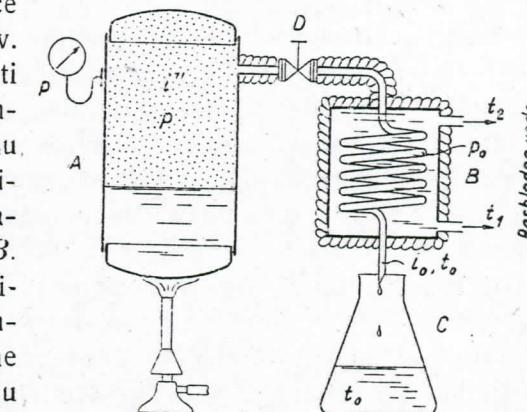
Odavle možemo na pr. odmah odrediti entalpiju suho zasićene pare pritiska  $p$

$$i'' = i_0 + Wc(t_2 - t_1) = c[t_0 + W(t_2 - t_1)] \quad [\text{kcal/kg}]$$

Entalpiju  $i'$  vrele kapljevine za temperaturu zasićenosti  $t_s$  određujemo iz

$$i' = \int_{t_0}^{t_s} c dT$$

gdje se specifična toplina  $c$  možeочitati iz sl. 21a. Kod visokih pritisaka može se još uzeti u obzir utjecaj pritiska na entalpiju kapljevine prema (207) i (208) no to je za tehničke račune obično suvišno.



Sl. 69. Pokus Regnault-a

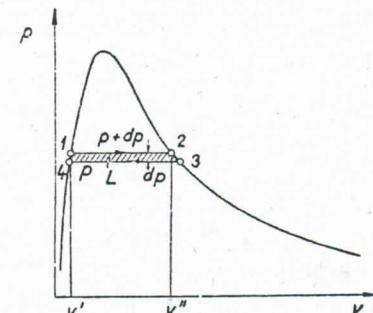
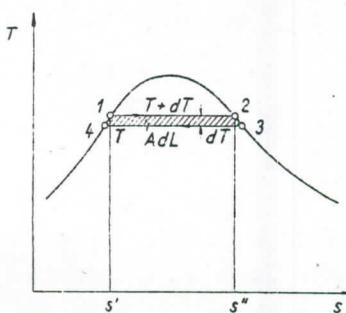
**Razmjena topline kod dovođenja i sublimacije** Za kopnjenje neke tvari mora se dovoditi t. zv. toplina kopnjenja ili (negativna) toplina zaledivanja  $q \text{ kcal/kg}$ . Temperatura kopnjenja ostaje kod dovođenja odnosno odvođenja topline stalna tako dugo, dok su obje faze, kruta i kapljevita, nazočne u posudi. Temperatura se može mijenjati tek onda kad jedna od ovih faza sasvim isčeze. Toplina kopnjenja vodenog leda iznosi kod okolišnjeg pritiska, pri kojem je  $t = 0^\circ\text{C}$ ,  $q = 79,5 \approx 80 \text{ kcal/kg}$ .

Za sublimaciju neke tvari mora se dovoditi toplina sublimacije  $r_s$ . I ova je isto kao i toplina isparivanja ovisna o temperaturi sublimacije. U trojnoj točci, ali samo ovdje, toplina se sublimacije sastoji iz topline kopnjenja i topline isparivanja  $r_s = r + q$ . Ovdje naime možemo prelaz iz krutnine u paru provesti ili neposredno sublimacijom, ili posredno kopnjenjem i naknadnim isparivanjem. U oba slučaja potrošit će se naravno ista količina topline. U sl. 181. nacrtano je ovo područje za ugljični dvokis u pripadni  $Ts$ -dijagramu. Još nije konačno razjašnjeno pitanje, da li postoje i daljnje kritičke točke između kapljevitog i krutog stanja odnosno između parnog i krutog. No ako one i postoje nastupit će vjerojatno tek kod sasvim ekstremnih pritisaka.

#### Clapeyron-Clausius-ova jednadžba

Nije potrebno da odredimo sve veličine stanja zasićene pare za čitavo područje eksperimentima. Pače između pojedinih veličina postoje odnosi kojima se može broj izvršenih mjerjenja znatno reducirati.

Zamislimo da se vrelom vodom zadani pritiska i temperatupe, točka 1, sl. 70. i 71., izvodi neki uski (elementarni)



Sl. 70. i 71. K jednadžbi Clapeyron-Clausius-a

kružni proces. Voda neka dovođenjem topline isparuje do stanja 2. Suho zasićena para neka ekspandira duž granične linije do 3, da bi se kod ovog nižeg pritiska odvođenjem topline kondenzirala u stanje 4. Kompresijom od 4 do 1 zatvorimo taj elementarni proces.

Odvija li se taj kružni proces između vrlo blizih temperatura  $T$  i  $(T + dT)$  a prema tome i između vrlo blizih pritiska  $P$  i  $(P + dP)$ , to se dobiva neki mali rad  $dL$ , koji se u  $Ts$ - i  $Pv$ -dijagramu predočuje površinama, kako je ucrtano. Po sl. 70. je

$$AdL = (s'' - s')dT$$

a po sl. 71.

$$dL = (v'' - v')dP$$

Budući da  $dL$  u oba slučaja predočuje isti rad, to njegovom eliminacijom iz obih jednadžba slijedi

$$s'' - s' = A(v'' - v') \frac{dP}{dT} \quad (274)$$

Po (258) je za promatrana temperaturu  $T$

$$s'' - s' = \frac{r}{T}$$

a time

$$r = AT(v'' - v') \frac{dP}{dT} \quad (275)$$

Ovo je vrlo važna jednadžba CLAPEYRON-CLAUSIUS-a. Ona nam daje vezu između topline isparivanja  $r$  i linijske napetosti  $P = f(T)$ . Diferencijalni kvocijent  $\frac{dP}{dT}$  pretstavlja naime koeficijent nagiba linije u sl. 58. za onu temperaturu zasićenja  $T$  na koju se odnosi  $r$  i  $(v'' - v')$ . Kod poznatog toka linije napetosti može se mjerom veličine  $(v'' - v')$  računom odrediti toplina isparivanja  $r$ , a da se uopće ne izvrše kalorička mjerjenja.

U Clapeyronovoj jednadžbi sadržan je prirast entropije kod isparivanja, pak zato ta jednadžba izrazuje drugi glavni stavak za zasićenu paru. Ova jednadžba vrijedi sasvim općenito.<sup>1)</sup>

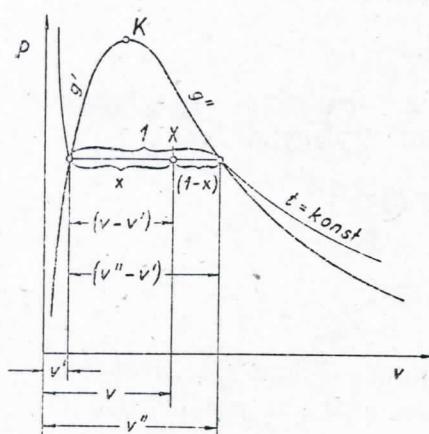
<sup>1)</sup> Ona vrijedi i za prelaze između drugih agregatnih stanja, kod kojih se konstantne temperature i konstantni pritisci međusobno uvjetuju, tako na pr. za sublimaciju te za kopnjenje.

Zato se ona može upotrijebiti za eksperimentalno provjeravanje ispravnosti drugog glavnog stavka, i to tako da se ispita, da li eksperimentalno određene veličine stanja  $r$ ,  $T$ ,  $v''$ ,  $v'$ ,  $\frac{dP}{dT}$  uvi-jek i bez izuzetka zadovoljavaju jednadžbu (275).

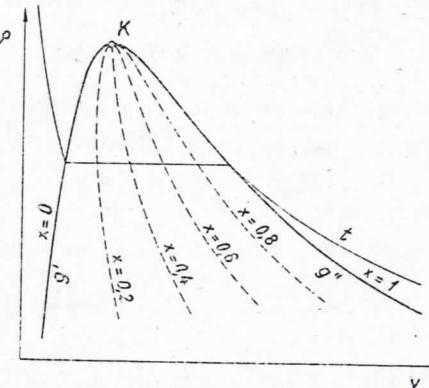
**Linija stalnog sadržaja  $x$**  Veličina stanja  $x$  može se vrlo jednostavno ucrtati kako u  $Pv$ - tako i u  $Ts$ -diagram. Tako je na pr. po (261)

$$\frac{v - v'}{v'' - v'} = x \quad (276)$$

To znači da točka za stanje  $x$  mokre pare (sadržaj pare  $x$ , volumen  $v$ ) dijeli izobaru područja zasićenosti prema sl. 72. u



Sl. 72. Prikazivanje sadržaja pare  $x$  u  $Pv$ -dijagramu.



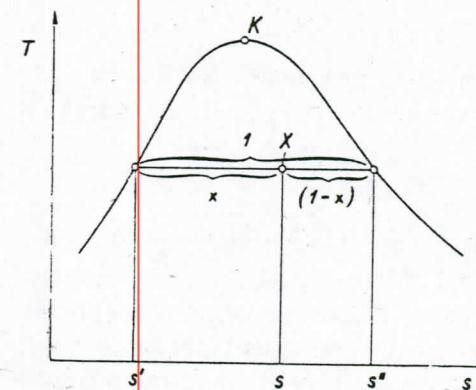
Sl. 73. Crte jednakog sadržaja pare  $x$  u  $Pv$ -dijagramu.

omjeru  $x : 1$  odnosno u omjeru  $(1 - x) : 1$ . Tako možemo za neko zadano  $x$ , na pr. za  $x = 0,4$ , unijeti pripadne točke na razne tlačne linije područja zasićenosti i ove točke spojiti u jednu liniju. Ponovimo li to i za druge vrijednosti  $x$  to ćemo dobiti snop linija istih sadržaja pare, sl. 73.

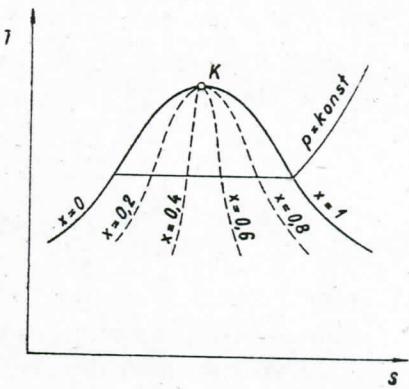
Budući da je prema (275) izraz

$$\frac{s - s'}{s'' - s'} = x \quad (277)$$

jednako građen kao izraz (276) to za linije stalnog sadržaja pare vrijedi za  $Ts$ -dijagram isto razmatranje kao i za  $Pv$ -dijagram. I ovdje linije  $x = \text{konst}$  otsjecaju na izotermama zasićenja dužine, koje su razmjerne sadržaju  $x$ , sl. 74. i 75.



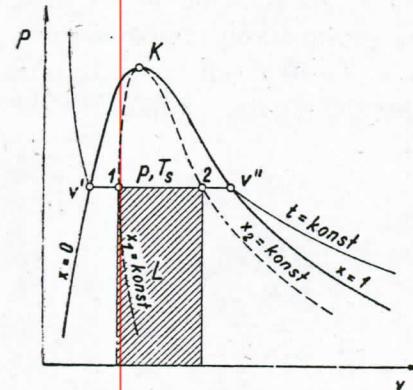
Sl. 74. Prikazivanje sadržaja pare  $x$  u  $Ts$  - dijagramu.



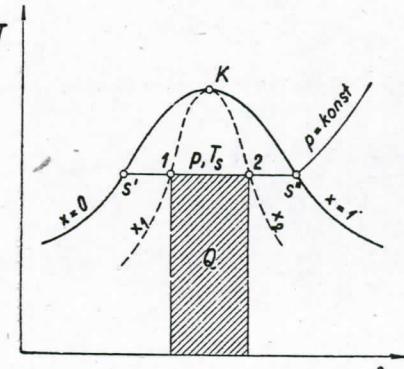
Sl. 75. Crte jednakog sadržaja pare  $x$  u  $Ts$  - dijagramu.

### Naročite promjene stanja mokre pare.

**Izobara,  $p = \text{konst}$ .** Dovođenje topline kod konstantnog pritiska od 1 do 2, sl. 76. i 77., prouzrokuje nak-



Sl. 76. Izobara zasićenog područja.



nadno isparivanje vlage u pari. Sadržaj pare  $x$  postaje veći. Izobara je ujedno i izoterna. Izvršeni rad je

$$L = \int_1^2 P dv = P(v_2 - v_1) = P(v'' - v') (x_2 - x_1)$$

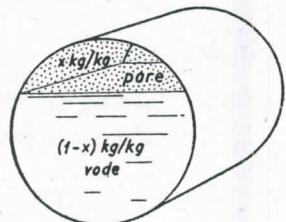
a dovedena toplina po sl. 77.

$$Q = T(s_2 - s_1) = T(x_2 - x_1)(s'' - s') = (x_2 - x_1)r.$$

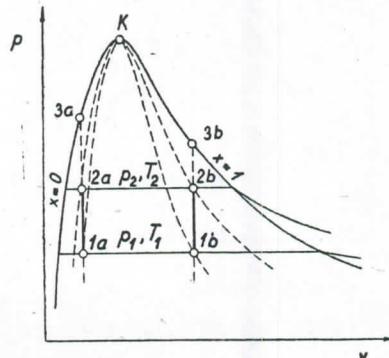
Sadržaj pare mora se pri tom nekako poznavati. Kad su na pr. zadani volumeni  $v_1$  i  $v_2$ , mogu se sadržaji pare  $x_1$  i  $x_2$  izračunati

$$x_1 = \frac{v_1 - v'}{v'' - v}; \quad x_2 = \frac{v_2 - v'}{v'' - v}.$$

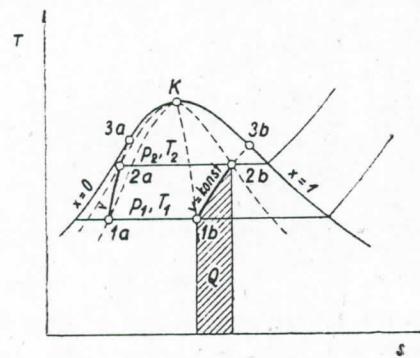
**Izohora,  $v = \text{konst}$ .** Ova se promjena stanja pojavljuje na pr. kod grijanja vode u nekom zatvorenom kotlu, kojemu se ne oduzima para. Kotao se zbog opasnosti rasprsnuća i zbog izbjegavanja pjenušanja nikad ne smije napolniti vodom, tako da uvijek preostaje veći ili manji parni prostor slobodan, sl. 78. Para i voda stoje pod pritiskom, koji odgovara kotlovskoj temperaturi, uz pretpostavku da u kotlu nema zraka. Promatramo li paru i vodu kotla kao smjesu mokre pare to će i položaj točke 1, sl. 79. i sl. 80, kao i daljnja promjena stanja sadržaja kotla ovisiti o omjeru prvotne količine pare i količine vode. Kod sasvim malenog početnog parnog prostora, koji daje malu



Sl. 78. Grijanje pri  $V = \text{konst}$



Sl. 79. i 80. Izohora zasićenog područja.



vrijednost  $x$ , točka 1a, dolazi se ugrijavanjem po  $v = \text{konst}$ , u područje sve manjih sadržaja pare, na pr. u točku 2a. Kod daljnog ugrijavanja do 3a nestat će uopće pare i kotlovska voda ispuniti cećav kotao. Ako je parni prostor u početku bio veći, to polazimo od stanja 1b i dolazimo u područje većih vrijednosti  $x$  na pr. u 2b, te bismo u nastavku postigli i gornju graničnu liniju. U stanju 3b isčeza bi onda kapljevita voda. Zbog  $v_1 = v = \text{konst}$  ovdje se ne vrši nikakav rad,  $L = 0$ . Ovu promjenu stanja možemo preslikati u  $Ts$ -dijagram i to tako da za različite pritiske očitamo iz  $Pv$ -diagrama pripadne vrijednosti  $x$  te da s ovima uđemo u  $Ts$ -dijagram. Toplina  $Q$ , koju treba dovoditi između 1b i 2b predviđena je iscrtkanom površinom. Po prvom glavnem stavku slijedi sa  $dV = 0$

$$Q = u_2 - u_1 = (u_2' + x_2 p_2) - (u_1' + x_1 p_1).$$

Kod zadanih pritisaka  $p_2$  može se iz poznatog polaznog stanja ( $p_1, t_1, v_1, x_1$  i t. d.) proračunati sadržaj vlage  $x_2$ , jer je

$$v_1 = v_2 = v_2' + x_2(v_2'' - v_2')$$

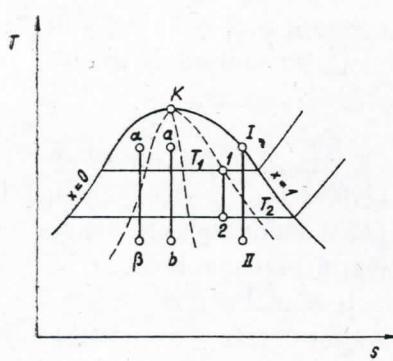
a odavle

$$x_2 = \frac{v_1 - v_2'}{v_2'' - v_2'}$$

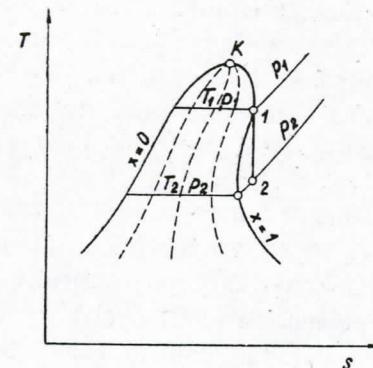
Pritisak, kod kojeg bi se sjeklo graničnu liniju (točka 3a odnosno 3b) naći ćemo, ako u parnim tabelama potražimo onaj pritisak za koji je  $v_3' = v_1$  odnosno  $v_3'' = v_1$ .

**Adijabatska (izentropijska)** Ekspandira li mokra para adijabatski pri  $s = \text{konst}$  (vidi  $Ts$ -dijagram sl. 81.), to će se para jače ovlažiti ili osušiti, već prema tome, da li je polazno stanje bilo u blizini gornje ili dolje granične linije. Suho zasićena para postaje mokrom. No ima i tvari kao što su benzol, dipheniloksid i t. d. kojima je tok gornje granične linije kako ga prikazuje sl. 82. Kod ovih tvari dolazi se adijabatskom ekspanzijom suho zasićene pare u pregrijano područje, što bi kod parnih strojeva bilo od stonovitih prednosti. Zato se u novije vrijeme ponovno predlagalo ove tvari upotrijebiti umjesto vode za pogon parnih strojeva.

\*

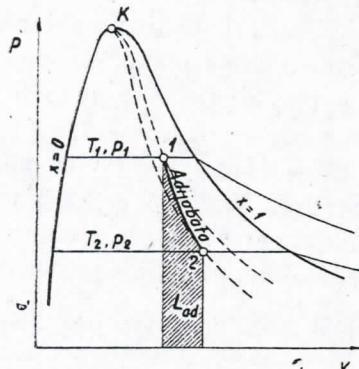


Sl. 81. Adijabata zasićenog područja



Sl. 82. Adijabata pri nadvitoj gornjoj graničnoj liniji

Tok adijabate u  $Pv$ -dijagramu, sl. 83. može se dobiti iz  $Ts$ -dijagrama sl. 81. uz pomoć sadržaja pare  $x$ . Tok je adijabate u  $Pv$ -dijagramu hiperboličkog karaktera. Za određivanje promjene sadržaja pare  $x$  najpogodniji je put preko entropije polaznih stanja. Po sl. 81. i po (273) imamo



Sl. 83. Adijabata zasićenog područja

$$\begin{aligned} s_2 &= s_1 \\ s_2' + x_2 \frac{r_2}{T_2} &= s_1' + x_1 \frac{r_1}{T_1} \\ \text{ili} \\ x_2 &= \frac{s_1' - s_2' + x_1 \frac{r_1}{T_1}}{\frac{r_2}{T_2}} = \\ &= \frac{s_1' - s_2' + x_1 (s_1'' - s_1')}{s_2'' - s_2'} \end{aligned}$$

Odvale možemo izračunati i volumen  $v_2$  prema (261). Kako je  $Q = 0$  to je

$$AL = u_1 - u_2 = (u_1' + x_1 p_1) - (u_2' + x_2 p_2),$$

odakle se može izračunati rad pomoću parnih tabela. No često je proračunavanje volumena duž adijabate u  $Pv$ -dijagramu pre-

zamorno. U takvim slučajevima bit će od prednosti prikazati volumen  $v$  eksplikite. Nizom konkretnih proračuna možemo pokazati da se u području zasićenosti za adijabatu može dobrim približenjem postaviti čisto empirički izraz

$$Pv^\alpha = \text{konst} \quad (278)$$

U području zasićenosti, a u blizini gornje granične linije za vodenu je paru do pritisaka od nekih 25 at vrijednost  $\alpha = 1,135$ . Ova vrijednost ne vrijedi više za pregrijano područje, kao ni za adijabatske ekspanzije, koje ulaze duboko u zasićeno područje. Taj je eksponent sasvim empirijska veličina bez nekog posebnog fizikalnog značenja, i nije u nikakvoj vezi sa specifičnim toplinama, kako je to prema (65) bilo kod idealnih plinova. Treba naime znati, da je u području zasićenosti  $c_p = \infty$ , budući da se ovdje kod  $p = \text{konst}$  može dovoditi mnogo topline, a da temperatura mokre pare ne raste. Tome nasuprot pridržava veličina  $c_v$  u čitavom zasićenom području konačne vrijednosti.

### Pregrijana para

Za pregrijano područje vrijedila bi ista razmatranja kao i za idealne plinove, kad bi se pregrijana para pokoravala zakonu idealnih plinova. No kad računamo volumen  $v_{id}''$  po idealnoj jednadžbi stanja

$$v_{id}'' = \frac{RT_s}{P} \quad (279)$$

gdje je  $T_s$  temperatura zasićenja a  $R$  plinska konstanta (za vodenu paru je  $R = \frac{848}{18} = 47,1$ ) to dobivamo vrijednosti koje sve leže iznad mjerene vrijednosti  $v''$ , kako se to vidi iz niže tabele

$p \text{ at}$	$t^{\circ} \text{C}$	$T \text{ K}$	$v'' \text{ m}^3/\text{kg}$	$v_{id}'' \text{ m}^3/\text{kg}$	$\frac{v_{id}'' - v''}{v''} \%$
0,1	45	318	14,95	14,98	0,3
1	99	372	1,725	1,751	1,4
5	151	424	0,3816	0,400	4,6
10	179	452	0,1981	0,213	7,6
20	211	484	0,1016	0,114	11,8
50	263	536	0,04024	0,0506	25,6
100	309	582	0,01845	0,0274	49,0
200	364	637	0,00620	0,0150	142,0

Kod niskih pritisaka mogu se ova otstupanja zanemariti, no kod viših pritisaka postaju već vrlo velika. Za računanje ovih razlika moglo bi se kod pregrijane pare primijeniti čisto empiričke jednadžbe. Ove bi mogle za brojčane račune biti od velike koristi. No od takvih empiričkih jednadžbi ne možemo očekivati neko proširenje teoretske spoznaje. Naročito ne bismo razabrali čime je uvjetovano otstupanje od zakona plinova.

Svaka jednadžba  $f(P, v, t) = 0$ , koja treba zadovoljiti i u blizini granične linije kao i duboko u pregrijanom području, mora kod malih gustoća, t. j. kod velikih volumena  $v$ , postepeno preći u linearnu jednadžbu idealnih plinova. To slijedi odatle što se svaka para kod dovoljno malenih pritisaka vlada kao idealni plin.

**Jednadžba stanja van der Waalsa** Takvu općenitu jednadžbu od osnovne važnosti objavio je VAN DER WAALS god. 1873. On je pošao od pretpostavke da su plinovi sastavljeni od roja molekula. Pritisak na stijenkama posude mora se pri tom shvatiti kao rezultat velikog broja molekularnih udaraca. No molekule ne udaraju samo u stijenku već se i međusobno srazuju. U usporedbi s veličinom molekula dužina je ljjeta između dva sudara neke molekule vrlo velika. Sama molekula zauzima sitni prostorčić u koji neka druga molekula ne može prodrijeti. Gi-banju molekula stoji prema tome na raspolaganju neki prostor koji je manji od sveukupnog prostora plina. Kod vrlo malenih volumena, (velika gustoća) dolazi do izražaja ovaj volumen molekula i to tako, da niti najveći pritisci ne dostaju za daljnje smanjivanje plinskog prostora, jer bi u tom slučaju trebalo mo-

lekule utisnuti jednu u drugu. Prostor za slobodno gibanje molekula ovdje je isčeznuo. Označimo li ovaj granični volumen plina sa  $b$ , to veličina ( $v - b$ ) pretstavlja slobodni prostor, pa tako dobivamo prvu dotjeranu jednadžbu stanja

$$P(v - b) = RT \quad (280)$$

Za  $v \approx b$  mora ovdje  $P$  zauzeti uistinu vrlo velike vrijednosti, da bi se mogla zadovoljiti jednadžba. Kod donekle velikih volumena  $v$  može se naprotiv zanemariti veličina  $b$ , koja je vrlo malena, te (280) prelazi u idealnu jednadžbu plinova.

Jednadžbu možemo još više dotjerati, kad razmotrimo međusobno djelovanje molekula, koje je poznato pod imenom kohezije. Kod velikog razmaka molekula, kakav nailazimo kod idealnih plinova, ove sile isčezavaju. Kod velike gustoće, kad su se razmaci znatno smanjili, rastu ove sile naglo. Za neku molekulu u unutrašnjosti plina ove se sile u prosjeku poništavaju, jer djeluju na tu molekulu iz svih smjerova. No na neku molekulu, koja se nalazi na površini plina, t. j. u blizini stijenke, djeluju one jednostrano iz unutrašnjosti plina, tako da prema vani dolazi do izražaja neki drugi (manji) pritisak, nego li bi to bio slučaj, da tih sile nema. Mjerenu s instrumentima prisutna je samo onaj pritisak  $P$ , koji vlada na granici plina i instrumenta, t. j. na plinskoj površini. Svakako će daljinska sila kojom se neka molekula na površini privlači u unutrašnjost, biti srazmjerna broju molekula bliže okoline, a taj broj je sa svoje strane proporcionalan gustoći plina  $\frac{1}{v}$ . S druge je pak strane broj molekula, koji će naletiti na  $1 \text{ cm}^2$  stijenke i tamo proizvesti mjereni pritisak, opet proporcionalan gustoći plina  $\frac{1}{v}$ . Zato se  $1 \text{ cm}^2$  površinskog sloja plina molekularnim silama privlači u unutaršnjost sa nekom silom koja je proporcionalna kvadratu gustoće, t. j. koja je za  $1 \text{ m}^2$  sloja jednaka  $\frac{a}{v^2}$ . Ovdje je  $a$  neki iskustveni faktor. Za ovaj je iznos, nazvan kohezionim pritiskom, vanjski plinski pritisak  $P$ , koji se jedino može mjeriti, manji od unutarnjeg pritiska  $P_u$  tako da je

$$P_u = P + \frac{a}{v^2} \quad (281)$$

Razumljivo je, da za vladanje plina, t. j. za njegovu jednadžbu stanja (280) može biti mjerodavan samo unutarnji pritisak, pak sad možemo jednadžbu (280) još dotjerati u oblik

$$P_u(v - b) = RT \quad (282)$$

Uvrstimo li ovamo (281) to dobivamo

$$\left( P + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = RT$$

ili

$$P = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad (283)$$

To je jednadžba stanja VAN DER WAALS- u. Ovdje  $P$  označuje vanjski plinski tlak, koji je pristupačan instrumentima, a kojim djeluje plin na stijenke svoje posude. Brojčano malene konstante  $a$  i  $b$  svojstvene su svakoj tvari te ih treba odrediti mjerjenjima.

Za velike volumene  $v \gg b$  član  $\frac{a}{v^2}$  isčezava mnogo brže nego li član  $\frac{RT}{v - b}$ , te jednadžba (283) kod malih gustoća postepeno prelazi u jednadžbu idealnih plinova, kako smo to gore tražili.

VAN DER WAALS postavio je svoju jednadžbu na temelju jednostavnih pretpostavki, no usprkos toga ona izvrsno prikazuje vladanje tvari u čitavom području. Zato je ona poslužila kao osnovni oblik čitavom nizu jednadžbi, koje su predlagali razni istraživači, da bi olakšali proračun.

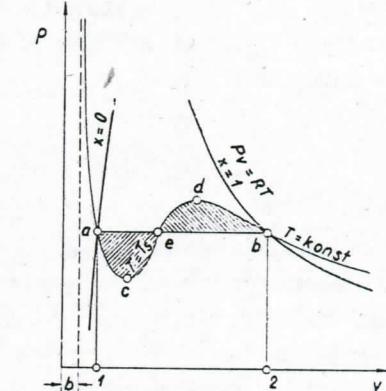
Kvantitativna otstupanja pravih tvari od ove jednadžbe pojavljuju se u prvom redu zbog toga, što se u blizini zasićenog područja stvaraju u pari kompleksi molekula, što se kod gornjih razmatranja nije uzelo u obzir. Dvije ili više molekula povežu se u veće grupe, molekule asociiraju, tako da se zapravo stvara smjesa jednomolekularne i višemolekularne pare. Jasno je da će to u znatnoj mjeri utjecati na koeficijente  $a$  i  $b$ .

U većini je slučajeva zadatak brojčanih proračuna, da se iz zadanih vrijednosti  $P$  i  $T$  izračuna volumen  $v$ . Kako je VAN DER WAALS-ova jednadžba trećeg stepena, a  $v$  se ne može pi-

sati u eksplisitnom obliku, to je ta jednadžba za takve brojčane račune neprikladna.

#### Kontinuiranost prelaza pare u kapljevinu

Postavljamo si zadatak da VAN DER WAALS-ovu jednadžbu kvalitativno diskutiramo. U  $Pv$ -dijagramu teče izoterma kao linija trećeg stepena prema sl. 84. Linije  $x = 0$  i  $x = 1$  označuju na poznati način donju i gornju graničnu liniju. VAN DER WAALS-ova izoterma teče unutar zasićenog područja čudno. Između suho zasićene pare i vrele kapljevine uključuje ona čitav kontinuum međustanja. Po njoj bi prema tome prelaz pare u kapljevinu i obrnuto bio sasvim neprekidan.



Sl. 84. Izoterma van der Waals-a

U prvi mah izgleda, da netom spomenuti rezultat stoji u suprotnosti s iskustvom. No uspjelo je eksperimentalno ostvariti stanja na liniji  $bd$  kao „pothlađenu paru“. Ova je vrlo slabo stabilna (metastabilna) pak se kod najmanjih podražaja raspada naglo u dvije faze i to u suhu paru i vrelu kapljevinu. Pod izrazom „naglo“ treba razumjeti vrlo kratkotrajne ali ipak konačno duge pojave. Pothlađivanje pare od stanovitog je tehničkog značenja kod izvanredno brzih promjena stanja pare u parnim turbinama, a osim toga se ono opširno primjenjuje u t. v. Wilson-ovoj komori za proučavanje radijacije.

Isto je tako uspjelo ostvariti stanja na krivulji  $ac$ . Tako se na pr. mogu vodene kapi, koje se za zaštitu od svake smetnje uronilo u ulje iste specifične težine u kojem lebde, pažljivim grijanjem kod jedne atmosfere ugrijati i do  $180^\circ C$  a da ne nastupi isparivanje, i ako je vrelište kod tog pritiska  $100^\circ C$ . No kod najmanjeg podražaja isparuje ovakva pregrijana voda eksplozivno, a temperatura se skokimice spušta na temperaturu zasićenja.

Po svemu tome čudni je tok VAN DER WAALS-ove izoterme u zasićenom području eksperimentalno opravdan, samo što pri-

padna stanja nisu stabilna, već su metastabilna. Naprotiv se nemogu ostvariti stanja na otsječku  $ced$ , jer ovdje volumen raste sa pritiskom, pak su ta stanja izrazito labilna.

**Položaj graničnih krivulja** Međusobni položaj VAN DER WAALS-ove izoterme i prave izoterme zasićenog područja uspjelo je odrediti MAXWELL-u i CLAUSIUS-u. Kod prevođenja vrele vode  $a$  u paru  $b$  treba kod  $T = \text{konst}$  dovesti toplinu

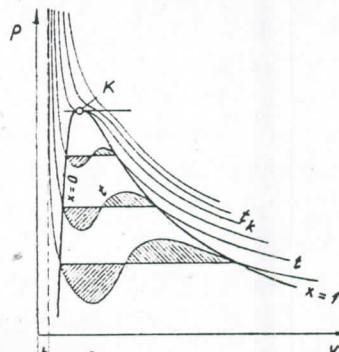
$$Q = \int_a^b T ds = T(s_b - s_a)$$

i to bez obzira na to, da li od  $a$  do  $b$  polazimo pravocrtno, kao kod običnog isparivanja ili da li voda stanja  $a$  eksplandira neprekinito preko  $ced$  do  $b$ . U oba slučaja ostaje naime trajno  $T = \text{konst}$ . Pri tom se dobiva rad  $L_{ab}$  koji je predočen površinom ispod dotične linije promjene stanja. Taj rad je

$$AL_{ab} = Q_{ab} - (u_b - u_a) = T(s_b - s_a) - (u_b - u_a).$$

Rad  $L_{ab}$  mora dakle u oba slučaja biti jednak, budući da po gornjem izrazu ovisi samo o početnom i konačnom stanju, a ta su u oba slučaja ista. To znači da vodoravna linija pritiska zasićenja  $ab$  leži tako, da iscrtkane površine u sl. 84. budu jednake.

Tako se može jednostavnim načinom odrediti granične točke  $a$ ,  $b$ , na pojedinim izotermama i kroz te točke položiti granične krivulje, sl. 85. U samoj kritičkoj točci mora kritička izoterna zbog  $v_k' = v_k''$  imati horizontalnu tangentu



Sl. 85. Dijagram stanja van der Waals-ovog plina

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_k} = 0 \quad (284)$$

i osim toga točku infleksije

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_k} = 0 \quad (285)$$

Prema (283) je

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_{T_k} = -\frac{RT_k}{(v_k - b)^2} + \frac{2a}{v_k^3} = 0 \quad (286)$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial v^2}\right)_{T_k} = \frac{2RT_k}{(v_k - b)^3} - \frac{6a}{v_k^4} = 0 \quad (287)$$

To su sa (284) tri jednadžbe, iz kojih možemo odrediti veličine  $v_k$ ,  $T_k$  i  $P_k$ . Tako dobivamo

$$v_k = 3b; \quad RT_k = \frac{8}{27} \frac{a}{b}; \quad P_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2} \quad (288)$$

Za kritičnu točku slijedi

$$\frac{P_k v_k}{RT_k} = \frac{3}{8} \quad (289)$$

Po zakonu idealnih plinova moralo bi biti

$$\frac{P_k v_k}{RT_k} = 1$$

dakle skoro tri puta toliko koliko u (289)! Odavde vidimo kako para u blizini kritičke točke jako otstupa od zakona idealnih plinova.

**Zakon korespondentnih stanja** Jednoznačna ovisnost kritičnih veličina i koeficijenata  $a$  i  $b$  daje nam opći zakon srodnih ili korespondentnih stanja. Uvrstimo li naime

$$P = \pi P_k; \quad T = \tau T_k; \quad v = \omega v_k \quad (290)$$

to pomoću veličina  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ , mjerimo veličine stanja u dijelovima odnosnih kritičnih vrijednosti. Veličine  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\omega$  su tako zvane reducirane veličine stanja kod kojih odnosne kritične vrijednosti pretstavljaju jedinicu mjere. Uvrstimo li (290) u (283) to sa (288) slijedi

$$\pi = \frac{8\tau}{3\omega - 1} - \frac{3}{\omega^2} \quad (291)$$

kao reducirana jednadžba stanja. Budući da u njoj nema plinske konstante, to je ona zajednička svim tvarima. Stanja različitih tvari, kojima pripadaju jednake vrijednosti  $\pi$ ,  $\tau$ ,  $\omega$ , zovu se srodna ili korespondentna stanja, budući, da kod različitih tvari zadovoljavaju istu jednadžbu (291).

Zanimivo je, da se ovaj zakon korespondentnih stanja mogao eksperimentalno dokazati i kod takvih tvari, koje se inače ne pokoravaju strogo VAN DER WAALS-ovoj jednadžbi. To je od naročite važnosti zato, što na taj način možemo mjerena svojstva jedne tvari iskoristiti za čisto računsko pronađenje odnosnih svojstava neke druge tvari, samo ako obje tvari pripadaju istoj skupini<sup>1)</sup>.

**Jednadžbe Callendara i Molliera** Nažalost baš vodena para, koja je tako važna, otstupa od VAN DER WAALS-ove jednadžbe. Vodenu paru zbog jake asocijacije njenih molekula ne možemo ubrajati u normalne tvari. Želimo li njenu jednadžbu stana prilagoditi eksperimentalnim vrijednostima to se koeficijenti  $a$  i  $b$  moraju odabrati kao promjenljivice, koje su ovisne od temperature i od pritiska. Tako se vremenom predložilo čitav niz poluempiričkih jednadžbi<sup>2)</sup>. Od velikog broja takvih jednadžbi diskutirat ćemo ovdje samo onu od MOLLIERA, budući da njegove parne tabele i dijagrami spadaju među najraširenije, te zato što je u poredbi sa drugim jednadžbama kod iste točnosti još najjednostavnija.

U jednadžbi (283) koeficijenti su  $a$  i  $b$  za vodu promjenljivi, što je posljedica asocijacije molekula vodene pare u blizini zasićenog područja. Po (283) je

$$v - b = \frac{RT}{P} - \frac{a(v - b)}{Pv^2}$$

Zanemarimo li u korekcionom članu na desnoj strani veličinu  $b$  to postaje

$$v - b \approx \frac{RT}{P} - \frac{a}{Pv}$$

<sup>1)</sup> Jednu primjenu reducirane jednadžbe stanja imat ćemo u drugom svesku kod proučavanja inverzije efekta prigušivanja.

<sup>2)</sup> Vidi na pr. W. Wien i F. Harms, Handbuch der Experimentalphysik, sv. 8. II. dio Wärmeausdehnung, Zustandsgrößen und Theorien der Wärme str. 224. gdje je navedeno 56 jednadžba stanja različitih autora. Osim toga W. Nusseit, Technische Thermodynamik, Sammlung Göschens. 1084, I. izdanje, (1934.) str. 126.

Sa  $Pv \approx RT$  (ovo približenje upotrijebit ćemo samo u korekcionom članu tako, da je pogriješka beznačajna, barem u onom području, gdje taj član nije odlučan, što za okolicu kritične točke više ne vrijedi) dobivamo

$$v \approx \frac{RT}{P} + b - \frac{a}{RT}$$

ili općenitije

$$v \approx \frac{RT}{P} + b - f(T) \quad (292)$$

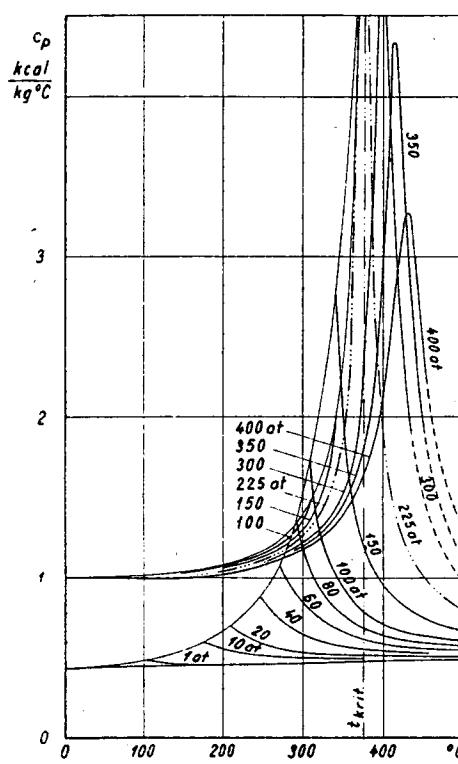
Ovu jednadžbu prvi je preporučio CALLENDAR. Njome se može volumen  $v$  mnogo jednostavnije proračunati nego li VAN DER WAALS-ovom jednadžbom. No u blizini kritične točke ona mora zakazati, budući da jednadžba, koja je u  $v$  prvoga stepena ovdje načelno ne može zadovoljiti. Za visoke pritiske i temperature uveo je MOLLIER koeficijente  $a$  i  $b$ , koji su po njemu ovisni o pritisku i temperaturi te je tako dao jednadžbu

$$v = 0,004702 \frac{T}{p} - \frac{1,45}{(T/100)^{3,1}} - 5800 \frac{p^2}{(T/100)^{13,5}} \quad (293)$$

Ova jednadžba reproducira mjerene vrijednosti vrlo dobro do u blizini kritične točke.

Za različite proračune potrebno je poznavanje kaloričnih veličina  $i$ ,  $u$ ,  $s$  i t. d. One su u stanovitoj povezanosti s termičkom jednadžbom stanja, no ta još ne dostaje, da bismo ih mogli proračunati. Mi se moramo pored toga ogledati još i za jednom kaloričnom jednadžbom stanja, kao što je na primjer ona za specifičnu toplinu. Prikazat ćemo računski postupak za parne tabele i za parne dijagrame za vodenu paru. U načelu se taj postupak može primijeniti za svaku drugu tvar.

Specifična toplina pregrijane pare ovisna je kako od temperature tako i od pritiska. Prema pokusima Hilde MOLLIER i KNOBLAUCH-A, a za visoke pritiske HAVLIČEK-a i MIŠKOVSKY-a dobila se ovisnost koja je prikazana u sl. 86. i 87. Kako u kritičnoj točci tako i u zasićenom području postaje  $c_p = \infty$ . U natkriticnom području pokazuje specifična toplina pomicni maksimum, koji je ovisan o pritisku. U tom području prelazi ona



Sl. 86. Specifična toplina vode i vodene pare pri raznim pritiscima

Pri tom odabiremo entalpiju pripadne vrele vode sa  $i'_0 = 0$  kcal/kg pa tako dobivamo integracionu konstantu (295)

$$i_0 = i''_0 = 597,2 \text{ kcal/kg}$$

gdje je 597,2 toplina isparivanja vode kod  $0^\circ\text{C}$ . Kako je ovdje  $p_0$  vrlo maleno to možemo za specifičnu toplinu primjeniti granicnu jednadžbu (294) i uvrstiti je u (295). Proračunamo li potrebnii izraz  $(\frac{\partial v}{\partial T})_p$  iz (293) to dobivamo

$$(\frac{\partial v}{\partial T})_p = \frac{0,004702}{p} + \frac{3,1}{100} \cdot \frac{1,45}{(T/100)^{4,1}} + \frac{13,5 \cdot 5800}{100} \cdot \frac{p^2}{(T/100)^{14,5}} \quad (296)$$

Uvrstimo li jednadžbe (293) do (296) u (295) te integriramo, to konačno slijedi

kontinuirano u područje kapljevine, kako smo to vidjeli i kod svih drugih svojstava.

Za niske pritiske, nekako ispod 0,1 at, može se za vodenu paru pisati po MOLLIERU s dovoljnim približenjem

$$c_{p_0} = 0,44 + 0,00013t \quad (294)$$

Time sad možemo izračunati entalpiju prema (208), pak dobivamo

$$i_1 = \int_{t_0}^{t_1} c_{p_0} dt + A \int_{p_0}^{p_1} \left[ v - T \left( \frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dP + i'_0 \quad (295)$$

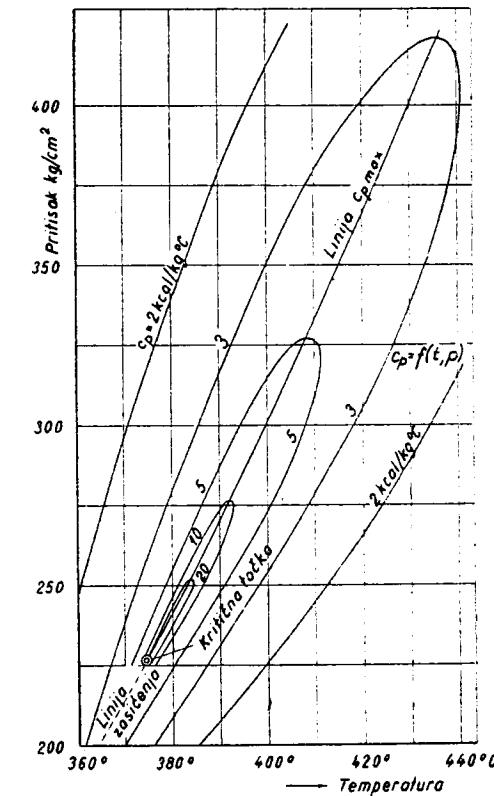
Ovdje provodimo integraciju od suho zasićene pare od  $0^\circ\text{C}$  i  $p_0 = 0,006228$  at. Pri tom odabiremo entalpiju pripadne vrele vode sa  $i'_0 = 0$  kcal/kg pa tako dobivamo integracionu konstantu (295)

$$i = 597,2 + 0,44t + 0,000065t^2 - 139,2 \frac{p}{(T/100)^{3,1}} - 656518 \frac{p^3}{(T/100)^{13,5}} + \frac{0,865}{(T/100)^{3,1}} + \frac{0,158}{(T/100)^{13,5}} \quad (297)$$

Pri temperaturama  $t > 0^\circ\text{C}$  postaju zadnja dva člana manja od 0,05 kcal/kg, te ih možemo zanemariti.

Entropiju pregrijane pare računat ćemo iz (182), pošto smo uvrstili (294) i (296)

$$s = 0,40449 \ln T + 0,00013T - 0,110117 \ln P - 1,0527 \frac{p}{(T/100)^{4,1}} - 6112,4 \frac{p^3}{(T/100)^{14,5}} + 0,3369 - \frac{0,00656}{(T/100)^{4,1}} - \frac{0,001477}{(T/100)^{14,5}} \quad (298)$$



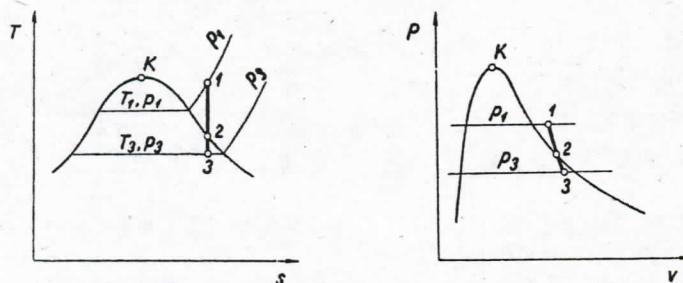
I ovdje su dva zadnja člana tako mala, da ih kod brojčanih računa zanemarujemo. Integracionu konstantu  $s_0$  u (182) našli smo na slijedeći način. Ako opet za entalpiju vrele vode od  $0^\circ\text{C}$  i  $0,006228$  at pišemo  $s'_0 = 0$ , to je entropija pripadne suho zasićene pare  $s''_0 = \frac{r_0}{T_0} = \frac{597,2}{273,16} = 2,1863$  kcal/kg K. Kako i ovdje integriramo od suho zasićene pare od  $0^\circ\text{C}$ , to je integraciona konstanta  $s_0 = s''_0$ .

Jednadžbama (293), (297), (298) određeno je termičko i kaloričko vla-

Sl. 87. Specifična toplina vode u natkritičnom području prema Havliček-u i Miškovskom

anje pregrijane pare. Po ovim jednadžbama sastavljene su tabele i dijagrami<sup>1)</sup>

Proučavanje raznih promjena stanja u pregrijanom području vrši se najbolje grafičkim putem, kako ćemo još pokažati. Ovdje spominjemo još samo adijabatsku promjenu stanja.



Sl. 88. i 89. Adijabata presjeca gornju graničnu liniju

Adijabatski uvjet  $s = \text{konst}$  ne može se s gornjim jednadžbama zgodno upotrijebiti, jer se na pr. temperatura kod zadanog  $s$  i  $P$  može iz (298) odrediti samo zamornim pokušavanjem.

No za adijabatsku ekspanziju vrijedi i u pregrijanom području dovoljnom točnošću jednadžba

$$Pv^x = \text{konst}$$

gdje je  $x = 1,3$ . Ovaj eksponent vrijedi samo izvan područja zasićenosti. Kod adijabatske ekspanzije postaje pregrijana para pod običnim uvjetima često mokra, pak se kod prelaza u zasićeno područje mora tome pokloniti pažnja. U  $Pv$ -dijagramu se adijabata na graničnoj krivulji lomi, točka 2, sl. 89., budući da se adijabatski eksponent pregrijanog područja ovdje skokimice mijenja u onaj za zasićeno područje, kojega je vrijednost  $x = 1,135$ .

<sup>1)</sup> R. Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf 7. izdanje (Berlin 1932).

Konstante u (298) neznatno se razlikuju od Mollier-ovih, a prilagođene su tabelama na kraju ove knjige, koje su preuzete iz djela We. Koch, VDI-Wasserdampftafeln (Berlin 1937). Ovaj autor upotrebljava drugačije građene jednadžbe.

### Procesi parnoga stroja.

Temperatura dovođenja

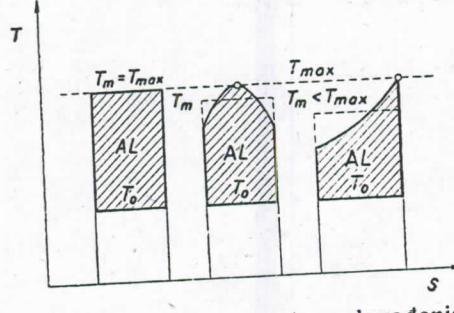
Priklonit ćemo opet našu pažnju radnim procesima, da pokažemo zašto su pare u tehnici tako važne.

Da bismo neki izvor topline mogli što bolje iskoristiti za dobivanje rada, mora posredni proces na pr. CARNOT-ov proces, raditi između što većih temperturnih razlika. To slijedi iz termičkog stepena djelovanja CARNOT-ovog procesa

$$\eta_c = \frac{AL_c}{Q} = \frac{T - T_o}{T}$$

gdje su  $T$  gornja, a  $T_o$  donja temperatura CARNOT-ova procesa.  $T_o$  odgovara obično okolišnoj temperaturi. Kod strojeva s dovođenjem topline iz vana, dakle kod takvih, kod kojih se toplina dovodi kroz čvrste stijenke radnoj tvari, kao na pr. u parnom kotlu, temperatura radne tvari ne može biti veća od temperature stijenke  $T_s$ . Obzirom na čvrstoću materijala ne smije temperatura stijenke prekoračiti neku iskustvenu granicu. Danas ta granica za najbolji materijal, koji dolazi u obzir za gradnju tehničkih naprava, leži kod nekih  $550^\circ\text{C}$ . Kod strojeva, kod kojih se toplina oslobađa u unutrašnjosti, kao na pr. u benzinskom ili u Dieselovom motoru, moći će radni medij bar kratkotrajno imati znatno višu temperaturu, pri čem se samo moramo pobrinuti, da se stijenke izdašno hlađe, kako im temperatura ne bi prekoračila opasnu granicu.

Za dobrotu nekog kružnog procesa nije međutim mjerodavna najviša temperatura  $T_{max}$ , koja se postizava u procesu, već ona srednja temperatura  $T_m$ , kod koje se u prosjeku dovodi toplina, vidi sl. 90. Radnu površinu kružnog procesa možemo u dijagramu nadomjestiti jednim CARNOT-ovim procesom, koji radi između temperatura  $T_m$  i  $T_o$ , a koji pri tom uz potrošak iste topline  $Q$  dobavlja isti rad  $AL$ . Kod nekog CARNOT- procesa

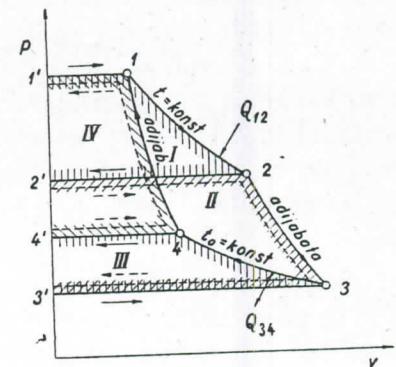


Sl. 90. Srednja temperatura dovodenja topline.

najviša je temperatura  $T_{max}$  ujedno i srednja temperatura dovođenja topline  $T_m$ , tako da se svakolika toplina dovodi kod najviše, materijalom dopustive temperature. To je jedan razlog više, zbog kojeg se kod postrojenja sa vanjskim dovođenjem topline nastoji ostvariti CARNOT-ov proces.

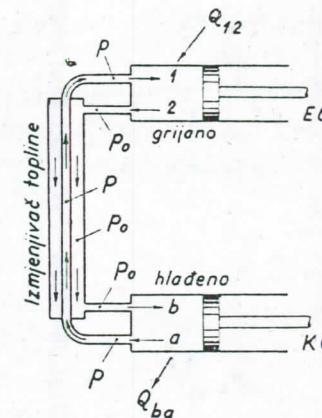
**Carnotov proces s idealnim plinom.** Pokušajmo CARNOT-ov proces praktički provesti s nekim idealnim plinom. Plin se mora naizmjence grijati, izolirati, hladiti, izolirati i t. d. pak je isključeno, da bi se to na praktički zadovoljavajući način moglo provesti u jednom cilindru. Zato odaberimo četiri cilindra od kojih svaki usisava i istiskuje plin kod stalnih pritisaka. U cilindru br. I ( $1', 1, 2, 2'$ ), sl. 91., grijemo plin, cilindar br. II ( $2', 2, 3, 3'$ ) je izoliran, u br. III ( $3', 3, 4, 4'$ ) plin se hlađi, dok je cilindar br. IV ( $4', 4, 1, 1'$ ) opet izoliran. Tako se CARNOT-ov proces dobiva kao diferencija dviju većih radnih površina: površina ( $1234$ ) — površina ( $1'1233'$ ).

Broj cilindara možemo smanjiti od četiri na dva, ako se poslužimo izmjenjivačem topline prema sl. 92. (Ericson-proces). Predgrijani uzduh usisavamo pod pritiskom  $p$  u trajno grijani eks-



Sl. 91. Carnot-ov proces sa 4 cilindra.

panzioni cilindar (EC) do točke 1, sl. 93. te on ovdje uz dovođenje topline ekspandira izotermno na  $p_0$  do točke 2. Pošto se uzduh istisnuo iz EC ( $2,2'$ ) prelazi u izmjenjivač topline,

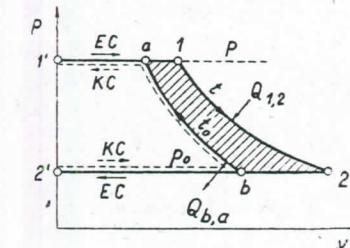


Sl. 92. Izmjenjivač topline među cilindrima

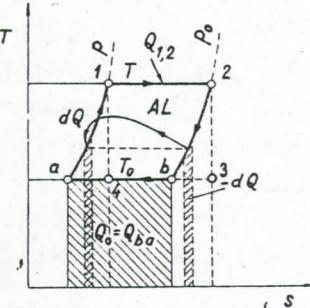
uzduh  $b$  kod stalnog pritiska  $p_0$  te ga uz trajno hlađenje izotermno komprimira na pritisak  $p$ , stanje  $a$ . Uzduh se kod prolaza kroz izmjenjivač topline predgrije na stanje 1 s kojim ga usiše ekspanzionalni cilindar. Kod dovoljno velike površine izmjenjivača topline (rekuperatora) bit će temperaturna diferenca obih struja, koja je potrebna za prelaz topline, po volji malena, tako da se prelaz topline može izvršiti povratno. I ako se ovaj proces razlikuje od CARNOT-ovog, vidi  $Ts$ -dijagram sl. 94., to će mu

termički stepen djelovanja  $\eta = \frac{AL}{Q_{12}}$  zbog potpune povratnosti biti isto tako dobar kao onaj CARNOT-ovog procesa ( $1234$ ), koji bi se odvijao unutar istih temperatura.

**Proces vrućeg uzduha** Iz tehničkih razloga, kakvi su pristupačnost ventila, podmazivanje cilindra i t. d. moramo međutim odustati od neposrednog loženja ekspanzionalnog cilindra. Ovi razlozi nas sile, da loženje odijelimo od cilindra, sl. 95. Premjestimo li i hlađenje u posebni hladnjak, to dobivamo t. zv. proces vrućeg uzduha  $1, 2, 3, 4$ , sl. 96. U obim cilindrima teku ekspanzija ( $1, 2$ ), i kompresija ( $3, 4$ ) adi-

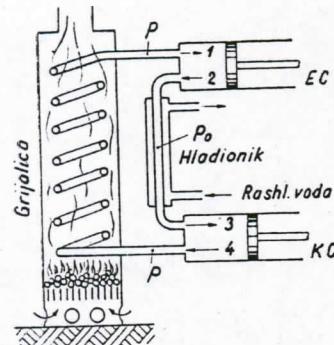


Sl. 93. Pv-dijagram za sl. 92.



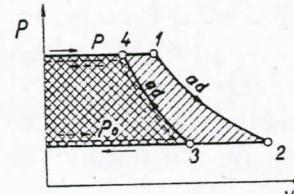
Sl. 94. Ts-dijagram za sl. 92.

jabatski. Grijanje ( $4, 1$ ) teče u grijalici pri  $p = \text{konst}$ , a hlađenje ( $2, 3$ ) u hladnjaku pri  $p_0 = \text{konst}$ . Uzduh sa stanjem 2 može se uostalom iz EC otpustiti u atmosferu time, da se u KC siše svježi uzduh 3 iz atmosfere. U tom slučaju služi sama okolina kao hladnjak.



Sl. 95. Proces s vrućim uzduhom

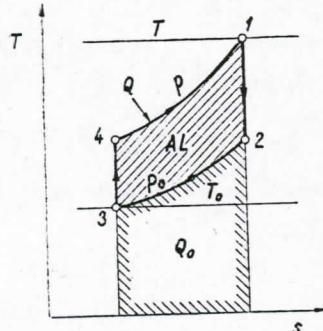
svježi uzduh 3 iz atmosfere. U tom slučaju služi sama okolina kao hladnjak.



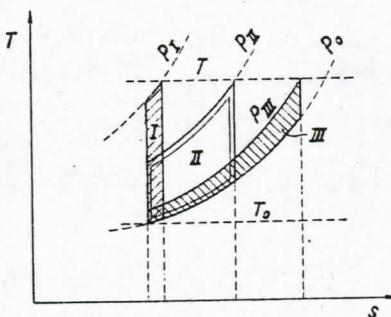
Sl. 96. Pv-dijagram za sl. 95.

Proces vrućeg uzduha nije više tako povoljan kao CARNOT-ov, budući da je srednja temperatura dovođenja topline između  $4$  i  $1$  niža od temperature ogrjevnog spremnika, t. j. plinova izgaranja, sl. 97. Što je kod zadanih temperatura  $T$  i  $T_0$  proces u  $Ts$ -dijagramu širi, to lošije je iskorištenje topline, sl. 98. Najbolji stepen djelovanja daje proces I, najslabiji proces III.

Naročito ističemo da smo kod ovog procesa bili upućeni na dovođenje topline kod konstantnoga pritiska, na što ćemo naići kod većine tehnički izvodivih procesa s vanjskim dovođenjem topline.



Sl. 97. Ts-dijagram za sl. 95.

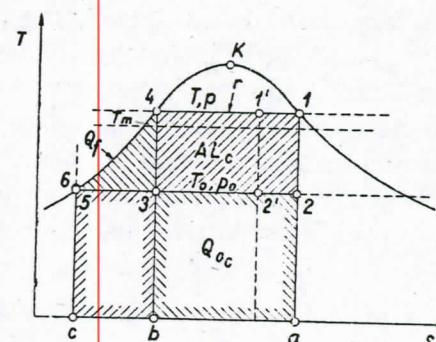


Sl. 98. Izbor pritisaka kod procesa s vrućim uzduhom

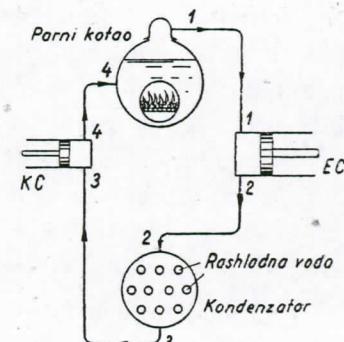
Proces vrućeg uzduha i praktički je provediv, te se je i provodio. No pored lošeg termičkog stepena djelovanja još mu je načelnji manjak i to, što se korisni rad  $L$  dobiva kao razlika dvaju velikih radnih iznosa ( $L_E - L_K$ ). To povlači za sobom, da razmjerno neznatno pogoršanje ovih radnih procesa, na pr. zbog trenja i sličnoga, nerazmjerno jako umanjuje veličinu korisnog rada. To je zato važno, jer se rad  $L_E$  ekspanzionog stroja zbog njegovog mehaničkog stepena djelovanja i zbog drugih gubitaka uvijek smanjuje, dok se  $L_K$  kompresionog stroja uvijek povećava. Tako se korisni rad okljaštruje sa dvije strane. Još je jedan manjak procesa vrućeg uzduha maleni toplinski kapacitet uzduha i plinova uopće, pak strojevi postaju glomazni i skupi.

#### Procesi parnoga stroja

Ove nepovoljne prilike odmah se mijenjaju kad spomenuti proces izvedemo sa zasićenom parom. Upada u oči da će izobare procesa biti ujedno i izoterme jer je za zasićenu paru  $T = f(P)$ , pak konstantnom pritisku odgovara konstantna temperatura. Tako možemo i uz uvjet stalnih pritisaka lako izvesti CARNOT-ov proces. Takav proces predviđen je u  $Ts$ -dijagramu u sl. 99.

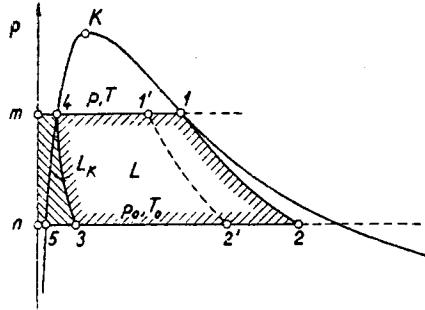


Sl. 99. Proces parnoga stroja.



Sl. 100. Parno postrojenje.

Kod zadanih temperatura  $T$  i  $T_0$  i kod odabrane tvari, na pr. vode, određeni su odmah i pritisci  $p$  i  $p_0$ . U kotlu, sl. 99., 100. i 101. možemo proizvoditi suho zasićenu paru, stanje 1,

Sl. 101.  $Pv$ -dijagram za sl. 100.

4 pri kotlovskej temperaturi  $T$ . Tu vodu dovodimo kotlu, da bismo je ponovno mogli ispariti. U kotlu ne moramo proizvoditi baš suho zasićenu paru. CARNOT-ov proces sa istim stepenom djelovanja dobili bismo i sa mokrom parom stanja 1'. No iz  $Ts$ -dijagrama vidimo, da će nam 1 kg pare dojavljati to više rada što točka 1' leži više na desno.

Da bismo kompresijom mogli dobiti vrelu vodu stanja 4 morali bismo iz kondenzatora kompresorom usisati točno doziranu smjesu vode i pare, stanje 3 ( $s_3 = s'_4$ ). No kod kompresije ugrijava se samo parovita faza, koja će se pače i pregrijati, dok će kapljivita faza zbog loših prilika izmjene topline ostati pretežno hladna. Zato na koncu kompresije ne ćemo dobiti vrelu vodu stanja 4 već neku smjesu pregrijane pare i hladne vode. Iz tog razloga se u praksi kompresor zamjenjuje s jednom vodenom crpkom (pojna pumpa), što smijemo to prije učiniti, budući da bi kompresor u omjeru prema ekspanzionom stroju bio i onako vrlo malen.

Odbacivanjem kompresora promijenit će se nešto prvotni proces. Para se sad mora u kondenzatoru potpuno ukapljiti, točka 5. Pojna pumpa sad siše čistu vodu stanja 5 i komprimira je adijabatski na kotlovskej pritisak  $p$ , stanje 6 (vidi kako povećanu sliku 102). Rad se pumpe  $L_p$  predočuje površinom  $56mn$  i vrlo je malen. Temperatura kapljevine kod porasta se pritisaka gotovo i ne mijenja,  $t_0 \approx t_5 \approx t_6$ . To znači, da u  $Ts$ -dijagramu

pri temperaturi  $T$ . Ovu paru ekspandiramo u ekspanzionom stroju adijabatski do 2. Izobarno-izotermnim odvođenjem topline u kondenzatoru postizavamo stanje 3 kod temperature  $t_0$  i pritiska  $p_0$  a ovo stanje odbiremo tako, da nadovezanom adijabatskom kompresijom u kompresoru  $KC$  upravo dobijemo vrelu vodu

gramu točke 5 i 6 padaju skoro zajedno. I u  $Pv$ -dijagramu prekrivaju se praktično donja granična kružnica, adijabata kapljevine 56 i izoterna kapljevine  $t_0$ , te sve padaju u jednu vertikalnu liniju i to približno u os ordinata. Tako je rad pumpe  $L_p$  predočen površinom  $56mn \approx$  površina  $54 mn$ . Kako je  $v_2 \approx v_6 \approx v_4 \approx v'$  to je taj vrlo mali rad pumpe

$$L_p = (P - P_0) v' \text{ mkg/kg} \quad (300)$$

Da bi se voda mogla isparavati mora se ona prethodno pri visokom pritisku  $p_6 = p$  ugrijati od niže temperature  $t_6 = t_0$  na višu  $t = t_4$ . To se postizava tako, da je predgrijemo u posebnom predgrijivaču, ili da je pumpamo u hladnom stanju u kotao, gdje se miješa sa vrućom kotlovskom vodom. Ovo je naravno nepovratni proces.

Obzirom na iskorištenje topline ovaj je pojednostavljeni proces lošiji od CARNOT-ovog. Iz 1 kg pare dobivamo doduše više rada, ali ga naplaćujemo s većim potroškom topline u kotlu.

Za CARNOT-ov je proces

$$AL_E = i_1 - i_2; AL_K = i_4 - i_3 \quad (301)$$

$$AL_c = AL_E - AL_K = i_1 - i_2 - (i_4 - i_3). \quad (302)$$

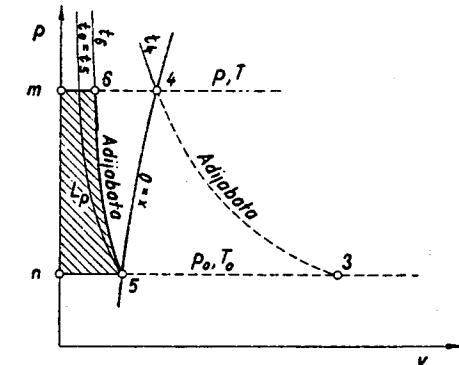
Toplinu dovodimo duž promjene stanja 41, a predočena je površinom  $41ab$ , sl. 99. Dovedena je toplina

$$Q_c = i_1 - i_4 \quad (303)$$

U kondenzatoru odvodimo toplinu od 2 do 3 kod  $p_0 = \text{konst}$ , površina  $23ba$ , pak je

$$Q_{oc} = i_2 - i_3 \quad (304)$$

Za CARNOT-ov je proces osim toga



Sl. 102. Rad pojne pumpe.

a

$$AL_c = Q_c - Q_{oc}$$

$$\eta_c = \frac{AL_c}{Q_c} = \frac{T - T_0}{T}$$

Za pojednostavljeni je proces bez kompresora  $AL_K = 0$  a time po (302)

$$AL = i_1 - i_2, \quad (305)$$

tako da je rad koji se može dobiti iz 1 kg ovdje veći nego CARNOT-ov. No i dovedena toplina je također veća.

Vodu stanja 6 mora se kod  $p = \text{konst}$  preko 4 do 1 ugrijati i ispariti. Zbog  $i_6 \approx i_5 \approx i_0$  slijedi

$$Q = i_1 - i_6 \approx i_1 - i_5 \quad (306)$$

To odgovara površini 641ac. I u kondenzatoru moramo odvoditi više topline nego kod CARNOT-ovog procesa

$$Q = i_2 - i_5 \quad (307)$$

To je površina 25ca. S druge je strane

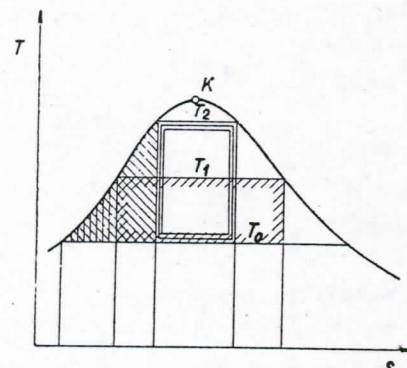
$$AL = Q - Q_0 = \text{površina } 4125 = i_1 - i_2.$$

Kod ovih procesa je srednja temperatura dovođenja topline  $T_m$  niža od topline isparivanja  $T$ . Razlog je u tome, što predgrijavanje vode 64 teče kod nižih temperatura, nego li isparivanje 41. Zato je termički stepen djelovanja ovog parnog procesa

$$\eta = \frac{AL}{Q} = \frac{T_m - T_0}{T_m}$$

lošiji nego li kod CARNOT-ovog procesa, koji se odvija između istih temperatura  $T$  i  $T_0$ .

Što je viša temperatura  $T$  to je povoljniji i  $\eta$ . No tim viši postaju i pritisci tako da se stroj mora čvršće graditi. Što se gornja temperatura približava više kritičnoj točki, to utjecaj ne-CARNOT-ovog dijela procesa na srednju temperaturu  $T_m$  dovođenja topline postaje jači, sl. 103.



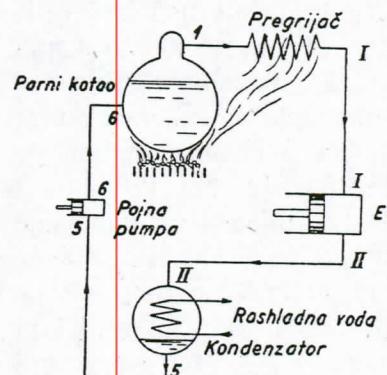
Sl. 103. Utjecaj kotlovnog pritiska.

### Pregrijavanje pare

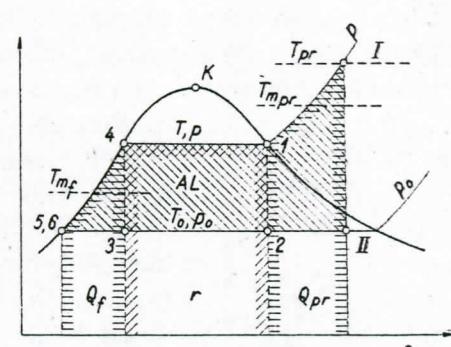
Da bi se izbjeglo visoke pritiske, a da dobijemo ipak visoke temperature, vodimo paru po izlasku iz sabirača pare kotla u posebni pregrijivač, gdje se para kod stalnog pritiska pregrijava, sl. 104. i 105. Pregrijivač grijemo obično sa vrućim plinovima izgaranja koji nadolaze iz kotla. Toplina proizvodnje za 1 kg pare je

$$Q = i_I - i_6 \quad (308)$$

Ona se sastoji iz topline kapljevine  $Q_f = i_4 - i_6$ , i iz topline isparivanja  $Q_r = i_1 - i_4$ , te iz topline pregrijanja  $Q_{pr} = i_I - i_1$ .



Sl. 104. Parno postrojenje s pregrijivačem



Sl. 105.  $T_s$ -dijagram za sl. 104.

Izvedemo li s parom gore razmotreni kružni proces pri čem se potroši rad pumpe  $L_p$ , to dobivamo

$$L = L_E - L_p; \quad L_p \approx 0 \quad (309)$$

$$AL \approx AL_E = i_I - i_{II}$$

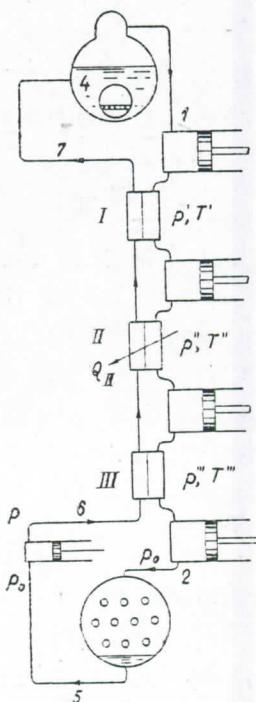
Toplina odvedena pari u kondenzatoru je  $Q_0$

$$Q_0 = i_{II} - i_5 \quad (310)$$

Iskorištenje se topline pregrijavanjem pare poboljšava, budući da srednja temperatura dovođenja topline  $T_{m_{pr}}$  u pregrijanom dijelu linije  $p = \text{konst}$  leži više nego li u zasićenom području, sl. 105. No poboljšanje nije naročito, budući da je kod uobičajenih temperatura pregrijanja toplina pregrijanja  $Q_{pr}$  razmjerno malena. Glavna je prednost primjene pregrijane pare u tome,

što se smanjuju toplinski gubici nepovratnih procesa kod ulaska pare u cilindar stroja, t. zv. gubici punjenja i gubici na stijenkama o čemu se govori opširnije u stupcu „problemi parnog stroja”.

Prema izloženome vidimo, da postrojenje jednog parnog stroja u termodinamičkom smislu obuhvaća ove osnovne elemente, koji se ne mogu mimoći: parni kotao, ekspanzionski stroj kao parni stroj običnog govora, kondenzator te kompresionski stroj obično degeneriran u pojnoj pumpi. Kod stroja koji ne prekidno radi moraju svi ovi elementi postojati. Naravno da njihova tehnička izvedba može u raznim slučajevima biti različita. Tako se na pr. ekspanzionski stroj može izvesti ili kao stupni parni stroj, ili kao parna turbina. Kod ispušnih strojeva bez građenog kondenzatora preuzet će okolišna atmosfera zadatak potonjega. Ispušna para kondenzirat će negdje u okolini, pasti će kao kiša i uzet će se kao voda iz bunara za napajanje kotla. Da li se pri tom baš iste vodene molekule vraćaju u optok parnog stroja, naravno da nije bitno. Isto tako nije ni vrsta pojne pumpe važna. Ova može biti izvedena kao stupna pumpa ili kao parna duvaljka (injektor) i t. d.



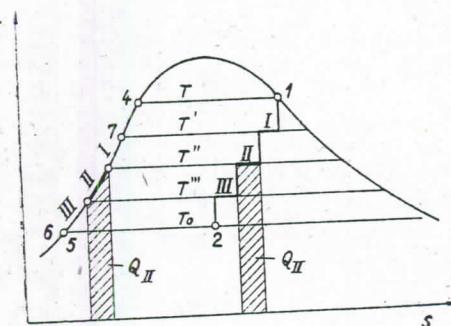
Sl. 106. Regenerativno grijanje vode

**Regenerativno predgrijavanje vode** Što je viši pritisak u kotlu to jače se očituje nepovoljni utjecaj lijevoga ne-CAR-NOT-ovog dijela parnoga procesa, budući da razlike u temperaturama hladne pojne vode i vruće kotlovske vode s pritiskom rastu te se tako povećavaju gubici zbog nepovratnosti, sl. 103. Znatno se poboljšanje može postići regenerativnim predgrijavanjem vode, kojim se u graničnom slučaju mogu pače otstraniti nepovratnosti. Za pogon sa zasićenom parom prikazan je pripadni uređaj shematski u sl. 106. i

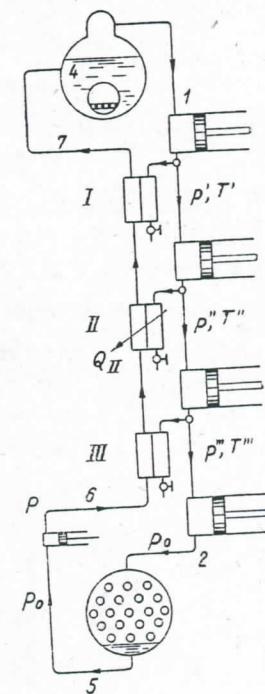
107.1. Pri tom se rad ekspanzionog stroja razdjeli na nekoliko stepena, što se može naročito lako učiniti kod parnih turbin. Eks pandiranu se paru iza svakog stepena upotrijebi za stepenasto predgrijavanje pojne vode, koja se pomoću pojne pumpe dobavlja iz kondenzatora.

U predgrijaćima I do III izmjenjuju se topline  $Q_I$  do  $Q_{III}$ , pri čem je toplina, koju odaje para, jednaka onoj, koju prima pojna voda. U sl. 107.1 ucrtane su površine za toplinu  $Q_{II}$  predgrijaća II. Što je veći broj stepena, to će biti manje temperaturne razlike kod prelaza topline u pojedinim predgrijaćima a prema tome i manji gubici. Linija će promjene stanja pare biti u graničnom slučaju ekvidistan tna donjoj graničnoj krivulji, a stepen će djelovanja ovoga procesa postati jednak CARNOT-ovom. Zato se ova mjeru zove „karnotiziranje“. U praksi se odabire konični broj stepena (do šest stepena). Izbor optimalnih međutemperatura najbolje se može provesti razmatranjem minimuma gubitaka<sup>1)</sup>.

Za pogon parnih turbin vrlo bi se nepovoljno očitovalo duboko zalaženje pare u zasićeno područje, jer velika količina vlage mehanički razara lopatice. Zato se regenerativno predgrijavanje u praksi modificira tako, sl. 107.2 da se kroz predgrijaće ne provodi čitava



Sl. 107.1 Ts-dijagram za sl. 104.



Sl. 107.2 Regenerativno grijanje u praktičkoj izvedbi

<sup>1)</sup> J. Šel, Der Regenerativprozess im Is-Diagramm. Wärme 64 (1941), 135.

radna para, već se od ove i za svakog stepena odvaja tek onoli dio, koji će kod svoje potpune kondenzacije pri dotičnom međupritisiku  $p'$ ,  $p''$  it. d. potpuno namiriti odnosne topline  $Q_I$ ,  $Q_{II}$  i t. d. dotičnih predgrijaca  $I$ ,  $II$ , i t. d. Ovako nastali kondenzati odvode se onda direktno u kondenzator, a da ne prolaze više kroz daljnje stepene ekspanzionog stroja, i tako bez potrebe ne ovlažuju paru. Radni se odnosi time tek neznatno mijenjaju u poredbi sa prije opisanim postupkom.

**Tok proračuna** Za proračunavanje izmijenjenih toplina i izvršenog rada za proces parnoga stroja već smo gore dali neke izraze. Rad, koji se može dobiti iz 1 kg pare, iznosi

$$AL = i_1 - i_2 \text{ kcal/kg}$$

1 KS (konjska snaga) izvrši u jednom satu rad  $1 KSh = 3600 \cdot 75 \text{ mkg}$  pak je prema tome 1 KSh ekvivalentna  $\frac{3600 \cdot 75}{427} = 632 \text{ kcal}$  ili

$$1 KSh = 632 \text{ kcal} \quad (311)$$

a analogno

$$1 kWh = 1,36 KSh = 860 \text{ kcal} \quad (312)$$

Da nam zadani proces parnoga stroja izvrši rad od 1 KSh, mora se potrošiti  $D \text{ kg}$  pare

$$D = \frac{632}{AL} = \frac{632}{i_1 - i_2} \text{ kg/KSh} \quad (313)$$

Veličinu  $D$  zovemo specifičnim potroškom pare stroja.

Za proračune je pored početnog stanja  $1$  potrebno poznavati i stanje  $2$ . Ovo ćemo odrediti kod pritiska  $p_2 = p_0$  preko sadržaja pare  $x_2$  a pomoću entropija prema (277)

$$x_2 = \frac{s_2 - s_0'}{s_0'' - s_0'}$$

Zbog adijabatske je ekspanzije  $s_2 = s_1$ , sl. 108. tako da sadržaj

pare  $x_2$  a prema tome i entalpiju  $i_2$  možemo kod zadanog polaznog stanja lako odrediti. Daje li račun  $x_2 > 1$ , to znači da ekspanzija završava u pregrijanom području, na pr. točka  $II$ , pa račune ne možemo provesti sa sadržajem pare  $x$ . Ovdje bismo morali temperaturu  $t_{II}$  odrediti pokušavanjem po (298) iz poznate entropije  $s_{II} = s_1$ . To bi bilo vrlo zamorno, pak ćemo se u tom slučaju poslužiti jednadžbom adijabate za pregrijanu paru

$$Pv^\nu = P_1 v_1^\nu = \text{konst}; \quad \text{ili } v = v_1 \left( \frac{p_1}{p} \right)^{\frac{1}{\nu}}$$

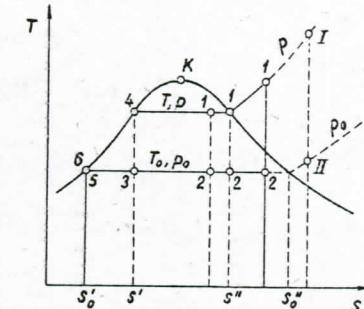
odakle prema (185) dobivamo rad procesa parnoga stroja

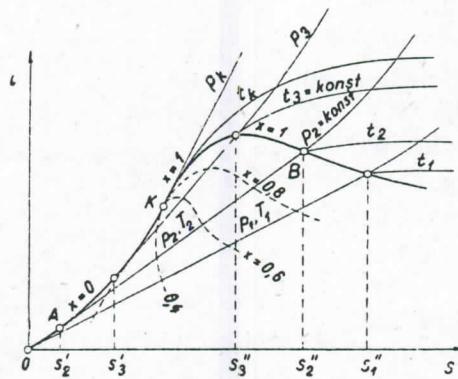
$$L = \frac{\nu}{\nu - 1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\nu - 1}{\nu}} \right] \quad (314)$$

U pregrijanom je području do gornje granične krivulje  $\nu = 1,3$ , dok je u zasićenom području  $\nu = 1,135$ . Ovu se promjenu adijabatskog eksponenta kod prelaza iz pregrijanog u zasićeno područje nesmije previdjeti!

**Is-dijagram Mollier-a** Svi se ovi proračuni mogu znatno jednostavniti upotrebom *is*-dijagrama, kojega je predložio MOLLIER, a koji se po njemu u literaturi ukratko naziva MOLLIER-dijagram<sup>1</sup>). Unesemo li za pojedina stanja pripadne entalpije  $i$  iznad entropije  $s$ , to će svakom stanju tijela odgovarati po jedna točka u *is*-dijagramu. Tako se svako stanje preslikava u dijagram jednom točkom. Budući da se stanja pare obično zadavaju pritiskom  $p$  i temperaturom  $t$  (kod pregrijane pare) ili pak sa  $p$  i  $x$  (kod mokre pare), to će biti od prednosti u dijagram ucrtati izobare, izoterme i linije istog sadržaja pare  $x$  sl. 109.

<sup>1</sup>) R. Mollier, Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. 7. Auflage. (Berlin 1932). Prvi puta objavljeno pod naslovom Neue Diagramme zur Technischen Wärmelehre, Z. d. Vereins Deutscher Ingenieure 48 (1904), str. 271.





Sl. 109. is-dijagram Mollierova

Zato je koeficijent nagiba tangente svake izobare u bilo kojoj točci dijagrama jednak absolutnoj temperaturi dotičnog stanja. Kako je u zasićenom području za  $P = \text{konst}$  i temperatura  $T = \text{konst}$ , to su izobare zasićenog područja prema (315) pravci. Što je veći pritisak zasićenja to su zbog više temperature i ovi pravci strmiji. Izobare zasićenog područja prema tome nisu više paralelne, nego lepezaste. U pregrijanom području su izobare približno eksponencijalne linije. Na graničnoj liniji prelaz izobare iz zasićenog u pregrijano područje teče bez loma, budući da se temperatura a prema (315) i koeficijent nagiba kod ovog prelaza granične linije samo postepeno mijenja.

Pripadne vrijednosti entalpije  $i$  i entropije  $s$  uzimamo za crtanje dijagrama i za granične linije parnim tabelama. Za pregrijano područje proračunat ćemo  $i$  i  $s$  za zadane vrijednosti  $p$  i  $t$  prema (297) i (298), pak spojimo jedamput točke istih pritisaka u izobare a drugi put točke jednakih temperatura u izoterme. Izoterme pregrijanog područja su kod niskih pritisaka, gdje se para približno vlada kao idealni plin, skoro identične sa linijama  $i = \text{konst}$ . Prema tome one tu leže skoro paralelno s osi apscisa. No u blizini kritičke točke to više nije tako. Kritičko stanje nije više predviđeno najvišom točkom zasićenog područja. Štaviše, izobara je kritičke točke najstrmija od svih izobara zasićenog područja. Sve izobare kapljevitog stanja poklapaju se kod vodene pare sa donjom graničnom krivuljom.

I u ovom dijagramu toku adijabate u smjeru ordinata, budući da je za njih  $s = \text{konst}$ . Tok izobara odredit ćemo iz izraza

$$Tds = di - AvdP$$

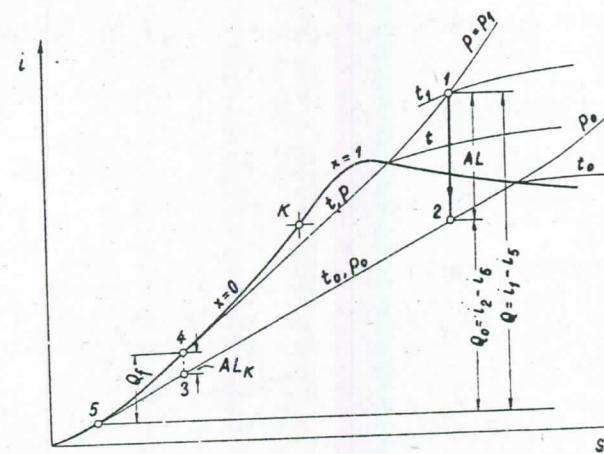
Odvale se dobiva za  $P = \text{konst}$ , t. j. za  $dP = 0$ , koeficijent nagiba izobare

$$\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_P = T \quad (315)$$

Linije istog sadržaja pare  $x$  naći ćemo istim razmatranjem kao kod  $Ts$ -dijagrama, i to tako da izobarne dužine  $AB$ , sl. 109. podijelimo u omjeru  $x$ .

Naročita prednost  $is$ -dijagrama očituje se u tome, da se izvršeni rad i izmijenjene topline prikazuju jednostavno kao dužine, a ne kao površine, kako je to bilo u  $Ts$ -dijagramu.

Proces parnoga stroja prikazan u sl. 108. preslikava se u  $is$ -dijagram prema sl. 110. Rad  $AL$  dobivamo u ekspanzionom cilindru pak se on zbog  $AL = i_1 - i_2$  predočuje ucrtanom dužinom. To isto vrijedi i za toplinu  $Q$  kojom se proizvodi para kao i za toplinu kondenzatora  $Q_0$ . Obje se topline može izmjeriti kao dužine kako je to u slici prikazano. Za slučaj da postoji i kompresioni cilindar, može se i rad  $AL_K$  očitati kao dužina u dijagramu, sl. 110.



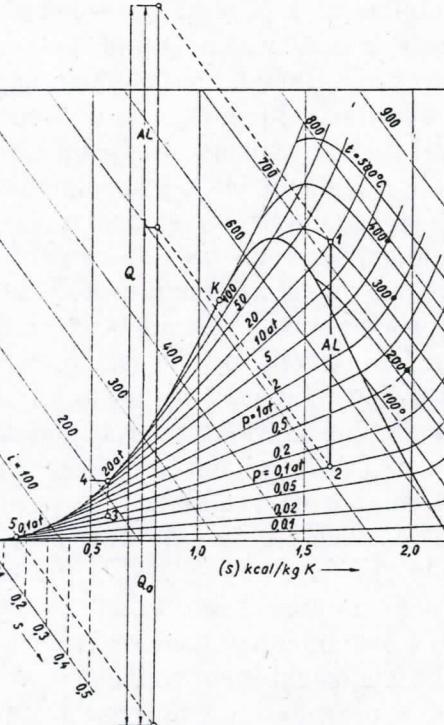
Sl. 110. Proračun pomoću Mollier-ova is-dijagrama.

Proračun parne turbine se danas jedva može zamisliti bez primjene  $is$ -dijagrama. U tu se svrhu često ucrtavaju i izohore  $v = \text{konst}$ , da bi se kod raznih promjena stanja mogli odrediti volumeni bez posebnog računa. Izohore leže nešto strmije od izobara.

$is$ -dijagram za vodenu paru u smjeru je izobara vrlo rastegnut. Da bi se dobilo dovoljno veliko mjerilo i na dijagramu

s ne prevelikom površinom papira, obično se predočuje samo ono područje, koje se najviše upotrebljava, a to je otprilike područje pare desno od kritičke točke. No po prijedlogu MOLLIER-a može se površina slike bolje iskoristiti, ako se upotrijebi kosokutni koordinatni sustav. U tu svrhu možemo na pr. nagnuti os apscisa. Za takav dijagram, sl. 111. vrijede naravno ista pravila kao i prije, jedino s razlikom, da linije  $i = \text{konst}$  nisu više horizontalne. U priloženom dijagramu, sl. 111. kao i u velikom prilogu na kraju knjige, nagib je apscise odabran tako da izoterma zasićenja za  $t_0 = 0^\circ\text{C}$  leži nekako horizontalno. Mjerilo nagnute osi apscisa možemo naravno projicirati u horizontalnu ( $s$ ) - os, vidi sl. 111. Time se ne mijenja tok linija  $s = \text{konst}$ . a pri tom je suvišno nagnuti originalnu apscisu  $s$  uopće ucrtati.

Za brojčane se račune naročito u raspladnoj tehnici mnogo upotrebljavaju dijagrami u kojima je po MOLLIER-u nanesena entalpija  $i$  iznad pritiska  $p$ , ili još češće iznad  $\log p$ .



Sl. 111. Kosokutni  $is$ -dijagram.

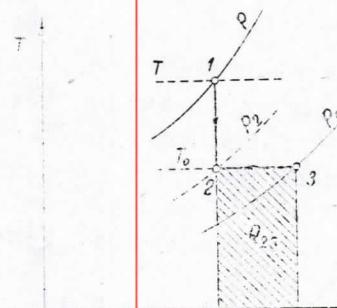
#### Tehnička radna sposobnost.

U vezi sa MOLLIER-dijagramom proučit ćemo pitanje, koliko se korisnog rada može u najpovoljnijem slučaju dobiti iz neke tvari, koju trajno dobavljamo kod stalnog pritiska  $p$ , dok ovu istu ali u stroju istrošenu tvar istiskujemo u atmosferu protiv atmosferskog pri-

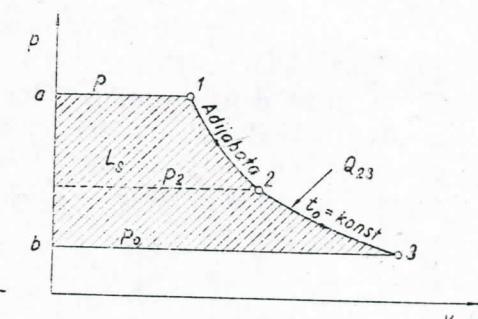
ćenja  $t_0 = \text{konst}$ .

tiska. Takav slučaj imamo na pr. kod parnog stroja, kojemu iz kotla dobavljamo svježu paru, a iz kondenzatora pumpamo kondenzat u otvoreni bunar. Taj najveći korisni rad nazvat ćemo „tehničkom radnom sposobnosti medija“ ili ukratko njegovom radnom sposobnosti<sup>1)</sup>.

Najveći mogući rad dobit ćemo onda kad radnu tvar prevedemo potpuno povratnim načinom iz početnog stanja  $P_1, t_1$  u konačno stanje  $P_0, t_0$ , pri čem ovo konačno stanje mora biti u ravnoteži s okolinom. Usisat ćemo količinu od na pr. 1 kg tvari kod  $p = \text{konst}$  u radni cilindar, točka 1, sl. 113. Adijabatskom se ekspanzijom do 2 ovdje postizava ponajprije okolišna temperatura  $t_0$ , sl. 112. Nadovezanom izotermnom ekspanzijom



Sl. 112. Povratno izjednačenje stanja s okolinom.



Sl. 113.  $Pv$ -dijagram za sl. 112.

postizava se u 3 također i okolišni pritisak  $p_0$ . Toplinu  $Q = Q_{23}$ , sl. 112. koja je potrebna za izotermnu ekspanziju oduzimamo okolini. Budući da je sada radni medij potpuno istrošen, to ga iz cilindra istiskujemo, linija 3b, sl. 113. Zbog sasvim povratnih procesa dobili smo najveći korisni rad  $L_s$  (radna sposobnost), koji je uopće moguć. Taj rad predočen je površinom a12b, sl. 113, t. j. integralom

<sup>1)</sup> U (158) nije se radilo o najvećem radu neke tvari, koja neprekidno nadolazi kod stalnog pritiska, već o mogućem radu jedne jedamput zadane količine tvari. Razlika između oba problema očitovat će se u radovima potiskivanja i istiskivanja

$$L_s = - \int_1^3 v dP = - \int_1^2 v dP - \int_2^3 v dP$$

Po prvom je glavnom stavku (193)

$$Q = i_3 - i_1 - A \int_1^3 v dP = i_3 - i_1 + AL_s$$

Radnoj se tvari dovodi toplina samo između stanja 2 i 3, i to kod  $T_0 = \text{konst}$ , pak je

$$Q = T_0 (s_3 - s_2).$$

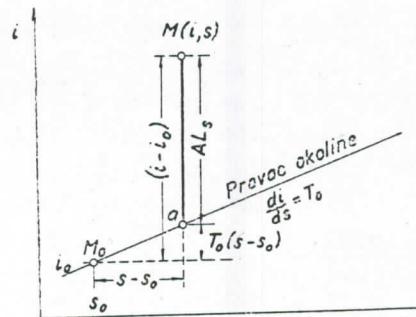
Zbog adijabatske je ekspanzije  $s_2 = s_1$ , a time

$$AL_s = i_1 - i_3 - T_0 (s_1 - s_3).$$

Ovaj izraz pišimo u obliku

$$AL_s = i - i_0 - T_0 (s - s_0), \quad (316)$$

gdje s indeksom  $_0$  ukazujemo na stanje radne tvari kod okolišnog pritiska  $p_0$  i kod okolišne temperature  $T_0$ . Veličine bez indeksa odnose se na stanje dobavljene tvari kod pritiska  $p = \text{konst}$ . To bi na pr. odgovaralo svježoj pari pred strojem.  $AL_s$  je radna sposobnost, t. j. najveći mogući rad, koji možemo dobiti iz 1 kg ove tvari koja struji, i koja nadolazi kod  $p = \text{konst}$ .



Sl. 114. Radna sposobnost  $AL_s$  u  $is$ -dijagramu

<sup>1)</sup> „Točka okoline“  $M_0$  kod vodene pare je kapljevita voda temperature  $T_0$  jer kod obične okolišne temperature ne može postojati vodena para kod pritiska  $p_0 = 1 \text{ at}$ . Kod vodene se pare pravac okoline praktički poklapa s izotermom zasićenja  $T_0$ .

tamo kao dužinu  $Ma$ . To slijedi neposredno iz (316). Tako možemo kod zadanoj stanja vodene pare ili neke druge tvari, koja struji, odrediti radnu sposobnost, a da se i ne pitamo kako će stroj raditi. Padne li točka  $M$  ispod pravca okoline, to  $L_s$  postaje negativno, pak se u tom slučaju troši rad. To znači da će se za održavanje strujanja potrošiti više rada za to, da se tvar progura (odnosno da se otsiše) nego li se može dobiti rada prevođenjem ove tvari u okolišne stanje <sup>1)</sup>.

Pojam radne sposobnosti vrlo je pogodan, da njime ocjenimo savršenost raznih kontinuiranih procesa obzirom na preobrazbu energije. Kad procesi teku sasvim povratno, mora dobiti ven radna sposobnost odvedenih tvari, u koju moramo naravno uračunati i dobiveni mehanički rad, biti jednaka radnim sposobnostima dovedenih tvari, pri čem ne smijemo zaboraviti na radne sposobnosti dovedenih i odvedenih toplina s pripadnim temperaturama. Kad se naprotiv pojavljuju nepovratnosti, sveukupna će se radna sposobnost sudionika u toku procesa umanjiti, pak je ovo smanjenje neposredna mjerma za gubitke, koji se više nikakvim mjerama i sretstvima ne mogu ispraviti. Kod ocjene se raznih važnih tehničkih procesa pokazalo, da ima takvih, koji teku razmjerno povoljno, a među njih spadaju i parni strojevi, ali da ima i takvih koji su i kod najpažljivijeg provođenja sasvim neočekivano loši. Tako se na pr. za grijanje prostorija, kao za proces od svjetskog značenja, troši i u najboljim ogrjevnim sistemima dvadeseterostruka količina goriva od one, koja bi pri istoj izolaciji prostorija bila teoretski potrebna.<sup>2)</sup> Ovdje postoji nuda, da će se veći dio nepovratnosti moći svladati primjenom grijanja odušnom parom ili pak pomoću dizalice topline, koja ima mnogo izgleda. Svladavanje ostalih nepovratnosti moći će se ostvariti tek onda, kad se pronađe povratni način procesa izgaranja. U niže navedenoj brojčanoj tabeli navedeni su stepeni dobrote za neke od ovih tehničkih procesa<sup>3)</sup>. S tim su u vezi i razlaganja u odlomku „Stupanj nepovratnosti“ ove knjige.

<sup>1)</sup> Vidi stupac „Parna duvaljka“.

<sup>2)</sup> Tu izlučujemo grijanje odušnom parom protutlačnih strojeva koje je znatno povoljnije.

<sup>3)</sup> Bošnjaković, Příčiny plytvání energii, Strojnický obzor, Prag 18 (1938.) str. 97. Isti, Kampf den Nichtumkehrbarkeiten! Archiv f. Wärme-wirtsch. u. Dampfkesselwesen 19 (1938.) str. 1

Tehnički proces	Stupanj dobrote (Stupanj povratnosti)
Kalorička centrala . . . . .	0,3
Turbogenerator . . . . .	0,8
Parni kotao . . . . .	0,35
Ložište (potpuno izgaranje) . . .	0,65
Prelaz topline u parnom kotlu . . .	0,65
Plinski generator (miješani plin čišćen i ohlađen) . . . . .	0,7
Grijanje prostorija . . . . .	0,05
Aparati za razlučivanje (destilacija alkohola, tekućeg uzduha i t. d.)	0,1

### Problemi parnoga stroja

U cilindru nekog parnog stroja predaje para cilindarskom stапу indicirani rad  $L_i$ , koji je manji nego li rad  $L$  računan prema (305). Taj indicirani rad  $L_i$  može se odrediti poznavanjem dimenzija cilindra i mjerljem broja okretaja stroja, indiciranjem, te planimetriranjem indikatorskog dijagrama. Teoretski rad  $L$  može se opet odrediti iz mjerenoг potrošaka pare  $D \text{ kg/h}$  i iz mjerenoг stanja pare na ulazu u cilindar, te kondenzatorskog pritiska. Pomoću tih veličina definiramo indicirani stepen djelovanja stroja

$$\eta_i = \frac{L_i}{L}$$

Izraz  $(1 - \eta_i) = \frac{L - L_i}{L}$  obuhvaća gubitke koji su prouzrokovani nepovratnim procesima za vrijeme rada u cilindru. Ove gubitke možemo podijeliti na slijedeći način:

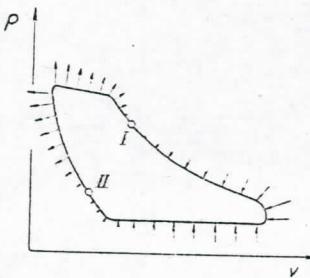
- Izmjena topline između pare i stijenke cilindra
- Nepotpuna ekspanzija
- Nepotpuna kompresija
- Gubici zbog prigušivanja
- Nepotpuna izolacija i trenje stapa (beznačajno)

Budući da sveukupni gubitak  $(1 - \eta_i)L$  može biti znatan, to je uputno, da pojedine uzročnike potanje promotrimo.

**Gubici na stijenkama** Pri ekspanziji mijenja se temperatura pare. Stijenke nastoje da se prilagode toj temperaturi. Tokom periode punjenja nailazi svježa para na stijenke, koje su se kod prethodne periode nešto ohladile. Griju se ponajprije unutrašnja površina cilindra i površina stapa. Provodenjem topline ugrijavaju se zatim i dublji slojevi. Potrebnu količinu topline dobavlja para. Ove se pojave odigravaju u dijelovima sekunde. Kod pogona zasićenom parom ostaje joj temperatura kod nepromjenljivog pritiska punjenja konstantna i para se odavajući toplinu kondenzira na stijenkama. Volumen joj se smanji od  $1$  na  $1'$ , sl. 117., pak u prostor punjenja može ući više pare, nego li u slučaju, da nije bilo tog ohlađivanja. Na taj način povećava se potrošak pare. Za vrijeme ekspanzije temperatura pare pada, a svoju najnižu vrijednost postizava za vrijeme istiskavanja pare iz cilindra. Same stijenke postale su za vrijeme punjenja i u prvom dijelu ekspanzione periode vruće, pak su na kraju ekspanzije toplije nego li ohlađena para. Usljed toga mijenja se sad smjer prelaza topline tako, da istaložena vlaga na stijenkama počinje isparivati te stijenke na taj način griju paru.

Ova promjena smjera prelaza topline ne počinje na svim mjestima stijenke istovremeno, jer su se razna mesta stijenke različito ugrijala. Tako je na pr. površina štetnoga prostora bila od početka u dodiru sa svježom parom, dok se pojedini dijelovi cilindarskog plašta gibanjem stapa otkrivaju tek na kraju ekspanzije, te tako samo kratko vrijeme izmjenjuju toplinu i to s parom koja se je već ohlađila. Time postaju te pojave vrlo zamršene.

Oba položaja stapa, kod kojih se smjer sveukupnog prelaza topline mijenja, možemo u indikatorskom dijagramu označiti točkama I i II, sl. 115. U dolnjem se dijelu dijagrama predaje toplina od stijenke na paru, a u gornjem dijelu od pare stijenkama,



Sl. 115. Izmjena topline na stijenkama cilindra

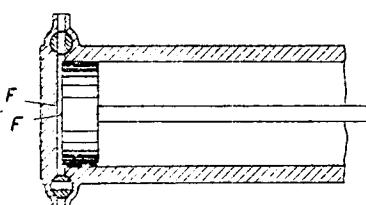
što je prikazano strijelicama. U ustaljenom stanju primaju stijenke u jednoj periodi isto toliko topline, koliko je u drugoj odavaju, pak je  $Q_{I,II} = Q_{II,I}$ . To znači da se prema vani, kod dobre izolacije cilindra ne odvodi nikakva toplina. No prelaz topline između tjelesa raznih temperatura nepovratni je proces, a takav je neminovno skopčan s gubicima rada.

**Štetni prostor** Prelaz topline se vrši najživahnije na početku punjenja, jer su tu temperaturne razlike najveće. Iako se zapremina štetnog prostora može pažljivom konstrukcijom svesti na najmanju mjeru, to će mu veličina površine

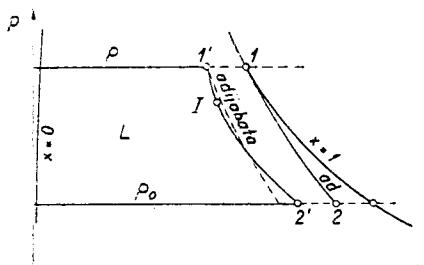
ipak ostati konačno velika. Ova površina će u najpovoljnijem slučaju biti barem tako velika kao dvostruka čeona ploha stapa, sl. 116. K njoj će još pridoci površina dovodnih kanala od zapornog organa do samog cilindra. Ova potonja površina bit će vrlo različita, već prema tome

da li je zgodnom konstrukcijom zaporni organ smješten tik uz cilindar kao u sl. 116., ili što je iz konstruktivnih razloga mnogo čeće, da li je odmaknut od cilindra. Ove se velike površine moraju ugrijati svježom parom. Nove hladne površine oslobađaju se i griju tek postepeno kako se stap miče na desno, tako da se tu toplina izmjenjuje mnogo polaganije. Razmjerno veliku površinu štetnoga prostora oplakuje najvrucija para. Ta površina bit će prema tome otsudna za smjer

i veličinu izmjene topline. Iz ovog će razloga preokret u prelazu topline nastupiti skoro nakon početka ekspanzije, pak se je zato i obratiše prelaza topline  $I$  u  $Pv$ -dijagramu, sl. 115. pomaklo prema gore, t. j. u područje viših temperatura. Linijsa ekspanzije teče iznad  $I$  strmije, a ispod  $I$  polo-



Sl. 116. Štetne površine



Sl. 117. Posljedice djelovanja stijenki

žitije od adijabate. U sl. 117. predviđuje dužina  $11'$  smanjenje volumena pare zbog ohlađivanja kod punjenja.  $1'12'$  ekspanzionira je linija, koja otstupa od adijabate.

**Veličina gubitaka na stijenkama** Gubici na stijenkama mogu se vrlo zgodno prikazati u  $Ts$ -dijagramu, sl. 118. Suha se para kod ulaska u cilindar ohlađi pri  $p = \text{konst}$  i  $t = \text{konst}$  od stanja  $1$  do  $1'$ , gdje započinje ekspanzija. U prvom se dijelu ekspanzije pari i dalje još odvodi toplina. Točka  $I$  na ekspanzionirnoj liniji je obratište, gdje se mijenja smjer izmjene topline pare i stijenke. Duž promjene stanja od  $I$  preko  $2'$  te  $2$  do  $0$  dovodi se dakle toplina od stijenke pari. Sama stijenka vraća se nakon svakog izvršenog radnog hoda stapa (postup i ustup stapa) u svoje početno stanje, pak joj se zato mora baš toliko topline odvesti koliko joj se je prije dovelo. Zato mora biti  $po-vršina (11'1ad)$  jednaka  $po-vršini (I2'0'0'aI)$  a prema tome i  $po-vršina (11'I2'2)$  jednaka  $po-vršini (200'd)$ . Para, koja bi stroj bez gubitaka napustila u stanju  $2$  izlazi sada iz cilindra sa stanjem  $0$ . Prirast entropije, prouzrokovani nepovratnim prelazom topline predviđen je u sl. 118. veličinom  $\Delta s$ . Pitamo se, koliki je gubitak rada. Za parni proces bez gubitaka na stijenkama bilo bi

$$AL = Q - Q_0,$$

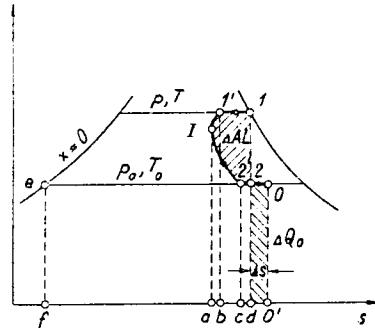
a za onaj sa gubicima na stijenkama

$$AL' = Q - Q'_0.$$

Kako se u oba slučaja proizvodi ista para, to se troši i jednaka toplina  $Q$ . Prema tome je gubitak na radu

$$\Delta AL = AL - AL' = Q'_0 - Q_0 = \Delta Q_0.$$

Radni je gubitak jednak višku topline, koji se odvodi u kondenzatoru. U prvome se slučaju odvodi u kondenzatoru toplina  $Q_0$ ,

Sl. 118. Gubici na stijenkama prikazani u  $Ts$ -dijagramu.

jednaka površini ( $e 2 d f$ ), a u drugom slučaju  $Q'_0$  jednaka površini ( $e 0 0' f$ ). Dakle je  $\Delta Q_0$  jednako površini ( $2 0 0' d$ ). Gore smo spomenuli, da su iscrtkane površine jednakе, pa se gubitak rada  $\Delta AL$  može predočiti i jednom i drugom. Po slici je 118

$$\Delta AL = \Delta Q_0 = T_0 \Delta s$$

gdje je  $T_0$  temperatura kondenzatora (okolišna temperatura). Ovaj izraz već u jednom od prijašnjih poglavlja izveli sasvim općenito za nepovratne procese. Treba posebno naglasiti da gubici na stijenkama u parnom stroju prema izloženome nemaju nikakve veze sa dobrom ili lošom izolacijom cilindra.

Zanimivo je zapitati se o čemu ovisi količina topline  $Q_s$ , koja se izmjenjuje sa stijenkama. Ova će ovisiti o razlici temperature ( $t - t_s$ ) pare i stijenke, o površini  $F$  cilindarskih stijenki, o trajanju  $\tau$  izmjene topline, te konačno o nekom koeficijentu prelaza topline  $\alpha$ , tako da je

$$Q_s = \alpha \cdot \tau \cdot F (t - t_s).$$

U toj formuli su sve veličine promjenljive, zato bismo zapravo morali napisati jednu diferencijalnu jednadžbu. No mi od toga odustajemo, jer se zadovoljavamo u nuždi s kvalitativnim razmatranjem, budući da zbog zamršenosti problema nismo u stanju ovaj proučiti kvantitativno.

Prikladnu mjeru izmijenjene topline dobivamo, kad  $Q_s$  svedemo na 1 kg pare. Nije naime svejedno, da li se ista količina topline izmjeni sa stijenkama kod malog ili kod velikog punjenja cilindra. Tako dobivamo

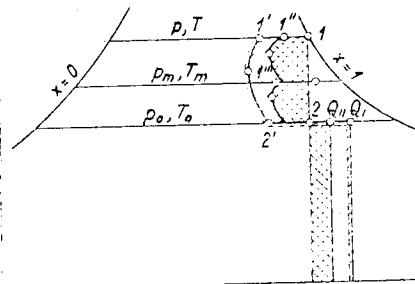
$$\frac{Q_s}{G} = \alpha \cdot \tau \cdot \frac{F}{G} (t - t_s),$$

gdje  $G$  prikazuje paru koja radi u cilindru.

**Prednost pregrijane** Koeficijent prelaza topline  $\alpha$  ovisan je kako pare o stanju strujanja tako i o sastavu pare. Tako će se na pr. stijenkama predati mnogo topline kad para kondenzira, jer se u tom slučaju velika toplina kondenzacije oslobođa rošenjem na samoj stijenci. U tom je slučaju  $\alpha$  vrlo veliko. Pojavljuje li se naprotiv samo suhi prelaz topline, pri kojem

nema kondenzacije ili isparivanja na stijenci, to će se red veličine prelaza topline kretati oko samo  $\frac{1}{100}$  od onoga kod mokrog prelaza. To će biti onda, kad će temperatura površine stijenke biti viša od temperature zasićenja pare, tako da se na stijenci ne može taložiti voda. Može se dakle dogoditi, da će u strojevima, koji rade s pregrijanom parom, biti izmjena topline sa stijenkama lošija nego li kod zasićene pare. To će biti uvek onda, kad će se barem u jednom dijelu radnog procesa „mokri“ prelaz topline zamijeniti sa suhom izmjenom topline. Povrh toga pokazuju točnija razmatranja, da se kod pregrijane pare i u slučaju kondenzacije taloži na stijenkama manje vode nego li kod mokre pare. Entalpija je pregrijane pare veća od entalpije mokre pare istoga pritiska, a stijenka se može u oba slučaja ugrijati samo na temperaturu zasićenja, tako dugo dok je prekrivena filmom kapljevine. Zbog veće entalpije pregrijane pare taloži se za odavanje iste količine topline manja količina kondenzata. Posljedica je toga, da će se u drugom dijelu ekspanzije na stijenkama naći manje vlage. Tako će kod daljnog smanjivanja pritiska moći ispariti manje vlage sa stijenki, pak će se ove u toj periodi morati manje ohladiti nego li kod zasićene pare. U slijedećoj radnoj periodi bit će temperatura stijenke iz tog razloga viša pak će kondenzirati još manje pare, i na taj način će se znatno smanjiti kolebanja temperature površine stijenke nego li kod zasićene pare. Time naravno postaju gubici na stijenkama mnogo manji, te je to glavna prednost primjene pregrijane pare.

**Dvostepena ekspanzija** Preostali članovi kao  $\tau$  i  $\frac{F}{G}$  posljednje jednadžbe, u prvom su redu ovisni o konstruktivnoj izvedbi stroja, kao što su broj okretaja, štetni prostor i t. d. pak u to ne želimo ovdje potanje ulaziti. Tek ćemo spomenuti, da su gubici topline još u velikoj mjeri ovisni o temperaturnoj razlici ( $t - t_s$ ). Ova je to veća, što je veća razlika ulazne i izlazne temperature pare, ( $t_1 - t_0$ ). Provđemo li ekspanziju pare u dva stepena, t. j. u dva cilindra, koji su uključeni jedan iza другогa, to se sveukupni temperaturni pad razdjeli na ( $t_1 - t_m$ ) i ( $t_m - t_0$ ),

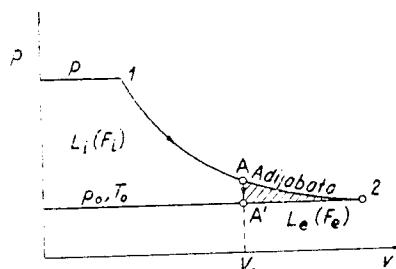


Sl. 119. Gubici na stijenkama kod dvostepenog stroja

dočen površinom ( $1' 2' 2$ ). Kod rasčlanjivanja na tro- ili četverostruku ekspanziju bit će ovi gubici još manji. To je pored jednolikosti hoda jedna od glavnih prednosti udvojenih strojeva. Ova razmatranja vrijede načelno i za pregrijanu paru, tek što su ovdje gubici na stijenkama bili već sami po sebi manji.

**Nepotpuna ekspanzija** Da bi se smanjile dimenzije cilindra u normalnom se pogonu odustaje od potpune ekspanzije pare. Volumen se cilindra  $V_e$  izvodi manji od  $V_2$ , sl. 120. koji bi bio potreban za potpunu ekspanziju, tako da tik pred otvaranjem ispušnog organa, u cilindru vlada još neki veći pritisak. Ispušna para nadire bez vršenja rada u

ispušnu cijev u kojoj vlada pritisak  $p_0$ . Na taj se način gubi u dijagramu radna površina  $A 2 A'$ . Odustajanje od ovog rastegnutog ali površinom neznatnog šiljka dijagrama svakako je opravданo, jer kod manjeg cilindra bit će i gubici zbog trenja manji. Krajnja točka 2 leži obično u području zasićenja pak je pritisak u kondenzatoru  $p_0$  označen kon-



Sl. 120. Gubitak zbog nepotpune ekspanzije

denzatorskom temperaturom. Rad, koji bi para sa stanjem  $A$  mogla još izvršiti, naći ćemo polaganjem adijabate  $A 2$  kao

sl. 119. Stijenke svakog cilindra ovakvog „udvojenog stroja“ izložene su kolebanjima temperature, koja iznose tek polovicu one, koju bismo zabilježili u samo jednom cilindru. Zato će i radni gubitak udvojenog stroja, predočen dvostruko iscrtkanom površinom biti mnogo manji nego li kod jednostavnog stroja, za koji je taj gubitak pre-

površinu  $F_e$ , a ta je predočena crtkanom površinom ( $A 2 A'$ ). To važi bez obzira na to, kojem se zakonu ekspanzije pokoravala linija  $1 A$ . Izlazni gubitak zgodno je svesti na teoretski rad pare pak je

$$\zeta_e = \frac{L_e}{L} = \frac{L_e L_i}{L L_i} = \frac{L_i L_e}{L L_i} = \eta_i \frac{L_e}{L_i} = \eta' \frac{F_e}{F_i} \quad (317)$$

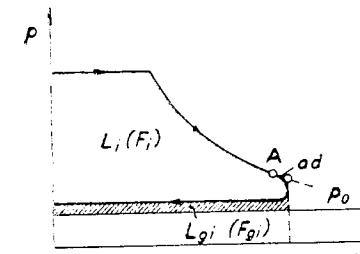
Ovdje označuje  $F_i$  površinu stvarnog indikatorskog dijagrama. Površine  $F_e$  i  $F_i$  određuju se planimetrimanjem snimljenih indikatorskih dijagrama.

Gubitak zbog ekspanzije bit će naročito osjetljiv kod jakog opterećenja stroja, jer se u tom slučaju radi s velikim punjenjem, pak para može u predviđenom ekspanzionom prostoru samo vrlo nepotpuno eksplandirati. Pri tom će krajnji pritisak ekspanzije u  $A$ , sl. 120. biti znatan. Tehnički je rad parnog stroja s takvom nepotpunom ekspanzijom

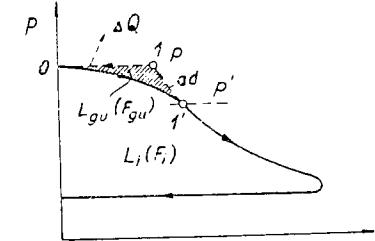
$$AL_n = i_1 - i_A + A(P_A - P_0)v_A,$$

kako se možemo lako uvjeriti iz sl. 120.

**Gubici prigušivanja** U kanalima cilindra i razvodnih organa para se pri strujanju više ili manje prigušuje. Iz tog razloga mora se ispušni organ otvoriti još prije obratišta stapa, točka  $A$ , sl. 121., ako želimo da se cilindar



Sl. 121. Gubitak prigušivanja na izlazu



Sl. 122. Gubitak prigušivanja na ulazu

pravovremeno isprazni. Pritisak istiskivanja ležat će nešto više od  $p_0$  jer se mora svladati otpor strujanja u ispušnom organu. Taj gubitak prigušivanja kod ispuha predočen je iscrtkanom površinom  $F_{gi}$ , pak je kao i prije

$$\zeta_{gi} = \eta_i \frac{F_{gi}}{F_i} \quad (318)$$

Drugo je kod prigušivanja pri ulazu pare u cilindar. Zbog prigušivanja linija punjenja ne teče više kod  $p = konst$ , već nekako prema sl. 122. U 1' zatvori se ulazni organ. Pritisak na početku ekspanzije u 1' bit će prema tomu  $p'$  a ne  $p$ . Isrtkanu površinu ovdje ne možemo neposredno uzeti za mjerilo gubitka prigušivanja jer para od stanja 1' može pri kasnijoj ekspanziji još vršiti rad. Zato je gubitak prigušivanja na ulazu nešto manji nego li je prikazano površinom  $F_{gu}$ . Po (239) radni je gubitak jednak višku topline odvedenom u kondenzatoru  $\Delta Q_0 = T_0 \Delta s_{gu}$ . Prirast entropije  $\Delta s_{gu} = s_1' - s_0$  procesa prigušivanja od 0 do 1' možemo pronaći sa nekim zamišljenim povratnim vraćanjem od 1' u 0. Tako bismo na pr. mogli adijabatskom kompresijom 1' 1 i izotermnim (kod zasićene pare ujedno i izobarnim) odvođenjem topline i istiskivanjem od 1 do 0 postići početno stanje 0 povratnim načinom. Za promjenu stanja od 0 do 1' i od 1' preko 1 natrag do 0 potrošit će se rad  $L_{gu}$ , sl. 122., budući da je to lijevi proces. Budući da se vraćamo u početno stanje 0, treba ekvivalent toga rada odvesti u obliku topline  $\Delta Q = AL_{gu}$ , što se vrši tzmeđu 1 i 0 pri  $T = konst$ , uz prepostavku, da se kod procesa od 0 do 1' nije izmjenjivala nikakva toplina, što je istovjetno sa zanemarivanjem izmjene topline sa stijenkama. Tako dobivamo zbog adijabatskog uvjeta  $s_1' = s_1$

$$\Delta Q = T(s_1 - s_0) = T(s_1' - s_0) = T\Delta s_{gu}$$

ili zbog  $\Delta Q = AL_{gu}$

$$\Delta s_{gu} = \frac{AL_{gu}}{T}$$

Tako dobivamo gubitak prigušivanja na ulazu

$$T_0 \Delta s_{gu} = \frac{T_0}{T} AL_{gu}$$

ili u omjeru spram teoretskog rada

$$\zeta_{gu} = \frac{T_0 \Delta s_{gu}}{AL} = \frac{T_0}{T} \frac{AL_{gu}}{AL} \frac{L_i}{L_i} = \eta_i \frac{T_0}{T} \frac{F_{gu}}{F_i} \quad (319)$$

Ako se protivno od pretpostavke za vrijeme punjenja izmjenjuje toplina sa stijenkama, rezultat se ne mijenja.

**Nepotpuna kompresija** Da bismo pritisak ostatka pare u štetnom prostoru mogli neposredno prije punjenja po mogućnosti prilagoditi pritisku svježe pare, ne istiskujemo čitavu paru iz cilindra, već jedan dio ( $V_3$ ) ostavljamo u cilindru. Od 3 do 4, sl. 123., nastojimo ovu malu količinu pare adijabatski komprimirati. No zbog djelovanja stijenki ova se linija izobličuje u 3' 4'. Izobličenje je puno upadljivije nego li kod ekspanzione linije, budući da je omjer površina stijenke prema zatvorenoj maloj težini pare ovdje vrlo nepovoljan. Zato svježa para pritiska  $p$  nadire u prostor gdje vlada pritisak  $p_4$ , što je naravno skopčano sa radnim gubitkom. Taj radni gubitak zbog nepotpune kompresije pare predočen je slično kao i kod prigušivanja na ulazu površinom  $F_k = površina (4' 4'')$ , i to preko izraza

$$\zeta_k = \eta_i \frac{F_k}{F_i} \frac{T_0}{T} \quad (320)$$

Pri tom točke 4' i 4'' leže na adijabati, to jest  $s_{4''} = s_{4'}$ .

**Ukupni gubitak**

Svi ovi gubici razlogom su da je indi- rani rad stroja  $L_i$  manji od teoretskoga  $L$ .

**Ukupni gubitak**

$$(1 - \eta_i) = \zeta_{st} + \zeta_e + \zeta_{gu} + \zeta_{gi} + \zeta_k \quad (321)$$

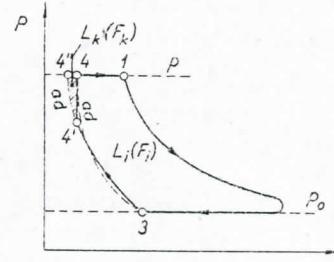
gdje  $\zeta_{st}$  označuje udio gubitaka na stijenkama. Ako je po sl. 124. površina gubitka kod punjenja

$$F_u = F_{gu} + F_k$$

a ona izlaznog gubitka

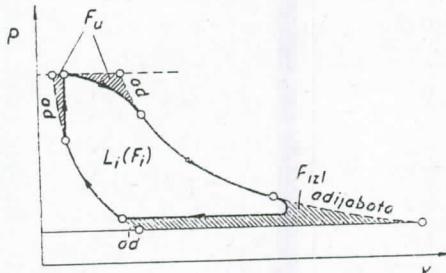
$$F_{izl} = F_e + F_{gi},$$

to je



Sl. 123. Gubitak zbog nepotpune kompresije

$$(1 - \eta_i) = \zeta_{st} + \eta_i \frac{F_{izl}}{F_i} + \eta_i \frac{F_u}{F_i} \frac{T_0}{T} \quad (322)$$



Sl. 124. Izgubljene površine u  $Pv$ -dijagramu

Ako znamo veličinu štetnog prostora stroja mogu se u indikatorski dijagram ispitivanog stroja ucrtati potrebne adijabate i na taj način odrediti površine  $F_u$  i  $F_{izl}$ , koje su u sl. 124. označene crtkanjem. Kako se i  $\eta_i$  može odrediti iz pokusa, to se iz (322) može pronaći veličina gubitaka na stijenkama kao ostatak

$$\zeta_{st} = 1 - \eta_i \left( 1 + \frac{F_{izl}}{F_i} + \frac{F_u}{F_i} \frac{T_0}{T} \right) \quad (323)$$

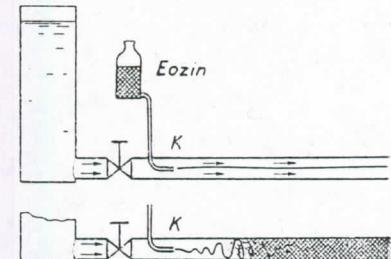
Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet  
MATEMATIČKI FAKULTET  
BIBLIOTEKA

Broj \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_

## STRUJANJE

Procesi strujanja vrlo su važni za tehničke procese u parnoj turbini i u turbokompresoru, u difuzorima, cijevnim vodovima i t. d. a da i ne govorimo o tehnici zrakoplovstva, i raketnim pogonima, koji zadnje vrijeme zadobivaju na važnosti. Pri tom ćemo se pretežno osvrnuti na toplinsku stranu ovih tehničkih problema. Spoznaje iz čiste nauke o strujanju primjenit ćemo samo u onom opsegu koliko je potrebno za shvaćanje spomenutih pitanja.

Jednim se jednostavnim pokusom možemo uvjeriti, da postoji sređeno (laminarno) i nesređeno (turbulentno) strujanje. Kroz podužu staklenu cijev pustimo strujati vodu, sl. 125. Kroz usku kapilaru  $K$  dodajemo struji neko sredstvo za intenzivno bojenje kao što je na pr. eozin ili fuksin i t. d. Kod polaganog strujanja vode opazit ćemo da se duž cijevi provlači tanka crvena nit koja se ne miješa sa ostalom vodom. Otvor kapilare ne mora ležati u osi cijevi. Ovakvo strujanje zovemo sređeno — laminarno —, jer se pojedina strujna vlakna međusobno ne miješaju. Povećamo li međutim brzinu vode iznad nekog iznosa, to ćemo nedaleko iza šiljka kapilare opaziti naglo miješanje crvene niti s ostalom vodom, i voda se oboji jednolično crveno preko čitavog presjeka cijevi. U tom se slučaju strujna vlakna miješaju već na kratkom putu, strujanje je nesređeno — turbulentno. Brzina strujanja, pri kojoj se laminarno strujanje prebacuje u turbulentno, ovisna je o tvari i o dimenzijsama cijevi. U vrlo uskoj cijevi, na pr. u nekoj kapilari, turbulentacija će se pojaviti mnogo teže nego li u jednoj širokoj.

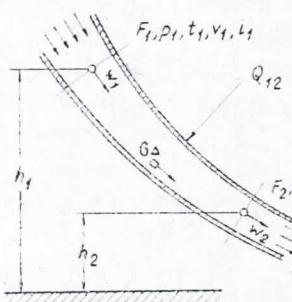


Sl. 125. Pokus za predočivanje laminarnog i turbulentnog strujanja putu, strujanje je nesređeno — turbulentno. Brzina strujanja, pri kojoj se laminarno strujanje prebacuje u turbulentno, ovisna je o tvari i o dimenzijsama cijevi. U vrlo uskoj cijevi, na pr. u nekoj kapilari, turbulentacija će se pojaviti mnogo teže nego li u jednoj širokoj.

Iako su obje vrste strujanja za tehniku vrlo važne, to za naše probleme ipak u prvom redu dolazi u obzir turbulentno strujanje. Ovo se međutim ne da ni izdaleka tako egzaktno definirati kao laminarno. To je i razumljivo. Kod laminarnog strujanja imaju sve čestice istoga presjeka brzine istoga smjera i to u smjeru cijevne osi. Kod turbulentnog strujanja trenutačne brzine pojedinih čestica mogu biti sasvim različite, pače i natražne. To zato, jer se čestice mogu miješati, samo ako se gibaju i poprečno na os. Te trenutačne brzine mijenjat će se i vremenski, pak smo prisiljeni računati s nekom prosječnom brzinom u jednom presjeku.

**Izbor presjeka strujanja** Nepoznavanje pojedinačnih brzina otežava nam i izbor najprikladnijeg presjeka strujanja. Kod sređenog strujanja odabrat ćemo neki presjek tako, da je na svakom mjestu okomit na smjer lokalne brzine. U tom slučaju izabiremo za presjek jednu niveau plohu strujanja. Kod nesređenog strujanja upućeni smo međutim na to, da takav presjek polažemo više prema osjećaju, sl. 126.

Kad smo se u nekoj cijevi ili mlaznici odlučili za dva presjeka  $F_1$  i  $F_2$ , to u ustaljenom stanju mora kroz  $F_1$  strujati ista količina tvari  $G$  kg/sek u jedinici vremena kao i kroz



Sl. 126. Strujanje kroz cijevi

presjek  $F_2$ . Veličinu  $G$  zovemo protokom struje. Ako je stanje tvari preko čitavog presjeka  $F_1$  donekle jednolično, tako da možemo računati s razumnim prosječnim vrijednostima  $p_1$ ,  $t_1$ ,  $v_1$ ,  $u_1$ ,  $i_1$ , i t. d., to je sekundni volumen tvari, koja prostrujava kroz presjek

$$V_1 = Gv_1; V_2 = Gv_2 \text{ [m}^3/\text{sek}] \quad (324)$$

Prosječne brzine strujanja u obim presjecima jesu

$$w_1 = \frac{V_1}{F_1}; w_2 = \frac{V_2}{F_2} \text{ [m/sek]} \quad (325)$$

Ova prosječna brzina struje u jednom presjeku  $F$  predviđa se dakle izrazom

$$w = \frac{\int w_N dF}{F} \quad (326)$$

gdje  $w_N$  znači onu komponentu trenutačne brzine čestice iz elementa presjeka  $dF$ , koja je okomita na  $F^1$ .

**Jednadžba neprekidnosti (kontinuiteta)** Iz (324) i (325) slijedi

$$\frac{w_1 F_1}{v_1} = \frac{w_2 F_2}{v_2} = \dots = \frac{w F}{v} = G = \text{konst.} \quad (327)$$

kao jednadžba kontinuiteta ili neprekidnosti za ustaljena (stacionarna) strujanja, kod kojih je u svim presjecima protok  $G = \text{konst}$ . Da bi smo i ovdje mogli promatrati količinu tvari od 1 kg/sek, uvedimo pojam specifičnog presjeka  $f$

$$f = \frac{F}{G} \text{ [m}^2 \text{ sek/kg]} \quad (328)$$

Specifični presjek  $f$  je onaj, kroz koji bi pod inače istim okolnostima strujalo upravo 1 kg/sek tvari. Time se jednadžba kontinuiteta (327) pojednostavljuje

$$\frac{wf}{v} = 1 \quad (329)$$

Recipročna vrijednost od  $f$  je specifični protok  $\frac{G}{F} = \frac{1}{f}$  kg/m<sup>2</sup> sek

Specifični protok količina je tvari, koja u jednoj sekundi struji kroz 1 m<sup>2</sup> presjeka.

**Razmjena energije** Kod strujanja su za toplinske probleme od velike važnosti pitanja energetične prirode. Promatramo li otsječak cijevi između odabranih presjeka  $F_1$  i  $F_2$  to za strujanje u tom dijelu mora vrijediti prvi glavni stavak.

<sup>1)</sup> Samo za one presjeke kod kojih su prave brzine čestica okomite za  $F$ , davat će  $w$  ujedno i srednju vrijednost pravih brzina. Tako na pr. kod paralelnog strujanja, t. j. kod laminarnog strujanja u valjkaste cijevi, kad kao presjek odaberemo onakav, koji je okomit na smjer strujanja.

U ustaljenom stanju vladaju u presjecima  $F_1$  i  $F_2$ , sl. 126. stalni pritisci  $p_1$  i  $p_2$ . Prinadolaženju od  $V_1 [m^3/sek]$  mora se protiv pritiska  $p_1$  izvršiti rad utiskivanja  $L_1 = P_1 V_1 [mkg/sek]$ , vidi također (188). Kod istiskivanja od  $V_2 [m^3/sek]$  pod pritiskom  $p_2$  dobiva se iz ovog otsječka cijevi rad istiskivanja  $L_2 = P_2 V_2$ . Dovodi li se osim toga cijevi između  $F_1$  i  $F_2$  toplina  $Q_G [kcal/sek]$  (za  $G kg/sek$ ) to po prvom glavnem stavku mora biti

$$Q_G = U_2 - U_1 + A(E_{k2} - E_{k1}) + A(E_{p2} - E_{p1}) + AL_{12} \quad (330)$$

Ovdje su  $E_k$  kinetička,  $E_p$  potencijalna energija količine  $G$  protoka. Bit će zgodnije, da ovu jednadžbu svedemo na 1 kg protoka. Zato uvodimo  $Q_G = G Q_{12}$  gdje se  $Q_{12}$  odnosi na 1 kg tvari.

Osim toga je

$$E_{k2} - E_{k1} = G \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - 1 \right)$$

nadalje  $L_{12} = (P_2 V_2 - P_1 V_1) = G(P_2 v_2 - P_1 v_1)$

te  $E_{p2} - E_{p1} = G(h_2 - h_1)$ ,

gdje  $(h_2 - h_1)$  označuje visinsku razliku težišta presjeka  $F_1$  i  $F_2$ . Time se dobiva

$$Q_{12} = u_2 - u_1 + A \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} - \frac{h_2 - h_1}{2g} \right) + A(h_2 - h_1) + A(P_2 v_2 - P_1 v_1).$$

Uvođenjem  $i = u + APv$  možemo to jednostavnije pisati

$$Q_{12} = i_2 - i_1 + A \left( \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + h_2 - h_1 \right). \quad (331)$$

Odavle dobivamo za dva vrlo bliza presjeka  $F_1$  i  $F_2$  diferencijalnu jednadžbu

<sup>1)</sup> To vrijedi samo približno. Za izračunavanje kinetičke energije trebalo bi se zapravo uzeti sumu kvadrata pravih brzina svih čestica jednoga presjeka. Ova suma manje se ili više razlikuje od kvadrata prosječne komponente brzine definirane u (326). Ovdje promatramo samo takva strujanja kod kojih se ta razlika može zanemariti.

$$dQ = di + A \frac{wdw}{g} + Adh. \quad (332)$$

Ovdje je  $Q_{12}$  količina topline, koja se izvana dovodi protočnom mediju i to na njegovom putu od presjeka  $F_1$  do  $F_2$ . Jednadžbe (331) i (332) važe naravno i za strujanje sa trenjem, budući da kod izvoda nismo pretpostavili neki povratni proces.

Izvana dovedena toplina  $Q_{12}$  nije jedina, koja se dovodi pojedinim česticama struje. Kod strujanja se naime zbog pojave trenja proizvodi stanovita količina topline trenja, koja se također dovodi pojedinim česticama. Toplina trenja nastaje uglavnom u graničnom sloju na stijenci a posljedica joj je, da se smanjuje kinetička energija pojedinih čestica. Zamislimo sada, da jedan sitni promatrač sjedne u česticu težine  $G_\Delta$ , pa da s tom česticom proputuje kroz cijev. Svojim instrumentima opazit će on neku promjenu stanja čestice na putu između  $F_1$  i  $F_2$ , jer se toj čestici na tom putu sveukupno dovodi toplina  $(Q_\Delta) = Q_\Delta + AL_{R\Delta}$ . Od sveukupne topline  $(Q_\Delta)$  koju dovodimo česticu, otpada udio  $Q_\Delta [kcal]$  na toplinu koju izvana dovodimo cijevi, a udio  $AL_{R\Delta}$  na toplinu proizvedenu trenjem. Ovdje je  $L_R [mkg]$  trenjem utrošeni rad. Znak  $\Delta$  ukazuje na sitnost promatrane čestice. I za ovu jednu česticu važi opet prvi glavni stavak, kojega za tu česticu pišemo u obliku

$$(Q_\Delta) = Q_\Delta + AL_{R\Delta} = G_\Delta (i_{\Delta 2} - i_{\Delta 1}) - AG_\Delta \int_i^2 v_\Delta dP.$$

Sumiramo li to preko svih čestica, koje protječu u jedinici vremena, to dobivamo

$$\Sigma Q_\Delta = Q_G = G Q_{12}; \quad \Sigma G_\Delta (i_{\Delta 2} - i_{\Delta 1}) = G (i_2 - i_1);$$

$$\Sigma G_\Delta \int_i^2 v_\Delta dP = G \int_i^2 vdP; \quad \Sigma AL_{R\Delta} = AL_{RG} = AGL_{F_{12}},$$

gdje su  $i_1, i_2, v$  već gore spomenute razumne prosječne vrijednosti u dotičnim presjecima. Za 1 kg se dobiva

$$Q_{12} + AL_{R12} = i_2 - i_1 - A \int_i^2 vdP \quad (333)$$

ili pak za dva vrlo bliza presjeka  $F_1$  i  $F_2$

$$dQ + AdL_R = di - AvdP \quad (334)$$

Ova jednadžba daje nam vezu između promjene stanja tvari koja struji, dovedene topline  $Q$  i topline trenja  $AL_{R12}$ . Kombiniramo li (333) sa (331), to slijedi

$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + (h_2 - h_1) + L_{R12} + \int_i^2 vdP = 0 \quad (335)$$

te

$$\frac{w dw}{g} + dh + dL_R + vdP = 0 \quad (336)$$

Logaritmiramo li još jednadžbu kontinuiteta (329), to slijedi

$$\ln v = \ln w + \ln f$$

Diferenciramo li to, to se dobiva

$$\frac{dv}{v} = \frac{df}{f} + \frac{dw}{w} \quad (337)$$

Jednadžbe (331) do (337) vrijede i za strujanja sa pojavama trenja. Tako se na pr. iz (331) za neko prigušivanje u horizontalnoj i izoliranoj cijevi, pri čem je  $Q_{12} = 0$ ,  $h_1 = h_2$  i kod malih razlika brzina ( $w_2^2 \approx w_1^2$ ), dobiva poznati nam izraz za prigušivanje  $i_2 = i_1 = \text{konst}$ .

#### Strujanje kroz mlaznice

Ponajprije ćemo promotriti strujanje kroz kratke cijevi, kroz mlaznice i slično. Mlaznice (sapnica) od velike su važnosti za parne turbine i turbokompresore, za parne duvaljke, za naprave za mjerenje plinova i t. d. U takvim je slučajevima  $Q = 0$  i  $h_2 = h_1$  pak se dobivaju ove jednadžbe

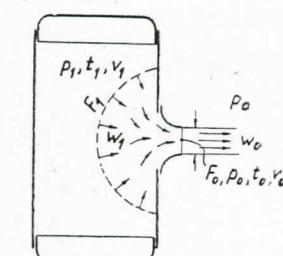
$$A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2 \quad (338)$$

$$AL_{R12} = i_2 - i_1 - A \int_i^2 vdP \quad (339)$$

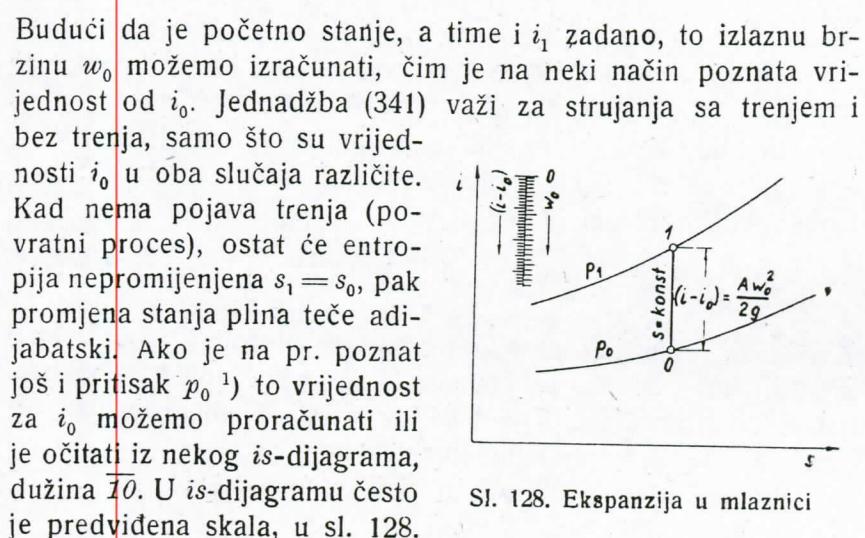
$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} + \int_i^2 vdP + L_{R12} = 0 \quad (340)$$

Iz spremnika, koji je napunjen plinom ili parom pritiska  $p_1$ , struji kroz otvor (mlaznicu) sa slobodnim presjekom  $F_1$  medij u atmosferu pritiska  $p_a$ , sl. 127. Zamislimo si unutar spremnika neki presjek  $F_1$  položen oko otvora mlaznice. Taj presjek je označen crtanom linijom. Sve što prolazi mlaznicom mora proći i ovim presjekom. Kad je površina od  $F_1$  velika prema onoj od  $F_0$  to će se  $w_1$  moći zanemariti prema  $w_0$ , pak je po (338)

$$A \frac{w_0^2}{2g} = (i_1 - i_0). \quad (341)$$



Sl. 127. Istjecanje plina.



Sl. 128. Ekspanzija u mlaznici

<sup>1)</sup> Kod jedne skupine strujanja pritisak mlaza  $p_0$  u izlaznom presjeku bit će jednak vanjskom pritisku  $p_a$ . Kod druge skupine strujanja oba pritiska će se znatno razlikovati, vidi daljnja razlaganja.

lijevog gore, na kojoj je s jedne strane nanesena skala pada entalpije ( $i_1 - i_0$ ) a s druge strane skala pripadnih vrijednosti brzina istjecanja  $w_0 = \sqrt{(i_1 - i_0) \frac{2g}{A}}$ . Izmjerom dužine ( $i_1 - i_0$ ) u dijagramu može se odrediti izlaznu brzinu bez ikakvog računa. Izlaznu brzinu kod idealnih plinova možemo odrediti i bez *is*-dijagrama. Kad je  $c_p = \text{konst}$ , vrijedi

$$i = c_p T + \text{konst}$$

$$\frac{A w^2}{2 q} = c_p (T_1 - T_0) = c_p T_1 \left( 1 - \frac{T_0}{T_1} \right).$$

Zbog adijabatske ekspanzije važi (108) pak je u takvom slučaju

$$\frac{A w_0^2}{2g} = c_p T_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} \right] \quad (342)$$

Ova jednadžba vrijedi za strujanje takvih tvari i u takvom području, gdje se može pretpostaviti, da je  $c_v = \text{konst}$ , i da za adijabatu dovoljnom točnosti vrijedi  $Pv^\nu = \text{konst}$ . Osim toga pretpostavljeno je u (342) strujanje bez trenja i bez dovođenja topline.

No kod svakog strujanja pojavljuju se gubici trenja, koji umanjuju ovu teoretsku brzinu. Praktički se to obično uzima u obzir koeficijentom brzine

$$w_0 = \varphi w_{teor} = \varphi \sqrt{\frac{2g}{A} (i_1 - i_0)_{ad}} \quad (343)$$

Indeksom  $ad$  označujemo da se ovdje vrijednost  $(i_1 - i_0)_{ad}$  ima uvrstiti, kao da je promjena stanja tekla adijabatski (bez trenja) do pritiska  $p_0$ . Vrijednost za  $\varphi$  leži obično između 0,98 i 0,95, a opada sa prirastom brzine strujanja.

Prema (340) i (339) za strujanje je bez trenja.

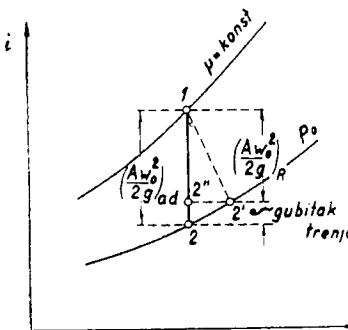
$$\frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = - \int_1^2 v \, dP = \frac{(i_1 - i_2)_{ad}}{A}. \quad (344)$$

Prema tome je prirast kinetičke energije kod strujanja bez trenja jednak radu stupnog parnog stroja bez gubitaka, u kojem bi medij vršio rad između stanja 1 i 2. To zato, jer integral u (334) predviđa površinu  $12ba$ , sl. 130, koja je identična s radnim dijagramom stupnog parnog stroja. Iz tog se razloga može ovdje primijeniti i (314), pak je sa  $w_1 = 0$  i  $w_2 = w_0$

$$\frac{w^2}{2q} = \frac{\kappa}{\kappa-1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \text{ (bez trenja)} \quad (345)$$

Za područje pregrijane vodene pare je  $\alpha = 1,3$  a za zasićeno područje  $\alpha = 1,135$ .

Pomoću koeficijenata brzine  $\varphi$  možemo približno odrediti pravu izlaznu brzinu iz teoretske. No iz tog koeficijenta ne možemo razabrati razlog, zašto je prava brzina manja od teoretske. Tome je razlog, što gubici trenja gutaju jedan dio kinetičke energije. Zbog tog nepovratnog procesa raste entropija čestica i promjena stanja nije više adijabatska. Točke stanja ovakve ekspanzije leže u is-dijagramu na nekoj krivulji  $1'2'$ , sl. 129, koja pada na desno. Budući da (338) važi i za strujanja sa trenjem, to je ovdje sa  $w_1 = 0$

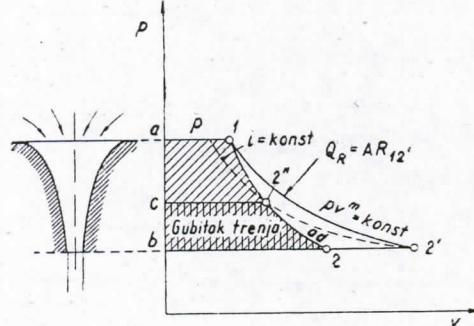


Sl. 129. Ekspanzija s trenjem.

$$A \left( \frac{w_0^2}{2q} \right)_R = (i_1 - i_2) \quad (346)$$

tako da i ovdje možemo odrediti  $m_0$  neposredno iz toplinskog pada između početka i kraja strujanja. Krajnje stanje 2' ne leži doduše više ispod početnog stanja 1 kao stanje 2, već desno od ovoga, ali opet na liniji konačnog pritiska  $p_0$ . Razlika entalpija ( $i_2 - i_2'$ ) pretstavlja gubitak kinetičke energije, koji je prouzrokován trenjem.

Strujanje sa trenjem možemo predočiti i u *Pv*-dijagramu, kad razmislimo slijedeće. Strui se u mlaznici izvana doduše ne dovodi toplina,  $Q = 0$ , ali se ipak svakoj čestici dovodi

Sl. 130.  $Pv$ -diagram strujanja s trenjem

promjena stanja  $12'$  zbog trenja nepovratna. No mi možemo shvatiti izraz ( $i_1 - i_{2'}$ ) u (346) kao rad stapnog parnog stroja s adijabatskom ekspanzijom između entalpija  $i_1$  i  $i_{2'}$ . U tu svrhu potražimo na adijabati, koja prolazi stanjem 1 takvo konačno stanje  $2''$ , da je  $i_{2''} = i_{2'}$ . U tom slučaju predočuje površina  $12''ca$  rad takvog parnog stroja, a prema tome i ekvivalent

energije brzine  $\left(\frac{w_0^2}{2g}\right)_R$ . Treba naravno naglasiti, da je točka  $2''$ ,

koja leži na onoj liniji  $i = \text{konst}$ , koja prolazi točkom  $2'$ , samo pomoćna računska točka, i da ona ne pretstavlja neko fizikalno stanje, koje bi bilo postignuto za vrijeme ekspanzije u mlaznici.

Gore smo prikazali da je energija brzine, koju se može postignuti ekspanzijom bez trenja u mlaznici na pritisak  $p_0$ , predočena površinom  $12ba$ . Zato pretstavlja površina  $2''2bc$  gubitak energije prouzrokovani trenjem. Ovaj iznos energije ne nestaje, već se pretvara u toplinu trenja, koja se odmah dovodi mediju koji struji.

Veličina tog gubitka ovisi naravno o toku prave linije ekspanzije  $12'$ . Što je jače trenje, to ova linija  $12'$  teče položitije i to će točka  $2''$  doći bliže k točci 1. Zgodno je liniju ekspanzije  $12'$  prikazati jednadžbom

$$Pv^m = P_1 v_1^m = \text{konst} \quad (347)$$

ona toplina, koja za vrijeme strujanja nastaje trenjem. Prava linija rastezanja  $12'$  plina, koji struji, teče zbog ovog sekundarnog dovodenja topline položiti je od adijabate  $12'$ , sl. 130. Pitamo se, koja površina  $Pv$ -dijagrama odgovara iznosu energije u (346)? Površina  $12'ba$  to ne može biti, jer je

Veza između eksponenta istjecanja  $m$  i koeficijenta brzine  $\varphi$  nije jednostavna. Tako se na pr. eksponent  $m$  i kod konstantnog koeficijenta  $\varphi$  mijenja sa padom pritiska. I ako su jednadžba (347) i politropska jednadžba (111) formalno slične, to ipak onu prvu nesmijemo smatrati politropom. Politropsko rastezanje pretstavlja naime po definiciji povratnu promjenu stanja, dok u našem slučaju imamo posla s izrazitom pojmom trenja. Zato smo eksponent istjecanja  $m$  i eksponent politrope  $n$  označili raznim znakovima, da bismo i time naglasili ovu razliku.

Prema (314) radna je površina  $12''$  ca uporedbenog procesa stapnog parnog stroja bila

$$L_{12''} = \frac{\kappa}{\kappa-1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_{2''}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] \quad (348)$$

gdje bi fiktivni (umišljeni) pritisak  $p_{2''}$  morao biti poznat. Prema (108) je za idealne plinove za adijabatu  $12''$

$$\frac{T_{2''}}{T_1} = \left( \frac{p_{2''}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

Iz (347) slijedi sa  $Pv = RT$

$$\frac{T_{2'}}{T_1} = \left( \frac{p_{2'}}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} = \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

No kako je  $i_{2''} = i_{2'}$  to mora kod idealnih plinova biti i  $T_{2''} = T_{2'}$  pak je time

$$\left( \frac{p_{2''}}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}}$$

Uvrstimo li to u (342) to dobivamo

$$\left( \frac{w_0^2}{2g} \right)_R = L_{12''} = \frac{\kappa}{\kappa-1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]$$

$$w_{0R} = \sqrt{2g \frac{\kappa}{\kappa-1} P_1 v_1 \left[ 1 - \left( \frac{p_0}{p_1} \right)^{\frac{m-1}{m}} \right]} \quad (349)$$

Ovdje smo nepoznati pritisak  $p_{2''}$  u (348) nadomjestili s poznatim konačnim pritiskom  $p_0$ . Ova jednadžba izvedena je za idealne plinove, no ona daje i za pregrijanu vodenu paru

( $\chi = 1,3$ ) paće i za zasićenu paru ( $\chi = 1,135$ ) dobre približne vrijednosti u koliko se ne nalazi u područje previsokih pritisaka. O tom se možemo uvjeriti kontrolnim računima u  $is$ - odnosno  $Pv$ -dijagramu. Kod prelaza granične linije nesmije se pustiti iz vida, da se ovdje adijabatski eksponent skokimice mijenja. U graničnom slučaju strujanja bez trenja postaje  $m = \chi$ , pak (349) prelazi u (345). U drugom graničnom slučaju  $m = 1$  bit će prema (349)  $\left(\frac{w_0^2}{2g}\right)_R = 0$  a to znači da se čitava energija brzine pretvara u trenje. To odgovara čistom prigušivanju.

**Oblik mlaznice** Do sada nismo pitali, kakav oblik i koje dimenzije moramo dati mlaznici i njenom izlaznom otvoru, da bi se željene brzine, pad pritiska i protočna količina mogli u istinu ustaliti.

Kod neke nestišljive tekućine ( $v = \text{konst}$ ) odgovarati će po jednadžbi kontinuiteta većim brzinama manji presjeci, jer je za taj slučaj po (327)

$$wF = Gv = \text{konst}.$$

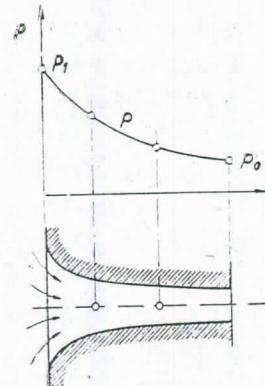
No kod plinova je volumen  $v$  vrlo ovisan o pritisku i o temperaturi, tako da produkt

$$wF = Gv = G \cdot \phi(p, t)$$

nikako ne treba biti konstantan. Tu ne možemo tvrditi, da će prirast brzine uvijek odgovarati suženju presjeka.

Pretpostavimo, da pritisak u mlaznici opada u smjeru strujanja, sl. 131. Ispitati ćemo, kako se mora oblikovati mlaznica, da bi se mogao ispuniti ovaj uvjet. Specifični se volumen  $v$  kod prostruđavanja mlaznice mijenja, kako to propisuje koeficijent istjecanja  $m$ . Za posebni slučaj strujanja bez trenja, mijenja se on adijabatski po formuli  $Pv^\chi = P_1 v_1^\chi$ . Pada li pritisak bezogranično to će volumen bezogranično rasti, sl. 132. Osim toga pripada svakom padu pritiska neki prirast brzine

$$\frac{w^2}{2g} = \frac{i_1 - i_2}{A}$$



Sl. 131. Pad pritiska u mlaznici.

a kod strujanja bez trenja

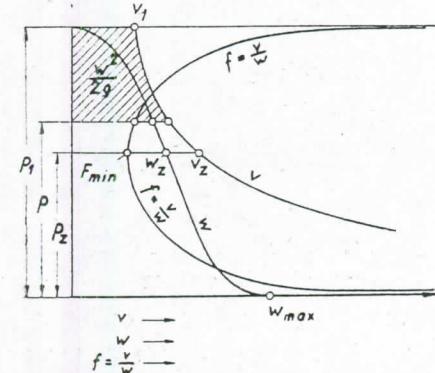
$$\frac{w^2}{2g} = - \int \limits_{P_1}^{P_0} v dP,$$

što je predviđeno iscrtkanom površinom. Ove brzine možemo proračunati pak ih za pripadne pritiske nanijeti kao apscise. Kako je u plinu sadržan samo konačan iznos unutarnje energije, to će i kinetička energija struje moći težiti samo jednoj konačnoj graničnoj vrijednosti, ma kako daleko tekla adijabatska ekspanzija, koja se u graničnom slučaju može protegnuti do potpunog vakuma,  $p_0 = 0$ . Zato i kod strujanja u potpuni vakuum ostaje brzina konačno velika. Ovu najveću brzinu odredit ćemo za idealne plinove i za strujanje bez trenja, kad u (345) uvrstimo  $p_0 = 0$ . U tom je slučaju sa  $P_1 v_1 = RT_1$

$$w_{\max} = \sqrt{2g \frac{\chi}{\chi - 1} RT_1} = \sqrt{2g \frac{\chi}{\chi - 1} \frac{848}{m} T_1} \quad (350)$$

ako ovdje  $m$  predviđuje molekularnu težinu plina. Prema tome je najveća brzina istružavanja u vakuum neovisna od početnog pritisaka. Struji li na pr. stlačeni uzduh ( $R = 29,3$ ,  $\chi = 1,4$ ) bilo kojeg pritiska a s temperaturom okoline ( $t_1 = 20^\circ\text{C}$ ) u potpuni vakuum, to će se teoretski postignuti brzina

$$w_{\max} = \sqrt{2 \cdot 9,81 \cdot \frac{1,4}{0,4} \cdot 29,3 \cdot 293} = \sqrt{588000} = 765 \text{ m/sek.}$$



Sl. 132. Pojave u proširenoj mlaznici.

Sad možemo iz dijagrama proračunati i specifični presjek strujanja  $f = \frac{F}{G}$  i to iz  $f = \frac{v}{w}$ . On je promjenljiv s pritiskom sl. 132., pak začudo pokazuje neki minimum  $f_{\min}$ <sup>1)</sup>. Jer pri  $p = p_1$  je  $v = v_1$  dok je po pretpostavci bilo  $w_1 = 0$ , pak zato mora biti i  $f_1 = +\infty$ ; pri  $p = 0$  je  $v = +\infty$  a  $v = v_{\max}$ , dakle je opet  $f_0 = +\infty$ . Kod konačnih vrijednosti  $v$  i  $w$  mora i  $f$  biti konačno, tako da će linija za  $f$  pokazivati tok, kakav je ucrtan u sl. 132. Veličine stanja, koje se odnose na nazuš presjek  $f_{\min}$ , označit ćemo sa indeksom  $z$  tako na pr.  $p_z$ ,  $v_z$ ,  $w_z$ . Prema tome nailazimo kod plinova, u suprotnosti s nestišljivim kapljevinama, takva stanja strujanja (donji dio sl. 132.) pri kojima je povećanje brzine iznad neke kritičke vrijednosti  $w_z$  postizivo samo proširenjem presjeka strujanja. To postaje shvatljivo, kad uočimo, da prigodom ekspanzije u područje niskih pritisaka ( $p < p_z$ ) volumen plina brže raste od brzine. Ovom povećanom porastu volumena može se dati mjesto samo s prikladnim proširenjem presjeka.

Ove prilike u nazuš presjeku malo ćemo točnije promotriti. Za nazuš presjek važi matematski uvjet minimuma  $df = 0$ ; uvrstimo li to u jednadžbu kontinuiteta (337) to je za presjek strujanja značajno

$$\frac{dv}{v} = \frac{dw}{w} \quad (351)$$

Kod strujanja bez trenja, kod kojeg je  $dh = 0$  i  $dL_R = 0$ , slijedi

$$\frac{wdw}{g} = -vdP \quad (352)$$

Zbog adijabatske je ekspanzije  $Pv^\kappa = \text{konst}$  odakle diferencijom slijedi

$$\kappa Pdv + vdP = 0 \quad (353)$$

Nadomjestimo li ovdje  $dv$  iz (351), a  $vdP$  iz (352) to dobivamo brzinu u nazuš presjeku

$$w = \sqrt{g\kappa Pv}$$

<sup>1)</sup> Sve što važi za specifični presjek  $f$ , važi također naravno i za  $G$  putu veći presjek  $F = Gf$ .

Ovo je ujedno i izraz za brzinu zvuka u plinu, kad se taj plin nalazi u stanju, koje on zaprima u nazušem presjeku. O tom ćemo opširnije govoriti u stupcu „brzina zvuka”. Prema tomu je brzina strujanja na nazušem mjestu jednaka brzini zvuka

$$w_z = \sqrt{g\kappa P_z v_z} \quad (354)$$

Ona ovisi samo o veličinama stanja u nazušem presjeku. Sad možemo odrediti i  $P_z$ . Po (345) i (354) možemo naime pisati

$$\frac{w_z^2}{2g} = \frac{\kappa}{\kappa-1} P_z v_z \left[ 1 - \left( \frac{p_z}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right] = \frac{\kappa P_z v_z}{2}$$

odakle je

$$\frac{v_z}{v_1} = \frac{2}{\kappa-1} \left[ \frac{p_1}{p_z} - \left( \frac{p_1}{p_z} \right)^{\frac{1}{\kappa}} \right]. \quad (355)$$

S druge je pak strane iz  $p_1 v_1^\kappa = p_z v_z^\kappa$

$$\frac{v_z}{v_1} = \left( \frac{p_1}{p_z} \right)^{\frac{1}{\kappa}}$$

odakle sa (355) nakon uređenja slijedi

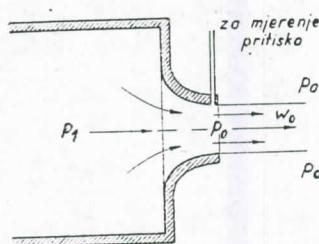
$$\frac{p_z}{p_1} = \left[ \frac{2}{\kappa+1} \right]^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}. \quad (356)$$

Kritični pritisak nekog istjecanja iznosi točno određeni dio početnog pritiska. Ovaj je dio ovisan samo o  $\kappa$  t.j. samo o vrsti plina. Za razne  $\kappa$  dajemo pripadne vrijednosti  $\frac{p_z}{p_1}$  u slijedećoj tabeli

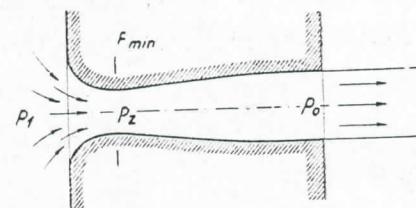
$\kappa =$	1,4	1,3	1,135
$\frac{p_z}{p_1}$	0,530	0,546	0,577

U gornjem dijelu dijagrama, sl. 132., dakle u području  $p > p_z$ ,  $w < w_z$ , ne nalazimo ništa naročito. U ovom se dijelu mora presjek strujanja, t. j. mlaznica, sužavati prema sl. 133. ako želimo postignuti opadanje pritiska a s time i porast brzine. Kolicina  $G \text{ kg/sek}$ , koja protiče mlaznicom, ovisi o veličini izlaznog

otvora  $F_0$  i omjera pritisaka  $\frac{p_1}{p_a}$ . Kad je vanjski pritisak  $p_a$  tako visok da nam uvršten mjesto  $p_0$  u (345) daje izlaznu brzinu  $w_0$ , koja je manja od brzine zvuka, to se tlak u slobodnom mlazu iza mlaznice može izjednačiti s vanjskim pritiskom  $p_a$ , pak će



Sj. 133. Neproširena mlaznica.



Sl. 134. Proširena mlaznica

se i uzvodno u samom otvoru  $F_0$  ustaliti isti pritisak  $p_0 = p_a$ . To važi kako za neku samo suženu mlaznicu, sl. 133., tako i za mlaznicu koja bi bila iz bilo kojeg razloga proširena, sl. 134.

No kad dobijemo izlaznu brzinu  $w_0$  jednaku ili veću od brzine zvuka  $w_z$ , to se vanjski pritisak  $p_a$  ne može više uzvodno izjednačiti s pritiskom  $p_0$  u otvoru. To je u vezi s time, što se neki val pritiska prema izvodima u stupcu „Brzina zvuka“ u nekom mediju ne može širiti beskonačno brzo nego samo s brzinom zvuka. U tom slučaju nastupaju iza otvora zamršene pojave, koje se u glavnom daju svesti ili na nepovratno rasprsnuće oslobođenog mlaza, ili na t. zv. tlačni udar, pri čem na jednom mjestu tlak skokimice poraste uz odgovarajuće naglo smanjenje brzine strujanja. To ovisi o tome, da li je u otvoru pritisak veći od vanjskoga,  $p_0 > p_a$  ili da li je pritisak u otvoru manji od vanjskoga  $p_0 < p_a$ . Kako su obje pojave izrazito nepovratni procesi, spojene su sa radnim gubitkom, koji se očituje u gubitku kinetičke energije. Jednakost pritiska u otvoru i pritisaka napolju,  $p_0 = p_a$  možemo ovdje samo tako postignuti, da mlaznicu dimenzioniramo tako, da joj je izlazni otvor spram naružeg presjeka povećan u točno određenom omjeru. Ovakve vrlo važne mlaznice prvi je primijenio de LAVAL, pošto je problem teoretski bio spoznat već od SAINT - VENANT-a i L.

WANTZEL-a. Kad je mlaznica premalo proširena postaje  $p_0 > p_a$ . Kod prevelikog proširenja ustaljuje se  $p_0 < p_a$ , ili se pak mlaz odlijepi od stijenke mlaznice.

Kad je po (356) pritisak  $p_a$  manji od kritičnog  $p_z$  to se u otvoru jedne samo sužene mlaznice, sl. 133. ustaljuje pritisak  $p_0 = p_z$  bez obzira na to, koliko je malen vanjski pritisak. Jer otvor  $f_0$  neke samo sužene mlaznice pretstavlja ujedno i najuži presjek  $f_{min}$  u kojem vlada stanje  $p_z, v_z$  i u kojem je brzina struje jednaka brzini zvuka  $w_z$ . Mlaz pod pritiskom  $p_0 = p_z$  nadire iz otvora u prostor s nižim pritiskom  $p_a < p_z$  i stvara si ovdje veći presjek tako, da se rasprsne u širi mlaz, pak se tako pritisak u tom mlazu nakon nekoliko talasa izjednači s okolišnjim tlakom  $p_a$ .<sup>1)</sup> Ova pojava nije povratna pak se pad pritiska ( $p_z - p_a$ ) dobrim dijelom gubi i ne može se iskoristiti za odavanje rada. Za računanje kritične brzine  $w_z$  udobnije je veličine  $p_z, v_z$  kritičnog stanja nadomjestiti s veličinama početnog stanja  $p_1, v_1$ . Veličine stanja u najužem presjeku morali bismo naime u svakom slučaju odrediti računski iz polaznog stanja, a ovo je kod nekog strujanja obično zadano. Sa  $P_1 v_1^* = P_z v_z^*$  i sa (356) slijedi iz (354)

$$w_z = \sqrt{2g \frac{\chi}{\chi+1} P_1 v_1} \quad (357)$$

tako da se  $w_z$  može izračunati iz samih podataka polaznog stanja.

Prije nego li proračunamo protočne količine i pripadne presjeke, ispitat ćemo kritične pojave, kad strujanje teče sa trenjem. Za takvo strujanje moraju se ispuniti ove jednadžbe uvjeta: Za nazuši je presjek opet  $df = 0$ , pak važi jednadžba kontinuiteta

$$\frac{d w}{d v} = \frac{w}{v} \quad (358)$$

Prema (332) za takva je strujanja sa trenjem, kod kojih je  $dQ = 0$  i  $dh = 0$

<sup>1)</sup> Vidi na pr. Prandtl, Abriss der Strömungsllehre. (Braunschweig 1931.).

$$\frac{wdw}{g} = -\frac{di}{A} = -\frac{c_p}{A} dT = -\frac{c_p}{AR} (Pdv + vdP) \quad (359)$$

jer je po jednadžbi stanja  $dT = \frac{Pdv + vdP}{R}$ . Za strujanja sa trenjem važi pak s druge strane jednadžba istjecanja  $Pv^m = \text{konst}$  a odavle

$$vdP = -m P dv \quad (360)$$

Iz (358), (359) i (360) odmah slijedi kritična brzina, ako pri-padne veličine stanja označimo sa indeksom  $z$

$$(w_z)_R = \sqrt{\frac{m-1}{\kappa-1} g \gamma P_z v_z} \quad (361)$$

Sad možemo izračunati i kritični omjer pritisaka  $\frac{p_z}{p_1}$ , i to iz (349) i (347) sasvim slično kao kod strujanja bez trenja. Tako se dobiva za strujanje sa trenjem

$$\left(\frac{p_z}{p_1}\right)_R = \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m}{m-1}} \quad (362)$$

I ovdje možemo  $p_z$ ,  $v_z$  u (361) nadomjestiti sa  $p_1$  i  $v_1$  pak do-bivamo

$$w_{z,R} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{m-1}{m+1}} \sqrt{2g \frac{\kappa}{\kappa+1} P_1 v_1} = \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1} \frac{m-1}{m+1}} w_z \quad (363)$$

Zbog pojave trenja raste kritični pritisak dok je kritična brzina manja od one kod adijabatskog strujanja. Sad možemo pristu-piti proračunavanju specifičnog presjeka mlaznice  $\frac{F}{G} = f$  ili pak proračunavanju specifičnog protoka  $\frac{G}{F} = \frac{1}{f}$ . Iz (327), (347) i (349) dobiva se specifični protok u bilo kojem presjeku

$$\frac{G}{F} = \frac{1}{f} = \sqrt{2g \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{P_1}{v_1} \left[ \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{p}{p_1}\right)^{\frac{m+1}{m}} \right]} \quad (364)$$

Specifični presjek  $f = \frac{F}{G}$  recipročna je vrijednost tome.

Uvrstimo li ovdje za  $p = p_z$ , to dobivamo specifični protok odnosno specifični presjek najužeg mesta

$$\frac{G}{F_z} = \frac{1}{f_z} = \sqrt{g \kappa \frac{P_1}{v_1} \frac{m-1}{\kappa-1} \left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{m+1}{m-1}}} \quad (365)$$

Iz (365) i (364) dobivamo sa  $p = p_0$  omjer izlaznog i najužeg presjeka, kao mjerilo potrebnog proširenja mlaznice na izlazni presjek  $F_0$ ,

$$\frac{f_0}{f_z} = \frac{F_0}{F_z} = \frac{\left(\frac{2}{m+1}\right)^{\frac{1}{m-1}}}{\left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{1}{m}} \sqrt{\frac{m+1}{m-1} \left[ 1 - \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{m-1}{m}} \right]}} \quad (366)$$

Jednadžba (366) ima smisla samo za takva strujanja, kod kojih je tlak iza mlaznice manji od kritičnog,  $p_a < p_z$  (nadzvučno strujanje). Želimo li, da se u takvom slučaju u izlaznom otvoru  $F_0$  ustali isti pritisak kao u prostoru iza mlaznice, dakle da bude  $p_0 = p_a$  to se mlaznica odabire tako, da u (366) uvršta-vamo za  $p_0$  vrijednost  $p_a$ . Na taj način dobivamo mlaznicu s takvim proširenjem, kod kojeg će izlazni tlak  $p_0$  biti upravo jednak pretpostavljenom vanjskom tlaku  $p_a$ . No neka promjena tlaka  $p_a$  iza mlaznice<sup>1)</sup> nije kod nadzvučnog strujanja od utje-caja ni na pritisak u izlaznom otvoru ni na količinu, koja struji. U izlaznom se otvoru naime ustaljuje onaj pritisak  $p_0$ , koji kod izvedenog omjera presjeka  $\frac{F_0}{F_z}$  zadovoljava jednadžbu (366). Kod nadzvučnog strujanja ovaj je dakle pritisak  $p_0$  neovisan o vanjskom pritisku  $p_a$ . Kod zadane mlaznice i kod nadzvučnog strujanja može se na protočnu količinu  $G$  utjecati samo promjenom polaznog pritiska  $p_1$ , a ne promjenom vanjskog pritiska  $p_a$ .

Kad je pak vanjski pritisak veći od kritičnog,  $p_a > p_z$ , to će se u izlaznom otvoru ustaliti pritisak koji je jednak vanjskom,

<sup>1)</sup> Na pr. promjenom kondenzatorskog pritiska kod parnih turbina.

$p_0 = p_a$ . Time je onda određena i protočna količina  $G$  po (364), pak se u tom slučaju promjenom vanjskog pritiska  $p_a$  utječe i na ovu količinu.

**Koefficijent istjecanja** Kod dosadašnjih razlaganja bio je presjek  $F$  uvijek zamišljen i kao stvarni presjek samoga mlaza. Kod dobro zaobljenih mlaznica odgovara presjek mlaza na izlazu i presjeku otvora mlaznice. No kod otvora sa oštrim rubovima, na pr. kod prvrta u tankim limovima, pojavljuje se iza otvora naknadno suženje mlaza, t. zv. kontrakcija, budući da čestice, koje kod izlaska obilaze oko oštrog ruba ne mogu skokimice promjeniti smjer svojeg strujanja za  $90^\circ$ . Ova kontrakcija može kod oštrog izlaznog otvora smanjiti presjek slobodnog mlaza na 65% od veličine presjeka otvora. No i kod zaobljenih mlaznica potreban je stanoviti ispravak teoretske protočne količine, budući da nije strogo ispunjena pretpostavka konstantnosti brzine preko čitavog presjeka. Brzina čestica u neposrednoj blizini stijenke mlaznice opada naglo na nulu. Iz tog razloga treba teoretski dobivenu protočnu količinu  $G$  korigirati pomoću t. zv. koeficijenta istjecanja  $\mu$  tako da se dobiva praktična protočna količina  $G_{pr}$

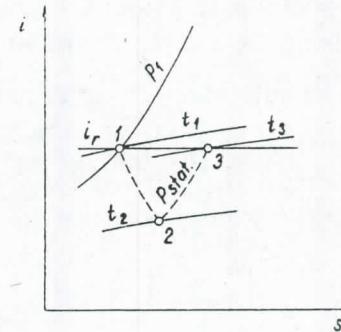
$$G_{pr} = \mu G.$$

Za dobro zaobljene mlaznice vrijednost je za  $\mu = 0,96 - 0,98$ . Za okrugle oštре otvore zbog kontrakcije je naprotiv  $\mu = 0,64 - 0,65$ . Za otvore drugog oblika, na pr. četverokutne ili trokutaste ima  $\mu$  druge vrijednosti. Točno poznavanje koeficijenta istjecanja važno je kod mjerjenja količina tvari pomoću otvora ili mlaznica, koja se metoda mnogo upotrebljava kod mjerjenja velikih protočnih količina plinova i para.

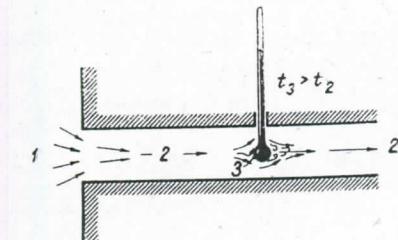
**Temperatura u struji** U vezi sa pojavama strujanja taknut ćemo se i važnih pitanja temperatura u struji. Treba naime dobro razlikovati pravu temperaturu čestica struje od temperature, koju će nam pokazivati neki umetnuti termometar. Stavimo li neki termometar u struju veće brzine, to nam ovaj protiv očekivanja ne će pokazivati pravu temperaturu struje. Termometar, za čiju smo se dobru toplinsku izolaciju pobrinuli, mjeri naprotiv samo temperaturu onih čestica teku-

ćine, koje su naletile na nj, te su pri tom svoju kinetičku energiju sasvim ili djelomice pretvorile u toplinu. Čestice, koje prileže neposredno na stijenci termometra nemaju gotovo nikakvu brzinu, budući da između stijenke termometra koja miruje i čestica koje struje ne može postojati neki skok brzine. U neposrednoj blizini stijenke termometra izobrazit će se slični profil brzina, kako je prikazan u sl. 205. i 206. za strujanje u blizini stijenka neke cijevi. Čestice, koje su bile ovako usporene, odnosi struja opet dalje, te ih nadomještava novim česticama, koje opet gube svoju brzinu. Kod svake se takve čestice njena kinetička energija preobrazuje u prirast entalpije prema formuli  $A \frac{w_2^2 - w_1^2}{2g} = i_1 - i_2$ , uz pretpostavku, da je

$Q = 0$  t. j. da se termometrom ili na neki drugi način ne odvodi neka primjetna količina topline. Entalpija ovih usporenih čestica poveća se pri tom za isti iznos, koji se bio prije utrošio za proizvodnju postignute brzine strujanja. Drugim riječima, neposredno na termometru čestice će imati istu entalpiju, kao u kotlu iz kojeg su potekle. Nazvat ćemo ovu vrijednost „entalpijom mirovanja  $i_m$ “. Stanje je ovog ovoja tekućine oko termometra različito od stanja udaljenijih čestica, koje prolaze neusporeno mimo termometra. Kako je termometar samo opipni instrument, to on može opipati samo temperaturu ovog plinskog ovoja te mu se uopće ne dojavljuje temperatura, koja vlada izvan ovog graničnog sloja u otvorenoj struci. To, što vrijedi za spomenuti



Sl. 135.  $i-s$ -dijagram za sl. 136.



Sl. 136. Vlastita temperatura termometra u struji.

termometar, važi naravno i za svaku drugu krutu stijenku, koja je u dodiru sa strujom, tako na pr. i za same stijenke cijevi, kroz koju struji dotična tekućina. Ako mjerimo temperaturu stijenke mlaznice dobit ćemo opet povišenu temperaturu koju ima granični sloj, a ne pravu temperaturu struje. To je neobično važno i za neke tehničke procese, tako na pr. za lopatice plinske turbine, koja je u najnovije vrijeme toliko zadobila na važnosti, ili opet za stijenke mlaznice kod raketnog pogona. Jakom i naglom adijabatskom ekspanzijom vrućih plinova izgaranja možemo doduše njihovu temperaturu znatno sniziti. No stijenke mlaznice, pokraj kojih ovakvi ohlađeni plinovi struje velikom brzinom, imat će nažalost znatno višu temperaturu, što zbog čvrstoće materijala u velikoj mjeri otežava tehničku izvedbu plinskih turbina i raketnih pogona.

Ocjenit ćemo kolika je ta temperatura krute stijenke u struji. Pošavši od stanja 1 u kotlu neka se je u kanalu, sl. 135. i 136. postiglo stanje 2 protočnog medija. Na termometru se stvara plinski ovoj, koji uglavnom miruje, a kojemu je stanje 3 takvo, da je prema gornjem  $i_3 = i_1 = i_m$ . Stanje 3 ovoga ovoja leži u *is*-dijagramu naravno desno od 1 budući da je entropija zbog trenja i sudarnih pojava morala porasti. Kod idealnih plinova entalpija je samo funkcija temperature, pak će zbog  $i_3 = i_1 = i_m$  biti također i  $t_3 = t_1$ . Drugim riječima termometar u struji idealnog plina pokazuje temperaturu kotla. Tome se nasuprot kod para pokazuje temperatura termometra, koja odgovara doduše entalpiji mirovanja  $i_m$  ali i statičkom pritisku  $p_2$  promatrane struje. Ova je temperatura obično nešto niža od kotlovske. Sve to vrijedi, kako je rečeno samo za slučaj, da se pojavljuje neko primjetno odvođenje topline. No u laminarnom dijelu plinskog ovoja (granični sloj) postoji pad brzina i pad temperaturu, tako da se čestice koje nadolaze ne usporuju sasvim. Kako se osim toga u graničnom sloju trenjem proizvodi toplina, koja se zbog postojećeg temperaturnog gradijenta provođenjem topline odvodi natrag u struju, to se prilike nešto mijenjaju. Sve to ovisi među ostalim i o nutarnjem trenju i o toplinskoj vodljivosti protočnog medija, kao i o položaju promatrane točke na termometru (stijenci). U prednjoj uspornoj točci, dakle tamo

gdje struja udara na termometar, bit će prilike različite od onih na nekoj postranoj točci termometra. Ne ulazeći dublje u teoriju spominjemo samo rezultat. Kod uzduha je po teoriji i prema mjeranjima  $\frac{t_{st} - t_2}{t_{ad} - t_2} \approx 0,85$ , gdje je  $t_{st}$  prosječna temperatura krute stijenke,  $t_2$  temperatura slobodnih čestica u struji, a  $t_{ad}$  temperatura koju bismo postigli adijabatskom kompresijom uzduha od statičkog pritiska struje  $p_2$  na usporni pritisak u uspornoj točci. ) Ovaj prirast pritiska odgovara dinamičkom pritisku, koji bismo mjerili PITOT-ovom cijevi, a približno dosije „kotlovske pritisak“. Do danas se još nažalost nije našao praktični način po kojem bismo mogli neposredno mjeriti pravu temperaturu neke plinske struje. To bismo doduše mogli učiniti s termometrom, koji plovi sa strujom, no brzine strujanja su obično mnogo prevelike, a da bi to bilo praktički provedivo.

Za idealne je plinove prirast entalpije plinskog ovoja ugrađenog tijela, na pr. nekog termometra,

$$\Delta i = c_p \Delta t = A \frac{w^2}{2g} \quad \text{ili} \quad \Delta t_{ad} = A \frac{w^2}{c_p 2g}. \quad (367)$$

Za uzduh je  $c_p = 0,24 \text{ kcal/kg } {}^\circ\text{C}$ , pak dobivamo za strujanje uzduha, uvezši u obzir gore navedenu vrijednost koeficijenta 0,85

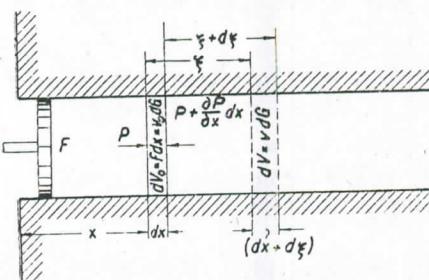
$$\Delta t = 0,85 \cdot \Delta t_{ad} \approx \frac{w^2}{2400}$$

Tako bi na pr. bila u kabini nekog lijetala brzine  $w = 250 \text{ m/sec}$  temperatura za  $26^\circ$  viša od temperatupe okolišnjeg uzduha, i to zbog naleta čestica okolišnjeg uzduha na oplatu aviona. Zato će se načelno kod svakog daljnog povećanja brzine aviona (rakete!) naići na teškoće kod održavanja nutarnje temperature na podnošljivoj visini. Površinska temperatura taneta, koje leti sa  $1000 \text{ m/sec}$  težila bi k temperaturi koja je za nekih  $420^\circ$  viša od temperatupe okolišnjeg uzduha.

) Pohlhausen, Z. angew. Math. Mech. 1, (1921) 115. — E. Eckert und W. Weise, Forschung 12 (1941) 40.

Neki meteor koji leti kroz atmosferu vodika sa relativnom brzinom od nekih 30 km/sek ostaviti će sjajni trag, koji bi po (367) imao  $30000^{\circ}\text{C}$ . No kod ovih visokih temperatura nisu više ispunjene učinjene pretpostavke. Kod tako visokih temperatura odvoditi će se velike količine topline zračenjem u okolinu, a druge će se upotrijebiti za ugrijavanje nutrašnjosti tijela. No osim toga pojavljuju se već i kod mnogo nižih temperatura preobraženja plinova (disocijacija), koje su skopčane s velikim potroškom energije, pak se u tom slučaju prirast entropije plinskoga ovoja ne smije ni približno računati prema izrazu  $\Delta i = c_p \Delta t$ . U ovom slučaju ne možemo tu temperaturu ni približno računati, jer nam svojstva plinova kod tako visokih temperatura nisu dovoljno poznata. Plinski ovoj zauzet će svakako takvu temperaturu, kod koje se ustaljuje ravnoteža između prirasta entalpije zbog naleta plinovitih čestica s jedne strane i potroška topline zračenjem (isijavanjem), kemijskim preobrazbama i t. d. s druge strane.

**Brzina zvuka** U pojавama strujanja, kao u opće kod promjena stanja, koje se od čestice do čestice vrlo brzo rasprostranjuju, od velike je važnosti brzina zvuka. Ova naime nije ništa drugo nego li brzina, kojom se neki tlačni impuls (ili niz takvih impulsa — zvuk) predaje od čestice čestici. Jasno nam je na pr., da se tlačni udar, koji smo na jednom kraju cijevi izveli nekim stupom, ne može rasprostraniti neizmjerno brzo, već da je zato potrebno neko konačno vrijeme, bilo ono makar kako kratko. Kolika je brzina rasprostranjuvanja ovakvog tlačnog vala?



Sl. 137. Tlačni val u cijevi.

U nekoj cilindričnoj cijevi presjeka  $F$ , sl. 137., zatvoren je smiren plin pod pritiskom  $P_0$ , temperature  $t_0$  i volumena  $v_0$ . Na jednom kraju cijevi proizvedimo nekim stupom jedan tlačni udar, bilo kao pretlak bilo kao podtlak. Ovaj će se udar rasprostranjavati u pli-

nu u obliku ravnog tlačnog vala. Ovaj tlačni udar predaje se od čestice čestici, tako da će sve plinske čestice redomice izvoditi istu promjenu stanja.

Tlačni val neka je upravo dosegao volumenski element  $dV_0 = Fdx$  plina, koji je element u mirovanju udaljen za  $x$  od početka cijevi. Pretlakom se ova čestica stavlja u gibanje, tako da zadobije ubrzanje u smjeru pada pritiska  $(-\frac{\partial P}{\partial x})$ .

Nakon nekog konačnog vremena  $\tau$  pomakne se taj element za dužinu  $\xi$  u smjeru  $x$ . Pomak spram položaja mirovanja ovog elementa označujemo sa  $\xi$  za razliku od njegove koordinate mirovanja  $x$ . Ubrzanje je elementa  $\frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}$ . Sila ubrzanja je

$$-F dP = -F \frac{\partial P}{\partial x} dx. \quad \text{Ubrzana je masa } \frac{\gamma}{g} Fdx = \frac{1}{g v} Fdx.$$

Po stavku: sila = masa  $\times$  ubrzanje dobivamo

$$-F \frac{\partial P}{\partial x} dx = \frac{1}{g v} F dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2}$$

ili

$$g v \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (368)$$

U ovoj jednadžbi možemo  $\frac{\partial P}{\partial x}$  i na drugi način izraziti

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (369)$$

Sad možemo veličinu  $\frac{\partial v}{\partial x}$  proračunati iz male promjene gustoće čestice pri njenom pomaku. Po sl. 137. je naime

$$\frac{v}{v_0} = \frac{dV}{dV_0} = \frac{dx + \frac{\partial \xi}{\partial x} dx}{dx} = 1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (370)$$

odakle diferenciranjem slijedi

$$\frac{\partial v}{\partial x} = v_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (371)$$

Zakon kompresije  $\frac{\partial P}{\partial v}$  u (369) dobivamo, ako uočimo, da se vrlo brza kompresija izvodi pretežno bez dovođenja topline i na povratan način, dakle adijabatski.<sup>1)</sup>

Za kompresiju čestice važi dakle jednadžba adijabate

$$Pv^* = P_0 v_0^* \quad (372)$$

odakle diferencijacijom dobivamo

$$\frac{\partial P}{\partial v} = -\gamma \frac{P}{v} \quad (373)$$

Uvedemo li (373) i (371) u (369) a ovo opet u (368), to konačno dobivamo

$$g\gamma P_0 v_0 \frac{P}{P_0} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (374)$$

kao diferencijalnu jednadžbu pomicanja čestica, prouzrokovanih tlačnim udarima. Kada je  $\frac{P}{P_0} \approx 1$  t. j. kad se čestice samo neznatno komprimiraju, kao što je to obično kod zvučnih valova, to se ova jednadžba pojednostavljuje. Ako još zbog kratkoće pišemo

$$g\gamma P_0 v_0 = q^2 \quad (375)$$

to za slaba zgušćivanja sa  $\frac{P}{P_0} \approx 1$  slijedi

$$q^2 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = 0 \quad (376)$$

Općenito rješenje ove parcijalne diferencijalne jednadžbe drugoga reda glasi

<sup>1)</sup> Na povratnost pri kompresiji zaključujemo iz iskustvene činjenice, da se energija zvuka može sa zvukom prenosi na velike udaljenosti bez bitnih gubitaka, na pr. u doglasnim cijevima. Što se tiče izmjene topline spominjemo ovo. Kod zvuka se ista čestica zgušćuje mnogo stotina puta u sekundi. Uvezši u obzir lošu vodljivost topline plinova mora se računati s time, da se za vrijeme jedne kompresione periode ne mogu izmijeniti neke primjetne količine topline između pojedinih čestica.

$$\xi = \varphi(x + q\tau) + \psi(x - q\tau) \quad (377)$$

gdje su  $\varphi$  i  $\psi$  bilo kakve funkcije argumenata  $(x + q\tau)$  i  $(x - q\tau)$ , koje funkcije doduše mogu biti i periodične kao na pr. kod zvuka, ali to ne moraju biti, kao na pr. kod pojedinačnih tlačnih udara. Uvrštenjem izraza (377) u (376) možemo se uvjeriti, da on doista daje traženo rješenje.<sup>1)</sup>

Promotrijmo ponajprije pojednostavnjeni slučaj, u kojem jedna od funkcija u (377), na pr.  $\varphi$  isčezava ( $\varphi = 0$ )! Tu su onda pomaci  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  i t. d. raznih čestica spram njihovih položaja mirovanja  $x$ ,  $x_2$  i t. d. po jednadžbi  $\xi = \psi(x - q\tau)$  uvijek jednaki,  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , kad se  $x$  i  $\tau$  doduše mijenjaju, ali ipak tako, da veličina  $(x - q\tau)$  ostaje konstantna t. j. da je  $dx - qd\tau = 0$  ili

$$q = \frac{dx}{d\tau} [m/sek] \quad (378)$$

Zato je  $q$  ona brzina, kojom oko ili neki drugi mjerni instrument mora slijediti pojave u smjeru osi cijevi  $x$  ako želi uvijek naići na takvu česticu, koja se iz svojeg položaja mirovanja pomakla baš za sasvim određeni iznos  $\xi$ .<sup>2)</sup>

Drugim riječima,  $q$  je brzina rasprostranjuvanja nekog tlačnog vala od čestice do čestice. Ona nema ništa zajedničko s korpuskularnom brzinom  $\frac{\partial \xi}{\partial \tau}$  pojedinih čestica pak se zato ne smije s ovom zamijeniti.<sup>3)</sup> Kako se zvuk proizvodi nizom tlačnih

<sup>1)</sup> Iz (377) slijedi

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \varphi''(x + q\tau) + \psi''(x - q\tau) \text{ te } \frac{\partial^2 \xi}{\partial \tau^2} = q^2 \varphi''(x + q\tau) + q^2 \psi''(x - q\tau).$$

<sup>2)</sup> Kod istog pomaka  $\xi$  postignut će se kod svake čestice i isto termodynamičko stanje.

<sup>3)</sup> Promotrimo li drugi jednostavni slučaj, kad u (377) isčezne funkcija  $\psi$  ( $\psi = 0$ ) a  $\varphi$  zadrži konačnu vrijednost, to se analogno prijašnjim razmatranjima dobije

$$q = -\frac{dx}{d\tau}$$

dakle jednaka brzina, ali suprotnog smjera. Trenutačni pomak  $\xi$  neke čestice prema tome rezultira u općenitom slučaju po (377) iz prekrivanja dvaju neovisnih valova — jednog koji dolazi s lijeva ( $+q$ ) i jednog koji dolazi s desna ( $-q$ ) — koji se rasprostiraju istom brzinom u suprotnim smjerovima.

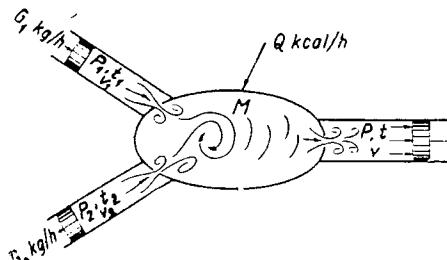
udara, to se i on širi tom istom brzinom  $q = w_z$ , i to relativno spram plina, pak  $w_z$  nazivamo brzinom zvuka ili zvučnom brzinom. Prema (375) slijedi

$$w_z = \pm \sqrt{g \kappa P_0 v_0} = \pm \sqrt{g \kappa R T_0} \quad (379)$$

Predznak  $\pm$  važi za promatrani jednodimenzionalni problem u cijevi, a znači da se zvuk širi u oba smjera. U plinovima, koji struje, rasprostranjuje se neki tlačni udar brzinom zvuka relativno spram plina. Spram mirnoga sustava, kroz koji plin struji brzinom  $w$ , bit će zato apsolutna brzina rasprostranjanja takvog vala  $c = w \pm w_z$ . Kad je  $w = |w_z|$ , to će apsolutna brzina rasprostranjanja tlačnog vala biti nizvodno  $c_+ = 2w_z$ , a uzvodno  $c_- = 0$ . Zato se kod struja, kojih brzine dosiju ili premašuju brzinu zvuka, mogu tlačni valovi širiti samo nizvodno a ne i uzvodno. To isto vrijedi naravno i za brzinu, kojom se izjednačuju razlike pritisaka u susjednim područjima. Po (379) brzina je zvuka ovisna osim o vrsti plina ( $\kappa, R$ ) samo još o stanju plina, a kod idealnih plinova paće samo još o temperaturi.

## O pojavama miješanja

Kod čitavog niza tehničkih procesa pojavljuje se miješanje dviju struja iste tvari ali različitoga stanja. Tako na pr. u injektoru, u parnim duvaljkama, kod isparivanja u kotlu LÖFFLER-a i t. d. U prvom redu nas interesira, koje konačno stanje smjese moramo očekivati, ako su poznata početna stanja. Osim toga zanima nas gubitak rada s kojim moramo zbog nepovratnosti procesa računati.



Sl. 138. Miješanje struja.

Niža razmatranja ograničuju se na pojave u stanju ustaljenosti, kod kojih pritisci ostaju vremenski nepromjenljivi. Ponajprije promotrijmo miješanje, kod kojeg izvana ne dovodimo topline  $Q = 0$ . Takve pro-

cese miješanja možemo svesti na ovaj jednostavni slučaj: Miješalištu  $M$  sl. 138. dovodimo struje  $G_1$  i  $G_2$  kg/h naše tvari, sa pripadnim stanjima  $(P_1, t_1, v_1, i_1, s_1 \dots)$  i  $(P_2, t_2, v_2, i_2, s_2 \dots)$ . Kao rezultat miješanja u miješalištu nastaje struja smjese od  $G$  kg/h s jednoličnim stanjem  $(P, t, v, i, s \dots)$ . U ustaljenom je stanju

$$G_1 + G_2 = G \quad (380)$$

Promatrat ćemo one količine naše tvari

$$g_1 = \frac{G_1}{G}; \quad g_2 = \frac{G_2}{G}; \quad g_1 + g_2 = 1 \quad (381)$$

koje se troše za 1 kg smjese.

U jednom kg prve struje sadržana je unutarnja energija  $u_1$  kcal/kg. Za utiskivanje ove količine u miješalište mora se savladati rad utiskivanja  $P_1 v_1$  mkg/kg. Mogu li se promjene drugih oblika energije, naročito prirast kinetičkih energija struja zanemariti, a za vrijeme miješanja se osim toga ne odvodi никакav korisni rad, to kod proizvodnje 1 kg smjese mora po prvom glavnom stavku biti

$$g_1 (u_1 + A P_1 v_1) + g_2 (u_2 + A P_2 v_2) = u + A P v \quad (\text{za } Q = 0)$$

pa kako je entalpija

$$i = u + A P v \quad (382)$$

to dobivamo

$$g_1 i_1 + g_2 i_2 = i \quad (\text{za } Q = 0). \quad (383)$$

Entalpija nastale smjese ovisna je kod učinjenih pretpostavki ( $Q = 0, A L = 0, g_1 w_1^2 + g_2 w_2^2 \approx w^2$ ) samo o entalpiji i količini obih dovedenih struja, bez obzira na sam tok miješanja u miješalištu. Osobito je za  $i$  bez utjecaja, da li je miješanje teklo povratno ili nepovratno. To je važni kriterij. Iz (381) i (383) slijedi

$$g_1 = \frac{i_2 - i}{i_2 - i_1} \quad \text{a} \quad g_2 = \frac{i - i_1}{i_2 - i_1} \quad (384)$$

Promotrijmo sada promjenu entropije! Miješanje će biti nepovratno. Zato je i entropija smjese veća nego li suma entropija dovedenih struja. Nepovratnosti prouzrokuju prirast entropije, koji je za jedinicu količine proizvedene smjese

$$\Delta s = s - (g_1 s_1 + g_2 s_2) = s - s^*. \quad (385)$$

Izraz u zagradi pretstavlja sveukupnu entropiju  $s^*$  prije miješanja. Odavle slijedi sa (381)

$$g_1 = \frac{s_2 - s + \Delta s}{s_2 - s_1}; \quad g_2 = \frac{s - s_1 - \Delta s}{s_2 - s_1} \quad (386)$$

Pretpostavimo sada za čas, da bi se miješanje na neki način moglo izvesti povratno! U tom bi slučaju bilo  $\Delta s = 0$ , a entropija nastale smjese  $s_r = s^*$ . Indeks  $r$  označuje reverzibilno nastalu smjesu. U takvom je slučaju (386)

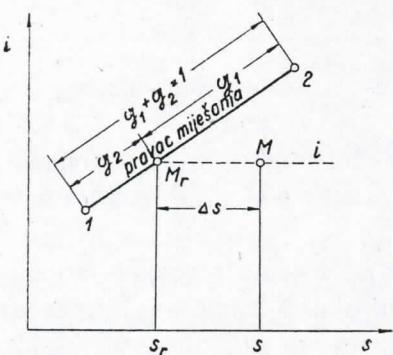
$$g_1 = \frac{s_2 - s_r}{s_2 - s_1}; \quad g_2 = \frac{s_r - s_1}{s_2 - s_1} \quad (\text{reverzibilno miješanje}) \quad (387)$$

Izjednačenjem izraza u (384) i (387) dobivamo

$$\frac{s_r - s_1}{s_2 - s_1} = \frac{i - i_1}{i_2 - i_1} \quad (388)$$

Ovaj se izraz može jednostavno prikazati u *is*-dijagramu dočitne tvari. Točka stanja  $M_r$  reverzibilno nastale smjese označena je koordinatama  $i, s_r$  sl. 139.

Ona po (388) leži na spojnici stanja 1 i 2 obih dovedenih struja, koja su stanja obilježena koordinatama  $i_1, s_1$  te  $i_2, s_2$ . Točka smjese  $M_r$  leži tako, da dijeli dužinu  $\overline{12}$  u omjeru  $g_2 : g_1$ . O tom se možemo uvjeriti iz (384) ili (387). Pri tom se težinski udio jedne dovedene struje mjeri uvijek između  $M_r$  i točke stanja druge



Sl. 139. Pravilo miješanja.

dovedene struje. Tako se na pr.  $g_1$  očita između  $M_r$  i točke 2. Prema slici 139. je

$$g_2 = \frac{\overline{M_r 1}}{\overline{12}}; \quad g_1 = \frac{\overline{M_r 2}}{\overline{12}}$$

Da iz poznatih dovedenih struja  $G_1$  i  $G_2$  odredimo stanje  $M_r$  smjese, koja je nastala reverzibilnim miješanjem, treba točke 1

i 2 spojiti, te dužinu  $\overline{12}$  razdijeliti u omjeru  $g_1 = \frac{G_1}{G_1 + G_2}$ .

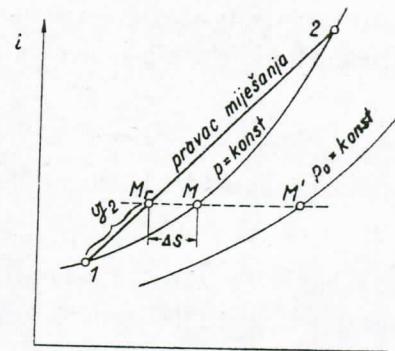
Sad je lako naći i stanje nepovratno nastale smjese  $M$ . Po prije rečenom važi i ovdje ista bilanca topline (383), tako da stanje  $M$  prave smjese leži sa  $M_r$  na liniji  $i = \text{konst}$ , sl. 139. No entropija je veća pak je za točku  $M$

$$s = s_r + \Delta s \quad (389)$$

gdje je veličina  $i$  značenje od  $\Delta s$  dano izrazom (385). Pravo stanje  $M$  leži za  $\Delta s$  na desno od  $M_r$ .

Kako ćemo naći prirast entropije  $\Delta s$ ? Vrlo jednostavno iz vanjskih uvjeta miješanja. Miješamo li na pr. dvije struje jednakih pritisaka tako, da i smjesa struji pod istim pritiskom,  $p_1 = p_2 = p$ , to točka  $M$  leži na liniji  $p = \text{konst}$ , sl. 140. Ona leži kod iste entalpije  $i$  kao i stanje  $M_r$ , koje ponajprije potražimo na spojnici  $\overline{12}$ . Ovu spojnicu zovemo pravcem miješanja. Tako se može  $\Delta s$  očitati iz dijagrama bez ikakvog računa. Kad je pritisak nastale smjese manji i to  $p_0$ , to pravo stanje smjese  $M'$  leži na  $p_0$  još dalje na desno. Prigušivanje od  $p$  na  $p_0$  povlači dakle još neko dodatno povećanje entropije, koje se odmah pokazuje

Sl. 140. Određivanje stanja miješanja.



Povećanje entropije nekog nepovratnog procesa očituje se i na taj način, da nastaje neki gubitak rada. Kod procesa, koji davaju rad, smanjuje se time izvršeni rad. Kod procesa, kod kojih se ne dobiva ni-

kakav rad, kao na pr. kod miješanja, smanjuje se radna sposobnost učesnika. Radnom sposobnosti  $L$ , označujemo najveći mogući rad, koji bismo mogli dobiti iz struje, kad bismo stanje te tvari promijenili bilo kojim, ali potpuno povratnim načinom u stanje, koje je u ravnoteži s okolinom i kad bismo struju isti-

snuli u okolinu. O tome je bilo govora u stupcu „Tehnička radna sposobnost“. Po tamošnjim izlaganjima možemo radnu sposobnost  $L_s$  očitati iz *is*-dijagrama kao dužinu između početnog stanja struje, točka  $M$ , na ordinati do pravca okoline, sl. 114.

To ćemo primijeniti na miješanje. Entalpija obih dovedenih struja je  $I_1 + I_2$ , ukupno dakle

$$I_1 + I_2 = I^* \quad (390)$$

Entropija neizmiješanih struja isto je tako

$$S_1 + S_2 = S^* \quad (391)$$

Kad obje struje ne bismo izmiješali, moglo bi one u najpovoljnijem slučaju obaviti rad

$$AL_s^* = I^* - I_0 - T_0(S^* - S_0) \quad (392)$$

Zvjezdica se odnosi na struje prije miješanja. No miješanjem se uistinu postigne stanje smjese  $P, T, I, S$ , a da pri tom ne dobivamo rad. Po gornjim razmatranjima, t. j. po (383) i (385) pri tom je

$$I = I^*; S = S^* + \Delta S \quad (393)$$

Ovako nastala smjesa ima radnu sposobnost, koja je još samo

$$AL_s = I - I_0 - T_0(S - S_0). \quad (394)$$

Ova je naravno zbog nepovratnosti miješanja manja od  $AL_s^*$ . Miješanjem se dakle izgubio korisni rad

$$\Delta AL = AL_s^* - AL_s \quad (395)$$

Taj radni gubitak je prema (392), (394) i (395)

$$\Delta AL = I^* - I - T_0(S^* - S) \quad (396)$$

a zbog (393)

$$\Delta AL = T_0 \Delta S \quad (397)$$

To je traženi gubitak rada nepovratnog miješanja ustaljenih struja. Zornu sliku o veličini tih gubitaka dobivamo ili iz stupnja povratnosti

$$\eta = \frac{AL_s}{AL_s^*} \quad (398)$$

ili iz stupnja nepovratnosti

$$\gamma = (1 - \eta) = \frac{\Delta AL}{AL_s^*} \quad (399)$$

Obje veličine možemo lako očitati iz *is*-dijagrama.

U slici 141. prikazano je takvo miješanje u *is*-dijagramu. Iz obih dovedenih struja 1 i 2 nastaje smjesa  $M$ , koju točku možemo odrediti po prije spomenutim uputama.

Potražimo li na istoj liniji  $i = \text{konst}$  točku  $M_i$  na pravcu okoline, to se stupanj nepovratnosti miješanja dobiva iz omjera dužina  $\overline{M_i M}$  te  $\overline{M_i M_r}$ . Po sl. 141. je naime

$$\gamma = \frac{\Delta AL}{AL_s^*} = \frac{\overline{M_i M}}{\overline{M_i M_r}} = \frac{\Delta s}{s_i - s^*} \quad (400)$$

gdje  $s_i$  označuje entropiju točke  $M_i$ .

Tako smo u mogućnosti naprave sa procesom miješanja, obzirom na radne gubitke, međusobno uporebiti i ocijeniti. Potrebni *is*-dijagrami za tehnički najvažnije tvari priloženi su ovoj knjizi.

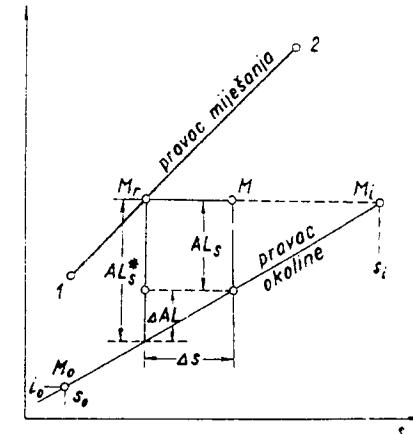
#### Miješanje s dovođenjem topline

Dovodi li se za vrijeme miješanja toplina  $Q$ , to za toplinsku bilancu nije bitno, da li se toplina dovodi prije, za vrijeme ili pri koncu miješanja. Dovedenu količinu topline  $Q$  kcal/h možemo svesti bilo na jedinicu količine smjese

$$q = \frac{Q}{G}$$

ili na jedinicu količine prve struje

$$q_1 = \frac{Q}{G_1}$$



Sl. 141. Gubici kod miješanja.

ili pak na jedinicu količine druge struje

$$q_2 = \frac{Q}{G_2}.$$

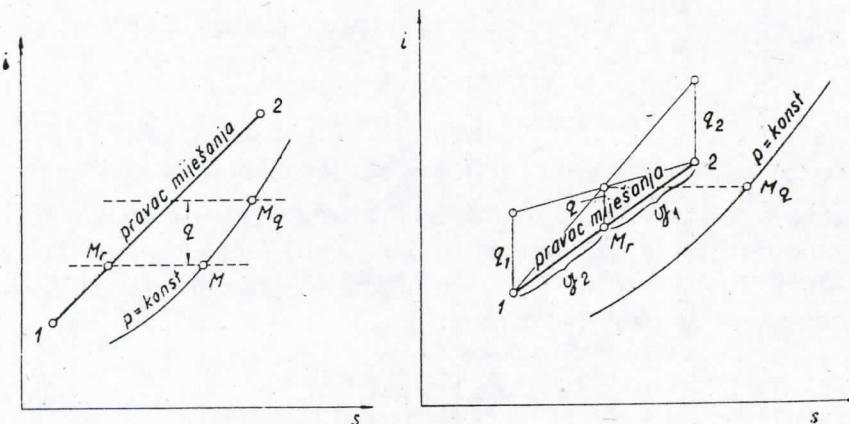
Osim toga je

$$q = g_1 q_1 = g_2 q_2 \quad (401)$$

Dovođenje topline ima za posljedicu da entalpija smjese  $M_0$  leži za iznos  $q$  više nego li kod miješanja bez dovođenja topline, sl. 142. Pojedine svedene toplinske veličine  $q$ ,  $q_1$ ,  $q_2$  međusobno su linearne ovisne, i to prema slici 143. Isto tako možemo i prirast entropije  $\Delta s$  svesti na jednu od ovih dovedenih struja ili na samu smjesu. Sasvim analogno kao kod  $Q$  dobivamo

$$\Delta s = \frac{\Delta S}{G}; \Delta s_1 = \frac{\Delta S}{G_1}; \Delta s_2 = \frac{\Delta S}{G_2} \text{ te } \Delta s = g_1 \Delta s_1 = g_2 \Delta s_2 \quad (402)$$

Odavde slijedi jednostavna grafička srodnost ovih triju veličina u *is*-dijagramu sl. 144.



Sl. 142. i 143. Miješanje s dovođenjem topline.

#### Diferencijalno miješanje

Kod nekih se problema miješa mala količina tvari sa stanjem 1 ( $g_1 = dg$ ) s mnogo tvari stanja 2, pri čem je  $g_1 = (1 - dg) \approx 1$ . Pri tom ostaje pritisak  $p_2$  stalan,  $p_2 = p$ . U tom se slučaju stanje nastale smjese samo malo razlikuje od stanja 2. To se pojavljuje

na pr. kod napajanja nekog kotla. Mala količina pojne vode trajno se miješa s velikom količinom kotlovske vode pri  $p = \text{konst}$ .

$$i - i_2 = di; \quad s_r - s_2 = ds_r; \quad s - s_2 = ds$$

$$s - s_r = ds - ds_r = d(\Delta s).$$

Razni indeksi imaju ovdje isto značenje kao i prije. Pišemo li

$$g_1 = dg = \frac{di}{i_2 - i_1} \text{ te } dg = \frac{ds_r}{s_2 - s_1}$$

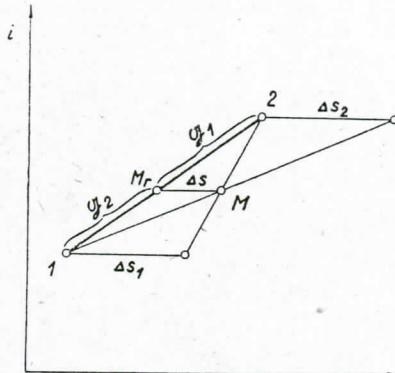
to postaje

$$\frac{di}{ds_r} = \frac{i_2 - i_1}{s_2 - s_1}. \quad (403)$$

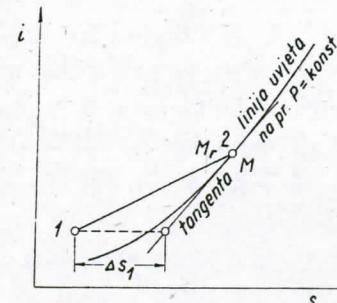
U tom se slučaju entropija  $\Delta s$  svodi na jedinicu dodavane male količine  $g_1$ . Jednostavnim razmatranjem vidimo, da se prirast entropije  $\Delta s_1$  za kilogram dodane količine dobiva po sl. 145. U tu svrhu vučemo kroz točku stanja 2 tangentu na liniju nametnutog uvjeta miješanja, koji je u konkretnom slučaju linija stalnog pritiska  $p_i = p = \text{konst}$ . Ova tangenta odsečica pri točki stanja 1 traženi prirast entropije  $\Delta s_1 = \frac{\Delta s}{g_1}$ .

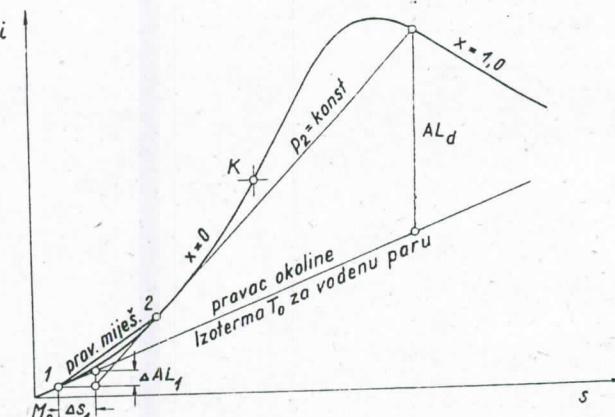
Sl. 145. Diferencijalno miješanje.

**Napajanje kotla** Netom spomenuti diferencijalni proces miješanja primjeniti ćemo na napajanje kotla. Linija uvjeta kod miješanja u tom je slučaju izobara mokre pare za zadani kotlovski tlak, koja izobara u području kapljevine praktički pada u donju graničnu krivulju. Voda za napajanje, točka 1, sl. 146., sa okolišnjim stanjem  $P_0$ ,  $T_0$ ,  $I_0$ ,  $S_0$  miješa



Sl. 144. Prirast entropije kod miješanja.





Sl. 146. Napajanje kotla.

se u kotlu sa vrelom vodom, točka 2. Vrijenjem se voda u kotlu nalazi u trajnom komešanju, pak je tako količina vode, koja se komeša, vrlo velika prema hladnoj vodi za napajanje. Prirast entropije za svaki kg pojne vode je  $\Delta s_1$ , a pripadni gubitak rada  $\Delta AL_1$ , sl. 146. Iz svakog kilograma proizvedene pare moglo bi se u najboljem slučaju dobiti korisni rad  $AL_d$ . Pri tom je proizvedena količina pare u ustaljenom stanju kotla jednaka količini svježe vode za napajanje. Da se je moglo iskoristiti izgubljeni rad  $\Delta AL_1$ , bio bi se u svemu dobio rad  $(AL_d + \Delta AL_1)$ . Iz tog je razloga stupanj nepovratnosti ovog miješanja

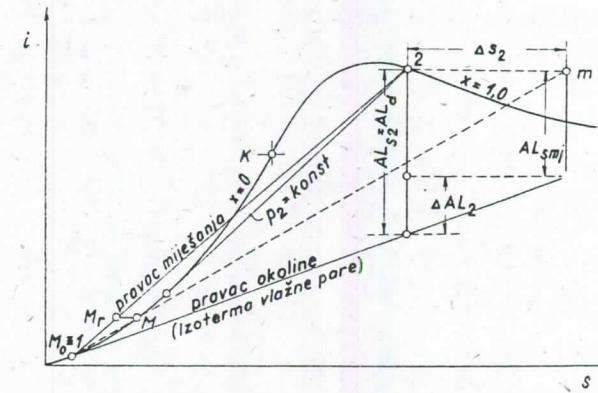
$$\nu = \frac{\Delta AL_1}{AL_d + \Delta AL_1} \quad (404)$$

Iz dijagrama odmah vidimo da će  $\Delta s_1$  a time i  $\nu$  s pregrijavanjem vode za napajanje ( $T_w > T_0$ ) postajati sve manje.

**U injektoru** se voda niskog (na pr. okolišnjeg) pritiska miješa sa parom kotlovskega pritiska sa svrhom, da se proizvede topla voda za napajanje, koja mora imati pritisak nešto veći od kotlovskega. Promotrit ćemo taj proces kao miješanje, a da se ne upustimo u potanje ispitivanje pojave strujanja u injektoru. Inače sam način rada i proračunavanje injektora odgovaraju onima kod mlazne duvaljke, no s tom

razlikom da se tamo siše para a ovdje voda, i da se u oba slučaja radi o raznim područjima pritisaka.

U injektoru spojeni su zadaci zagonskog i zadaci radnog stroja (pumpe). Voda okolišnjeg stanja 1 nema nikakve radne sposobnosti. Nju dovodimo pomoću pare 2 u stanje smjese  $M$ , sl. 147. Točka  $M$  leži na izobari postignutog pritiska  $p$  pri čemu

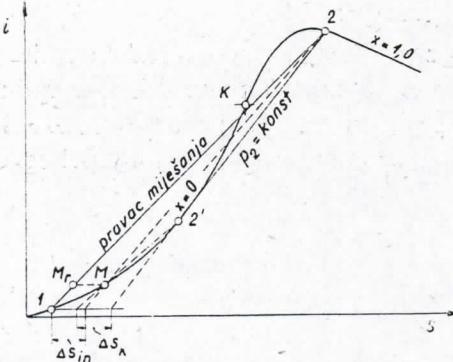


Sl. 147. Miješanje u injektoru.

će, već prema pogonu, biti  $p \leq p_2$ . Sve izobare kapljevine padaju približno u donju graničnu krivulju. Radna sposobnost smjese manja je od radne sposobnosti upotrebljene pare. Računamo li ove veličine za 1 kg utrošene pare, to po sl. 147. dobivamo stupanj nepovratnosti

$$\nu = \frac{\Delta AL_2}{AL_d} = \frac{\Delta AL_2}{AL_d} \quad (405)$$

Taj gubitak u toliko je veći, što je manja dovedena količina pare u omjeru prema dobavljenoj količini vode, jer pri tom dolazi točka  $M$  sve niže i niže. No promatramo li injektor kao sastavni dio kotlovskega pogona, to moramo ocijeniti radni gubitak kako u injektoru tako i u kotlu kod miješanja vode za



Sl. 148. Prirast entropije u injektoru.

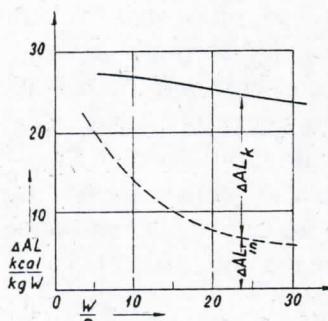
Napajamo li kotao od 10 at pomoću injektora sa svježom vodom od  $24^{\circ}\text{C}$ , pak u tu svrhu upotrijebimo suhu kotlovsку paru, to dobivamo ovisnost radnih gubitaka od različitog potroška pare, kako je to prikazano u mjerilu u slici 149. Ovi se gubici odnose na 1 kg svježe vode. Za apscisu smo odabrali omjer nasisane svježe vode spram

potrošene pare, dakle  $\frac{W}{D}$ . Gubitak rada u injektoru  $\Delta AL_{in}$  opada s porastom  $\frac{W}{D}$ , dok gubitak napajanja  $\Delta AL_k$  postaje veći. No u svemu potrošak pare injektora jedva utječe na sveukupne gubitke, što je poučno kako za projektiranje tako i za pogon injektoru.

Sl. 149. Gubici u injektoru i pri napajanju.

$$\nu = \frac{\Delta AL}{AL_d + \Delta AL} \quad (406)$$

U našem je slučaju po sl. 149. prosječno  $\Delta AL = 25 \text{ kcal/kg}$ .



napajanje sa vrućom kotlovskom vodom. Ovdje je preglednije gubitke računati za 1 kg svježe vode. U izobličenoj slici 148. vidimo prirast entropije  $\Delta s_{in}$ , koji je prouzrokovан procesom u injektoru, te  $\Delta s_k$ , koji je prouzrokovан napajanjem kotla i miješanjem pojne s kotlovsom vodom, oboje računato za 1 kg dobavljenе svježe vode.

Za suhu paru od 10 at, kod temperature svježe vode  $t_w = 24^{\circ}\text{C}$  po *i-s*-dijagramu je  $AL_d = 198 \text{ kcal/kg}$ . Time se dobiva

$$\nu = \frac{25}{198 + 25} = 11,2\%$$

To možemo uporeediti s gubicima pojne pumpe, koji po prijašnjim razlaganjima nastaju pri napajanju kotla s hladnom vodom. Ovi su gubici  $\Delta AL_1 = 23,2 \text{ kcal/kg}$ . Za pogon pojne pumpe morala bi svježa para svladati teoretski rad

$$AL_{pt} = A(P - P_0) v' = \frac{100\,000 - 10\,000}{427} 0,001 = 0,21 \text{ kcal/kg.}$$

Rade li pumpa i njen parni stroj svaki sa stepenom djelovanja od 50 % to je za čitav agregat pumpe  $\eta_p = 0,5 \cdot 0,5 = 0,25$ .

Time je stvarna pogonska snaga pumpe  $AL_p = \frac{0,21}{0,25} = 0,85 \text{ kcal/kg}$  pak je  $\Delta AL_1 + AL_p = 23,2 + 0,85 = 24,05$  ili

$$\nu_p = \frac{24,05}{198 + 24,05} = 0,108 = 10,8\%$$

Prema tome napajanje kotla pomoću injektora ili pomoću pojne pumpe daje skoro jednake gubitke.

## RASHLADNI PROCESI

Najvažniji zadatak rashladnih strojeva sastoji se u hlađenju nesavršeno izoliranih prostorija, u kojima se mora održavati temperatura niža od okolišne. U takve će prostorije kod manjkave izolacije uvijek iz toplije okoline dostrujavati toplina. Drugi vrlo rašireni zadatak je proizvodnja umjetnog leda iz vode. U oba se slučaja radi dakle o tome, da se odvodi toplina kod pretežno konstantnih temperatura. Od toga se razlikuje zadatak ohlađivanja zadane tvari, jer se ovdje toplina mora odvoditi kod promjenljivih temperatura. Na to ćemo naići kod proizvodnje krutog ugljičnog dvokisa poznatog pod imenom „suhu led“, pak kod ohlađivanja većih količina kapljevina te kod ukapljivanja uzduha. Toplina, koja se na taj način odvodi rashladnoj prostoriji ili vodi koja se smrzava, mora se negdje istovariti. Na koncu će se ova toplina uvijek morati predati okolini.

Kao jednostavno rješenje ovoga zadatka navest ćemo ponajprije jedan primjer. Između rashladne prostorije s temperaturom  $T_0$  i okoline s temperaturom  $T$  uključimo lijevokretni CARNOT-ov proces, sl. 152. Radnom mediju dovodimo kod više temperature  $T$  odvodimo mu toplinu  $Q$ . Da bismo to mogli izvršiti moramo utrošiti rad  $AL = Q - Q_0$ . Toplinu  $Q_0$  odvodimo rashladnom prostoru, tako da ovaj doista i hlađimo. CARNOT proces pretstavlja naravno samo jedno od mnogih rješenja, koja su moguća. U dalnjim razmatranjima postavit ćemo kriterij, o kojem se mora voditi računa kod takvih procesa. Odvodimo li rashladnoj prostoriji toplinu  $Q_0$  kod rashladne temperature  $T_0$ , to se entropija hlađenih tijela smanjuje za  $\Delta S_0 = \frac{Q_0}{T_0}$ , sl. 150. Ovu toplinu mo-

ramo dovesti okolini kod okolišne temperaturе  $T$ . Pri tom je površina 1 2 b a = površina 3 4 d c. Entropija okoline poraste za  $\Delta S_{ok} = \frac{Q_0}{T}$ .

Kako je  $T > T_0$ , to bi sveukupni prirast entropije bio

$$\Delta S = (\Delta S_{ok} - \Delta S_0) < 0$$

to jest entropija bi postala manja.

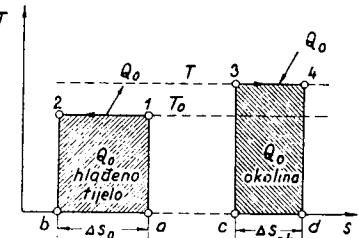
Po drugom glavnom stavku naravski nije moguće. Pa i nije moguće da bi toplina sama od sebe prešla od niže temperature na višu. Nacrtamo li ova entropska dijagrama iz sl. 150. jedan preko drugoga kao u sl. 151. to vidimo, da smanjenje entropije  $\Delta S$  zahtijeva neku kompenzaciju. Zato moramo u ovaj prelaz topline uključiti bilo kakav proces, kojim ćemo moći otstraniti smanjenje entropije  $\Delta S$ . To se može postići na pr. s potrošnim procesima, kod kojih se entropija poveća zbog trajne promjene fizikalne ili kemijske strukture tvari. To imamo kod primjene uobičajenih rashladnih smjesa, kao što je miješanje raznih soli sa snijegom, pri čem se temperatura jako snizi. No rečeno smanjenje entropije možemo kompenzirati s dodatnim procesima, koje možemo ponavljati, a to možemo postići sa spretno odabranim kružnim procesima. Dodatnim se procesom mora okolini dovoditi neka dodatna toplina  $\Delta Q$ . Ova kompenzaciona toplina  $\Delta Q$ , koja je predočena površinom 4 5 a d, mora biti tolika, da barem kompenzira smanjeni pad entropije  $\Delta S$ , pak mora u najmanju ruku biti

$$\frac{\Delta Q}{T} + \Delta S \geq 0$$

ili

$$\frac{\Delta Q}{T} \geq -\Delta S \quad (407)$$

Ta dodatna toplina  $\Delta Q$  nastaje preobraženjem nekog drugog oblika energije, a to će najčešće biti mehanički rad. No u načelu je vrsta tog dodatnog procesa sporedna, pak uistinu po-



Sl. 150. Promjena entropije kod hlađenja

stoji čitav niz raznih kompenzacionih procesa, kojima možemo dići toplinu na višu temperaturu. Za tehniku su važne ove dvije skupine:

1. Procesi s potroškom mehaničkog rada. Ova je metoda najraširenija u rashladnoj tehnici. Po tom principu rade svi kompresorski rashladni strojevi.

2. Procesi s potroškom drugih oblika energije. Tako se kod apsorpcionih rashladnih naprava, koje su dosta raširene, prevodi stanovita količina topline s višeg temperaturnog nivoa-a po mogućnosti povratno (ali bez vršenja rada) na nivou okolišne temperature, pak nam taj proces daje traženu kompenzaciju  $\Delta S$ .

U ovom svesku zabavit ćemo se samo s teorijom ras-  
hlađnih strojeva s potroškom mehaničkog rada, koja je teh-  
nički najvažnija, te s mlaznim duvalikama.

Iz *Ts*-dijagrama, sl. 151. možemo odmah reći, koliki je najmanji rad potreban, da bismo mogli proizvesti potrebnu dodatnu toplinu  $\Delta Q$ . Okolini treba kod njene temperature  $T$  dovesti dodatnu toplinu, koja je za povratne procese po drugom glavnem stavku

$$\Delta Q = T \Delta S \quad (408)$$

Sl. 151. Kompenza-  
ciona toplina kod  
hladenja.

tako da je  $U_1 = U_2$ . Po prvom glavnom stavku mora onda višak topline, koji dovodimo okolini kao spomenutu dodatnu toplinu  $\Delta Q$ , biti jednak potrošenom radu.

$$\Delta Q = A L \quad (409)$$

Zato će radni proces, bio kakav bio, morati za dizanje topline  $Q_0$  od  $T_0$  na  $T$  trošiti barem rad  $AL = T\Delta S$ . Budući da su prema prije rečenom  $površina 1 \ 2 \ b \ a = površina 3 \ 4 \ d \ b$ , to je i  $površina 4 \ 5 \ a \ d = površina 3 \ 5 \ 1 \ 2$ . Zato možemo  $AL = \Delta Q$  shvatiti isto tako kao površinu  $3 \ 5 \ 1 \ 2$ , to jest kao rad lijevo-

kretnog Carnot-ovog procesa koji radi između temperatura  $T_0$  i  $T$ , sl. 151. i 152. U slici 152., koja se odnosi ne na hlađena tijela i na okolinu već na radni medij, označene su točke stanja drugim poretkom, budući da toplinu koju hlađenom tijelu oduvodimo moramo našem radnom mediju dovoditi. Zato proces radnog medija mora biti lijevokretan. Najmanji potrebni rad  $AL$  našli smo, a da se nismo pitali za oblik dodatnog procesa, ali ipak s tim ograničenjem, da sve teče povratno. datni proces ne mora odabrati baš Carnot se iz kasnijih razlaganja vidjeti da se za rashladnoj temperaturi  $T_0$  iz naročitih raz prednost upravo Carnot-ovom procesu niz drugih, njemu teoretski potpuno rav kružnih procesa.

Iz slike 152. vidimo da se za istu rashladnu toplinu  $Q_0$  troši to više rada, što je veća razlika temperatura ( $T - T_0$ ). Uvriježilo se je za ocjenjivanje potrošenog rada upotrebljavati stepen rashladnog učina  $\epsilon$  (rashladni množilac)

$$\varepsilon = \frac{Q_0}{A L} \quad (410)$$

Rashladni je množilac onaj rashladni učin u kcal, koji dobivamo utroškom jedne kcal ( $= 427 \text{ mkg}$ ) mehaničkog rada. Za Carnot-ov proces, pa prema tome i za sve potpuno povratne rashladne procese između temperatura  $T$  i  $T_0$  dobivamo po sl. 152.

$$\varepsilon_c = \frac{Q_0}{A L_c} = \frac{T_0}{T - T_0} \quad (411)$$

Rashladni je množilac to povoljniji, što je manja razlika temperatura ( $T - T_0$ ), koju treba savladati. Odavde dobivamo osnovno načelo rashladne tehnike: Ne hlađi niže nego li je bezuvjetno potrebno! Tako isto treba temperature okoline prekoračiti koliko je moguće manje. Kad se ovog načela ne pri-

državamo, trošit ćemo nepotrebno mnogo snage. Ova razlika temperatura ( $T - T_0$ ) obično je malena, pak se svako otstupanje od zadanih temperatura odražuje vrlo nepovoljno. Tako će na pr. kod proizvodnje leda ( $t_0 = 0^\circ C$ ) i kod zadane temperature rashladne vode  $t = +10^\circ C$  biti

$$\varepsilon_c = \frac{Q_0}{AL_c} = \frac{T_0}{T - T_0} = \frac{273}{10} = 27,3.$$

Prekoračimo li u procesu zadane krajnje temperature za samo  $5^\circ$  spram gore i spram dolje, a to zato jer izmjenjivači topline imaju samo konačnu površinu, to dobivamo

$$\varepsilon_c = \frac{Q_0}{AL} = \frac{268}{20} = 13,4.$$

Ovdje je dakle samo iz razloga, što smo pristali na čedne padove temperature od  $5^\circ$  za prelaz topline u svakom od izmjenjivača, potrošak snage za isti rashladni učin porasao za  $100\%$  spram prvog slučaja.

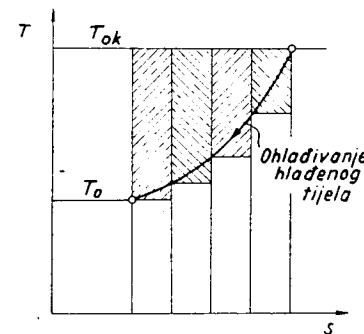
Carnot-ov proces samo je onda najpovoljniji rashladni proces, kad mu je zadatak hlađenje između stalnih temperatura. No često treba neku robu samo ohladiti od neke više na neku nižu temperaturu. Slične se prilike pojavljuju, kad smo prisiljeni raditi s konačnim, možda i vrlo ograničenim količinama rashladne vode i rasoline, koje služe kao posrednici između stroja i okoline odnosno rashladne prostorije. U tom slučaju mijenjat će se temperature ovih tekućina znatno, ako njima želimo prenositi potrebne količine topline, pak medij više ne radi između spremnika stalnih temperatura. Tu je onda po LORENZ-u onaj rashladni proces najpovoljniji, koji se najbolje prilagođuje promjenljivim temperaturama rasoline odnosno rashladne vode. Takav se proces može ostvariti, ili da se potraži neki radni medij s prikladnim termodinamičkim svojstvima<sup>1)</sup> ili da se radni proces spretnijim vođenjem bolje prilagodi tim temperaturama. Tako na pr. možemo proces rastaviti u nekoliko CARNOT-procesa ma-

<sup>1)</sup> Tražena svojstva pokazuju donekle binarne smjese, koje kod stalnog pritiska vriju kod promjenljive temperature. Opširnije vidi u drugom svesku.

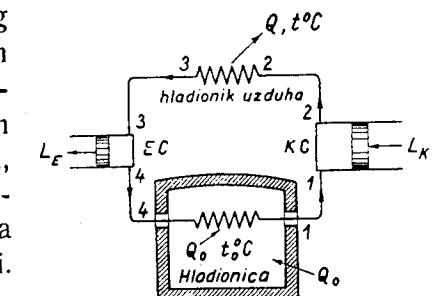
nje širine, ali sa različitim rashladnim temperaturama sl. 153.

**Rashladni** U povjesnom je uzdušni stroj razvitku bio uzdušni rashladni stroj prvi konstruktivno tako razrađen, da je uspješno prodrio kod praktične primjene. To je bilo sedamdesetih godina prošlog stoljeća u Engleskoj. Prvi industrijski upotrebljivi stroj izveo je 1862. A. C. KIRK ali širu primjenu našli su takvi strojevi tek kad su ih konstruktivno razradili J. COLEMAN i J. i H. BELL (1877.). Nekoliko takovih strojeva velike snage radilo je još do pred nekoliko godina u pogonu.

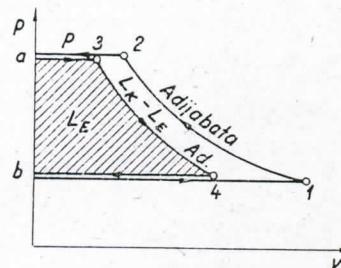
Uzdušni rashladni proces termodinamički je obrat STIRLING-ovog procesa sa vrućim uzduhom koji smo opisali u stupcu „Proces vrućeg uzduha“. U sl. 154. prikazan je takav uzdušni rashladni stroj. Hladni uzduh stanja 1 siše se iz rashladnog prostora kompresionim cilindrom KC koji ga adijabatski komprimira na pritisak  $p_2 = p$ . Pri tom poraste temperatura uzduha na  $t_2$ , koja je viša od temperature rashladne vode  $t$ , tako da se toplina  $Q$  može predati rashladnoj vodi. Ovako ohlađeni uzduh eksplandira adijabatski u ekspanzionom cilindru EC na pritisak  $p_0$ . Pri tom spadne temperatura na  $t_4$ , koja je niža od temperature hladionice  $t_0$ . Ovaj hladni uzduh preuzet će u hladionici toplinu  $Q_0$  i tako ispuniti svoj zadatak hlađenja. Sisanje i istiskivanje uzduha u cilindre vrši se pri stalnim pritiscima  $p$  i  $p_0$ , što se vidi i iz  $pV$ -dijagrama u sl. 155. Ovi pritisci su stalni iz razloga, što se



Sl. 153. Priljubljivanje krivulji ohlađivanja s više Carnot-t-ovih procesa



Sl. 154. Uzdušni rashladni stroj.

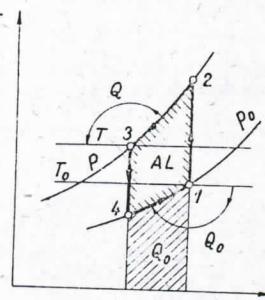
Sl. 155.  $P_v$ -dijagram za sl. 154.

Kompresioni cilindar siše uzduh od  $p_0$ , linija  $b\ 1$ , a istiskuje ga pri pritisku  $p$ , linija  $2\ a$ . Zato se mora utrošiti rad  $L_K$ , predočen površinom  $12a\ b$ . Rashladna voda hlađi uzduh kod  $p = \text{konst}$ , pak uzduh, kojega je nasisao ekspanzionim cilindrom, linija  $a\ 3$ , ima manji volumen  $V_3$ . Po dovršenoj ekspanziji ulazi hladni uzduh pri  $p_0 = \text{konst}$  u hladioniku gdje se preuzimanjem topline  $Q_0$  opet grijе na stanje  $1$ . Sad možemo proces ponoviti. Kod procesa se u svemu potroši rad

$$L = L_K - L_E \quad (412)$$

gdje  $L_E$  označuje rad, koji se dobiva u ekspanzionom cilindru. Izmjenjene količine topline predočene su u  $Ts$ -dijagramu, sl. 156.  $T$  je temperatura rashladne vode,  $T_0$  temperatura hladionice.

Pritiske  $p_0$  i  $p$  možemo odabrati po volji, ali moraju biti barem tako razmaknuti, da se adijabatskom kompresijom može savladati temperaturna razlika ( $T - T_0$ ), jer temperature od  $2$  do  $3$  moraju sve ležati više od  $T$ , dok one između  $4$  i  $1$  moraju biti niže od  $T_0$ , da bi topline mogle prelaziti u željenom smjeru. Zato mora biti

Sl. 156.  $Ts$ -dijagram za sl. 154.

Obično se uzduh duva neposredno u hladioniku (t. zv. otvoreni stroj), tako da je  $p_0 = 1 \text{ at}$ . Ako se u hladionici upotrebljavaju posebne rashladne cijevi, kao u slici 154., može se  $p_0$  odabrati po volji visoko, pak će dimenzije cilindra postati znatno manje.

Rashladni je učin

$$Q_0 = Gc_p (T_1 - T_4) \quad (414)$$

izmjena topline u obim izmjenjivacima topline vrši kod konstantnih pritisaka.

Kompresioni cilindar siše uzduh od  $p_0$ , linija  $b\ 1$ , a istiskuje ga pri pritisku  $p$ , linija  $2\ a$ . Zato se mora utrošiti rad  $L_K$ , predočen površinom  $12a\ b$ . Rashladna voda hlađi uzduh kod  $p = \text{konst}$ , pak uzduh, kojega je nasisao ekspanzionim cilindrom, linija  $a\ 3$ , ima manji volumen  $V_3$ . Po dovršenoj ekspanziji ulazi hladni uzduh pri  $p_0 = \text{konst}$  u hladioniku gdje se preuzimanjem topline  $Q_0$  opet grijе na stanje  $1$ . Sad možemo proces ponoviti. Kod procesa se u svemu potroši rad

a kako je  $T_4 = T \left( \frac{p_0}{p} \right)^{\frac{n-1}{n}}$ , to će rashladni učin ovisiti i o izboru pritisaka. Pogled na  $Ts$ -dijagram, slika 156. pokazuje da je uzdušni rashladni proces termodynamički manjkav. Ovdje se naime griješi o osnovno rashladno načelo, po kojem bi temperature  $T$  i  $T_0$  trebalo što manje prekoračiti. Oba šiljka iznad  $T$  i ispod  $T_0$  znače razbacivanje rada. Zato je i rashladni množilac razmjerno loš.

$$\text{On je } \varepsilon = \frac{Q_0}{AL} = \frac{Q_0}{Q - Q_0}. \quad (415)$$

Da bismo ga točnije odredili, rastavimo proces u niz uskih kružnih procesa.

Za ovaj je elementarni kružni proces rashladni množilac.

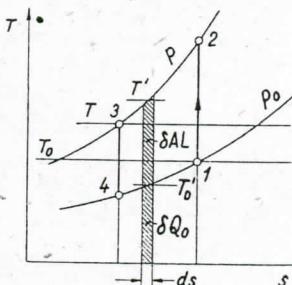
$$\varepsilon' = \frac{\partial Q_0}{\partial AL} = \frac{T'_0}{T' - T'_0} = \frac{1}{\frac{T'}{T'_0} - 1} = \frac{1}{\left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1}.$$

Za sve takve elementarne procese između pritisaka  $p$  i  $p_0$  vrijednost je izraza  $\left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}}$  ista. Zato je i za sveukupni proces  $1\ 2\ 3\ 4$  rashladni množilac

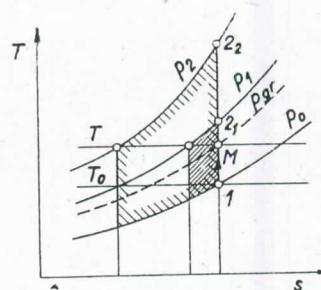
$$\varepsilon = \frac{1}{\left( \frac{p}{p_0} \right)^{\frac{n-1}{n}} - 1} \quad (416)$$

Što je veća razlika pritisaka, to manji je  $\varepsilon$ , sl. 158.

Kod zadanog pritisaka  $p_0$  (na pr.  $p_0 = 1 \text{ at}$ ) temperature će se  $T$  i  $T_0$  to više prelaziti odnosno podilaziti t. j. proces će biti to lošiji, što smo odabrali veće pritiske  $p_1$ ,  $p_2$  i t. d. U sl. 158. ucrtan je također i granični pritisak  $p_{gr}$  koji se mora barem postignuti, da se kompresijom može dosegnuti temperatura rashladne vode  $T$ , točka  $M$ . No u tom bi slučaju proces postao beskrajno uzak, pak bi bio potreban beskonačno veliki stroj.



Sl. 157. Utjecaj pritisaka na faktor hlađenja.

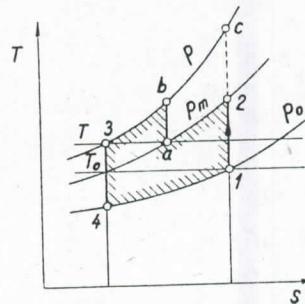


Sl. 158. Utjecaj pritiska na rashladni učin.

Uzdušni rashladni strojevi pokazuju još dva velika manjka: Toplinski kapacitet uzduha je vrlo malen, pak su za traženi rashladni učin potrebne velike optočne količine uzduha. Zato su strojevi vrlo veliki i skupi. Drugi im je manjak, što se po sl. 155. potrebni rad javlja kao razlika dviju mnogo većih radova, a to je načelno nepovoljno.

Povećanje kompresionog rada i smanjenje ekspanzionog rada za nekoliko procenata, koje je neminovno zbog mehaničkih i ostalih gubitaka u cilindrima, ima za posljedicu da se razmijerno mala razlika  $AL$  umnogostruči. Tako se praktički množilac topline smanji na tek jedan dio i onako lošeg teoretskog. No usprkos ovih manjaka održao se uzdušni rashladni stroj neko vrijeme u praksi, a za specijalne svrhe, kao na pr. hlađenje rudnika, nekih brodova i t. d. upotrebljava se još i danas. Uvođenjem parnog rashladnog stroja, a u prvom redu onog s amonijakom, jednim udarcem su se otstranili spomenuti manjci.

**Parni rashladni strojevi** Parni rashladni stroj sastavljen je iz istih elemenata kao i uzdušni rashladni stroj, sl. 160. Razlika je u tomu što se ovdje odabire takav radni medij, kod kojega proces pada u zasićeno područje, sl.

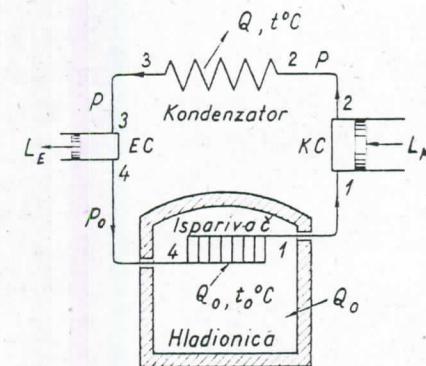


Sl. 159. Dvostepena kompresija.

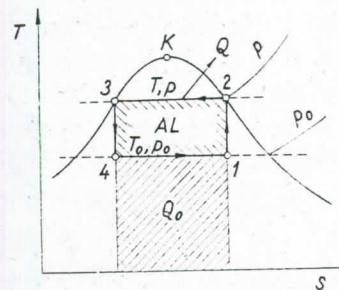
Znatno poboljšanje moglo bi se postići primjenom višestepenog kompresora. Kod višestepenog kompresora ohladili bismo uzduh kod nekog međutlaka  $p_m$  u posebnom hladnjaku na temperaturu rashladne vode, točka  $a$ , a tek onda bismo ga dalje komprimirali do  $b$ , sl. 159. Tako se štedi radna površina  $2 \dot{c} b a$  spram običnog procesa s jednostavnom kompresijom na isti konačni pritisak  $p$ .

161. Na taj način se može spojiti praktički zahtjev, prema kojem se dovodenje i odvođenje topline mora vršiti kod stalnih pritisaka, s raspolaganim načelom, da se ne prekorače zadane temperature  $T$  i  $T_0$ . To je u vezi s time, što linijama stalnog tlaka u području zasićenja odgovaraju linije stalne temperature. Zato se unutar zasićenog područja može i praktički ostvariti Carnot-ov proces kao najpovoljniji između zadanih temperatura  $T$  i  $T_0$ . Glavna je prednost primjene parnih rashladnih strojeva u tome, što se zadovoljuje osnovno rashladno načelo neprekoračivanja zadanih temperatura. Praktički od iste važnosti bit će neuporedivo veći topinski kapacitet zasićenih para od onoga za uzduh, zbog čega su cilindri takvih strojeva nekoliko puta manji od cilindara uzdušnih strojeva istog učina.

Kompresioni cilindar siše iz isparivača mokru paru stanja 1 pri pritisku  $p_0$  i komprimira je na kondenzatorski pritisak  $p$ . Hladni isparivač smješten je ili neposredno u hladionicu kao u sl. 160. ili se njime hlađi rasolina koja kao posrednik prenosi hladnoću na mjesto upotrebe. U kondenzatoru, koji se hlađi rashladnom vodom, para se kondenzira kod pritiska zasićenja  $p$ , koji odgovara temperaturi rashladne vode  $T$ . Pri tom se rashladnoj vodi predaje toplina  $Q$ . Medij, koji smo tako ukapljili u stanje 3 dovodimo ekspanzionom cilindru, gdje on adijabatski ekspandira do 4, pri čem jedan dio te kapljevine ispari, a temperatura spadne na  $T_0$ . U stanju 4

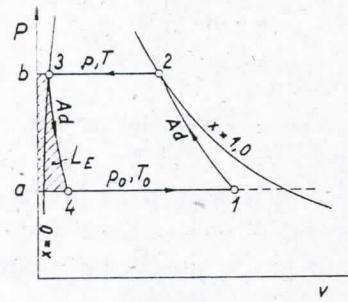


Sl. 160. Parni rashladni stroj s kompresorom i ekspanzionim cilindrom.



Sl. 161. Hlađenje Carnot-ovim procesom u zasićenom području.

vlada pritisak zasićenja  $p_0$  kao u isparivaču, koji pritisak odgovara temperaturi hladionice  $T_0$ . Iz isparivača kompresorom se trajno siše para pak zato kapljevina isparuje. Potrebna toplina isparivanja  $Q_0$  oduzima se hladionici, i to je baš željeni rashladni učin.



Sl. 162. Pv-dijagram za sl. 160.

stroja. Zato moramo očekivati, da praktički proces neće biti mnogo lošiji od teoretskoga. To je druga velika prednost parnog rashladnog stroja.

Rashladni množilac  $\varepsilon_c$  CARNOT-ovog procesa ne pogoršava se, ako točke 2 i 3 ne leže točno na graničnim kružnjama, već se pomaknu u unutrašnjost zasićenog područja, jer po jednadžbi

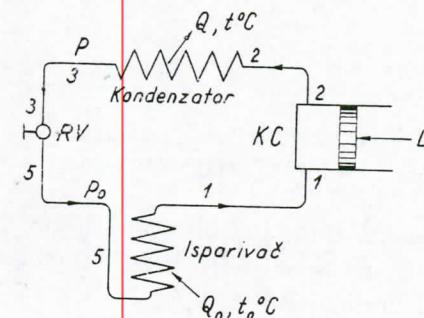
$$\varepsilon_c = \frac{Q_0}{AL} = \frac{T_0}{T - T_0} \quad (417)$$

rashladni je množilac ovisan samo o temperaturama  $T$  i  $T_0$  a ne o razmaku adijabata. Naravno da ćemo težiti k što potpunijem iskorištenju širine zasićenog područja, jer se među ostalim time povećava rashladni učin za svaki kilogram optočnog medija.

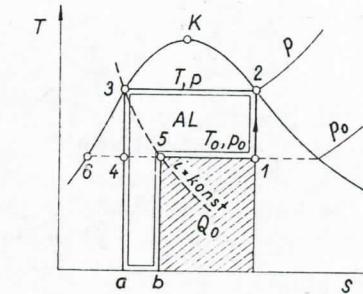
Pritisak u isparivaču bit će obično viši od 1 at tako da je specifični volumen pare isparivača od istog reda veličine kao i kod uzduha jednog uzdušnog rashladnog stroja. No zbog velike topline isparivanja bit će rashladni učin jednog kilograma medija velik. Posljedica je toga, da će potrebna zapremina cilindra parnog rashladnog stroja biti mnogo puta manja od zapremine uzdušnog stroja istog rashladnog učina. To je treća velika prednost parnih rashladnih strojeva.

### Regulacioni ventil

Ekspanzionali rad u EC parnog rashladnog stroja tako je malen, da će ga progutati trenje u polužju. Zbog toga se uopće odustaje od upotrebe ekspanzionog cilindra pa ga se nadomještava jednim mnogo jednostavnijim prigušnim ventilom, t. zv. regulacionim ventilom



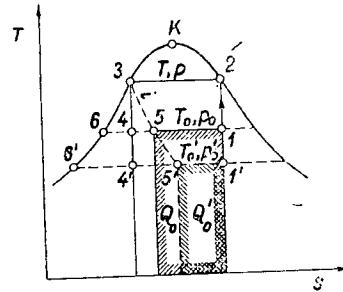
Sl. 163. Parni rashladni stroj s regulacionim prigušnim ventilom.



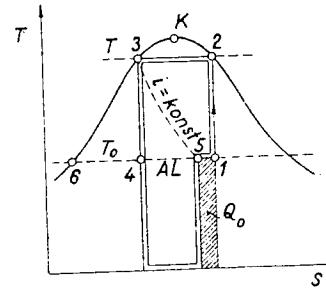
Sl. 164. Ts-dijagram za sl. 163.

$RV$ , sl. 163. Time se proces nešto mijenja, vidi  $Ts$ -dijagram u sl. 164. Prigušivanje je označeno uvjetom  $i = \text{konst}$ . U  $Ts$ -dijagramu leži stanje 5 iza prigušnog ventila na onoj liniji  $i = \text{konst}$ , koja prolazi stanjem 3. Kako točka 5 leži desno od 4 to sad dobivamo manji rashladni učin  $Q_0 = (i_1 - i_5)$ . Spram prijašnjeg pogona smanjilo se je  $Q_0$  za površinu  $45b$ . No budući da se u kondenzatoru odvodi ista količina topline  $Q = (i_2 - i_3)$  kao i prije, to se sad troši nešto više rada i to za istu površinu  $45b$ . To je u ostalom onaj rad koji smo izgubili napuštanjem ekspanzionog cilindra. Potrebni rad predočen je ovdje dvostruko uokvirenom figurom. Iz  $i_5 = i_3$  slijedi jednakost površina: površina  $45b$  = površina  $346$ . Višak potrošenog rada posljedica je nepovratnosti procesa prigušivanja. Ovaj je gubitak to veći, što je veća temperaturna razlika ( $T - T_0$ ).

To je zorno predočeno u sl. 165. Kod niže temperature isparivača  $T'_0$  izgubljena je površina  $346'$  mnogo veća od površine  $346$ , koja pripada višoj temperaturi  $T_0$ .



Sl. 165. Utjecaj rashladne temperature na rashladni učin.

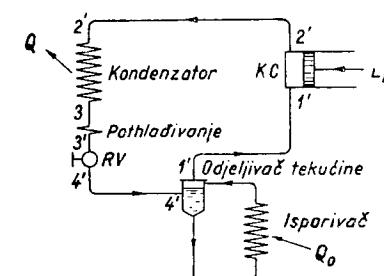


Sl. 166. Položaj kritične  
točke i rashladni učin.

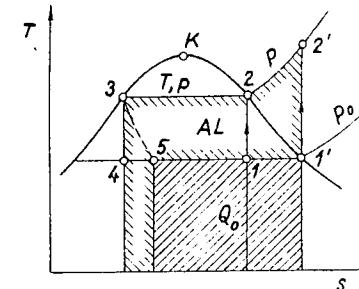
Za veličinu gubitaka prigušivanja bitna je i blizina kritične točke. Tako na pr. kod ugljičnog dvokisa  $CO_2$  leži kritična temperatura,  $t_k = 31^\circ C$ , u blizini uobičajenih temperatura rashladne vode, pa ju ove gdjekad i premašuju.  $T-s$ -dijagram za ovaj slučaj odgovara nekako slici 166. To znači, da se rashladni učin  $Q_0$  stegne na uski pojas predočen u toj slici. Kod neznatnog povišenja temperature rashladne vode  $T$  ili sniženja temperature isparivača  $T_0$ , može se dogoditi, da pod ovim uvjetima rashladni učin  $Q_0$  uopće isčezne, pak bi rashladni stroj zatajio. Zato moramo kod medija s niskom kritičnom točkom, kao što je  $CO_2$ , kod odbacivanja ekspanzionog cilindra računati s mnogo većim gubicima, nego li kod takvih s višom kritičnom točkom, kao što je amonijak  $NH_3$ .

## Suho usisavanje

**Suho usisavanje** Rashladni učin možemo prema onom u sl. 163. znatno povećati, ako se odlučimo na usisavanje suho zasićene pare, te na taj način prebacimo kompresiju u pregrijano područje. Iznad isparivača u sl. 167. smješten je izlučivač vlage. Zadatak mu je da izluči kapljice, koje para donosi sa sobom iz isparivača. Izlučivanje kapljica postizava se tako, da se zgodnom izvedbom izlučivača para prisili na naglu promjenu smjera strujanja. Kapljice će zbog veće tromosti nastojati zadržati svoj prvobitni smjer, naletiti će na suprotnu stijenknu, i otjecat će po stijenci u spojnu cijev sa isparivačem. Ovako osušena para 1', koja će kod dobre izvedbe izlučivača biti praktički suho zasićena, skreće u usisnu cijev

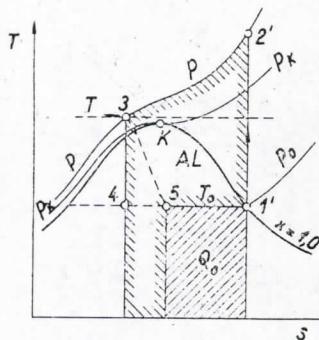


**Sl. 167. Suho usisavanje pare  
i pothlađivanje kapljeline**

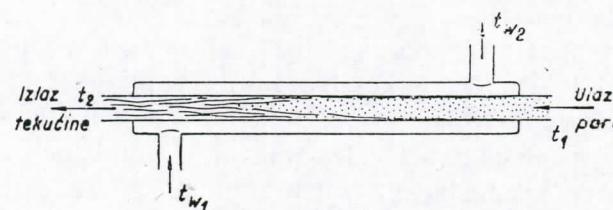


Sl. 168. *Ts*-dijagram za suho usisavanje

kompresora. U  $Ts$ -dijagramu, sl. 168., osušena je para predložena točkom 1'. Kompresija na kondenzatorski pritisak  $p$  do stanja 2' odvija se dakle u pregrijanom području. Na taj način možemo znatno povećati rashladni učin. To je jedan od načina, da za pogon u blizini kritične točke omogućimo neki rashladni učin usprkos velikim gubicima prigušivanja. Vidimo iz  $Ts$ -dijagrama, da se kod kompresije u pregrijanom području prekraćuje temperatura rashladne vode  $T$ , čime se grieši o osnovno načelo hlađenja. No u ovom slučaju je prednost povećanja učina veća nego li pogoršanje zbog prekoračenja zadane temperaturne granice. To važi tako dugo, dok je pojas ispod 22', sl. 168. uzak, odnosno dok je dodatni proces 11' 2' 2 još povoljniji od procesa 1 2 3 5. Kod rashladnih procesa s medijima, kod kojih je  $T_K \gg T$ , prigodice će se proces s primjenom suhog usisavanja i pogoršati, no kod tvari kod kojih je  $T_K \approx T$ , proces će se znatno poboljšati. S praktičnog gledišta usisavanje će suhe pare značiti uvijek neko poboljšanje, jer će se kompresijom u pregrijanom području osjetljivo smanjiti gubici na stijenkama cilindra. Kako se vidi iz sl. 169. može se suhim usisavanjem osim toga rashladni proces provoditi i onda, kad je rashladna temperatura viša od kritične. To će biti često kod strojeva na  $\text{CO}_2$ , ako je rashladna voda topla, s čime moramo računati u toplijim krajevima, na brodovima i t. d. Kod ovakvog procesa nije više mnogo preostalo od nekadašnjeg CARNOT-ovog procesa. No otstupanja nisu baš tako velika, bu-

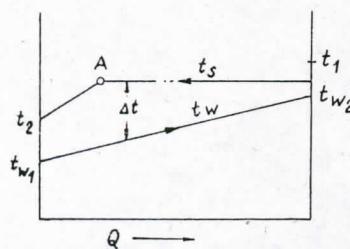


Sl. 169. Proces u nadkritičnom području temperaturi  $T_{w2}$  rashladne vode, sl. 170. i 171. Ovdje su nane-



Sl. 170. Dvocijevni kondenzator

sene temperature rashladnog medija i rashladne vode iznad izmijenjenih toplina  $Q$ . Izmijenjena toplina u prvom je približuju razmjerna površini izmjenjivača t. j. dužini cijevi. Para rashladnog medija ulazi u rashladnu cijev s desne strane i ukapljuje se na hlađenoj stijenci. Kad je dolazna para pregrijana izobrazit će se u osi cijevi jezgra pregrijane pare. U blizini stijenke para se hlađi, da bi se kao kapljevinu istaložila na stijenci. Zato će kondenzacija pare obično početi odmah na početku cijevi, bez obzira na to da li je para pregrijana ili ne. Kondenzat se sakuplja na drugom kraju cijevi. Vodimo li rashladnu vodu u protustruji, to se kondenzat kod izdašnog odmjerivanja površine može primjetljivo

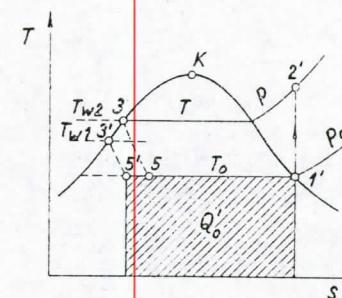


Sl. 171. Tok temperatura za sl. 170. obično početi odmah na početku cijevi, bez obzira na to da li je para pregrijana ili ne. Kondenzat se sakuplja na drugom kraju cijevi. Vodimo li rashladnu vodu u protustruji, to se kondenzat kod izdašnog odmjerivanja površine može primjetljivo

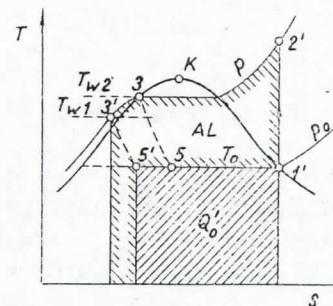
dući da u blizini kritične točke linije  $p = \text{konst}$  leže prilično položito.

**Pothlađivanje** Do sada smo preću- tno pretpostavili da su temperatura kondenzacije  $T$  i ona ras- hladne vode  $T_w$  jednake. No ne smi- jemo izgubiti iz vida, da se rasladna voda kod odvođenja topline grieje, i to tim više, što je manja raspoloživa količina vode. U tom slučaju mora temperatura kondenzacije  $T$  biti viša ili u najboljem slučaju jednaka izlaznoj temperaturi  $T_{w2}$  rashladne vode, sl. 170. i 171. Ovdje su nane-

„pothlađiti”. Pri tom će postignuta temperatura kondenzata biti primjetljivo niža od temperature kondenzacije  $t$ . Pothlađivanje bit će osobito znatno kod pomanjkanja vode, budući da će ovdje ugrijavanje rashladne vode ( $t_{w2} - t_w$ ) biti veliko. Utjecaj pothlađivanja rashladne vode može se za takav slučaj vidjeti iz sl. 172. Pothlađivanjem kapljevine, točka  $3'$ , dobivamo pri istom potrošku rada  $AL = i_2' - i_1'$  isti rashladni učin  $Q'_0 = i_1' - i_5'$  pa prema tome i povoljniji proces, nego li za slučaj, da se kon-



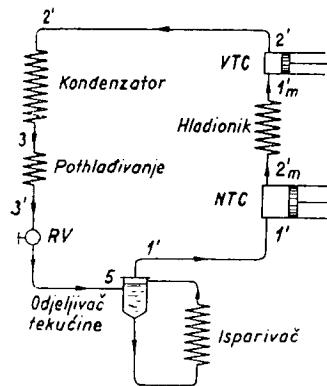
Sl. 172. Pothlađivanje.



Sl. 173. Pothlađivanje kod ugljičnog dvokisika  $\text{CO}_2$

denzat ohladio samo do temperature kondenzacije, točka  $3$ , pri čem mora biti  $T > T_{w2}$ . Naročito značenje ima pothlađivanje za rashladne strojeve sa ugljičnim dvokisom u blizini kritične temperature, slika 173. Ovdje teku linije  $p = \text{konst}$  prilično položito, pak je i neznatno pothlađivanje već dosta, da se točka  $3'$  pomakne znatno na lijevo od točke  $3$ . Na taj način se proces znatno poboljšava. Pothlađivanje kapljevine vrši se obično u zadnjim cijevima kondenzatora, sl. 167.

**Dvostepena kompresija** Pri niskim rashladnim temperaturama  $T_0$ , pada točka  $1'$  jako na desno. Posljedica je toga, da će krajnja točka kompresije  $2'$  pasti nepotrebno visoko, što se protivi postavljenom osnovnom načelu hlađenja, prema kojem bismo se morali procesom što točnije prilagoditi temperaturama  $T$  i  $T_0$ . Tu se možemo ispomoći dvo- stepenom kompresijom s međuhlađenjem. Dvostepenom kom-



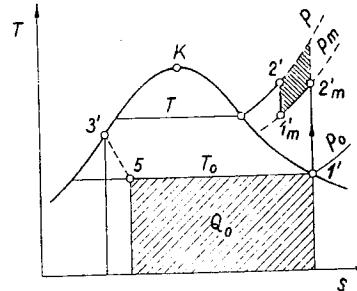
Sl. 174. Dvostepena kompresija.

presije zнатно sniziti, a time i zнатно smanjiti potrošak snage stroja. Shema ovakve naprave prikazana je u sl. 174. Para se u međuhladnjaku kod međupritisaka  $p_m$  ponajprije ohladi na temperaturu rashladne vode  $T$ , a onda se tek komprimira na pritisak kondenzatora  $p$ . Međustepenim hlađenjem štedi se neki rad, koji je u sl. 175. predočen desno gore iscrtkanom površinom. Što je  $T_0$  niže, to važnija postaje ova dvostepena, odnosno višestepena kompresija.

**Rashladni uređaj s mlaznim duvaljkama** Pored već spomenutih rashladnih sretstava  $NH_3$ ,  $CO_2$ , može se kao razhladni medij upotrijebiti i vodena para. Velika joj je praktička prednost u tome, što je sasvim neotrovna i neopasna, ali joj je glavni manjak, da nije primjenljiva za temperature ispod  $0^\circ C$ , budući da se ovdje voda smrzava. Osim toga je gustoća vodene pare u blizini ledišta tako malena (pri  $t = 0^\circ C$  pritisak je zasićenja tek  $p = 0,0062 \text{ at}$ ), da potrebn volumen pare ne možemo više svladati stupnim strojevima. No cilindar kompresora može se nadomjestiti mlaznom duvaljkom, koja se iako ne sasvim ispravno naziva i difuzorom, sl. 176. Radna para  $D$  ekspandira bilo kao svježa para iz kotla, bilo kao odušna para iz nekog parnog stroja, u mlaznici, gdje se postizavaju vrlo velike brzine strujanja.

Po (366) može se proširenje mlaznice  $\frac{F_0}{F}$  tako odmjeriti, da pri-

presijom i međustepenim hlađenjem može se konačna temperatura kom-



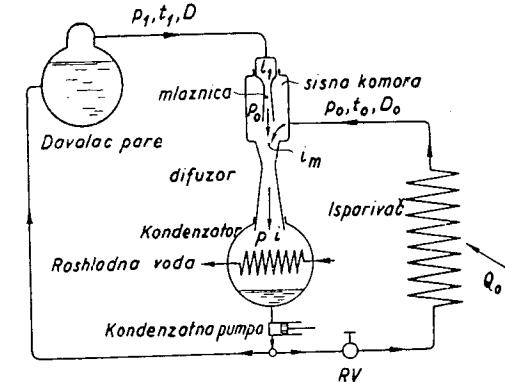
Sl. 175. *Ts*-dijagram za sl. 175.

tisak  $p_0$  na izlazu iz mlaznice bude nešto niži nego li pritisak u isparivaču rashladnog stroja. Tako se iz isparivača neprekidno siše  $D_0 \text{ kg/h}$  pare koja se odvlači u kondenzator. Ovdje se ne želimo upustiti u način izvedbe ovakvog isparivača jer to za nas nije bitno<sup>1)</sup>). Kako je difuzor u svojem nastavku proširen, to se brzina strujanja u njemu opet smanjuje u kondenzatoru. Tlak je u rom rashladne vode  $T$ . Ukapljiti i cilj je postignuti presija u difuzoru adijalovanje kondenzata služi v

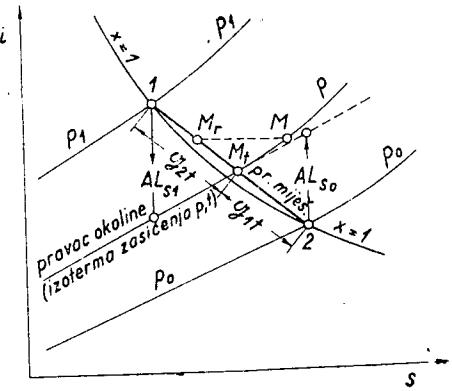
$$AL_{s1} > 0 \text{ e } AL_{s0} < 0$$

$AL_{s_0}$  je negativno jer se za održavanje struje  $2$  (usisavanje!) troši više rada, nego

<sup>1)</sup> Želimo li u isparivaču postignuti temperature ispod  $0^{\circ}\text{C}$  to se ledište vode može sniziti dodatkom soli (rasolina).



Sl. 176. Rashladni uređaj s mlaznom duvaljkom za vodenu paru



Sl. 177. Omjeri mlazova u parnoj duvalici

li se dobiva prevođenjem stanja 2 u okolišne stanje.

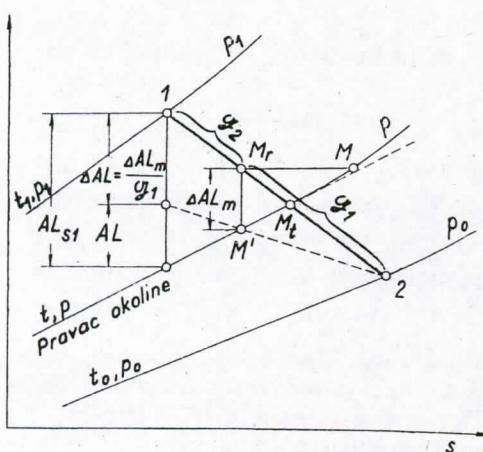
U slučaju teoretski najmanjeg potroška pare  $\left(\frac{D}{D_0}\right)_i = \left(\frac{g_1}{g_2}\right)$  dobila bi smjesa stanje  $M_t$  na pravcu miješanja. Tu bismo iskoristili svu radnu sposobnost  $AL_{s1}$  radne pare, jer bi proces tekao povratno.

Zbog neminovnih gubitaka mora se trošiti više pare i to  $\frac{D}{D_0} = \frac{g_1}{g_2}$  kg/kg. Zato će nastati mješavina stanja  $M$ , koja leži na liniji pritiska u kondenzatoru  $p$ . Točka  $M$  leži desno od točke  $M_r$ , koja potonja pretstavlja mješavinu, do koje bismo bili došli reverzibilnim miješanjem istih količina pare. Pri tom su entalpije obih stanja jednake, sl. 177. i 141. Prirast je entropije kod nastajanja pravog stanja mješavine  $M$  za 1 kg smjese  $\Delta s = M_r M$ . Radna sposobnost stanja  $M$ , koja mu je još možda preostala, u kondenzatoru će se i onako beskorisno izgubiti. Zato se od radne sposobnosti  $AL_{s1}$  radne pare 1 izgubio radni iznos  $\Delta AL = \frac{\Delta AL_m}{g_1}$ , sl. 178. pak je stupanj nepovratnosti

$$\nu = \frac{\Delta AL}{AL_{s1}}$$

a sa stupnjem djelovanja  $\eta = 1 - \nu$  bit će

$$\frac{D}{D_0} = \frac{1}{\eta} \left( \frac{D}{D_0} \right)_i = \frac{AL_{s1}}{AL_{s1} - \Delta AL} \left( \frac{g_1}{g_2} \right)_i \quad (418)$$



Sl. 178. Gubici u mlaznoj duvaljci.

Za nas je važno pitanje, da pronađemo približni položaj pravog stanja smjese da doznamo, kako su veliki gubici. Pored zakona o uzdržanju energije mora se kod sraza dviju parnih struja zadovoljiti i stavak o impulzu. Radna para 1 postići će kod širenja u mlaznici brzinu  $w_1$  m/sek. Dolaz-

na je brzina hladne pare  $w_0$ , a nakon sraza i miješanja strujat će mješavina u difuzor brzinom  $w_m$ . Hladna će se para dovoditi mlazu radne pare često sa strane, tako da se može računati, da aksijalna komponenta brzine  $w_0$ , koja je sama po sebi malena, iščezava. Pod pretpostavkom, da se u mlazu  $D$  iza mlaznice kao i u mlazu  $(D + D_0)$  statički pritisci malo razlikuju od tlaka  $p_0$  u isparivaču, glasi impulzni stavak

$$Dw_1 = (D + D_0) w_m$$

a odavle brzina smjese

$$w_m = \frac{D}{D + D_0} w_1 \quad (419)$$

Prema razlaganjima u odlomku „O pojavama miješanja“ važi  $\frac{D}{D + D_0} = g_1$ . Veličina  $g_1$  predviđena je u sl. 178. omjerom dužina  $\frac{M_r 2}{1 2}$ . Brzina smjese mora biti međutim barem tako velika, da se u priključenom difuzoru (kompresiona mlaznica) može postignuti pritisak kondenzatora, pak mora biti

$$A \frac{w_m^2}{2g} = (i - i_m). \quad (420)$$

Ovdje označuje  $i_m$  entalpiju mješavine pred difuzorom kod tlaka  $p_0$  a  $i$  njenu entalpiju kod ulaska u kondenzator, dakle kod tlaka  $p$ . Pri tom predviđamo, da se kod ulaska u kondenzator može zanemariti kinetička energija mješavine. U protivnom slučaju mora  $w_m$  biti još veće, nego li po (420). Iz (419) i (420) slijedi

$$A \left( \frac{D}{D + D_0} \right)^2 \frac{w_1^2}{2g} = (i - i_m). \quad (421)$$

Odavle se može odrediti potrošak pare  $\frac{D}{D_0}$ , čim je poznata brzina  $w_1$  radne pare i prirast entalpije smjese u difuzoru  $(i - i_m)$ . Kod strujanja je bez trenja

$$A \frac{w_1^2}{2g} = (i_1 - i_{01}) \quad (422)$$

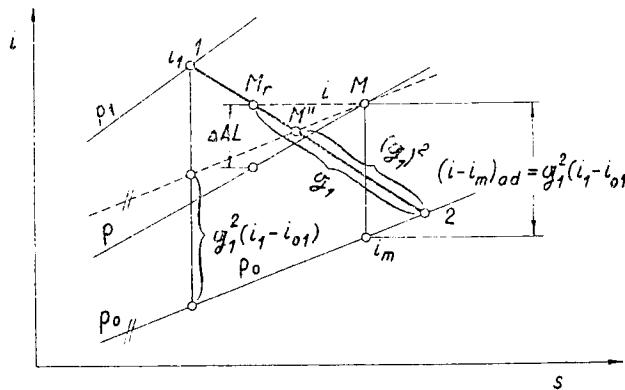
gdje je  $i_{01}$  entalpija radne pare na izlasku iz mlaznice pri tlaku  $p_0$ . Tako je iz (421)

$$g_1^2(i_1 - i_{01}) = i - i_m \quad (423)$$

Uzmimo najpovoljniji slučaj, da ekspanzija u mlaznici kao i kompresija u difuzoru teku bez trenja (adijabatski). U tom će se slučaju usisavanjem hladne pare ustaliti takav omjer miješanja  $g_1$  da se uvrštenjem vrijednosti  $g_1^2$  zadovolji uvjet (423) a zato mora biti

$$g_1 = \sqrt{\frac{i - i_m}{i_1 - i_{01}}} \quad (424)$$

što se može očitati iz  $is$ -dijagrama, sl. 179. Ovdje označuje  $\Delta s = M_r M$  odnosno  $\Delta AL$  gubitak, koji nastaje srazom obih struja pare  $D$  i  $D_0$ .



Sl. 179. K proračunu mlazne duvaljke.

Pri tom proračunu možemo bez teškoća uzeti u obzir i gubitke, koji nastaju u mlaznici i u difuzoru, sl. 179. Kod strujanja sa trenjem označeno je konačno stanje radne pare iza ekspanzione mlaznice točkom  $1_a$ , slika 180. Onda je „entalpija mirovanja“ ovog stanja

$$i_r = i_{1a} + A \frac{w_1^2}{2g} \quad (425)$$

predviđena točkom stanja  $1_r$ . S ovom točkom stanja postupamo tako, kao da je to polazno stanje radne pare, ali za stru-

janje bez trenja. Sada je  $(i_1 - i_{1a}) < (i_1 - i_{01})$ , što i naravno u (418) povećava potrošak pare  $g_1$ .

U difuzoru pojavljuju se gubici, s posljedicom, da se pri ulasku u kondenzator postigne stanje  $M$  smjese, koje leži desno od adijabate kompresije. Time postaje  $(i - i_m) > (i - i_m)_{ad}$

Što u (418) još dalje povećava potrošak pare Iz slike 180. vidi se, da će iole veći gubici u difuzoru <sup>1)</sup> pomaknuti točku  $M$  u točku  $M_\infty$ . Za tu je točku

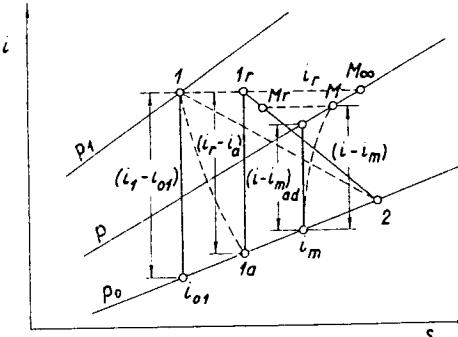
potrošak pare beskonačno velik,  $\frac{D}{D_0} = \frac{g_1}{g_2} = \infty$ . Iz ovog razlova postoji neki najniži položaj točke stanja  $1$  radne pare, ispod kojeg više nije moguć pogon mlazne duvaljke. Drugim riječima pritisak suhe pogonske pare  $1$  mora ležati iznad nekog najmanjeg pritiska, ako želimo da se uopće omogući pogon mlaznom duvaljkom. Ovaj je najmanji pritisak ovisan od pritiska  $p$  i  $p_0$  u kondenzatoru i isparivaču i od gubitka u difuzoru.

Današnje mlazne duvaljke rade sa znatnim gubicima, od kojih su najveći oni zbog sraza. No ima izgleda, da bi se stnovitim mjerama, kao što su sniženje pritiska između mlaznice i difuzora ili opet ovlaživanjem radne pare ovi gubici mogli znatno smanjiti <sup>2)</sup>.

Svojstvo je ugljičnog dvokisa  $CO_2$  da ispod trojne točke ( $p_{tr} = 5,28 \text{ at}, t_{tr} = -56,6^\circ\text{C}$ ) on ne može postojati u kapljivitoj obliku t. j. da se on kod okolišnjeg tlaka ne može topiti već samo sublimirati. U novije se vrijeme ovo iskorištava za posebne zadatke u tehnici hlađenja. Prednost je u tome što kruti ugljični dvokis pri dovođenju topline ne kopni

<sup>1)</sup> Ovi su načelno veći, nego li oni kod ekspanzione mlaznice.

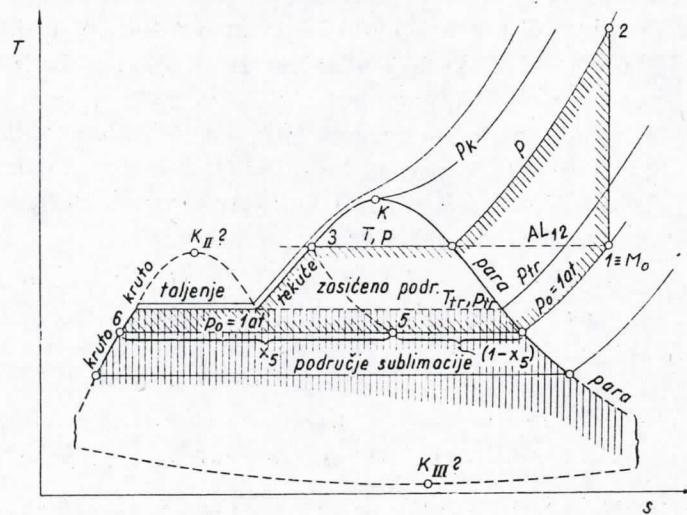
<sup>2)</sup> Vidi također drugi svezak u stupcu „Kompresija uzduha u duvaljci s pomoćnom ekspanzijom“. Osim toga od autora: Dampfbefeuchtung in Strahlgläsen. Forschung Ing. Wes. 11 (1940) 210.



i ne moći, što je za stanovite svrhe na pr. za hlađenje poštanskih pošiljaka vrlo povoljno. Zato je i nastalo ime „suhi led“. Druga je prednost, što je temperatura sublimacije kod 1 Atm mnogo niža ( $-78,5^{\circ}\text{C}$ ) od ledišta vode, pak se zato kruti  $\text{CO}_2$  može upotrebljavati za održavanje nižih temperatura, nego li je to moguće sa običnim ledom.

Sa termodinamičkog je gledišta hlađenje s krutim ugljičnim dvokisom, koji kod  $760 \text{ mm Hg}$  sublimira pri  $-78,5^{\circ}\text{C}$  pogriješno, ako se ne radi o tom, da se postignu niske rashladne temperature. Načelno bi bilo krivo robu od možda  $0^{\circ}\text{C}$  hladiti sa temperaturom isparivača od  $-78,5^{\circ}\text{C}$ . No u pojedinim slučajevima mogu praktične prednosti biti tolike, da premašuju ovu termodinamičku manjkavost. To će biti naročito onda, kad je traženi rashladni učin razmjerno malen, te tako samo u maloj mjeri sudjeluje na ukupnim troškovima hlađenja.

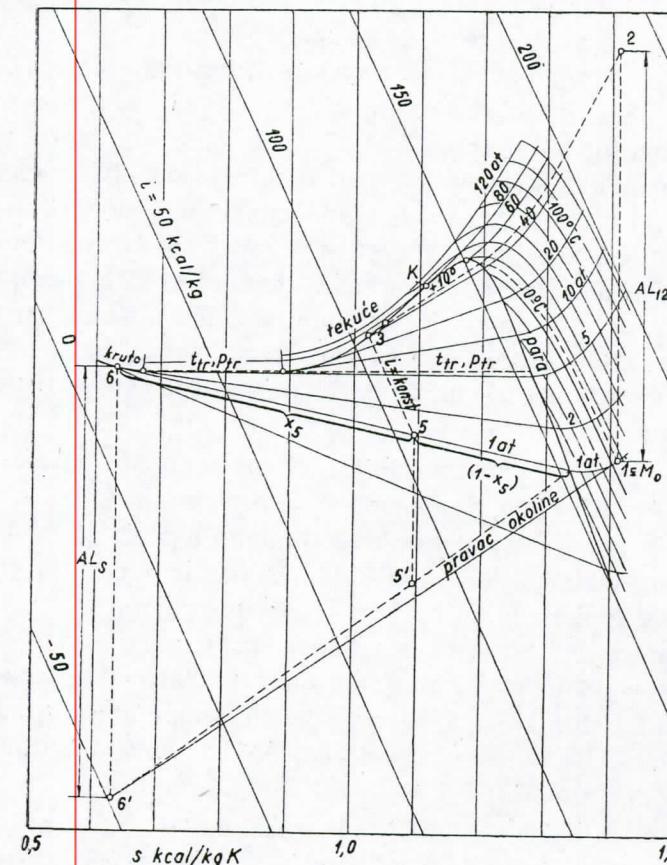
Kruti se ugljični dvokis proizvodi iz bilo kako dobivenog  $\text{CO}_2$ -plina<sup>1)</sup>. Ovime će se raspolagati kod okolišne temperature  $t_1 = t$  i kod okolišnjeg pritiska  $p_1 = p_0 = 1 \text{ at}$ , točka 1 sl. 181. Komprimirat ćemo ga adijabatski na pritisak konden-



Sl. 181.  $Ts$ -dijagram za ugljični dvokis  $\text{CO}_2$ .

<sup>1)</sup> Naročito se cjeni  $\text{CO}_2$  dobiven kod alkoholnog vrijenja (piva i t.d.)

zatora  $p_2 = p$ , točka 2. Ugljični se dvokis hlađenjem u kondenzatoru ukaplji u stanje 3. Kapljevinu prigušujemo kod  $i = \text{konst}$  do okolišnjeg pritiska u stanju 5,  $i_5 = i_3$ . U trajnom pogonu bilo bi za proizvodnju od 1 kg krutnog ugljičnog dvokisa  $\text{CO}_2$  stanja 6,  $p_6 = p_0 = 1 \text{ at}$ ,  $t_6 = -78,9^{\circ}\text{C}$ , potrebno izvršiti rad barem u veličini negativne radne sposobnosti  $AL_s$ , sl. 182. Pra-



Sl. 182. Is-dijagram uglijčnog dvokisa  $\text{CO}_2$

vac okoline ima nagib  $\frac{di}{ds} = T$  i on dira izobaru  $p_0 = 1 \text{ at}$  u točci okoline  $1 = M_0$  pri temperaturi  $t_1 = t$ , budući da za izo-

baru po (315) isto važi  $\left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_{po} = T$  u točci  $M_0$ . Taj pravac okoline usporedan je s izotermom zasićenja okolišne temperature  $t = t_1$ . Za  $CO_2$  leži točka okoline  $M_0$  u pregrijanom području. Da bismo mogli usporediti potrebni rad kompresije  $AL_{12} = i_2 - i_1$  za kruti ugljični dvokis s teoretskim potrebnim radom  $AL_s$ , moramo oba iznosa svesti na pripadne količine  $CO_2$ . Iz 1 kg komprimiranog  $CO_2$  dobivamo po sl. 181. i 182. samo  $(1 - x_5)$  kg suhog leda, dok nam ostatak izmiče kao para od 1 atm —  $78,9^\circ C$ . Za tu količinu morali bismo teoretski utrošiti rad  $(1 - x_5) AL_s$ , što je u slici 182. predočeno dužinom 5'. Za prikazani proces potreban je naprotiv rad  $AL_{12} = i_2 - i_1$ . Vidimo iz dijagrama, da je opisani postupak s termičkog gledišta vrlo neekonomičan. Ne samo da je teoretski rad  $AL_s$  zbog niske temperature od  $-78,9^\circ C$  sam po sebi velik, već se on nepovratnim procesima još i umnogostruči. Ove nepovratnosti mogu se znatno smanjiti višestepenom kompresijom, višestepenim prigušivanjem te drugim mjerama. Zbog krutog agregatnog stanja suhog leda najbolje nije moguće upotrijebiti ekspanzionalni stroj namjesto prigušnog ventila.

**Dizalica topline** Temperature  $T$  i  $T_0$  možemo kod rashladnog stroja odabrati prema potrebi. Tako možemo čitav temperaturni nivo podignuti, pak za  $T_0$  odabrati okolišnu temperaturu, a za  $T$  jednu višu temperaturu. Pri tom ćemo postignuti, da se toplina  $Q$  odvodi mediju kod neke više temperature  $T$  i tako na pr. predaje prostoriji, koju treba grijati. Ovakav postupak se prigodice upotrebljava u kemičkoj industriji, kad treba kod razmjerno niskih temperatura grijati kakve grijalice. U novije se vrijeme nastoji taj postupak primjeniti i za grijanje prostorija<sup>1)</sup>.

Način se rada ni u koliko ne razlikuje od rada nekog rashladnog stroja, samo što je smještaj temperatura viši, a osim toga što se toplina ne predaje okolini (rashladnoj vodi), već se naprotiv od nje oduzima.

<sup>1)</sup> M. Egli, Die Wärmepumpenheizung des Züricher Rathauses. Bull. Schweiz. Elektrotechn. Ver. 29 (1938) 261.

U teoretskom bismo slučaju, kod izvedbe lijevokretnog CARNOT-ovog procesa, sl. 152. mogli s radom  $AL$  dignuti toplinu  $Q = Q_0 + AL$  na viši temperaturni nivo  $T$ , pak bi bilo

$$\frac{Q}{AL} = \frac{T}{T - T_0}$$

Kod grijanja prostorija bilo bi u zimi na pr.  $T_0 = 275 K$  (hladna rječna voda) a  $T = 293 K$  (temperatura sobe), pak bi prema tome bio toplinski množilac

$$\frac{Q}{AL} = \frac{293}{293 - 275} = 16,3$$

To znači, da bismo električnim pogonom s potroškom od 1 kWh mogli dobiti  $26,3 \cdot 860 = 14000$  kcal/h kao toplinu za grijanje, dok bismo neposrednim grijanjem s električnim otpornikom (električna peć) dobili samo 860 kcal/h. Nažalost postaju prilike odmah znatno nepovoljnije, ako se uzme u obzir, da grijalice u prostoriji (radijatori) moraju imati znatno višu temperaturu od sobne, jer se na taj način povisuje gornja temperatura. No usprkos toga su izgledi za primjenu dizalice topline obzirom na energetsko gospodarstvo neobično zamarni. Pitanje je vremena, da se nađu takva tehnička rješenja, koja će uz primjero približenje teoretskom slučaju sniziti nabavne troškove takove naprave na podnošljivu mjeru.

U nekim je tehničkim pogonima primjena dizalice topline već prebrodila svoj eksperimentalni stadij, te se u tom pogledu pružaju dalekosežne mogućnosti. Prije svega tamo, gdje se moraju savladati razmjerno male temperaturne razlike.

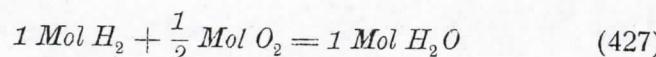
UNIVERSITETSKA  
TEHNIČKA  
BIBLIOTEKA  
ZAGREB  
FACULTET  
ZAGREB  
BIBLIOTEKA  
LITERATURA  
TEHNIČKA  
BIBLIOTEKA  
ZAGREB

brzina reakcije s temperaturom naglo rasti, te odvođenje topline neće više moći držati korak s proizvedenom toplinom. Zato temperatura takve čestice goriva brzo raste (temperatura izgaranja). Pobrinemo li se za to, da se odvođenje topline spriječi, to će se temperatura zapaljenja znatno sniziti. U velikim hrpmama ugljena odvođenje je topline često tako loše, da već i vanredno polagana oksidacija kod okolišne temperature dostaje, da se temperatura povisi, te da se ugljen tako sam zapali. U tom je slučaju već i okolišna temperatura postala temperaturom zapaljenja.

Prema tomu je temperatura zapaljenja nekog goriva ona granična temperatura, iznad koje je oslobođanje topline oksidacijom naglije, a ispod koje je polaganje od odvođenja topline. Zato je temperatura zapaljenja jedne te iste čestice goriva u najvećoj mjeri ovisna o prilikama koje vladaju obzirom na odvođenje topline provođenjem, zračenjem i konvekcijom.

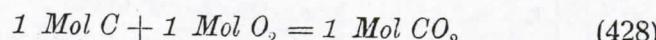
**Stehiometrički odnos** Mehanizam izgaranja nije još ni kod najjednostavnijih goriva razjašnjen. Ne zna se pouzdano, kroz kakve se sve spojeve prolazi tokom oksidacije, dok se postigne konačni proizvod izgaranja. No za naša razmatranja dovoljno je poznavati konačne proizvode, koji mogu nastati.

Kod izgaranja se vodika mora zadovoljiti stehiometrička jednadžba

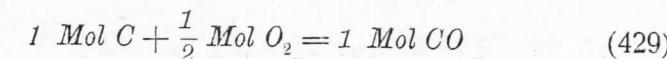


U jednadžbi se pojavljuju samo one količine, koje zaista reagiraju, a ne one koje samo prisustvuju izgaranju. Ako kod izgaranja ima na pr. kisika u izobilju, to će suvišni kisik ostati nepromjenjen. Kad je prisutno previše vodika, to će nešto vodika ostati neizgorenog.

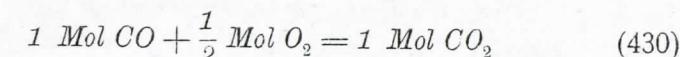
Kod izgaranja ugljika važi



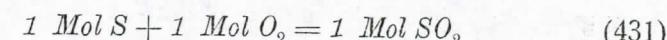
no pod stanovitim prilikama može izgaranje ugljika teći i po jednadžbi



Reakciju (428) označujemo kao potpuno izgaranje, a onu pod (429) kao nepotpuno izgaranje ugljika, jer nastali plin  $CO$  (ugljični oksid) može još dalje izgoriti na  $CO_2$  po jednadžbi



Za nepotpuno izgaranje ugljika na  $CO$  potrebno je prema tomu za polovinu manje kisika, nego li za potpuno izgaranje na  $CO_2$ . Sumpor goriva oksidirat će po jednadžbi



Sad možemo odrediti onu količinu uzduha, koja je potrebna za izgaranje goriva. Onu količinu, koja je potrebna za potpuno izgaranje jedinice količine goriva zovemo minimalnom ili najmanjom potrebom uzduha. Ona se često označuje i kao teoretska količina uzduha. Za jedinicu količine goriva uzima se 1 kg kod krutih i kapljivitih, ili 1  $Nm^3$  ili 1 Mol kod plinovitih goriva.

**Kruta i kapljevita goriva** Za određivanje one količine kisika, koja je u molovima potrebna za izgaranje po (427), (428) i (431) moramo znati koliko se molova  $C$ ,  $H_2$ ,  $S$  nalazi u 1 kg goriva. Molekularne su težine

$$m_C = 12, m_{H_2} = 2, m_S = 32, m_{O_2} = 32, m_N = 28. \quad (432)$$

Time dobivamo iz težinskog sastava ove količine težinskih udjela izražene u molovima

$$M'_c = \frac{c}{12}; M'_h = \frac{h}{2}; M'_s = \frac{s}{32}; M'_{O_2} = \frac{o}{32}; M'_{N_2} = \frac{n}{28} \quad (433)$$

sve računamo u molovima po kilogramu goriva, jer se  $c$ ,  $h$ ,  $n$  i t. d. odnose na 1 kg goriva. Tako su na pr. kod ugljena sastava

$$c = 0,78, h = 0,05, o = 0,08, w = 0,02, *a = 0,07 \quad (434)$$

$$\text{količine u molovima } M'_c = \frac{0,78}{12} = 0,065 \text{ Mol } C/kg \text{ G, } M'_h =$$

\*

260

$$= \frac{0,05}{2} = 0,025 \text{ Mol H}_2/\text{kg } G, M'_o = \frac{0,08}{32} = 0,0025 \text{ Mol O}_2/\text{kg } G,$$

$$M'w = \frac{0,02}{18} = 0,0011 \text{ Mol vode/kg } G.$$

Za izgaranje od  $h$  kg, t. j.  $M'_h$  Mola vodika, koji su sadržani u 1 kg goriva, troši se po (427) samo polovica broja mola kisika. Zato je za izgaranje od  $h$  kg vodika potrebna minimalna količina kisika  $(O_m)_h$  Mol/kg

$$(O_m)_h = \frac{1}{2} M'_h = \frac{1}{2} \frac{h}{2} = \frac{h}{4} \text{ Mol O}_2/\text{kg } G \quad (435)$$

Analogno je za izgaranje od  $c$  kg/kg ugljika

$$(O_m)_c = 1 M'_c = \frac{c}{12} \text{ Mol O}_2/\text{kg } G \quad (436)$$

dok je za  $s$  kg/kg sumpora

$$(O_m)_s = 1 M'_s = \frac{s}{32} \text{ Mol O}_2/\text{kg } G \quad (437)$$

U ugljenu nema drugih izgorljivih sastojina. Sadržaj dušika  $n$  ne oksidira u spomena vrijednim količinama, već se samo rasplinjuje u plinoviti dušik. Ali zato u ugljenu ima  $o$  kg/kg ili  $M'_o$  Mol/kg kisika, koji se može upotrijebiti za oksidaciju. Zato se za potpuno izgaranje 1 kg ugljena mora uzduhom dovesti minimalna količina kisika  $O_m$

$$O_m = (O_m)_c + (O_m)_h + (O_m)_s - M'_o \text{ Mol O}_2/\text{kg } G \quad (438)$$

odakle se uvrštenjem gornjih izraza dobiva

$$O_m = \frac{c}{12} + \frac{h}{4} + \frac{s}{32} - \frac{o}{32} = \frac{c}{12} \left( 1 + \frac{3h - \frac{3}{8}(o-s)}{c} \right) \quad (439)$$

ili

$$O_m = \frac{c}{12} \left( 1 + 3 \frac{h - \frac{o-s}{8}}{c} \right) \text{ Mol O}_2/\text{kg } G. \quad (440)$$

Izraz u zagradi naziva se karakteristikom goriva i označuje se sa  $\sigma$

$$\sigma = 1 + 3 \frac{h - \frac{o-s}{8}}{c} \quad (441)$$

Kako smo već spomenuli, sadržaj čemo sumpora za naše račune ponajčešće zanemariti. Po (440) je

$$\sigma = \frac{O_m}{c} = \frac{O_m}{M'_c} \cdot \frac{\text{Mol O}_2/\text{Mol C ili Nm}^3 \text{ O}_2/\text{Nm}^3 \text{ C}}{12} \quad (442)$$

čime smo dobili još općenitiju definiciju karakteristike  $\sigma$ . Prema tome je ova karakteristika nekog goriva određena omjerom minimalne potrebe kisika  $O_m$  i količine ugljika  $M'_c$  u jedinici količine goriva, ako oboje računamo u molovima. Pri tom možemo za jedinicu goriva odabrat i 1 kg (kod krutih i kapljevitih goriva) ili 1 Mol odnosno 1 Nm<sup>3</sup> ili 1 m<sup>3</sup> ili 1 lit (kod plinovitih i kapljevitih goriva). Brojčana vrijednost karakteristike  $\sigma$  nije ovisna o izboru jedinice količine goriva. Zato veličina  $\sigma$  prikazuje jednu vrijednu karakteristiku. Kad nam je na neki način poznat sadržaj ugljika  $c$  i karakteristika  $\sigma$  goriva <sup>1)</sup>, to za proračunavanje minimalne količine kisika nije potrebno poznavati druge težinske udjele  $n$ ,  $o$ ,  $s$ ,  $a$  i  $w$ , jer je prema (442)

$$O_m = \sigma M'_c \text{ Mol O}_2/\text{jedinica goriva} \quad (443)$$

te

$$O_m = \sigma \frac{c}{12} \text{ Mol O}_2/\text{kg } G \quad (444)$$

a zbog 1 Mol = 22,4 Nm<sup>3</sup>

$$O_m = \sigma \cdot 22,4 \frac{c}{12} = 1,867 \cdot \sigma \cdot c \text{ Nm}^3 \text{ O}_2/\text{kg } G \quad (445)$$

Tako je na pr. za kameni ugalj po (434)

$$\sigma = 1 + 3 \frac{0,05 - \frac{0,08}{8}}{0,78} = 1,154$$

<sup>1)</sup> Pouzdanu se analizu goriva može jednostavno i brzo dobiti u priključku na kalometriranje u kalorimetričkoj bombi. Takvo određivanje traži pri istoj točnosti samo jedan dio vremena od onoga, koje je potrebno za običnu kvantitativnu analizu goriva. Vidi od autora: Brennstoffanalyse mit Bombe, Manometer und Orsatapparat, Arch. Wärme-wirtsch. (1928).

$$O_m = 1,867 \quad \sigma c = 1,867 \cdot 1,154 \cdot 0,78 = 1,68 \text{ Nm}^3/\text{kg G}$$

Za izgaranje ne dovodimo čisti kisik, nego onaj u uzduhu. Sastav je uzduha u volumenskim udjelima (molni udjeli) dovoljno točno  $r_{O_2} = 0,21$ , dok se ostatak sastoji iz dušika s malim dodacima drugih plinova, kao što je na pr. argon i t. d., a koji baš kao i dušik ne sudjeluju u izgaranju,  $r_{N_2} = 0,79$ . Računanje sa točnjim sastavom uzduha<sup>1)</sup> kod proračuna izgaranja nema smisla, budući da su podaci mjerjenja dobiveni kod ložišta opterećeni sa suviše velikim netočnostima<sup>2)</sup> a da bi ovakvo računanje bilo opravdano.

Minimalna je potreba uzduha prema tome

$$L_m = \frac{O_m}{0,21} \quad \text{Mol L/jedinica goriva} \quad (446)$$

ili

$$L_m = \frac{\sigma}{0,21} \frac{c}{12} = 0,397 \cdot \sigma \cdot c \quad \text{Mol L/kg G} \quad (447)$$

$$L_m = 22,4 \cdot 0,397 \cdot \sigma \cdot c = 8,90 \cdot \sigma \cdot c \quad \text{Nm}^3 \text{ L/kg G} \quad (447)$$

Kad je sastav goriva poznat po svojoj kemijskoj formuli, na pr. etilni alkohol  $C_2H_5OH = C_2H_6O$  ili općenitije neki ugljikovodik sastava  $C_xH_yO_z$  potreba je kisika u molovima po molu goriva po stehiometričkoj uvjetnoj jednadžbi (427) i (428)

$$O_m = \left( x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2} \right) \text{ Mol } O_2/\text{Mol G} \quad (448)$$

a karakteristika goriva po (442)

$$\sigma = \frac{O_m}{M'_c} = \frac{x + \frac{y}{4} - \frac{z}{2}}{x} = 1 + \frac{1}{4} \frac{y - 2z}{x} \quad (449)$$

<sup>1)</sup> Po Wegener, Thermodynamik der Atmosphäre, str. 24., Leipzig (1928) za uzduh je  $r_{O_2} = 0,2090$ ,  $r_{H_2} = 0,00003$ ,  $r_{CO_2} = 0,00029$  (promjenljivo),  $r_{H_2O} = \text{promjenljivo}$ , dok se ostatak sastoji iz dušika i drugih indiferentnih plinova.

<sup>2)</sup> Vidi niže dolje u odlomku „Upotrebitost jednadžbi“.

### Plinovita goriva

Kod plinovitog čemo goriva s kemijskim oznakama u buduće označivati i brojčane vrijednosti pripadnih volumenskih udjela, pak će tako na pr. biti  $CO'_1 = r_{CO_1}$ ,  $CO'_2 = r_{CO_2}$ ,  $H'_2 = r_{H_2}$ . Jedamput crtkani kemijski znakovi odnose se na sastav plina prije izgaranja. Općenito će takav sastav plina prije izgaranja biti određen s izrazom

$$CO' + H'_2 + CH_4' + C_2H_4' + \Sigma C_xH_y' + O'_2 + N'_2 + CO'_2 = 1. \quad (450)$$

Član  $\Sigma C_xH_y'$  dobiva se iz elementarne analize obično samo sumarno<sup>1)</sup>. Zato će postojati stanovita nesigurnost u poznavanju plinskog sastava. No kod mnogih je plinova  $\Sigma C_xH_y'$  obično tako malena da se namjesto toga može uvrstiti neki srednji ugljikovodik s kojim se po iskustvu s dovoljnom točnosti zadovoljava naše zahtjeve. Za takav je plin po (427), (430) i (448)

$$O_m = \frac{1}{2} M'_{CO} + \frac{1}{2} M'_{H_2} + 2M'_{CH_4} + 3M'_{C_2H_4} + \\ + \sum \left\{ \left( x + \frac{y}{4} \right) M'_{C_xH_y} \right\} - M'_{O_2} \quad \text{Mol/Mol G} \quad (451)$$

a iz razloga što se molarne količine pojedinih plinova predaju njihovim volumenskim udjelima

$$O_m = \frac{1}{2} (CO' + H'_2) + 2 CH_4' + 3 C_2H_4' + \\ + \sum \left\{ \left( x + \frac{y}{4} \right) C_xH_y' \right\} - O'_2 \quad \text{Mol/Mol G} \quad (452)$$

I ovdje je karakteristika goriva

$$\sigma = \frac{O_m}{M'_c} \quad (453)$$

gdje  $M'_c$  prikazuje sveukupnu količinu ugljika u molovima po molu plina

$$M'_c = CO' + CH_4' + 2 C_2H_4' + \Sigma (x \cdot C_xH_y') + \\ + CO'_2 \quad \text{Mol C/Mol G} \quad (454)$$

<sup>1)</sup> Većina viših ugljikovodika  $C_xH_y$  apsorbira se obično prezasićenom (dimećom) sumpornom kiselinom, što se vrši istovremeno u jednoj pipeti. Zato ostaje vrsta i količina pojedinih viših ugljikovodika obično nepoznata.

Kod pravog se izgaranja rijetko kada dovodi teoretski potrebna najmanja količina uzduha  $L_m$ , već se dovodi količina

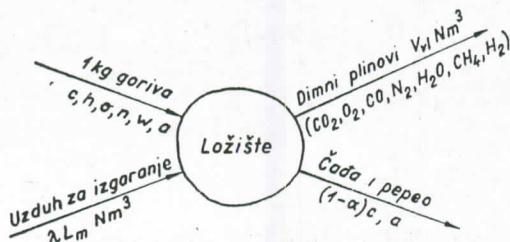
$$L = \lambda \cdot L_m \text{ Mol/Mol } G \text{ ili } Nm^3/Nm^3 G \quad (455)$$

Faktor pretička uzduha, ili ukratko uzdušni faktor  $\lambda$  može biti veći ili manji od jedinice. U posljednjem slučaju izgaranje će biti nepotpuno, što se češće događa u benzinskim motorima, Pretičak je uzduha  $(\lambda - 1) \cdot L_m$ .

**Kontrola ložišta** Vrlo je važno znati, da li je izgaranje u nekom ložištu potpuno. Kad u dimnim plinovima ima još neizgorenih plinova, od kojih se najčešće pojavljuje  $CO$ , izgubit ćemo u dimnjaku toplinu izgaranja ovih plinova. S druge je strane vrlo važno poznavanje pretička uzduha. Plinovi izgaranja napuštaju naime kotao rijetko kada s temperaturom koja bi bila niža od  $150^\circ C$  no obično u dobrim kotlovima sa  $200^\circ C$  do  $300^\circ C$ , pak je za grijanje izgubljena i osjetna toplina ovih plinova. Svakako ne će biti svejedno, da li se tako odvodi mnogo plinova izgaranja (kod velikog pretička uzduha) ili malo plinova izgaranja (kod malog  $\lambda$ ), jer su gubici razmjerni količini plinova izgaranja.

Kako je neposredno mjerjenje količine uzduha za izgaranje ili samih plinova izgaranja tehnički obično neprovodivo to se pomažemo kemijskom analizom plinova izgaranja, da bismo

odavle mogli ocijeniti potrošak uzduha. U tu svrhu izvode se pače aparati, koji samostalno registriraju kemijski sastav plinova izgaranja. Zato ćemo ispitati u kakvoj su međusobnoj



Sl. 183. Razmjena tvari u ložištu.

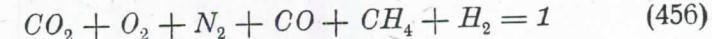
vezi sastav goriva, potrošak uzduha, sastav plinova izgaranja, njihova količina i t. d.

Proces u ložištu šematisirajmo si prema sl. 183. Sve tvari (elemente), koje u ustaljenom stanju dovodimo ložištu, moramo opet odvoditi. Kod izdašnog dovođenja uzduha, kod njegove

dobre raspodjele svim česticama goriva i kod ne prenaglog ohlađivanja plinova izgaranja, teći će izgaranje potpuno. U plinovima izgaranja naći ćemo pored dušika iz uzduha  $N_2$  i suvišnog kisika još samo produkte izgaranja  $CO_2$  i  $H_2O$ . Ne snabdiju li se neke čestice goriva dovoljnom količinom uzduha (loša razdioba uzduha) ili odvedemo li ih prerano sa pepelom, to će plinovi izgaranja sadržati manje ili veće količine neizgorenih plinova, u prvom redu  $CO$ , a u pepelu će preostati neizgoreni ostatak. O tom se možemo uvjeriti žarenjem jedne probe pepela u tignju. Kod sasvim lošeg izgaranja naići ćemo u izgorenim plinovima pored  $CO$  i na neizgoreni vodik  $H_2$  te na metan  $CH_4$  a prije svega i na čadu, pak toplinski gubici mogu biti vrlo znatni.

Iz 1 kg goriva i  $L = \lambda L_m Nm^3/kg$  uzduha za izgaranje nastaje  $V_v Nm^3/kg$  vlažnih izgorenih plinova,  $a kg/kg$  neizgorivog pepela, te  $(1 - \alpha) \cdot c kg/kg$  izgorivog krutog ostatka u čadi i pepelu. Pretpostavit ćemo, da se kruti ostatak sastoji samo iz ugljika, a da  $h$ ,  $o$ ,  $n$ , i  $w$  potpuno prelaze u izgorene plinove. To se dovoljnom točnosti poklapa s iskustvom. Voda nastala izgaranjem vodika  $h$  kao i vlaga goriva  $w$  prelaze u plinove izgaranja zbog njihove visoke temperature kao vodena para  $H_2O$ .

Kemijsku analizu izgorenih plinova provodimo uvijek kod okolišne temperature, pak se pri tom plinska proba, koju oduzimamo dimnom kanalu, ohladi. Pri tom će sva vodena para iz izgorenog plina praktički iskondenzirati, a posljedica je da se pravi volumen plinske probe smanji za volumen kondenzirane vodene pare. Zato nadovezana kemijska analiza daje volumenske udjele pojedinih sudionika  $CO_2$ ,  $O_2$  i t. d. u odnosu za  $1 Nm^3$  osušene, a ne vlažne plinske probe. Sastav osušenog izgorenog dima bit će prema tome općenito



Ovdje su ostali  $CO$ ,  $CH_4$ , i  $H_2$  neizgoreni zbog nepotpunog toka izgaranja, dok se  $O_2$  nije mogao potrošiti zbog nekog, možda samo lokalnog pretička uzduha. Kako vidimo, udio vodene pare  $H_2O$  ne pojavljuje se u (456), i ako je vodena para

prisutna u vrućim vlažnim, izgorenim plinovima. Volumen je vlažnih plinova izgaranja, koji nastaju iz 1 kg goriva

$$V_{vl} = (1 + H_2O) \cdot V_s \text{ Mol/kg ili } Nm^3/kg \quad (457)$$

ako se sa  $V_{vl}$  Mol/kg ili  $Nm^3/kg$  označi količina vlažnih, a sa  $V_s$  količina hlađenjem osušenih izgorenih plinova. Budući da se  $CO_2$ ,  $O_2$  i t. d. odnose na  $V_s$ , to je na pr. molarna količina  $M_{CO_2}$  ugljičnog dvokisa, koji nastaje iz 1 kg goriva

$$M_{CO_2} = V_s \cdot CO_2 \quad (458)$$

a sasvim slični izrazi vrijede i za druge sudionike.

Da bismo dobili dovoljan broj jednadžbi postavit ćemo bilance pojedinih elemenata.

*Bilanca ugljika* Dovedene i odvedene količine ugljika moraju biti jednakе. Pri tom moramo naravno obje količine mjeriti u istom sustavu mjera, na pr. u kilogramima ili još bolje u molovima. Gorivom dovodimo ugljik

$$M'_c = \frac{c}{12} \text{ Mol C/kg G} \quad (459)$$

a odvodimo ga u izgorenim plinovima  $V_s \cdot M_c$  Mol/kg te u pepelu i čadi ( $M_c$ )<sub>c</sub> = (1 -  $\alpha$ )  $M'_c$ , gdje je

$$M_c = CO_2 + CO + CH_4 \quad (460)$$

količina ugljika u molovima po molu ili po  $Nm^3$  osušenih izgorenih plinova. Mora biti

$$M'_c = V_s \cdot M_c + (1 - \alpha) \cdot M'_c, \quad (461)$$

odakle možemo izračunati onu količinu osušenih izgorenih plinova, koja nastaje iz 1 kg goriva

$$V_s = \frac{\alpha M'_c}{M_c} = \frac{\alpha \frac{c}{12}}{CO_2 + CO + CH_4} \text{ Mol/kg G} \quad (462)$$

Želimo li izgorene plinove  $V_s$  dobiti u  $Nm^3$  (jedan Mol sadrži 22,4  $Nm^3$ ) to je

$$V_s = \frac{1,867 \cdot \alpha \cdot c}{CO_2 + CO + CH_4} \text{ Nm}^3/kg G \quad (463)$$

Tako možemo bez teškoća odrediti količinu izgorenih osušenih plinova, kad poznamo njihov sastav i potrošeni ugljik  $\alpha$

*Bilanca dušika* Dušik se uglavnom dovodi uzduhom i to u količini  $0,79 \lambda L_m$  Mol  $N_2/kg G$ , no dovodimo ga još i gorivom u količini  $\frac{n}{28}$  Mol  $N_2/kg G$ . Poslije izgaranja ima dušika samo u izgorenim plinovima  $V_s \cdot N_2$  Mol  $N_2/kg G$ . Mora biti

$$0,79 \cdot \lambda \cdot L_m + \frac{n}{28} = V_s \cdot N_2 \quad (464)$$

Uvedemo li još veličinu

$$\nu = \frac{M_n'}{M_c'} = \frac{\frac{n}{28}}{\frac{c}{12}} \quad (465)$$

kao dušičnu karakteristiku goriva, to se iz (464), (446) i (442) dobiva

$$V_s = \frac{M_c' \left( \nu + \frac{0,79}{0,21} \lambda \sigma \right)}{N_2} = \frac{\frac{c}{12} \left( \nu + \frac{0,79}{0,21} \lambda \sigma \right)}{N_2} \quad (466)$$

Uvezvi u obzir (462) dobivamo izraz

$$\frac{\alpha N_2}{CO_2 + CO + CH_4} = \frac{0,79}{0,21} \lambda \sigma + \nu \quad (467)$$

Ovdje možemo na pr. odrediti uzdušni koeficijent  $\lambda$

$$\lambda = \frac{0,21}{0,79 \sigma} \left( \frac{\alpha N_2}{CO_2 + CO + CH_4} - \nu \right) \quad (468)$$

U slučaju da je na pr.  $\nu = 0$  ( $n = 0$ ) što važi za sva kapljevita a obično dovoljnim približenjem i za kruta goriva, pa kad osim toga praktički nema ostataka u pepelu ni stvaranja čade, to je po (468) za određivanje uzdušnog faktora  $\alpha$  potrebno poznavanje samo sastava izgorenih plinova i karakteristike goriva  $\sigma$ . Sastav goriva, na pr.  $c$  u tu svrhu nije ni potrebno poznavati<sup>1)</sup>.

<sup>1)</sup> Karakteristiku goriva  $\sigma$  može se jednostavnim načinom odrediti u kalorimetričkoj bombi, ako se mjeri pritisak i temperatura prije i poslije kalorimetiranja, te ako se odredi sadržaj  $CO_2$  izgorenih plinova u bombi. Vidi primjedbu na str. 261

*Bilanca kisika* Ložištu dovodimo kisik u uzduhu i to  $\lambda O_m$  Mola, te u gorivu  $M'_{O_2}$  Mola. Prema tome je

$$\lambda O_m + M_{O_2}' = V_s \cdot M_{O_2} \quad (469)$$

Izgoreni plinovi sadržavaju  $V_s \cdot M_o$ , Mola kisika. U tim plinovima ovih je  $M_{O_2}$  Mola kisika zastupano djelomice kao slobodni kisik  $O_2$  a djelomice kao vezani kisik u  $CO_2$ ,  $CO$  i  $H_2O$ . Odvedena je količina kisika računana po molu osušenog dima

$$M_o = O_2 + CO_2 + 0,5(CO + H_2O) \quad (470)$$

U gorivu je kisik sadržan kako u udjelu kisika  $o$ , tako i u udjelu vlažnosti  $w$ . U molovima je količina vode  $w$

$$M_w' = \frac{w}{18} \quad (471)$$

jer je molekularna težina vode  $m_{H_2O} = 18$ . U svakom molekulu vode nalazi se samo polovina molekula kisika pak je

$$M_{0_2}' = \frac{o}{32} + \frac{1}{2} \frac{w}{18} \quad (472)$$

Uvrstimo li (472), (470) i (443) u (469) to možemo odrediti udio vodene pare  $H_2O$  koja otpada na jedan mol osušenog izgorenog plina

$$H_2O = 2 \frac{\frac{o}{32} + \frac{w}{36} + \lambda \sigma M_c'}{V_s} - 2(CO_2 + O_2) - CO \quad (473)$$

*Bilanca vodika* Slično kako smo postavili bilancu kisika možemo postaviti i bilancu vodika, pak dobivamo

$$\frac{h}{2} + \frac{w}{18} = V_s(2CH_4 + H_2 + H_2O) \quad (474)$$

odakle slijedi

$$H_2O = \frac{\frac{h}{2} + \frac{w}{18}}{V_s} - 2CH_4 - H_2 \quad (475)$$

Iz identičnosti jednadžbi (475) i (473) slijedi uvrštenjem (466), (461), (456), i uvezvi u obzir da je sa  $s = 0$  iz (440)

$$\frac{h}{2} - 2 \frac{o}{32} = 2(\sigma - 1) \quad (476)$$

važni izraz

$$\alpha \frac{CO_2 + O_2 + 0,5 CO - 0,5 H_2 - CH_4}{CO_2 + CO + CH_4} = (\lambda - 1)\sigma + 1 \quad (477)$$

U ložištu, u kojem izgaranje ne teče sasvim loše, naići ćemo u izgorenim plinovima tek na tragove vodika i metana ( $H_2 \approx 0$ ,  $CH_4 \approx 0$ ), pak dobivamo jednostavnije jednadžbe

$$V_s = \frac{\alpha \frac{c}{12}}{CQ_0 + CQ} \quad (478)$$

$$\frac{\alpha(1 - CO_2 - O_2 - CO)}{CO_2 + CO} = \frac{0,79}{0,21} \lambda \sigma + \nu \quad (479)$$

$$\alpha \frac{CO_2 + O_2 + 0,5 CO}{CO_2 + CO} = (\lambda - 1) \sigma + 1 \quad (480)$$

**Upotrebitost jednadžbi** U ove tri jednadžbe (478), (479), (480) ima devet promjenljivica ( $V_s$ ,  $\alpha$ ,  $c$ ,  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $v$ ,  $CO_2$ ,  $O_2$ ,  $CO$ ). Prema tome moramo ovdje mjeranjima odrediti šest veličina, da bismo tri preostale mogli proračunati iz ovih jednadžbi. Mjeranjem se mogu razmjerno dobro obuhvatiti  $c$ ,  $\sigma$ ,  $v$ ,  $CO_2$  i  $O_2$ . Besprikorno određivanje  $CO$  eksperimentalno je već teže, dok sasvim moramo odustati od neposrednog određivanja veličina  $V_s$ ,  $\lambda$  i  $\alpha$ . Postoji doduše teoretska mogućnost, iz onih jednadžbi proračunati ove tri netom spomenute veličine kad mjerimo preostalih šest. No praktički ovaj put daje sasvim nepouzdane rezultate. Plinske su analize  $CO_2$ ,  $O_2$  i  $CO$  od takvog osjetljivog utjecaja na spomenute jednadžbe, da uobičajene i neizbjježive pogreške mjeranja davaju vrijednosti za  $\alpha$ , koje se međusobno razlikuju i za 50% i više. Na-protiv jednadžbe za  $V_s$  i  $\lambda$  nisu tako pretjerano osjetljive na netočnosti plinske analize, ako za veličinu  $\alpha$  možemo na bilo koji način pretpostaviti, da nam je poznata, na pr.  $\alpha = 1$ . Razlog je u tome što se do jednadžbi kako za  $V_s$ , tako i za  $\lambda$  došlo na osnovi bilanca tvari, koje se kod izgaranja pojavljuju u dovoljnim količinama ( $c$  i  $N_2$ ). Tome je nasuprot (477) dobivena

na osnovi bilance slobodnog vodika  $\left(h - \frac{\sigma}{8}\right)$ <sup>1)</sup>, koji se pojavljuje samo u vrlo malim količinama tako da su podaci o njegovoj količini vrlo nesigurni. Uvrstimo li naime (468) u (477) to slijedi

$$\alpha \frac{1,266(CO_2 + O_2) + 0,766 CO - 0,734 CH_4 - 0,234 H_2 - 0,266}{CO_2 + CO + CH_4} = \\ = 1 - 0,266\sigma - \sigma. \quad (481)$$

ili za pojednostavljeni slučaj, kad je  $H_2 = 0$ ,  $CH_4 = 0$

$$\alpha \frac{1,266(CO_2 + O_2) + 0,766 CO - 0,266}{CO_2 + CO} = 1 - 0,266\sigma - \sigma \quad (482)$$

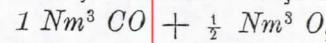
Kod takvih goriva, kod kojih je  $\sigma = 1 - 0,266\alpha$ , desna je strana jednaka nuli, pak zato mora brojnik lijevog razlomka isčeznuti kod svih izgaranja, kod kojih je  $\alpha$  veće od nule. Dobije li se brojnik zbog neke sitne a neizbjegive pogriješke analize pogriješno različitim od nule, to ćemo dobiti računski da je  $\alpha = 0$ , i ako je u zbilji možda  $\alpha = 1$ . Vidimo dakle kako su proračunate vrijednosti  $\alpha$  silno osjetljive na točnost mjerena, kod goriva kod kojih se  $\sigma$  samo malo razlikuje od  $(1 - 0,266\alpha)$ . To je nažalost slučaj kod svih krutih goriva. Tako je na pr. za kruta goriva skoro uvijek  $1 < \sigma < 1,15$ . Kod kapljevitih goriva, kod kojih  $\sigma$  može imati mnogo veće vrijednosti (na pr. za benzin  $\sigma \approx 1,5$ ) ova je osjetljivost mnogo manja, tako da u tom slučaju možemo  $\alpha$  na temelju prikazanih jednadžbi izračunati, i ako ni ovdje ne smijemo očekivati preveliku točnost dobivenog rezultata.

Kod krutih goriva jedini je izlaz da udio neizgorenog ugljika  $(1 - \alpha)$  nekako ocijenimo. Za nuždu možemo naknadno izžariti pepeo, da vidimo koliko sadrži neizgorenog ostatka. No time još nismo obuhvatili gubitke ugljika u čadji i u uzvitlanom pepelu koje odnosi dim u dimnjak. Svakako će kod krutih goriva oprežna ocjena veličine  $\alpha$  dati uvijek razumnije vrijednosti, nego li njen proračunavanje iz analize izgorenih plinova na temelju bilo kakvih jednadžbi, koje su dobivene iz spomenutih bilanca.

<sup>1)</sup> Skopčane bilance kisika i vodika daju baš taj član.

### Toplinske pojave kod izgaranja.

Većina se tehničkih procesa izgaranja odvija kod stalnog pritiska. Promotrit ćemo najprije jednostavni slučaj izgaranja ugljičnog oksida  $CO$  na  $CO_2$ , i to s teoretskom količinom kisika. U sl. 184. smještena je teoretska smjesa



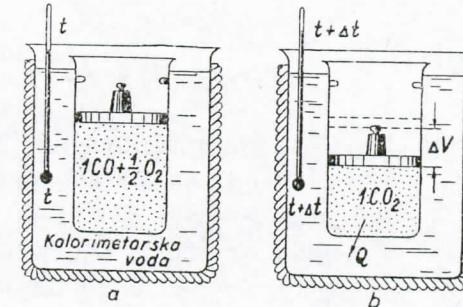
(praskavac ugljičnog oksida) u posudi kalorimetra kod konstantnog pritiska. Posudu za izgaranje uronili smo u kalorimetričku vodu, koje nam je količina i temperatura  $t$  poznata. Pošto su se temperature izjednačile, upalit ćemo smjesu, koja izgori na  $CO_2$  pak se zbog naglog porasta temperature jako rastegne. U tu se svrhu mora predvidjeti dovoljno mjesta za gibanje stapa. No nakon kratkog vremena izjednačit će se temperatura izgorenih plinova s temperaturom kalorimetričke vode i to pri temperaturi  $(t + \Delta t)$ . Iz prirasta temperature  $\Delta t$  kalorimetričke vode možemo odrediti toplinu izgaranja  $Q$  koja je predana toj vodi. S druge je strane po prvom glavnom stavku

$$Q = U' - U + AL \quad (483)$$

gdje označuju  $U'$  i  $U$  unutarnje energije plinova prije i poslije izgaranja, a  $AL$  rad izvršen vanjskim pritiskom pri pomicanju stapa. Kod otvorenih kalorimetara ovaj je pritisak jednak okolišnom pritisku  $P$ , pak je

$$Q = U' - U + AP(V' - V) \quad (484)$$

Provedemo li pokus kod  $t \approx t' = 0^\circ C$ , pri čem možemo prirast  $\Delta t$  držati po volji malen povećanjem količine kalorimetričke vode, to ćemo toplinu izgaranja, koja se pri  $0^\circ C$  oslobađa iz jedinice količine goriva, označiti kao ogrijevnu moć  $\tilde{Q}_p$  kcal/kg odnosno kcal/Mol odnosno kcal/Nm<sup>3</sup>. Pri tom svodimo ogrijevnu moć na jedinicu količine bilo od 1 kg kod krutih i kapljevitih, bilo na jedan mol ili na jedan Nm<sup>3</sup> kod plinovitih



Sl. 184. Izgaranje pri stalnom pritisku.

goriva, na što se mora paziti kod brojčanih računa. Indeks  $p$  ukazuje na izgaranje kod konstantnog pritiska. S entalpijom

$$I = U + APV \quad (485)$$

dobivamo iz (484)

$$Q = I' - I \quad (486)$$

a pri  $0^\circ C$

$$\mathfrak{H}_p = I'_o - I_o \quad (487)$$

Kako se za  $\mathfrak{H}_p$  eksperimentom dobiva nekoliko tisuća kalorija, to iz (487) slijedi da se entalpija a time i unutarnja energija goriva i kisika kod kemijskog preobraženja uslijed izgaranja, t. j. uslijed oksidacije vrlo jako mijenja. Drugim riječima: Kod inače istih temperatura molekuli goriva i kisika koji međusobno još nisu izreagirali, nabiti su sa znatno većim količinama energije nego li molekuli oksidacionih produkata  $CO_2$  i  $H_2O$ .

Ne provedemo li pokus kod  $0^\circ C$  već kod  $t^\circ C$ , to ćemo općenito dobiti neku drugu ogrijevnu moć

$$(\mathfrak{H}_p)_t = I'_t - I_t \quad (488)$$

pri čem je

$$I'_t = I'_o + M' \int\limits_o^t C'_p dt = I'_o + M'[C'_p]_o^t \cdot t \quad (489)$$

$$I_t = I_o + M \int\limits_o^t C_p dt = I_o + M[C_p]_o^t \cdot t \quad (490)$$

Ovdje je  $M'$  molarna količina gorive smjese prije izgaranja, računana za 1 Mol goriva, a  $M$  količina izgorenih plinova nakon izgaranja. Tako je na pr. u sl. 184. količina  $M' = 1 + \frac{1}{2} = 1,5$ ,

dok je  $M = 1$ . Veličine su  $C'_p$  dnosno  $[C'_p]_o^t$  prava odnosno srednja molarna specifična toplina za 1 Mol gorive smjese, a  $C_p$  i  $[C_p]_o^t$  one za 1 Mol izgorenog plina. Vrijednosti  $[C'_p]_o^t$  i  $[C_p]_o^t$  pojedinih sudionika mogu se očitati iz sl. 21. Budući da se razlikuju  $M$  od  $M'$  i  $C_p$  od  $C'_p$ , to će u općenitom

slučaju određivanje ogrijevne moći kod raznih temperatura dati razne vrijednosti. Po (487) i (488) slijedi

$$(\mathfrak{H}_p)_t - \mathfrak{H}_p = \int\limits_o^t (M'C'_p - MC_p) dt = t \{M'[C'_p]_o^t - M[C_p]_o^t\} \quad (491)$$

Ova je razlika za uobičajene pokušne temperature, koje se kreću u visini sobne temperature u poredbi sa  $\mathfrak{H}_p$  vrlo malena. No kod visokih temperatura ova razlika postaje znatna, tako da se kod visokih temperatura mogu oslobođiti sasvim druge količine topline nego li kod  $0^\circ C$ .

Ogrijevna moć vrlo se često određuje izgaranjem u zatvorenoj posudi, koja se zove još i kalorimetrička bomba. U tom slučaju nema smanjivanja volumena, pak se zato ne može niti vršiti rad vanjskog pritiska. Zato je

$$\mathfrak{H}_v = U' - U \quad (492)$$

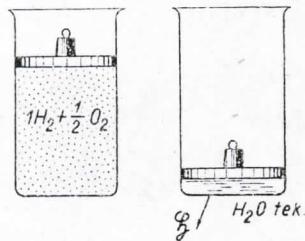
Razlika prema  $\mathfrak{H}_p$

$$\mathfrak{H}_p - \mathfrak{H}_v = AP(V' - V) \quad (493)$$

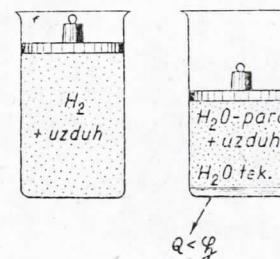
ovisna je o kontrakciji ( $V' - V$ ) koja se pojavljuje kod izgaranja pri  $P = \text{konst}$ . Kod uobičajenih goriva razlika je ogrijevnih moći obično znatno manja od 1%, a to je iznos, koji obično leži unutar granica netočnosti kod kalorimetričkih mjerjenja. Zato ćemo kod daljnjih izlaganja uopće odustati od upotrebe indeksa  $p$ , odnosno  $v$ , pri čem za onog čitatelja, kojemu je stalo do strogog ustanovljivanja pojmove, primjećujemo da s oznakom  $\mathfrak{H}$  mislimo na ogrijevnu moć kod  $P = \text{konst}$ .

Ogrijevna je moć kod izgaranja uz prisutnost uzduha naravno ista kao i uz prisutnost čistog kisika, uz pretpostavku da je u oba slučaja prisutno dovoljno kisika i da izgaranje teče potpuno. Ogrijevna je moć neovisna i o pretičku uzduha, budući da se indiferentni dušik i nepotrošeni kisik na koncu vraćaju na istu temperaturu, t. j. na istu entalpiju kao i prije izgaranja. Ovi inertni plinovi zato ne gutaju nikakvu toplinu.

Naročitu pažnju treba posvetiti izgaranju vodika i gorivima koja sadrže vodik ili vodu. Izgorimo li naime po sl. 185. čisti vodik s teoretskom količinom kisika, to nastaje samo vodena



Sl. 185. Izgaranje praskavog plina



Sl. 186. Izgaranje vodika u uzduhu

para  $H_2O$  koja se kod okolišne temperature potpuno ukaplji. Tako dobivamo ogrjevnu moć  $\tilde{H}$ . Izgorimo li naprotiv vodik u mnogo uzduha, sl. 186. to će poslije izgaranja suvišni kisik i sav dušik ostati u plinovitom stanju. U tom će plinskom prostoru biti prisutno i toliko vodene pare, koliko to dopušta pritisak zasićenja vodene pare pri pokušnoj temperaturi. Što je veći pretičak uzduha, t. j. što je veći prostor izgaranja, ili što je veća pokušna temperatura, to će manje vode kondenzirati, tako da se pripadna toplina kondenzacije  $r$  vode ne može predati kalorimetričkoj vodi. U tom će slučaju mjeriti manju toplinu izgaranja  $Q < \tilde{H}$  nego li u sl. 185., i ako je izgorila ista količina vodika. Kad u graničnom slučaju sva voda kod izgaranja ostaje u parovitom stanju, na pr. kod dovoljno velikog prostora izgaranja, dobit ćemo toplinu izgaranja, koja je za toplinu isparivanja vode  $r$  manja od  $\tilde{H}$ . Ovu toplinu izgaranja nazivamo donjom ogrjevnom moći  $\tilde{H}_d$  goriva za razliku od prave ili gornje ogrjevne moći  $\tilde{H}_g = \tilde{H}$ . U našem je slučaju za vodik

$$(\tilde{H}_d)_{H_2} = (\tilde{H}_g)_{H_2} - r_o \quad (494)$$

gdje je  $r_o$  toplina isparivanja one količine vode kod  $0^\circ C$  koja nastaje iz jedinice količine vodika. Tako je na pr. za 1 Mol  $H_2$

$$\tilde{H}_g = 68400 \text{ kcal/Mol} \quad (495)$$

a kako iz 1 Mol  $H_2$  nastaje i 1 Mol (18 kg)  $H_2O$ , to je

$$r_o = 18 \cdot 597 = 10746 \text{ kcal/Mol } H_2 \quad (496)$$

597 kcal/kg je toplina isparivanja za 1 kg vode od  $0^\circ C$ . Time dobivamo

$$(\tilde{H}_d)_{H_2} = 68400 - 10746 \approx 57700 \text{ kcal/Mol } H_2 \quad (497)$$

Odatle se vidi da razlika između gornje i donje ogrjevne moći može biti znatna.

I sva druga goriva, kod kojih se u plinovima izgaranja pojavljuje vodena para, imat će različite ogrjevne moći, već prema tome da li se ova vodena para kod pokusa kondenzira ili ne. Zato je za bilo koje gorivo

$$\tilde{H}_g = \tilde{H}_d + W \cdot 597 \quad (498)$$

gdje je  $W$  ona količina vodene pare u kilogramima, koja kod izgaranja jedinice količine goriva prelazi u izgorene plinove. Količina vodene pare  $W$  obuhvatit će kako vodu, koja je nastala izgaranjem vodika, tako i vodu koja potječe iz sadržaja vlage  $w$  goriva. Tako je na pr. kod krutih goriva

$$W = 18 \frac{h}{2} + w = 9h + w \quad (499)$$

Ogrjevna je moć ona količina topline, koja se ispoljuje oslobođanjem kemijske energije kod preobrazbe iskonskih molekula

#### Ogrjevne moći tehničkih plinova <sup>1)</sup>

Tvar	Molekularna težina $m$	Molarni volumen kod $0^\circ C$ i 760 mmHg $\text{Nm}^3/\text{kmol}$	Ogrjevne moći	
			$\tilde{H}_g$ $\text{kcal}/\text{Nm}^3$	$\tilde{H}_d$ $\text{kcal}/\text{Nm}^3$
Ugljični oksid, $CO$	28,00	22,40	3020	3020
Vodik, $H_2$	2,016	22,43	3050	2570
Metan, $CH_4$	16,03	22,36	9520	8550
Acetilen, $C_2H_2$	26,02	22,22	14090	13600
Etilen, $C_2H_4$	28,03	22,24	15290	14320
Etan, $C_2H_6$	30,05	22,16	16820	15370
Propilen, $C_3H_6$	42,05	21,96	22540	21070
Propan, $C_3H_8$	44,06	21,82	24320	22350
Butilen, $C_4H_8$	56,06	22,40	29110	27190
Normalni butan, $C_4H_{10}$	58,08	21,49	32010	29510
Izo — butan, $C_4H_{10}$	58,08	21,77	31530	29050
Benzolne pare, $C_6H_6$	78,05	22,40	35310	33870

<sup>1)</sup> Prema F. Henning, Wermetechnische Richtwerte. VDI—Verlag Berlin (1938)

u nove — oksidirane — molekule. Kod preobrazbe jedne molekule oslobođa se uvijek ista kemička energija, bez obzira na to da li se u susjedstvu odvijaju još neke druge pojave ili ne. Zato se oslobođene topline svih preobraženih molekula sumiraju, bile te molekule istovrsne ili ne. Tako je ogrjevna moć neke gorive smjese

$$\tilde{H}_g = r_1 \tilde{H}_{g1} + r_2 \tilde{H}_{g2} + \dots = \sum (r_i \tilde{H}_{gi}) \quad (500)$$

gdje  $r_i$  označuje zapremske udjele pojedinih plinova sudionika (na pr. od  $CO$ ,  $H_2$  i t. d.), a  $\tilde{H}_{gi}$  njihove gornje ogrjevne moći za 1 Mol ili za 1  $Nm^3$ . No kod kapljevitih smjesa ne možemo jednadžbu (500) strogo primjeniti, pače ni onda kad bismo umjesto volumenskih udjela uvrstili težinske udjele  $g_i$ . Razlog je u tomu, što se kod miješanja kapljevinu pojavljuje toplina miješanja <sup>1)</sup>, pak zato ima smjesa u izmješanom obliku neku drugu entalpiju nego li u neizmješanom stanju pri istoj temperaturi. No ove su topline miješanja u poredbi sa ogrjevnim moćima razmjerno malene.

### Kapljevita i pogonska goriva te ugljik <sup>2)</sup>

Gorivo	Molekularna težina $m$	Jedinična težina kod $15^\circ C$ $g/cm^3$	Vrelište $^\circ C$	Ogrjevne moći $\tilde{H}_g$ $kcal/kg$	$\tilde{H}_d$ $kcal/kg$
Ugljik (amorf), C	12,00	—	—	8150	8150
Alkohol, $C_2H_6O$	46,05	0,794	78,3	7090	6390
Spirit 95 tež. proc.	—	0,809	78,5	6730	6030
90 "	—	0,823	78,7	6380	5690
85 "	—	0,836	78,9	6020	5330
Benzol (čist), $C_6H_6$	78,05	0,884	80,5	10030	9620
Toluol (čist), $C_7H_8$	92,06	0,870	110,0	10180	9720
Ksilol (čist), $C_8H_{10}$	106,08	0,868	140,0	10280	9770
Naftalin (čist), talište $80^\circ C$ , $C_{10}H_8$	128,06	0,977 (kod $80^\circ C$ )	218,0	9615	9280
Pentan, $C_5H_{12}$	72,09	0,627	37,0	11550	10650
Heksan, $C_6H_{14}$	86,10	0,658	65,0	11500	10630
Heptan, $C_7H_{16}$	100,12	0,683	98,0	11470	10610
Oktan, $C_8H_{18}$	114,14	0,700	125,0	11420	10570
Benzin (rosječno)	—	0,7—0,74	60—120	11000	10200

<sup>1)</sup> Usporedi u drugom svesku stupac: Toplinske pojave kod miješanja.

<sup>2)</sup> Prema Hütte, Taschenbuch für Maschineningenieure, Sv. I 4, glava, 27. izdanje, Berlin (1941)

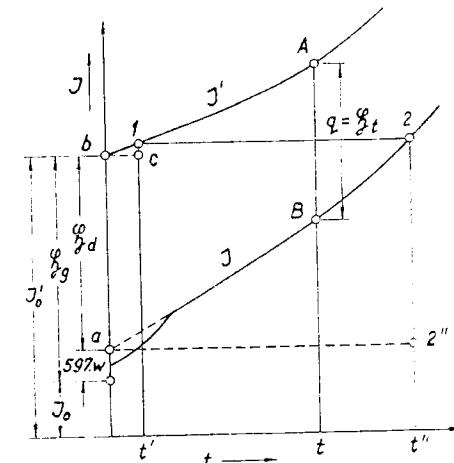
Iz sličnog se razloga može ogrjevna moć nekog goriva odrediti samo približno ogrjevnim moćima pojedinih elemenata, nekako po jednadžbi

$$\tilde{H}_d = 8100 c + 28000 \left( h - \frac{o}{S} \right) + 2500 s - 600 w,$$

budući da se u toj formuli ne uzimaju u obzir topline stvaranja organskih spojeva goriva.

Ne odvodi li se kod izgaranja toplina, Temperatura izgaranja to će izgoreni plinovi imati vrlo visoku temperaturu, tako zvanu temperaturu izgaranja. Praktički se ova temperatura postizava neposredno nakon izgaranja, da zatim naglo padne, budući da užarene čestice odavaju velike količine topline izzračivanjem. U sl. 187. nanesena je entalpija  $I$  gorive smjese, te  $I'$  izgorenih plinova u ovisnosti od temperature. Obje krivulje možemo proračunati prema (489) i (490) pomoću specifičnih toplina u sl. 21. Kratki crtkani dio krivulje  $I$  kod  $a$  u sl. 187. za izgorene plinove važio bi onda, kad bi se plinove moglo ohladiti do  $0^\circ C$  a da vodena para iz njih ne kondenzira. No budući da kod ovih temperatura vodena para najvećim dijelom kondenzira, to se oslobođa njena toplina kondenzacije, pak entalpija  $I$  pada brže, kako je prikazano punom linijom. Kod  $0^\circ C$  preostale su tek neznatne količine vodene pare. Kondenziramo li i ovaj ostatak, to dobivamo entalpiju potpuno osušenih izgorenih plinova kod  $0^\circ C$ . U sliku su unesene također ogrjevne moći  $\tilde{H}_g = I'_0 - I_0$  kao i  $\tilde{H}_d = I'_0 - I_0 - W \cdot \tilde{J}_0$ .

Izgorimo li sada gorivu smjesu temperature  $t'$ , točka 1 i ne odvodimo li pri tom topline to će se sva početna kemijska



Sl. 187.  $It$ -dijagram izgaranja  
Izgorene plinove važio bi  
onda, kad bi se plinove  
moglo ohladiti do  $0^\circ C$  a da vodena para iz njih ne kondenzira.

No budući da kod ovih temperatura vodena para najvećim dijelom kondenzira, to se oslobođa njena toplina kondenzacije, pak entalpija  $I$  pada brže, kako je prikazano punom linijom. Kod  $0^\circ C$  preostale su tek neznatne količine vodene pare. Kondenziramo li i ovaj ostatak, to dobivamo entalpiju potpuno osušenih izgorenih plinova kod  $0^\circ C$ . U sliku su unesene također ogrjevne moći  $\tilde{H}_g = I'_0 - I_0$  kao i  $\tilde{H}_d = I'_0 - I_0 - W \cdot \tilde{J}_0$ .

energija poslije izgaranja naći u entalpiji izgorenih plinova, stanja 2, jer je  $I_1' = I_2$ . Tako možemo iz dijagrama odmah naći temperaturu izgaranja  $t''$ , koja je i ucrtana. U dijagram je unešena i ogrjevna moć  $\tilde{Q}_d$  za temperaturu  $t$ , pak vidimo da se ona kod viših temperatura može znatno razlikovati od  $\tilde{Q}_d$ . U pogledu pripadnog  $It$ -dijagrama može se temperaturu izgaranja odrediti iz bilanca dovedenih i odvedenih entalpija. Ovu jednadžbu možemo napisati po uzoru sl. 187. Tu je naime dužina  $\overline{2} \overline{2}''$

$$\overline{2} \overline{2}'' = I_2 - I_a = t'' \sum M_i [C_{pi}]''_o = t'' V_s \sum \{r_i [C_{pi}]''_o\} \quad (501)$$

gdje se za izgorene plinove mora u sumi za  $M_i$  redomice uvrštavati molarne količine  $M_{CO_2}$ ,  $M_{N_2}$ ,  $M_{H_2O}$ ,  $M_{O_2}$ , dok  $[C_{pi}]''_o$  predstavlja srednje specifične topline ovih sudionika. No iz dijagrama je također

$$I_2 - I_a = I_1 - I_a = \overline{ab} + \overline{1c} = \tilde{Q}_d + t' \sum M_i [C'_{pi}]'_o \quad (502)$$

gdje se veličine  $M'_i$  i  $[C'_{pi}]'_o$  odnose na sastojine gorive smjese (gorivo + uzduh). Time dobivamo

$$\tilde{Q}_d + t' \sum M'_i [C'_{pi}]'_o = t'' \sum M_i [C_{pi}]''_o \quad (503)$$

odakle se može odrediti  $t''$ . U tu svrhu ponajprije ocijenimo temperaturu  $t''$  od oka, potražimo pripadne vrijednosti za  $[C_{pi}]''_o$  u sl. 21. te s tim vrijednostima proračunamo opet  $t''$ . Ako se ovako proračunata temperatura izgaranja  $t''$  razlikuje od ocijenjene, za koju smo uvrstili specifične topline, to ove specifične topline korigiramo prema proračunanoj temperaturi  $t''$  i račun ponovimo.

Jednadžba (503) važi samo za slučaj da se u izgorenim plinovima nije pojavila primjetna disocijacija<sup>1)</sup>. U protivnom se slučaju mora s entalpijom  $I_2$  obuhvatiti i neosloboden plin izgaranja nedogorenih — disociiranih dijelova ( $CO$  i  $H_2$ ), zbog čega je temperatura izgaranja niža. Kod izdašnog pretička uzduha ova je disocijacija i kod visokih temperatura neznatna. No kod malog pretička uzduha zamjećuje se već kod  $1500^{\circ}\text{C}$ .

<sup>1)</sup> Vidi u drugom švesku, glava „Kemijske preobrazbe i drugi glavni stavak“.

U MOLLIER-ovom  $It$ -dijagramu izgaranja, kako su ga proračunali ROSIN i FEHLING, disocijacija je uzeta u ubzir<sup>1)</sup>.

**Toplinski gubici kod izgaranja** Glavni gubici u nekom ložištu nastaju na dva načina. Pošto su vrući dimovi grijali

kotao i time izvršili svoj zadatak, odvode se u dimnjak. S njima se gubi njihova osjetna toplina  $Q_{osj}$ , budući da dim odilazi s temperaturom  $t_2$ , koja je viša od okolišne. Preostali dio gubitaka  $Q_n$  prouzrokovani su ogrjevnim moći nedogorenoga, t. j. zaostatka ugljika  $(1 - \alpha)c$  i nedogorenih plinova u dimu  $CO$ ,  $H_2$ ,  $CH_4$ . Osjetna je toplina

$$Q_{osj} = (t_2 - t_1) \sum M_i [C_{pi}]'_{t_2} \approx (t_2 - t_1) \sum M_i [C_{pi}]''_{t_1 + t_2} \quad (504)$$

kad je  $H_2 \approx 0$  i  $CH_4 \approx 0$ , to je gubitak zbog nedogorenoga

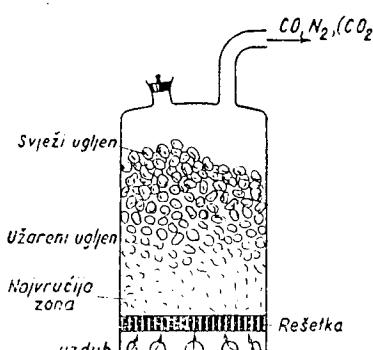
$$Q_n = V_s \cdot CO \cdot \tilde{Q}_{CO} + (1 - \alpha)c \tilde{Q}_c \quad (505)$$

Ovdje uvrštavamo  $V_s$  po (462).

### Rasplinjivanje

Kruta se goriva mogu oplemeniti ako ih preobrazimo u plinovita. O oplemenjivanju govorimo zato, što se među ostalim prednostima plinovi mogu mnogo lakše i bolje pomiješati s uzduhom za izgaranje a osim toga se plamen može plinskim cijevima proizvesti baš na onom mjestu gdje ga trebamo. Zbog potpunijeg miješanja dovoljan je manji pretičak uzduha, izgaranje je potpunije, a postignuta temperatura visoka. Osim toga se proizvedeni plin može oslobođiti od štetnih primjesa, u prvom redu od sumpora, koje se nalaze u krutom gorivu, a koje su nedopustive za mnoge procese (na pr. u metalurškim pećima). Razlikovat ćeemo dva glavna postupka oplemenjivanja: *Otplinjivanje* i *rasplinjivanje*. Otplinjivanje ili suha destilacija krutog goriva vrši se njegovim ugrijavanjem bez dovodenja kisika u retortama plinara. Rasplinjivanje naprotiv nije ništa drugo nego namjerno izazivanje nepotpunog izgaranja proizvedeno nedo-

<sup>1)</sup> Z. VDI. 71, (1927) 383; osim toga: Das *it*-Diagramm der Verbrennung, Berlin (1929).



Sl. 188. Plinski generator.

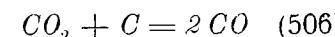
nusprodukta, kao koksu, ili se od proizvedenog plina traži neki propisani sastav, ili se čitavo kruto gorivo želi prevesti u plinoviti oblik. Ovdje ćemo se pozabaviti samo sa procesom rasplinjivanja, koji je pristupačniji toplinskim proračunima.

Plinski generator prikazan je šematski u sl. 188. Na rešetku nasipan je debeli sloj goriva koje izgara dovođenjem kisika. Kad ćemo dobiti pretežno potpuno, a kad nepotpuno izgaranje? Oksidacija goriva javlja se tako dugo, dok još ima raspoloživog kisika. Ovaj će se to prije potrošiti, što je veća užarena površina goriva<sup>1)</sup> i što se brže sa površine goriva zamjenjuju molekule  $CO_2$  koje su već oksidirale, sa svježim molekulama  $O_2$ . Ovo u prvom redu ovisi o stanju gibanja uzduha, pri čem će turbulentnije strujanje osigurati i bržu izmjenu potrošenih i svježih čestica uzduha na površini koksa. U uzduhu će preostati to manje slobodnog kisika što dalje napredujemo od rešetke u sloj koksa. Kod neke visine sloja  $a$ , sl. 189. biti će sav kisik utrošen za stvaranje  $CO_2$ . Ova visina sloja  $a$  ovisna je o stanju gibanja uzduha i o sirkosti koksovog nasipa. Ako je debljina koksovog sloja manja od  $a$  izgaranje će proteći potpuno, s pretičkom uzduha, jer stvoreni plinovi sadržavaju na izlasku iz sloja još neutrošeni kisik. Kad je sloj koksa naprotiv veći od  $a$ , to će se gornji slojevi koksa ugrijati

<sup>1)</sup> Zbog jednostavnosti ograničujemo se ovdje na koks kao kruto gorivo koje se praktički sastoji iz čistog ugljika, i naravno iz pepela.

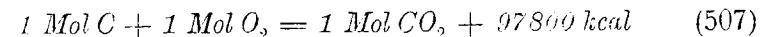
voljnim pripuštanjem kisika, koje se vrši u posebnim pećima — plinskim generatorima — pri čem se teži za što većim postotkom gorivog  $CO$  u proizvedenom plinu. Rasplinjivanje primjenjivat će se naročito i kod takvih goriva, koja se suhom destilacijom uopće ne mogu otpuniti, kao koks, ili koja iz bilo kojeg razloga nisu za otpolinjivanje podesna. Ono će se upotrijebiti još i tamo gdje se ne daje važnost

od vrućih plinova. U užarenom je stanju ugljik tako pohlepan za kisikom da ga otima molekulama  $CO_2$ , ako se ne može namiriti slobodnim kisikom. Zato će ovdje nastati redukcija

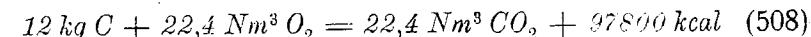


koja će uznapredovati tim dalje, što je viši sloj koxa. Kod neke visine sloja  $b$  našli bismo prema tomu u izgorenim plinovima već mnogo ugljičnog oksida  $CO$  i izgaranje bilo bi vrlo nepotpuno. No kod generatorskog procesa baš i nastojimo da se proizvede što manje  $CO_2$  a što više  $CO$ , kako bi vrijednost generatorskog plina bila što veća. Zato su izgledi na bolji generatorski plin to veći što je viši sloj koxa u generatorskom grotlu. Praktički se sastav  $CO_2 \approx 0$  postizava u generatoru dosta brzo, tako da daljnje povećanje visine grotla nema više smisla. U zbilji naravno ne možemo označiti točnu liniju za visinu sloja  $a$ , ovo među ostalim već iz razloga, što se strujanje uzduha ne može potpuno jednolično razdjeliti preko čitavog generatorskog presjeka.

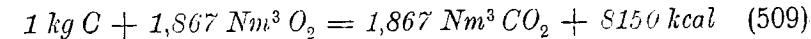
I ovdje se moraju zadovoljiti stehiometrički odnosi. Za stvaranje  $CO_2$  važi



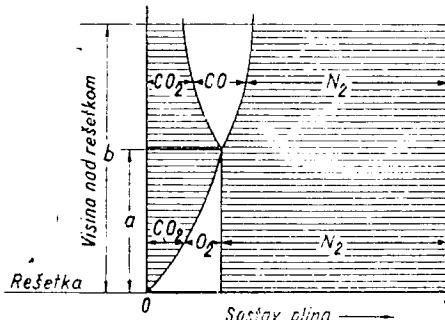
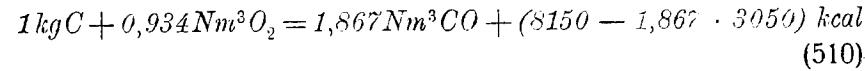
Tu je  $\mathfrak{H}_c = 97800 \text{ kcal/Mol}$  ogrjevna moć ugljika za 1 Mol ili 12 kg. Milije nam je izraziti količinu ugljika u kilogramima, a količine plina u  $Nm^3$  pak tako dobivamo



ili za 1 kg  $C$



Sasvim slično dobit ćemo za nepotpunu oksidaciju ugljika na  $CO$



Sl. 189. Sastav plinova u raznim visinama nad rešetkom.

Kod oksidacije na  $CO$  oslobađa se naime toliko manje topline, koliko odgovara neoslobađenoj ogrjevnoj moći proizvedenog ugljičnog oksida<sup>1)</sup>.

**Stupanj preobraženja** Uspije li nam dakle proizvesti generatorski plin sa  $CO_2 = 0$ , to će čitavi ugljik (1 kg) preći u  $1,867 \text{ Nm}^3 CO$ , pak ćemo dobiti ogrijevnu moć plina  $1,867 \cdot 3050 = 5700 \text{ kcal/kilogramu}$  potrošenog ugljika<sup>1)</sup>. Pri tom ćemo označiti kao stupanj preobraženja ogrijevne moći

$$\eta = \frac{\text{Ogrjevna moć proizvedene količine plina}}{\text{Ogrjevna moć potrošenog goriva}} = \frac{V \tilde{H}_g}{\tilde{H}_G} \quad (511)$$

Ovdje je  $V$  količina generatorskog plina koji nastaje iz jedinice količine goriva, dok je  $\tilde{H}_g$  ogrjevna moć plina. U danom slučaju bilo bi

$$\eta = \frac{5700}{8150} = 0,70 \quad (\text{za } CO_2 = 0) \quad (512)$$

Ostatak ( $1 - \eta$ ) to jest 30% od ogrjevne moći goriva sadržan je kao osjetna toplina generatorskog plina, te se taj plin odvodi u vrućem stanju. Ta osjetna toplina gubi se kod pogona motora na usisni plin, jer se prije ulaska u cilindar mora plin temeljito očistiti od prašine i katrana, što se može postići samo ispiranjem vodom. Pri tom se naravski plin ohladi. Kod takvog pogona mora se stupnju preobraženja  $\eta$  pridati i značenje jednog stepena djelovanja. Tamo, gdje se generatorski plin naprotiv može još upotrijebiti u vrućem stanju, kako je to kod loženja kotlova, peći i t. d., može se iskoristiti i njegova osjetna toplina. U tom slučaju  $\eta$  nema više značenje nekog stupnja djelovanja.

U zbilji se generatoru ne dovodi čisti kisik nego uzduh. Pri tom je količina uzduha  $L = \frac{O_2}{0,21} \text{ Nm}^3$ , pa tako dobivamo

<sup>1)</sup> Zbog jednostavnosti računat ćemo u ovom poglavljtu kao da su ogrjevne moći ugljičnog oksida i vodika jednake i to  $\tilde{H}_{CO} = \tilde{H}_{H_2} = 3050 \text{ kcal/Nm}^3$ , i ako po novijim mjerjenjima između njih postoji mala razlika, usporedi skrižaljku „Ogrjevne moći tehničkih plinova“.

$$1 \text{ kg } C + \frac{0,934}{0,21} \text{ Nm}^3 \text{ uzduha} = 1,867 \text{ Nm}^3 CO + \\ + 0,934 \frac{0,79}{0,21} \text{ Nm}^3 N_2 = 5,377 \text{ Nm}^3 \text{ gen. plina} \quad (513)$$

Tu dobivamo mnogo više plina, nego li kod dovoda čistog kisika, ali mu je zato i ogrijevna moć znatno manja. Sastav i ogrijevna moć takvog teoretskog uzdušnog plina ( $CO_2 = 0$ ) jest

$$CO = \frac{1,867}{5,377} = 0,347; N_2 = 0,653; \\ \tilde{H}_g = 0,347 \cdot 3050 = 1058 \text{ kcal/Nm}^3 \quad (514)$$

I ovdje je u najboljem slučaju  $\eta = 0,7$ , t. j. 30% ogrijevne moći goriva pretvara se u osjetnu toplinu, zbog čega plin odilazi s visokim temperaturama.

**Dodavanje vode** Gubici zbog osjetne topline mogu se znatno smanjiti, ako dodamo procesu vodu. Kod visokih temperatura rastvara se  $H_2O$  u  $H_2$  i  $\frac{1}{2} O_2$ , pri čem se troše velike količine topline. Troši se upravo negativna ogrijevna moć vodika —  $(\tilde{H}_g)_{H_2} = -3050 \text{ kcal/Nm}^3$ , kad se rastvara voda od  $0^\circ C$ .

$$1 \text{ Nm}^3 (H_2O)_{tel} + 3050 \text{ kcal} = 1 \text{ Nm}^3 H_2 + \frac{1}{2} \text{ Nm}^3 O_2 \quad (515)$$

Oslobodeni se kisik troši odmah za stvaranje  $CO$ , pak se mora dovoditi toliko manje uzduha. U graničnom bi se slučaju mogla upotrijebiti sva osjetna toplina uzdušnog plina za rastvaranje vode, t. j.  $8150 - 1,867 \cdot 3050 = 2450 \text{ kcal/kg } C$ . Prema tomu mogli bismo rastvoriti

$$\frac{2450}{3050} = 0,8 \text{ Nm}^3 H_2O \text{ za } 1 \text{ kg } C \quad (516)$$

Pri tom se pretpostavlja, da bi plinovi odlazili sasvim hladni, što nije moguće, jer su za konačnu brzinu reakcije potrebne temperature od nekoliko stotina stupnjeva Celsiusa. Osim toga plin će sadržavati uvjek i nešto  $CO_2$ .

Pri tom je sasvim umjesno pitanje, da li će potpomaganje stvaranja  $CO_2$  dobavljati bolji ili lošiji plin. Time bi se doduše

smanjio sadržaj na  $CO$ , ali se osloboda više topline, koja može služiti za rastvanje  $H_2O$ , pak na to pitanje ne možemo naprečac odgovoriti niti sa da, niti sa ne. To pitanje moramo točnije proučiti.

U tu svrhu napišimo si sastav dobivenog ali osušenog plina

$$CO + H_2 + CO_2 + N_2 = 1 \quad (517)$$

Još jedan izraz dobivamo postavljanjem bilance kisika. U plinu po (517) nemamo slobodnog kisika, jer je i onako vladao proces voden sa manjkom kisika. Zato kisik nalazimo samo u  $CO$  i  $CO_2$  i to u količini

$$O_{plin} = (CO_2 + 0,5 CO) \text{ Nm}^3 O_2 / \text{Nm}^3 \text{ plina} \quad (518)$$

Ova količina kisika potječe djelomice iz potrošenog uzduha isto tako kao i sadržaj dušika  $N_2$  u plinu. Ako se dakle za proizvodnju od  $1 \text{ Nm}^3$  plina uzduhom dovelo  $N_2 \text{ Nm}^3$  dušika, to

se je njime ujedno dovelo i  $\frac{0,21}{0,79} N_2 \text{ Nm}^3$  kisika. Osim toga rastvaranjem  $1 \text{ Nm}^3 H_2O$  dovedeno je još  $\frac{1}{2} \text{ Nm}^3 O_2$ . Rastvorenu količinu vode za svaki  $\text{Nm}^3$  plina znamo iz sadržaja  $H_2$  plina. Zato je količina kisika dovedena rastvaranjem vode ( $0,5 H_2$ )  $\text{Nm}^3$  kisika. Sa (518) slijedi

$$\frac{0,21}{0,79} N_2 + 0,5 H_2 = CO_2 + 0,5 CO \quad (519)$$

a to je izraz, koji predočuje bilancu kisika kod proizvodnje  $1 \text{ Nm}^3$  generatorskog plina.

Treći važni izraz dobivamo iz bilance topline. Po toj je

$$\eta = \frac{V \cdot \mathfrak{H}_g}{c \cdot \mathfrak{H}_e} \quad (520)$$

gdje je po (463) količina plina

$$V = \frac{1,867 c}{CO_2 + CO} \text{ Nm}^3 / \text{kg } G \quad (521)$$

a ogrjevna moć plina

$$\mathfrak{H}_g = (\mathfrak{H}_g)_CO \cdot CO + (\mathfrak{H}_g)_H_2 \cdot H_2 = 3050(CO + H_2) \quad (522)$$

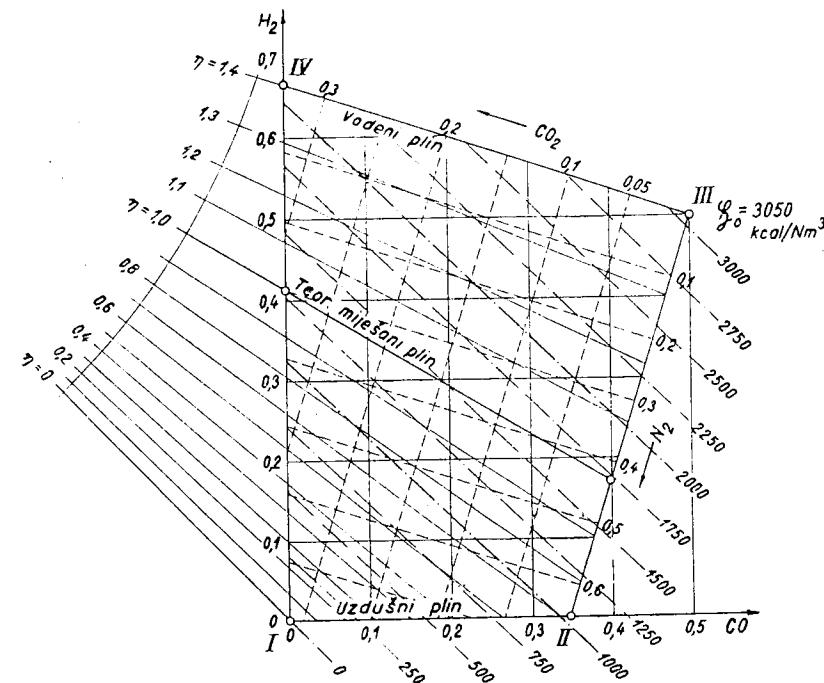
Time onda postaje (520)

$$\eta = 0,7 \frac{CO + H_2}{CO_2 + CO} \quad (523)$$

Odavde možemo na pr. izračunati gubitak na osjetnoj toplini u  $1 \text{ Nm}^3$  plina

$$Q_{gub} = (1 - \eta) \frac{8150 c}{V} = 4360(CO_2 + CO) - 3050(CO + H_2) \quad (524)$$

Iz tri jednadžbe (517), (519) i (523) možemo po volji eliminirati dvije veličine i tako postaviti jednu jednadžbu između drugih triju. Ovi se odnosi mogu vrlo pregledno prikazati u MOLLIER-ovom dijagramu za generatorski plin, sl. 190.



Sl. 190. Generatorski četverokut Mollier-a

Kao apscisu nanosimo sadržaj  $CO$ , a kao ordinatu sadržaj  $H_2$  u plinu. Svi uzdušni procesi, kod kojih nema rastvaranja vode,  $H_2 = 0$ , padaju u os apscisa. Za idealni uzdušni proces ( $CO_2 = 0$ ) dobivamo po (514)<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> ili također prema (517) i (519), kad tamo uvrstimo  $CO_2 = 0$  i  $H_2 = 0$ .

$$(CO)_{CO_2=0, H_2=0} = 0,347 \quad (525)$$

Idealni uzdušni proces predočen je dakle u tom dijagramu točkom II. Za sve uzdušne procese, koji su mogući značajno je da je  $H_2 = 0$ , tako da se oni predočavaju točkama na apscisi između I i II.

**Miješani plin** Geometrijsko mjesto točaka onih procesa, kod kojih je  $CO_2 = 0$ , dobivamo, kad se u (517) i (519) uvrsti  $CO_2 = 0$ , pa se pri tom eliminira  $N_2$ . Tako se između  $H_2$  i  $CO$  dobiva jednadžba pravca II - III. Analogno se dobivaju za  $CO_2 = 0,1, 0,2$  i t. d. ucrtane linije  $CO_2 = \text{konst}$ , koje su sve paralelne sa  $CO_2 = 0$ .

Ovako postupamo i kod određivanja linija  $N_2 = \text{konst}$ , koje su opet međusobno paralelne, sl. 190. Izvan četverokuta I, II, III, IV generatorska stanja nisu moguća, jer bi ovdje uvijek barem jedan od sudionika morao imati negativne vrijednosti, što je fizikalno besmisленo.

Budući da ogrjevna moć  $\tilde{H}_g$  prema (522) ovisi samo o zbroju  $(CO + H_2)$ , to linije  $\tilde{H}_g = \text{konst}$  teku pod  $45^\circ$  s nagibom na desno, sl. 190.

Pored toga može se pokazati da za procese s istim stupnjem preobraženja  $\eta = \text{konst}$  mora između  $CO$  i  $H_2$  postojati linearna veza, i ako pripadne linije  $\eta = \text{konst}$  međusobno nisu paralelne. One se naprotiv sve sijeku u jednoj točci sa koordinatama  $CO = -1, H_2 = +1$ .

Na taj način mogu se ucrtati i linije osjetne topline  $Q_{osj} = \text{konst}$ , od čega se je zbog preglednosti slike 190. odustalo. No kod crtanja dijagrama može se tome doskočiti upotrebor raznih boja.

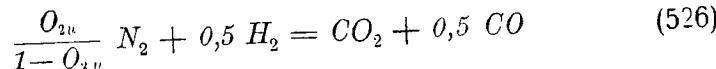
Iz dijagrama možemo doći do ovih načelnih zaključaka. Uočimo li ponajprije procese sa stalnim stupnjem preobraženja  $\eta$ , na pr.  $\eta = 0,8$ , to vidimo da su takvi procesi provedivi kako kod stvaranja velikih tako i malih sadržaja  $CO_2$ . Kod mnogo  $CO_2$  opada doduše sadržaj na  $CO$  ali se zato povećava sadržaj na  $H_2$ . No kod malenih količina  $CO_2$  ogrjevna je moć  $\tilde{H}_g$  plina bolja, dok je količina plina manja, a o tome se možemo uvjeriti očitanjem u dijagramu. Velika se pak ogrjevna

moć plina više cijeni, budući da se s takvim plinom mogu na mjestu upotrebe postići više temperature izgaranja.

**Voden plin** Linija  $\eta = 1$  dijeli dijagramske polje I, II, III i IV u dva dijela. U ustaljenom se pogonu mogu provoditi generatorski procesi donjega polja, gdje je  $\eta < 1$ , pak takav plin odilazi u manje ili više vrućem stanju. Generatorski procesi gornjega dijela, gdje je  $\eta > 1$  u ustaljenom pogonu naprotiv nisu provedivi, budući da je njihova sveukupna ogrjevna moć zbož  $\eta > 1$  veća nego li ogrjevna moć utrošenog goriva. Kod takvih bi se procesa užareni sloj goriva u generatoru naglo ohladio, a generator bi se ugasio, kad taj proces nebi pravovremeno prekinuli. No kako su baš plinovi iz gornjega dijela dijagrama naročito vrijedni, to se pogon generatora često vrši na prekide. Generatorski se proces preklopnim napravama provodi kroz nekoliko minuta bez dodatka vode, dakle kao čisti uzdušni proces i to sa mnogo  $CO_2$ , tako da je  $\eta \ll 1$ . U graničnom se slučaju može pače provesti potpuno izgaranje, točka I, pri čem će se pojaviti vrlo visoke temperature, te se sloj koksa usije do bijele žari. Plin proizveden u ovom otsječku naravno da je vrlo loš pa ga se ili odvodi u dimnjak, ili ga se upotrijebi za podređene svrhe. Sad se uključi ubrizgavanje vodene pare i ujedno se reducira uzduh, pak se dobije plin s malo dušika  $N_2$  sa stanjem visoko u gornjem dijelu dijagramskega polja. Pri tom se naravno sloj goriva naglo ohlađuje (hladno duvanje). Nakon nekoliko minuta preključi se opet na t. zv. vruće duvanje, te se takvim izmjeničnim pogonom nastavlja dalje. Na taj način može se u periodama hladnog duvanja proizvoditi vrlo dobri plin. U periodi hladnog duvanja može se na pr. dovod uzduha uopće izostaviti, te samo ubrizgavati vodenu paru. Time dobivamo t. zv. voden plin sa točkom stanja negdje na spojnici između II i III, za koji je  $N_2 = 0$ . U krajnjem slučaju možda će se moći postignuti plin III ( $N_2 = 0, CO_2 = 0$ ) s najvećom postizivom vrijednosti ogrjevne moći  $\tilde{H}_{III} = 3050 \text{ kcal/Nm}^3$ . Kod ovog čistog vodenog procesa generator će se vrlo naglo ohladiti, pak je potrebno uvijek uključivati poduze periode vrućeg duvanja. Ove moraju biti toliko dugotrajne, da se osjetnom toplinom vrućeg duvanja u izdašnoj

mjeri nadoknadi pretičak ogrjevne moći vodenog plina, jer će se inače generator ugasiti. U novije vrijeme pokušava se i grijanje zone rasplinjivanja dovođenjem topline iz vana<sup>1)</sup>, pak se na taj način mogu i procesi miješanja i vodenih procesi, kod kojih je  $r_i > 1$  provoditi u neprekinutom pogonu. U tom se slučaju mora za  $1 \text{ Nm}^3$  proizvedenog plina dovoditi barem količina topline  $Q_{oy}$ , koja je propisana izrazom (524).

**Dodavanje kisika** Da bi se generatorski plin proizveo sa što većom ogrjevnim moći, predložilo se je, da se generatorskom uzduhu dodaje čisti kisik. Čisti se kisik pojavljuje kao nusprodukt u industriji dušika, gdje se u svrhu dobivanja dušika oba plina ukapljivanjem uzduha razdvajaju. I za taj slučaj vrijede sva dosadašnja razmatranja samo što se u (519) mesta faktora  $\frac{0,21}{0,79}$  uzeti u obzir sastav kisikom obo- gaćenog uzduha. Ako je sastav kisika u uzduhu  $O_{2u}$  a onaj dušika  $N_{2u}$  pri čem je  $N_{2u} = 1 - O_{2u}$ , to je po (519)



Jednadžbe (517) i (523) važe i ovdje dalje. Kontinuirano dobiveni generatorski plin dat će pri tom veću ogrjevnu moć nego plin dobiven dodatkom kisika, jer je u tom slučaju balast dušika manji. No ni ovdje se ne može premašiti ogrjevna moć  $\tilde{Q}_g = 3050 \text{ kcal/Nm}^3$  teoretskog vodenog plina. No zato se kod izmjeničnog pogona može perioda vrućega grijanja znatno skratiti spram pogona bez dodatka kisika.

**Pojava ugljikovodika** Dosadašnja razmatranja važe kvantitativno samo za takve generatorske pogone kod kojih se kao gorivo upotrebljava koks ili drveni ugljen. Pretpostavili smo naime da gorivo osim ugljika C ne sadrži drugih rasplinjivih dijelova. No mnogi se generatori lože s ugljenom ili s drvom. U tom se slučaju u gornjem dijelu generatora odvija sуша destilacija svježeg goriva pri čem se stvaraju viši ugljikovodici, a prije svega i metan. U manjim količinama može se paće metan stvarati i kod pogona sa čistim

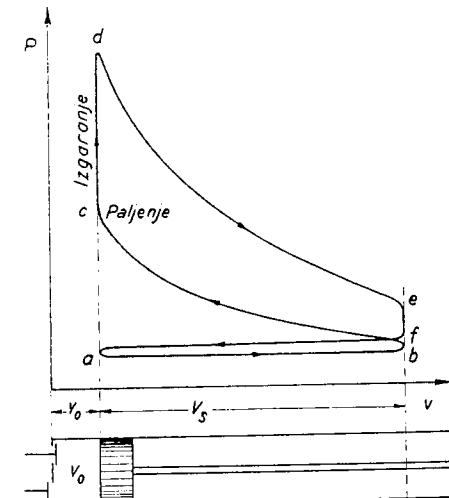
<sup>1)</sup> P. Dolch, Wassergas. Leipzig (1936).

ugljikom. Za takve bi se slučajeve morale dobivene jednadžbe proširiti, no načelno ne bismo došli do novih spoznaja. Spominjemo da se ogrjevna moć plina prisustvom viših ugljikovodika znatno povećava, što se mnogo cijeni, samo ako se pogon ne oteža prekomernim stvaranjem katrana. Ova pitanja isto kao i tehnika namjernog dobivanja katrana niskih temperatura, koji služi kao sirovina za čitavu granu kemijske industrije, prelazi okvir ove knjige.

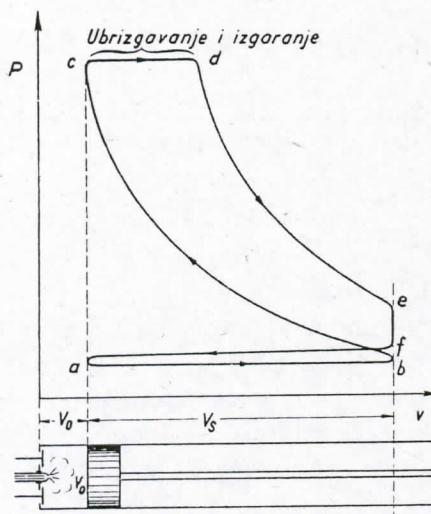
### Procesi eksplozionih strojeva

Eksplozioni strojevi rade tako, da se toplina dovodi radnom mediju u samom ekspanzionom prostoru, za razliku od parnog stroja, gdje se toplina morala dovoditi mediju tek kroz stijenku nekog kotla. Zato u ovom slučaju može temperatura radnog medija biti mnogo viša, nego li je temperatura stijenke. Tako visina temperature nije ograničena, ili tek u mnogo manjoj mjeri, svojstvima čvrstoće građevnog materijala, kako je to bilo kod strojeva s vanjskim dovođenjem topline, jer se ovdje stijenke mogu hladiti rashladnom vodom. Veći toplinski pad osigurava ovakvom radnom procesu mnogo bolji termički stupanj djelovanja, što je jedna od glavnih prednosti ove vrsti strojeva.

Radnom prostoru cilindra dovodi se uzduh i gorivo. Kod jedne skupine strojeva dodaje se i izmiješa gorivo u uzduhu već pred cilindrom. U samom cilindru ova se mješavina u pogodnom trenutku upali električnom iskrom. Tako



Sl. 191. Otto-proces u četverokretu



Sl. 192. Diesel-proces u četverokretu

Način rada Otto-procesa predviđen je u sl. 191. Tu prikazuje:

- Stapaj *ab* (prvi pokret ili takt)
- Stapaj *bc* (drugi pokret)
- Obratište *cd*

Stapaj *de* (treći pokret)

Obratište *ef*

Stapaj *fa* (četvrti pokret)

Način rada Diesel-ovog procesa predviđen je u sl. 192. Tu prikazuju:

- Stapaj *ab* (prvi pokret)
- Stapaj *bc* (drugi pokret)

Hod *cd* (treći pokret)

rade plinski i benzinski motori. Kod procesa na stalni tlak (Diesel-ov proces), gorivo se tek neposredno prije izgaranja ubrizga u cilindar, gdje izgara u vrućem uzduhu, koji se je prethodnom jakom kompresijom užario.

Radne procese prve skupine prozvat ćemo po njihovom pronaletaču Otto-procesima. Radne procese druge skupine po njihovom pronaletaču Diesel-procesima.

Hod *de* (treći pokret)

Obratište *ef*

Stapaj *fa* (četvrti pokret)

Ekspanzija izgorenih plinova  
Ispuh  
Istiskivanje izgorenih plinova.

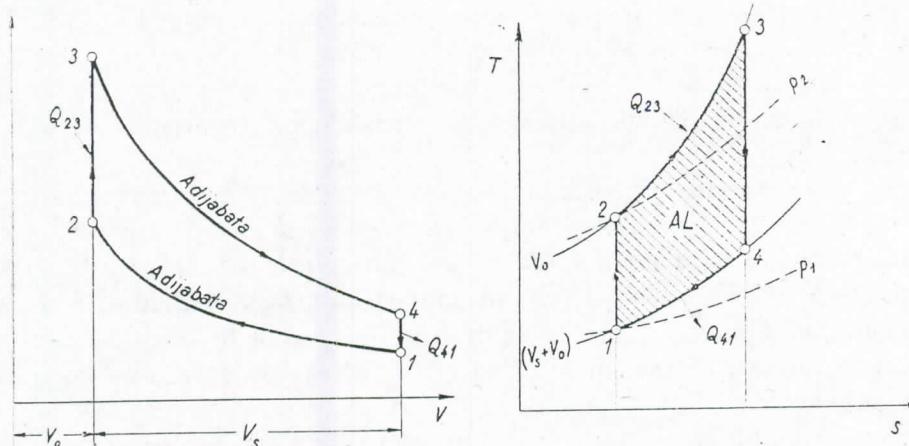
Za izvršenje prikazanih procesa potrebna su četiri pokreta (takta) stroja, čemu odgovaraju dva okreta osovine. Naročitim mjerama može se postići, da se ovi procesi izvedu i sa dva pokreta (dvokretni ili dvotaktni motori). Za naša daljnja razmatranja, koja su samo načelne prirode, i koja se osvrću na šematisirane procese, nije od bitnosti, da li su ovi četverokretni ili dvokretni.

Produbljeno razrađivanje ovih procesa znatno se zamršuje time, što se izgaranjem mijenja kemijski sastav radnog medija. Za niža razmatranja dostaje, da si problem pojednostavimo na taj način, da prepostavimo kao da se svojstva radnog medija u toku procesa ne mijenjaju, i kao da se toplina  $Q_{ed}$  na neki način dovodi izvana. Kod ispuha plinova ovi se u okolini ohlađe, no mi dobivamo istu sliku u  $Pv$ -dijagramu, ako prepostavimo da se tom idealiziranom radnom mediju odvodi toplina  $Q_{ef}$ , pri stalnoj zapremini  $V = \text{konst}$ , pri čem se on ohlađi na početnu temperaturu,  $T_f = T_b$ . Pri tom ćemo biti svjesni toga, da nas ove prepostavke mogu zadovoljiti za dobivanje odgovora na neka načelna pitanja. No za potanje i temeljitije proučavanje pojava, koje se u cilindru uistinu odvijaju, a koje su od presudne važnosti za tehničku provedbu procesa i konstruktivne detalje stroja, moraju se ovako pojednostavljene prepostavke naravno napustiti.

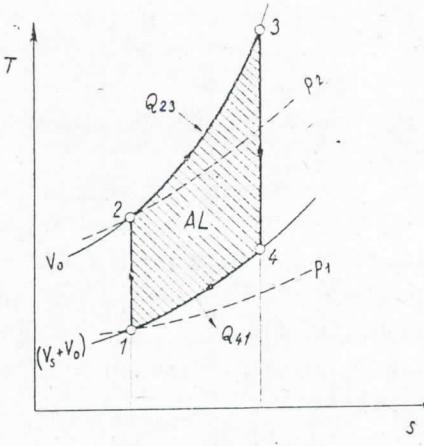
Usisavanje i istiskivanje je beznačajno za vršenje rada, tako da ih kod naših razmatranja ne trebamo uzeti u obzir.

**Otto-proces** Prema tome nadomještavamo pravi proces u stroju s poredbenim procesom po sl. 193. i 194. Goriva smjesa komprimira se adijabatski od 1 do 2, pri čem temperatura poraste od okolišne temperature na vrijednost  $T_2$

$$T_2 = T_1 \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_1 \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad (527)$$



Sl. 193. Poredbeni Otto-proces



Sl. 194. Ts-dijagram za sl. 193.

Pri tom je od naročite važnosti, da ova temperatura ne poraste toliko, da bi moglo doći do samozapaljenja smjese. Iz tog razloga kompresija nesmije biti previšoka, a to se postizava, tako da se volumen  $V_0$  kompresionog prostora odabere dovoljno velik. O njemu ovise naime kompresioni omjer

$$\varepsilon = \frac{V_1}{V_2} = \frac{V_s + V_0}{V_0} \quad (528)$$

koji već prema vrsti goriva nesmije prekoračiti stanovitu vrijednost.  $V_s$  je stapajni volumen. Ako u prvom približenju računamo, da su specifične topline i kod viših temperatura konstantne, to je dovedena toplina

$$Q_{23} = c_v(T_3 - T_2), \quad (529)$$

a odvedena toplina

$$Q_{41} = c_v(T_4 - T_1), \quad (530)$$

dok je izvršeni rad

$$AL = Q_{23} - Q_{41}. \quad (531)$$

Termički je stepen djelovanja

$$\eta = \frac{AL}{Q_{23}} = \frac{Q_{23} - Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (532)$$

Zbog adijabatske kompresije i ekspanzije imamo

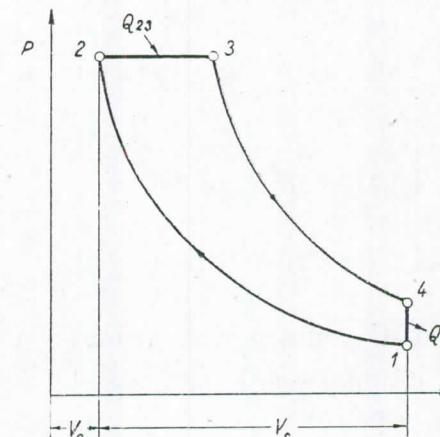
$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{T_3}{T_4} = \frac{T_2 - T_3}{T_1 - T_4} = \left( \frac{V_1}{V_2} \right)^{\kappa-1} = \varepsilon^{\kappa-1} \quad (533)$$

a time se dobiva

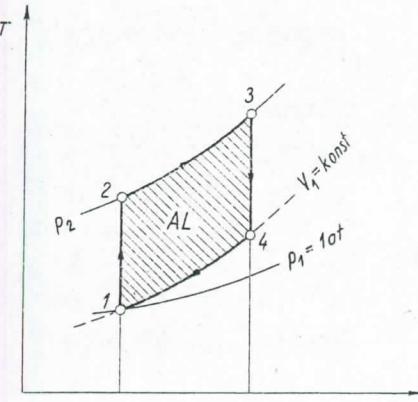
$$\eta = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\kappa-1}} \quad (534)$$

Prema tomu termički stepen djelovanja  $\eta$  kod Otto-procesa raste s povećanjem  $\varepsilon$  dakle sa povećanom kompresijom. Stepen djelovanja naprotiv je neovisan od skoka pritiska kod samog izgaranja, dakle od dovedene topline, a time i od opterećenja stroja. Zato se mora nastojati da se kompresija odabere tako visoko, koliko je dopustivo obzirom na opasnost samozapaljenja usisane gorive smjese. Kod Otto-procesa red je veličine od  $\varepsilon \approx 4$ , s kojom bi vrijednosti, ako računamo sa  $\kappa = 1,35$ , bio termički stepen djelovanja  $\eta = 0,386$ .

**Diesel-ov proces** Poredbeni je proces prikazan u sl. 195. i 196. Ovdje se ubrizgavanje goriva odmjeri tako, da izgaranje uglavnom teče kod stalnog pritiska  $p = p_2 = p_3 = \text{konst}$ . Budući da se u cilindar usisava samo čisti uzduh



Sl. 195. Poredbeni Diesel - proces



Sl. 196. Ts-dijagram za sl. 195.

bez primješanog goriva, to nema opasnosti od samozapaljenja. S te strane nema ograničenja u pogledu izbora visine kompresije. Ovdje je

$$Q_{23} = c_p (T_3 - T_2); \quad Q_{41} = c_v (T_4 - T_1) \quad (535)$$

a

$$\eta = 1 - \frac{Q_{41}}{Q_{23}} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{\frac{T_4}{T_1} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \frac{T_1}{T_2} \quad (536)$$

Po sl. 196. imamo

$$s_3 - s_2 = s_4 - s_1 \quad (537)$$

gdje je zbog  $p_3 = p_2$ 

$$s_3 - s_2 = c_p \ln \frac{T_3}{T_2} \quad (538)$$

a zbog  $V_4 = V_1$ 

$$s_4 - s_1 = c_v \ln \frac{T_4}{T_1} \quad (539)$$

Odavle slijedi

$$\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\kappa} = \frac{T_4}{T_1} \quad (540)$$

a time se dobiva

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{T_1}{T_2} \frac{\left(\frac{T_3}{T_2}\right)^{\kappa} - 1}{\frac{T_3}{T_2} - 1} \quad (541)$$

Kao mjeru za porast volumena kod dovođenja topline odabiremo

$$\varphi = \frac{V_3}{V_0} \quad (542)$$

Veličina  $\varphi$  je mjera za opterećenje stroja. Što je opterećenje veće, to veće mora biti i  $\varphi$ . Ova veličina mora ležati između vrijednosti  $1 \leq \varphi \leq \frac{V_3}{V_0}$ . Kod  $\varphi = 1$  stroj je potpuno rasterećen ( $L = 0$ ). Zbog  $p = \text{konst}$  imamo

$$\frac{T_3}{T_2} = \frac{V_3}{V_0} = \varphi \quad (543)$$

Odavle i iz (533) te sa (541) slijedi konačno

$$\eta = 1 - \frac{1}{\kappa} \frac{1}{\varphi^{\kappa-1}} \frac{\varphi^{\kappa} - 1}{\varphi - 1} \quad (544)$$

Prema ovome je kod Diesel-ovog procesa iskorištenje goriva to bolje, što je veći kompresioni omjer  $\varepsilon$  i što je slabije opterećenje stroja. Kod  $\varphi \approx 1$  (neznatno ubrizgavanje goriva) prelazi (544) u (533). Inače je kod istog kompresionog omjera Diesel-ov proces lošiji od Otto-procesa. No kako kod Diesel-ovog procesa nema opasnosti zbog samozapaljenja, to se njegova kompresija može odabrati mnogo višom, pak je to razlog što u njemu prema (544) gorivo znatno bolje iskorištavamo nego li kod Otto-procesa. Kod Diesel-ovog se procesa često odabire  $\varepsilon = 35$ ,  $\varphi = 3$  a time se dobiva termički stepen djelovanja  $\eta = 0,497$ .

Univerzitet u Beogradu  
Prirodno-matematički fakultet  
MATEMATIČKI FAKULTET  
BIBLIOTEKA

Broj \_\_\_\_\_ Datum \_\_\_\_\_

## NAUKA O PRELAZU TOPLINE

**Područje primjene** Najvažnijem zadatku toplinskog inženjera, po kojem procese treba što ekonomičnije provoditi, suprotstavlja se danas isto tako važan zahtjev, da se toplinske naprave i strojevi izvode sa najvećom štednjom često vrlo skupocjenog građevnog materijala. Pri tom je za dimenzioniranje toplinskih uređaja u prvom redu odlučna brzina prelaza topline. Tako su dimenzije nekog parnog kotla uglavnom ovisne o prelazu topline u ložištu, na ogrjevnim površinama, u pregrijaču pare, u predgrijaču uzduha i t. d.

No prelaz topline od velike je važnosti i na drugim područjima. Meteorološke pojave, koje su tako važne za poljoprivredu, gdje insolacija, topli uzduh, pogibelj od mraza imaju presudno značenje, uvjetovane su uglavnom pojavama prelaza topline. Ovaj je od odlučne važnosti i za narodno zdravlje, jer se prehlade, kao ishodište čitavog niza bolesti, izazivaju promjenom uvjeta izmjene topline. Za izvedbu najprikladnije tople odjeće morala bi se problemima prelaza topline pokloniti najveća pažnja kod stvaranja i proizvodnje novih tekstilija. Kako se ova pitanja u otsudnoj mjeri tiču i grijanja nastambi, to vidiemo od kakvog je dalekosežnog socijalnog značenja ovo područje nauke o toplini.

Inženjer će obično imati posla s jednim od ovih glavnih zadataka:

- ili da se prelaz topline podupre mjerama, koje ga potpomažu
- ili da se prelaz topline oteža mjerama, koje ga koče
- ili da se odrede optimalne veličine toplinskih naprava
- ili da se odrede neka polja temperature, da bi se na pr. konstruktivnim mjerama doskočilo termičkim naprezanjima materijala.

### Osnovni oblici prelaza topline

Izmjena topline između tjelesa raznih temperatura, vrši se na dva načina, koji se po svojem fizikalnom obliku načelno razlikuju. To je izmjena topline provođenjem i konvekcijom, koje su vezane na materiju, i izmjena topline toplinskim zračenjem, koje nije vezano na materiju.

Izmjena topline provođenjem vrši se sudarom odnosno međusobnim djelovanjem molekula različite prosječne brzine. Prosječna je brzina molekula to veća, što je veća temperatura tijela. Brže molekule toplijeg dijela tijela u prosjeku se prilikom sraza usporavaju, dok se polaganje molekule hladnijeg dijela u prosjeku ubrzavaju. Nastojanje je prirode, da izjednači prosječne brzine molekula, a time i temperature u svim dijelovima tijela. Kod nepokretnih, ali ustitranih molekula krutih tjelesa vrši se provođenje topline kod električkih izolatora longitudinalnim titrajima, kod električkih vodiča naprotiv elektronskim gibanjem. Ovakav intermolekularni način prelaza topline zovemo provođenjem topline. Ono je ovisno o fizikalnim svojstvima dotičnog tijela.

Izmjena topline se može znatno pojačati, kad veće ili manje čestice neke tekućine lutaju amo tamo zbog nesredenog strujanja. Takve su čestice doduše malene, ali u poredbi sa molekulama su još vrlo velike. One zbog uskomešanosti tekućine lutaju iz hladnijih područja u toplija, gdje se hlađe i ugrijavaju, tako da na neki način prenose toplinu. Ovaj način izmjene topline zovemo konvekcijom. Što je snažnije komešanje ovih čestica, to će konvektivna izmjena topline biti izdašnija. Ona je ovisna o toplinskem kapacitetu, t. j. o specifičnoj toplini čestica, no prije svega o stanju (jačini) komešanja. Zbog toga pojave strujanja zahvaćaju na otsudan način u probleme prelaza topline.

Izmjena toplinskim zračenjem, pojava je sasvim druge prirode. Ona nije vezana na tvar pak se može vršiti kroz vakuum, jer se radi o talasnim pojavama elektromagnetske prirode. Jedna je od vidljivih razlika na pr. u tome, što kod izmjene vezane na tvar, mlaz topline može teći samo u smjeru monotonog pada temperature. Kod toplinskog zračenja može naprotiv struja ener-

gije prolaziti i kroz područja niže ili više temperature, nego li su temperature obju tjelesa koja si izmjenjuju toplinu, kako to vidimo kod dozračivanja sunca, pri čem sunčeve zrake prolaze kroz svemir, u kojem vlada temperatura u blizini absolutne nule.

### Izmjena topline vezana na tvar

**Stacionarno provođenje topline**

Održavamo li na obim površinama neke ravne stijenke, sl. 197. stalne temperature  $t_1$  i  $t_2$  to po FOURIER-ovom iskustvenom zakonu prolazi kroz stijenknu toplina

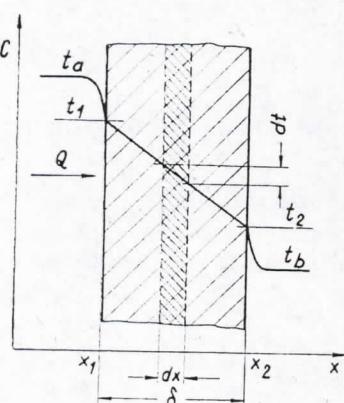
$$Q = \lambda \cdot \frac{t_1 - t_2}{\delta} F \tau. \quad (545)$$

Ovdje označuju  $F$  [ $m^2$ ] površinu stijenke,  $\delta$  [m] debljinu stijenke,  $\lambda$  [ $kcal/m h^{\circ}C$ ] koeficijent vodljivosti topline građevnog

materijala, a  $\tau$  [h] vrijeme. Ako se temperature u stijenci s vremenom ne mijenjaju, to imamo stacionarno (ustaljeno) provođenje topline.

Količinu topline koja prolazi u jedinici vremena

$$Q_h = \frac{Q}{\tau} \text{ kcal/h} \quad (546)$$



Sl. 197. Provodenje topline kroz stijenku.

ćom toplinskog toka

$$q = \frac{Q_h}{F} = \frac{Q}{F \cdot \tau} = \lambda \frac{t_1 - t_2}{\delta} \text{ [kcal/m}^2 \text{ h]} \quad (547)$$

U nekom tankom sloju debljine  $dx$ , koji leži unutar stijenke, temperatura opada ( $-dt$ ), pak je ovdje gustoća toka

$$q = -\lambda \frac{dt}{dx}. \quad (548)$$

Negativnim se predznakom uzima u obzir, da toplina uvijek struji u smjeru temperaturnog pada.  $\frac{dt}{dx}$  je temperaturni gradijent u smjeru  $x$ . On je pozitivan kad temperatura raste, a negativan kad ona pada. Koeficijent vodljivosti  $\lambda$  je vrlo različit za razne tvari. Pojedine vrijednosti sabrane su u skrižaljkama na kraju ove knjige. Koeficijent vodljivosti ovisan je osim toga i o temperaturi, ali ta ovisnost često nije znatna, pak se obično može dovoljno točno računati s jednom prosječnom vrijednosti za srednju temperaturu dotičnog problema.  $\lambda$  može međutim ovisiti o smjeru. Tako je na pr.  $\lambda$  kod drva veće u smjeru vlakanaca nego li poprečno. To je naročito važno za tkanine. No kad ništa ne spomenemo, prepostavljat ćemo uvijek da je  $\lambda$  veličina, koja je o smjeru neovisna (izotropna tijela).

**Toplinski otpor**

Za neke je račune od prednosti uvesti po JAKOB-u pojam toplinskog otpora  $W$ , koji definiramo uz pomoć toplinskog toka

$$Q_h = \frac{Q}{\tau} = \frac{t_1 - t_2}{W} \quad (549)$$

i

$$Q_h W = t_1 - t_2 \quad (550)$$

sto je slično OHM-ovom zakonu nauke o elektricitetu

$$I = \frac{E}{R} \quad (551)$$

Sa (547) i (549) imamo za stijenku površine  $F$  i debljine  $\delta$  otpor toplinske vodljivosti

$$W_\lambda = \frac{\delta}{F \cdot \lambda} \text{ [h}^{\circ}C/kcal] \quad (552)$$

prema kojem je izrazu otpor toplinske vodljivosti to veći, što je deblja stijenka i što je manji raspoloživi presjek prolaza topline.

Otpor sveden na 1  $m^2$  presjeka

$$\frac{W_\lambda}{F} = \frac{\delta}{\lambda} \text{ [m}^2 h^{\circ}C/kcal] \quad (552a)$$

nazivamo specifičnim toplinskim otporom. Još je interesantan koeficijent toplinskog otpora

$$\omega_{\lambda} = \frac{W_{\lambda} \cdot F}{\delta} = \frac{1}{\lambda} \quad [m \cdot h^{-1} C/kcal] \quad (553)$$

koji daje otpor neke stijenke debljine  $\delta = 1$  i presjeka  $F = 1$ . Ova je veličina fizikalno svojstvo materijala baš kao i njegova recipročna vrijednost  $\lambda$ . Indeks  $\lambda$  ukazuje na otpor provođenja topline, budući da isto tako možemo definirati i otpor konvekcije kao i otpor zračenja.

**Uzastopni i usporedni smještaj vodiča**

Katkada se pojavljuje više toplinskih vodiča zajedno, pak nije svejedno da li su oni ukopčani uzastopno ili usporedno.

Tu vrijede ova pravila

a) Uzastopce smještani toplinski otpori se zbrajaju

$$W_{sv} = \sum_1^n W_i \quad (\text{uzastopni smještaj}) \quad (554)$$

b) usporedno smještene toplinske vodljivosti

$$L_{\lambda} = \frac{\lambda F}{\delta} \quad (555)$$

zbrajaju se

$$L_{sv} = \sum_1^m L_i = \sum_1^m \frac{\lambda_i F_i}{\delta_i} \quad (\text{usporedni smještaj}) \quad (556)$$

Tako je za neku stijenkiju, koja je sastavljena iz  $n$  različitih slojeva, otpor toplinske vodljivosti poprečno na slojeve, sl. 198.

$$\begin{aligned} W_p &= \Sigma W_{\lambda} = \frac{\delta_1}{F \cdot \lambda_1} + \frac{\delta_2}{F \cdot \lambda_2} + \dots + \frac{\delta_n}{F \cdot \lambda_n} = \\ &= \frac{\delta_1 \omega_1 + \delta_2 \omega_2 + \dots + \delta_n \omega_n}{F} \end{aligned} \quad (557)$$

a toplinski tok

$$Q_{hp} = \frac{t_1 - t_2}{W_p} = (t_1 - t_2) \frac{F}{\sum_1^n \delta_i \omega_i} \quad (558)$$

Prosječni koeficijent toplinskog otpora  $\omega_{\lambda,p}$ , kod sveukupne debljine stijenke

$$\hat{\delta}_{sv} = \hat{\delta}_1 + \hat{\delta}_2 + \dots + \hat{\delta}_n \quad (559)$$

poprečno je na slojeve

$$\omega_{\lambda,p} = \frac{\hat{\delta}_1 \omega_1 + \hat{\delta}_2 \omega_2 + \dots + \hat{\delta}_n \omega_n}{\hat{\delta}_{sv}} \quad (560)$$

a koeficijent vodljivosti topline

$$\lambda_p = \frac{1}{\omega_{\lambda,p}} = \frac{\hat{\delta}_{sv}}{\hat{\delta}_1 \omega_1 + \hat{\delta}_2 \omega_2 + \dots + \hat{\delta}_n \omega_n} = \frac{\hat{\delta}_{sv}}{\frac{\hat{\delta}_1}{\lambda_1} + \frac{\hat{\delta}_2}{\lambda_2} + \dots + \frac{\hat{\delta}_n}{\lambda_n}} \quad (561)$$

U (557) može se slijed pojedinih sumanda međusobno izmjeniti, a da se time ne mijenja rezultat. To znači, da se toplinski otpor ne mijenja, ako se pojedini slojevi međusobno zamijene.

Za provođenje topline duž slojeva imamo po (556)

$$\lambda_d = \frac{F_1 \lambda_1 + F_2 \lambda_2 + \dots + F_n \lambda_n}{F} \quad (562)$$

a

$$Q_d = \frac{\lambda_d (t_1 - t_2)}{\delta} F \quad (563)$$

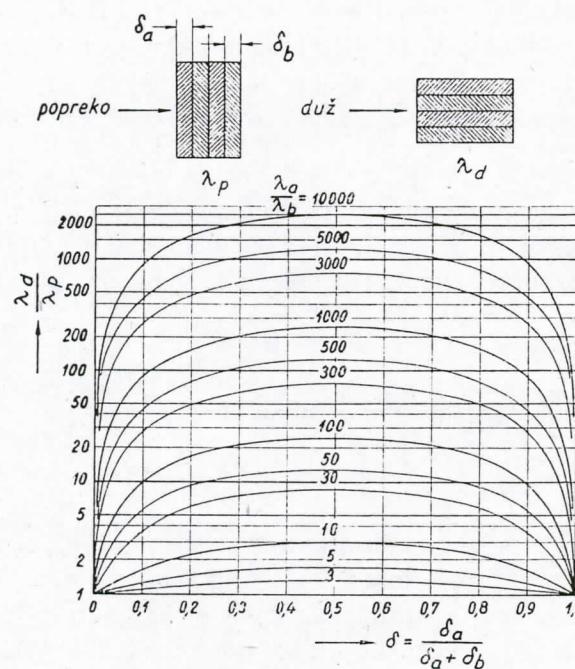
Ovdje ne važi više (559), budući da slojevi teku okomito na površinu stijenke.

Zanimljivo je vidjeti u kakvom su odnosu vodljivosti topline u stijenci sa uzdušnim i u stijenci sa poprečnim slojevima, a slojevi se sastoje samo iz dvovrsnog materijala  $a$  i  $b$ . Po (561) i (562) slijedi

$$\frac{\lambda_d}{\lambda_p} = 1 + \delta (1 - \delta) \frac{\left(1 - \frac{\lambda_b}{\lambda_a}\right)^2}{\frac{\lambda_b}{\lambda_a}} \quad (564)$$

gdje su  $\delta = \frac{\delta_a}{\delta_a + \delta_b}$  i  $(1 - \delta) = \frac{\delta_b}{\delta_a + \delta_b}$  udjeli debljine slo-

jeva obih materijala, a  $\lambda_d$  i  $\lambda_p$  prosječni koeficijenti toplinske vodljivosti duž, odnosno poprečno na slojeve. Po (564) je koeficijent toplinske vodljivosti duž slojeva uvijek veći, nego li poprečno na njih, što je vrlo važno za mnoge izolacije, a posebno



Sl. 198. Omjer vodljivosti  $\lambda_d$  duž slojeva i  $\lambda_p$  poprečno na slojeve za tkanine. Kod ovih nije svejedno kako su im smještena vlaknica prediva, tako da se s istom količinom istog materijala (vune, pamuka ili svile) može već prema vrsti tkanja postići vrlo različiti toplinski efekt. Kod slogova s nazmjence složenim papirnatim i željeznim lamelama, koji se upotrebljavaju za električne transformatore, odvodenje je topline u smjeru slojeva znatno jače nego li popreko na njih. To je naravno od važnosti za hlađenje elektromagneta. Razlika između poduzne i poprečne vodljivosti to je veća, što se debljine slojeva obojeg materijala manje razlikuju i što je razlika obih koeficijenata vodljivosti veća, sl. 198. Zato će najveća razlika prolaza topline u oba smjera biti za slogove kod kojih je  $\delta = 0,5$ , t. j. kod kojih su lamele i jednog i drugog materijala jednake debljine.

**Koeficijent prolaza topline**) Za neke je tehničke proračune od prednosti raditi sa pojmom koeficijenta prolaza topline  $k$  [ $\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ ]. Jednoj strani stijenke

<sup>1)</sup> Pobliže, vidi niže dolje u poglavlju „Prolaz topline“.

predaje se toplina od prve tekućine s koeficijentom prelaza topline  $\alpha_1$  [ $\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ ], vidi (596). Koeficijent toplinske vodljivosti stijenke neka je  $\lambda$ , a debljina joj je  $\delta$ . Koeficijent prelaza topline na drugu tekućinu na drugoj strani stijenke neka je  $\alpha_2$ . Onda su toplinski otpori  $W$  za  $1 \text{ m}^2$  površine stijenke prema (552)

$$W_{\alpha_1} = \frac{1}{\alpha_1}; \quad W_\lambda = \frac{\delta}{\lambda}; \quad W_{\alpha_2} = \frac{1}{\alpha_2} \quad (565)$$

a sveukupni otpor po (554)

$$W_{sv} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2} \quad (566)$$

Koeficijent prolaza topline  $k$  recipročna je vrijednost otpora  $W_{sv}$

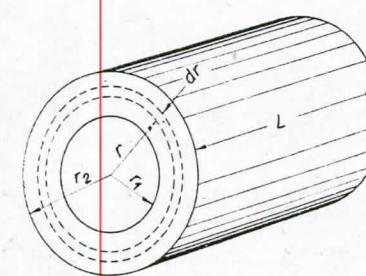
$$k = \frac{1}{W_{sv}} \quad [\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^\circ\text{C}] \quad (567)$$

a sa (566)

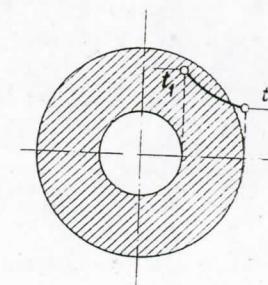
$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (568)$$

**Stijenka cijevi** Tehnički će biti važno poznavati tok topline kroz neku cilindričnu stijenku, s kakvom se ima posla na pr. kod izolacija cijevi, sl. 199. Kroz koncentričnu cilindarsku površinu radiusa  $r$  struji toplina

$$Q_h = - \frac{dt}{dr} \lambda F = - \frac{dt}{dr} \lambda 2\pi r L \quad (569)$$



Sl. 199. Provodenje topline kroz stijenku cijevi



Sl. 200. Temperatura stijenke cijevi

U ustaljenom stanju mora kroz nutarnju i vanjsku cilindarsku površinu prolaziti ista količina topline. Iz (569) se vidi da je

$$dt = -\frac{Q_h}{2\pi\lambda L} \frac{dr}{r} \quad (570)$$

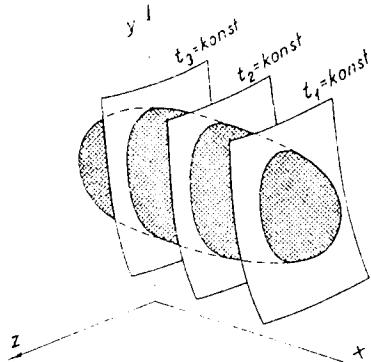
a kad je  $\lambda = \text{konst}$

$$t_1 - t = \frac{Q_h}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r}{r_1} \quad (571)$$

Zato je tok temperature neka logaritmička funkcija udaljenosti od cijevne osi, sl. 200. Uvrstimo li za vanjski plasti  $r = r_2$ , a  $t = t_2$ , to je mlaz topline koji prolazi kroz taj cilindar

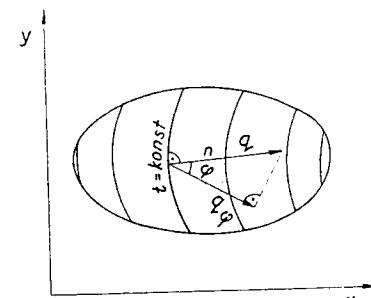
$$Q_h = 2\pi\lambda L \frac{t_1 - t_2}{\ln \frac{r_2}{r_1}} [\text{kcal/h}] \quad (572)$$

**Općeniti slučaj** Temperature se u nekom nejednolikom temperiranom tijelu, sl. 201., nastoje provodenjem topline izjednačiti. Sve točke tijela s istom trenutačnom temperaturom leže na niveau-plohi iste temperature. Ove površine mogu biti u raznim položajima, no one se međusobno ne mogu niti presjecati niti dodirivati, jer bi inače u tim točkama tijela istovremeno vladale dvije temperature, a to bi bilo fizikalno besmisleno.



Sl. 201. Niveau-plohe temperature

vati, jer bi inače u tim točkama tijela istovremeno vladale dvije temperature, a to bi bilo fizikalno besmisleno.



Sl. 202. Tok topline u tijelu

Toplina struji u smjeru pada temperature, koji je najjači u smjeru normale na niveau-plohu. Gustoća toplinskog toka u promatranoj točci za ovaj je smjer

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \text{ kcal/m}^2 \text{ h} \quad (573)$$

U smjeru niveau-plohe nema temperaturnoga pada, tako da toplina u tom smjeru ne struji. U bilo kojem smjeru, koji s normalom niveau-plohe čini kut  $\varphi$ , sl. 202., temperaturni je pad

$$-\frac{\partial t}{\partial n} \cos \varphi \quad (574)$$

a gustoća toplinskog toka, mjerena u tom smjeru je

$$q_\varphi = q \cos \varphi = -\lambda \frac{\partial t}{\partial n} \cos \varphi \quad (575)$$

Vrijednost za  $q_\varphi$  možemo dobiti, ako vektor  $q$  projiciramo iz smjera normale u novi smjer. Na taj način možemo smjer i veličinu gustoće nekog toplinskog toka  $q$  prikazati njenim trim projekcijama  $q_x$ ,  $q_y$ ,  $q_z$  u koordinatnim osima, sl. 203. Time dobivamo

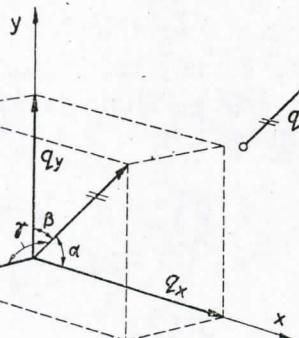
$$\begin{aligned} q_x &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} = q \cos \alpha \\ q_y &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial y} = q \cos \beta \\ q_z &= -\lambda \frac{\partial t}{\partial z} = q \cos \gamma \end{aligned} \quad (576)$$

a odavde

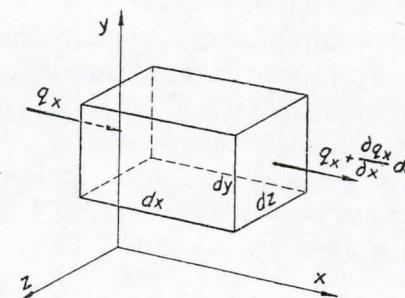
$$q = \sqrt{q_x^2 + q_y^2 + q_z^2} \quad (577)$$

Ovdje su  $-\frac{\partial t}{\partial x}$ ,  $-\frac{\partial t}{\partial y}$  i  $-\frac{\partial t}{\partial z}$  temperaturni padovi, na koje nailazimo ako u tijelu napredujemo u smjeru odnosnih koordinatnih osi.

Da bismo odredili vremensku promjenu temperature tijela, postavit ćemo toplinsku bilancu za neki mali volumenski element  $dV$  sa dužinom bridova  $dx$ ,  $dy$ , i  $dz$ . Zbog temperaturnog



SI. 203. Tok topline s pripadnim komponentama



SI. 204. Tok topline kroz prostorni elemenat

pada u smjeru  $x$ , struji na jednoj strani toplina u element, sl. 204., a na drugoj iz elementa. Pretičak  $dq$  odvedene topline mora se namiriti toplinom ohlađivanja volumenskog elementa. U smjeru  $x$  toplinski tok ulazi i izlazi kod tog paralelepipeda kroz postrane plohe ( $dy \cdot dz$ ). Pretičak je odvedene topline spram dovedene u vremenu  $d\tau$  po sl. 204.,

$$dq_x (dy dz) d\tau = \frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy dz d\tau = \frac{\partial q_x}{\partial x} dV d\tau \quad (578)$$

Sasvim analogno za oba druga koordinatna smjera. Toplina ohlađivanja elementa u istom je vremenskom otsječku  $d\tau$

$$c\gamma dV d\tau = c\rho g dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau \quad (579)$$

gdje su  $c$  specifična toplina,  $\gamma$  jedinična težina,  $\rho$  masena gustoća a  $g$  ubrzanje zemljine teže. Uvezši u obzir komponente toplinskog toka za sva tri smjera, dobivamo toplinsku bilancu

$$\left( \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right) dV d\tau + c\rho g dV \frac{\partial t}{\partial \tau} d\tau = 0 \quad (580)$$

Prema (576)

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} = -\lambda \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \text{ i t. d.} \quad (581)$$

Koji put će se u volumenskom elementu  $dV$  pojavitи toplinski izvor sa specifičnom izdašnostи  $q_i$  [kcal/m<sup>3</sup>h], možda kao JOULE-ova toplina u električkim vodičima ili kao kondenzaciona

toplina kod ukapljivanja pare, ili kao toplina izgaranja u plamenu. I ovu toplinu  $q_i dV d\tau$  moramo uzeti u obzir u (580), tako da u općenitom slučaju dobivamo

$$-\lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + c\rho g \frac{\partial t}{\partial \tau} = q_i \quad (582)$$

odakle slijedi promjena temperature s vremenom u promatranoj točki

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c\rho g} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_i}{c\rho g} \quad (583)$$

Faktor

$$\frac{\lambda}{c\rho g} = \frac{\lambda}{c\gamma} = a \text{ [m}^2/\text{h}] \quad (584)$$

nazivamo koeficijentom temperaturne vodljivosti. Ovaj je fizikalno svojstvo promatrane tvari.

U ustaljenom je stanju  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$  pa ako još nema toplinskih izvora, imamo i  $q_i = 0$ .

### Prelaz topline konvekcijom

Jedan od najvažnijih načina prelaza topline u tehnici predaja je topline od tekućina (uključivši plinove), koje su u gibanju, na neku čvrstu stijenku i obratno. Gibanje se tekućine može izazvati na dva načina.

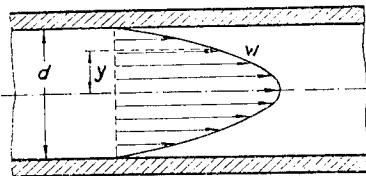
Kod slobodne ili prirodne konvekcije čestice se na toplijoj stijenci ugriju i tako postaju lakše. One se dižu u vis i izazivaju strujanje, koje je prouzročeno samom izmjenom topline, pa ga zato zovemo slobodnim ili prirodnim strujanjem. Prekinemo li prelaz topline na pr. isključivanjem grijalice, to će nestati i slobodnog strujanja.

Kod nametnutog strujanja gibanje se tekućine podržava umjetno i neovisno od prelaza topline, a nameće se vanjskim uvjetima, tako na pr. pri strujanju kroz cijevi razlikom pritiska. I kod slobodnog i kod nametnutog strujanja za prelaz topline značajna je konvekcija. To je pojava, pri kojoj tople čestice putuju

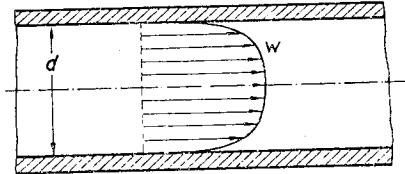
od stijenke u jezgru struje, gdje se hlađe, miješajući se s hladnom tekućinom, dok hladne čestice iz jezgre dolaze k stijenci, gdje se griju.

Ovo je poprečno gibanje čestica svojstveno turbulentnom strujanju. Kod laminarnog strujanja strujna se vlakna ne miješaju, tako da između njih nema izmjene čestica. Prelaz topline poprečno na laminarne slojeve vrši se čistim provođenjem topline, baš tako kao kod tekućine u mirovanju.

I opažanja i umovanja dovode do spoznaje, da brzina strujanja tekućine, koja kiasi stijenke, u neposrednoj blizini stijenke opada na vrijednost nula, ma kakva bila brzina u osi



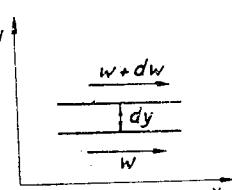
sl. 205. Profil brzina kod laminarnog strujanja



sl. 206. Profil brzina kod turbulentnog strujanja

cijevi. Profil brzina preko presjeka cijevi prikazan je u sl. 205. i 206. Kod izraženog lamiranog strujanja karakter je brzinskog profila paraboličan, s izrazitim maksimumom u osi cijevi. Kod turbulentnog strujanja podjela je brzine preko presjeka mnogo jednoličnija. U blizini stijenke — u graničnom sloju — opada i kod turbulentnog strujanja brzina naglo na vrijednost nula.

**Pad pritiska** Između dva sloja, koji u razmaku  $dy$  klize jedan pored drugoga sl. 207. pojavljuju se sile smicanja, izazvane žilavošću (tegljivošću) tekućine. Po NEWTON-u ova je sila, koja djeluje u smjeru  $x$  za  $1 \text{ m}^2$  površine sloja



Sl. 207. Slojevi u klizanju

$$\sigma = \eta \frac{dw}{dy} [\text{kg/m}^2] \quad (585)$$

Ova sila smicanja nastoji izjednačiti brzine ovih slojeva.  $\eta$  [ $\text{kg sek/m}^2$ ] je pri tom (dinamička) žilavost tekućine. U fizikalnom sustavu mjera njena je jedinica [ $\text{gr/cm sek}$ ], a ime joj je po POISSEUILLE-u 1 Poise. Prikladnija je manja

jedinica 1 Centi-poise (1 cP) koja je jednaka 0,01 Poise. Žilavost se zadaje obično u ovim jedinicama. Iz razdiobe brzina kod turbulentnog strujanja vidimo, da će se primjetno trenje pojaviti samo u graničnom sloju, dok u jezgri struje opažamo samo male razlike brzina, a prema tome i male sile trenja. Po POISEUILLE-ovom zakonu je u cijevi kružnoga presjeka brzina  $w$  u razmaku  $y$  od osi cijevi pri laminarnom strujanju, sl. 205. i 208.,

$$w = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} (r^2 - y^2) \quad (586)$$

a u samoj osi cijevi

$$w_0 = \frac{p_1 - p_2}{4 \eta l} r^2. \quad (587)$$

Iz toga slijedi pad pritiska duž cijevi duljine  $l$

$$p_1 - p_2 = \frac{4 \eta l w_0}{r_2} = \frac{16 \eta l w_0}{d^2}. \quad (588)$$

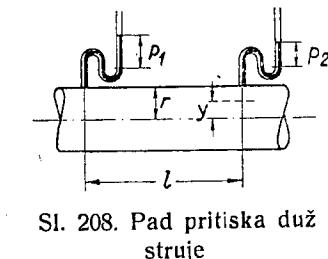
Tome je nasuprot kod turbulentnog strujanja u cijevi s promjerom  $d = 2r$  po podatcima nauke o strujanju

$$p_1 - p_2 = \phi \frac{l}{d} \frac{\gamma w^2}{2g} \quad (589)$$

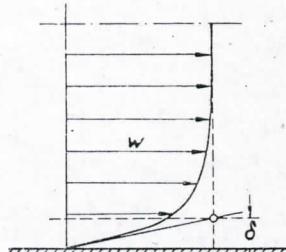
gdje je

$$\phi = \frac{0,3164}{\sqrt{\frac{w d \gamma}{g \eta}}} \quad (590)$$

Dok je kod laminarnog strujanja pad pritiska razmjeran žilavosti, to je on kod turbulentnog strujanja razmjeran tek njenom četvrtom korjenu, a to znači, da je kod turbulentnog strujanja pad pritiska gotovo neovisan o žilavosti. Pad se pritiska kod turbulentnog strujanja uglavnom uvjetuje trajnim trošnjem kinetičke energije čestica. Zato se laminarno strujanje, a time i laminarni dio graničnog sloja upravljuju silama trenja,



Sl. 208. Pad pritiska duž struje



Sl. 209. Debljina graničnog sloja

#### Diferencijalne jednadžbe strujanja i prelaza topline

Žbe. Naša razmatranja ograničit ćemo na strujanja u ustaljenom stanju (stacionarno strujanje), kod kojega doduše brzine u svakoj točci strujanja mogu biti druge, no koje se ne mijenjaju s vremenom. To obuhvaća najvažniji dio problema konvektivnog prelaza topline.

Promotrimo li u struji neki paralelepiped s dužinama brida  $dx, dy, dz$ , to u ustaljenom stanju mora kroz šest stranica ulaziti toliko tekućine koliko i izlaziti. To se matematski izražava jednadžbom kontinuiteta

$$\frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} = 0 \quad (591)$$

Ako u smjeru  $x$  dotječe više nego li na suprotnoj strani otječe, to u smjeru  $y$  ili  $z$  moramo opaziti baš protivno.

U svakoj točci strujanja mora osim toga vladati ravnoteža sila. Kao sile se pojavljuju: Pad pritiska, sila teže, sile trenja i sile ubrzavanja. Ako se ne pojavljuju slobodne površine sa svojim silama površinske napetosti, to drugih sila neće biti. Strujanje teče u prostoru, pak je podesno sile prikazivati sa svojim komponentama u tri koordinantna smjera  $x, y, z$ . Pripadne jednadžbe ravnoteže sila glase prema NAVIER-STOKES-u za smjer  $x$

turbulentno strujanje silama tromosti, dok su u prelaznom području između laminarnog dijela graničnog sloja i turbulentne jezgrene struje oba utjecaja nekako podjednaka. Zato se za sam granični sloj ne može povući ostra granica. Debljina graničnog sloja  $\delta$  manje je ili više svojevoljno definirana veličina, na pr. prema sl. 209. Za prelaz je topline baš ovaj granični sloj od osobite važnosti.

Hidrodinamika nas uči, da gibanje tekućine u bilo kojoj točci strujanja mora zadovoljavati stanovite jednadžbe.

Naša razmatranja ograničit ćemo na strujanja u ustaljenom stanju (stacionarno strujanje), kod kojega doduše brzine u svakoj točci strujanja mogu biti druge, no koje se ne mijenjaju s vremenom. To obuhvaća najvažniji dio problema konvektivnog prelaza topline.

Promotrimo li u struji neki paralelepiped s dužinama brida  $dx, dy, dz$ , to u ustaljenom stanju mora kroz šest stranica ulaziti toliko tekućine koliko i izlaziti. To se matematski izražava jednadžbom kontinuiteta

$$\rho \left( w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_x}{\partial y} + w_z \frac{\partial w_x}{\partial z} \right) = \rho g_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w_x}{\partial z^2} \right\} \quad (592)$$

a sasvim slične jednadžbe za smjerove  $y$  i  $z$ . Indeksi  $x, y, z$  odnose se na komponente dotične veličine za promatrani smjer. Brzina neke čestice mijenja se od mesta do mesta, t. j. čestice se pri svojem gibanju usporavaju i ubrzavaju. Pripadna sila ubrzanja = masa  $\times$  ubrzanje predočena je za jedinicu prostora lijevom stranom jednadžbe (592). Sila teže djeluje u smjeru  $x$  svojom komponentom  $\rho g_x$ . Pad pritiska zastupa član  $-\frac{\partial p}{\partial x}$ . Sile trenja uvjetovane su žilavošću  $\eta$  i brzinom promjene oblika čestica, kako se to očituje u posljednjem članu desne strane jednadžbe.

Ovim se jednadžbama pridružuje još i bilanca topline. U ustaljenom se stanju mora promatranom prostornom elementu dovoditi toliko topline koliko se i odvodi. Prostornom elementu  $dV$  dovodi se slično kao u (582) toplina provođenjem, ali se ona osim toga donosi i s onim česticama, koje prostrujavaju prostorni element pak se pri tom ohlađuju. Budući da se temperatura prostornog elementa zbog pretpostavljene ustaljenosti strujanja ne mijenja, to mora sveukupno dovedena toplina biti jednak nuli. Uvezvi još u obzir možebitne izvore topline  $q_i$  [ $\text{kcal}/\text{m}^3$ ] dobivamo tako jednadžbu

$$c\gamma \left( w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} \right) = \lambda \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + q_i \quad (593)$$

Lijeva strana predočuje onu količinu topline za jedinicu prostora, koja se upotrebljava za grijanje čestica, kad se ove prigodom prolaza kroz paralelepiped  $dx, dy, dz$  ugriju za  $dt$ . U smjeru  $x$  struji kroz kocku s dužinom brida 1 u sekundi količina medija  $\gamma w_x$ . Potrebna se toplina snabdjeva provođenjem topline iz neposredne blizine, što je predočeno prvim članom desne strane, a osim toga toplinskim izvorom  $q_i$ , što je izraženo posljednjim članom. Sa (584) možemo gornji izraz pojednostaviti

$$w_x \frac{\partial t}{\partial x} + w_y \frac{\partial t}{\partial y} + w_z \frac{\partial t}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} \right) + \frac{q_i}{c\gamma} \quad (594)$$

Jednadžba (591), tri jednadžbe (592) i jednadžba (594) daju sistem od pet parcijalnih diferencijalnih jednadžbi, koje je postavio već A. OBERBECK<sup>1)</sup>. No tek je NUSSELTU-u uspjelo da primjenom teorema sličnosti ove jednažbe privede tehničkoj upotrebi.

Ovim diferencijalnim jednadžbama određene su pojave izmjene topline ponajprije za pojedine točke i njihovu neposrednu blizinu unutar struje. No na daljnji razvoj strujanja utječu u bitnoj mjeri još i granični uvjeti. Hlađena stijenka hladiti će struju, dok će je vruća stijenka grijati. U blizini je stijenke strujanje laminarno, tako da se ovdje toplina u smjeru normale izmjenjuje samo provođenjem, pak je tu prema (573)

$$dq = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s dF \quad (595)$$

gdje je  $dF$  element površine stijenke,  $n$  normala na  $dF$ , a  $\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s$  temperaturni gradijent tekućine neposredno na stijenci i okomito na nju. Isto tako moramo uzeti u obzir i druge vanjske uvjete, kao što su razdioba brzine i temperature na ulaznom presjeku cijevi.

Davno prije nego li se je spoznalo, koje su veličine od utjecaja, prikazivalo se izmjenjenu toplinu između stijenke i tekućine pomoću koeficijenta prelaza topline  $\alpha$  [ $\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ ], i to po NEWTON-u

$$Q = \alpha (t_1 - t_2) \tau F [\text{kcal}] \quad (596)$$

Fizičari su nazivali  $\alpha$  i koeficijentom vanjskog provođenja topline. Iako se ta veličina  $\alpha$  uopće ne pojavljuje u diferencijalnim jednadžbama (591) do (595), te je time pojmovno suvišna, to ćemo je ipak uvesti u naša razmatranja, jer se ona mnogo upotrebljava u praktičnim računima. Ako je primjenimo na promatrani slučaj dobivamo u (595)

<sup>1)</sup> A. Oberbeck, Ann. Physik (1879) 271.

$$dq = \alpha (t_s - t_o) dF = -\lambda \left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s dF \quad (597)$$

gdje je  $t_s$  temperatura površine stijenke. Tako se dobiva jednadžba

$$\alpha = -\lambda \frac{\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s}{t_s - t_o} \quad (598)$$

kojom se nekadašnji sasvim empirički koeficijent prelaza topline  $\alpha$  organski uključuje u sistem diferencijalnih jednadžbi konvektivnog prelaza topline. Budući da temperaturni gradijent  $\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s$  u (598) ovisi o temperaturama stijenke i tekućine, te o debljini graničnog sloja, dakle također i o načinu strujanja, to je  $\alpha$  ovisno o svim onim mnogobrojnim veličinama, koje se pojavljuju u jednadžbama (591) do (595). Zato je razumljivo, da je ta ovisnost ostala tako dugo nerazjašnjena.

### Svojstva tvari

Od utjecajnih veličina u (591) do (595) veličine su  $\rho$  odnosno  $\gamma = \rho g$ , zatim  $\eta$ ,  $c$ ,  $\lambda$  odnosno iz njih izvedene veličine  $a = \frac{\lambda}{cp\gamma}$ ,  $\nu = \frac{\eta}{\rho}$  čista svojstva tvari, koja strui, pak ćemo ih ponajprije promotriti. Od spomenutih veličina dovoljno su nam poznate gustoća  $\rho$  odnosno jedinična težina  $\gamma = \frac{1}{\nu}$  te specifična toplina  $c$ .

**Žilavost kapljevinu** Prema iskustvu žilavost  $\eta$  kod kapljevinu naglo se smanjuje porastom temperature.<sup>1)</sup> Tečniji je od vode kod  $0^\circ\text{C}$  na pr. tek heksan sa  $\eta_{\text{Heksan}} = 0,4 \text{ cP}$ . Vrlo žilave su tekućine glicerin sa  $5400 \text{ cP}$  i ricinusovo ulje sa  $7200 \text{ cP}$ . Za kapljevine još nije postavljena teorija žilavosti, koja bi općenito zadovoljila.

<sup>1)</sup> Tok dinamičke žilavosti  $\eta$  prema (604) za  $\rho = \text{konst}$  analogan je toku kinematičke žilavosti  $\nu$ .

**Žilavost plinova** Ishodište žilavosti plinova leži u izmjeni impulsa molekula. Kod plinova, koji struje, kližu pojedini slojevi jedan pored drugoga raznim brzinama. Po kinetičkoj teoriji plinova razdioba je brzina na pojedine molekule unutar svakoga sloja doduše jednak, i to t. zv. MAXWELL-ova razdioba brzina. No molekule bržeg sloja posjeduju još i jednu dodatnu brzinu — brzinu sloja — u smjeru gibanja sloja. Preljetavanjem molekula iz bržeg sloja u polaganiji one se u prosjeku zbog elastičnih molekularnih srazova usporavaju, dok se „urođene“ molekule nešto ubrzavaju. Osim toga se i molekule polaganijeg sloja kod prelijetavanja u brži sloj ubrzavaju. Prema tome se mijenja veličina gibanja (impuls) ovih molekula. Pojedinačne promjene impulsa su vanredno mnogobrojne. No prema jednom stavku mehanike sveukupna je promjena impulsa u jedinici vremena jednak nekoj sili, tako da slojevi, koji klize djeluju međusobno tom silom — silom žilavosti ili trenja — u smjeru svojeg relativnog gibanja. Kod prelijetavanja neke molekule iz jednog sloja u drugi, predaje se njezin višak brzine raznim sudarima na mnoge molekule, koje po tom odlijejavaju u najrazličitijim smjerovima s nešto povećanom brzinom. Tako se donesen višak brzine, koji je za sve molekule bržeg sloja usmjeren u smjeru strujanja, kod prelijetavanja u drugi sloj, preobrazuje u nesređeno gibanje molekula ovog drugog sloja, t. j. u toplinu. Na taj način dolazi do pojava unutarnjeg trenja i žilavosti kod plinova.

Prosljedimo li ove misli računski to bismo kod plinova dobili za žilavost izraz

$$\eta = kpcl \quad (599)$$

Ovdje su  $k$  neki broj,  $p$  gustoća plina,  $c$  prosječna brzina molekula,  $l$  prosječni slobodni put molekula, t. j. prosječna dužina puta slobodnog ljeta molekule između dva uzastopna sraza. Po kinetičkoj teoriji plinova prosječna je brzina molekula  $c$  usko povezana s temperaturom  $T$  i s molekularnom težinom  $m$ .

$$c = k_1 \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (600)$$

Slobodni je pak put molekula

$$l = k_2 \frac{m}{\rho} \quad (601)$$

tako da za idealne plinove dobivamo

$$\eta = k \rho k_1 \sqrt{\frac{T}{m}} \cdot \frac{mk_2}{\rho} = k_3 \sqrt{mT} \quad (602)$$

Kod idealnih plinova je nasuprot očekivanju žilavost neovisna o gustoći, i ona u protivnosti s tekućinama raste s temperaturom. Kod visokih pritisaka pojavljuju se međumolekularne sile, koje se gore nije uzelo u obzir, pa će se ovdje žilavost mijenjati i s pritiskom. Kod sasvim niskih pritisaka (vakuum) zauzima slobodni put  $l$  molekula red veličine dimenzija posude, tako da se i ovdje nailazi na posebne pojave.

Lagani plinovi, kao vodik, slabo su žilavi, što slijedi iz utjecaja molekularne težine u (602). Uvezši u obzir međumolekularne sile dobio je SUTHERLAND ovu formulu

$$\eta = \eta_0 \sqrt{\frac{T}{T_0}} \frac{1 + \frac{C}{T}}{1 + \frac{C}{T}} \quad (603)$$

gdje je  $C = \text{konst}$ . Vrijednosti za  $C$  sabrane su u priloženoj tabeli po ERK-u. Za vrlo široka temperaturna područja mora se uzeti u obzir i ovisnost o temperaturi  $C = f(T)$ . Za niske temperature SUTHERLAND-ova formula više ne vrijedi.

Plin	Oznaka	$t_0$ °C	$\rho_0 \cdot 10^3$ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}$	$\eta_0 \cdot 10^7$ $\text{g} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$	$C$ K
Acetilen	$\text{C}_2\text{H}_2$	20	1,091	1020	198,2
Amonijak	$\text{NH}_3$	20	0,718	982	626
Argon	$\text{Ar}$	16	1,683	2204	142
Klor	$\text{Cl}$	15,6	3,04	1294	351
Klorovodik	$\text{HCl}$	0	1,639	1332	360
Ugljični dvokis	$\text{CO}_2$	0	1,977	1366	274
Ugljični oksid	$\text{CO}$	0	1,250	1665	101
Uzduh	—	0	1,293	1710	123,6
Metan	$\text{CH}_4$	17	0,675	1094	198
Kisik	$\text{O}_2$	0	1,429	1920	138
Sumporni dvokis	$\text{SO}_2$	0	2,927	1168	416
Sumporovodik	$\text{H}_2\text{S}$	17	1,448	1251	331
Dušik	$\text{N}_2$	0	1,251	1665	103
Vodena para pri $p = 1 \text{ kg/cm}^2$	$\text{H}_2\text{O}$	99	0,579	1255	673
Vodik	$\text{H}_2$	0	0,0899	850	83

**Kinematska žilavost** Za probleme prelaza topline prikladnija je kinematska žilavost, koju dobivamo iz dinamičke žilavosti po izrazu

$$v = \frac{\eta}{\rho} \quad [m^2/sek] \quad (604)$$

Kod kapljevinu vlada se  $v$  kao  $\eta$ , budući da je ovdje  $\rho = konst.$ . Pri tom su naravno brojčane vrijednosti  $\eta$  i  $v$  vrlo različite. Kod plinova je naprotiv  $\eta$  neovisno o gustoći i pritisku, dok je gustoća

$$\rho = \frac{\gamma}{g} = \frac{1}{gv} = \frac{P}{gRT} \quad (605)$$

ovisna o pritisku, pak je po tome iz (604) i (602) i kinematska žilavost ovisna o pritisku

$$v = K \frac{T^{\frac{3}{2}}}{P} \quad (606)$$

Kinematska žilavost  $v$  idealnih plinova raste s porastom temperature i s opadanjem pritiska, pak se prema tome vlada sasvim drugačije nego li kod kapljevinu.

Tako je na pr. za kapljevitu živu od  $0^\circ C$  dinamička žilavost  $\eta_{H_2} = 1,685$  [ $cP$ ],  $\rho_{H_2} = 13,60$  [ $g/cm^3$ ] a time i kinematska žilavost  $v_{H_2} = \frac{0,01685}{13,60} = 0,001240$  [ $cm^2/sek$ ]. Za plinoviti je vodik od  $0^\circ C$  i pri  $0,01 Atm$  dinamička žilavost  $\eta_{H_2} = 0,00846$  [ $cP$ ],  $\rho_{H_2} = 0,899 \cdot 10^{-6}$  [ $g/cm^3$ ], a kinematska žilavost  $v_{H_2} = \frac{0,00846}{0,899 \cdot 10^{-6}} = 94,2$  [ $cm^2/sek$ ]. Omjer kinematskih žilavosti za ove je tvari

$$\frac{v_{H_2}}{v_{H_2}} = 76000 \quad (607)$$

**Provodenje topline** Kod idealnih se plinova i pojava provođenja topline može isto tako izvesti kao i unutarnje trenje iz izmjene impulsa molekula. U nekom plinu s nejednoliko temperiranim slojevima molekule se toplijih zona kreću s većom prosječnom brzinom nego li one hladnijih zona.

Kod sraza molekula izmjenjuju se njihovi impulsi, čime se prosječne brzine, t. j. i temperature susjednih slojeva nastoje izjednačiti. Za razliku od unutarnjeg trenja, kod kojeg je razlika u prosječnoj brzini molekula bila prouzrokovana klizanjem pojedinih slojeva, treba razlog raznim prosječnim brzinama molekula u našem slučaju pripisati razlikama temperature. Tamo je razlika prosječnih brzina bila za pojedine slojeve sredena (usmjerena u smjeru strujanja), dok ovdje već odmah nailazimo na sasvim nesređeni višak prosječne brzine. S takvim umovanjem daje kinetička teorija plinova vezu između žilavosti i koeficijenta prolaza topline u obliku

$$\lambda = \epsilon c_v \eta \quad (608)$$

gdje je faktor  $\epsilon \geq 1$  po A. EUCKEN-u<sup>1)</sup> ovisan samo o stepenu slobode molekula,

$\epsilon = 2,5$  za jednoatomne plinove

$\epsilon = 1,8 - 1,9$  za dvoatomne plinove

$\epsilon = 1,6 - 1,7$  za troatomne plinove

dok za višeatomne plinove važe još manje vrijednosti. Sa  $c_v = \frac{C_v}{m}$  dobiva se iz (602)

$$\lambda = \epsilon C_v \frac{\eta}{m} = \epsilon C_v k_3 \sqrt{\frac{T}{m}} \quad (609)$$

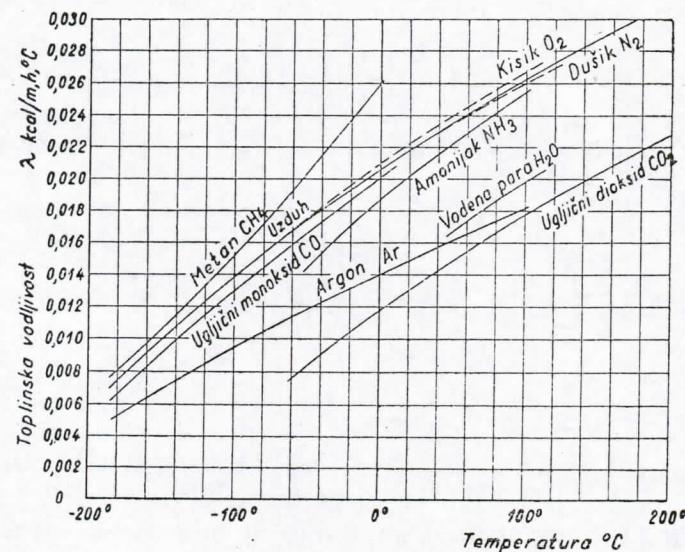
Iz (609) se vidi, da je koeficijent provođenja topline kod idealnih plinova neovisan o pritisku, te da je to veći što je lakši plin. To vrijedi i za plinove različitog broja atoma budući da kod većeg broja atoma postaje  $\epsilon$  doduše manje, ali  $C_v$  veće.

Ovisnost o temperaturi slijedi iz SUTHERLAND-ove jednadžbe (603)

$$\lambda = \frac{D(1 + ET)\sqrt{T}}{1 + \frac{C}{T}} \quad (610)$$

<sup>1)</sup> A. Eucken, Forschung Ing. Wes. (1940) 6.

Plin	Oznaka	C K	$10^6 \cdot E$ $K^{-1}$	$10^6 \cdot D$ $kcal/m \cdot h \cdot K^{2/3}$	$\lambda_0$ $kcal/m \cdot h \cdot K$
Argon . . . .	Ar	142	0	1292	0,0140
Ugljični dvokis .	CO <sub>2</sub>	274	1026	1162	0,0140
Uzduh <sup>1)</sup> . . . .	—	123,6	0	1818	0,0207
Metan . . . .	CH <sub>4</sub>	198	453	2391	0,0258
Živine pare . .	Hg	960	0	864	0,00315
Vodena para . .	H <sub>2</sub> O	673	2 0	2888	0,0137
Vodik . . . .	H <sub>2</sub>	83	247	10750	0,147



Sl. 210. Toplinska vodljivost nekih plinova kod okolišnjeg pritiska (Po Jakob-u).

Prema tome se toplinske vodljivosti najlakšeg i najtežeg plina odnose kao

$$\frac{\lambda_{H_2}}{\lambda_{Hg}} = \frac{0,147}{0,00315} = 47$$

Po tome se neko tijelo u vodiku brže hlađi nego li u uzduhu.

<sup>1)</sup> Dušik i kisik imaju otprilike istu vodljivost kao uzduh.

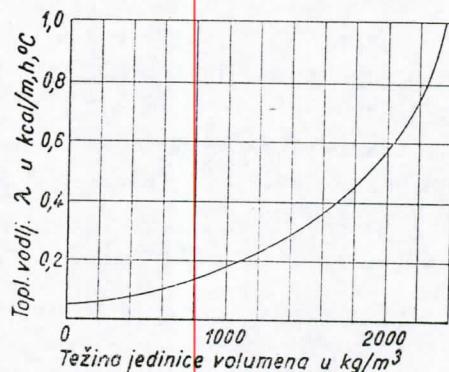
### Vodljivost kapljevina

Voda je između svih kapljevina najbolji vodič topline. Za kapljevitu je vodu pri  $10^\circ C$   $\lambda_{H_2O} = 0,50$  [kcal/m · h · °C]

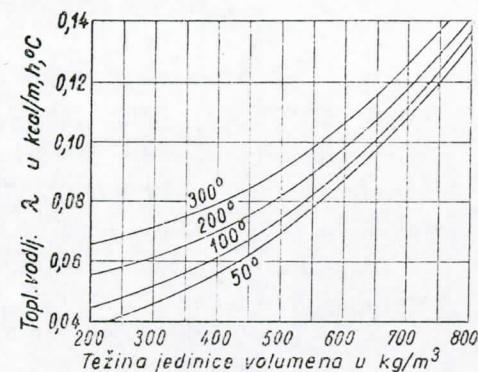
a najveća joj je vrijednost kod  $120^\circ C$ :  $\lambda_{120^\circ} = 0,59$ . Kapljevita voda provodi toplinu kod  $100^\circ C$  nekih trideset puta bolje od vodene pare. Anorganske su kapljevine nešto lošiji vodiči, dok su anorganske tvari mnogo lošiji. Tako je na pr. za alkohol  $\lambda = 0,14 - 0,18$ . Po tome su kapljevine mnogo bolji vodiči od plinova.

### Provodenje topline krutih tvari

Tu moramo dobro razlikovati kompaktna od šupljikavih tjelesa. U šupljikava tjelesa ubrajamo također i rastresiti materijal, kao pjesak, te vlaknati, kao vuna, t. j. sva onakva tijela, kod kojih se između krutih čestica nailazi na sitne uzdušne prostore. Po tome predstavljaju takve tvari nehomogeni materijal. Zbog velike razlike u toplinskoj vodljivosti krutih tijela i uzduha pokazuju šupljikave tvari sasvim druge koeficijente prolaza topline, nego li to odgovara kompaktnoj tvari, iz koje su ona sačinjena. Što je više uzdušnih međuprostora i što su oni sitniji i jednoličnije



Sl. 211. Prostorna težina i toplinska vodljivost građevnog materijala (Po Cammerer-u)



Sl. 212. Prostorna težina i toplinska vodljivost izolacionog materijala, koji se nanosi u vlažnom stanju (Po Hütte I. otsj. 4. 27. izd.)

razdijeljeni, to je vodljivost tvari lošija, te je takvo tijelo u toku prikladnije za izolacione svrhe. Prostorna težina poroznog

tijela može upravo služiti kao mjera za sposobnost izolacije. U sl. 211. i 212. prikazana je za šupljikave tvari ovisnost koeficijenta provođenja topline  $\lambda$  u ovisnosti od prostorne težine  $\gamma'$ . Za pluto možemo kod  $20^{\circ}\text{C}$  pisati

$$\lambda = 0,026 + 0,00009 \cdot \gamma' [\text{kcal}/\text{m h}^{\circ}\text{C}]$$

gdje prostorna težina  $\gamma'$  ulazi sa dimenzijom [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ]. Kod pluta kreće se  $\gamma'$  između 50 i 500  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

Budući da je voda bolji vodič topline od uzduha i od krutih tvari, to se izolaciona sposobnost šupljikavih i rastresitih tijela znatno pogoršava ovlaženjem.

Kompaktni metali provode toplinu bolje u čistom nego li u onečišćenom stanju. Najveća vrijednost koeficijenta provođenja topline, koja je do sada mjerena bit će valjda ona, koju je našao SCHOTT na prirodnom kristalu bakra pri  $-252^{\circ}\text{C}$  sa  $\lambda = 10500 [\text{kcal}/\text{m h}^{\circ}\text{C}]$ . Kod sasvim niskih temperatura pojavljuje se zanimljiva pojавa supravodljivosti.

### Tipične metode rješavanja

Da bismo mogli primijeniti osnovne jednadžbe prelaza topline (583), (591), (592) i (593), treba naći njihova rješenja. Do rješenja dolazimo ili strogim analitičkim računom (integracija diferencijalnih jednadžbi), ili približnim računom (na pr. grafičkom integracijom), ili pokusom (mjeranjima).

Analitičke metode dovode do cilja samo u rijetkim slučajevima. Ovdje ćemo promotriti neke od važnih problema, koji su rješivi analitičkim postupkom.

**Stacionarno strujanje topline kroz ravnu stijenku**

sl. 213. u ustaljenom je stanju po (583) sa  $\frac{\partial t}{\partial \tau} = 0$ ,  $\frac{\partial t}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial z} = 0$

$$\text{te } q_i = 0 \text{ (kad nema izvora topline)} \quad \alpha \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = 0 \quad (612)$$

Integracijom slijedi

$$\frac{\partial t}{\partial x} = K_1 \quad (613)$$

a odavle

$$(t_2 - t_1) = K_1 (x_2 - x_1). \quad (614)$$

Uvrstimo li (613) u (576) pri čem je  $q_y = q_z = 0$ , to dobivamo

$$K_1 = -\frac{q_x}{\lambda} \quad (615)$$

a time iz

$$q_x = -\lambda \frac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} [\text{kcal}/\text{m}^2 \text{h}] \quad (616)$$

gdje se indeksi 1 i 2 odnose na površine stijenke. Za površinu je  $F$

$$Q_h = \lambda \frac{t_1 - t_2}{x_2 - x_1} F. \quad (617)$$

U bilo kojoj ravnini, koja je usporedna s površinom, vlada temperatura

$$t = \frac{t_1 x_2 - t_2 x_1}{x_2 - x_1} - \frac{t_1 - t_2}{x_2 - x_1} x \quad (618)$$

Prema tome je u ustaljenom stanju tok temperature u ravnoj stijenci pravocrtan, kako se to pretpostavilo u sl. 197.

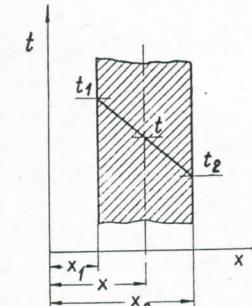
Po JAKOB-u mogu se (617) i (618) primijeniti i na beskonačno dugi šupljji valjak i na šuplju kuglu, kojima su s unutrašnje i vanjske strane nametnute jednolične temperature  $t_1$  i  $t_2$ , kad se uvrsti

$$x = x \quad \text{za ravnu stijenku}$$

$$x = \ln r \quad \text{za cilindar}$$

$$x = -\frac{1}{r} \quad \text{za kuglu}$$

gdje je  $r$  radius. U tom slučaju označuje  $F$  površinu okomitu na tok toplinske struje na mjestu  $r = 1$ .



Sl. 213. Pravocrtni tok temperature u stijenci.

**Vremenski promjenljive temperature** Kod mnogobrojnih tehničkih problema tješnja se moraju ugrijavati i ohladiti, a često se to događa periodički. To opažamo na pr. na predmetima, koji se naglim hlađenjem kale, ili pak na zidovima zgrada kod prekidanog loženja, nadalje kod regeneratora, pak kod cilindarskih glava eksplozionalih motora i t. d. Iako se analitički uspjelo riješiti tek najjednostavnije slučajeve, to se iz ovih mogu stvarati ipak važni zaključci i za zamršenje problema.

**Ravna stijenka** Neka ravna ploča debljine  $2X$  i jednolične početne temperature  $t_c$ , poznatih i nepromjenljivih svojstava ( $\lambda, c, \gamma, a$ ) unese se naglo u okolinu temperature  $t_{ok}$ . Izmjena topline s okolinom neka teče s jednoličnim koeficijentom topline  $\alpha$ . Tražimo razdiobu temperature (temperaturno polje) i odavanje topline u ovisnosti od vremena. Uvrstimo li zbog jednostavnosti nadtemperaturu nad okolinom

$$\vartheta = t - t_{ok} \quad (619)$$

to je po (583) zbog simetrije  $\frac{\partial^2 t}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0$ , pak sa  $q_i = 0$  postaje

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{c \rho g} \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (620)$$

pri čemu računajmo  $x$  od središnje ravnine ploče. Integraciju ove diferencijalne jednadžbe proveo je GRÖBER u obliku beskonačnog reda transcendentnih funkcija. Zbog glomaznosti matematskog aparata dajemo ovdje samo rezultate. Po ovima je nadtemperatura  $\vartheta$  u trenutku  $\tau$  nakon početka ohladijanja, za udaljenost  $x$  od središnje ravnine

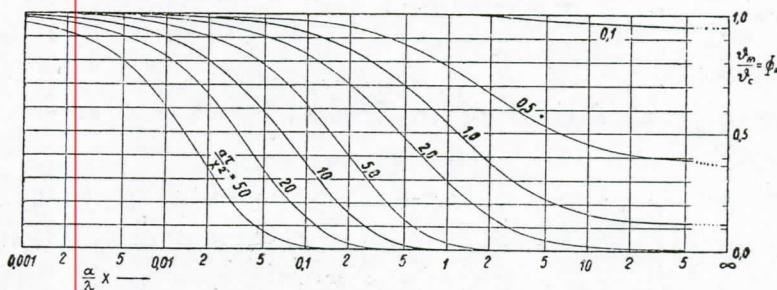
$$\vartheta = \vartheta_c \Phi \left( \frac{a\tau}{X^2}, \frac{x}{X}, \frac{\alpha}{\lambda} X \right), \quad (621)$$

gdje  $\Phi$  predstavlja spomenutu transcendentnu funkciju u obliku beskonačnog reda. Oblik je ove funkcije jednak za stijenke raznih debljina  $2X$  i raznih fizikalnih svojstava  $\lambda, c, \gamma, a, \alpha$ , pak se razlika između pojedinih stijenka očituje uvrštenjem pripadnih brojčanih vrijednosti  $X, \tau, x, \alpha, \lambda$  u jednu te istu funkciju.

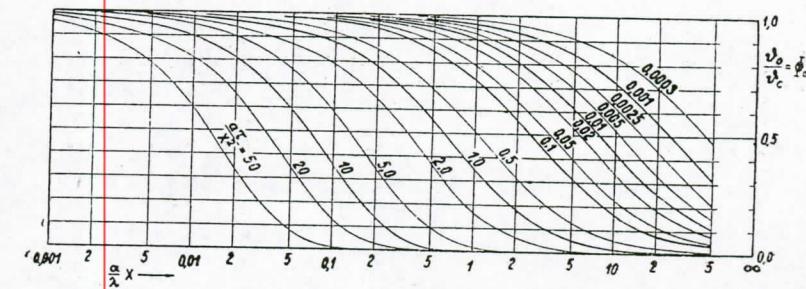
I odana se toplina može predstaviti sličnom funkcijom

$$Q = Q_c \cdot \Psi \left( \frac{a\tau}{X^2}, \frac{\alpha}{\lambda} X \right) \quad (622)$$

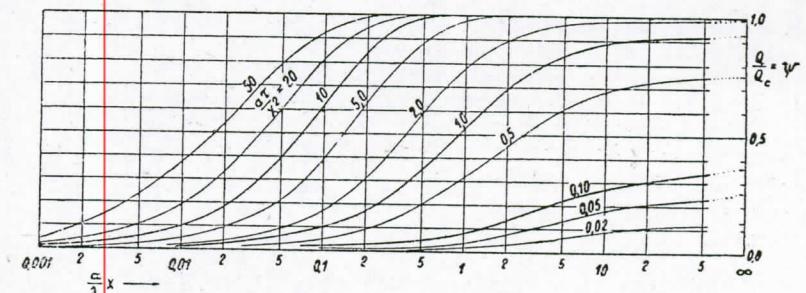
gdje je  $Q_c$  toplinski kapacitet stijenke spram okoline.  $Q$  je toplina, koja se oslobađa, kad se stijenka ohladi od početne



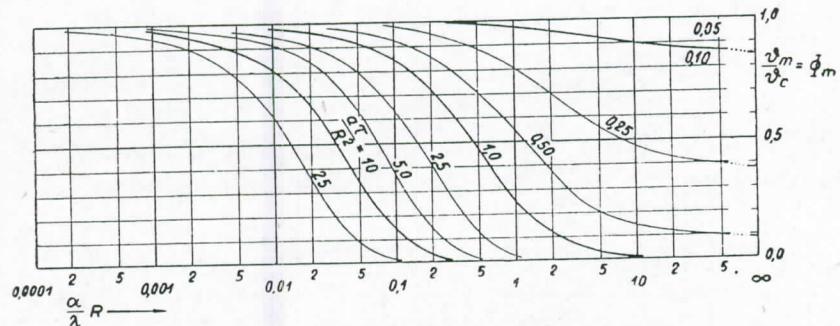
Sl. 214. Ohladijanje ploče; temperaturno polje središnje ravnine (po Gröber-u)



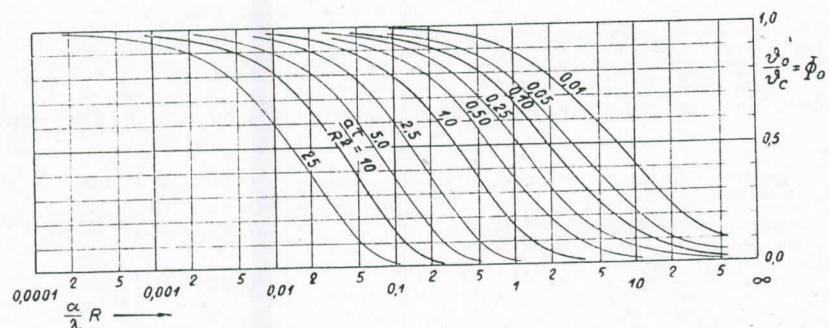
Sl. 215. Ohladijanje ploče; temperaturno polje površine (po Gröber-u)



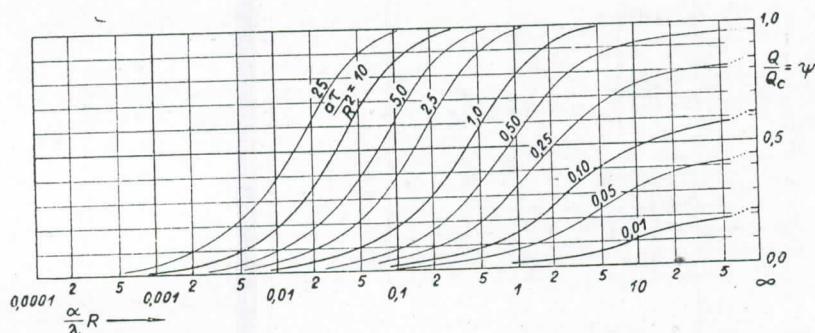
Sl. 216. Ohladijanje ploče; odana toplina (po Gröber-u)



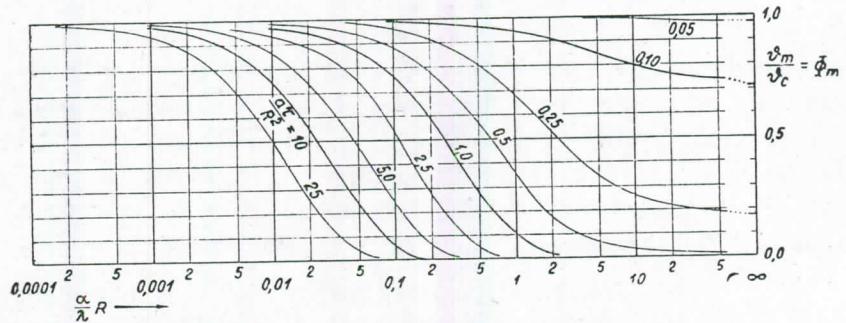
Sl. 217. Ohlađivanje cilindra; temperatura u osi (po Gröber-u).



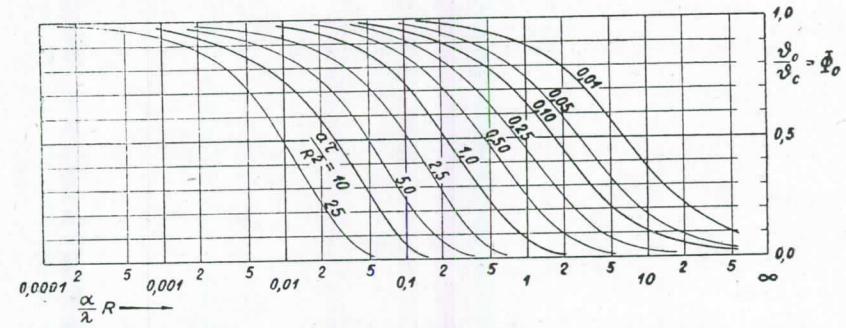
Sl. 218. Ohlađivanje cilindra; temperatura površine (po Gröberu).



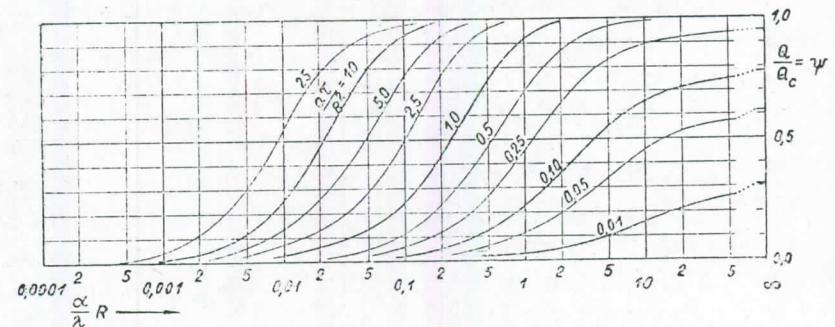
Sl. 219. Ohlađivanje cilindra; odana toplina (po Gröber-u).



Sl. 220. Ohlađivanje kugle; temperatura središta (po Gröber-u).



Sl. 221. Ohlađivanje kugle; temperatura površine (po Gröber-u).



Sl. 222. Ohlađivanje kugle; odana toplina (po Gröber-u).

temperature  $t_c$  na okolišnu temperaturu  $t_{ok}$ . Temperatura  $t_m$  središnje ravnine pretstavlja najvišu, a  $t_o$  na površini najnižu temperaturu temperaturnog polja. Za  $t_m$  treba u (621) uvrstiti  $x = 0$ , a za  $t_o$ ,  $x = 1$ . Time je

$$\vartheta_m = \vartheta_c \Phi_m \left( \frac{\alpha\tau}{X^2}, \frac{\alpha}{\lambda} X \right) \quad (623)$$

te

$$\vartheta_o = \vartheta_c \Phi_o \left( \frac{\alpha\tau}{X^2}, \frac{\alpha}{\lambda} X \right) \quad (624)$$

Funkcije  $\Phi_m$ ,  $\Phi_o$ , i  $\Psi$  predložene su u sl. 214., 215., 216. po GRÖBERU. Za primjenu ovih dijagrama treba iz zadanih vrijednosti  $X$ ,  $\lambda$ ,  $\alpha$ ,  $\alpha_c$ ,  $\vartheta_c$ ,  $Q_c$  i za željeni trenutak  $\tau$  odrediti značajke  $\frac{\alpha}{\lambda} X$  te  $\frac{\alpha\tau}{X^2}$ . S tim vrijednostima ulazimo u dijagram te u dobivenim točkama očitamo vrijednosti  $\frac{\vartheta_m}{\vartheta_o}$ ,  $\frac{\vartheta_o}{\vartheta_c}$ , i  $\frac{Q}{Q_c}$ .

Isto što važi za ravnu stijenku, važi formalno i za beskonačno dugi cilindar, te za kuglu. U jednadžbe (621) do (624) treba samo uvrstiti za  $x = r$ , a za  $X = R$ , gdje je  $r$  bilo koji radius, a  $R$  radius površine ovih tjelesa. No numerički su rezultati za svako od ovih tijela različiti. Rezultati za vremenski tok središnjih i površinskih temperatura  $t_m$  i  $t_o$ , te odane topline  $Q$  prikazani su u slikama 217., 218., 219. za cilindar, a u slikama 220., 221., 222. za kuglu također po Gröberu.<sup>1)</sup>

**Brzina ohlađivanja** Analogna rješenja našla su se i za kvadratičnu gredu, za kocku i t. d. Potpuno ohlađenje stijenke kao i kugle i ostalih tjelesa nastupit će tek nakon beskonačnog vremena. Zato se za uspoređenje trajanja ohlađivanja ne može promatrati vrijeme, koje proteče do potpunog ohlađivanja. U tu svrhu upoređujemo naprotiv vrijeme, koje proteče, dok se na pr. središte ohladi na polovicu vrijednosti svoje početne nadtemperaturu, t. j. na vrijednost  $\vartheta_m = \frac{1}{2} \vartheta_c$ . Ovo vrijeme zovemo „polovično vrijeme“. Može se odabrat i jedan drugi dio početne nadtemperaturе, pak promatrati vrijeme, koje protekne do ohlađivanja središta na jednu desetinu početne nadtemperaturе, t. j.  $\vartheta_m = 0,1 \vartheta_c$  (desetinsko vrijeme). Kod takvog uspoređenja vidjet ćemo, da se od navedenih tjelesa najbrže hlađi kugla, a najpolaganije stijenka.

<sup>1)</sup> Gröber-Erk, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 2. izdanje Berlin (1933).

### Grafičko određivanje temperaturnog toka

Opisana analitička metoda i pored svoje strogosti manjkava je iz više razloga. Prije svega se tok temperature za bilo koju točku može odrediti samo vrlo mukotrpnim računom u koliko se ne radi o površini ili o središtu, za koja mesta smo prikazali gotove dijagrame. No i za ova mesta su dijagrami izračunati samo za slučajeve, kad je ohlađivanje kod ploče s obje strane, a kod kugle i cilindra sa svih strana simetrično. Za nesimetrično hlađenje i prije svega za vremenski promjenljivi koeficijent prelaza topline  $\alpha$  ili opet za početnu nejednoliku razdiobu temperature, ovaj će postupak zatajiti. Tome je došlo elegantna grafička metoda E. SCHMIDT-a<sup>1)</sup>.

Za strujanje topline u jednom smjeru i za  $q_i = 0$  glasi (583)

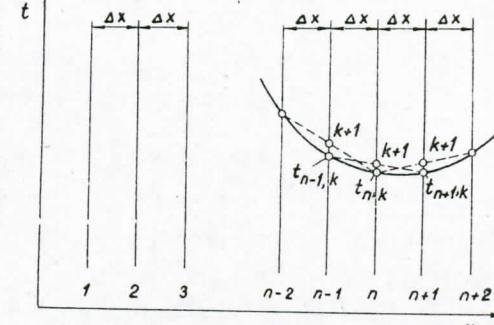
$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} \quad (625)$$

U svrhu postupnog računa podijelimo vremenski tok u jednake vremenske razmake  $\Delta\tau$ , a stijenku u slojeve jednake debljine  $\Delta x$ , sl. 223. Pišemo li (625) u obliku diferenca, koji je pristupačan računu, to je približno

$$\Delta_\tau t = a \frac{\Delta\tau}{(\Delta x)^2} \Delta_x^2 t \quad (626)$$

$\Delta_\tau t$  označuje prirast temperature neke točke u vremenskom razmaku  $\Delta\tau$ . U zadanom trenutku  $\tau$  označuje  $\Delta_x t$  razliku temperature dviju ravnina, koje

<sup>1)</sup> E. Schmidt, Über die Anwendung der Differenzrechnung auf technische Anheiz- und Abkühlungsprobleme. Festschrift zum 70. Geburtstag A. Föppls (Berlin 1924.) Isti autor, Das Differenzverfahren zur Lösung von Differentialgleichungen der nichtstationären Wärmeleitung, Diffusion und Impulsausbreitung, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieurwesens 13 (1942) 177.



Sl. 223. Određivanje razdiobe temperature u stijenci za trenutak ( $k+1$ ).

su za  $\Delta x$  razmaknute.  $\Delta_x^2 t$  je razlika dviju prostorno susjednih vrijednosti  $\Delta_x t$ .

U ravnini  $n \cdot \Delta x$  vlada u trenutku  $k \cdot \Delta \tau$  temperatura  $t_{n,k}$ . Po definiciji je onda

$$\Delta_\tau t = t_{n,k+1} - t_{n,k} \quad (627)$$

$$\Delta_x t = t_{n+1,k} - t_{n,k} \quad (628)$$

$$\Delta_x^2 t = (t_{n+1,k} - t_{n,k}) - (t_{n,k} - t_{n-1,k}) = t_{n+1,k} - t_{n-1,k} - 2t_{n,k}. \quad (629)$$

Uvrstivši to u (626) dobivamo

$$t_{n,k+1} - t_{n,k} = \alpha \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} (t_{n+1,k} + t_{n-1,k} - 2t_{n,k}). \quad (630)$$

Udnsimo li sada za praktičnu primjenu razmake  $\Delta x$  i  $\Delta \tau$ , koje možemo inače po volji odabrat tako, da je u (630)

$$\alpha \frac{\Delta \tau}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{2} \quad (631)$$

to sa (631) slijedi za ovaj posebni slučaj

$$t_{n,k+1} = \frac{1}{2} (t_{n+1,k} + t_{n-1,k}). \quad (632)$$

Odavle slijedi jednostavna konstrukcija za krivulju temperaturu u trenutku  $(k+1)\Delta\tau$ , ako je poznat tok krivulje za prethodni trenutak  $k\Delta\tau$ . U sl. 223. spojimo temperaturne točke  $t_{n-1,k}$  i  $t_{n+1,k}$  pak se na ordinati  $n$  koja leži između njih dobiva temperaturna točka  $t_{n,k+1}$ . Isto tako postupamo i za ostale ordinate. Spojivši tako dobivene točke u krivulju dobivamo temperaturno polje po isteku vremena  $\Delta\tau$ .

Na površini stijenke neka vlada temperatura  $t_s$ , a u okolini  $t_{ok}$ . Pri tom površina stijenke  $1 \text{ m}^2$  odaje okolini toplinsku struju

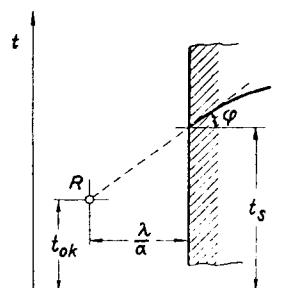
$$q = \alpha (t_s - t_{ok}) \quad (633)$$

Ta ista toplina mora se u tom trenutku dovoditi iz unutrašnjosti stijenke na njenu površinu

$$q = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x} \quad (634)$$

Izjednačenjem ovih jednadžbi dobivamo koeficijent nagiba rubne tangente temperaturne linije

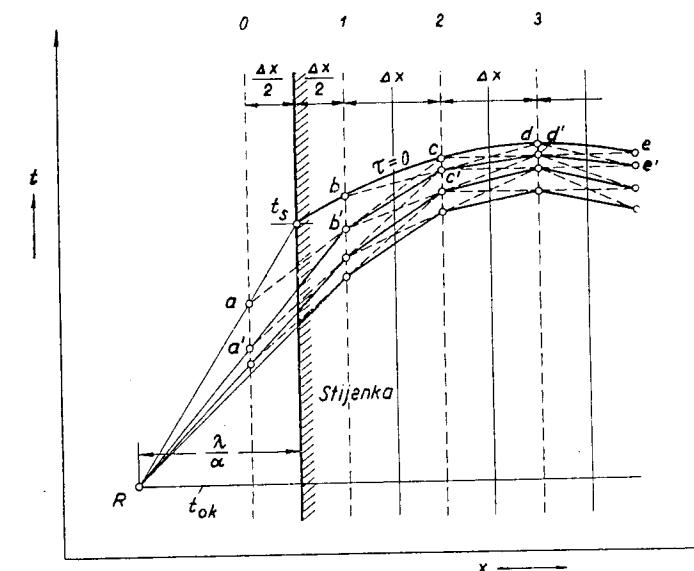
$$\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{t_s - t_{ok}}{\frac{\lambda}{\alpha}}. \quad (635)$$



Sl. 224. Temperatura na rubu stijenke

Nanesešmo li točku  $R$  u udaljenosti od stijenke  $h = \frac{\lambda}{\alpha}$  pri temperaturi  $t_{ok}$ , sl. 224., to rubna tangentna krivulja temperaturna mora ciljati u točku  $R$ .

Za praktičnu primjenu odabrat ćemo  $\Delta x$ , a iz (631) odrediti pripadno  $\Delta \tau$ . Za trenutak  $\tau = 0$  ucrtajmo krivulju temperaturu, koja mora biti nekako poznata, sl. 225. Za slučaj da je pri početku ohladijanja stijenka jednolično progrijana, bit će ta krivulja horizontalni pravac. Kod temperature  $t_{ok}$  nanesešmo na točku  $R$  po podacima  $\alpha$  i  $\lambda$ . Od površine stijenke nanesešmo na



Sl. 225. Postupak Schmidt-a

lijevo i na desno u razmaku  $\frac{1}{2}\Delta x$  ordinate  $0$  i  $1$ , a u dalnjim razmacima  $\Delta x$  ostale ordinate. Spojnica između  $R$  i točke  $t_s$  daje točku  $a$ , spojnica  $\overline{ac}$  daje točku  $b'$ , spojnica  $\overline{bd}$  daje točku  $c'$  i t. d. Krivulja  $a' b' c' \dots$  prikazuje razdiobu temperatura u trenutku  $\Delta\tau$ , krivulja  $a'' b'' c'' \dots$  u trenutku  $2\Delta\tau$  i t. d. Mijenja li se vremenom koeficijent prelaza topline  $\alpha$ , ili vanjska temperatura  $t_{ok}$ , to prilagodimo novu točku  $R$  ovim vrijednostima i crtamo dalje.

Prednost je ovog postupka u tome, da nismo trebali pretpostaviti niti jednoličnu razdiobu temperatura na početku, niti konstantni koeficijent prelaza topline  $\alpha$ , niti konstantnu vanjsku temperaturu  $t_{ok}$ , pa niti simetriju pojave na desnom i lijevom rubu stijenke.

### Teorem sličnosti

Nesvladane teškoće kod rješavanja parcijalnih diferencijalnih jednadžbi (591) do (598) konvektivnog prelaza topline prisilile su inženjere, da iskustva i spoznaje stečene na izvedenim aparatima približnom ocjenom primjenjuju na novim aparatima. To se isprva radilo manje ili više empirički. Zasluga je NUSSELT-a, da je primjenom teorema sličnosti na probleme prelaza topline uspio dati osnovu za sređivanje pojava i na tom području.

Postavljamo ova pitanja:

1. Da li je načelno moguće stanovite iskustvene podatke kao što je na pr. temperaturno polje, koje smo mjerenjima stekli na jednoj napravi (na modelu), strogo prenijeti na drugu napravu (na izvedbu)?
2. Kakvi će u jesnom slučaju biti uvjeti, pod kojima se može učiniti takav prenos odnosno preračunavanje?
3. Kako moramo postupiti, da iskustva stečena pokusom na modelu, ispravno primijenimo na izvedbu?

K pitanju 1. Prijenos iskustava od modela na izvedbu mora biti načelno u takvim slučajevima provediv, u kojima postoji neka sličnost ovih pojava. Razumljivo je da se takva

sličnost valjda neće smjeti ograničiti na geometrijske oblike, već će i sve druge veličine, koje su od utjecaja na prelaz topline, kao što su  $w, \eta, \lambda, \dots$ , morati biti kod modela i kod izvedbe na neki način slične. Koje su to veličine, vidi se najbolje iz pripadnih diferencijalnih jednadžbi (591), (592), (594) i (595) odnosno (598).

K pitanju 2. Spomenute uvjete pokušajmo pronaći na slijedeći način. Usporedit ćemo takva dva slučaja, za koje su strujanja obzirom na sve veličine, koje se pojavljuju u diferencijalnim jednadžbama (591) do (598), slična.

a) U prvom redu možemo dimenzije izvedbe odnosno koordinate  $x, y, z$  njenog geometrijskog oblika razmjerno povećati spram srodnih dimenzija odnosno koordinata  $x', y', z'$  modela. Tako ćemo uspoređivati strujanja, koja teku kroz ili oko tijela sličnih geometrijskih oblika. Onda su protege strujnih granica  $l_1, l_2, l_3 \dots$  izvedbe spram odnosnih protega  $l'_1, l'_2, l'_3 \dots$  modela u nekom određenom omjeru povezane

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = \frac{z'}{z} = \frac{l'_1}{l_1} = \frac{l'_2}{l_2} = \dots = \frac{l'}{l} = o_l. \quad (636)$$

Kutovi između srodnih dužina na modelu i na izvedbi ostaju jednakci. Kod strogog ispunjavanja geometrijskih uvjeta sličnosti morale bi i neravnosti (hrapavost) površina stijenki po obliku i veličini biti kod izvedbe i kod modela slične, budući da je hrapavost od utjecaja na razvitak strujanja (turbulencija). No praktički će biti jedva moguće ovaj uvjet strogo ispuniti.

b) Polje brzina neka je kod izvedbe i kod modela slično. U srodnim točkama  $x', y', z'$  te  $x, y, z$  neka je omjer brzina

$$\frac{w'}{w} = o_w \quad (637)$$

u svim točkama jednak, a osim toga neka je smjer odnosnih brzina kod izvedbe i kod modela isti (jednakost kutova). Prema tome ne će moći neko laminarno strujanje biti slično nekom turbulentnom, budući da se raspodjele brzina obiju vrsta strujanja načelno razlikuju. Usporedivati se mogu samo laminarna strujanja međusobno i turbulentna međusobno.

c) Daljnja je važna veličina gradijent temperaturu  $\frac{\partial t}{\partial x}$ . Razdoba ovoga gradijenta neka je također u izvedbi i u modelu slična, t. j.

$$\frac{\frac{\partial t'}{\partial x'}}{\frac{\partial t}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial t'}{\partial y'}}{\frac{\partial t}{\partial x}} = \frac{\frac{\partial t'}{\partial z'}}{\frac{\partial t}{\partial z}} = o_{grad\ t}. \quad (638)$$

Odatle slijedi sa (636)

$$dt' = o_{grad\ t} \cdot \frac{\partial x'}{\partial x} dt = o_{grad\ t} \cdot o_t dt = o_t dt \quad (639)$$

gdje je

$$o_{grad\ t} \cdot o_t = o_t. \quad (640)$$

Integracijom od (639) dobivamo

$$(t' - t_0') = o_t (t - t_0) \quad (641)$$

ili

$$\frac{t' - t_0'}{t - t_0} = o_t, \quad (642)$$

gdje se temperature  $t_0'$  i  $t_0$  odnose na bilo koje, ali srodne točke  $x_0', y_0', z_0'$ , te  $x_0, y_0, z_0$  modela i izvedbe. Te temperature predaju neodređene integracione konstante, a možemo ih kod izvedbe po volji odabrati, na pr. na ulazu struje u modela i izvedbe, ili opet na nekom mjestu u velikoj udaljenosti od stijenke i t. d., pri kojem je izboru odlučno jedino to, što smatramo zgodnjim. U definiciju sličnosti temperturnih polja ne ulaze dakle same temperature, već samo njihove razlike spram temperature u nekoj po volji odabranoj točci. Iz (638) i (639) slijedi

$$\frac{\frac{\partial t'}{\partial x'}}{\frac{\partial t}{\partial x}} = \frac{o_t}{o_t} \quad (643)$$

te

$$\frac{\frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2}}{\frac{\partial^2 t}{\partial x^2}} = \frac{o_t}{o_t^2}. \quad (644)$$

d) Statički pritisak pojavljuje se u diferencijalnim jednadžbama također samo u svojem gradijentu  $\frac{\partial p}{\partial x}$  i t. d., tako da oslonivši se na netom izloženo možemo kao uvjet sličnosti tlačnih polja pisati

$$\frac{p' - p_0'}{p - p_0} = o_p. \quad (645)$$

e) Sličnost polja fizikalnih svojstava medija uvjetuje ove nepromjenljive omjere u svim srodnim točkama izvedbe i modela

$$\frac{p'}{p} = o_p \quad (646)$$

$$\frac{g'}{g} = o_g \quad (647)$$

$$\frac{\eta'}{\eta} = o_\eta \quad (648)$$

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = o_\lambda \quad (649)$$

$$\frac{c'}{c} = o_c \quad (650)$$

$$\frac{a'}{a} = o_a \quad (651)$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = o_\alpha \quad (652)$$

Odmah ističemo da se za zadovoljenje uvjeta sličnosti omjerni brojevi (638) do (652) ne mogu svi slobodno odabrati, već da su izborom nekih od ovih veličina druge veličine određene. To se vidi na pr. iz slijedećeg primjera. Poveća li se u nekoj cijevi brzina strujanja na dvostruko, t. j. učinimo li

$o_w = \frac{w'}{w} = 2$ , to će prema iskustvu pad pritiska  $(p - p_0)$  zbog trenja porasti razmjerno kvadratu brzine tako, da je ovdje pri-

nudno  $o_p = \frac{p' - p_0'}{p - p_0} = 4$ . O omjeru  $o_p$  ne trebamo i ne smijemo učiniti neku drugu pretpostavku neg  $o_p = 4$ , tako da je omjer sličnosti  $o_p$  u tom slučaju određen sličnošću polja brzina.

Treba očekivati, da će sličnim razmatranjima broj neovisnih omjera sličnosti biti znatno smanjen spram onih u (636) do (652) i to nekim nuzuvjetima. Zato ćemo ove nuzuvjete pokušati odrediti.

### Diferencijalne jednadžbe prelaza topline u modelu

razliku od onih izvedbe označimo s jednom crticom. Osim toga pretpostavimo da je  $q_i = q'_i = 0$ . Onda dobivamo

$$\frac{\partial(\rho' w_x')}{\partial x'} + \frac{\partial(\rho' w_y')}{\partial y'} + \frac{\partial(\rho' w_z')}{\partial z'} = 0 \quad (653)$$

$$\begin{aligned} & \rho' \left( w_x' \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial w_x'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial w_x'}{\partial z'} \right) = \rho' g_x' - \frac{\partial p}{\partial x'} + \\ & + \eta' \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x'} \left( \frac{\partial w_x'}{\partial x'} + \frac{\partial w_y'}{\partial y'} + \frac{\partial w_z'}{\partial z'} \right) + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 w_x'}{\partial z'^2} \right\} \end{aligned} \quad (654)$$

a slično tako za koordinatne smjerove  $y'$  i  $z'$ . Analogno jednadžbi (593) dobivamo

$$\left( w_x' \frac{\partial t'}{\partial x'} + w_y' \frac{\partial t'}{\partial y'} + w_z' \frac{\partial t'}{\partial z'} \right) = a' \left( \frac{\partial^2 t'}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial y'^2} + \frac{\partial^2 t'}{\partial z'^2} \right) \quad (655)$$

$$x' = -\lambda' \frac{\left( \frac{\partial t'}{\partial n'} \right)_s}{t_s - t_o} \quad (656)$$

U ove jednadžbe možemo iz (636) do (652) uvrstiti  $x' = o_l x$ ,  $w' = o_w w$ ,  $\rho' = o_\rho \rho$ , gdje se veličine stanja bez crtice odnose na izvedbu, pak tom transformacijom dobivamo iz (653) za model jednadžbu

$$\frac{o_\rho o_w}{o_l} \left\{ \frac{\partial(\rho w_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho w_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w_z)}{\partial z} \right\} = 0 \quad (653a)$$

Iz (654) slijedi

$$\begin{aligned} & \frac{o_\rho o_w^2}{o_l} \left( w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + \dots \right) = o_\rho o_g \rho g_x - \\ & - \frac{o_p}{o_l} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{o_\eta o_w}{o_l^2} \eta \left\{ \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w_x}{\partial x} + \dots \right) + \frac{\partial^2 w_x}{\partial x^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (654a)$$

a slično tako za smjerove  $y$  i  $z$ . Iz (655) dobivamo

$$o_w \frac{o_t}{o_l} \left( w_x \frac{\partial t}{\partial x} + \dots \right) = \frac{o_\lambda o_t}{o_c o_\rho o_g o_l^2} \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \dots \right) \quad (655a)$$

Iz (656) slijedi

$$o_a \cdot \alpha = -\frac{o_\lambda \cdot o_t}{o_l \cdot o_t} \lambda \frac{\left( \frac{\partial t}{\partial n} \right)_s}{t_s - t_o} \quad (656a)$$

Sad možemo između svih sličnih procesa, koje možemo zamisliti, izlučiti takve, kojih omjerni brojevi  $o_l$ ,  $o_w$ ,  $o_t$  i t. d. imaju takve vrijednosti, da se faktori pred zagradama u gornjim jednadžbama dadu kratiti. U tu svrhu moraju u (654a) biti ovi faktori međusobno jednakci

$$\frac{o_\rho o_w^2}{o_l} = o_\varrho o_g = \frac{o_p}{o_l} = \frac{o_\eta o_w}{o_l^2} \quad (657)$$

u (655a) ovi faktori

$$o_w \frac{o_t}{o_l} = \frac{o_\lambda o_t}{o_c o_\rho o_g o_l^2} \left( \text{ili } o_w \frac{o_t}{o_l} = \frac{o_a o_t}{o_l^2} \right) \quad (658)$$

a u (656a) ovi faktori

$$o_a = \frac{o_\lambda}{o_l} \quad (659)$$

Ako su dakle brojčane vrijednosti od  $o_l$ ,  $o_w$ ,  $o_\rho$  i t. d. takve da su ispunjene jednadžbe (657) do (659), to možemo u (653a) do (656a) faktore omjernih brojeva kratiti, pak za model preostaje sistem diferencijalnih jednadžbi, koji je potpuno identičan sa sistemom za izvedbu, jednadžba (591), (592), (594) i (598). Identične pak diferencijalne jednadžbe, i samo takve, daju iste integrale. To drugim riječima znači, da će se u tom, i samo u tom slučaju strujanja sa svojim poljima brzine i temperatura razvijati na isti način duž modela i duž izvedbe.

Takav pak istovrsni tok čini upravo nužni uvjet za održavanje sličnosti obih strujanja. Time dobivamo važni stavak: Samo takvi i svi takvi ustaljeni problemi prelaza topline bez toplinskih izvora međusobno su slični, kod kojih odnosi sličnosti zadovoljavaju jednadžbe (657) do (659). Zato se broj onih

omjera sličnosti  $o_l, o_w, o_\eta$  i t. d. koje možemo slobodno odabrat smanjuje za pet, jer u (657) do (659) imamo pet znakova jednakosti, t. j. toliko novih jednadžbi nuzuvjeta. Sad ćemo jednadžbe (657) do (659) napisati u priručnjem obliku.

#### Hidrodinamička sličnost

U jednadžbi (657), koju smo izveli iz hidrodinamičke jednadžbe imamo

$$\frac{o_\eta o_w^2}{o_l} = \frac{o_\eta o_w}{o_l^2} \quad (660)$$

ili

$$\frac{o_\eta o_w o_l}{o_\eta} = 1 \quad (661)$$

Uvrstimo li za  $o_\eta, o_w$ , i t. d. vrijednosti iz (636) do (652), to dobivamo

$$\frac{\rho wl}{\eta} = \frac{\rho' w'l'}{\eta'} \text{ ili } \frac{wl}{\nu} = \frac{w'l'}{\nu'} \quad (662)$$

Prema tome pretstavlja jednakost karakterističnih produkata  $\frac{wl}{\nu}$  kod modela i izvedbe upravo jedan od nužnih uvjeta za sličnost strujanja. Ovakve bezimene (nedimenzionalne) produkte zvat ćemo značajkama. Tako je

$$\frac{wl}{\nu} = Re \text{ (REYNOLDS)} \quad (663)$$

značajka REYNOLDS-a, prozvana u čast velikog istraživača strujanja. U (657) je osim toga

$$\frac{o_\eta o_w^2}{o_l} = \frac{o_p}{o_l} \quad (664)$$

odakle na isti način kao i gore slijedi

$$\frac{p - p_0}{\rho w^2} = \frac{p' - p'_0}{\rho' w'^2} \quad (665)$$

Ovu značajku prozvalo se na spomen velikog hidrodinamičara EULER-a

$$\frac{p - p_0}{\rho w^2} = Eu \text{ (EULER)} \quad (666)$$

Kao treću jednadžbu u (657) odabiremo

$$o_\eta o_g = \frac{o_\eta o_w}{o_l^2}. \quad (667)$$

Odavde slijedi

$$\frac{\rho gl^2}{\eta w} = \frac{\rho' g'l'^2}{\eta' w'} \quad (668)$$

Multiplikacijom sa (662) i uvezši u obzir, da je  $\frac{\rho_0}{\rho} = \frac{\rho_0'}{\rho'}$  dobivamo

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \frac{gl^3}{\nu^2} = \frac{\rho' - \rho'_0}{\rho'} \frac{g'l'^3}{\nu'^2} \quad (669)$$

To je GRASHOFF-ova značajka

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} \frac{gl^3}{\nu^2} = Gr \text{ (GRASHOFF)} \quad (670)$$

Ima slučajeva kad će razlika gustoča  $(1 - \rho_0)$  biti prouzročena samo temperaturnim razlikama. To je na pr. slučaj, kad se čestice neke tekućine griju na stijenci, te tako postaju lakše od udaljenijih čestica. Za takve slučajeve možemo pisati

$$\frac{\rho - \rho_0}{\rho} = \beta (T_0 - T). \quad (671)$$

Ovdje je  $\beta$  koeficijent termičkog rastezanja. Time dobivamo

$$Gr = \frac{gl^3}{\nu^2} \beta (T_0 - T). \quad (672)$$

Kod idealnih plinova dobivamo iz jednadžbe stanja (za  $p = konst$ )

$$\beta = \frac{1}{T_0}, \quad (673)$$

pak je

$$Gr = \frac{gl^3 (T_0 - T)}{\nu^2 T_0} \text{ (idealni plinovi)} \quad (674)$$

No ima slučajeva, kad razlike u gustoći nisu prouzročene razlikama temperatura, već nekim drugim razlozima. Tako na pr. kod isparivanja imaju mjeđurići pare i vrele vode skoro istu temperaturu, a ipak im je gustoča sasvim različita. Isto tako kod otapanja soli razlika je gustoće uzrokovana raznom kon-

centracijom solne otopine u blizini kristala. U takvim slučajevima naravno ne smijemo primjenjivati jednadžbu (671) ni (674), već se moramo služiti originalnom jednadžbom (670).

Za prenosivost podataka mjerjenja od modela na izvedbu moraju dakle prema gornjemu za sve srodne točke biti ispunjena ova tri uvjeta

$$Re' = Re, \quad Eu' = Eu \quad \text{te} \quad Gr' = Gr \quad (675)$$

Ova spoznaja međutim ne bi bila od velike koristi, kad bismo tu kontrolu morali svaki put provesti za sve točke strujanja. No na sreću pokazuju kako teorija, tako i pokusi, da se kod istovrsnih uvjeta strujanja izobrazuju u modelu i u izvedbi profili brzina, koji su međusobno slični, vidi na pr. sl. 205. i 206. Ako na pr. na modelu i na izvedbi neke cijevi nađemo za os cijevi  $Re_{os} = Re_{os}'$  (gdje je  $Re_{os} = \frac{w_{os}d}{\nu}$ ) to će kod istovrsnih strujanja biti  $Re = Re'$  i za sve druge točke strujnog presjeka. Istovrsna strujanja su takva, koja su na pr. turbulentna, koja imaju slične početne uvjete (profil brzina na ulaznom otvoru) i osim toga slične granične uvjete. Kod stroge geometrijske sličnosti posljednji je uvjet za brzinu uvijek ispunjen, budući da su brzine na stijenci kako kod modela, tako i kod izvedbe uvijek  $w_s' = 0$  i  $w_s = 0$ . Naravno da pri tom moraju biti ispunjeni i ostali uvjeti sličnosti kao što je geometrijska sličnost uključivo hrapavost stijenke, sličnost tegljivosti  $\gamma$  i t. d. Drugo je pitanje da li je moguće i pod kakvim okolnostima sve ove uvjete sličnosti točno ispuniti. Pojavljuju li se na pr. kod strujanja u cijevi (kruta granična površina!) i slobodne površine kapljevine, to će se takve plohe i u obliku i u veličini izobraziti po vlastitim fizikalnim zakonima, bez obzira na poželjne omjere geometrijske sličnosti površina. Površinske sile ovih slobodnih površina nismo uzeli u obzir kod naših jednadžbi, a da smo ih uzeli dobili bi još neke daljnje jednadžbe nuzuvjeta. Taj je slučaj važan na pr. kod procesa isparivanja sa stvaranjem mjehurića, pri čem se mnoštvo, oblik i veličina mjehurića u modelu i u izvedbi u općenitom slučaju ne će prilagoditi omjeru dužina  $o_l$  posuda, već će naprotiv ovisiti o

pritisku, napetosti površine kapljevine spram svoje pare, o kvazivnosti stijenka i t. d. Iz tog razloga ne će se u tom slučaju moći zadovoljiti zahtjev potpune geometrijske sličnosti. Zato kod slobodnih površina u općenitom slučaju ne će biti moguće istovremeno ispuniti sve uvjete sličnosti. Na slične teškoće naići ćemo kod takvih medija kod kojih neka njihova svojstva kao  $\gamma$ ,  $\rho$  i t. d. nisu konstantna, već se mijenjaju duž strujanja na pr. u ovisnosti od temperature.

Kod strujanja, kod kojih se ne pojavljuju ove teškoće, ili kod kojih leže u granicama podnošljive netočnosti, može se broj uvjeta smanjiti slijedećim razmatranjem. Pad statičkog pritiska  $(p - p_0)$  koji se pojavljuje u jednadžbi  $Eu = \frac{p - p_0}{\rho w^2}$  uzrokovani je u nekom strujanju: a) preobrazbom energije tlaka u energiju brzine,  $(p - p_0)_w$ ; b) trenjem,  $(p - p_0)_{tr}$ ; c) visinom stupca tekućine između promatranih presjeka,  $(p - p_0)_H$ .

Udio pada pritiska  $(p - p_0)_w$  razmjeran je po promjeni kvadrata brzine, zbog čega taj dio EULER-ove značajke za slična polja pritisaka i brzina u modelu i u izvedbi ostaje isti

$$\frac{(p - p_0)_w}{\rho w^2} = \frac{(p' - p'_0)_w}{\rho' w'^2} = \text{konst} \quad (676)$$

Udio pada pritiska uzrokovanih trenjem  $(p - p_0)_{tr}$  kod turbulentnog je strujanja prema (589) i (590)

$$(p - p_0)_{tr} = \Psi \frac{l \gamma w^2}{\bar{d} \cdot 2g} = \frac{0,3164}{\sqrt{\frac{wd\rho}{\eta}}} \frac{l \rho w^2}{\bar{d} \cdot 2} = \frac{l}{\bar{d}} \rho \cdot w^2 \cdot f_t(Re),$$

gdje je  $f_t(Re)$  neka funkcija REYNOLDS-ove značajke za turbulentno strujanje. Preuređenjem dobivamo

$$\frac{(p - p_0)_{tr}}{\rho w^2} = \frac{l}{d} \cdot f_t(Re) \quad (677)$$

dakle izraz koji je funkcija REYNOLDS-ove značajke  $Re$ .

Za laminarno je strujanje po (588)

$$(p - p_0)_{tr} = \frac{4\eta lw}{r^2} = \frac{16\eta lw}{d^2}.$$

Pomnožimo li ovdje brojnik i nazivnik sa  $\frac{wd\rho}{2}$ , to dobivamo

$$(p - p_0)_{tr} = 32 \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2} \frac{1}{\frac{wd\rho}{2}} = 32 \frac{l}{d} \frac{\rho w^2}{2} \frac{1}{Re} = \frac{l}{d} \rho w^2 \cdot f_l(Re)$$

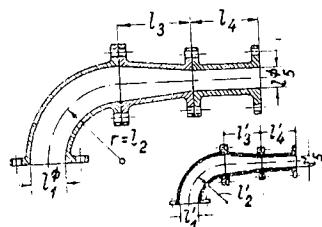
ili

$$\frac{(p - p_0)_{tr}}{\rho w^2} = \frac{l}{d} f_l(Re), \quad (678)$$

što je opet neka druga funkcija REYNOLDS-ovog broja.

Kod sličnih strujanja sa  $\frac{l}{d} = \frac{l'}{d'}$  i sa  $Re = Re'$  ostaje prema tome i ovaj uđio EULER-ovog broja kod modela i kod izvedbe jednak.

Kako je veličina statičkog pritiska sama po sebi najčešće bez utjecaja na izobražavanje strujanja, to uđio pada pritiska  $(p - p_0)_{tr}$ , koji je uzrokovani visinskim položajem čestica,



Sl. 226. K sličnosti modela i izvedbe

uopće ne trebamo uzeti u obzir. Takva su na pr. sva strujanja bez slobodnih površina kod nestlačivih tekućina. No to vrijedi i za plinove, kad nemamo prejake promjene pritiska, budući da se ovdje može zanemariti kompresibilnost (razlike gustoće!) duž strujanja. Uvezši u obzir (676) do (678) dolazimo do zaključka da je kod takvih sličnih strujanja

uvjet  $Eu = Eu'$  prisilno ispunjen, čim je  $Re = Re'$ . Zato od uvjeta u (675) za takva strujanja preostaju još samo dva uvjeta

$$Re = Re' \text{ te } Gr = Gr' \quad (679)$$

**Termička sličnost** Da bi u analogiji s prijašnjim razlaganjima mogle postati identične i diferencijalne jednadžbe prelaza topline za model i izvedbu, moraju u (655a) postati jednaki koeficijenti

$$\frac{o_w o_t}{o_i} = \frac{o_{\lambda} o_t}{o_c o_{\varrho} o_g o_t}, \quad (680)$$

odakle slijedi

$$\frac{wl}{\lambda} = \frac{w'l'}{\lambda} \quad (681)$$

a sa (584)

$$\frac{wl}{a} = \frac{w'l'}{a}. \quad (682)$$

To je PÉCLET-ova značajka

$$Pe = \frac{wl}{a} \quad (\text{PÉCLET}) \quad (683)$$

pak je uvjet za termičku sličnost modela i izvedbe ispunjen tek onda kad je

$$Pe = Pe' \quad (684)$$

U tom se slučaju izobraze slična polja temperatura do na samu stijenku, uz pretpostavku da se i temperature stijenke, kao vanjski uvjet, uključuju u istu sličnost temperatura. Tako se iz (656) dobiva izraz

$$\alpha_a = \frac{\alpha_{\lambda}}{\alpha_i} \quad (685)$$

ili

$$\frac{\alpha l}{\lambda} = \frac{\alpha' l'}{\lambda'}. \quad (686)$$

To nije neki novi nuzuvjet sličnosti, već samo primjena PÉCLET-ove značajke na najbližu blizinu stijenke, gdje je  $w = 0$ . No ova NUSSELT-ova značajka

$$Nu = \frac{\alpha l}{\lambda} \quad (\text{NUSSELT}) \quad (687)$$

vrlo je korisna i prikladna za računanje prelaza topline. Njena je brojčana vrijednost za sva strujanja jednakih  $Re$ ,  $Gr$  te  $Pe$  ista, te zavisi još samo o tome, kolike su brojčane vrijednosti ovih veličina. Prema tome je kod geometrijski slično obrubljenih strujanja

$$Nu = \Phi(Re, Gr, Pe) \quad (688)$$

dakle samo funkcija navedenih veličina. Pri tom se nepoznata funkcija  $\Phi$  može odrediti pokusima. Kod geometrijski su sličnih naprava samo ove tri veličine od utjecaja na  $Nu$ , što kod mnogobrojnih mogućih svojstava medija i veličina strujanja znatno pojednostavljuje eksperimentiranje.

Umjesto značajki  $Re$ ,  $Gr$ ,  $Pe$  možemo uvesti i druge, do kojih dolazimo drugačijim kombinacijama jednadžbi (657) do (659). Vrlo je prikladna na pr. PRANDTL-ova značajka

$$Pr = \frac{Pe}{Re} = \frac{\frac{wl}{a}}{\frac{wl}{\nu}} = \frac{\nu}{a} \quad (\text{PRANDTL}) \quad (689)$$

ili obrnuta značajka STANTON-a

$$St = \frac{1}{Pr} = \frac{a}{\nu} \quad (\text{STANTON}). \quad (690)$$

Ove sadrže samo svojstva medija, koji struji, za razliku od  $Re$ ,  $Gr$ ,  $Pe$  gdje se pojavljuju također izmjere posude, te veličine strujanja. S time možemo pisati na pr.

$$Nu = \Phi_0 (Re, Gr, Pr) \quad (691)$$

gdje je  $\Phi_0$  neka druga funkcija, koju treba odrediti pokusima.

Pomislimo li na to, da se promjenom jedne ili druge izmjere posude može promijeniti obrubljenje strujanja (tako na pr. povećanjem dužine ili promjera neke cijevi), to će  $Nu$  ovisiti i o geometrijskom obliku. Na  $Nu$  će prema tomu općenito utjecati i čitav niz dužinskih omjera  $\frac{l}{l_0}$ . Tu smo za  $l_0$  odabrali neku karakterističnu dužinu, na pr. promjer neke cijevi, a za  $l$  treba redomice uvrstiti toliko izmjera obrubljenja strujanja, koliko je potrebno da se geometrijski oblik obrubljenja jednoznačno prikaže.

$$Nu = \Phi_2 \left( \frac{l}{l_0}, Re, Pe, Gr \right) \quad (692)$$

ili

$$Nu = \Phi_3 \left( \frac{l}{l_0}, Re, Pr, Gr \right) \quad (693)$$

ili

$$Nu = \Phi_4 \left( \frac{l}{l_0}, Pe, Pr, Gr \right) \quad (694)$$

Sve tri jednadžbe (692) do (694) pretstavljaju jedno te isto, a prednost ćemo dati onoj od njih koja će biti pogodnija za pojedine račune.

Za proračunavanja se često traži veličina koeficijenta prelaza topline  $\alpha$  na stijenci. Po (687) i (694) dobivamo

$$\alpha = \frac{\lambda}{l} Nu = \frac{\lambda}{l} \Phi_4 \left( \frac{l}{l_0}, Pe, Pr, Gr \right). \quad (695)$$

Prikazane jednadžbe važe prethodno samo u slučaju kad su veličine  $\lambda$ ,  $c$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $g$  duž strujanja nepromjenljive, jer je samo u tom slučaju osigurana stalnost omjernih brojeva  $o_\lambda$ ,  $o_c$ ,  $o_\eta$  i t. d. za čitavo strujanje. Budući da su spomenute veličine u stanovitoj mjeri ovisne o temperaturi, koja se duž strujanja mijenja, to će uvjeti sličnosti rijetko kada biti strogo ispunjeni. No u većini slučajeva taj utjecaj temperature neće biti zamašan, a pogotovo ako u račune uvrštavamo vrijednosti spomenutih veličina, koje odgovaraju nekoj srednjoj temperaturi, tako na pr. temperaturi

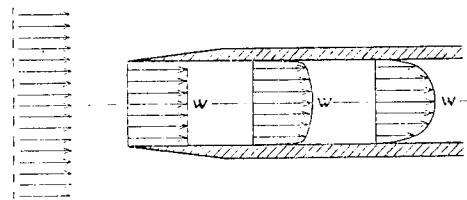
$$t_m = \frac{t_s + t_o}{2}. \quad (696)$$

Kod služenja literaturom treba u svakom slučaju rasčistiti, na koju temperaturu dotični autor svodi vrijednosti spomenute veličine.

**Nametnuto strujanje** Ovo se pojavljuje, kada vanjski uzroci nameću takove brzine strujanja, da sile i gibanja uzgona zaostaju za silama ubrzanja. U tom se slučaju može zanemariti GRASHOFF-ova značajka, pak je

$$Nu = \Phi_1 \left( \frac{l}{l_0}, Re, Pe \right) = \Phi_2 \left( \frac{l}{l_0}, Re, Pr \right) = \Phi_3 \left( \frac{l}{l_0}, Pe, Pr \right) \quad (697)$$

Nametnuto strujanje može biti izobraženo i neizobraženo. Ulazi li u cijev, sl. 227. struja jednolične brzine (neizobražena struja),



Sl. 227. Izobražavanje struje.

se dalje više bitno ne mijenjaju. Tek ovdje je strujanje izobraženo. Od ulaza granični sloj postaje sve deblji. Na samom ulazu on je beskonačno tanak, a tome odgovara beskonačno veliki iokalni koeficijent prelaza topline na samom ulazu.

**Kritična brzina** Istraživanja REYNOLDS-a i drugih istraživača su pokazala, da ovisi o veličini REYNOLDS-ovog broja, hoće li se ustaliti laminarno ili turbulentno strujanje. Kod samo neznatnih ulaznih smetnja opaža se laminarno strujanje još i kod velikih vrijednosti od  $Re$ , no kod iole jačih smetnji prebacuje se laminarno strujanje u turbulentno već kod kritičnog REYNOLDS-ovog broja, koji je po SCHILLER-u

$$Re_k = \frac{wd}{v} = 2320 \quad (698)$$

Kod strujanja, za koja je REYNOLDS-ov broj veći od ovog kritičnog,  $Re > Re_k$  stabilno je turbulentno strujanje, a kod strujanja sa  $Re < Re_k$  stabilno je laminarno strujanje.

**Prelaz topline u cijevi** Za tehnički važnije izobraženo strujanje u cijevi dao je PRANDTL na temelju razmatranja o graničnom sloju, formulu za prelaz topline, koja danas ponajbolje odgovara.

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,0396 Pr \frac{(Re)^{\frac{3}{4}}}{1 + 1,74(Re)^{-\frac{8}{5}}(Pr - 1)} \quad (699)$$

Ovdje je  $Re = \frac{wd}{v}$ . Po kinetičkoj teoriji plinova veličina je  $Pr = \frac{v}{a}$  ovisna samo o broju atoma u molekuli. Tako je

to će se konačni profil brzina utjecajem trenja na stijenkama tek postepeno izobraziti. Tek na udaljenosti od nekih 30 do 40 cijevnih promjera od ulaza nailazimo na profile brzina, koji

za jednoatomne plinove  $Pr = 0,67$   
za dvoatomne plinove  $Pr = 0,71$   
za troatomne plinove  $Pr = 0,89$   
za četvero- i višeatomne  $Pr = 1,0$

Ove su vrijednosti računane za  $0^\circ C$  dok je pritisak bez utjecaja. Uvrstimo li u (699) pripadnu vrijednost za dvoatomne plinove (uzduh), to dobivamo sa  $Pe = Pr \cdot Re$

$$Nu = 0,0366 \frac{(Pe)^{\frac{3}{4}}}{1 - 0,483 (Pe)^{-\frac{3}{8}}} \approx 0,04 (Pe)^{\frac{3}{4}} \text{ (za uzduh).} \quad (700)$$

Kod neizobraženog strujanja kroz cijevi, od utjecaja je duljina cijevi  $l$ , pak je po NUSSELTU

$$\frac{\alpha_m l}{\lambda} = 0,0362 (Pe)^{0,786} \left(\frac{l}{d}\right)^{-0,054} \quad (701)$$

gdje je  $\alpha_m$  prosječni koeficijent prelaza topline za cijavu cijev.

**Ekvivalentni promjer** NUSSELT je na osnovi PRANDTL-ove teorije graničnog sloja pokazao da je koeficijent prelaza topline  $\alpha$  u cijevima, koje nemaju kružni presjek, jednak onome za cijevi s kružnim presjekom, s tako zvanim ekvivalentnim promjerom

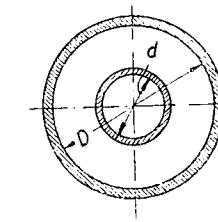
$$d_{ekv} = \frac{4F}{O}. \quad (702)$$

Ovdje je  $F [m^2]$  presjek cijevi,  $O [m]$  onaj dio opsega, na kojem se vrši prelaz topline. Tako je za kolutni presjek nekog dvocjevnog izmjenjivača topline sl. 228.,

$$d_{ekv} = 4 \frac{\frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)}{\pi (D + d)} = D - d \quad (\text{Prelaz topline na nutarnjoj i vanjskoj cijevi}) \quad (703)$$

$$d_{ekv} = \frac{D^2 - d^2}{D} \quad (\text{Prelaz topline samo na vanjskoj cijevi}) \quad (704)$$

$$d_{ekv} = \frac{D^2 - d^2}{d} \quad (\text{Prelaz topline samo na nutarnjoj cijevi}) \quad (705)$$



Sl. 228. Kolutni presjek.

Na slični način možemo postupiti kod uglatih presjeka, dok se zvjezdasti presjeci više ne pokoravaju toj zakonitosti.

**Poprečno nastrujane cijevi** Za poprečno je nastrujuanu cijev  

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = 0,092 (Pe)^{0,75} \quad (706)$$

a za snop cijevi s nekoliko redova jedan iza drugoga

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = \zeta 0,075 (Pe)^{0,75} \quad (707)$$

gdje  $\zeta$  ovisi o broju redova  $z$  po ovoj skrižaljci

$z =$	2	4	6	8	10
$\zeta =$	1	1,23	1,36	1,43	1,47

Razmak je cijevi praktički bez utjecaja.

**Snopovi cijevi** Za poprečno nastrujane snopove cijevi sa deset i više redova, sabrao je novije pokuse SCHACK u formulu koju ovdje dajemo nešto preoblikenu za dvoatomne plinove

$$\frac{\alpha d}{\lambda} = 0,35 \cdot f_a \cdot (Pe)^{0,61}$$

$d$  je vanjski promjer cijevi,  $Pe$  je PECLET-ova značajka za naj-uze mjesto između cijevi jednoga reda.  $f_a$  faktor je ovisan o rasporedu cijevi u snopu. Za normalnu izvedbu, kod koje je razmak središta cijevi u jednom redu kao i razmak redova međusobno jednak i ima vrijednost  $s$ , gdje je  $s = 2d$ , treba uvrstiti  $f_a = 1$ . Prelaz topline kod snopova, kod kojih se nizovi, pokrivaju, ne razlikuje se mnogo od onoga kad su pojedini redovi međusobno pomjereni.

**Ravna uspravna stijena** Za uspravnu ravnu stijenu dužine  $L$ , pored koje struji neki plin, po MERKEL-u je za  $w > 5 [m/sek]$

$$\frac{\alpha L}{\lambda} = 0,075 (Pe)^{0,75} \quad (708)$$

a za brzine  $w < 5 [m/sek]$ , kod kojih se pojavljuje i utjecaj slobodne konvekcije može se uzeti

$$\alpha = 5 + 3,4 w \quad [kcal/h \cdot m^2 \cdot {}^\circ C] \quad (709)$$

Ovdje treba uvrstiti  $w$  u  $m/sek$ .

**Slobodna konvekcija** Na toplim se površinama čestice tekućine griju, te tako postaju lakše, pak se uzdižu i time izazivaju slobodnu konvekciju. Uzrok joj je u samom prelazu topline, a nije joj nametnut izvana. Pri tom se skoro razlika temperature po opažanjima E. SCHMIDT-a i BECKMANN-a utroši u tankom laminarnom sloju, u kojem je prolaz topline neovisan o brzini, dakle neovisan i o  $Re$ . Tako se (693) za ovaj slučaj pojednostavljuje, pak dobivamo

$$Nu = \Phi \left( \frac{l}{l_0}, Gr, Pr \right) \quad (710)$$

Za uzduh i za dvoatomne plinove ( $Pr = 0,71$ ) našli su E. SCHMIDT i BECKMANN za vertikalnu ploču<sup>1)</sup>

$$Nu = \frac{\alpha h}{\lambda} = 0,360 \sqrt[4]{Gr} = 0,360 \sqrt[4]{\frac{gh^3(T_s - T_0)}{v^2 T_0}} \quad (711)$$

i

$$Nu_m = \frac{\alpha_m H}{\lambda} = \frac{4}{3} Nu = 0,480 \sqrt[4]{\frac{gH^3(T_s - T_0)}{v^2 T_0}} \quad (712)$$

Ovdje znači  $\alpha$  mjesni koeficijent prelaza topline u visini  $h$ , a  $\alpha_m$  prosječni koeficijent za čitavu visinu ploče  $H$ . Temperatura se  $T_s$  odnosi na površinu stijenke, a  $T_0$  na plin u većoj udaljenosti od stijenke.

Vodoravna cijev vanjskog promjera  $d$  grijе okolišni uzduh po JODLBAUER-u i HERMANN-u s koeficijentom prelaza topline

$$Nu = \frac{\alpha d}{\lambda} = 0,37 \sqrt[4]{Gr} = 0,37 \sqrt[4]{\frac{gd^3(T_s - T_0)}{v^2 T_0}} \quad (713)$$

Za druge plinove ( $Pr < 1$ ) razlika je neznatna. Naprotiv kod tegljivih tekućina treba mjesto (712) primijeniti

$$Nu_m = \frac{\alpha_m H}{\lambda} = 0,52 \sqrt[4]{Gr \cdot Pr} = 0,52 \sqrt[4]{\frac{gH^3(T_s - T_0)}{av T_0}} \quad (712a)$$

<sup>1)</sup> U jednadžbama (711) do (713a) treba kinematsku žilavost  $v$  medjuma uvrstiti za temperaturu stijenke  $T_s$ , a ne za neku srednju temperaturu.

a mjesto (713)

$$Nu_m = \frac{\alpha_m d}{\lambda} = 0,40 \sqrt[4]{Gr \cdot Pr} = 0,40 \sqrt[4]{\frac{gd^3(T_s - T_0)}{a \cdot v \cdot T_0}} \quad (713a)$$

**Promjena agregatnog stanja** Pri prelazu topline, kod kojeg se javljuje kondenzacija ili isparivanje, nastaju na granici između faza diskontinuiteti, koje treba uzeti u obzir.

Kad je temperatura površine stijenke viša nego li temperatura zasićenja dotične pare za pripadni pritisak, to se ne može pojaviti kondenzacija, i to bez obzira na to, da li je para zasićena ili pregrijana.

Kad su svojstva kapljevine i stijenke takva, da kondenzat kvasi stijenku, to će na stijenci nastati sloj kondenzata, u obliku tanjeg ili debljeg kaplevitog filma. U tom slučaju govorimo o „filmskoj kondenzaciji“. U tom filmu teče kapljevina na niže, ili ju pak jača parna struja odnosi, dok se istovremeno stalno kondenzira, nova para.

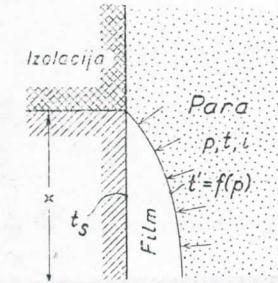
Kad kapljevina ne kvasi stijenku, to se kondenzat trenutno sakuplja u sitne kapljice, stvara se rosa. Takve kapljice naglo rastu dok ne poteku ili dok ih parna struja ne odnese. Između kapljica proviruje stalno gola stijenka, na koju nadiru molekuli pare. Pri ovoj „kapličastoj“ kondenzaciji dolazi dakle para u neposredniji dodir s golom stijenkom, pak će i prelaz topline biti mnogo jači, nego li kod filmske kondenzacije. U tehničkim napravama pojavljuju se obje vrste kondenzacije, što više, one se često pojavljuju istovremeno.

**Filmska kondenzacija** S računskim postupkom raspolažemo za sada samo za filmsku kondenzaciju. Tu je NUSSELT<sup>1)</sup> postavio svoju teoriju kondenzacije, koju su vrlo dobro potvrdili pokusi.

Otjecanje filma teći će zbog njegove neznatne debljine laminarno, ako stijenka nije previšoka. Na visokoj stijenci ili na dugačkim uspravnim cijevima može se međutim u donjem dijelu

pojaviti i turbulentno gibanje filma, što može u znatnoj mjeri promijeniti rezultate, koje niže navodimo.

Brzina je strujanja filma pri površini stijenke  $w = 0$ , dok je na površini filma  $w = w_{max}$ . Kad pretpostavimo laminarno strujanje, možemo iz ravnoteže sila između težine kapljevine, koja otiče i sila tegljivosti, uzroko-



### Ispravak na str. 348.

3. stavak mora glasiti:

Kad je temperatura površine stijenke viša nego li temperatura zasićenja dotične pare za pripadni pritisak, to se ne može pojaviti kondenzacija, a prelaz topline teče kao kod običnog plina. Kad je pak temperatura stijenke niža, pojavljuje se kondenzacija, i to bez obzira na to, da li je para zasićena ili pregrijana.

$$q = \sqrt{\frac{r \gamma^2 \lambda^3}{4 \eta x} (t' - t_s)} \quad (714)$$

Ako kao koeficijent prelaza topline definiramo

$$\alpha = \frac{q}{t' - t_s},$$

to je u visini  $x$  mjesni koeficijent

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{r \gamma^2 \lambda^3}{4 \eta (t' - t_s) x}}. \quad (715)$$

Prosječne vrijednosti su za čitavu visinu  $x = h$  pri širini stijenke  $b$

$$Q_m = \frac{4}{3} b \sqrt[4]{\frac{r \gamma^2 \lambda^3 (t' - t_s)^3 h^3}{4 \eta}} \quad (716)$$

<sup>1)</sup> Nusselt, Z. VDL. 60 (1916) 541.

te

$$\alpha_m = \frac{4}{3} \sqrt{\frac{r i^2 \lambda^3}{4 \eta (t' - t_s) h}}. \quad (717)$$

Red je veličine od  $\alpha_m$  kod vodene pare  $10^4 \text{ kcal/m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ . Kod pregrijane se pare mora uvrstiti veličina ( $i - i'$ ) namjesto topline isparivanja  $r$ , gdje su  $i$ , te  $i'$  entalpije pregrijane pare odnosno vrele vode za zadani pritisak. Budući da je  $(i - i') > r$ , to će se kod kondenzacije pregrijane pare prenosi više topline nego li kod zasićene pare istoga pritiska. To vrijedi naravno samo za kondenzaciju pregrijane pare, dok je u slučaju suhog prelaza topline ovaj kudikamo manji nego li kod kondenzacije zasićene pare.

Pojavljuje li se kod većih visina stijenke turbulencija u filmu, to se postizavaju vrijednosti  $\alpha$ , koje mogu biti i do 50% veće nego li po formuli NUSSELT-a.<sup>1)</sup> Za vodoravne cijevi na kojima kondenzira vodena para, treba u (716) i (717) umjesto faktora  $\frac{4}{3}$  uvrstiti 1.

**Kapljičasta kondenzacija** Tu raspolažemo pokusima koje su izvršili SCHMIDT, SCHURRIG i SELLSCHOPP<sup>2)</sup>. Koeficijent prelaza topline kod kondenzacije zasićene pare ima pri kapljičastoj kondenzaciji red veličine 30000 do 40000  $\text{kcal/m}^2 \text{h}^\circ\text{C}$ , svedeno na razliku temperature između pare i rashladne vode spram nekih 6000 kod filmske kondenzacije. Intenzivnim štrcanjem stijenke rashladnom vodom mogu se postići još i veće vrijednosti.

**Isparivanje** U stanju zasićenja temperature pare i vode strogo su jednake, dok se radi o statičkoj ravnoteži. U tom je slučaju ta temperatura jednaka temperaturi zasićenja za promatrani pritisak. Međutim isparivanje je samo po sebi dinamički proces, kod kojeg se onom mjestu, gdje se vrši isparivanje, mora dovoditi velika toplina isparivanja. Za ovo dovođenje, potrebne su kao za svaki drugi prelaz topline neke, makar

<sup>1)</sup> Skupni prikaz o isparivanju i o kondenzaciji vidi na pr. kod W. Fritz, Z. VDI. Beihett Verfahrenstechnik (1943) 1.

<sup>2)</sup> E. Schmidt, W. Schurrig i W. Sellschopp, Techn. Mech. Thermodyn. 1. (1930) 53.

i male razlike temperature. Zato su pojave dinamičkog isparivanja zamršenije od statičke ravnoteže u zasićenom stanju, što je i razlogom, da ih se tek u novije vrijeme uspjelo razjasniti<sup>1)</sup>.

Isparivanje vode ili bilo koje druge kapljeline, vrši se na graničnoj površini vode i pare. Granična se površina gotovo uvijek pojavljuje u obliku mjeđurića. Ovi se stvaraju na nekim izabranim mjestima ogrjevne plohe (stijenke) posude, pa kad porastu do veličine od nekoliko milimetara, odvajaju se od ogrjevne plohe, te se dižu do površine vode. Pri dizanju do površine mjeđurići još znatno dalje rastu, jer se isparivanje u pretežnoj mjeri vrši baš za vrijeme ovog dizanja, dakle nakon što su se mjeđurići odvojili od ogrjevne plohe. Veličina mjeđurića, kod koje se oni odvajaju od ogrjevne plohe, ovisi o uzgonu s jedne strane i o površinskoj napetosti između kapljeline i stijenke posude, t. j. o kvasivosti stijenke s druge strane. Kvasivost stijenke ovisna je o promatranoj kapljelini, ali i o svojstvima stijenke. Tako kvasi voda neku masnu stijenkdu drugačije, nego li istu, ali sasvim očišćenu stijenku.

Napetost površine između vode i pare djeluje na mjeđurić kao napeta elastična opna, koja ga nastoji smanjiti. Za napinjanje opne potreban je u mjeđuriću neki pretlak pare naprma tlaku u susjednoj tekućini. Nutarnji pretlak mora kod zadane jačine opne biti to veći, što je manji promjer mjeđurića, slično kao što stijenka nekoga kotla zadane debljine lima može izdržati to veći pritisak, što je manji promjer kotla. Kod beskonačno maloga mjeđurića morao bi taj nutarnji pretlak biti teoretski beskonačno velik, da bi održao ravnotežu s napetosti površine, odnosno da bi spriječio urušavanje mjeđurića. To je naročito važno za mjeđurić koji je u zametku, te kojemu je promjer u tom trenutku vanredno sitan, t. j. u redu veličine molekularnih dimenzija. Budući da je pritisak u mjeđuriću propisan tempe-

<sup>1)</sup> F. Bošnjaković, Forschg. Ing. Wes. 1, (1930) str. 358.

M. Jakob i W. Fritz, Forschg. Ing. Wes. 2, (1931) str. 435

M. Jakob i W. Fritz, Z. d. VDI 76 (1932) str. 1161

Drew i Mueller, Trans. amer. Inst. Chem. Eng. 33 (1937) str. 449.

Osim toga pregledni prikaz novijih istraživanja o isparivanju i kondenzaciji u W. Fritz, Z. d. VDI, Prilog Verfahrenstechnik (1943) str. 1.

raturom zasićenja pare  $t'$ , to se potrebno povećanje tog pritiska može postići samo pripadnjem povećanjem temperature kapljivine, iz koje se ta para stvara. To znači, da će se voda morati ugrijati daleko iznad svoje temperature vrenja  $t'$  prije, nego li se u njenoj unutrašnjosti uzmogne stvoriti zametak sitnog parnog mjeđurića. Voda se dakle za isparivanje mora pregrijati! Kod daljnog porasta jednoć zametnutog mjeđurića raste njegov promjer, a time pretlak, potreban za svladanje napetosti opne, naglo pada, tako da je kod mjeđura od kojeg milimetra promjera praktički jednak nuli. Zato će temperatura pare u nutrinji većih mjeđurića odgovarati temperaturi zasićenja  $t'$  za onaj pritisak, pod kojim stoji susjedna voda, bez obzira na to da li je voda pregrijana ili ne.

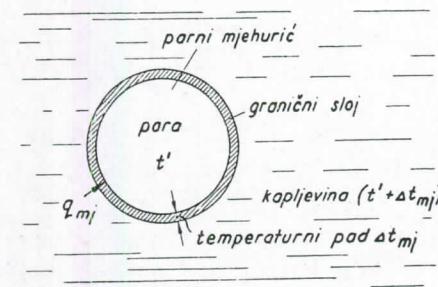
Mjeđurići će se mnogo lakše stvarati na takvima mjestima, gdje im je već u zametku osiguran konačni, pa makar i sitni radius krivine. Takva mjesta nailazimo na krutoj stijenci ogrjevne plohe. Pod mikroskopom pokazuje svaka kruta stijenka uvale i grebene, koji baš pružaju ove poželjne početne zakriviljenosti za prvi zametak mjeđurića. Na takvima mjestima dostajat će već pregrijanje vode od nekoliko stupnjeva iznad svog vrelišta, da se dobije potrebnii pretlak pare u mjeđuriću, koji odgovara početnoj zakriviljenosti. Ovakva mjesta možemo smatrati „klijalištima“ mjeđurića. Kao klijališta mogu djelovati i čestice prašine u vodi, samo ako im je na neki način osigurana potrebna povišena temperatura. Jednom zametnuti mjeđurić naglo raste, jer sad pregrijana susjedna voda u nj isparuje, pri čem se ona hlađi i smanjuje svoje pregrijanje.

JAKOB i FRITZ i neki drugi autori mjerili su kod normalnog isparivanja vode pri samoj ogrjevnoj stijenci pregrijanja vode do  $15^{\circ}\text{C}$  iznad vrelišta, a veličina tog pregrijanja ovisila je o toplinskem opterećenju ogrjevne plohe  $q \text{ kcal/m}^2\text{h}$ . U stanovitoj udaljenosti od ogrjevne plohe opada ovo pregrijanje vode na koju desetinku stupnja, ali nigdje ne isčezava potpuno, osim na samoj nutarnjoj površini mjeđurića, gdje je to pregrijanje jednako nuli. Oko svakog mjeđurića postoji neki ovoj vode od koje stotinke milimetra debljine — granični sloj — u kojem

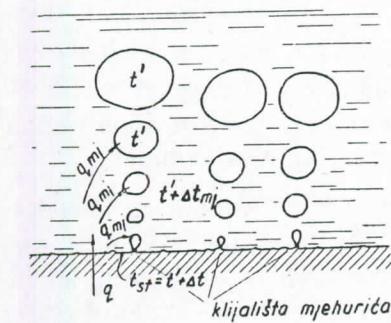
temperatura pada od temperature pregrijane vode na temperaturu zasićenja  $t'$  površine mjeđurića. Tek ovaj temperaturni gradijent  $\Delta t_{mj}$  na mjeđuriću omogućava potrebno dovodenje topline  $q_{mj}$  isparivanja površini mjeđurića, kao jedinom mjestu, gdje se vrši samo isparivanje. Bez ovog temperaturnog gradijenta toplina se ne bi mogla dovoditi, pak se ne bi moglo vršiti ni isparivanje, odakle vidimo, da pregrijanje vode čini uopće preduvjet za svaki dinamički proces isparivanja.<sup>1)</sup>

Prelaz topline kod isparivanja odvija se dakle na slijedeći način. Vruća ogrjevna površina (stijenke) grije dodirne čestice vode sl. 231. i pregrijava ih na temperaturu, koja je za nekoliko stupnjeva viša od pripadne temperature zasićenja. Čestice vode na stijenci toplije su od čestica vode podalje od ogrjevne plohe. Od ovih pregrijanih čestica vode predaje se toplina provođenjem i konvekcijom površini svakog mjeđurića. Na samoj površini nekog iole većeg mjeđurića vlada upravo temperatura zasićenja. U mjeđurić isparuje voda onom brzinom, koliko odgovara dotoku topline kroz tanki granični sloj mjeđurića. Dotok topline na svakom mjeđuriću ovisi osim o lokalnom pregrijanju susjedne vode  $\Delta t_{mj}$ , te o trenutčnoj veličini površini mjeđura. Dizanje mjeđura može sa svoje strane pojačati komešanje vodenih čestica, čime se povećava i konvektivni prenos topline od

<sup>1)</sup> Bošnjaković, Forsch. Ing. Wes. 1 (1930) str. 358.



Sl. 230. Isparivanje u parni mjeđurić



Sl. 231. Isparivanje na ogrjevnoj plohi.

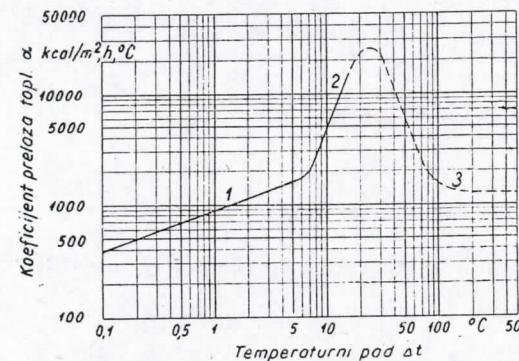
ogrjevne plohe u unutrašnjost vode. Ogrjevna ploha vrši dva važna zadatka: ona prvo sa svojim mikroskopskim neravnostima služi kao kljalište mjeđurića, a drugo, ona dobavlja toplinu česticama vode, koje se pregrijavaju i koje komešanjem prenose tu toplinu dalje u nutrinju vode do površina pojedinih mjeđurića. Samo isparivanje ne vrši se na ogrjevnoj plohi (stijenci) posude, već isključivo na površini mjeđurića pri njihovom stvaranju i dizanju u vodi.

Pojača li se toplinsko opterećenje ogrjevne plohe, to temperatura dodirnih vodenih čestica nešto poraste. Time se ubrzava stvaranje mjeđurića, jer zbog jačeg dovođenja topline mjeđurići na svojim kljalištima brže rastu i prije se odvajaju, a osim toga se pojavljuju i nova kljališta.

Broj kljališta i učestalost mjeđurića nisu pristupačni računu, pak je stoga prikladnije računati s toplinskim podacima za  $1 \text{ m}^2$  ogrjevne plohe. Označimo li sa  $\Delta t$  nadtemperaturu ogrjevne plohe spram temperature zasićenja  $t'$  vode u posudi<sup>1)</sup> to možemo definirati koeficijent prelaza topline

$$\alpha = \frac{q}{\Delta t} \text{ kcal/m}^2 \text{ h } {}^\circ\text{C} \quad (718)$$

svedeno na  $1 \text{ m}^2$  ogrjevne plohe, gdje je  $q \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$  toplinsko opterećenje ogrjevne plohe. Pokusima dobivena ovisnost ovoga



Sl. 232. Razni intenziteti isparivanja.  $\Delta t$  — razlika temperature ogrjevne plohe i temperature zasićenja kapljivine.  $\alpha$  se odnosi na ovu razliku.

<sup>1)</sup> To je zapravo temperatura  $t'$  pare u mjeđurićima.

koeficijenta pokazana je u slici 232. i to za vodu od  $100^\circ\text{C}$ . Razabiremo tri značajna područja. U prvom je području (1) toplinsko opterećenje  $q$  slabo, s malim brojem mjeđurića, pak je  $\alpha$  uvjetovano u glavnom slobodnom konvekcijom vode. U području (2) isparivanje je intenzivnije, pak se mjeđurići stvaraju u takvoj množini, da se njihovim gibanjem uskomeša voda i tako se poveća  $\alpha$ , koji naglo raste s nadtemperaturom  $\Delta t$  ogrjevne plohe. Prošavši kroz maksimum u području (3) koeficijent  $\alpha$  opet naglo pada. To je u vezi s time, da je u tom području proizvodnja mjeđura tako izdašna, da ovi počinju smetati konvekciju. Na ogrjevnoj plohi se, zbog velikog broja, pojedina kljališta stapaju u povezane površine, te se tako između ogrjevne plohe i vode počinje stvarati film pare, kao pojava, poznata pod imenom LEIDENFROSTOVA fenomena. Isparivanje nije više mjeđurasto nego filmsko. Toplina prelazi od ogrjevne plohe na parni film, ovaj je provodi do vode iznad sebe, a ova donja vodena ploha isparuje natrag u film. Nastala para diže se u velikim mjeđurima nad površinu vode. Pri tom se zbog loše vodljivosti parnoga filma koeficijent prelaza topline znatno pogoršava i pada na  $\frac{1}{10}$  svoje maksimalne vrijednosti. Nadtemperatura ogrjevne plohe kod ovog je forsiranog isparivanja vrlo velika, pak može zaprimiti i koju stotinu stupnjeva iznad temperature zasićenja vode, koju se isparuje. To je važno i za tehničke isparivače s osjetljivim tekućinama, kod kojih previsoke lokalne temperature mogu kvariti proizvod (opasnost karamelizacije kod šećera).

Za preračunavanje koeficijenta  $\alpha$  na druge prilike i druge tekućine dali su JACOB<sup>1)</sup>, te INSINGER i BLISS<sup>2)</sup> formule za preračunavanje, dobivene na temelju teoretskih razmatranja. Ovdje dajemo približni oblik ovih formula za tehnički važno područje (2), u kojem mjeđurići bitno doprinose komešanju tekućine, dakle nekako kod opterećenja  $q > 1000 \text{ kcal/m}^2 \text{ h}$ .

<sup>1)</sup> M. Jacob, The influence of pressure on heat transfer in evaporation, Proc. 5. Int. Congress of Applied Mech. (1938) 561.

<sup>2)</sup> Thomas H. Insinger i H. Bliss, Transmission of heat to boiling liquids, Trans. Amer. Ind. Chem. Engrs. 36 (1940) 491.

$$\frac{\alpha}{\alpha_w} = \frac{\left(\frac{c}{c_w}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda_w}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{\gamma'}{\gamma_w}\right)^{0,81}}{\left(\frac{\sigma}{\sigma_w}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{\gamma''}{\gamma_w}\right)^{0,5} \cdot \left(\frac{r}{r_w}\right)^{0,29}} \left(\frac{q}{q_w}\right)^{0,69} \quad (719)$$

Ovdje se indeks  $w$  odnosi na vodu, a veličine bez indeksa na promatranu kapljevinu.  $\gamma$  i  $\gamma'$  su jedinične težine kapljevine i pare,  $c$  su specifične topline kapljevina,  $\sigma$  napetosti površine, a  $r$  topline isparivanja. Podaci za vodu od  $100^{\circ}C$  za bilo koje toplinsko opterećenje  $q_w$  poznati su iz sl. 232., područje (2), odnosno iz jednadžbe  $q = \alpha_w \cdot \Delta t$ , tako da se mogu uvrstiti u gornju jednadžbu. Treba samo još uvrstiti pripadne vrijednosti  $c$ ,  $\lambda$ ,  $q$  i t. d. za promatranu kapljevinu, da se uzmogne izračunati  $\alpha$ .

Kad se radi o isparivanju kod nekog nižeg pritiska  $p$ , preporučuju autori formulu

$$\frac{\alpha_p}{\alpha_w} = \left(\frac{p}{760}\right)^{0,4} \quad (720)$$

gdje se  $\alpha_w$  odnosi na pritisak od  $760 \text{ mm Hg}$ , a  $\alpha_p$  na  $p \text{ mm Hg}$ .

### Prolaz topline

Kod proračunavanja raznih tehničkih zadataka barata se često s pojmom koeficijenta prolaza topline  $k$  za razliku od koeficijenta prelaza topline  $\alpha$ . Koeficijent prolaza obuhvaća sve uzastopne toplinske otpore, tako na pr. kod jedne stijenke koeficijent prelaza topline  $\alpha_1$  od uzduha na jednu stranu stijenke, zatim provođenje topline kroz samu stijenku i napokon koeficijent prelaza topline  $\alpha_2$  s druge strane. Pri tom pišemo da je

$$Q_h = k (t_1 - t_2) F \quad (721)$$

gdje je  $k \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0 \text{ C}$  koeficijent prolaza topline,  $(t_1 - t_2)$  svezupna razlika temperatura obih tekućina ispred stijenke i iza

nje, a  $F$  njena površina. Na taj se način uvode u račun samo (obično poznate) temperature  $t_1$  i  $t_2$  tekućina s obih strana stijenke, dok se zaobilaze često nezanimive međutemperature. No u slučaju potrebe mogu se i ove lako izračunati. Po (549) bilo je s primjenom pojma toplinskog otpora

$$Q_h = (t_1 - t_2) \frac{1}{W} \quad (722)$$

odakle slijedi

$$k = \frac{1}{FW} \quad (723)$$

Kad uzmemo u obzir, da su ravne stijenke sastavljene iz nekoliko slojeva s debljinama  $\delta_a$ ,  $\delta_b$ ,  $\delta_c$ , sl. 233. pojavljuju se i otpori konvektivnog prelaza topline, to za uzastopne otpore slijedi iz (557)

$$W = \frac{1}{F} \left( \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_a}{\lambda_a} + \frac{\delta_b}{\lambda_b} + \dots + \frac{1}{\alpha_2} \right) \quad (724)$$

a odavde koeficijent prolaza topline  $k$

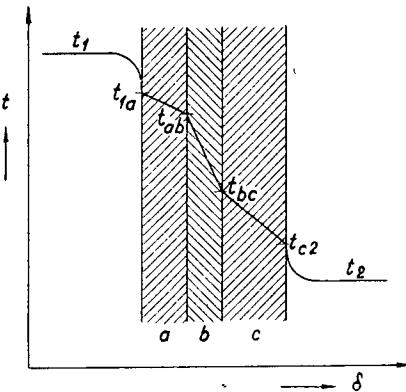
$$k = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_a}{\lambda_a} + \frac{\delta_b}{\lambda_b} + \dots + \frac{1}{\alpha_2}} \text{ kcal/m}^2 \text{ h}^0 \text{ C} \quad (725)$$

ili njegova recipročna vrijednost

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta_a}{\lambda_a} + \frac{\delta_b}{\lambda_b} + \dots + \frac{1}{\alpha_2} [\text{m}^2 \text{ h}^0 \text{ C/kcal}] \quad (726)$$

Ovdje je  $\frac{1}{k}$  specifični sveukupni toplinski otpor stijenke, uključivo toplinski otpori prelaza topline, uporedi (552a).

Kako se vidi, za  $k$ , a time i za izračunavanje  $Q$  nije potrebno poznavati međutemperature. No vanjske temperature  $t_1$  i  $t_2$  moraju biti poznate isto tako kao i koeficijenti prelaza topline  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ , te sastav stijenke.



Sl. 233. Tok temperature u raznolikim slojevima

Sveukupni otpor  $\frac{1}{k}$  sastavljen je iz nekoliko članova, koji mogu biti vrlo različiti. Želimo li osjetljivo smanjiti sveukupni otpor, to moramo nastojati smanjiti onaj pojedinačni otpor, koji je najveći. Tako je kod hladnjaka uzduha najveći otpor u prelazu topline od uzduha na stijenku, pak je izbor građevnog materijala stijenke tek od sporedne važnosti za sveukupni otpor. Slično je kod grijanja vode u kotlovima najveći otpor na strani izgorenih plinova, pak samo poboljšanje prelaza topline od ovih plinova na stijenke kotla obećava uspjeh, dok je poboljšanje prelaza topline na vrelu vodu od sporednog značaja.

Da bismo odredili temperature stijenke na granici pojedinih slojeva  $t_{1a}, t_{ab}, t_{bc} \dots t_{c2}$  (sl. 223.), potsjetimo se, da u ustaljenom stanju mora kroz sve slojeve prolaziti ista količina topline. Za  $F = 1 \text{ m}^2$  imamo

$$\begin{aligned} Q_h &= k(t_1 - t_2) = \alpha_1(t_1 - t_{1a}) = \\ &= \frac{\lambda_a}{\delta_a}(t_{1a} - t_{ab}) = \frac{\lambda_b}{\delta_b}(t_{ab} - t_{bc}) = \dots = \alpha_2(t_{c2} - t_2) \end{aligned} \quad (727)$$

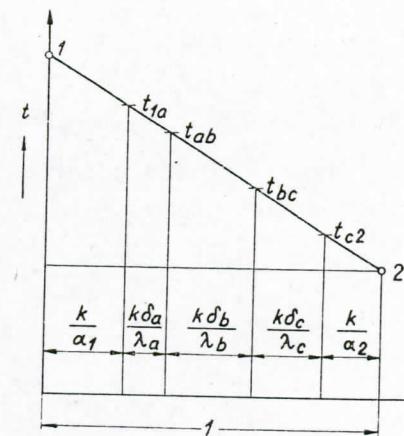
Tu imamo toliko jednadžbi, koliko je nepoznatih međutemperatura, tako da možemo ove odrediti. Najbrže dolazimo do cilja grafički, ako posljednu jednadžbu podijelimo sa  $k$ , te je pišemo u obliku

$$t_1 - t_2 = \frac{t_1 - t_{1a}}{\frac{k}{\alpha_1}} = \frac{t_{1a} - t_{ab}}{\frac{k \cdot \delta_a}{\lambda_a}} = \frac{t_{ab} - t_{bc}}{\frac{k \cdot \delta_b}{\lambda_b}} = \dots = \frac{t_{c2} - t_2}{\frac{k}{\alpha_2}} \quad (728)$$

U dijagramu, sl. 234., nanosimo kao apscise redomice nazivnike gornjih jednadžbi, a kao ordinate temperature  $t_1$  i  $t_2$ . Na spojnici točaka 1 i 2 možemo odmah očitati pripadne međutemperature. Za kontrolu: Zbroj nazivnika mora biti jednak jedinici, vidi sl. 234.

Interesiraju li nas samo površinske međutemperature  $t_{1a}$  i  $t_{c2}$ , to u sl. 234. treba s lijeva nanijeti  $\frac{k}{\alpha_1}$ , a s desna  $\frac{k}{\alpha_2}$  pak se odmah dobivaju temperature  $t_{1a}$  i  $t_{c2}$ .

Za određivanje veličine  $k$  moraju vrijednosti  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$  biti poznate, koje će možda ovisiti o površinskim temperaturama  $t_{1a}$  i  $t_{c2}$ , kako to imamo kod slobodne konvekcije. Budući da ove temperature obično nisu zadane, to prethodno moramo procijeniti  $\alpha_1$  i  $\alpha_2$ . Time odredimo u prvom približenju  $t_{1a}$  i  $t_{c2}$ , kako smo pokazali, s ovim vrijednostima odredimo ispravne veličine od  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  i od  $k$  i ponovimo konstrukciju.

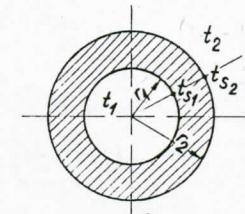


Sl. 234. Određivanje temperature na granicama slojeva

**Prolaz topline kroz stijenku cijevi** Ovaj je sastavljen iz prelaza topline ( $\alpha_1$ ) stijenku cijevi na manju nutarnju cilindarsku površinu polumjera  $r_1$ , sl. 235. i sprovođenja topline kroz stijenku cijevi i iz prelaza topline ( $\alpha_2$ ) na većoj vanjskoj površini cilindra polumjera  $r_2$ . Temperatute tekućina unutra i vani neka su  $t_1$  i  $t_2$ , a temperature površina stijenke  $t_{s1}$  i  $t_{s2}$ . Time je onda količina topline, koja iz unutrašnjosti struji napolje, za dužinu cijevi 1 m, upoređi (572)

$$\begin{aligned} Q_h &= 2r_1\pi\alpha_1(t_1 - t_{s1}) = \\ &= \frac{2\pi\lambda}{\ln \frac{r_2}{r_1}}(t_{s1} - t_{s2}) = 2r_2\pi\alpha_2(t_{s2} - t_2). \end{aligned} \quad (729)$$

Sl. 235. Stijenka cijevi



Iz ovih jednadžbi možemo eliminirati temperature stijenke, pak dobivamo

$$Q_h = \frac{2\pi}{\frac{1}{r_1\alpha_1} + \frac{1}{r_2\alpha_2} + \frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}} (t_1 - t_2) [\text{kcal/m h}] \quad (730)$$

Kod tehničkih izmjenjivača topline primjenjujemo obično me-

talne cijevi tankih stijenka  $\left(\frac{r_2}{r_1} \approx 1\right)$ , koje imaju dobru topinsku vodljivost. U tom se slučaju može zanemariti član  $\frac{1}{\lambda} \ln \frac{r_2}{r_1}$  u nazivniku. Onda možemo posljednju jednadžbu pojednostaviti i pisati u obliku

$$Q_h \approx \frac{2r_1\pi\alpha_1}{1 + \frac{r_1\alpha_1}{r_2\alpha_2}} (t_1 - t_2), \quad (731)$$

ili pak

$$Q_h \approx \frac{2r_2\pi\alpha_2}{1 + \frac{r_2\alpha_2}{r_1\alpha_1}} (t_1 - t_2). \quad (732)$$

Važni su slučajevi, kad je jedan koeficijent prelaza topline malen spram drugoga, kako je to na pr. kod parnog grijanja, gdje u cijevi imamo paru koja kondenzira, a vani uzduh. Tu imamo

$$Q_h \approx 2r_1\pi\alpha_1(t_1 - t_2) \text{ za } \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \approx 0 \quad (733)$$

ili pak

$$Q_h \approx 2r_2\pi\alpha_2(t_1 - t_2) \text{ za } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \approx 0 \quad (734)$$

U tim je slučajevima za prolaz topline uvijek odlučan onaj radius, gdje vlada slabiji prelaz topline. Kad su vanjski i nutarnji prelazi topline približno isti, to dobivamo

$$Q_h \approx \frac{2r_1r_2\pi\alpha}{r_1 + r_2}(t_1 - t_2) \approx 2r_m\pi\alpha(t_1 - t_2); \text{ za } \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha \quad (735)$$

gdje kod tankih cijevi možemo uvrstiti srednji radius stijenke  
 $r_m = \frac{r_1 + r_2}{2}$ .

Kod izoliranih cijevi pridonosi izolacija bitni udio toplinskog otpora, pa kako se njena debljina obično ne može zanemariti spram radiusa cijevi, to se tu moramo služiti s točnom jednadžbom (730).

### Tehnički izmjenjivači topline

Najvažniji zadatak tehničkih izmjenjivača topline predaja je topline od struje jednog medija na struju drugog medija, koji su odijeljeni nekom čvrstom stijenkom. Česta je izvedba u obliku dvostrukih (koncentričnih) cijevi sl. 236. i 237. no opet su česte i izvedbe sa cijevnim registrima, kroz koje struji jedan medij, a koje izvana poprečno nastrujava drugi medij. Za izmjenu topline važan je međusobni smjer strujanja obih medija, pak ćemo ovdje promotriti tri najvažnija slučaja. To su istosmjerno strujanje, protusmjerno strujanje i unakrsno strujanje medija. Kod istosmjernog strujanja ulaze struje s istog kraja izmjenjivača i teku usporedno, kod protusmjernog strujanja ulaze sa suprotnih krajeva izmjenjivača i teku nasuprot, a kod unakrsnog strujanja smjerovi strujanja sijeku se pod pravim kutem. Izmjenjivači svake od ovih triju vrsta nisu ograničeni na spomenute cijevi, već se mogu graditi u obliku pločastih izmjenjivača topline i t. d.

Kod projekta bit će obično zadane dolazne (ulazne) temperature  $t'_1$  i  $t'_2$  obih struja. Indeksi 1 i 2 odnosit će se na jednu i drugu struju, dok se apostrofi ' i " odnose na ulazno odnosno izlazno stanje dotične struje. Često se pita za veličinu izmjenjivača, kad su zadane dopustive razlike temperature  $(t_1 - t_2)$  na jednom ili drugom kraju izmjenjivača.

Označit ćemo sa  $W_1$ , odnosno  $W_2$  t. zv. vodene vrijednosti — u stvari toplinske kapacitete — obih struja. Pri tom je

$$W_1 = G_1 c_1; \quad W_2 = G_2 c_2 \quad (736)$$

gdje  $G$  označuje količinu medija na sat, a  $c$  njegovu specifičnu toplinu.

Ako nije drugačije rečeno, u našim ćemo daljnjim razmatranjima označiti sa  $W_1$  uvijek slabiju struju ( $W_1 < W_2$ ) o čemu treba dobro voditi računa. U protivnom slučaju neke od izvedenih formula kod protusmjernog i unakrsnog strujanja ne bi bile ispravne. Kod istosmjernog je strujanja naprotiv izbor od  $W_1$  bez daljnog značenja. Pri tom označivanju bit će

svejedno, koja je od označenih struja toplija, a koja hladnija. To će se očitovati tek u predznacima temperaturnih razlika.

Pretpostaviti ćemo da je koeficijent prolaza topline  $k$  konstantan za čitavu površinu izmjenjivača. U slučaju, da je ova površina ravna, znamo da je

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}. \quad (737)$$

To će dovoljno točno vrijediti, kad im je debljina stijenke  $\delta$  malena spram polumjera cijevi  $r$ . Konstantnost koeficijenta prolaza  $k$  pretpostavlja i konstantnost brzine strujanja  $w$  kao i drugih fizikalnih veličina  $\lambda, c, v, \rho$ , što strogo uvezši ne može biti točno, jer će se mijenjati temperatura medija duž aparata, a s njome i ostala fizikalna svojstva. No s učinjenom pretpostavkom moći ćemo se obično zadovoljiti, pogotovo ako spomenute veličine uvrstimo u račune s vrijednostima, koje odgovaraju srednjoj temperaturi između ulaznog i izlaznog stanja dotičnog medija.

Za izmjenu topline od bitnog je utjecaja i veličina površine izmjenjivača  $F_0 \text{ m}^2$ . Prema tome će tok temperatura ovisiti o veličinama  $W_1, W_2, k, F_0$ . Od ovih se veličina dadu složiti dvije bezimene značajke, koje su međusobno neovisne, na pr.  $\frac{W_1}{W_2}$  i  $\frac{kF_0}{W_1}$ . Treća bezimena značajka  $\frac{kF_0}{W_2}$ , već je sadržana u prve dvije, jer se može dobiti iz produkta  $\frac{kF_0}{W_1} \cdot \frac{W_1}{W_2}$ ,

pak zato nije više neovisna. Kako ćemo još pokazati tok će temperatura ovisiti samo o spomenutim dvim neovisnim značajkama i to u obliku neke funkcije  $\phi\left(\frac{kF_0}{W_1}, \frac{W_1}{W_2}\right)$ . Ova će funkcija  $\phi$  biti različita već prema tome, da li promatramo istosmjerno, protusmjerno ili unakrsno strujanje. Uz pomoć funkcije  $\phi$  moći ćemo sve tri vrste izmjenjivača proračunavati jedinstvenim postupkom, pak ćemo zato ponajprije odrediti oblik ove funkcije.

**Istosmjerno strujanje** U bilo kojem isječku  $A$  izmjenjivača, sl. 236., prolaz se topline vrši kroz maleni površinski element  $dF$ . Lokalna je razlika temperature obih

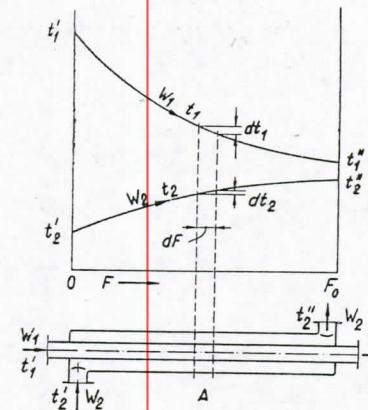
struja ovdje ( $t_1 - t_2$ ). Kod istosmjernog se strujanja struja  $W_1$  na tom mjestu hlađi, tako da joj je prirast temperature negativan  $-dt_1$ , te odaje toplinu

$$-W_1 dt_1 = k(t_1 - t_2) dF.$$

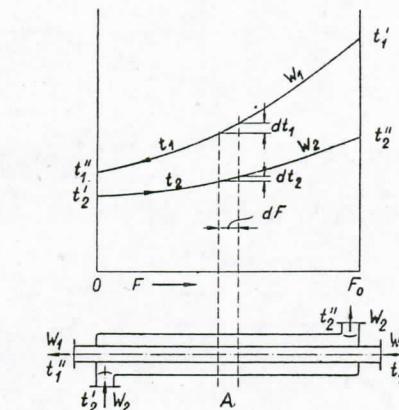
Struja  $W_2$  ovu istu toplinu preuzima

$$W_2 dt_2 = k(t_1 - t_2) dF.$$

Površinu  $F$  mjerit ćemo od lijeve strane izmjenjivača i to od



Sl. 236. Istosmjerni izmjenjivač



Sl. 237. Protusmjerni izmjenjivač

$F = 0$  do  $F = F_0$ . Ove jednadžbe možemo razviti u oblik

$$\frac{k}{W_1} t_1 - \frac{k}{W_1} t_2 + \frac{dt_1}{dF} = 0 \quad \text{te} \quad (738)$$

$$\frac{k}{W_2} t_1 - \frac{k}{W_2} t_2 - \frac{dt_2}{dF} = 0 \quad (739)$$

To su dvije skopčane linearne homogene diferencijalne jednadžbe prvoga reda s konstantnim koeficijentima, koje možemo lako integrirati. Uvezši u obzir granične uvjete, po kojima su

za  $F = 0$  temperature  $t_1 = t_1'$ ,  $t_2 = t_2'$

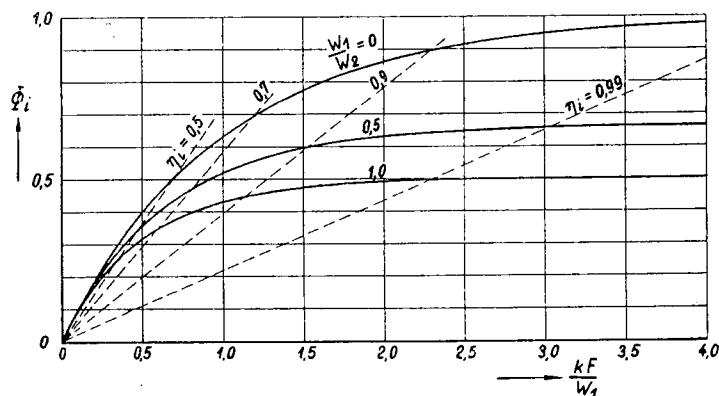
za  $F = F_0$  temperature  $t_1 = t_1''$ ,  $t_2 = t_2''$

dobivamo izlazne temperature  $t_1''$  i  $t_2''$  u ovisnosti od površine izmjenjivača  $F_0$  i od razlike ulaznih temperatura  $(t_1' - t_2')$ , na pr. u obliku

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} = \frac{1 - e}{\frac{W_1}{W_2} + 1} = \phi_i \quad (740)$$

$$\frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e}{\frac{W_1}{W_2} + 1} = \frac{W_1}{W_2} \phi_i \quad (741)$$

Tok funkcije  $\phi_i \left( \frac{W_1}{W_2}, \frac{kF_0}{W_1} \right)$  izračunane iz (740), prikazan je u sl. 238., a u većem mjerilu priložen kao prilog br. IVa ovoj



Sl. 238.  $\phi_i$ -dijagram za istosmjerno strujanje

knjizi. Za određivanje promjene temperatura od ulaza do izlaza, a to su razlike  $(t_1' - t_1'')$ , odnosno  $(t_2'' - t_2')$ , moramo za zadane vrijednosti  $\frac{W_1}{W_2}$ , te  $\frac{kF_0}{W_1}$  očitati vrijednost  $\phi_i$  iz spomenutog  $\phi$ -dijagonala. Uz poznate ulazne temperature  $t_1'$  i  $t_2'$  mogu se onda odrediti i izlazne temperature  $t_1''$  i  $t_2''$  obih struja. Kod istosmernog izmjenjivača prikazuje  $\phi_i$ -dijagram ujedno i tok temperatura struje  $W_2$  duž površine izmjenjivača  $F$ .

### Protusmjerno strujanje

Prema sl. 237. glasi ovdje diferencijalna jednadžba prolaza topline i ugrijavanja

$$\begin{aligned} W_1 dt_1 &= k(t_1 - t_2) dF \\ W_2 dt_2 &= k(t_1 - t_2) dF \end{aligned}$$

što daje

$$\frac{k}{W_1} t_1 - \frac{k}{W_1} t_2 - \frac{dt_1}{dF} = 0 \quad (742)$$

$$\frac{k}{W_2} t_1 - \frac{k}{W_2} t_2 - \frac{dt_2}{dF} = 0 \quad (743)$$

Za integraciju ovih jednadžbi granični su uvjeti

za  $F = 0$  temperature  $t_1 = t_1''$ ,  $t_2 = t_2'$

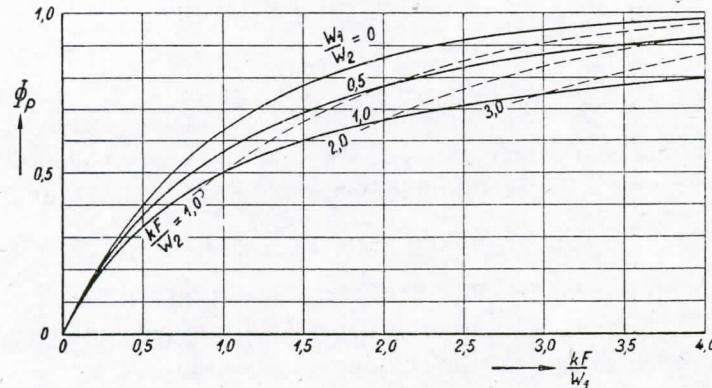
za  $F = F_0$  temperature  $t_1 = t_1'$ ,  $t_2 = t_2''$

I ovdje mjerimo površinu  $F$  od lijevog kraja izmjenjivača. Integracija daje

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} = \frac{1 - e}{1 - \frac{W_1}{W_2} e - \left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{kF_0}{W_1}} = \phi_p \quad (744)$$

$$\frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{W_1}{W_2} \frac{1 - e}{1 - \frac{W_1}{W_2} e - \left(1 - \frac{W_1}{W_2}\right) \frac{kF_0}{W_1}} = \frac{W_1}{W_2} \phi_p \quad (745)$$

Funkcija  $\phi_p \left( \frac{W_1}{W_2}, \frac{kF_0}{W_1} \right)$  unesena je u  $\phi_p$ -dijagonalu sl. 239., i priložena kao prilog br. V ovoj knjizi, te služi za određivanje temperaturnih razlika  $(t_1' - t_1'')$ , odnosno  $(t_2'' - t_2')$ . Za razliku od istosmernog strujanja daje ovaj dijagonal podatke samo za krajnje temperature, a ne prikazuje tok temperatura duž izmjenjivača

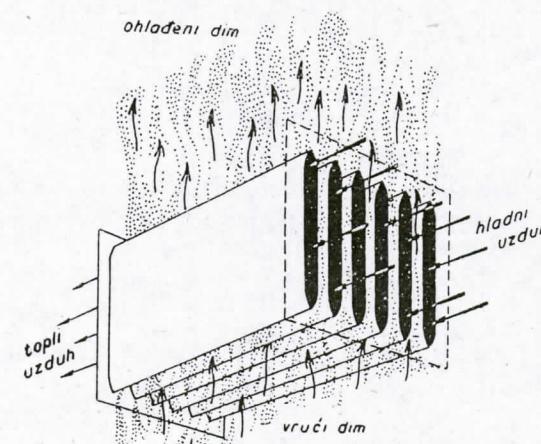
Sl. 239.  $\phi_r$ -dijagram za protusmjerno strujanje.

Za posebni slučaj, kad je  $\frac{W_1}{W_2} = 1$  funkcija  $\phi_r$  pojavljuje se u naročito jednostavnom obliku

$$\phi_r = \frac{1}{1 + \frac{W_1}{kF_0}} \quad (\text{za } \frac{W_1}{W_2} = 1) \quad (746)$$

#### Unakrsno strujanje

Iz konstruktivnih se razloga izmjenjivači topline često izvode tako, da se struje obih medija međusobno ukrštavaju pod pravim kutem. Jedna od takvih izvedbi prikazana je u sl. 240. Prolaz se topline vrši



Sl. 240. Unakrsni izmjenjivač (predgrijivač uzduha).

kroz pregradnu stijenku koja ima lik pravokutnika sa stranicama  $X_0$  i  $Y_0$  i površinom  $F_0 = X_0 Y_0$ . Temperature obih struja  $t_1$  i  $t_2$  mijenjat će se duž stijenke nejednoliko, pak će biti ovisne od dviju promjenljivica

$$t_1 = f_1(X, Y); \quad t_2 = f_2(X, Y) \quad (747)$$

U sl. 241. prikazana je ta pregradna stijenka. Medij  $W_1$  strui u smjeru  $X$ , a medij  $W_2$  u smjeru  $Y$ , koji je okomit na  $X$ .

U ustaljenom stanju prolazi kroz plošni element  $d^2F = dX \cdot dY$ , sa koordinatama  $X, Y$ , toplina

$$d^2Q = k(t_1 - t_2) dX \cdot dY \quad (748)$$

gdje su  $t_1$  i  $t_2$  lokalne temperature obih medija s jedne i s druge strane stijenke. Ovu toplinu daje ona strujnica  $dW_1$  medija  $W_1$ , koja baš prolazi kraj plošnog elementa  $d^2F$ . Protočna je količina ove strujnice

$$dW_1 = \frac{W_1}{Y_0} dY. \quad (749)$$

Ova se strujnica prolazom kraj  $d^2F$  ohladi za  $-dt_1 = -\frac{\partial t_1}{\partial X} dX$ , pak je

$$d^2Q = -dW_1 \frac{\partial t_1}{\partial X} dX = -\frac{W_1}{Y_0} \frac{\partial t_1}{\partial X} dX \cdot dY. \quad (750)$$

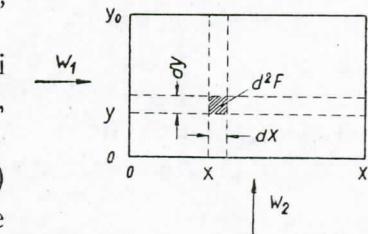
Ista se toplina predaje strujnici  $dW_2$  s druge strane stijenke, pak je analogno

$$d^2Q = \frac{W_2}{X_0} \frac{\partial t_2}{\partial Y} dX \cdot dY. \quad (751)$$

Od prednosti je, da ovdje uvedemo bezimene omjere

$$x = \frac{X}{X_0}; \quad y = \frac{Y}{Y_0}, \quad (752)$$

gdje  $x = 0$  označuje lijevu,  $x = 1$  desnu ivicu,  $y = 0$  donju, a  $y = 1$  gornju ivicu stijenke. Uvezši u obzir da je  $F_0 = X_0 Y_0$ , to slijede diferencijalne jednadžbe unakrsnog strujanja



Sl. 241. K proračunu unakrsnog izmjenjivača.

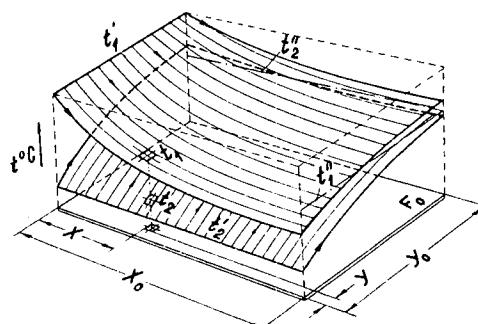
$$\frac{kF_0}{W_1} t_1 - \frac{kF_0}{W_1} t_2 + \frac{\partial t_1}{\partial x} = 0 \quad (753)$$

$$\frac{kF_0}{W_2} t_1 - \frac{kF_0}{W_2} t_2 - \frac{\partial t_2}{\partial y} = 0 \quad (754)$$

Ove parcijalne diferencijalne jednadžbe riješio je NUSSELT u obliku beskonačnih redova <sup>1)</sup>

Predaleko bi nas odvelo, da ovdje prikažemo njihove opće integrale. Nas ne zanima toliko tok temperaturnih polja preko čitave površine, koji je dosta zamršen, a koji je prikazan u sl. 242., koliko prosječne izlazne temperature obih struja. Za

dimensioniranje izmjenjivača dovoljno je naime poznavati samo prosječnu izlaznu temperaturu  $t_1''$  struje  $W_1$  i onu  $t_2''$  struje  $W_2$  <sup>2)</sup>. Prosječna izlazna temperatura  $t_1''$  je ona temperatura, koju bi imao medij  $W_1$ , kad bismo ga nakon izlaza iz izmjenjivača dobro pomiješali. NUSSELT je u spomenutoj raspravi iz-



Sl. 242. Prostorni prikaz razdiobe temperature u unakrsnim strujama nanijet iznad prelazne površine.

računao brojčane vrijednosti za ove temperature te je time omogućio proračun unakrsnih izmjenjivača. Tok proračuna unakrsnog izmjenjivača može se međutim po prijedlogu VILIČIĆA znatno pojednostaviti na način kako ga ovdje iznosimo.

Mogli bismo pokazati da između ulaznih temperatura i prosječnih izlaznih temperatura postoji takva veza, da je

<sup>1)</sup> W. Nusselt, Forschung auf dem Gebiete des Ingenieur-Wesens (Technische Mechanik und Thermodynamik) 1 (1930) 417.

<sup>2)</sup> Pri tom je  $t_1'' = \int_0^1 t_{1,izl} dy$ , a  $t_2'' = \int_0^1 t_{2,izl} dx$ , gdje su  $t_{1,izl}$  i  $t_{2,izl}$  ne-jednolike izlazne temperature pojedinih strujnica medija  $W_1$  i  $W_2$ .

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} = \Phi_k \left( \frac{kF_0}{W_1}, \frac{W_1}{W_2} \right) \quad (755)$$

te

$$\frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{W_1}{W_2} \Phi_k \left( \frac{kF_0}{W_1}, \left( \frac{W_1}{W_2} \right) \right) \quad (756)$$

To su formalno isti izrazi kao i za istosmjerne i protusmjerne izmjenjivače, samo što je oblik funkcije  $\Phi_k$  specifičan za unakrsno strujanje. Ovisnost funkcije  $\Phi_k$  od  $\frac{kF_0}{W_1}$  i od  $\frac{W_1}{W_2}$  okolišnim je putem izračunao M. VILIČIĆ iz podataka NUSSELT-a, pak u  $\Phi_k$ -dijagramu, prilog br. VI. prikazujemo rezultat. Ovaj dijagram vrlo je sličan protustrujnom, sl. 239.

Jedinstveni proračun za sve izmjenjivače

U praktičnim će problemima obično biti zadana ili površina izmjenjivača, a tražit će se izmjenjena toplina i postignute temperature, ili će biti zadane temperature, odnosno njihova razlika, a tražit će se površina izmjenjivača. Pri tom su obično zadane vodene vrijednosti  $W_1$  i  $W_2$  i ulazne temperature  $t_1'$  i  $t_2'$  obih medija. Napominjemo još jednom, da sa  $W_1$  uvijek označujemo slabiju struju ( $W_1 < W_2$ ). Jedino kod istosmjernog izmjenjivača taj izbor je sporedan. Osim toga neka je poznat koeficijent prelaza topline  $k$ .

Po prijašnjim je izlaganjima bilo za sve tri vrste strujanja

$$\frac{t_1' - t_1''}{t_1' - t_2'} = \Phi \quad (757)$$

te

$$\frac{t_2'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = \frac{W_1}{W_2} \Phi \quad (758)$$

Izmjenjena se toplina  $Q$  može izračunati ili iz ohladianja ( $t_1' - t_1''$ ) prve struje ili iz ugrijavanja ( $t_2'' - t_2'$ ) druge struje, pak je

$$Q = W_1 (t_1' - t_1'') = W_2 (t_2'' - t_2') = W_1 (t_1' - t_2') \cdot \Phi \text{ kcal/h} \quad (759)$$

Posljednji izraz desne strane slijedi iz jednadžbi (740) odnosno, (755). Iz istih jednadžbi slijede i ulazne temperature

$$t_1'' = t_1' - (t_1' - t_2') \phi \quad (760)$$

$$t_2'' = t_2' + (t_1' - t_2') \frac{W_1}{W_2} \phi \quad (761)$$

koje se mogu izračunati čim je poznato  $\phi$ . Isto tako mogu se proračunati i slijedeće razlike temperature

$$\frac{t_1'' - t_2''}{t_1' - t_2'} = 1 - \left( 1 + \frac{W_1}{W_2} \right) \cdot \phi \quad (762)$$

odnosno

$$\frac{t_1'' - t_2'}{t_1' - t_2'} = 1 - \phi \quad (763)$$

te

$$\frac{t_1' - t_2''}{t_1' - t_2'} = 1 - \frac{W_1}{W_2} \phi. \quad (764)$$

Time smo obuhvatili sve temperature dotično njihove razlike u ovisnosti od ulaznih temperatura i od  $\phi$ .

a) **Zadana je površina  $F_0$**  Neka su zadane vodene vrijednosti obih struja  $W_1$  i  $W_2$ , njihove ulazne temperature  $t_1'$  i  $t_2'$  te koeficijent  $k$ . Osim toga neka je zadana površina  $F_0$ . Za proračun ponajprije određujemo bezimene značajke  $\frac{W_1}{W_2}$  te  $\frac{kF_0}{W_1}$ . Za te veličine potražimo iz pripadnog  $\phi$ -dijagrama vrijednost funkcije  $\phi$ . Pomoću nje mogu se iz gornjih jednadžbi neposredno proračunati izmijenjena toplina  $Q$  i izlazne temperature  $t_1''$  i  $t_2''$ .

b) **Traži se površina  $F_0$**  Drugi je važni zadatak izračunavanje površine  $F_0$ , kad je pored  $k$ ,  $W_1$ ,  $W_2$ , te pored ulaznih temperatura  $t_1'$  i  $t_2'$  zadan još neki podatak o izlaznim temperaturama, na pr. ili  $t_1''$  ili  $t_2''$ . Čim je to poznato može se iz (763) ili (764) izračunati vrijednost  $\phi$ , a pomoću ove uz pomoć  $\frac{W_1}{W_2}$  iz dijagrama unutraške odrediti  $\frac{kF_0}{W_1}$ . Kako su  $k$  i  $W_1$  zadani, to se površina dobiva odmah iz izraza

$$F_0 = \frac{W_1}{k} \cdot \left( \frac{kF_0}{W_1} \right) \quad (765)$$

Često neće biti zadane izlazne temperature ni jedne ni druge struje, već će biti propisana neka neprekoračiva temperaturna razlika  $\Delta t_0$ , koja se kao najmanja razlika mora postignuti bar na jednom okrajku izmjenjivača. Kod istosmjernog izmjenjivača bit će ta najmanja razlika  $\Delta t_0$  izlaznih temperatura

$$\Delta t_0 = t_1'' - t_2'', \quad (766)$$

dok kod protusmjernog izmjenjivača to može biti razlika ili na lijevom ili na desnom okrajku. Kad sa  $W_1$  po pretpostavci označimo slabiju struju,  $W_1 < W_2$ , naglje će se mijenjati temperatura slabije struje  $W_1$ , pak će se najmanja razlika  $\Delta t_0$  postignuti na izlasku ove slabije struje. To je ujedno ulazna strana jače struje  $W_2$ , pak će biti

$$\Delta t_0 = t_1' - t_2' \quad (767)$$

To isto vrijedi i za unakrsno strujanje. Čim je zadana ova neprekoračiva temperaturna razlika  $\Delta t_0$ , može se pripadno  $\phi$  neposredno izračunati i to

za *istosmjerno* strujanje iz (762) i (766)

$$\phi = \frac{1 - \frac{\Delta t_0}{t_1' - t_2'}}{1 + \frac{W_1}{W_2}} \quad (768)$$

za *protusmjerno* i za *unakrsno* strujanje iz (767) i (763)

$$\phi = 1 - \frac{\Delta t_0}{t_1' - t_2'}. \quad (769)$$

Čim je izračunano  $\phi$  može se iz  $\phi$ -dijagrama za zadano  $\frac{W_1}{W_2}$  očitati pripadnu vrijednost  $\frac{kF_0}{W_1}$ , a odavde s poznatim  $k$  i  $W_1$  odmah izračunati površinu  $F_0$ .

Naročito se jednostavno proračunava površina protustrujnog aparata,  $W_1 = W_2$ . Za taj slučaj slijedi iz (769) i (746)  $\frac{kF_0}{W_1} = \frac{t_1' - t_2'}{\Delta t_0} - 1$  (samo za protusmjerno  $W_1 = W_2$ ). (770)

Neka je zadano: površina  $F_0$ , koeficijent  $k$ , ulazne temperature  $t_1'$  i  $t_2'$ , jedna od obih struja  $W$ , te razlika temperature na jednom okrajku izmjenjivača  $\Delta t_0$ . Treba odrediti drugu struju i sve temperature.

1. Za istosmjerno je strujanje svejedno da li sa  $W_1$  označujemo jaču ili slabiju struju. Zato s tom oznakom smijemo označiti zadanu struju  $W \equiv W_1$ , i ako još ne znamo da li je ona jača ili slabija. Sa zadanim  $W_1$  određujemo ponajprije  $\frac{kF_0}{W_1}$ , a zatim iz (768) produkt

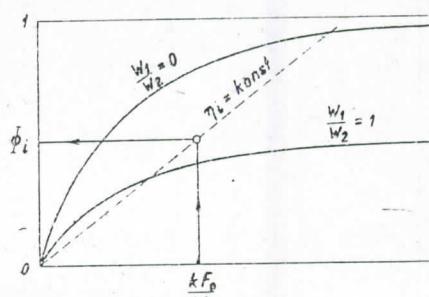
$$\left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \phi = 1 - \frac{\Delta t_0}{t_1' - t_2'} \quad (771)$$

Ovaj izraz obilježavamo sa  $\eta_i$  gdje je

$$\eta_i = \left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \phi_i \quad (772)$$

U  $\phi_i$ -dijagram ucrte su također i linije  $\eta_i = \text{konst}$ , koje su pravci, tako da sa poznatim  $\frac{kF_0}{W_1}$  i sa zadanim  $\eta_i$  lako odredimo  $\phi$  i  $\frac{W_1}{W_2}$ , kako je to prikazano u sl. 243. Daljnji je tok proračuna isti kao i prije.

2. Kod protustrujnog i unakrsnog aparata još ne znamo, treba li zadalu struju  $W$  označiti sa  $W_1$  ili sa  $W_2$ , jer ne znamo, da li će tražena struja biti jača ili slabija od zadane. No to možemo saznati iz pobližih podataka za  $\Delta t_0$ . Ako je zadano, da se  $\Delta t_0$  ima odnositi na okrajak aparata gdje zadana struja izlazi, onda je ona slabija, pak ćemo je označiti sa  $W_1$ . Ako je pak zadano, da se  $\Delta t_0$  odnosi na okrajak gdje zadana struja ulazi, onda je ona jača, pak ćemo je označiti sa  $W_2$ . Kad ne bi bilo zadano na kojem



Sl. 243. K proračunu istosmjernog izmjenjivača

okrajku mora vladati  $\Delta t_0$ , rješenje ne bi bilo jednoznačno.

2a. Kad se je ispostavilo da je zadana struja slabija, tako da se mora označiti sa  $W_1$ , ( $W \equiv W_1$ ) određujemo ponajprije  $\frac{kF_0}{W_1}$ , a iz (769) izračunamo  $\phi$ . Pomoću dobivene vrijednosti  $\phi$  očitamo iz  $\phi$ -dijagrama pripadno  $\frac{W_1}{W_2}$ . Čim je to poznato nastavlja se račun kao i prije.

2b. Kad se ispostavilo, da je zadana struja jača, tako da se mora označiti sa  $W_2$ , ( $W \equiv W_2$ ), određujemo ponajprije  $\frac{kF_0}{W_2}$ , a iz (769) izračunamo  $\phi$ . U  $\phi$ -dijagram ucrte su linije, vidi sl. 239, i priloge br. V i VI  $\frac{kF_0}{W_2} = \text{konst}$ , pak pomoću njih možemo sa izračunanim  $\phi$  odrediti pripadnu vrijednost  $\frac{kF_0}{W_1}$ , odakle neposredno slijedi  $W_1$ , odnosno  $\frac{W_1}{W_2}$ . To je prikazano u sl. 244.

Sl. 244. K proračunu protusmjernog i unakrsnog izmjenjivača kad je nepoznato  $W_1$

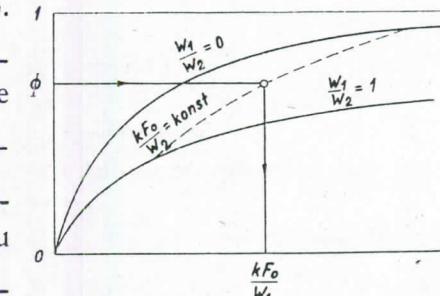
Daljnji je proračun isti kao i prije.

Na slični se način postupa kad su kod proračuna zadani drugi početni elementi.

**Iskoristivost topline** U idealnom izmjenjivaču topline trebala bi se izjednačiti izlazna temperatura slabije struje, koju uvijek označujemo sa  $W_1$ , sa ulaznom temperaturom jače struje. U tom bi se slučaju ona ugrijala (ili ohladila) do ulazne temperature jače struje, dakle za temperaturnu razliku  $(t_1' - t_2')$ , pak bi izmijenjena toplina bila

$$Q_\infty = W_1 (t_1' - t_2') \quad (773)$$

Indeks  $\infty$  ukazuje na to da bi takva izmjena bila moguća tek u slučaju vrlo velike površine izmjenjivača,  $F_0 = \infty$ . Kod istosmjernog izmjenjivača s beskonačnom površinom  $F_0 = \infty$ , tem-



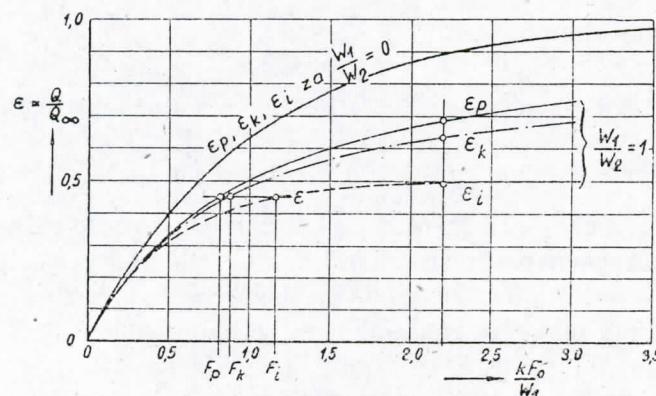
peratura će izjednačenja  $t_1'' = t_2''$  ležati negdje između  $t_1'$  i  $t_2'$ , sl. 236., pak će izmjenjena toplina biti znatno manja od one kod protusmjernog, a to je i manjak ove izvedbe. Kod izvedenih aparata s konačnom površinom  $F_0$  izmjenit će se neka toplina  $Q$ , koja je manja od  $Q_\infty$ , a omjer obih toplina definiramo kao iskoristivost topline

$$\varepsilon = \frac{Q}{Q_\infty}. \quad (774)$$

Iz (759) te iz (773) i (774) slijedi

$$\varepsilon = \phi \quad (775)$$

U sl. 245. pokazan je tok iskoristivosti topline  $\varepsilon_i$ ,  $\varepsilon_k$  i  $\varepsilon_p$  za neke vrijednosti  $\frac{W_1}{W_2}$  u ovisnosti od  $\frac{kF_0}{W_1}$ . Kako se vidi, najlošije iskorištenje topline ima kod inače istih vanjskih uvjeta ( $W_1$ ,  $W_2$ ,  $k$ ,  $F_0$ ) istosmjerni izmenjivač, zatim unakrsni, a najbolje protustrujni aparat. Kod unakrsnog i protustrujnog aparata



Sl. 245. Iskoristivost topline  $\varepsilon$  za sve tri vrste izmenjivača

$\varepsilon$  se kod povećanja površine  $F_0$  asymptotski približava vrijednosti 1. Zato se s unakrsnim aparatom može postignuti efekt protustrujnog, no to se mora naplatiti sa znatno većom površinom od one kod protustrujnog. Tek kad su vodene vrijednosti  $W_1$  i  $W_2$  vrlo različite, postaje  $\varepsilon$  za sva tri aparata jednako,

vidi liniju  $\frac{W_1}{W_2} = 0$ . Ista iskoristivost topline  $\varepsilon$  može se kod protustrujnog aparata postignuti sa primjetno manjom površinom ( $F_p$ ) nego li kod istosmjernog ( $F_i$ ) ili unakrsnog ( $F_k$ ). Zato je kod slične konstrukcije protustrujni aparat u nabavci jeftiniji od istosmjernog. Kod pogona sa  $\frac{W_1}{W_2} = 0$  (na pr. grijanje sa zasićenom parom  $W_2$ , pri čem je specifična toplina zasićene pare  $c_p = \infty$  a prema tome i  $W_2 = \infty$ ) nema razlike u iskoristivosti topline kod ove tri vrste aparata.

#### Stupanj djelovanja izmenjivača

Stupanj djelovanja  $\eta$  nekog izmenjivača omjer je postignutog stupnja iskorištenja topline  $\varepsilon$  prema  $\varepsilon_\infty = \phi_\infty$ , koji bi se postigao kod vrlo velike površine  $F_0 = \infty$ . Stupanj je djelovanja

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_\infty} = \frac{\phi}{\phi_\infty} \quad (776)$$

Uvrstivši vrijednosti za  $\phi$  i  $\phi_\infty$  dobivamo

$$\text{za istosmjerni aparat } \eta_i = \left(1 + \frac{W_1}{W_2}\right) \phi_i \quad (777)$$

$$\text{za protustrujni i unakrsni } \eta = \varepsilon = \phi \quad (778)$$

Prema tomu  $\phi$ -dijagrami za protusmjerno i unakrsno strujanje prikazuju sa svojim  $\phi$ -vrijednostima, neposredno i stupanj djelovanja  $\eta$  kod dotičnog pogona, dok se za istosmjerni aparat dotične vrijednosti  $\eta_i$  mogu očitati na ucrtanim pravcima  $\eta_i = \text{konst.}$

Sa čisto toplinskog gledišta poželjno bi bilo postignuti što veću vrijednost za  $\eta$ , pri čem je gornja granica  $\eta_{max} = 1$ . No obzirom na investicione troškove postojat će neka optimalna vrijednost  $\eta_{opt}$ , kod koje će izbor i pogon aparata biti najjeftiniji.  $\eta_{opt}$  može biti znatno manji od jedinice.

#### Najpovoljnija veličina površine

U praksi će najpovoljnija veličina aparata biti uslovljena ekonomskim uvjetima. Iako to više nije problem toplinske prirode, želimo se na nj osvrnuti, jer će inženjer često biti stavljen pred zadatak, da sam odabere veličinu površine  $F_0$ , odnosno da se sam odluci za izlazne razlike temperature.

Već prema namjeni aparata ocjenjivanje najpovoljnijih uvjeta morat će se vršiti s raznih gledišta. No u svakom će se slučaju kao troškovi pojavit amortizacija i ukamaćenje uložene glavnice za aparat, koji su u prvom približenju razmjerni veličini površine  $F_0$ . Ovim troškovima može stajati nasuprot dobit koju očekujemo od iskoristenja topline u aparatu i privodenja ove topline nekoj određenoj svrsi. No spomenutim troškovima pribrajat će se u nekim slučajevima troškovi u obliku ispale dobiti, kao na pr. smanjenje snage parnih turbina zbog nesavršenog kondenzatora. Kriteriji za troškove odnosno uštade moraju se od slučaja do slučaja posebno ocijeniti. Ovdje ćemo promotriti dva važna slučaja.

a) Dabit je razmjerna izmjenjenoj toplini

Takov slučaj imamo kod predgrijala uzduha u kotlu pomoću dimnih plinova, gdje se raspolaze otpadnom toplinom dima, koja je osuđena na propast ako se ne iskoristi u predgrijalu. Toplinu koju izmjenjujemo u predgrijalu možemo uštediti na gorivu, te je zato cijenimo sa  $\zeta_q \text{ Din}/\text{kcal}$ .

Neka je:

$\zeta_F \text{ Din}/\text{m}^2$  cijena površine izmjenjivača za  $1 \text{ m}^2$

$\zeta_q \text{ Din}/\text{kcal}$  vrijednost 1 kcal izmjenjene topline

$a$  — godišnji faktor amortizacije i ukamaćenja uložene glavnice, dakle u procentima  $100 a\%$ .

$x$  — vremensko iskoršćenje naprave, kao omjer pogonskih sati spram sveukupnih sati jedne godine ( $0 < x < 1$ ).  $8760 \text{ h/god}$  broj sati u godini.

Kod izmjenjivača sa  $Q \text{ kcal}/\text{h}$  bit će vrijednost godišnje iskoristene topline  $Q \cdot \zeta_q \cdot 8760 \cdot x \text{ Din}/\text{god}$ , ako se u godini dana naprava nalazi  $8760 \cdot x$  sati u pogonu. Investicioni troškovi terete izdatke s godišnjim iznosom od  $a \cdot \zeta_F \cdot F_0$ . Razlika obih iznosa daje godišnju uštedu  $U_g \text{ Din}/\text{god}$

$$U_g = Q \cdot \zeta_q \cdot 8760 \cdot x - a \cdot \zeta_F \cdot F_0. \quad (779)$$

Kako je od prije  $Q = W_1(t'_1 - t'_2)\phi$ , to dobivamo nakon preuređenja

$$U_g = 8760 \cdot x \cdot \zeta_q \cdot W_1(t'_1 - t'_2) \left( \phi - \frac{a \cdot \zeta_F}{8760 \cdot x \cdot \zeta_q \cdot k(t'_1 - t'_2)} \frac{kF_0}{W_1} \right) \quad (780)$$

Ovdje je faktor

$$\zeta = \frac{a \cdot \zeta_F}{8760 \cdot x \cdot \zeta_q \cdot k(t'_1 - t'_2)} \quad (781)$$

omjer amortizacionih i sličnih troškova aparata prema cijeni topline, koja bi se izmjenila na njegovoj površini u godini dana, pri razlici temperatura ( $t'_1 - t'_2$ ), uvezši u obzir vremenski faktor  $x$ . Time dobivamo

$$U_g = 8760 \cdot x \cdot \zeta_q \cdot W_1(t'_1 - t'_2) \left( \phi - \zeta \frac{kF_0}{W_1} \right). \quad (782)$$

Kod poznatih cijena i ostalih uvjeta ( $x, k, t'_1, t'_2$ ) faktor je  $\zeta = \text{konst}$ . U tom se slučaju izraz

$$d = \left( \phi - \zeta \frac{kF_0}{W_1} \right) \quad (783)$$

prikazuje u  $\phi$ -dijagramu kao razlika ordinata  $\phi$  - linije za  $\frac{W_1}{W_2} = \text{konst}$  sl. 246. i pravca  $\zeta \cdot \frac{kF_0}{W_1}$ , koji crtamo u spomenuti

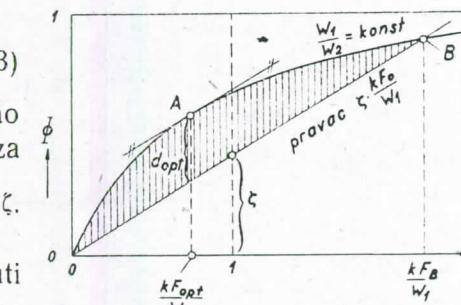
dijagram tako, da kod  $\frac{kF_0}{W_1} = 1$  Sl. 246. Najpovoljnija veličina površine.

nanesemo veličinu  $\zeta$ . Odmah se vidi da izraz  $\left( \phi - \zeta \frac{kF_0}{W_1} \right)$ , a time i ušteda  $U_g$  ponajprije raste s površinom  $F_0$ , i to do točke A. Tu se postizava najveća vrijednost  $d_{opt}$  ove diferencije da bi s dalnjim povećanjem površine opadala. U točci B investicioni su troškovi zbog velike površine  $F_B$  već toliko narasli, da se za njihovu amortizaciju troši sva dobit, tako da je  $d = 0$ .

Najveću uštedu imat ćemo za pogon koji je predočen točkom A, pak je

$$F_{opt} = F_A.$$

Točku A dobivamo tangentom paralelnom s pravcem  $\zeta \cdot \frac{kF_0}{W_1}$ , koju povlačimo na liniju  $\frac{W_1}{W_2} = \text{konst}$ . Aparat s tom površinom



$F_{opt}$ , dat će najveću godišnju uštedu  $U_{g\max}$

$$U_{g\max} = 8760 \cdot x \cdot z_q \cdot W_1 \cdot (t_1' - t_2') \cdot d_{opt} \text{ Din/god}, \quad (784)$$

gdje se veličina  $d_{opt}$  očita kao differenca označena u sl. 246. Povećanje površine iznad  $F_{opt}$  je neekonomično. Kako je iskoristivost topline  $\varepsilon = \phi$ , to je optimalna toplinska iskoristivost  $\varepsilon_{opt} = \varepsilon_A$ , a time i optimalni stupanj djelovanja  $\eta_{opt} = \eta_A$  najekonomičnijeg izmjenjivača u znatnoj mjeri ovisan o investicionim troškovima i cijeni topline, te može biti znatno manji od jedinice, vidi sl. 249.

b) **Najpovoljnija površina kondenzatora**

Kondenzator nekog parnog postrojenja ima zadatak, da temperaturu odušne pare  $W_2$  što više priladi temperaturi rashladne vode  $W_1$ . Zbog konačne veličine kondenzatora bit će temperatura pare  $T_2' = T_2'' = T_2$  viša od izlazne temperature vode  $T_1''$ , pak će stroj davati manje rada. Taj manjak rada je

$$\Delta AL = \frac{T_2 - T_1''}{T_2'} Q \approx \frac{T_2 - T_1''}{T_1'} Q \text{ kcal/h} \quad (785)$$

ako je  $Q$  toplina odvedena u kondenzatoru, dok temperaturni razlomak označuje termički stepen djelovanja CARNOT-ova procesa kod ovih niskih temperatura. Vrijednost je ovog izgubljenog rada  $z_{AL} \cdot \Delta AL \text{ Din/h}$ , gdje je  $z_{AL} \text{ Din/kcal}$  vrijednost 1 kcal mehaničkog rada. Sveukupni gubici pogona kondenzatora sastoje se u prvom približenju od amortizacionih troškova i od gubitaka zbog neiskorištenog rada. Prema tomu je godišnji gubitak  $G_g \text{ Din/god}$

$$G_g = a \cdot z_F \cdot F_0 + z_{AL} \cdot \frac{T_2 - T_1''}{T_1'} Q \cdot 8760x \text{ Din/god}. \quad (786)$$

Iz prije izведенih jednadžbi može se pokazati, da je

$$t_2' - t_1'' = (t_1'' - t_1) \frac{1 - \phi}{\phi} = \frac{Q}{W_1} \frac{1 - \phi}{\phi}, \quad (787)$$

pa kad se to uvrsti u gornju jednadžbu, dobiva se nakon preuređenja godišnji gubitak u  $\text{Din/god}$

$$G_g = 8760 \cdot x \cdot z_{AL} \cdot Q \cdot \left( \frac{Q}{W_1 T_1'} \right) \left\{ \frac{a \cdot z_F}{8760 \cdot x \cdot z_{AL} \cdot k \cdot T_1'} \right. \\ \left. \left( \frac{W_1 T_1'}{Q} \right)^2 \cdot \frac{k F_0}{W_1} + \frac{1 - \phi}{\phi} \right\}. \quad (788)$$

Ovaj gubitak bit će najmanji, kad je izraz u velikoj zagradi najmanji. Ako zbog kratkoće označimo sa

$$\zeta = \frac{a \cdot z_F}{8760 \cdot x \cdot z_{AL} \cdot k \cdot T_1'} \left( \frac{W_1 T_1'}{Q} \right)^2 \quad (789)$$

nastupit će najmanji gubici onda, kad je izraz

$$x - \zeta \cdot \frac{k F_0}{W_1} + \frac{1 - \phi}{\phi} = \zeta \frac{k F_0}{W_1} + \left( \frac{1}{\phi} - 1 \right) = \text{minimum}. \quad (790)$$

Ovaj se minimum pronala-

Iza jedn. (786) na str. 378 umetni ovu nadopunu:

Za praktične probleme treba uzeti u obzir, da se od Carnotovog rada  $\Delta AL$  može u turbogeneratoru dobiti tek jedan dio  $\eta \cdot \Delta AL$  kao električka energija. Koeficijentom  $\eta$  obuhvaćeni su gubici u turbinskom kolu i u dinamu. Osim toga uredaj ne radi trajno s punim opterećenjem  $N$ , već s promjenljivim djelimičnim opterećenjem  $N_d$ . To se očituje u godišnjoj proizvedenoj energiji  $E \text{ kWh}$ , a ova je manja od maksimalne  $E_{max}$ , koja bi se proizvela, kad bi uredaj čitave godine radio punim opterećenjem  $N$ . Zato je godišnji faktor opterećenja

$$\omega = \frac{E}{E_{max}}$$

manji od jedinice pak se kod elektrana obično kreće između  $\omega = 0,28$  do  $\omega = 0,4$ .

Može se pokazati, da se spomenuti utjecaji mogu uzeti u obzir, kad se za faktor  $x$  u (786) i t. d. uvrsti izraz

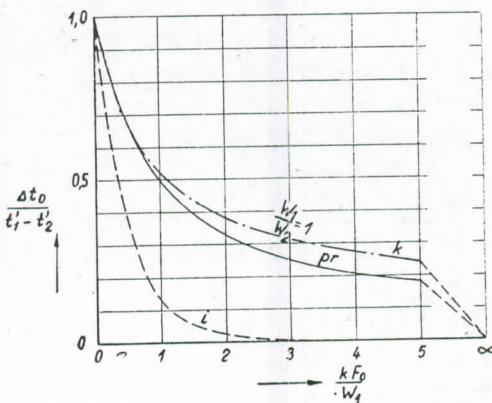
$$x \approx \eta_m (\omega^2 + 0,04)$$

gdje je  $\eta_m$  prosječna vrijednost spomenutog stupnja djelovanja  $\eta$  za razna opterećenja turboagregata, dakle nekako  $\eta_m \approx 0,6$ , dok je faktor godišnjeg opterećenja najčešće  $\omega = 0,28$  do  $0,4$ , već prema namjeni uređaja. Prema tome za određivanje veličine  $x$  nije potrebno poznavati vremenski tok promjene opterećenja  $N_d/N$ , već je dovoljno znati godišnji (integralni) faktor opterećenja  $\omega$ .

### Usporedba istosmjernog, unakrsnog i protusmjernog izmjenjivača

U većini je slučajeva poželjno, da se temperature obih struja međusobno što potpunije izmijene (izmjenjivači temperaturne). To bi se u potpunosti moglo postići samo kod unakrsnog i protusmjernog strujanja, kod beskonačne površine  $F_0 = \infty$  i to samo u slučaju kad je  $\frac{W_1}{W_2} = 1$ . Kod  $F_0 = \infty$  a pri  $\frac{W_1}{W_2} < 1$  može se izjednačenje temperaturne postići samo na jednom okrajku, dok će se na drugom okrajku temperaturne razlikovati za konačni iznos. Kod istosmjernog strujanja jedva se i može govoriti o izmjeni temperaturne budući da ovdje temperature obih struja teže k nekoj srednjoj temperaturi. To je i razlog, da je kod ovog aparata iskorištenje topline mnogo lošije.

Učin izmjenjivača ne može se po volji povećavati time, da se povećava površina. Najmanja razlika temperatura  $\Delta t_0$  na jednom od okrajaka postaje uskoro tako malena, da je daljnje povećanje površine bez efekta. U sl. 248. prikazan je postignuti odnos temperatu-



Sl. 248. Temperaturna razlika  $\Delta t_0$  na okrajku izmjenjivača za sve tri vrste.

na pr. para koja kondenzira) vladaju se sve tri vrste aparata i u tom pogledu jednako, tako da između njih nema razlike.

U većini je slučajeva poželjno, da se temperature obih struja međusobno što potpunije izmijene (izmjenjivači temperaturne). To bi se u potpunosti moglo postići samo kod unakrsnog i protusmjernog strujanja, kod beskonačne površine  $F_0 = \infty$  i to samo u slučaju kad je  $\frac{W_1}{W_2} = 1$ . Kod  $F_0 = \infty$  a pri  $\frac{W_1}{W_2} < 1$  može se izjednačenje temperaturne postići samo na jednom okrajku, dok će se na drugom okrajku temperaturne razlikovati za konačni iznos. Kod istosmjernog strujanja jedva se i može govoriti o izmjeni temperaturne budući da ovdje temperature obih struja teže k nekoj srednjoj temperaturi. To je i razlog, da je kod ovog aparata iskorištenje topline mnogo lošije.

Učin izmjenjivača ne može se po volji povećavati time, da se povećava površina. Najmanja razlika temperatura  $\Delta t_0$  na jednom od okrajaka postaje uskoro tako malena, da je daljnje povećanje površine bez smisla, nego li kod protusmjernog. Za slučaj da je  $\frac{W_1}{W_2} = 0$  (kad je  $W_2$

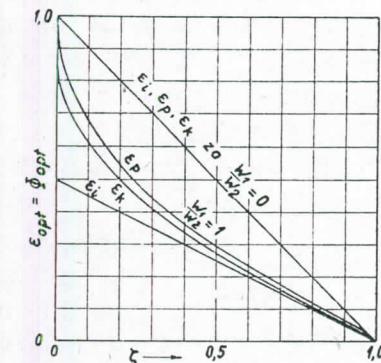
Optimalna toplinska iskoristivost  $\varepsilon_{opt}$  za izmjenjivače, za koje vrijedi račun ekonomije po (782), prikazana je u ovisnosti od omjera troškova  $\zeta$  u sl. 249. Ona je za isto  $\zeta$  (jednake cijene) najpovoljnija za protustrujni, a najlošija za istosmjerni aparat.

No kod pogona sa  $\frac{W_1}{W_2} = 0$  i optimalna je toplinska iskoristivost za sve tri vrste aparata jednaka. Izvedba unakrsnog aparata bit će međutim često znatno jeftinija po  $m^2$  površine, tako da je onda i  $\zeta_k < \zeta_p$ . Zato se vrlo lako može pojaviti slučaj kad će biti i optimalne vrijednosti  $\varepsilon_k > \varepsilon_p$ , tako da je tu unakrsni aparat povoljniji od protustrujnog. Kad će to biti, to ovisi o zadanim prilikama, te se mora za svaki zadani slučaj posebno ispitati. Općenito se može kazati jedino to: da bi unakrsni aparat bio povoljniji od protustrujnog, moraju amortizacioni troškovi unakrsnog aparata spram onih protustrujnog biti relativno to niži, što je viši optimalni stepen iskoristivosti  $\varepsilon_p$ .

### Zaključne primjedbe tehničkim izmjenjivačima

Prepostavka, da su veličine  $W_1$ ,  $W_2$  i  $k$  duž aparata konstantne, ponekad neće biti ni približno ispunjene. Tako će se na pr. kod hlađenja vlažnoga uzduha ispočetka taložiti veća količina vlage, a potkraj manja, a to ima za posljedicu da se duž aparata u znatnoj mjeri mijenja i vodena vrijednost  $W$  i koeficijent prelaza topline  $k$ . U takvim slučajevima treba računske operacije rasčlaniti na područja, unutar kojih se može računati s donekle jednoličnim vrijednostima za  $W$  i  $k$ .

Navedene tri vrste aparata nisu jedine, koje se upotrebljavaju u praksi. Često se kombinira unakrsno strujanje sa istosmjernim ili sa protusmjernim, ili se pak za vrijeme unakrsne izmjenje topline strujnice jedne ili druge struje trajno miješaju, te tako ujednoličuju temperaturu. Svi ovi slučajevi dat će druge



Sl. 249. Optimalna toplinska iskoristivost za sve tri vrste.

numeričke vrijednosti funkcije  $\phi$ , ali je svima zajedničko da se u načelu mogu proračunati na isti način, kako smo to gore prikazali.

Kod primjene literature čitalac će pored funkcija, koje su slične ovdje upotrebljenoj funkciji  $\phi$ , naići uvek još i na proračun pomoću pojma t. zv. srednje logaritmičke razlike temperature. Kako smo gore prikazali, zavođenje takovog pojma nije potrebno, jer se čitav proračun može bez njega jednostavnije provesti. To je i razlog, da smo ovdje odustali od prikaza i upotrebe inače uvriježenog pojma srednje logaritmičke razlike temperatura.

### Zračenje topline

Prenos energije zračenjem vrši se elektromagnetskim valovima najrazličitijih dužina  $\lambda$  (boja). Pri nekom zračenju može načelno sudjelovati spektar svih dužina valova od  $\lambda = 0$  do  $\lambda = \infty$ . Prenošena energija razdijelit će se već prema karakteru zračenja nejednoliko na razne dužine vala, pak će jedamput biti glavni prenosioci energije valovi veće dužine, a drugi put valovi male dužine. Sve će to ovisiti od prilika kod kojih se zračenje rodilo, ali i o kasnijim utjecajima i sudbini kojoj su zrake bile izvrgnute (možebitna djelomična absorpcija i sl.). Čitavo polje dužina valova dijeli se obično u ova područja

Područje dužine vala	Oznaka
Kraća od $5 \cdot 10^{-6} \text{ m}\mu$	Visinsko zračenje
$5 \cdot 10^{-4}$ do $10^{-2} \text{ m}\mu$	$\gamma$ -zrake
$10^{-3}$ " $20 \text{ m}\mu$	Röntgen-ove zrake
$20$ " $400 \text{ m}\mu$	Ultravioletne zrake
$400$ " $800 \text{ m}\mu$	Zrake svjetlosti
$0,8$ " $400 \mu$	Toplinske zrake
$100\mu$ " $x \text{ km}$	Električki valovi

Ova razdioba neka nas ne zavede na neispravnu pretpostavku, kao da bi toplinsko zračenje, t. j. zračenje kojega odašilje neko užareno tijelo, sadržavalo samo dužine vala  $\lambda = 0,8$  do  $400 \mu$

I kod ovog se zračenja mogu pojaviti zrake sviju drugih dužina valova, tako na pr. svjetlosne zrake, samo što se pretežni udio energije prenosi dužinama vala unutar označenog područja.

Jednoznačna nepromjenljiva karakteristika „boje“ neke zrake nije zapravo njena dužina vala  $\lambda$ , već njena učestalost titraja (frekvencija)  $v \text{ sek}^{-1}$ , koja je s dužinom vala skopčana brzinom rasprostiranja  $c [\text{m/sek}]$

$$\lambda v = c. \quad (791)$$

Pri prolazu kroz razne medije učestalost se  $v$  ne mijenja, dok su  $c$  i  $\lambda$  promjenljive. U vakuumu je skoro točno  $c = 3 \cdot 10^8 [\text{m/sek}]$ , pak je za toplinske zrake  $v = 8 \cdot 10^{13}$  do  $4 \cdot 10^{16} \text{ sek}^{-1}$ . Kako se u području naše primjene brzine rasprostiranja u raznim medijima mnogo ne razlikuju, to ćemo se za označivanje „boje“ neke zrake zadovoljiti zornjom dužinom vala  $\lambda$ .

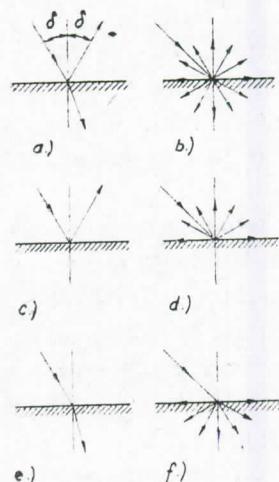
Zračenje, koje nadolazi od nekog tijela sastoji se općenito od zraka, koje su se reflektirale od površine tog tijela (odbojno zračenje), zatim od zraka, koje je tijelo možda propustilo (ove se kod čvrstih tjelesa mogu obično zanemariti) te napokon od zraka kojima je ishodište u samom tijelu, t. j. koje tijelo emitira. Sveukupnu energiju, koju na taj način odzračuje  $1 \text{ m}^2$  površine tijela na sat, nazivamo „svjetločom površine“.

Emitirano zračenje možemo razlikovati od propuštenog odnosno od odbojnog zračenja na taj način, da na neki način ugasimo zračenje koje pada na tijelo, na pr. zasjenjivanjem. Odmah će nestati i odbojno kao i propušteno, ali će i dalje postojati emitirano zračenje.

Akt emisije sam je po sebi vrlo zamršen, pak je ovisan kako o stanju supstance, koja emitira, tako i o trenutačnim kemijskim promjenama, koje se zbivaju u tijelu. No po teoremu PREVOST-a važi iskustveni stavak: Emisija nekog prostornog elementa ovisi isključivo o pojavama u nutrini tog elementa.

**Temperaturno zračenje** Bavit će se samo takvim zračenjem, kojega je sastav ovisan osim o prirodi substance koja zrači, samo još o njenoj temperaturi, ali koji je njome jednoznačno određen. Ovakvo zračenje zovemo temperaturnim, za razliku od drugih vrsta zračenja, kao što su fluo-

rescenza i t. d. koja samom temperaturom nisu jednoznačno određena. I sa zračenjem, koje je izazvano kemičkim promjenama može se postupati kao sa temperaturnim zračenjem, ako je tok kemijske reakcije dovoljno jednoznačno određen temperaturom. Sve se to može odnositi naravno samo na emitirano zračenje promatranog tijela, a ne i na odbojno ili propušteno, budući da ova imaju svoja ishodišta u drugim tjelesima od možda sasvim različite temperature.



Sl. 250. Svojstva zračenja površine a) glatka površina, b) zagasita (hrapava), c) sjajna (zrcalna), d) bijela, e) ne postoji, f) crna.

Neka površina može se spram raznobojnih zraka (razno  $\lambda$ ) vladati na razne načine. Površina, koja je glatka za zrake dugih valova, može za one kratkih valova biti zagasita. Svojstva neke površine ovise uvijek od obih medija, koji graniče, a ne samo od jednog od njih, pak se to ne smije pustiti iz vida.

**Refleksija, absorpcija, propusnost** Od energije, koju prenosi snop zraka, jedan će se dio  $r$  reflektirati od dozračene površine tijela, jedan će se dio  $a$  absorbiti pri prolazu kroz tijelo, dok će ostatak  $d$  početne energije proći kroz tijelo kao oslabljena zraka. Pri tom je

$$r + a + d = 1 \quad (792)$$

Ovdje je  $r$  koeficijent refleksije,  $a$  koeficijent absorpcije,  $d$  koeficijent dijatermije (propusnosti) promatranoga tijela. Skoro sva kruta tijela absorbiraju toplinsko zračenje, koje u njih prodire, skoro potpuno već u dubini od nekoliko  $\mu$ . U tom je slučaju tijelo praktički nepropusno za zračenje, ono je adijatermano,  $d = 0$ . Tu se onda može govoriti o stijenkama koje absorbiraju, pak je  $a$  absorpcioni koeficijent ove stijenke. Ova je veličina  $a$  ovisna o prirodi stijenke, te o njenoj temperaturi, i od dužine vala  $\lambda$ , ali je neovisna o intenzitetu dozračenog zračenja.

Promotrit ćemo neko za zračenje nepropusno tijelo  $A$  ( $d = 0$ ), sl. 251., koje je opkoljeno stijenkama neke šupljine. Stijenke se sastoje možda od raznih tvari, ali sve ove neka su nepropusne za zračenje. Time se tijelo  $A$  izvrgava nekom zračenju, kojim se njegovoj površini dovodi energija  $E' \text{ kcal/sat}$ . Od dozračene se energije  $E'$  reflektira  $rE'$ , jedan drugi dio  $aE'$  se absorbira i uvrštava se u obliku unutarnje energije tijelu. Tijelo samo emitiра na račun svoje unutarnje energije  $E \text{ kcal/sat}$ , a njena količina i vrsta određene su materijalom i temperaturom tog tijela. Tijelo  $A$  neka je u ravnoteži sa stijenkama šupljine, t. j. neka su im temperature jednake. U tom slučaju moraju energije koje tijelu dovodimo biti jednake s onima, koje od njega odvodimo. U protivnom bi se slučaju temperature same od sebe promjenile, što bi zbog pretpostavljene početne jednakosti temperature bilo u protivnosti s drugim glavnim stavkom termodinamike. Zato je

$$E' = E + rE' \quad (793)$$

gdje je po (792) sa  $d = 0$

$$E' = rE' + aE', \quad (794)$$

a time

$$\frac{E}{E'} = a \leq 1. \quad (795)$$

Prema ovome je u toplinskoj ravnoteži omjer emitirane energije spram dozračene energije zračenja jednak absorpcionom koeficijentu  $\alpha$  stijenke. Mogli bismo pokazati da to vrijedi kako za sveukupno zračenje, tako i za svaku dužinu vala nekog snopa pojedinačno.

**Crno tijelo** Tijelo, koje potpuno absorbira sve vrste zraka (a = 1 za sve dužine vala), zovemo potpuno crnim. Kod njega je u toplinskoj ravnoteži emitirana energija jednaka dozračenoj,  $E = E'$ . Budući da nema crnijeg od crnog tijela, a kako je osim toga kod temperaturnog zračenja energija i vrsta zračenja jednoznačno određena temperaturom, to vidimo da je zračenje  $E'$ , koje je u ravnoteži s nekim crnim tijelom zadane temperature, uvijek jednako, te da u svakom području dužina vala prenosi neku sasvim određenu količinu energije, koja pripada dotičnoj dužini vala. Ovo je zračenje osim toga identično sa zračenjem  $E_c$ , kojega odašilje ovakvo crno tijelo zadane temperature. Zato ga ukratko zovemo crnim zračenjem,  $E' = E_c$ .

Da bismo neko tijelo mogli nazvati crnim, mora ono zadovoljiti tri neovisna uvjeta: a) Površina mu mora biti crna, t. j. ona ne smije reflektirati,  $r = 0$ . Kako su svojstva površine ovisna o obim graničnim medijima, to vidimo, da ni crnoća nekog tijela ne može ovisiti isključivo samo o njemu, već da je ovisna i o neposrednom susjedstvu. b) Već prema absorpcionim svojstvima tijela i traženom stupnju crnoće moraju njegove razmjere prekoračiti stanovitu veličinu, kako nebi jedan dio zračenja neabsorbiran prošao kroz tijelo. Tako će plinovi, koji su u tankim slojevima propusni za zračenje — dijatermani, kad su nagomilani u velikim masama, djelovati kao crno tijelo, kao što su na pr. crni plinski oblaci u svemiru. S druge pak strane ne možemo sítne čestice ugljena u uglijenoj prašini smatrati crнима, jer su im dimenzije tako malene, da jedan dio zračenja prolazi kroz njih neabsorbiran. c) Raspršivanje zračenja u unutrašnosti mora biti primjeren slabo, da raspršeno zračenje nebi odmah opet prodrlo neabsorbirano kroz površinu napolje.

### Zračenje iz šupljine.

#### Kirchhoff-ov stavak

ne go li ona  $E_c$  crne stijenke iste temperature. Omjer

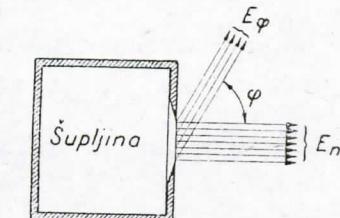
$$\epsilon = \frac{E}{E_c} \quad (796)$$

názivamo emisionim omjerom ili emisionim koeficijentom prirodne stijenke. Budući da je ovdje absorpcioni koeficijent  $a$  neovisan od intenziteta dozračenog zračenja, to (795) mora važiti i za slučaj, da je dozračeno zračenje crno,  $E' = E_c$ , pak je

$$\frac{E}{E_c} = a. \quad (797)$$

Iz (797) i (795) slijedi, da se u nekoj šupljini, sl. 251. u ravnoteži uvijek ustaljuje crno zračenje  $E' = E_c$ , bez obzira na vrstu stijenki <sup>1)</sup>, što je od naročite važnosti za eksperimentalno proizvođenje crnog zračenja.  $E'$  sastojalo se iz emitiranih i iz reflektiranih zraka stijenke. Stijenke ove šupljine podržavamo na jednoličnoj temperaturi. Na jednom mjestu takve stijenke predviđen je mali otvor, sl. 252. Zračenje, koje nadolazi iz ovog otvora, bit će crno zračenje, koje sad možemo eksperimentalno ispitivati i upotrijebiti. Ono je u toliko crnije što je veća šupljina u poredbi s otvorom i što je jednoličnija temperatura stijenki.

Da se neki otvor pred šupljinom vlada kao crno tijelo vidi se najbolje slijedećim razmatranjem. Zraka koja nadire izvana na otvor prodire neoslabljena u šupljinu. Na unutarnjoj se stijenci djelomice absorbira, a djelomice reflektira. Ovakve refleksije i absorpcije jedne te iste zrake ponavljaju se bezbroj puta na unutarnjoj stijenci, prije nego li ova sasvim oslabljena zraka pogodi na otvor za izlaz. Što je otvor u omjeru spram šupljine manji, to teže će takva zraka naći izlaz, tako da će već prije praktički potpuno



Sl. 252. Zračenje šupljine

<sup>1)</sup> Stijenke jedino ne smiju biti propusne za zračenje.

utrnuti. Po tome vidimo da takav otvor pred šupljinom pokazuje sva tri bitna svojstva, koja su označavala crno tijelo.

Iz (796) i (797) slijedi neposredno KIRCHHOFF-ov stavak, po kojem je za svako tijelo pri ravnotežnom zračenju

$$\varepsilon = a, \quad (798)$$

t. j. emisioni koeficijent  $\varepsilon$  i absorpcioni koeficijent  $a$  neke stijenke brojčano su jednaki.

Za crnu stijenku je kako  $\varepsilon_c = 1$ , tako i  $a_c = 1$ . Stijenku zovemo sivom, kad ima takva svojstva da od zraka bilo koje dužine vala absorbira energije proporcionalne prenošenim energijama dotične dužine vala, t. j. kad je za sve dužine vala  $a_\lambda = \text{konst}$ , a prema (798) i  $\varepsilon_\lambda = \text{konst}$ . Zračenje sivoga tijela kvalitativno odgovara sastavu crnoga zračenja, samo je prenošena energija za sve dužine vala u istom omjeru oslabljena.

**STEFAN** je empirijski našao zakon, **Stefan-Boltzmann-ov zakon** kojega je BOLTZMANN kasnije teoretski opravdao da je energija  $E_c \text{ kcal/m}^2\text{h}$ , koju neka crna stijenka odzračuje u jednu polovicu prostora jednaka

$$E_c = \sigma T^4 [\text{kcal/m}^2\text{h}]. \quad (799)$$

Ovdje je po pokušima i po teoriji univerzalna konstantna

$$\sigma = 4,96 \cdot 10^{-8} [\text{kcal/m}^2\text{h K}^4]. \quad (800)$$

Za praktičko računanje prikladnije je pisati

$$E_c = C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4 [\text{kcal/m}^2\text{h}], \quad (801)$$

gdje je

$$C_c = 100^4 \cdot \sigma = 4,96 [\text{kcal/m}^2\text{h}]. \quad (802)$$

Za neko je sivo tijelo odzračena energija

$$E = C \left( \frac{T}{100} \right)^4 = \varepsilon C_c \left( \frac{T}{100} \right)^4, \quad (803)$$

gdje je obzirom na (796)

$$C = \varepsilon C_c. \quad (804)$$

Za tehničke račune može se dovoljnim približenjem uzeti  $\varepsilon = \text{konst}$  za sve dužine vala, dakle tjelesa smatrati sivima, u koliko se ne radi o plinovima ili o sjajnim metalima.

Vidimo da odzračena energija vrlo naglo postaje veća s porastom temperature.

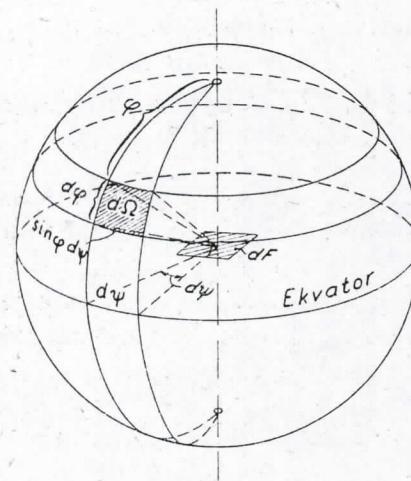
**Lambert-ov kosinusov zakon** Otvor šupljine u sl. 252. odašilje crno zračenje u svim smjerovima jedne polovice prostora. Najveći iznos energije  $E_n$  pripada pri tom zrakama usmjerjenim normalno na ravninu otvora, dok je energija odzračena u smjeru ove same ravnine jednaka nuli. U bilo kojem smjeru prema normali zrači se energija

$$E_\varphi = E_n \cos \varphi, \quad (805)$$

što je posljedica smanjenja prividne veličine tog otvora, gledanog u označenom smjeru. Zato će užarena kugla nekog crnog tijela, kad je gledamo iz daljine, izgledati kao ravna ploča, jednolično osvjetljena do ruba (sunce). Prirodna tijela zagasite površine, s  $\varepsilon < 1$ , ne pokoravaju se sasvim, ali praktički dovoljno točno ovom LAMBERT-ovom zakonu, u koliko se ne radi o sjajnim metalima.

Gustoća se zračenja smanjuje s kvadratom udaljenosti od izvora zračenja. No budući da prividna veličina neke površine također pada s kvadratom udaljenosti, to svjetloća površine neke ploče ostaje neovisna o udaljenosti iz koje se promatra. To vrijedi naravno uz pretpostavku da se zrake na svom putu ne absorbiraju u nekom drugom mediju. Samo iz ovog razloga možemo vidjeti zvijezde na tako ogromne udaljenosti, i ako su im se pločice smanjile na praktički matematsku točku. To što vrijedi za vidljivo zračenje, vrijedi naravno i za toplinsko zračenje. Tek zato možemo mjeriti temperaturu udaljenih tjelesa pirometrima za zračenje, a da ne moramo uzeti obzir na udaljenost.

**Zračenje u polutku prostora** Da bismo dobili vezu između zračenja okomitog na neki plošni element sa sveukupnim zračenjem u čitavu polutku iznad tog elementa,



Sl. 253. Odzračivanje u jednu polutku.

$\varphi$  i geografskom dužinom  $\psi$ , a vrh mu leži u dotičnoj točci plošnog elementa  $dF$ , dakle u središtu kugle. Otvorni je ugao stošca po sl. 253., zbog  $r = 1$

$$d\Omega = \sin \varphi d\psi d\varphi. \quad (806)$$

Skup svih stožaca zračenja sa vrhovima u  $dF$  i sa zajedničkim otvorom  $d\Omega$  sačinjava jedan snopić zračenja. Stošci zračenja rasprostranjuju se iz svih točaka elementa  $dF$  u svim smjerovima s općenito različitim intenzitetom. No svi su stošci u promatranom snopiću međusobno identični, izuzev veličine višega reda, samo kad smo  $dF$  odabrali dovoljno maleno. Budući da supstanca koja zrači zauzima neki konačni prostor, to zračenje ne može nikad poteći iz jedne točke, već samo iz nekog, makar kako malenog prostornog elementa. Baš iz tog razloga ne može se jednim jedinim stošcem zračenja prenositi konačni iznos zračene energije. Tek skup svih stožaca sa zajedničkom bazom  $d\Omega$ , a s vrhovima u raznim točkama elementa  $dF$  daju neku konačnu, makar i vanrednu sitnu količinu zračene energije. Ovo je razlog, da nema zračenja samo u jednom smjeru, t. j. da strogo paralelno zračenje uopće ne postoji, već

promotrimo sliku 253. Oko plošnog elementa  $dF$ , koji zrači, opišimo kuglu s radijusom  $r = 1$ . Normala elementa  $dF$  neka čini polnu os kugle, a ravnina položena kroz sam plošni element neke je ekvatorna ravnina. Veličina plošnog elementa  $dF$  beskonačno je mala prema dimenzijama kugle. Svaka točka plošnog elementa  $dF$  zrači u svim smjerovima, dakle i u smjeru zračnog stošca, kojemu je otvorni ugao  $d\Omega$  beskonačno mali. Položaj ovog stošca određen je polnim razmakom  $\varphi$  i geografskom dužinom  $\psi$ , a vrh mu leži u dotičnoj točci plošnog elementa  $dF$ , dakle u središtu kugle. Otvorni je ugao stošca po sl. 253., zbog  $r = 1$

samo takovo, u kojem pojedine zrake makar i sasvim slabo divergiraju i konvergiraju. Iz istog razloga može se nekom lećom ili sfernim zrcalom dobiti slike sunca samo mala ploha, a nikada kao točka.

Energiju, koja se prozračuje kroz otvor stošca  $d\Omega$  dobiva se, uvezši u obzir LAMBERT-ov zakon, kao izraz

$$E_n \cos \varphi d\Omega dF d\tau = E_n \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\psi dF d\tau [kcal], \quad (807)$$

gdje je  $E_n [kcal/m^2 h]$  emitirana energija mjerena u smjeru okomitom na plohu  $dF$ , a  $d\tau [h]$  neki interval vremena. U slučaju, da ploha reflektira difuzno (zagasita površina), može se na mjesto emitirane energije  $E_n$  u gornju jednadžbu uvrstiti i sveukupnu svjetloču površine u koliko se ova pokorava LAMBERT-ovom zakonu.

Sveukupnu energiju, koja je odzračena u gornju polutku dobit ćemo integracijom od (807). Ako ovu energiju svedemo, kako je to običaj, na jedinicu površine i jedinicu vremena, to će iz jednadžbe nestati  $dF$  i  $d\tau$  pak dobivamo za zračenje u gornju polutku

$$E = \int_{\psi=0}^{2\pi} \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} E_n \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\psi = \pi E_n [kcal/m^2 h]. \quad (808)$$

Prema tomu je sveukupno zračenje neke plohe u jednu polutku za faktor  $\pi$  jače nego li zračenje  $E_n$  u smjeru normale.

Kod odstupanja od LAMBERT-ovog zakona trebalo bi u (807) uvrstiti kao faktor emisioni koeficijent  $\epsilon$  smjera  $\varphi$ ,  $\epsilon = f(\varphi)$ , sl. 256., a to bi tek u rijetkim slučajevima omogućilo integraciju.

I kod crnog zračenja vrijedi

$$E_c = \pi E_{cn}, \quad (809)$$

gdje indeks  $_c$  opet označuje zračenje u smjeru normale.

#### Razdioba energije u spektru

Razdiobu energije zračenja na razne dužine vala pronašao je na temelju svoje kvantne teorije M. PLANCK, koji je za prirodno (nepolarizirano) crno zračenje dobio

$$J_{c\lambda T} = \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{2}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}. \quad (810)$$

Ovdje je

$$J_{c\lambda T} = \frac{dE_{cn}}{d\lambda} [\text{kcal}/m^3 \text{h}] \quad (811)$$

intenzitet zračenja jednobojnog snopa zraka dužine vala  $\lambda$ , koji odašilje pored drugih zraka crna stijenka temperature  $T$ , u smjeru okomitom na svoju površinu. Pri tom je

$$\left. \begin{aligned} c &= 1,0794 \cdot 10^{12} \text{ m/h} = 2,9985 \cdot 10^{10} \text{ cm/sek brzina svjetla} \\ h &= 4,33 \cdot 10^{-41} \text{ kcal/h PLANCK-ov elementarni kvant} \\ k &= 3,28 \cdot 10^{-27} \text{ kcal/K BOLTZMANN-ova konstanta} \end{aligned} \right\} \quad (812)$$

Energiju, koju odašilje  $1 \text{ m}^2$  površine stijenke u okomitom smjeru na jednu stranu, dobivamo integracijom preko svih dužina vala

$$E_{cn} = \int_{\lambda=0}^{\infty} J_{c\lambda T} d\lambda, \quad (813)$$

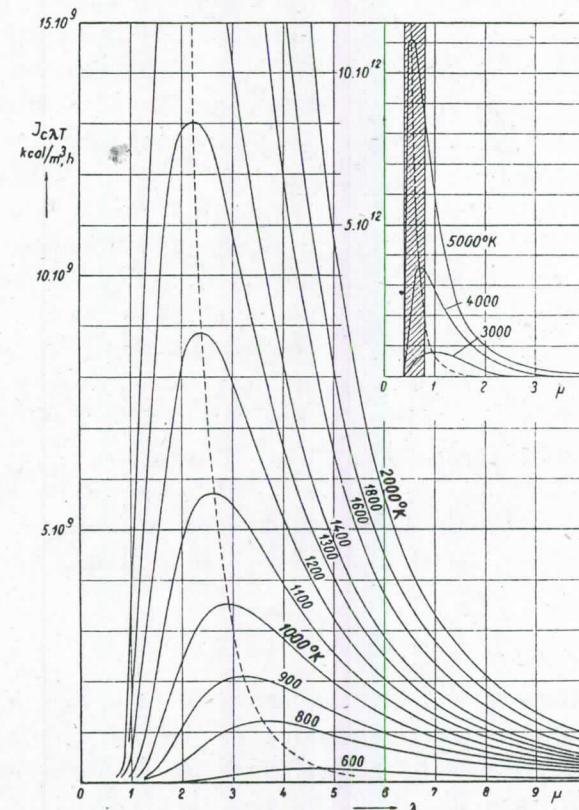
odakle se pomoću (810), (809) i (812) može dobiti STEFAN-BOLTZMANN-ov zakon (799) kao sjajna potvrda PLANCK-ove jednadžbe. Iz (811) slijedi

$$dE_{cn} = J_{c\lambda T} \cdot d\lambda [\text{kcal}/m^2 \text{h}], \quad (814)$$

a odavle slijedi da se neki konačni iznos energije  $dE_{cn}$  može prenosi samo pri  $d\lambda > 0$ , dakle samo unutar pojasa, koji u spektru ima konačnu širinu. Zato mora i jednobojno (monohromatsko) zračenje obuhvaćati područje dužina valova konačne širine, sl. 255. Strogo monohromatsko zračenje ne postoji.

Tok intenziteta zračenja prema (810) prikazan je u ovisnosti vala  $\lambda$  za neke temperature u sl. 254. Površina ispod jedne linije  $T = \text{konst}$  predviđa energiju, koju odašilje zračenjem crna stijenka dotične temperature  $T$ , što slijedi iz (813). Ova je energija vrlo nejednolično razdijeljena na razne dužine vala. Za tehnički najvažnije temperature od 500 do 1500°K pa-

daju pripadni maksimumi u područje dužina vala između  $\lambda = 2$  do  $6 \mu$ . Maksimum se intenziteta pomjerava s porastom tempe-



Sl. 254. Razdioba energije u normalnom spektru (crno zračenje).  
Prema M. Planck-u.

ratura k manjim dužinama vala, da bi pri 5000° do 6000° (temperatura sunčeve površine) pao u područje između 400 do 800  $\mu\mu$  (vidljiva svjetlost). U sl. 254. ovi su maksimumi spojeni crtanom linijom. Položaj ovih maksimuma može se odrediti iz (810) poznatim uvjetom za ekstreme

$$\frac{dJ_{c\lambda T}}{d\lambda} = 0,$$

odakle se diferencijacijom dobiva

$$-5 + \frac{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1}{e^{\frac{hc}{k\lambda T}} - 1} \cdot \frac{hc}{k\lambda T} = 0. \quad (815)$$

Pokušavanjem dobivamo rješenje ove jednadžbe

$$\left( \frac{hc}{k\lambda T} \right)_{J_{max}} = 4,956 \quad (816)$$

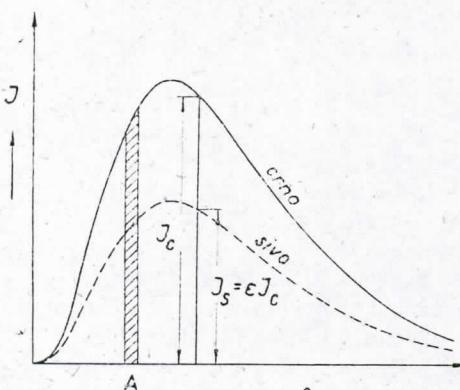
odakle s vrijednostima za  $c$ ,  $h$  i  $k$  za  $J_{max}$  dobivamo dužinu vala kod koje se pojavljuje maksimum intenziteta

$$\lambda_{J_{max}} = \frac{0,00288}{T} [m] = \frac{2880}{T} [\mu]. \quad (817)$$

Ovo je WIEN-ov zakon pomjeranja maksimuma intenziteta u normalnom spektru. Za  $T = 5600 K$ , (temperatura površine sunca), pada maksimum intenziteta u područje svjetlosnih zraka, jer je  $\lambda = \frac{2880}{5600} \approx 0,51 \mu$ , dok za  $T = 1500 K$  (temperatura plama), pada taj maksimum u područje toplinskih zraka jer je  $\lambda = \frac{2880}{1500} \approx 2 \mu$ . Pronalaženjem položaja maksimuma intenziteta u spektru može se zaključiti, kolika je temperatura dalekih užarenih tjelesa (temperature zvijezda).

**Zračenje prirodnih tijela** PLANCK-ova razdioba energije u normalnom spektru daje gornju granicu postizivog intenziteta temperaturnog zračenja dotične dužine vala pri zadanoj temperaturi. Ne postoji tijelo, koje bi u bilo kojoj boji (dužini vala) moglo intenzivnije zračiti. Jedino zračenjem idealne šupljine (crno zračenje) postizava ove intenzitete kod svih dužina vala.

Siva tjelesa zrače s intenzitetom, koji je kod svih dužina vala smanjen u istom emisionom omjeru,  $J_{sivo} = \epsilon J_c$ , sl. 255.



Sl. 255. Spektralna razdioba energije za sivo zračenje. A = jednobojno (monohromatsko zračenje).

### Emisioni omjer $\epsilon_n$ <sup>1)</sup>.

$\epsilon_n$  = emisioni omjer zračenja u smjeru normale na površinu. Za sveukupno zračenje ( $\epsilon$ ) može se uzeti za sjajne površine metala u prosjeku  $\epsilon = 1,2 \cdot \epsilon_n$ , za druga tjelesa glatkog površina  $\epsilon = 0,95 \cdot \epsilon_n$ , hrapave površine  $\epsilon = 0,98 \cdot \epsilon_n$ ,

Tvar	Stanje površine	Temperatura $t^{\circ}C$	$\epsilon_n$
<b>Metali:</b>			
Aluminij . . . . .	sirova polirana izvaljana	25 23 170	0,070 0,052 0,039
Olovo . . . . .	polirana polirana oksidirana	130 230 28	0,056 0,074 0,280
Krom . . . . .	polirana	150	0,058
Željezo . . . . .	sjajno jetkana sjajno izbrušena crveno zardala izvaljana lijevana jako zardala	150 20 20 20 100 20	0,128 0,24 0,61 0,77 0,80 0,85
Zlato . . . . .	polirana	20	0,02–0,03
Bakar . . . . .	polirana slabo zagasita grebana oksidirana crno oksidirana	20 20 20 130 20	0,03 0,037 0,07 0,76 0,78
Manganin . . . . .	izvaljana glatko	120	0,048
Mjed . . . . .	polirana zagasita	20	0,05 0,222
Nikalj . . . . .	polirana ponikljani željezni lim poliran zagasito ponikljani željezni lim	230 20 20	0,070 0,054–0,060 0,109–0,113
Platina . . . . .	sjajno polirana sjajno polirana	230 630	0,054 0,105
Srebro . . . . .	polirana polirana	230 630	0,02 0,032
Bizmut . . . . .	sjajna	80	0,34

<sup>1)</sup> Prema E. Schmidt, Technische Thermodynamik (Berlin 1936), te F. Henning, Wärmotechnische Richtwerte.

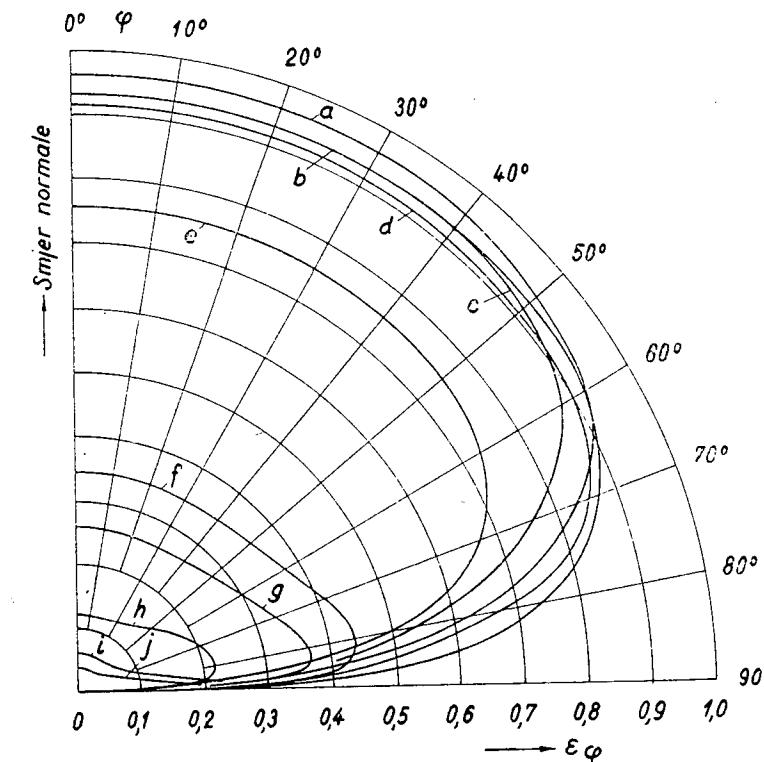
Tvar	Stanje površine	Temperatura $t^o C$	$\epsilon_{\varphi}$
Cink . . . . .	pocinčani željezni lim polirana zagasita	28 230 50–280	0,23 0,045 0,21
Kositar . . . . .	pokositreni željezni lim	24	0,056–0,086
<b>Nevodici</b>			
Krovna ljenjepenka . . . . .	glatka, voda, sirova ledena kora	20 0 0	0,93 0,96 0,98
Led . . . . .	glatka	20	0,90
Sadra . . . . .	glatka	20	0,94
Staklo . . . . .	glatka	20	0,95
Tvrda guma . . . . .	glatka	20	0,8–0,9
Drvo . . . . .	hrapava	20	0,93
Vapnena žbuka . . . . .	brušena	620	0,79
Ugljen . . . . .	hrapava	80	0,86
Korundov prah na papiru	hrapava	20	0,8–0,9
Papir . . . . .	ocakljena	20	0,92
Porcelan . . . . .	ocakljena	1000	0,75
Samotni kamen . . . . .	ocakljena	1220	0,60
Silikatni kamen . . . . .	hrapava	1000	0,80
Glina . . . . .	pečena	70	0,91
Žbuka . . . . .	pečena	20	0,93
Svilena tkanina . . . . .	pečena	20	0,77
Opeka . . . . .	sirova neožbukana	20	0,93
<b>Namazi:</b>			
Aluminijeva bronca . . . . .		100	0,2–0,4
Ocaklina (email) . . . . .		20	0,85–0,95
Pokost za grijalice <sup>1)</sup> . . . . .		100	0,93
Minijev namaz . . . . .		100	0,93

Kod krutih je tijela emisioni koeficijent općenito ovisan o smjeru, koji označujemo kutom  $\varphi$  spram normale površine. Za nemetalne površine (izolatori) emisioni je omjer  $\epsilon_{\varphi}$  nepromjenljiv za sve smjerove do u blizinu smjera površine, gdje postaje manji. Kod sjajnih metalnih površina su razlike znatne. Ovaj se tok najbolje razabire po mjerenjima E. SCHMIDT-a i E. ECKERT-a <sup>2)</sup>, kad se  $\epsilon_{\varphi}$  nanesene u polarne koordinate, sl. 256. Okomito na površinu (smjer normale) je  $\epsilon_n$  kod izolatora

<sup>1)</sup> Boja pokosti nije od utjecaja na sveukupnu emisiju!

<sup>2)</sup> E. Schmidt i E. Eckert, Forschung 6, (1935) 175.

nešto veći od  $\epsilon_n$  za sveukupno zračenje na jednu stranu. Kod izolatora je približno  $\frac{\epsilon}{\epsilon_n} = 0,95$  kod glatke površine, a  $\frac{\epsilon}{\epsilon_0} = 0,98$  kod hraptave površine. Za sjajne je metalne površine naprotiv u presjeku  $\frac{\epsilon}{\epsilon_n} = 1,2$ . To vrijedi za toplinske zrake (u ultracrvenom, pojasu) dok za druge dužine vala prilike mogu promijeniti.



Sl. 256. Emisioni koeficijent  $\epsilon$  ploha u ovisnosti od smjera zračenja  
 a) vlažni led, b) drvo, c) staklo, d) papir, e) bakreni oksid, f) bizmut,  
 g) aluminium bronca, h) željezo zagasito, i) krom, j) aluminium.  
 (Po E. Schmidt-u i E. Eckert-u).

Promatrani u smjeru površine bit će metali po sl. 256. svjetlijii, a izolatori tamniji, nego li gledani okomito na površinu.

Kod strogog pokoravanja LAMBERT-ovom zakonu u polarnom bi se dijagramu, sl. 256., poklapala dotična linija  $\epsilon_{\varphi}$  s kružnicom, što kod izolatora do kuteva  $\varphi$  od nekih  $60^{\circ}$ – $70^{\circ}$  dobro odgovara. Kasnije opadanje veličine  $\epsilon_{\varphi}$  nije od velikog utjecaja na sveukupno odstupanje od LAMBERT-ovog zakona. Kod sjajnih metalnih ploha razlike su mnogo veće. Zato užarene kugle izolatora izgledaju u blizini ruba nešto tamnije, dok su one iz metala pri rubu primjetno svijetlijе nego li u središtu ploče.

Stanje površine uvelike utječe na njena odzračena svojstva. Tanki oksidacioni slojevi, koji se očituju tek u lelujavoj boji površine od neznatnog su utjecaja. Deblji oksidirani slojevi, kao što je rđa kod željeza, nisu više metalne površine već izolatori, pak se prema tomu mijenja i emisioni omjer.

Kod izolatora nema gotovo nikakve razlike u emisiji hrapavih i poliranih ploha. Razlika se pojavljuje tek onda, kad hrapavost nije nepravilna, već možda potiče od ureza visokog profila. U tom se slučaju može postignuti zračenje primjetno usmjereni okomito od plohe. Razlike će postojati i kod tjelesa, koja absorbiraju tek u dubljim slojevima. Prozirno staklo prozora, koje gledano izvana, tamno je, jer propušta zrake svjetlosti, koje se absorbiraju u sobi, dok mutno ili navorano staklo izgleda svijetlo, budući da se dozračene zrake difuzno reflekteraju i odbijaju prije, nego što su prodrle u prostoriju iza stakla.

Spomena je vrijedna ovisnost emisije od dužine vala. Dok staklo zrake svjetlosti najvećim dijelom propušta, za toplinske je ono skoro nepropusno ( $\epsilon_n = 0,94$ ). To se svojstvo primjenjuje kod vrtnih staklenika, u koje zrake svjetlosti mogu ulaziti, pak se u unutrašnosti prostorije absorbiraju, dok se na protiv toplinske zrake, koje su sadržane u sunčanom svjetlu kao i one koje se emitiraju iz unutrašnjosti prostorije ne prolaze kroz staklo, već ih ovo absorbira. Tako se ostakljenje ugrije pak odzračuje djelomice prema vani a djelomice natrag u prostoriju te ovu ugrijava. Tom neprijatnom iskustvu izvrgnuti su stanovnici takvih prostorija, koje su snabdjevene s pretjeroano velikim površinama prozora, s namjerom da bi se dobilo što više svjetla. U takvim prostorijama vlada ljeti često nepod-

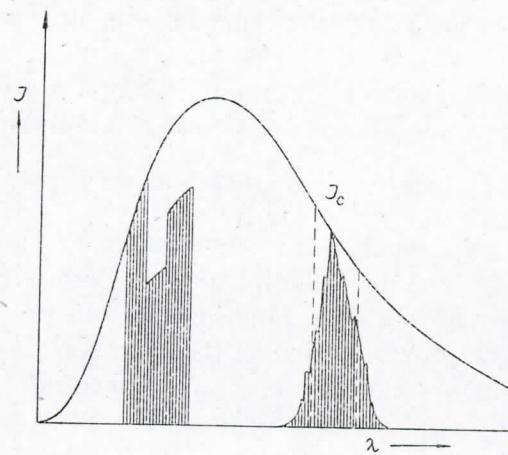
nosiva vrućina kao posljedica spomenutog efekta, budući da staklo djeluje kao stupica dozračenoj energiji.

Zanimivo je primijetiti da najprije poznato tijelo za područje toplinskog zračenja nije čađa, već inje sa  $\epsilon = 0,985!$  Tome je nasuprot crni ebonit prilično prozračan za toplinske zrake. Kod bijelog je papira za sunčevu svjetlost  $\epsilon = 0,35$ , dok mu je za toplinske zrake  $\epsilon = 0,9$ .

Kapljevine absorbiraju toplinske zrake već u tanjim slojevima. Tako je našao E. SCHMIDT, da se je emisioni omjer, kod metalnih listića ( $\epsilon = 0,058$ ) namazom tankog sloja ulja od 0,02 odnosno 0,1 mm povećao na  $\epsilon = 0,33$  odnosno na 0,75.

#### Izluci (selektivno) zračenje plinova

Dok većina tehničkog gradiva — izuzev sjajne metalne plohe — zrači praktički kao sivo tijelo, to se plinovi vladaju drugačije. Plinovi emitiraju i absorbiraju samo u nekim, za dotični plin karakterističnim pojasima spektra. Prozračimo li deblji sloj nekog plina crnim zračenjem, to će plin za neka područja spektra biti prozračan (dijaterman), dok zrake drugih dužina vala sasvim



Sl. 257. Selektivno zračenje plinova.

ili djelomice absorbira (selektivna absorpcija) sl. 257. Za tehničke je svrhe od značaja samo zračenje vodene pare  $H_2O$  i ugljičnog dvokisa  $CO_2$ , dok je zračenje i absorpcija ostalih plinova, kao što su  $O_2$ ,  $N_2$  i t. d. neprimjetno.

Kod krutih je tjelesa absorpcija praktički dokončana već u dubini od nekoliko mikrona. Kod plinova su zato potrebni mnogo veći slojevi. Absorpcijom se intenzitet zračenja dužine vala  $\lambda$  kod prolaza kroz neki plin na putu  $dx$  oslabi, tako da je prirast intenziteta negativan

$$dJ_\lambda = -\delta_\lambda \cdot J_\lambda \cdot dx. \quad (818)$$

Kod prevaljenog puta  $x$  preostao je zraki još intenzitet

$$J_\lambda = J_{\lambda_0} \cdot e^{-\delta_\lambda \cdot x}, \quad (819)$$

dok se je absorbiralo

$$J_{\lambda_0} (1 - e^{-\delta_\lambda \cdot x}).$$

Odatle slijedi absorpcioni koeficijent  $a_{\lambda x}$ , odnosno emisioni koeficijent  $\epsilon_{\lambda x}$

$$a_{\lambda x} = \epsilon_{\lambda x} = 1 - e^{-\delta_\lambda \cdot x}. \quad (820)$$

Čim je  $\delta_\lambda$  veće od nule, to će uvijek za  $x \approx \infty$  postati  $\epsilon_{\lambda} \approx 1$ , tako da se neki plin u prostranim prostorima ponaša za područje svojih absorpcionih pojasa kao neko crno tijelo. Veličina  $\delta_\lambda$  zove se još i logaritmičkim dekrementom plinskog zračenja.

Kod proračunavanja plinskog zračenja pojavljuju se velike poteškoće. Već se kod određivanja sveukupnog zračenja

$\int_{\lambda=0}^{\infty} J_\lambda \cdot d\lambda$  ima teškoća zbog raznolikih absorpcionih pojasa, po-

gotovo kad se još uoči, da je temperatura od velikog utjecaja na tok razdiobe energije u normalnom spektru. No povrh toga je za zračenje odlučna ne samo veličina nego i geometrijski oblik plinskoga prostora, budući da će zrake raznih smjerova morati prevaliti različite puteve  $x$  dok opet izadu iz plina. Za svladavanje ovih matematskih poteškoća stvorio je vrijednu podlogu SCHACK<sup>1)</sup>.

Logaritmički dekrement  $\delta_\lambda$  ovisan je o pritisku, pak je prema BEER-u

$$\delta_{p,\lambda} = \delta_{p_0,\lambda} \cdot \frac{p}{p_0} [m^{-1}]. \quad (821)$$

<sup>1)</sup> Schack, Der Industrielle Wärmeübergang, 2. izdanje, Düsseldorf, (1940).

do čega nas vodi razmatranje, da je absorpcija to jača, što ćešće će neka zraka pri prolazu kroz plin naći na pojedine molekule. I ako se zapažaju primjetna otstupanja od BEER-ovog zakona, to nam je on ipak vrlo koristan, budući da se na pr. u plinskim smjesama pojedini plinovi pojavljuju kod nižih parcijalnih pritisaka.

Unutar talasnog pojasa  $\Delta\lambda = \lambda_2 - \lambda_1$  energija je crnog selektivnog zračenja

$$e_e = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} J_\lambda \cdot d\lambda. \quad (822)$$

Volumenski element  $dV$  nekog plina odzračuje energiju u svim smjerovima, a ne kao neka kruna ploha samo u jednu polutku prostora. Može se pokazati da će tako emitirano plinsko zračenje imati četverostruku vrijednost, pak će u promatranom pojusu biti energija plinskog zračenja

$$dE_g = 4 \delta_\lambda \cdot e_e \cdot dV = 4 \delta_\lambda \cdot dV \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} J_\lambda d\lambda. \quad (823)$$

Absorpcione pojase za  $H_2O$  i  $CO_2$  objavio je već PASCHEN pak ih približno navodimo u nižoj tabeli<sup>1)</sup>

	Pojas br.	Širina pojasa od $\lambda_1$ do $\lambda_2 [\mu]$
$CO_2$	I	2,36 — 3,02
	II	4,01 — 4,80
	III	12,50 — 16,50
$H_2O$	I	2,24 — 3,27
	II	4,8 — 8,5
	III	12 — 25

Ove brojke ne vrijede strogo, budući da absorpcioni pojasi nisu ošto ocrtani, a osim toga njihova širina ovisi o debeljini sloja plina. Kod vrlo debelih slojeva absorbiraju se kod crnog zračenja sveukupne energije, koje su u procentima prikazane u niže navedenoj skrižaljci

<sup>1)</sup> F. Paschen, Ann. Physik 53 (1894) 334.

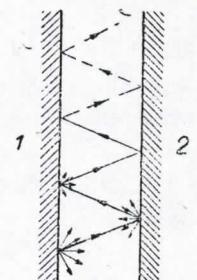
$t^{\circ}C$	$CO_2$	$H_2O$
200	12%	67%
1000	10,5%	46%
2000	6%	24%

Promjenljivost absorbiranog udjela energije s temperaturom prouzrokovana je pomjeravanjem maksimuma intenziteta.

### Izmjena topline zračenjem

Vidjeli smo, da je emisija nekog tijela neovisna o tome, u kakvom se stanju nalazi okolina, a napose da je neovisna o tome, da li se u susjedstvu nalaze toplija ili hladnija tijela koja zrače. Emitirana količina energije bila je ovisna samo o stanju tijela, uključivo njegove površine, te o njegovoj temperaturi.

No sveukupno odana energija — toplina — slijedi tek iz difference emitirane energije i energije koja se pri dozračivanju absorbirala, pak se kod zadatka izmene topline uvijek mora proučiti međusobno djelovanje svih tjelesa koja zrače. Zadatak je teži nego li se to u prvi mah čini. Zato ćemo razmotriti samo neke jednostavne slučajeve, ali koji su takvi, da na njih s dovoljnim približenjem možemo svesti čitav niz tehnički važnih problema.



Sl. 258. Zračenje između usporednih ploča.

**Usporedne stijenke** Dvije usporedne stijenke 1 i 2. sl. 258., odijeljene su nekim dijatermanim medijem (vakuumom, uzduhom). Razmak stijenka neka je prema drugim protegama ploha malen. Temperature su stijenki  $T_1$  i  $T_2$ , njihovi emisioni omjeri  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ . Po  $m^2$  plohe emitiraju se energije  $E_1$  i  $E_2$

$$E_1 = \epsilon_1 C_c \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 \quad \text{te} \quad E_2 = \epsilon_2 C_c \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \quad (824)$$

No stijenci 2 dozračuje se ne samo zračenje, koje je stijenka 1 emitirala, već i ono koje je ta stijenka reflektirala. Sveukupno se dakle dozračuje sva svjetloća površine  $K_1$  stijenke 1. Tako isto dozračuje se stijenci 1 svjetloća površine  $K_2$  stijenke 2. Pri tom je

$$K_1 = E_1 + r_1 K_2; \quad K_2 = E_2 + r_2 K_1 \quad (825)$$

pri čem su refleksioni koeficijenti

$$r_1 = 1 - \alpha_1 = 1 - \epsilon_1; \quad r_2 = 1 - \alpha_2 = 1 - \epsilon_2 \quad (826)$$

budući da su stijenke za zrake nepropusne.

U smjeru od 1 do 2 rezultira prema tome toplinska struja

$$q_{12} = K_1 - K_2 [kcal/m^2h]. \quad (827)$$

Uvrstimo li (826) u (825), to slijedi

$$K_1 = E_1 + (1 - \epsilon_1) K_2 = E_1 + (1 - \epsilon_1) \{ E_2 + (1 - \epsilon_2) K_1 \} \quad (828)$$

$$\text{te} \quad K_1 = \frac{E_1 + (1 - \epsilon_1) E_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2} \quad (829)$$

i analogno

$$K_2 = \frac{E_2 + (1 - \epsilon_2) E_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2}. \quad (830)$$

Uvrstivši to u (827) i uvezši u obzir (824) dobivamo predanu količinu topline

$$q_{12} = K_1 - K_2 = \frac{\epsilon_1 E_1 - \epsilon_2 E_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_2} = \\ = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon_1} - 1} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} \quad (831)$$

ili

$$q_{12} = C_{12} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} \quad (832)$$

gdje je

$$C_{12} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_c}}. \quad (833)$$

Konstantna zračenja  $C_{12}$  kombinacije ovih stijenka manja je od svake od konstanata  $C_1$  i  $C_2$ .

Izmjenu topline zračenjem između stijenka može se u znatnoj mjeri prijeći nekim zastorom (međustijenkom), kojega su svojstva  $\epsilon'$ ,  $C'$ ,  $T'$ . Kad se može zanemariti toplinski otpor u samom zastoru, što vrijedi na pr. za tanku međustijenku ili metalnu foliju, to će temperatura  $T'$  biti jednolična za čitavu debljinu zastora. U stacionarnom stanju sva će se toplina  $q'$ , koja se od stijenke 1 dovodi zastoru, odvoditi od zastora na stijenku 2.

$$\begin{aligned} q' &= \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon'} - 1} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T'}{100} \right)^4 \right\} = \\ &= \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon'} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1} \left\{ \left( \frac{T'}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\}. \end{aligned} \quad (834)$$

Odvale možemo odrediti temperaturu zastora  $T'$

$$(T')^4 = \frac{\frac{T_1^4}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon'} - 1} + \frac{T_2^4}{\frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon'} - 1}}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon'} - 1 + \frac{1}{\epsilon_2} + \frac{1}{\epsilon'} - 1}. \quad (835)$$

Nakon nekih preinaka dobiva se onda

$$q' = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1 + \left( \frac{2}{\epsilon'} - 1 \right)} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\}. \quad (836)$$

Za  $n$  zastora s emisionim koeficijentima  $\epsilon'$ ,  $\epsilon''$ , i t. d. slijedi

$$q^{(n)} = \frac{C_c}{\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} - 1 + \left( \frac{2}{\epsilon'} - 1 \right) + \left( \frac{2}{\epsilon''} - 1 \right) + \dots + \left( \frac{2}{\epsilon^{(n)}} - 1 \right)} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} \quad (837)$$

Za zastore i stijenke s jednakim emisionim omjerima,  $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon' = \epsilon'' = \dots = \epsilon^{(n)}$ , prolazit će kroz  $n$  zastora struja topline

$$q^{(n)} = \frac{1}{n+1} q_{12}, \quad (838)$$

koja je tek dio toplinske struje  $q_{12}$  kod stijenki bez zastora.

Izmjena topline u znatnoj će se mjeri spriječiti, kad je u (836)  $\epsilon'$  primjetljivo manje od  $\epsilon_1$  i od  $\epsilon_2$ . Kad je  $\epsilon' \approx 0$  bit će i  $q^{(n)} \approx 0$  što se donekle može ostvariti zastorom iz sjajne aluminiske folije ( $\epsilon' = 0,05$ ).

Vrijedno je spomena, da se u navedenim jednadžbama nisu pojavili razmaci stijenka i zastora, tako da oni nisu od utjecaja na izmjenu topline zračenjem.

#### Obuhvaćeno tijelo

Tijelo 1 neka je sa svih strana obuhvaćeno tijelom 2, sl. 259. Površine  $F_1$  i  $F_2$  neka su takvog oblika da sve zrake bilo koje točke A površine  $F_1$  stižu na površinu  $F_2$ , što može biti samo onda, ako je površina  $F_1$  svuda konveksna (ispupčena). Osim toga neka se od bilo koje točke B površine  $F_2$  vidi čitavi obris tijela 1, a u tu svrhu površina  $F_2$  ne smije imati dubljih uglova ni jačih izbočina. No površina  $F_2$  ne mora biti svuda konkavna, budući da blage mjesne udubine i izbočine ne moraju biti u protivnosti sa gornjim zahtjevom.

Po pretpostavci gađa svaka zraka površine  $F_1$  površinu  $F_2$ . Tome nasuprotni od svih zraka koje dolaze od površine  $F_2$  pada samo jedan dio  $\omega$  na površinu  $F_1$ , dok ostatak  $(1 - \omega)$  pada natrag na  $F_2$ .  $\omega$  je neki međusobni faktor geometričkih oblika obid ploha.

Svetloču  $K_1$  površine  $F_1$  čine vlastita emisija  $E_1$  te refleksija nadolaznog zračenja, pak je

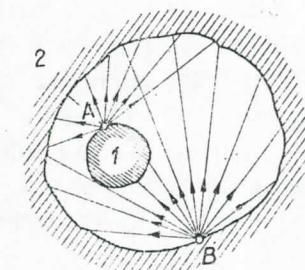
$$F_1 K_1 = F_1 E_1 + \omega F_2 K_2 (1 - \epsilon_1). \quad (839)$$

Ovdje je  $(1 - \epsilon_1)$  refleksioni koeficijent od  $F_1$ , dok je  $\omega$  broj, koji označuje, koliki udio zračenja od  $F_2$  pada na  $F_1$ .

Svetloča  $K_2$  površine  $F_2$  sastoji se analogno iz

$$F_2 K_2 = F_2 E_2 + F_1 K_1 (1 - \epsilon_2) + F_2 K_2 (1 - \omega) (1 - \epsilon_2). \quad (840)$$

Prvi član desne strane predviđa emisiju od  $F_2$ , drugi član reflektirano zračenje zraka koje su pale od  $F_1$  na  $F_2$ , a treći



Sl. 259. Tijelo obuhvaćeno sa svih strana

odzračivanje zraka, koje su nadošle od vlastite površine  $F_2$ . U svemu struji od površine  $F_1$ , toplina  $Q_{12}$  k površini  $F_2$ , a ova je toplina jednaka emitiranom zračenju umanjenom za absorbirano zračenje

$$Q_{12} = F_1 E_1 - \omega F_2 K_2 \epsilon_1 \quad [\text{kcal/h}]. \quad (841)$$

Faktor oblika  $\omega$  ovisan je samo o geometrijskim odnosima, a ne od temperature  $T_1$  i  $T_2$ . Zato možemo  $\omega$  odrediti za najjednostavniji slučaj, kad vlada toplinska ravnoteža  $T_1 = T_2$ , te kad je izmijenjena toplina  $Q_{12} = 0$ . Iz (839) i (840) možemo proračunati  $K_2$

$$K_2 = \frac{\frac{F_1}{F_2} E_1 (1 - \epsilon_2) + E_2}{\epsilon_2 + \omega \epsilon_1 (1 - \epsilon_2)}. \quad (842)$$

Uvrstimo li to u (841), gdje smo uzeli da je  $Q_{12} = 0$ , to s nekim preinačenjima dobivamo

$$\omega = \frac{F_1}{F_2}, \quad (843)$$

bez obzira na to, kakvi su inače oblici, smještaj i temperature obih površina. Time sad možemo izračunati toplinsku struju  $Q_{12}$  i za slučaj da su temperature  $T_1$  i  $T_2$  različite pak iz (841), (842) i (803) dobivamo

$$Q_{12} = F_1 \frac{C_e}{\frac{1}{\epsilon_1} + \omega \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\}. \quad (844)$$

Tako je konstanta zračenja nekog konveksnog tijela, koje je sa svih strana obuhvaćeno nekim drugim tijelom

$$C_{12} = \frac{C_e}{\frac{1}{\epsilon_1} + \omega \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)} = \frac{4,96}{\frac{1}{\epsilon_1} + \omega \left( \frac{1}{\epsilon_2} - 1 \right)}. \quad (845)$$

Obzirom na oblike obih tijela važe u (844) prepostavke, koje smo učinili na početku. Kako smo osim toga prepostavili, da je  $\epsilon = \text{konst}$  neovisno o dužini vala i od smjera, to smo time prepostavili sivo zračenje i pokoravanje LAMBERT-ovom kosi-nusovom zakonu.

Kad je, na pr. kod nekog termometra obješenog u sobi, razlika površina vrlo velika,  $F_1 \ll F_2$ , t. j. kad je  $\omega \approx 0$  to iz (845) slijedi

$$C_{12} \approx \epsilon_1 \cdot C_e, \quad (846)$$

tako da su za izmjenu topline u ovom slučaju odlučna samo svojstva zračenja obuhvaćenoga tijela (termometra). To isto vrijedi i za bilo koji  $\omega$ , kad su obuhvatne stijenke  $F_2$  crne ( $\epsilon_2 = 1$ ).

Kako u (844) izmjena topline ovisi o  $\omega$ , to vidimo da će na pr. gubici topline nekog izoliranog spremnika  $F_1$  biti to manji, što je manja prostorija  $F_2$  u kojoj je taj spremnik smješten, jer se u tom slučaju  $\omega$  približava vrijednosti 1. To iskorištavaju i životinje, kad se pred hladnoćom sakrivaju u duplja, i tako se pri tom štite i od konvektivnog prelaza topline (vjetrov), te od vremenskih nepogoda.

Općeniti smještaj ploha Dva plošna elementa  $dF_1$  i  $dF_2$  smješteni su bilo kako u prostoru, sl. 260. Razmak  $r$  njihovih težišta neka je velik spram protega plošnih elemenata. Spojnica  $r$  zatvara s plošnim normalama kuteve  $\varphi_1$  i  $\varphi_2$ . Plohu  $dF_2$  vidimo sa plohe  $dF_1$  pod nekim prostornim uglom s otvorom

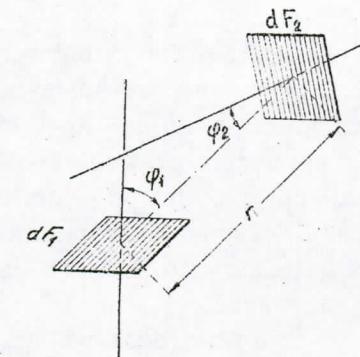
$$d\Omega_1 = \frac{dF_2 \cos \varphi_2}{r^2}, \quad (847)$$

a obrnuto se vidi  $dF_1$  sa  $dF_2$  pod prostornim uglom

$$d\Omega_2 = \frac{dF_1 \cos \varphi_1}{r^2} \quad (848)$$

( $dF \cos \varphi$  su projekcije površinica u ravni okomito na smjer  $r$ ).

Zanemarimo li zračenje koje se reflektira od  $dF_2$  na  $dF_1$  i obrnuto, to će biti odlučno samo emitirano zračenje. Analogno (807) bit će od  $dF_1$  na  $dF_2$  odzračena energija  $E_{\epsilon_1} \cdot dF_1 \cdot \cos \varphi_1 \cdot d\Omega_1$ , od čega  $dF_2$  absorbita samo udio  $\epsilon_2$ .



Sl. 260. Općeniti međusobni položaj plošnih elemenata.

$$d^2q' = \varepsilon_2 E_{n1} \cos \varphi_1 dF_1 d\Omega_1 = \varepsilon_2 E_{n1} \cos \varphi_1 dF_1 \frac{\cos \varphi_2 dF_2}{r^2}. \quad (849)$$

Sa  $dF_2$  na  $dF_1$  dozračena, a od ove absorbirana energija je

$$d^2q'' = \varepsilon_1 E_{n2} \cos \varphi_2 dF_2 d\Omega_2 = \varepsilon_1 E_{n2} \cos \varphi_2 dF_2 \frac{\cos \varphi_1 dF_1}{r^2}. \quad (850)$$

U svemu se dakle predaje od  $dF_1$  na  $dF_2$  odzračena toplina

$$d^2q_{12} = d^2q' - d^2q'' = \cos \varphi_1 \cos \varphi_2 \frac{dF_1 dF_2}{r^2} (\varepsilon_2 E_{n1} - \varepsilon_1 E_{n2}). \quad (851)$$

Odatle dobivamo iz (808) i (803) pri čem je

$$E_n = \frac{E}{\pi} = \frac{\varepsilon \cdot C_e}{\pi} \left( \frac{T}{100} \right)^4$$

izraz

$$d^2q_{12} = \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 C_e \cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} dF_1 dF_2 \quad (852)$$

ili

$$d^2q_{12} = C_{12} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \quad (853)$$

a ovdje je

$$C_{12} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \cdot C_e = \frac{C_1 C_2}{C_e}. \quad (854)$$

Za plohe konačne veličine dobivamo

$$q_{12} = C_{12} \left\{ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right\} \iint_{F_1 F_2} \frac{\cos \varphi_1 \cos \varphi_2}{\pi r^2} dF_1 dF_2 \quad (855)$$

ali uz uvjet, da su temperature ploha jednolične.

Gore smo prepostavili, da zanemarujuemo međusobnu refleksiju ovih ploha. Kod malenih otvora ugla  $d\Omega$  to je uvjek dopustivo, a kod velikih onda, kad se emisioni koeficijenti ne razlikuju mnogo od jedinice, t. j. kad je kako  $\varepsilon_1 \approx 1$  tako i  $\varepsilon_2 \approx 1$ , drugim riječima, kad se stijenke vladaju približno kao crna tjelesa što se u ložištima može dovoljnim približenjem prepostaviti.

Primjena (855) na praktičke zadatke s konačnim površinama dosta je mukotrpna. Ovdje je od prednosti, da se poslužimo za određivanje geometrijskih odnosa nacrtima, ili da se iz kartona izrežu prostorni modeli, na kojima se umjetnim osvjetljenjem mogu izmjeriti vidni kutovi.<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> Eucken-Jakob, Der Chemie-Ingenieur, Sv. 1. dio I. str. 289. (Leipzig 1933.). — E. Eckert, Technische Strahlungsaustauschrechnungen (Berlin 1937.).

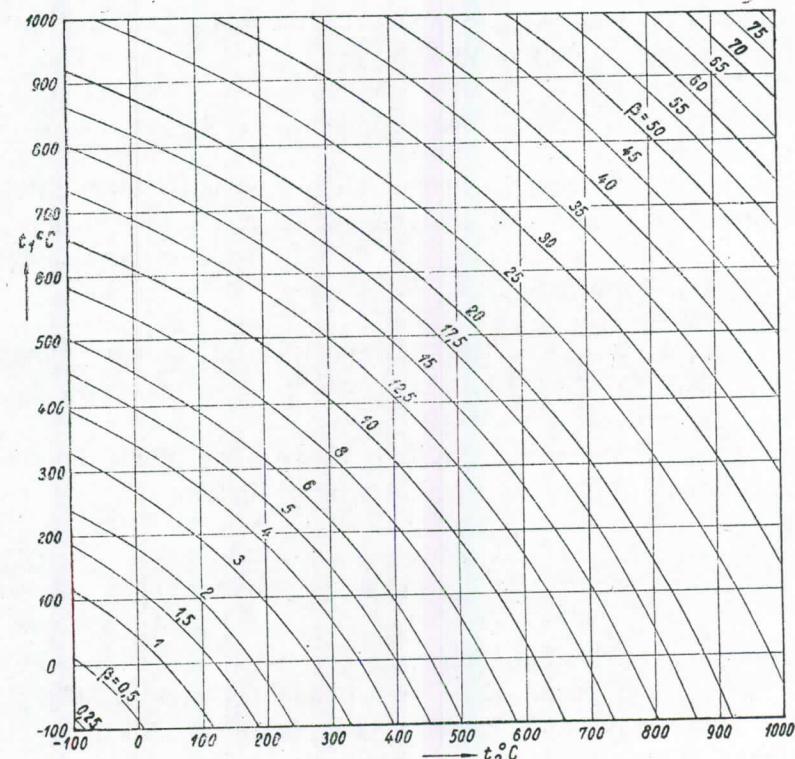
Koeficijent prelaza topline  $\alpha_z$  zračenja

Kod ne prevelikih razlika temperatura podesno je proračun odzračene topline prilagoditi proračunu prelaza topline konvekcijom i provođenjem. To se postizava uvođenjem pojma koeficijenta prelaza topline zračenjem  $\alpha_z$ , pri čem za usporedne stijenke pišemo

$$Q_z = \alpha_z F (T_1 - T_2) = F \cdot C_{12} \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \quad (856)$$

$$\text{gdje je } \alpha_z = C_{12} \frac{\left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4}{T_1 - T_2} = C_{12} \cdot \beta. \quad (857)$$

Sl. 261. prikazuje dijagram po MERKEL-u, u koji su unesene izračunate vrijednosti  $\beta$  za temperature  $t_1$  i  $t_2$  u  $^{\circ}\text{C}$ , odakle se lako može očitati  $\beta$ .



Sl. 261. Faktor preračunavanja  $\beta = \left[ \left( \frac{T_1}{100} \right)^4 - \left( \frac{T_2}{100} \right)^4 \right] \frac{1}{T_1 - T_2}$  za jednadžbe (857) i (858).

Ako je tijelo temperature  $T_1$  obuhvaćeno stijenkama temperature  $T_2$ , a ono osim toga odaje toplinu konvekcijom na uzduh temperature  $T_u$ , to se diagram u sl. 261. može i u tom slučaju upotrijebiti, samo treba  $\alpha_e$  preračunati po izrazu

$$\alpha_e = C_{12} \beta \frac{t_1 - t_2}{t_1 - t_u} \quad (858)$$

gdje se  $\beta$  očita iz dijagrama za temperature  $t_1$  i  $t_u$ .

## LITERATURA

### Djela

- Carnot S., Réflexions sur la puissance motrice du feu. Paris 1824.
- Clausius R., Die Mechanische Wärmetheorie, 1. Sv., 3. Izd. (Braunschweig 1887.)
- Gibbs J. W., Elementary principles in statistical mechanics, New-York 1902.
- Zeuner G., Technische Thermodynamik. (Berlin 1905.)
- Schüle W., Technische Thermodynamik. 1. Sv. (Berlin 1930.)
- Peabody C. M., Thermodynamics of the steam engine and other heat engines, New-York.
- Nusselt W., Technische Thermodynamik. (1943.)
- Planck Max, Theorie der Wärme (Sv. 5. Uvod u teor. fiz.). (Leipzig 1932.)
- Poincaré H., Thermodynamique, Paris 1923.
- Müller-Pouillet, Lehrbuch der Physik. 3. Sv.: Thermodynamik. (Braunschweig 1926.)
- Handbuch der Physik, izdano po H. Geiger i K. Scheel. (Berlin 1927.)
- Handbuch der Experimentalphysik, izdano po W. Wien i F. Harms. (Leipzig 1930.)
- Lewis G. N. and Randall M., Thermodynamics, New-York 1923. Njemacko izdanje O. Redicha Wien 1927.
- Schmidt E., Technische Thermodynamik. (Berlin 1936.)
- Gumz W., Kurzes Lehrbuch der Brennstoff- und Feuerungstechnik. (Berlin 1942.)
- Pio-Uljski G. N., Tehnička termodinamika, Beograd 1934.
- Брандт А. А: Основы теории термодинамики, Ленинград 1918.
- Литвин А. М: Теоретические основы теплоэнергетики, Москва 1944.
- Prandtl L., Die Grundlagen der Strömungslehre. 2. Izd. (Braunschweig 1935.)
- Merkel F., Die Grundlagen der Wärmeübertragung. (Dresden und Leipzig 1927.)
- Gröber H. i S. Erk, Die Grundgesetze der Wärmeübertragung. 2. Izd. (Berlin 1933.)
- ten Bosch M., Die Wärmeübertragung. 3. Izd. (Berlin 1936.)
- Schaeck A., Der industrielle Wärmetübergang. 2. Izd. (Düsseldorf 1940.)
- Jakob M. i S. Erk, Hydrodynamische Materialbewegung / Wärmeschutz und Wärmeaustausch, iz djela: Der Chemie-Ingenieur, Sv. I. i. dio. Izdano po A. Eucken i M. Jakob. (Leipzig 1933.)
- Roszak Ch. et Véron M., Nouvelles études sur la chaleur, Paris 1929.
- Bäckström M., Economie Optimmn Problems in Connection with Refrigeration. Handlingar Nr 155, Ingenjörs Vetenskaps Akademien, Stockholm 1940.
- Justi E., Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie, Dissoziation technischer Gase. (Berlin 1938.)
- Svojstva tvari i dijagrami
- Hütte, Des Ingenieurs Taschenbuch, 1. Sv.: Grundlagen der Technik. 27. Izd. (Berlin 1941.)
- Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau. 2. Sv., 6. Izd. (Berlin 1935.)
- Mollier R., Neue Tabellen und Diagramme für Wasserdampf. 7. Izd. (Berlin 1932.)
- Koch W., VDI-Wasserdampftafeln. (Berlin 1937.)
- Hennig F., Wärmetechnische Richtwerte. (Berlin 1938.)
- Landolt-Börnstein, Physikalisch-chemische Tabellen. 5. Izd. (Berlin 1923.)
- International Critical Tables, Mc Graw-Hill, New-York.

# KAZALO

Obične brojke označuju stranicu u knjizi, dok pojedine činjenice redni broj primjera u zbirci

Absorpcija 384  
 Absorpcioni koeficijent 385, 387  
 Absorpcioni pojas 399  
 Adijabata 46, 49, 147  
 Agregatno stanje 11, 127  
 Amortizacija izmjenjivača 376  
 Andrews 130  
 Apsolutna temperatura 21, 69  
 Atmosfera 13, 22, 23  
 Avogadro 23

Balon 14  
 Beckmann 347  
 Bilanca dušika 267  
 — kisika 268  
 — ugljika 266  
 — vodika 268  
 Boltzmann-ova konstanta 392  
 Boyle 21  
 Brzina ohladijanja 326  
 Brzina svjetla 392  
 Brzina zvuka 205, 208, 214  
 BTU (British Thermal Unit) 2

Callendar 156, 157  
 Carnot-ov proces 54, 162, 230  
 Carnot-ova temperaturna funkcija 67  
 Cijev 343  
 Clapeyron-Clausius-ova jednadžba 142  
 Claude 30  
 Clausius, R. 57, 72, 142, 154  
 Compaundni stroj 185  
 Crno tijelo 386  
 Crno zračenje 386, 391  
 Čada 265

Dalton 39, 134  
 Dekrement, logaritmički 400  
 Diesel-ov proces 293  
 Diesel-ov stroj 21  
 Diferencijalno miješanje 224  
 Difuzor 246  
 Dijagram generatorskog plina po Mollier-u 285  
 Dijaterman 386  
 Dizalica topline 254, 69  
 Dolch, P. 288  
 Drew 351  
 Dušična karakteristika 267  
 Dužina vala 382  
 Dvostepeni rashladni stroj 267  
 Eckert, E. 396  
 Ekspanzionalni cilindar 163, 236, 239  
 Eksplozija kotla 50  
 Eksplozioni strojevi 289  
 Eksponent istjecanja 201  
 Ekvivalent, mehanički 7  
 Ekvivalentni promjer 345  
 Električna grijalica za urovanjavanje 44  
 Emisija 383  
 Emisioni koeficijent (omjer) 387, 395, 397  
 Energija, zakon o uzdržanju 6  
 Entalpija 96  
 — idealnih plinova 98  
 Entropija 71  
 — bilo kakovih tvari 86  
 — idealnih plinova 98  
 — pregrijane pare 159  
 — smiese plinova 109  
 Ericson — proces 162  
 Eucken, A. 317  
 Euler (značajka) 336

Fahrenheit 1  
 Fehling 279  
 Filmska kondenzacija 348  
 Filmsko isparivanje 355  
 Fourier 298  
 Fritz, W. 350, 351  
 Gay-Lussac 20, 21, 23, 26  
 Gibbs-ov stavak 109  
 Glavni stavak, prvi 5, 10  
 — drugi 57  
 Grafička metoda prema Schmidt-u 327  
 Granična linija 127  
 Granični sloj 308, 310, 352  
 Grashoff (značajka) 337  
 Gröber 323  
 Gubici na stijenkama 181  
 Gubici parnog stroja 181  
 Gubitak ekspanzije 186  
 — prigušivanja 187  
 — punjenja kod parnih strojeva 188  
 — rada 110  
 Gustoća toplinskog toka 298  
 Havliček, J. 157  
 Heisenberg 117  
 Henning 36, 395  
 Herman 347  
 Heterogen 127  
 Higroskopska voda 257  
 Hladionica 235, 236  
 Hladno duvanje (rasplinjivanje) 287  
 Idealni plinovi 22  
 Indikator 50  
 Injektor 226  
 Intenzitet zračenja 392  
 Irreverzibilan (nepovratan) 59  
 Is-dijagram Mollier-a 173  
 Isparivač 239  
 Isparivanje 126, 350  
 — dinamičko 351  
 Ispušni stroj 170  
 Istosmjerni izmjenjivač topline 361, 362, 363  
 Izgaranje 256  
 Izgorivi ostatak 265  
 Izlazna brzina 197  
 Izlučivač vlage 242  
 Izlučeno (selektivno) zračenje 399  
 Izmjena impulsa molekula 314  
 Izmjenični generatorski pogon 288  
 Izmjenjivač topline 361  
 — amortizacija 376  
 — iskoristivost topline 373  
 — jedinstveni proračun 369  
 — optimalna iskoristivost 378  
 — površina 370  
 Izobara 43, 49, 84, 145  
 Izohora 43, 49, 84, 146  
 Izoterma 45, 49  
 Jakob, M. 299, 321, 351  
 Jedinični volumen 1  
 Jednadžba kontinuiteta (neprekinitost) 193, 310  
 Jednadžba idealnih plinova 22  
 — pravih plinova 22, 28  
 — ravnoteže 14  
 — van der Waals-a 150  
 Jednadžba stanja 14  
 — kalorička 15  
 — pregrijane pare 149  
 — termička 14  
 Jednobojno (monohromatsko) zračenje 392  
 Jodl Bauer 347  
 Joule, J. P. 7  
 Joule-ov proces 56  
 Kalorija 6  
 Karakteristika goriva 449  
 Karnotiziranje 171  
 Kelvin, Lord 21  
 Kinetička teorija plinova 15  
 Kirchoff-ov stavak 387  
 Kljališta mjeđuriča 352  
 Knoblauch 157  
 Koeficijent apsorpcije 385  
 — brzine 198  
 — dijatermije (propusnosti) 385  
 — istjecanja 210  
 — prelaza topline 312, 356  
 — prolaza topline 302  
 — temperaturne vodljivosti 307  
 — vanjskog provođenja topline 312  
 Koeficijent vodljivosti topline 299  
 — — kapljevina 319  
 — — krutih tvari 319  
 — — — plinova 317  
 Kohezioni pritisak 151  
 Koljčina izgorenih plinova 266  
 Kolebanje oko stanja ravnoteže 123  
 Kompenzaciona toplina 231  
 Kompleksi molekula 152  
 Kompresioni omjer 292  
 Kompresor 26  
 Kondenzacija 166, 348

Ako je tijelo temperature  $T_1$  obuhvaća temperaturu  $T_2$ , a ono osim toga odaje u udruženju temperature  $T_u$ , to se diagram slučaju upotrijebiti, samo treba

$$\alpha_z = C_{12}$$

gdje se  $\beta$  očita iz dijagrama

## TERATURA

Djela

Missance motrice du feu. Paris 1824.

Wärmetheorie, 1. Sv., 3. Izd. (Braun-

to statistical mechanics, New-York 1902.

$\alpha_z$  (Berlin 1905.)

1. Sv. (Berlin 1930.)

steam engine and other heat

(1943.)

teor. fiz.). (Leipzig 1932.)

Sv.: Thermodynamik.

se 1. (Berlin 1927.)

i F. Harms.

v 1923. Nje-

čnik.

- , 1. 340, 409
- Miješani plin 286
- Miješanje plinova 103
- Minimalna potreba uzduha 259, 262
- Miškovsky 157
- Mjerenje temperature 1
- Mlaznica 196, 209
- Mol 23
- Molarni udio 41
- Mollier, H. 157
  - R. 156, 285
  - ov is — dijagram 173
  - ov it — dijagram 277, 279
- Molna težina (molekularna težina) 24
  - prividna 41
- Možni volumen 23
- Monohromatsko zračenje 392
- Monotermni proces (otvoreni) 74
- Nadzvučno strujanje 209
- Najuzi presjek 204
- Nametnuto strujanje 307

- Para, pothlađena 153
  - pregrijana 129, 149, 169
  - zasićena 127, 129
- Paralelno zračenje 390
- Parcijalni pritisak 39
- Parna duvaljka 247, 72
- Parni mjehurić 351
- Faschen 401
- Pére (značajka) 341
- Pense 257
- Perpetuum mobile (obični) 6, 56
  - druge vrste 56
- Planck, M. 33, 57, 120
- Planck-ov elementarni kvant 392
- Planck-ova razdioba energije u spektru 393
- Plinovi, idealni 22
- Plinska konstanta 22
  - opća 25
- Plinske mješavine 38
- Plinski generator 280
- Plinski stroj 28

nadžbe

ocesi 59  
radu 110

34

369

76  
k 81  
2, 354

sta-

nadžbe

ocesi 59  
radu 110

34

369

76  
k 81  
2, 354

sta-

- Plinski termometar 2
- Poise 308
- Poisson's ratio 308
- Pojedinačni pritisak v. parcijalni — 39
- Počina pumpa 166
- Politropa 47, 50, 85
  - određivanje eksponenta iz indikatorskog dijagrama 50
- Položno vrijeme 326
- Polupropusna stijenka 108
- Pothlađivanje rashladnog medija 244
- Potpuno izgaranje 259
- Potrošak pare, specifični 172
- Povratni (reverzibilni) procesi 58
- Prandtl 12, 344
  - (značajka) 342
- Praskavi plin 274
- Pravac miješanja 220
- Pravac okoline 178
- Pravilo miješanja 220
- Predgrijač vode 99, 100
- Pregrijati 169
- Prelaz topline 5, 307
- Prelaz topline konvekcijom 307
- Presjek, specifični 204
- Pretičak uzduha (uzdušni faktor) 264, 267
- Prevost 383
- Prigušivanje 94
- Prigušni ventil 241
- Prirodno zračenje 391
- Pritisak 13
- Pritisak zasićenja 127
- Proces istiskivanja 101
- Proces miješanja 218
- Proces parnog stroja 165
- Proces vrudeg uzduha 163
- Profil brzine 308, 338
- Promjene stanja 42
- Prostorni (zapreminski) udio 39
- Proširena mlaznica 206
- Proširenje presjeka (mlaznice) 209
- Protusmjerni izmjenjivač topline 363, 365, 372
- Provodenje topline 298
- Pv-dijagram 18
- Rad 16
  - u Pv-dijagram 18
- Radna sposobnost 176
- Rashladni stroj 232
  - parni 238
  - uzdušni 235, 66
- Rashladni množilac (stepen rashladnog učina) 233

- Rashladni spremnik 54
- Rashladni učin 233
- Rashladni uređaj s mlaznom duvaljkom 246
- Rasplinjivanje 279
- Ravna stijenka 320, 322, 346
- Reducirana jednadžba stanja 155
- Redukcija 281
- Refleksija 384
- Regenerativno grijanje pojne vode 131
- Regnault 140
- Regulacioni ventil 241
- Reverzibilan v. povratan 58
- Reynolds 344
  - (značajka) 336
- Sadržaj pare 137
  - sumpora 257
  - topline (entalpija) 96
- Samozapaljenje 257, 293
- Sastav goriva 257
- Sastav izgorenih plinova 265
- Sastav uzduha 262, 23
- Schack, A. 346, 400
- Schiller 344
- Schmidt, E. 327, 347, 350, 395, 396
- Schurrieg 350
- Selektivno (izlučno) zračenje 399
- Sellscopp, W. 350
- Sivo zračenje 388
- Sličnost, hidrodinamička 366
  - termička 340
- Sličnost polja 331
- Slobodna konvekcija 347
- Slobodna površina 338, 340
- Slobodni vodič 270
- Slobodno strujanje 307
- Snellijs 384
- Snop cijevi 346
- Snopić zračenja 390
- Specifična toplotna, crvena
  - molarna 35
  - politrope 48
  - prava 37
  - srednja, dijagram 37
- Specifični presjek 193
- Spremnik s podtlakom 90, 102
- Staklenik, djelovanje 398
- Stalnotlačni proces 91, 290, 293
- Stanaton (značajka) 342
- Stanje 11
- Statistička težina 119
- Stepan-Boltzmannov zakon 388

- Stijenka cijevi 303, 359  
 Stožac zračenja 390  
 Stratosfera, sastav 23  
 Stroj na tlačni uzduh 25, 34  
 Stroj na vrući uzduh 52  
 Strujanje 190  
 Stupanj djelovanja generatora (stupanj preobraženja) 282  
 Stupani djelovanja, indicirani 180  
 — termički 66  
 Stupanj dobrote (povratnosti) 180  
 Stupanj nepovratnosti 221, 223  
 Stupanj preobraženja (rasplanjivanje) 282  
 Sublimacija 131  
 Suhu izgoreni plinovi 266  
 Suhu led 252, 71  
 Suho usisavanje 242  
 Sutherland 315, 317  
 Svjetloća površine 383, 403  
 Svojstvo površine (zračenje) 384  
  
**Sel, J.** 171  
**Štetni prostor** 182  
 — površina 182  
  
**Taljenje** (kopnjenje) 131  
 Tehnički rad 92, 100  
 Teorem sličnosti 330  
 Temperatura 1  
 — apsolutna 21, 69, 114  
 — dovodenja topline, srednja 161  
 — ispuha 100, 35  
 — izgaranja 277  
 — konvencionalna 114  
 — na kraju ekspanzije 100  
 — stijenke, dozvoljena 161  
 — vrijenja 126  
 — zapaljenja 257  
 — zasićenja 127  
 — termodinamička 113  
 Temperaturni gradijent 299  
 Temperaturni pad 305  
 Temperaturno zračenje 383  
 Termički stupanj djelovanja 66  
 — — — Carnot-ovog procesa 70  
 Termodinamička temperatura 113  
 — vjerojatnost 119  
 Termoelement 3  
 Termometar 1, 2, 3  
 Težinski udio 40  
 Torpedo 33  
 Triple-(trojna) točka 131  
 Turbulentno strujanje 308  
  
 Učestalost titraja 383  
 Ukapljuvač (kondenzator) 165  
 Ukapljivanje 126  
 Ultracrveno zračenje 397  
 Unakrsni izmjenjivač topline 366  
 Univerzalna konstanta prema Boltzmann-u 122, 392  
 Unutranja energija 8, 26, 31  
 Usporedni smještaj toplinskih vodiča 300  
 Uvjeti sličnosti 333, 339  
 Uzastopni smještaj toplinskih vodiča 300  
 Uzdušni brod 15  
 Uzdušni plin 285  
 Uzdušni pritisak u različitim visinama atmosfere 22  
 Uzdušni spremnik 88  
 Uzvitlani pepeo 270  
  
 Val pritiska 206  
 Veličina stanja 1, 9, 14  
 Vjerovatnost stanja, termodinamička 121  
 Vlažna, (mokra) para 127, 129  
 Vlažnost (pare) 138  
 Vlažni plinovi izgaranja 266  
 Vlažnost goriva 257  
 Veda, pregrijana 153, 352  
 — specifična toplina 29  
 Vodena vrijednost struje 361  
 Voden plin 287  
 Vodikov termometar 4, 113  
  
**Waals, van der** 150  
**Wegener, A.** 262  
**Wienn-ov zakon pomjeravanja maksimuma** 394  
  
 Zaledivanje 132  
 Zasićena para 127, 129  
 Zasićeno područje 129  
 Zasićeno stanje 129  
 Zastor (zračenje) 404  
 Zaštita protiv zračenja 102  
 Značajke (prelaz topline) 336  
 Zračenje izolatora 397  
 Zračenje iz šupljine 127  
 Zračenje topline 382  
  
 Žilavost (tegljivost) 308, 313  
 — dinamička 308  
 — kapljevina 313  
 — kinematička 316  
 — plinova 314  
 Živin termometar 2