

*Uspomeni svoga učitelja
profesora Konstantina Voronjeca*

MILAN PLAVŠIĆ

MEHANIKA FLUIDA

DRUGO IZDANJE

Научна Репубика

BEOGRAD, 1988.

Milan Plavšić
MEHANIKA FLUIDA

Izdavač
IRO „Naučna knjiga“
Beograd, Uzun-Mirkova 5

Recenzenti
Prof. dr Anđelić
Prof. dr Marko D. Leko

Za izdavača
Dr Blažo Perović

Urednik
Nikola Dončev

Tehnički urednik
Gordana Krstić

Tiraž 500 primeraka

ISBN 86-23-21028-X

Štampa GRO „Prosveta“ – Niš,
Vojvode Gojka 14

PREDGOVOR

Sadržaj ovog udžbenika predstavlja program predmeta *Mehanika fluida* koji držim studentima studijske grupe za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu. Ranijim nastavnim planom studijske grupe za mehaniku bio je predviđen, iz oblasti mehanike fluida, samo jedan predmet: *Mehanika fluida*. Po novom nastavnim planu, međutim, pored predmeta *Mehanika fluida*, uvedeni su još kao posebni predmeti *Mehanika viskoznih fluida* i *Hidraulika i hidraulične mašine*. Jasno je stoga da se program sadašnjeg predmeta *Mehanika fluida* razlikuje od ranijeg. Iz programa ranijeg predmeta, naime, izostavljena su poglavlja koja se odnose na mehaniku viskoznih fluida i hidrauliku, čime je stvorena mogućnost da se ostalo gradivo u izvesnoj meri proširi, kako po sadržaju tako i po načinu izlaganja.

S obzirom da je udžbenik namenjen prvenstvo studentima studijske grupe za mehaniku Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu, pri pisanju udžbenika vodio sam računa o prethodnom znanju studenata. Studenti mehanike, naime, pre slušanja predmeta *Mehanika fluida*, slušaju i polažu kao posebne predmete *Tenzorski račun sa primenama u mehanici* i *Mehaniku kontinuuma*. Stoga se gradivo izlaže korišćenjem tenzorskog računa, a bazirano je na osnovama mehanike kontinuuma. Želja je, međutim, svakog autora da njegova knjiga može poslužiti širem krugu čitalaca, pa sam se i ja trudio da potrebne elemente mehanike kontinuuma, kao što su, na primer, analiza stanja brzine deformacije i analiza stanja napona, izložim u samoj knjizi, tako da čitaocu ove knjige prethodno znanje iz mehanike kontinuuma ne bude neophodno. Ostaje, međutim, činjenica da čitalac mora raspolagati osnovnim znanjem iz tenzorskog računa. Za studente mehanike Prirodno-matematičkog fakulteta u Beogradu to ne predstavlja poseban problem, ali onima koji tenzorski račun nisu izučavali može pričinjavati prilične teškoće, pa se stoga upućuju i na knjigu: Tatomir P. Anđelić: *Tenzorski račun*, treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1973. Napominjem da su ovde korišćene tenzorske oznake uglavnom usaglašene sa oznakama iz knjige prof. Anđelića. Izuzetak čini samo apsolutni ili Bjankijev izvod po vremenu koji se, zbog saglasnosti sa označavanjem u mehanici kontinuuma, označava još i simbolom $\dot{(\quad)} = \frac{\delta(\quad)}{\delta t}$.

Na kraju pojedinih odeljaka dat je izvestan broj zadataka. Zadatke sam uglavnom sam formulisao i to ne u cilju da sami za sebe predstavljaju određene probleme mehanike fluida, već u cilju da njihova rešavanja, kao korisna vežbanja, posluže za

uspešnije savlađivanje izloženog gradiva. Broj zadataka nije velik, jer čitaocima stoji na raspolaganju posebna zbirka rešenih zadataka: Lj. Krsmanović, V. Saljnikov, M. Šašić, M. Đurić, R. Ašković i V. Đorđević: *Zbirka zadataka iz mehanike fluida*, pod redakcijom dr K. Voronjeca, Naučna knjiga, Beograd 1965.

Recenzenti ove knjige bili su akademik prof. dr Tatomir P. Anđelić i prof. dr Marko D. Leko. Njihove brojne primedbe i sugestije bile su mi od velike koristi i ja im se najtoplije zahvaljujem. Jasno je da za sve propuste, kao autor, odgovornost snosim sam i unapred se zahvaljujem svakom ko mi na njih ukaže. Koristim i ovu priliku da se zahvalim kolegi Milošu Radosavljeviću, dipl. mehaničaru, za veliku pomoć pri izradi crteža. Najzad, zahvaljujem izdavačkom preduzeću „Naučna knjiga“, njegovoj tehničkoj redakciji i slugačima (matematičkog sloga) Beogradskog izdavačko-grafičkog zavoda za veliki trud da knjiga izađe što pre i u što boljem obliku.

Beograd, 1975.

Pisac

S A D R Ž A J

UVODNI DEO

1. Fluid kao neprekidna materijalna sredina	9
2. Masa i gustina	10
3. Jednačina konzervacije mase	11

PRVI DEO

KINEMATIKA FLUIDA

I OSNOVI KINEMATIKE FLUIDA

4. Kretanje fluida	15
5. Brzina	18
6. Strujno polje. Putanje čestica i strujne linije	20
7. Ubrzanje	28
8. Tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti	31
9. Glavni pravci tenzora brzine deformacije	40
10. Brzina kubne dilatacije	42
11. Cirkulacija i protok	44
12. Izvori i ponori	46
13. Potencijalna strujanja	48
14. Vrtložna strujanja	53
15. Lamelarna, složena lamelarna i zavojna strujanja	62

II DVODIMENZIJSKA STRUJANJA NESTIŠLJIVOG FLUIDA

16. Vrste dvodimenzijских strujanja	65
17. Ravanska strujanja	65
18. Strujna funkcija za ravanska strujanja	67
19. Vrtložna ravanska strujanja	70
20. Potencijalna ravanska strujanja	74
21. Primeri osnovnih potencijalnih ravanskih strujanja	78
22. Slaganje potencijalnih ravanskih strujanja	86
23. Primeri zbirnih potencijalnih ravanskih strujanja	88
24. Osnosimetrična strujanja	94
25. Strujna funkcija za osnosimetrična strujanja	95
26. Vrtložna osnosimetrična strujanja	97
27. Potencijalna osnosimetrična strujanja	99
28. Primeri potencijalnih osnosimetričnih strujanja	102

III DVODIMENZIJSKA STACIONARNA STRUJANJA STIŠLJIVOG FLUIDA

29. Ravanska stacionarna strujanja stišljivog fluida	108
30. Osnosimetrična stacionarna strujanja stišljivog fluida	111

IV PRIMENA KOMPLEKSNIH FUNKCIJA KOD RAVANSKIH STRUJANJA NESTIŠLJIVIH FLUIDA

31. Kompleksni potencijal	114
32. Kompleksni potencijali osnovnih strujanja	121
33. Kompleksni potencijali zbirnih strujanja	123
34. Primeri konformnog preslikavanja	133

DRUGI DEO

DINAMIKA FLUIDA

V OSNOVI DINAMIKE FLUIDA

35. Delovanje sila na fluid. Napon i tenzor napona	141
36. Zakoni količine kretanja i momenta količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja	147
37. Glavni pravci tenzora napona	150
38. Konstitutivne jednačine	152
39. Navije-Stoksove jednačine	156

VI DINAMIKA NEVISKOZNIH FLUIDA

40. Stanje napona u neviskoznom fluidu	159
41. Jednačine stanja neviskoznih fluida	160
42. Ojlerova jednačina	164
43. Helmholtzova jednačina	166
44. Integrali Ojlerove jednačine	168
45. Bernulijeva jednačina za nestišljive fluide	171
46. Bernulijeva jednačina za stišljive fluide	173
47. Primena Bernulijeve jednačine kod stacionarnih potencijalnih dvodimenzijskih strujanja nestišljivih fluida	176
48. Primena Bernulijeve jednačine kod stacionarnih potencijalnih ravanskih strujanja stišljivih fluida	185
49. Sile pritiska na cilindričnom telu pri ravanskom potencijalnom strujanju nestišljivih fluida	191
50. Praktično izračunavanje glavnog vektora i glavnog momenta	195
51. Primeri izračunavanja glavnog vektora i glavnog momenta	198

TREĆI DEO

STATIKA FLUIDA

VII OSNOVI STATIKE FLUIDA

52. Stanje napona u mirnom fluidu	205
53. Diferencijalne jednačine ravnoteže	206
54. Osnovna jednačina statike fluida	208
55. Uslovi integrabilnosti i integrali diferencijalnih jednačina ravnoteže	209

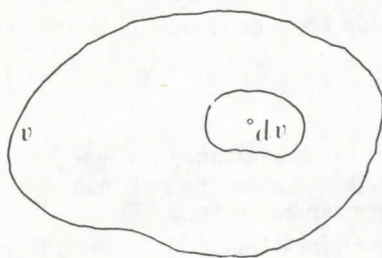
VIII RAVNOTEŽA BAROTROPNIH FLUIDA U POLJU SILE ZEMLJINE TEŽE

56. Nestišljivi fluidi	212
57. Stišljivi fluidi	215
58. Relativno mirovanje nestišljivih fluida	219
59. Delovanje pritiska na površi potopljene u tečnosti	224
60. Delovanje pritiska na telo potopljeno u tečnosti	230
Literatura	232

UVODNI DEO

1. Fluid kao neprekidna materijalna sredina. Iako se izučava kao posebna disciplina u okviru mehanike, mehanika fluida je po svojoj suštini deo mehanike kontinuuma. Mehanika kontinuuma, pa, prema tome, i mehanika fluida, bazirana je na pretpostavci da je materijalna sredina neprekidna. Fizička činjenica je, međutim, da materija ima diskretnu strukturu, pa je jasno da mehanika kontinuuma predstavlja izvesnu aproksimaciju. Ovde se nećemo upuštati u pitanje: u kojim slučajevima i pod kojim uslovima takva pretpostavka ima opravdanja, već samo želimo da podvučemo tu činjenicu.

Činjenica da se mehanika fluida izučava kao posebna disciplina posledica je određenih fizičkih svojstava fluida. Uzimajući, naime, u obzir da se pod fluidima podrazumevaju neprekidne materijalne sredine koje se nalaze u tečnom ili gasovitom stanju, jasno je tada da fluidi kao takvi poseduju izvesne fizičke osobine koje ih razlikuju od ostalih neprekidnih materijalnih sredina. Jedna od osnovnih takvih osobina je fizička činjenica da fluid ne može biti u ravnoteži pod dejstvom smičućih napona. Drugim rečima, ako bismo fluid nekom zamišljenom površi podelili na dva susedna dela, on ne može biti u ravnoteži ako uzajamno dejstvo ta dva susedna dela nije upravo na zajedničkoj površi.



Sl. 1

Definišući ga sa stanovišta mehanike kontinuuma, za fluid kažemo da predstavlja materijalnu sredinu koja se sastoji od neprekidno raspoređenih materijalnih tačaka — *čestica fluida*. Tako, na primer, kada govorimo o fluidu konačne zapremine v , tada pod tim podrazumevamo da je zapremina v u potpunosti ispunjena fluidom, tj. da svakoj tački zapremine odgovara po jedna čestica fluida. S obzirom da konačna zapremina v ima neograničen broj elemenata zapremine dv , fluid konačne zapremine

v imaće neograničen broj elemenata fluida zapremine $d v$. Ove elemente fluida zvaćemo *fluidni delići*. Prema svojoj definiciji, fluidni delići imaju infinitezimalnu zapreminu, a mogu biti proizvoljnog oblika (sl. 1). Kasnije ćemo videti da fluidnim delićima, u cilju lakšeg izvođenja određenih zaključaka i jednačina, možemo davati i konkretne oblike. Osim toga, u skladu i sa matematičkom analizom i sa mehanikom kontinuuma, svakoj tački u fluidu možemo koordinirati jedan fluidni delić.

2. Masa i gustina. Ako uočimo fluid sadržan u nekoj konačnoj zapremini v , ograničenoj zatvorenom površi a , kažemo da mu odgovara konačna masa m — pozitivni realni broj koji izražava količinu fluida sadržanog u uočenoj zapremini — koja podleže sledećim ograničenjima:

1. *Ukupna masa m fluida sadržanog u zapremini v jednaka je zbiru masa dm fluidnih delića $d v$ i neprekidna je funkcija zapremine.* Prema tome, sledi

$$(2.1) \quad m = \int_v dm$$

i vidimo da je masa merljiva veličina: fluidu konačne zapremine v odgovara konačna masa m .

2. *Masa fluida zapremine v ne menja se tokom vremena ako u uočenoj zapremini nema izvora ili ponora mase.* Prema tome, i masa fluidnih delića neće se menjati tokom vremena, nezavisno od toga što se delići tokom vremena mogu deformisati, tj. menjati i svoj oblik i svoju zapreminu. Na osnovu toga možemo pisati

(2.2)

$$\frac{d}{dt} dm = 0.$$

3. *Masa fluida zapremine v ne zavisi od oblika površi koja ograničava tu zapreminu niti od promene tog oblika tokom vremena.* To znači da je fizička dimenzija mase (M) nezavisna od dimenzija dužine (L) i vremena (T).

Na ovaj način uvedena, masa je osnovna fizička veličina koja je neprekidna funkcija zapremine i apsolutna skalarna invarijanta.

Ako je m masa fluida konačne zapremine v , tada količnik

(2.3)

$$\rho_{sr} = \frac{m}{v}$$

predstavlja *srednju gustinu* fluida sadržanog u konačnoj zapremini v . Srednja gustina fluida nije funkcija položaja, već je vezana za konačnu zapreminu i možemo je interpretirati kao masu jedinice zapremine fluida.

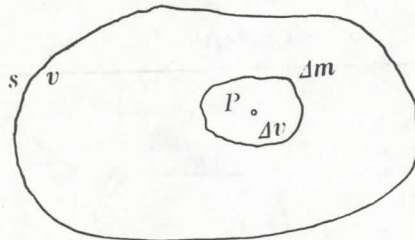
Uočimo sada u zapremini v fluida (sl. 2) neku tačku, obeležimo je sa P , koja se nalazi u proizvoljno izabranom konačnom elementu Δv zapremine v . Ako je masa izabranog elementa Δm , tada graničnu vrednost količnika $\frac{\Delta m}{\Delta v}$, kada Δv teži nuli, pri čemu se tačka P uvek nalazi u elementu Δv , nazivamo *gustina* u tački P fluida. Prema tome je

(2.4)

$$\rho = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta v} = \frac{dm}{dv}.$$

Gustina ρ fluida ima, u opštem slučaju, različite vrednosti u različitim tačkama fluida i različitim trenucima vremena, tj. funkcija je položaja i vremena, pa predstavlja polje skalarne veličine,

$$(2.5) \quad \rho = \rho(x^k, t),$$



Sl. 2

gde su x^k ($k=1, 2, 3$) koordinate tačaka fluida u odnosu na izabrani sistem referencije. Iz definicije gustine vidimo da ona ima dimenziju mase po jedinici zapremine, tj. $[\rho] = ML^{-3}$.

Iz (2.4) vidimo da gustinu u tački fluida možemo interpretirati kao srednju gustinu fluidnog delića koordiniranog toj tački. Na osnovu toga, iz (2.4) za masu fluidnog delića dobivamo

$$(2.6) \quad dm = \rho dv,$$

pa je, na osnovu (2.1), ukupna masa fluida sadržanog u zapremini v

$$(2.7) \quad m = \int_v \rho dv.$$

3. **Jednačina konzervacije mase.** Jedno od osnovnih svojstava mase je činjenica da se masa konačne zapremine fluida ne menja tokom kretanja. To svojstvo je izraženo jednačinom (2.2) i ona u tom obliku predstavlja jednu od matematičkih formulacija zakona konzervacije mase. Tu jednačinu, koristeći (2.6), možemo, očigledno, napisati u obliku

$$\dot{\rho} dv = 0.$$

odnosno

$$(3.1) \quad \dot{\rho} dv + \rho \dot{dv} = 0.$$

S obzirom da je gustina u opštem slučaju funkcija i položaja i vremena, iz (2.5) diferenciranjem po vremenu dobivamo

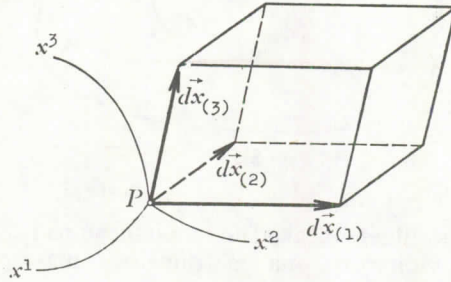
$$(3.2) \quad \dot{\rho} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho, \quad \left(v^k = \frac{dx^k}{dt} \right).$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x^k} \frac{dx^k}{dt}$$

Da bismo, međutim, na pogodan način izrazili brzinu promene zapremine fluidnog delića, uočićemo u nekoj tački P fluidni delić oblika elementarnog paralelepipeda čije su stranice određene infinitesimalnim vektorima $\vec{dx}_{(1)}$, $\vec{dx}_{(2)}$ i $\vec{dx}_{(3)}$ (sl. 3.). Zapreminu uočenog fluidnog delića možemo dobiti kao mešoviti proizvod tih vektora, tj.

$$(3.3) \quad dv = \epsilon_{ijk} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j dx_{(3)}^k, \quad (i, j, k = 1, 2, 3),$$

FLUV, ZAPREMINA,



Sl. 3

a možemo je izraziti i u obliku

$$(3.4) \quad dv = \frac{1}{3!} \delta_{ijk}^{pqr} dx_{(p)}^i dx_{(q)}^j dx_{(r)}^k, \quad (i, j, k, p, q, r = 1, 2, 3).$$

Apsolutnim diferenciranjem po vremenu, odavde dobivamo

$$\frac{\dot{d}v}{dt} = \frac{1}{2!} \delta_{ijk}^{pqr} \dot{dx}_{(p)}^i dx_{(q)}^j dx_{(r)}^k,$$

odnosno

$$(3.5) \quad \frac{\dot{d}v}{dt} = \frac{1}{2!} v_{,l}^i \delta_{ijk}^{pqr} dx_{(p)}^l dx_{(q)}^j dx_{(r)}^k,$$

pri čemu smo iskoristili relaciju

$$\dot{dx}_{(p)}^i = v_{,l}^i dx_{(p)}^l,$$

gde je $v_{,l}^i$ kovarijantni izvod kontravarijantnih koordinata vektora brzine u tački P .

Kako je dalje

$$\delta_{ijk}^{pqr} dx_{(p)}^l dx_{(q)}^j dx_{(r)}^k = \epsilon_{ijk} \epsilon^{pqr} dx_{(p)}^l dx_{(q)}^j dx_{(r)}^k = \epsilon_{ijk} \epsilon^{ljk} dv = 2 \delta_i^l dv,$$

iz (3.5) konačno dobivamo

(3.6)

$$\frac{\dot{d}v}{dt} = v_{,k}^k dv = \operatorname{div} \vec{v} dv.$$

Zamenjujući sada (3.2) i (3.6) u (3.1), dobivamo

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k \right) dv + \rho v_{,k}^k dv = 0.$$

Kako ova jednačina mora da važi za proizvoljno dv , sledi da mora biti

(3.7)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k + \rho v_{,k}^k = 0,$$

- jednačina kontinuiteta

što je uobičajeni oblik jednačine konzervacije mase, koja se u literaturi još naziva jednačina kontinuiteta. U vektorskom obliku napisana ova jednačina je

(3.8)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } \rho + \rho \text{ div } \vec{v} = 0.$$

Jednačinu (3.7) možemo, očigledno, napisati i u sledećem koordinatnom obliku

(3.9)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} = 0,$$

odnosno u odgovarajućem vektorskom obliku,

(3.10)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Izvedena jednačina konzervacije mase je lokalna, tj. mora biti zadovoljena u svim tačkama fluida, pod uslovom, jasno, da među njima nema singularnih tačaka.

Gustina ρ fluida je, rekli smo, u opštem slučaju funkcija i položaja i vremena. To znači da u različitim tačkama fluida gustina može imati različite vrednosti, a u jednoj fiksiranoj tački može imati različite vrednosti u različitim trenucima vremena. U specijalnom slučaju, međutim, kada gustina ima istu vrednost u svim tačkama fluida i u svim trenucima vremena, za fluid kažemo da je nestišljiv. Fizička činjenica je da u prirodi nema realnih fluida koji su nestišljivi. Istina je, međutim, da postoje fluidi koji su pod određenim uslovima, u koje se sada nećemo upuštati, mogu smatrati nestišljivim. Nestišljive fluide, prema tome, treba shvatiti kao jedan model fluida koji u izvesnoj meri predstavlja aproksimaciju realnih fluida. Prema tome, jednačinu

(3.11)

$$\rho = \text{const.}$$

možemo shvatiti kao uslov nestišljivosti fluida. Ako je taj uslov ispunjen, tj. ako se za fluid pretpostavi da je nestišljiv, iz (3.7) dobivamo jednačinu konzervacije mase u obliku

(3.12)

$$v_{,k}^k = 0.$$

Na osnovu ove jednačine, iz (3.6) zaključujemo da je uvek ispunjen uslov $\dot{dv} = 0$, tj. da fluidni delići neće tokom kretanja menjati svoju zapreminu. Jasno je da i fluid sadržan u konačnoj zapremini neće za vreme kretanja menjati svoju zapreminu.

Iz (3.12) vidimo da je kod nestišljivih fluida u svakoj tački uvek divergencija brzine jednaka nuli. Važno je, međutim, uočiti da obrnut zaključak ne važi, tj. ako je divergencija brzine uvek jednaka nuli u svim tačkama fluida, fluid ne mora biti nestišljiv. Da bismo to pokazali, stavimo u jednačini (3.7) da je $v^k_{,k}=0$. Tada dobivamo

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_{,k} v^k = 0,$$

odnosno, ako još uzmemo da je $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$,

$$\rho_{,k} v^k = 0$$

što znači da je vektor brzine upravan na gradijent gustine, tj. da se fluid kreće u slojevima jednake gustine.

PRVI DEO

KINEMATIKA FLUIDA

I OSNOVI KINEMATIKE FLUIDA

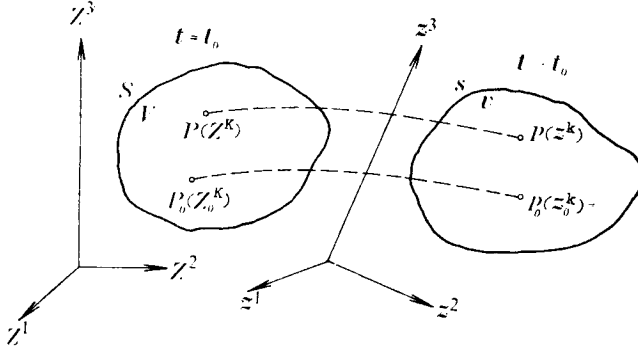
4. Kretanje fluida. Pri proučavanju kretanja fluida smatramo da se ono odvija u trodimenzionom euklidskom prostoru. Neka se u nekom uočenom trenutku vremena, koji ćemo obeležiti sa t_0 i smatrati ga za početni, fluid nalazi u konačnoj zapremini V , ograničenoj zatvorenom površi A . Za fluid tada kažemo da se nalazi u *početnoj konfiguraciji*, koja odgovara početnom trenutku vremena. U nekom drugom trenutku vremena, $t > t_0$, fluid će se nalaziti u nekoj drugoj oblasti v prostora, koja je ograničena zatvorenom površi a , i kažemo da se nalazi u *trenutnoj konfiguraciji*, koja odgovara trenutku t vremena. S obzirom da pretpostavljamo da je fluid neprekidan u početnoj konfiguraciji, pretpostavićemo da je neprekidan i u trenutnoj konfiguraciji, tj. da je neprekidnost očuvana za vreme kretanja. Pošto se kretanje odvija u euklidskom prostoru, položaj čestica fluida, u bilo kojoj konfiguraciji, uvek je moguće određivati u odnosu na proizvoljno izabran sistem Dekartovih pravougljih koordinata.

Uzmimo da je u početnoj konfiguraciji položaj čestica fluida određen Dekartovim pravougljim koordinatama Z^K ($K=1, 2, 3$). Znači, svakoj tački oblasti V , sa pravougljim Dekartovim koordinatama Z^K , odgovara jedna i samo jedna čestica fluida. Dekartov pravougli sistem koordinata Z^K biramo proizvoljno i on je vezan za početnu konfiguraciju fluida. U trenutku t vremena, kada se fluid nalazi u trenutnoj konfiguraciji v , položaj čestica fluida može biti određen pravougljim Dekartovim koordinatama z^k ($k=1, 2, 3$). Znači, svakoj tački oblasti v , sa pravougljim Dekartovim koordinatama z^k , odgovara jedna i samo jedna čestica fluida.

U toku kretanja, polazeći od početne konfiguracije, fluid prolazi kroz razne trenutne konfiguracije. Svakoj tački početne konfiguracije V odgovara po jedna čestica fluida. U toku kretanja svaka od tih čestica nalaziće se u jednoj od tačaka trenutne konfiguracije v . Za poznavanje kretanja fluida potrebno je da znamo položaje svih njegovih čestica u svim trenutnim konfiguracijama, pri čemu se svaka od tih čestica nalazila u odgovarajućoj tački početne konfiguracije. Prema tome, ako se neka čestica nalazila u tački P_0 početne konfiguracije, sa koordinatama Z_0^k , u trenutku t vremena ona će se nalaziti u tački p_0 trenutne konfiguracije, sa koordinatama z_0^k . Bila koja druga čestica, koja se u početnoj konfiguraciji nalazila u tački

P , sa koordinatama Z^K , u trenutnoj konfiguraciji će se nalaziti u tački p , sa koordinatama z^k (sl.4.). Kretanje proizvoljne čestice, prema tome, određeno je funkcijama koje tačke početne konfiguracije preslikavaju u tačke trenutne konfiguracije,

$$(4.1) \quad z^k = z^k(Z^K, t), \quad (k, K = 1, 2, 3).$$



Sl. 4

Pretpostavljamo da je ovo preslikavanje jednoznačno, tj. da se svaka tačka iz početne konfiguracije preslikava u jednu i samo jednu tačku trenutne konfiguracije. Osim toga, pretpostavljamo da su funkcije preslikavanja neprekidne i diferencijabilne kao i da gornjem preslikavanju odgovara jednoznačno inverzno preslikavanje

$$(4.2) \quad Z^K = Z^K(z^k, t),$$

pri čemu su i ove funkcije neprekidne i diferencijalne.

Govoreći o preslikavanjima (4.1) i (4.2), mi govorimo o preslikavanju tačke, kao geometrijskom pojmu, iz početne u trenutnu konfiguraciju. Međutim, ako tački, kao geometrijskom pojmu, pridružimo pojam čestice fluida, na taj način što kažemo da svakoj tački odgovara jedna i samo jedna čestica fluida, onda je jasno da koordinate z^k određuju položaj u trenutnoj konfiguraciji one čestice koja se u početnoj konfiguraciji nalazila u tački sa koordinatama Z^K . Iz tog razloga uobičajeno je da se kaže da koordinate z^k određuju položaj „čestice Z^K “ u pojedinim trenucima vremena. Koordinate Z^K identifikuju se, dakle, sa pojmom čestice. Drugim rečima, te koordinate su vezane za određenu česticu i ona ih „nosi“ kroz sve trenutne konfiguracije, pa, na taj način, i određuju česticu koja se prati tokom kretanja. Zbog ovakve interpretacije koordinata Z^K , one se nazivaju *materijalne koordinate*. Koordinate z^k , međutim, s obzirom da određuju položaj odgovarajuće čestice u trenutnoj konfiguraciji, nazivaju se *prostorne koordinate*. Napomenimo još da se u literaturi, umesto naziva materijalne i prostorne koordinate, mogu naći nazivi *Lagranževe* i *Ojlerove koordinate*.

Umesto Dekartovih pravougljih, pri opisivanju kretanja fluida možemo uvesti proizvoljne, u euklidskom prostoru dopustive krivolinijske koordinate. Ako to učinimo koordinatnim transformacijama

$$(4.3) \quad \begin{aligned} Z^K &= Z^K(X^L), & X^K &= X^K(Z^L), \\ z^k &= z^k(x^l), & x^k &= x^k(z^l), \end{aligned}$$

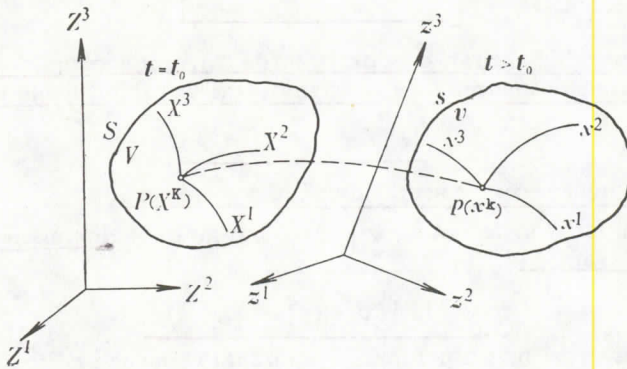
kretanje čestica fluida će biti određeno preslikavanjem

$$(4.4) \quad x^k = x^k(X^K, t),$$

odnosno

$$(4.5) \quad X^K = X^K(x^k, t),$$

gde su X^K materijalne krivolinijske, a x^k prostorne krivolinijske koordinate (sl. 5). Preslikavanje (4.4) takođe je jednoznačno, a funkcije koje ga određuju su neprekidne i diferencijabilne. Preslikavanje (4.5) je inverzno preslikavanju (4.4), a takođe



Sl. 5

je jednoznačno i funkcije koje ga određuju su neprekidne i diferencijabilne. Napomenimo bez izvođenja dokaza, da će preslikavanje (4.4) imati inverzno preslikavanje, dato sa (4.5), onda i samo onda kad je Jakobijeva determinanta koja odgovara funkcijama preslikavanja različita od nule, tj. kad je

$$\det(x^k_{;K}) = \left| \frac{\partial x^k}{\partial X^K} \right| \neq 0.$$

Sistemi materijalnih i prostornih koordinata biraju se proizvoljno i nezavisno jedan od drugog. Prvi je vezan za početnu, a drugi za trenutnu konfiguraciju. Njihov izbor, jasno, zavisi od konkretnog problema i vrši se uvek tako da se proučavanje učini što je moguće jednostavnijim. U odnosu na tako izabrane sisteme koordinata, kretanje je određeno punktualnim preslikavanjem (4.4), koje u stvari, za kontinualnu promenu vremena t , predstavlja konačne jednačine kretanja određenih čestica fluida. Napomenimo, na kraju, da je u većini slučajeva sisteme materijalnih i prostornih koordinata pogodno tako birati da se u početnoj konfiguraciji poklapaju, tj. da je

$$(4.6) \quad \begin{aligned} z^k &= \delta_K^k Z^K, & (z^1 = Z^1, z^2 = Z^2, z^3 = Z^3), \\ x^k &= \delta_K^k X^K, & (x^1 = X^1, x^2 = X^2, x^3 = X^3), \end{aligned}$$

za $t = t_0$.

KLASIFIKACIJA STRUJANJA U ZAVISNOSTI OD KOORDINATA BRZINE

5. Brzina. Jednačine

$$(5.1) \quad x^k = x^k(X^K, t),$$

kao neprekidne funkcije vremena, predstavljaju konačne jednačine kretanja određenih „čestica X^K “ fluida. One, prema tome, određuju položaje tih čestica u pojedinim trenucima vremena u odnosu na sistem prostornih koordinata. Pod brzinom „čestice X^K “ podrazumevamo brzinu promene njenog položaja u odnosu na sistem prostornih koordinata. Prema tome, kontravarijantne koordinate brzine „čestice X^K “ su

$$(5.2) \quad v^k = \dot{x}^k = \frac{\partial x^k(X^K, t)}{\partial t},$$

pri čemu prilikom diferenciranja, s obzirom da govorimo o brzini „čestice X^K “, materijalne koordinate smatramo za konstante. Iz (5.2) zaključujemo da je

$$(5.3) \quad v^k = v^k(X^K, t),$$

tj. da je brzina određene čestice neprekidna funkcija vremena.

Ako, međutim, koristeći (4.5), iz (5.2), odnosno (5.3) eliminišemo materijalne koordinate, dobivamo

$$(5.4) \quad v^k = v^k[X^K(x^r, t), t] = v^k(x^r, t).$$

Na ovaj način izražena, brzina je funkcija položaja i vremena i ne znamo na koju se česticu odnosi. Ako se, naime, u nekom trenutku vremena u tački prostora sa koordinatama x^k uoči neka čestica fluida, njena brzina će biti određena relacijom (5.4); u nekom drugom trenutku vremena, u istoj tački prostora nalaziće se neka druga čestica fluida i njena brzina će, na osnovu (5.4), u opštem slučaju biti različita od brzine prvobitno uočene čestice. Izražena na ovaj način, brzina, dakle, predstavlja vektorsko polje. U svakoj tački polja brzina je funkcija vremena; u svakom fiksiranom trenutku vremena ona je funkcija položaja.

Određivanje brzina čestica fluida predstavlja jedan od osnovnih zadataka pri proučavanju kretanja — strujanja fluida. Na osnovu napred izloženog, vidimo da postoje dve različite mogućnosti za proučavanje strujanja. Prva od njih sastoji se u tome što se čestice fluida prate tokom kretanja kroz prostor, pri čemu se sve veličine koje karakterišu njihovo kretanje (položaji, brzine itd.) izražavaju kao funkcije vremena. Takav način proučavanja strujanja potiče od Lagranža i on je analogan načinu koji se sprovodi pri proučavanju kretanja u mehanici materijalne tačke. Druga mogućnost potiče od Ojlera i sastoji se u tome što se veličine koje karakterišu strujanje izražavaju kao funkcije položaja i vremena. Te veličine onda predstavljaju odgovarajuća polja fizičkih veličina i proučavanje strujanja se svodi na određivanje tih polja. Ta polja mogu biti skalarna, vektorska ili tenzorska, u zavisnosti od toga o kakvim se veličinama radi.

Iako su različite, obe mogućnosti moraju dovesti do istih rezultata pri rešavanju konkretnih problema. Primena jedne ili druge mogućnosti ima za posledicu manju ili veću pogodnost u pojedinim slučajevima. Tako, na primer, Lagranžev način proučavanja strujanja se pokazuje kao pogodan kod eksperimentalnih ispitivanja. Za teorijska istraživanja, međutim, Ojlerov način proučavanja strujanja se pokazuje mnogo pogodnijim.

Imajući napred izloženo u vidu, mi ćemo se nadalje, pri proučavanju strujanja, koristiti prvenstveno Ojlerovim načinom. Uočavaćemo, naime, trenutnu konfiguraciju v fluida, u odnosu na proizvoljno izabrani sistem prostornih koordinata, i sve veličine ćemo smatrati za funkcije položaja i vremena. Određivanjem tih veličina u svim tačkama prostora i u svim trenucima vremena, strujanje nam postaje potpuno određeno.

U najopštijem slučaju brzina ima sve tri koordinate različite od nule, pri čemu svaka od njih zavisi od svih triju koordinata položaja i vremena, tj.

$$(5.5) \quad v^1(x^1, x^2, x^3, t) \neq 0, \quad v^2(x^1, x^2, x^3, t) \neq 0, \quad v^3(x^1, x^2, x^3, t) \neq 0.$$

Za strujanje tada kažemo da je trodimenzijsko. Sem ovog, najopštijeg slučaja, mogući su i specijalni slučajevi, u kojima brzina zadovoljava neke posebne uslove.

Za strujanje kažemo da je linijsko ako se može izabrati takav sistem koordinata (pravolinijskih ili krivolinijskih) u odnosu na koji će koordinate brzine biti

$$(5.6) \quad v^1 = v^1(x^1, t), \quad v^2 = 0, \quad v^3 = 0.$$

U slučaju ovakvog strujanja i ovako izabranog sistema koordinata, u svim tačkama koordinatne površi $x^1 = \text{const.}$ brzine će u svakom trenutku vremena biti međusobno jednake. Neposredna generalizacija ovog strujanja je pseudolinijsko strujanje prve vrste.

$$(5.7) \quad v^1 = v^1(x^1, x^2, x^3, t), \quad v^2 = 0, \quad v^3 = 0,$$

i pseudolinijsko strujanje druge vrste,

$$(5.8) \quad v^1 = v^1(x^1, t), \quad v^2 = v^2(x^1, t), \quad v^3 = v^3(x^1, t).$$

Za strujanje kažemo da je dvodimenzijsko ako se može izabrati takav sistem koordinata u odnosu na koji će koordinate brzine biti

$$(5.9) \quad v^1 = v^1(x^1, x^2, t), \quad v^2 = v^2(x^1, x^2, t), \quad v^3 = 0.$$

U slučaju ovakvog strujanja i ovako izabranog sistema koordinata, brzine će u svakom trenutku vremena biti jednake u odgovarajućim tačkama svih koordinatnih površi $x^3 = \text{const.}$, pa je za proučavanje ovakvih strujanja dovoljno proučiti ga u jednoj od tih površi, recimo $x^3 = 0$. Neposredna generalizacija ovog strujanja je pseudodvodimenzijsko strujanje prve vrste,

$$(5.10) \quad v^1 = v^1(x^1, x^2, x^3, t), \quad v^2 = v^2(x^1, x^2, x^3, t), \quad v^3 = 0,$$

i pseudodvodimenzijsko strujanje druge vrste,

$$(5.11) \quad v^1 = v^1(x^1, x^2, t), \quad v^2 = v^2(x^1, x^2, t), \quad v^3 = v^3(x^1, x^2, t).$$

Kod strujanja (5.10) brzine su uvek tangentne na koordinatnim površima $x^3 = \text{const.}$, međutim, strujanje nije identično u svim koordinatnim površima $x^3 = \text{const.}$, jer brzine zavise i od koordinata x^3 . Kod strujanja (5.11) brzine su uvek identične u svim koordinatnim površima $x^3 = \text{const.}$, ali nisu na njih tangentne.

Pomoću koordinata metričkog tenzora, u odnosu na izabrani sistem prostornih koordinata, iz kontravarijantnih koordinata brzine možemo odrediti kovarijantne i fizičke koordinate. Kovarijantne koordinate su

$$(5.12) \quad v_i = g_{ij} v^j,$$

a fizičke

$$(5.13) \quad v_{;i} = \sqrt{g_{ii}} v^i = \frac{v^i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad (\text{ne sumirati}),$$

gde su g_{ij} koordinate odgovarajućeg metričkog tenzora.

Kvadrat intenziteta vektora brzine je

$$(5.14) \quad (v)^2 = g_{ij} v^i v^j = v_i v^i,$$

a intenzitet brzine jednak je pozitivnoj vrednosti kvadratnog korena iz kvadrata intenziteta, tj.

$$(5.15) \quad v = +\sqrt{(v)^2} = +\sqrt{g_{ij} v^i v^j} = +\sqrt{v_i v^i}.$$

V e ž b a n j a

1. Napisati kontravarijantne, kovarijantne i fizičke koordinate brzine u Dekartovim pravouglim, cilindarskim polarnim i sfernim polarnim koordinatama.

2. Odrediti intenzitet brzine u Dekartovim pravouglim, cilindarskim polarnim i sfernim polarnim koordinatama.

3

6. Strujno polje. Putanje čestica i strujne linije. Polje u kome su definisane sve veličine koje karakterišu strujanje fluida nazivamo strujno polje. Te veličine, kao što smo i ranije pomenuli, izražavamo kao funkcije položaja i vremena, i one, kao takve, same za sebe predstavljaju određena polja fizičkih veličina. U opštem slučaju, kada su veličine koje ih određuju eksplicitne funkcije i od vremena, ta polja su nestacionarna i, kao takva, određuju nestacionarno strujno polje. Ako, pak, veličine koje određuju strujanje nisu eksplicitne funkcije vremena, tada one predstavljaju stacionarna polja i, kao takva, određuju stacionarno strujno polje. Kada je strujno polje nestacionarno, kažemo da mu odgovara nestacionarno strujanje. Nasuprot tome, stacionarnom strujnom polju odgovara stacionarno strujanje.

Brzina je osnovna veličina koja karakteriše strujno polje. Izrazom (5.4) određeno je nestacionarno vektorsko polje brzine i ono, kao takvo, odgovara nestacionarnom strujnom polju, odnosno nestacionarnom strujanju. Ako, pak, brzina ne zavisi eksplicitno od vremena, tj. kad je funkcija oblika

$$(6.1) \quad v^k = v^k(x^l),$$

kažemo da predstavlja stacionarno vektorsko polje, koje odgovara stacionarnom strujnom polju, odnosno stacionarnom strujanju. Kod stacionarnih strujanja brzina ima istu vrednost u fiksiranim tačkama polja u svim trenucima vremena, bez obzira na činjenicu što se u različitim trenucima vremena u tim tačkama nalaze različite čestice fluida.

Tačke strujnog polja u kojima je brzina jednaka nuli nazivaju se zaustavne tačke. Ukoliko ih ima u strujnom polju, zaustavnih tačaka može biti jedna ili konačan broj. Osim toga, u strujnom polju može biti tačaka u kojima brzina nije definisana, u kom slučaju je strujno polje prekidno, a tačke prekida se nazivaju singularne tačke strujnog polja. Pri proučavanju strujanja, singularne tačke (ukoliko ih ima) se izdvajaju (izoluju) iz strujnog polja, tako da se, na taj način, strujno polje opet

definiše kao neprekidno. Ukoliko ih ima u strujnom polju, singularne tačke mogu u njemu biti na različite načine raspoređene. Mogu, naime, biti diskretno raspoređene ili neprekidno raspoređene duž jedne ili konačnog broja linija, na jednoj ili konačnom broju površi i u jednoj ili konačnom broju konačnih zapremina strujnog polja.

Linija koja predstavlja skup svih tačaka kroz koje prolazi čestica fluida za vreme kretanja naziva se putanja ili trajektorija čestice. Jednačina putanje čestice fluida je, u stvari, konačna jednačina njenog kretanja,

$$(6.2) \quad x^k = x^k(X^K, t), \quad X^K = \text{const.}, \quad t_0 \leq t < \infty.$$

Ukoliko je u strujnom polju poznato polje brzine, konačne jednačine putanje čestice dobivamo integracijom sistema diferencijalnih jednačina.

$$(6.3) \quad dx^k = v^k(x^l, t) dt,$$

uz, recimo, početne uslove $x^k = \delta_K^k X^K$ za $t = t_0$.

Linija koja predstavlja skup svih tačaka strujnog polja u kojima je brzina kolinarna sa orijentisanim elementom luka uočene linije naziva se strujnica ili strujna linija. Strujne linije su, u stvari, vektorske linije vektorskog polja brzine. Diferencijalne jednačine strujnih linija dobivamo iz geometrijskog uslova da se pravac brzine poklapa sa pravcem orijentisanog elementa strujne linije, tj. iz uslova da je vektorski proizvod vektora brzine i orijentisanog elementa luka strujne linije jednak nuli,

$$(6.4) \quad \varepsilon_{ijk} v^j dx^k = 0,$$

gde su dx^k kontravarijantne koordinate orijentisanog elementa luka strujne linije. Gornjoj vektorskoj jednačini odgovaraju sledeće tri skalarne:

$$v^2 dx^3 - v^3 dx^2 = 0, \quad v^3 dx^1 - v^1 dx^3 = 0, \quad v^1 dx^2 - v^2 dx^1 = 0,$$

odakle dobivamo sistem od dve diferencijalne jednačine strujnih linija

$$(6.5) \quad \frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3}.$$

Integracijom ovog sistema diferencijalnih jednačina, pri čemu vreme smatramo za parametar, dobivamo konačne jednačine strujnih linija

$$(6.6) \quad f_1(x^1, x^2, x^3, t) = C_1, \quad f_2(x^1, x^2, x^3, t) = C_2,$$

gde su C_1 i C_2 integracione konstante. Svaka za sebe, funkcije f_1 i f_2 , za različite vrednosti integracionih konstanta, određuju familije površi u prostoru, koje se nazivaju strujne površi. Presecima ovih dveju familija strujnih površi određene su strujne linije u prostoru. Kod nestacionarnih strujanja, kad brzina eksplicitno zavisi od vremena, strujne površi, pa, prema tome, i strujne linije menjaju se tokom vremena u prostoru, što se neposredno vidi iz njihovih jednačina. Iz tog razloga je očigledno da se strujne linije ne poklapaju sa putanjama čestica fluida. Kad je, međutim, strujanje stacionarno, s obzirom da brzina ne zavisi eksplicitno od vremena, iz diferencijalnih jednačina (6.3) možemo eliminisati vreme,

$$dt = \frac{dx^k}{v^k}, \quad (\text{ne sumirati}),$$

tako da dobivamo

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2} = \frac{dx^3}{v^3},$$

pa vidimo da se, u slučaju stacionarnih strujanja, diferencijalne jednačine iz kojih određujemo putanje čestica fluida poklapaju sa diferencijalnim jednačinama strujnih linija (6.5). Prema tome, zaključujemo, kod stacionarnih strujanja strujne linije su fiksne linije u prostoru i poklapaju se sa putanjama čestica fluida.

Linije koje predstavljaju skup uvek istih čestica fluida nazivaju se materijalne linije. Pri kretanju fluida, s obzirom da se i njegove čestice kreću, jasno je da se i materijalne linije na odgovarajući način kreću kroz prostor. Kada se strujne linije poklapaju sa putanjama čestica fluida, one su materijalne linije koje su stacionarne (ustaljene ili fiksne) u prostoru. Taj uslov je, kao što smo videli, ispunjen kad je strujanje stacionarno, tj. kad brzina predstavlja stacionarno vektorsko polje. Moguće je, međutim, da strujne linije budu stacionarne linije, tj. da se poklapaju sa putanjama čestica fluida i kada strujanje nije stacionarno. Stacionarnost strujanja, prema tome, je dovoljan ali ne i potreban uslov. Da bismo to pokazali, odredimo prvo uslov pod kojim će vektorske linije nekog vektorskog polja biti materijalne linije. U tom cilju, uočimo u strujnom polju vektorsko polje

$$c^k = c^k(x^l, t).$$

Vektorske linije ovog vektorskog polja određujemo iz uslova da je u svakoj tački linije, u fiksiranom trenutku vremena, vektor kolinearan sa orijentisanim elementom luka vektorske linije, tj. iz sistema od dve nezavisne diferencijalne jednačine

$$\varepsilon_{ijk} c^j dx^k = 0, \quad \left(\frac{dx^1}{c^1} = \frac{dx^2}{c^2} = \frac{dx^3}{c^3} \right),$$

gde smo sa dx^k označili kontravarijantne koordinate orijentisanog elementa luka vektorske linije vektorskog polja c^k .

U nekom fiksiranom trenutku vremena, vektorska linija vektorskog polja c^k predstavlja određenu materijalnu liniju, tj. u svakoj njenoj tački nalazi se po jedna čestica fluida. Da bi ta linija, kao materijalna, i dalje bila vektorska linija vektorskog polja c^k , mora biti

$$\varepsilon_{ijk} \dot{c}^j dx^k = 0,$$

odnosno

$$\varepsilon_{ijk} \dot{c}^j dx^k + \varepsilon_{ijk} c^j \dot{dx}^k = 0.$$

Stavljajući

$$\dot{c}^j = \frac{\partial c^j}{\partial t} + c^l_{,l} v^l, \quad \dot{dx}^k = v^k_{,l} dx^l,$$

prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial c^j}{\partial t} + c^l_{,l} v^l \right) dx^k + \varepsilon_{ijk} c^j v^k_{,l} dx^l = 0.$$

S obzirom da je dx^k orijentisani element luka vektorske linije, možemo staviti $dx^k = ac^k$, gde je a proizvoljni skalarni faktor, pa prethodna jednačina postaje

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial c^j}{\partial t} c^k + \varepsilon_{ijk} c_{,l}^j v^l c^k + \varepsilon_{ijk} c^j c^l v_{,l}^k = 0,$$

i možemo je, očigledno, napisati u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \left(\frac{\partial c^j}{\partial t} + c_{,l}^j v^l - c^l v_{,l}^j \right) c^k = 0,$$

odnosno

$$\varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial c^j}{\partial t} + (c^j v^l - c^l v^j)_{,l} + v^j c_{,l}^j \right] c^k = 0$$

Ako, dalje, drugi član u zagradi izrazimo na sledeći način

$$\begin{aligned} (c^j v^l - c^l v^j)_{,l} &= \delta_{mn}^{jl} (c^m v^n)_{,l} = \delta_{rmn}^{rjl} (c^m v^n)_{,l} \\ &= \varepsilon^{rjl} \varepsilon_{rmn} (c^m v^n)_{,l} = \varepsilon^{jlr} (\varepsilon_{rmn} c^m v^n)_{,l}, \end{aligned}$$

dobivamo, konačno,

$$(6.7) \quad \varepsilon_{ijk} \left[\frac{\partial c^j}{\partial t} + \varepsilon^{jlr} \varepsilon_{rmn} (c^m v^n)_{,l} + v^j c_{,l}^j \right] c^k = 0,$$

ili u vektorskom obliku

$$(6.8) \quad \left[\frac{\partial \vec{c}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{c} \times \vec{v}) + \vec{v} \text{div} \vec{c} \right] \times \vec{c} = 0,$$

što predstavlja uslov da vektorske linije vektorskog polja \vec{c} budu materijalne linije.

Posebno, ako uslov (6.7) primenimo na vektorsko polje brzine, $v^k = v^k(x^l, t)$, dobivamo

$$(6.9) \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v^j}{\partial t} v^k = 0, \text{ odnosno } \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \times \vec{v} = 0,$$

što predstavlja uslov za stacionarnost (ustaljenost) strujnih linija, jer je očigledno da se one neće menjati ako je promena vektora brzine u zavisnosti od promene samo vremena (lokalno ubrzanje), u svakoj njihovoj tački i u svakom trenutku vremena, kolinearna sa vektorom brzine. Prema tome, zaključujemo, važi sledeći stav:

4) Strujne linije su materijalne linije, tj. poklapaju se sa putanjama čestica fluida, ako i samo ako su stacionarne. DOKAZATI

Nestacionarna strujanja kod kojih je ispunjen uslov (6.9) nazivaju se *strujanja sa stacionarnim strujnim linijama*. Kod takvih strujanja, na osnovu (6.9), lokalno ubrzanje u svakoj tački strujnog polja možemo izraziti u obliku

$$(6.10) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = F(x^k, t) \vec{v},$$

gde funkcija $F(x^k, t)$ predstavlja proizvoljni skalarni faktor.

Iz (6.9) vidimo da je stacionarnost strujanja, tj. uslov da je $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0$, dovoljan ali ne i potreban uslov da strujne linije budu stacionarne, tj. da se poklapaju sa putanjama čestica fluida. Potreban i dovoljan uslov za to je, prema tome, uslov (6.9).

V e ž b a n j a

1. Ako, u odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata x, y, z , nestacionarnom strujnom polju odgovara nestacionarno polje brzine

$$\dot{x} = \frac{x}{1+t}, \quad \dot{y} = 1, \quad \dot{z} = 0,$$

odrediti putanje čestica fluida i strujne linije.

R e š e n j e. S obzirom da je projekcija brzine na z osu jednaka nuli, a da projekcije brzine na x i y osu ne zavise od koordinate z , iz zadatog polja brzine zaključujemo da ono odgovara nestacionarnom i ravanskom strujanju. Prema tome, s obzirom da je strujanje identično u svim koordinatnim ravnima $z = \text{const.}$, dovoljno ga je proučiti u jednoj od tih ravni, recimo $z = 0$, pa da ono bude poznato u celom trodimenzionom prostoru.

Ako sisteme materijalnih i prostornih Dekartovih pravougljih koordinata tako izaberemo da se u početnom trenutku $t = t_0 = 0$ poklapaju, tj. da je $x = X, y = Y$, za $t = t_0 = 0$, diferencijalne jednačine trajektorija čestica fluida, na osnovu (6.3), su

$$dx = \frac{x}{1+t} dt, \quad dy = dt,$$

uz gornje početne uslove. Integracijom ovih jednačina dobivamo

$$x = C_1(1+t), \quad y = C_2 + t.$$

Integracione konstante C_1 i C_2 određujemo iz uslova da je $x = X$ i $y = Y$ za $t = 0$; na taj način dobivamo

$$C_1 = X, \quad C_2 = Y.$$

Zamenjujući to u gornje jednačine, dobivamo konačne parametarske jednačine trajektorija čestica fluida

$$x = X(1+t), \quad y = Y+t.$$

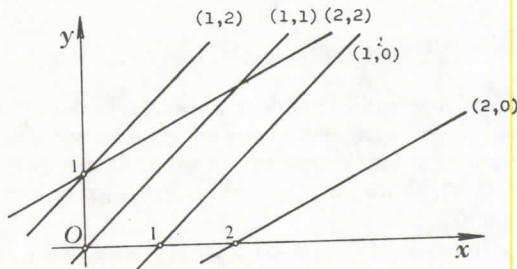
Eliminacijom vremena iz ovih jednačina, dobivamo konačnu jednačinu trajektorija pojedinih čestica u obliku

$$x - X(1+y) + XY = 0.$$

Svakoј čestici fluida odgovaraju određene materijalne koordinate X i Y . Tako, na primer, jednačina putanje čestice koja se u početnoj konfiguraciji nalazila u tački $X=1, Y=1$, čestice $(1, 1)$, biće

$$y = x.$$

Putanje pojedinih čestica (X, Y) prikazane su na slici 6. Kao što se vidi, putanje čestica su prave linije. Svaka od čestica fluida kreće se, dakle, po jednoj od tih pravih linija pri čemu će u različitim trenucima vremena biti u različitim njenim tačkama.



Sl. 6

Diferencijalna jednačina strujnih linija, na osnovu (6.5) je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+t}{x},$$

odnosno

$$dy = \frac{1+t}{x} dx.$$

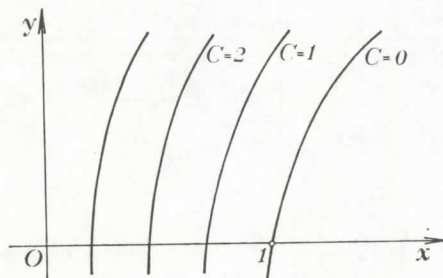
Integracijom, dobivamo konačne jednačine strujnih linija,

$$y = (1+t) \ln x + C,$$

gde je C integraciona konstanta. Za različite vrednosti konstante C dobivamo različite strujne linije. Iz jednačina strujnih linija vidimo da se one menjaju tokom vremena. U početnom trenutku vremena, $t=0$, konačne jednačine strujnih linija su

$$y = \ln x + C$$

i prikazane su na slici 7. U ma kom drugom trenutku vremena jednačine strujnih linija će se promeniti, pa će i oblik strujnih linija biti drugačiji.



Sl. 7

2. Ako su, u odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata, koordinate brzine

$$\dot{x} = a \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad \dot{y} = a \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \dot{z} = 0, \quad (a = \text{const.}),$$

odrediti putanje čestica i strujne linije.

R e š e n j e. Iz zadatog polja brzine vidimo da ono odgovara stacionarnom i ravanskom strujanju. Osim toga uočavamo da je tačka $x=y=0$ singularna tačka strujnog polja, jer brzina u toj tački nije definisana. Iz tih razloga strujanje ćemo posmatrati u ravni $z=0$, pri čemu koordinatni početak, kao singularnu tačku, isključujemo iz strujnog polja.

Diferencijalne jednačine putanja čestica fluida, na osnovu (6.3), su

$$dx = \frac{ax}{x^2 + y^2} dt, \quad dy = \frac{ay}{x^2 + y^2} dt,$$

odnosno, ako eliminišemo vreme,

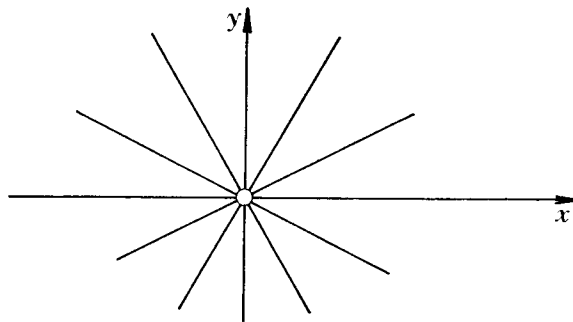
$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Integracijom ove diferencijalne jednačine dobivamo jednačinu putanja čestica fluida u obliku

$$y = Cx,$$

gde je C integraciona konstanta. Ako sisteme materijalnih i prostornih koordinata izaberemo tako da se u početnom trenutku vremena poklapaju, tada integracionu konstantu određujemo iz uslova da je $x=X$ i $y=Y$ za $t=t_0=0$. Na taj način dobivamo

$$y = \frac{Y}{X} x.$$



Sl. 8

Putanje pojedinih čestica (X, Y) su, dakle, prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak i sa pozitivnim smerom x ose zaklapaju ugao $\alpha = \text{arctg} \frac{Y}{X}$ (sl. 8). Ako pret-

postavimo da je konstanta a pozitivna, strujna slika odgovara izvoru u koordinatnom početku, koji je singularna tačka polja. Fluid, dakle, izvire iz koordinatnog početka i njegove čestice se kreću radialno u svim pravcima udaljavajući se od koordinatnog početka. U drugom slučaju, kad je konstanta a negativna, strujanje će odgovarati ponoru u koordinatnom početku.

Diferencijalna jednačina strujnica, na osnovu (6.5), je

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x},$$

a njen integral je

$$y = Cx.$$

Za različite vrednosti integracione konstante dobivamo različite strujnice i vidimo da se one poklapaju sa putanjama čestica.

Ovo strujanje možemo posmatrati i u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata. Ako, naime, u ravni $z=0$, umesto Dekartovih pravouglih, uvedemo cilindarske polarne koordinate r i φ ,

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi; \quad r = +\sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arctg \frac{y}{x},$$

tada, na osnovu transformacionog obrasca

$$\bar{v}^i = v^k \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k},$$

za kontravarijantne koordinate brzine dobivamo

$$\dot{r} = \dot{x}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial x} + \dot{y}(r, \varphi) \frac{\partial r}{\partial y}, \quad \dot{\varphi} = \dot{x}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \dot{y}(r, \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

odnosno

$$\dot{r} = \frac{a}{r}, \quad \dot{\varphi} = 0.$$

Na osnovu (6.3), dobivamo diferencijalne jednačine

$$dr = \frac{a}{r} dt, \quad d\varphi = 0.$$

Iz ovih jednačina integracijom dobivamo konačne jednačine kretanja čestica fluida

$$\frac{r^2}{2a} = t + C_1, \quad \varphi = C_2.$$

Ako sisteme materijalnih i prostornih koordinata izaberemo tako da se u početnom trenutku vremena poklapaju, tj. da je $r=R$ i $\varphi=\Phi$ za $t=0$, integracione konstante će biti

$$C_1 = \frac{R^2}{2a}, \quad C_2 = \Phi,$$

pa su konačne jednačine kretanja oblika

$$r^2 = R^2 + 2at, \quad \varphi = \Phi.$$

Putanje su, dakle, prave linije $\varphi = \Phi$. Za različite vrednosti konstante Φ , koje odgovaraju pojedinim česticama u početnom trenutku vremena, dobivamo putanje odgovarajućih čestica. Prva od gornjih jednačina određuje promenu rastojanja pojedinih čestica od koordinatnog početka — pola u funkciji vremena.

Diferencijalna jednačina strujnih linija, na osnovu (6.5), je

$$\frac{a}{r} dr = \frac{d\varphi}{0},$$

odnosno

$$d\varphi = 0.$$

Njen integral je

$$\varphi = C,$$

gde je C integraciona konstanta. Za različite vrednosti integracione konstante dobivamo različite strujne linije i vidimo da se one poklapaju sa putanjama čestica fluida.

7. Ubrzanje. Pri kretanju fluida očigledno je da svaka njegova čestica u različitim trenucima vremena, pored toga što se nalazi u različitim tačkama prostora, može imati različite brzine. Ubrzanje je veličina koja karakteriše promenu brzine i dobivamo ga diferenciranjem po vremenu vektora brzine. Ako je brzina određene čestice fluida izražena kao funkcija vremena, tj.

$$v^i = v^i(X^K, t),$$

onda je ubrzanje te čestice

$$(7.1) \quad w^i = \frac{Dv^i}{Dt} = \dot{v}^i = \frac{\partial v^i(X^K, t)}{\partial t},$$

pri čemu, prilikom diferenciranja, materijalne koordinate smatramo za konstante.

Iz (7.1) zaključujemo da je

$$(7.2) \quad w^i = w^i(X^K, t),$$

tj. da je ubrzanje određene čestice, $X^K = \text{const.}$, funkcija samo vremena. To znači da će u različitim trenucima vremena ubrzanje imati odgovarajuće vrednosti, nezavisno od toga u kojim tačkama prostora se uočena čestica nalazi u tim trenucima vremena.

Koristeći (4.5), možemo, međutim, eliminisati materijalne koordinate iz (7.2); tada dobivamo

$$(7.3) \quad w^i = w^i[X^K(x^k, t), t] = w^i(x^k, t).$$

Na ovaj način izraženo, ubrzanje je funkcija položaja i vremena i ne znamo na koju se česticu odnosi.

Ako je brzina izražena kao funkcija položaja i vremena, tj. kao vektorsko polje

$$v^i = v^i(x^j, t),$$

onda je ubrzanje, kao vektorsko polje, određeno apsolutnim izvodom po vremenu vektora brzine, tj.

$$(7.4) \quad w^i = \frac{Dv^i}{Dt} = \dot{v}^i = \frac{dv^i}{dt} + \{^i_{jk}\} v^j v^k,$$

gde su $\{^i_{jk}\}$ Kristofelovi simboli druge vrste računati u odnosu na sistem prostornih krivolinijskih koordinata x^k . Kako je

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial x^k} v^k,$$

7.4) možemo napisati u obliku

$$w^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^j \{^i_{jk}\} \right) v^k,$$

odnosno

$$(7.5) \quad w^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^i_{,k} v^k,$$

gde je

$$(7.6) \quad v^i_{,k} = \frac{\partial v^i}{\partial x^k} + v^j \{^i_{jk}\}$$

kovarijantni izvod kontravarijantnih koordinata vektora brzine.

Kovarijantne koordinate vektora ubrzanja dobivamo kao apsolutni izvod kovarijantnih koordinata vektora brzine, tj.

$$(7.7) \quad w_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \dot{v}_i = \frac{dv_i}{dt} - v_j \{^j_{ik}\} v^k = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,k} v^k,$$

gde je

$$(7.8) \quad v_{i,k} = \frac{\partial v_i}{\partial x^k} - v_j \{^j_{ik}\}$$

kovarijantni izvod kovarijantnih koordinata vektora brzine, i između njih i kontravarijantnih koordinata, očigledno, postoje veze

$$(7.9) \quad w_i = g_{ij} w^j, \quad w^i = g^{ij} w_j.$$

Fizičke koordinate vektora ubrzanja su

$$(7.10) \quad w_{\langle i \rangle} = \sqrt{g_{ii}} w^i = \frac{w_i}{\sqrt{g_{ii}}}, \quad (\text{ne sumirati}).$$

i vidimo da ih možemo odrediti bilo iz kontravarijantnih koordinata bilo iz kovarijantnih.

Intenzitet vektora ubrzanja dobivamo kao pozitivnu vrednost kvadratnog korena iz kvadrata intenziteta, tj.

$$(7.11) \quad w = +\sqrt{(w)^2} = +\sqrt{g_{ij} w^i w^j} = +\sqrt{g^{ij} w_i w_j} = +\sqrt{w_i w^i}.$$

Kad je strujanje stacionarno, tj. kad brzina ne zavisi eksplicitno od vremena, tada je $\frac{\partial v^i}{\partial t} = 0$, pa koordinate ubrzanja

$$(7.12) \quad \begin{aligned} w^i &= v_{,k}^i v^k = w^i(x^k), \\ w_i &= v_{i,k} v^k = w_i(x^k), \end{aligned}$$

takođe ne zavise eksplicitno od vremena. To znači da u fiksiranoj tački polja ubrzanje uvek ima istu vrednost, bez obzira na činjenicu da se u različitim trenucima vremena u toj tački nalaze različite čestice fluida.

Izrazićemo, na kraju, ubrzanje u obliku koji će nam biti pogodan za kasnije korišćenje. Izraz (7.7), naime, identičkom transformacijom (dodavanjem i oduzimanjem člana $v_{k,i} v^k$), možemo napisati u obliku

$$w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_{i,k} v^k + v_{k,i} v^k - v_{k,i} v^k,$$

odnosno

$$(7.13) \quad w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + (v_{i,k} - v_{k,i}) v^k + v_{k,i} v^k.$$

Kako je, međutim,

$$\begin{aligned} v_{i,k} - v_{k,i} &= \delta_{ik}^{mn} v_{m,n} = \delta_{lik}^{mn} v_{m,n} = \varepsilon_{lik} \varepsilon^{lmn} v_{m,n} = \varepsilon_{ikl} \varepsilon^{lmn} v_{m,n}, \\ v_{k,i} v^k &= \frac{1}{2} (v_k v^k)_{,i}, \end{aligned}$$

izraz (7.13) možemo napisati u obliku

$$(7.14) \quad w_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_k v^k)_{,i} + \varepsilon_{ikl} v^k \varepsilon^{lmn} v_{m,n},$$

ili, u vektorskom obliku

$$(7.15) \quad \vec{w} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad} (v^2) - \vec{v} \times \text{rot} \vec{v},$$

gde je v intenzitet vektora brzine.

Vežbanja

1. Odrediti kontravarijantne, kovarijantne i fizičke koordinate vektora ubrzanja u Dekartovim pravouglim, cilindarskim polarnim i sfernim polarnim koordinatama.

2. Odrediti intenzitet vektora ubrzanja u Dekartovim pravouglim, cilindarskim polarnim i sfernim polarnim koordinatama.

6. FIZIČKA INTERPRETACIJA VEKTOR FIZ. INTERPR. 7

8. **Tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti.** Š obzirom da je brzina funkcija položaja i vremena, jasno je da će, u fiksnom trenutku vremena, u različitim tačkama strujnog polja brzine u opštem slučaju biti različite. Ako u strujnom polju uočimo dve bliske tačke, sa koordinatama x^k i $x^k + dx^k$, i ako u tački sa koordinatama x^k brzina ima kontravarijantne koordinate v^k , onda će u tački sa koordinatama $x^k + dx^k$ kontravarijantne koordinate brzine biti $v^k + \delta v^k$, gde su

$$(8.1) \quad \delta v^k = v^k_{,l} dx^l = \left(\frac{\partial v^k}{\partial x^l} + v^j \{^k_{jl}\} \right) dx^l,$$

kontravarijantne koordinate kovarijantnog diferencijala vektora brzine, koje određuju priraštaj kontravarijantnih koordinata vektora brzine pri prelasku iz tačke sa koordinatama x^k u tačku sa koordinatama $x^k + dx^k$. Ako, pak, brzinu izražavamo kovarijantnim koordinatama, tj. ako je u tački sa koordinatama x^k brzina određena kovarijantnim koordinatama v_k , onda su u tački sa koordinatama $x^k + dx^k$ kovarijantne koordinate brzine $v_k + \delta v_k$, gde su

$$(8.2) \quad \delta v_k = v_{k,l} dx^l = \left(\frac{\partial v_k}{\partial x^l} - v_j \{^j_{kl}\} \right) dx^l = g_{kr} \delta v^r$$

kovarijantne koordinate kovarijantnog diferencijala vektora brzine, koje određuju priraštaj kovarijantnih koordinata vektora brzine pri prelasku iz jedne u njoj blisku drugu tačku strujnog polja.

Veličine $v^k_{,l}$, odnosno $v_{k,l}$ koje su kovarijantni izvodi kontravarijantnih, odnosno kovarijantnih koordinata vektora brzine, nazivaju se gradijenti brzine. Gradijenti brzine, prema tome, karakterišu razliku brzina u dvema bliskim tačkama strujnog polja u fiksnom trenutku vremena. U analogiji sa prvim gradijentima brzine, drugi i viši kovarijantni izvodi vektora brzine predstavljaju druge, odnosno više gradijente brzine. Gradijent brzine ma kog reda je tenzorska veličina. Prema tome, prvi gradijenti brzine su tenzori drugog reda: $v^k_{,l}$ mešoviti, ili jednom kontravarijantni i jednom kovarijantni, a $v_{k,l}$ kovarijantni tenzor drugog reda. Veze između raznih varijantnosti mogu se uspostaviti odgovarajućom kompozicijom sa metričkim tenzorom.

Prvi gradijent brzine, identičkom transformacijom, možemo izraziti u obliku

$$(8.3) \quad v_{k,l} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) + \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}).$$

Uvodeći oznake

$$(8.4) \quad d_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}), \quad \omega_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} - v_{l,k}),$$

dobivamo

$$(8.5) \quad v_{k,i} = d_{kl} + \omega_{kl}.$$

Lako je pokazati, razmenom mesta indeksima k i l , da je tenzor d_{kl} simetričan, tj. da je $d_{kl} = d_{lk}$, i da je tenzor ω_{kl} antisimetričan, tj. da je $\omega_{kl} = -\omega_{lk}$.

Izražen u obliku (8.5), prvi gradijent brzine je, dakle, predstavljen kao zbir jednog simetričnog i jednog antisimetričnog tenzora drugog reda. Ti tenzori su, u stvari, simetrični i antisimetrični deo gradijenta brzine. Rastavljanje tenzora drugog

reda na simetričan i antisimetričan deo je jednoznačno, pa, prema tome, gradijentu brzine odgovara samo jedan simetričan i samo jedan antisimetričan njegov deo. Napomenimo, još, da su uobičajene i oznake

$$d_{kl} = v_{(k,l)}, \quad \omega_{kl} = v_{[k,l]}.$$

Tenzor d_{kl} se naziva tenzor brzine deformacije. Kao tenzor drugog reda, on ima devet koordinata, od kojih, su, s obzirom da je simetričan, samo šest njih međusobno nezavisne. Prikazane u obliku matrice, te koordinate su

$$(8.6) \quad \{d_{kl}\} = \begin{Bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{Bmatrix}, \quad d_{12} = d_{21}, \quad d_{23} = d_{32}, \quad d_{31} = d_{13}.$$

dekl = dkl $\sqrt{g_{kl}}$ $\sqrt{g_{kl}}$

Tenzor ω_{kl} se naziva tenzor vrtložnosti. I on ima devet koordinata, od kojih su, međutim, s obzirom da je antisimetričan, samo tri međusobno nezavisne. Prikazane u obliku matrice, koordinate tenzora vrtložnosti su

$$(8.7) \quad \{\omega_{kl}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & 0 & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & 0 \end{Bmatrix}, \quad \omega_{12} = -\omega_{21}, \quad \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_{31} = -\omega_{13}.$$

ekel = ω_{kl} $\sqrt{g_{kl}}$ $\sqrt{g_{kl}}$

Tenzoru vrtložnosti, kao antisimetričnom tenzoru drugog reda, s obzirom da u trodimenzionom prostoru ima tri međusobno nezavisne koordinate, možemo u tom prostoru koordinirati jedan vektor. Koordinate tog vektora su

$$(8.8) \quad \omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk}, \quad \omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega^{jk},$$

gde su Ričijevi antisimetrični tenzori ε^{ijk} i ε_{ijk} povezani sa odgovarajućim e -sistemima na sledeći način:

$$(8.9) \quad \varepsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk}, \quad \varepsilon_{ijk} = \sqrt{g} e_{ijk}, \quad (g = |g_{ij}|).$$

Vektor $\vec{\omega}$ se naziva vektor vrtložnosti ili vrtlog. Ako tenzor vrtložnosti izrazimo kao antisimetrični deo gradijenta brzine, za vrtlog dobivamo

$$(8.10) \quad \omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{[j,k]} = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{j,k} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{k,j},$$

odnosno

$$(8.11) \quad \vec{\omega} = -\frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}.$$

Rotor brzine, prema tome, jednak je negativnoj dvostrukoj vrednosti vrtloga.

Iz kovarijantnih koordinata, odgovarajućim kompozicijama sa metričkim tenzorom, dobivamo kontravarijantne i mešovite koordinate tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti. Tako je

$$d^i_j = g^{ik} g^{jl} d_{kl}, \quad \omega^i_j = g^{ik} g^{jl} \omega_{kl},$$

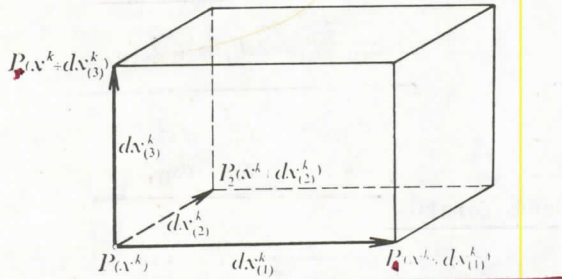
$$d_{\cdot j}^i = d_j^i = g^{ik} d_{kj}, \quad \omega_{\cdot j}^i = -\omega_j^i = g^{ik} \omega_{kj}.$$

Fizičke koordinate tih tenzora su

$$(8.12) \quad \underline{d_{\langle ij \rangle} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} d^{ij} = \frac{d_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}},} \quad (\text{ne sumirati})$$

$$\underline{\omega_{\langle ij \rangle} = \sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}} \omega^{ij} = \frac{\omega_{ij}}{\sqrt{g_{ii}} \sqrt{g_{jj}}}.$$

Tenzor brzine deformacije ima određenu fizičku interpretaciju. Radi boljeg shvaćanja te interpretacije, uočimo u tački P strujnog polja, u nekom fiksiranom trenutku vremena, fluidni delić oblika pravouglog paralelepipeda (sl. 9.). U toku kretanja, u nekom drugom trenutku vremena, uočeni delić će se nalaziti u nekoj drugoj oblasti prostora, pri čemu će, u opštem slučaju, promeniti i svoj oblik i svoju zapreminu.



Sl. 9

U prvobitno uočenom trenutku vremena, neka tačka P ima koordinate x^k u odnosu na izabrani sistem prostornih krivolinijskih koordinata. Njoj bliske tačke P_1 , P_2 i P_3 imaju koordinate $x^k + dx_{(1)}^k$, $x^k + dx_{(2)}^k$ i $x^k + dx_{(3)}^k$, respektivno. Prema tome, koordinate vektora $\overrightarrow{PP_1}$ su $dx_{(1)}^k$, vektora $\overrightarrow{PP_2}$ su $dx_{(2)}^k$ i vektora $\overrightarrow{PP_3}$ su $dx_{(3)}^k$. Ugao između vektora $\overrightarrow{PP_1}$ i $\overrightarrow{PP_2}$ obeležimo sa $\alpha_{(12)}$, između $\overrightarrow{PP_2}$ i $\overrightarrow{PP_3}$ sa $\alpha_{(23)}$ i između $\overrightarrow{PP_3}$ i $\overrightarrow{PP_1}$ sa $\alpha_{(31)}$. Ako intenzitet vektora $\overrightarrow{PP_1}$ obeležimo sa $ds_{(1)}$ i vektora $\overrightarrow{PP_2}$ sa $ds_{(2)}$, skalarni proizvod tih vektora će biti

$$(8.13) \quad \underline{g_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j = ds_{(1)} ds_{(2)} \cos \alpha_{(12)}.$$

Diferenciranjem po vremenu, odavde dobivamo

$$\underline{\dot{g}_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j + g_{ij} \dot{dx}_{(1)}^i dx_{(2)}^j = \dot{ds}_{(1)} ds_{(2)} \cos \alpha_{(12)}.$$

Kako je, međutim,

$$\underline{\dot{dx}_{(1)}^i = v_{i,k}^i dx_{(1)}^k, \quad \dot{dx}_{(2)}^j = v_{j,k}^j dx_{(2)}^k,$$

jer su to priraštaji brzine pri prelasku iz tačke P u bliske joj tačke P_1 i P_2 , pri čemu se vrednost gradijenta brzine odnosi na tačku P , prethodnu relaciju možemo napisati u obliku

$$\underline{g_{ij} v_{i,k}^i dx_{(1)}^k dx_{(2)}^j + g_{ij} dx_{(1)}^i v_{j,k}^j dx_{(2)}^k = \dot{ds}_{(1)} ds_{(2)} \cos \alpha_{(12)},$$

odnosno, posle pogodnih sređivanja,

$$(8.14) \quad \overline{ds_{(1)} ds_{(2)} \cos \alpha_{(12)}} = 2 d_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j.$$

Stavljajući u ovoj relaciji $dx_{(1)}^i = dx_{(2)}^i$, $\alpha_{(12)} = 0$, dobivamo apsolutni izvod po vremenu kvadrata intenziteta vektora $dx_{(1)}^i$, tj.

$$\overline{ds_{(1)}^2} = 2 d_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(1)}^j.$$

S obzirom da je

$$\overline{ds_{(1)}^2} = 2 ds_{(1)} \overline{ds_{(1)}},$$

biće

$$2 ds_{(1)} \overline{ds_{(1)}} = 2 d_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(1)}^j,$$

odnosno

$$\overline{ds_{(1)}} = d_{ij} \frac{dx_{(1)}^i}{ds_{(1)}} \frac{dx_{(1)}^j}{ds_{(1)}}.$$

Ako sada uvedemo oznaku

$$\frac{dx_{(1)}^i}{ds_{(1)}} = n_{(1)}^i$$

gde je $\vec{n}_{(1)}$ jedinični vektor vektora \vec{PP}_1 , dobivamo

$$(8.15) \quad \overline{ds_{(1)}} = d_{ij} n_{(1)}^i n_{(1)}^j$$

i vidimo da tenzor brzine deformacije, koji je definisan u tački P , određuje trenutnu brzinu promene intenziteta vektora \vec{PP}_1 , tj. određuje trenutnu brzinu promene rastojanja između čestica fluida koje su se u uočenom trenutku vremena nalazile u bliskim tačkama P i P_1 . Na sličan način dobivamo

$$(8.16) \quad \overline{ds_{(2)}} = d_{ij} n_{(2)}^i n_{(2)}^j,$$

$$\overline{ds_{(3)}} = d_{ij} n_{(3)}^i n_{(3)}^j,$$

gde su $\vec{n}_{(2)}$ i $\vec{n}_{(3)}$ jedinični vektori vektora \vec{PP}_2 i \vec{PP}_3 .

Na osnovu (8.15) i (8.16) možemo pisati

$$(8.17) \quad \overline{ds_{(n)}} = d_{ij} n^i n^j,$$

gde je $ds_{(n)}$ rastojanje između čestica fluida koje su se, u uočenom trenutku vremena, nalazile u bliskim tačkama P i P_n strujnog polja i gde je \vec{n} jedinični vektor vektora $\overrightarrow{PP_n}$. Prema tome, možemo reći: tenzor brzine deformacije u svakoj regularnoj tački strujnog polja određuje, u fiksiranom trenutku vremena, brzinu promene rastojanja između čestice fluida koja se u tom trenutku vremena nalazila u uočenoj tački i bilo koje druge njoj bliske čestice.

Ako jednačinu (8.14) napišemo u obliku

$$\overline{ds_{(1)} ds_{(2)}} \cos \alpha_{(12)} - ds_{(1)} ds_{(2)} \overline{\alpha_{(12)}} \sin \alpha_{(12)} = 2 d_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j,$$

tada, s obzirom da su vektori $\overrightarrow{PP_1}$ i $\overrightarrow{PP_2}$ po pretpostavci međusobno ortogonalni, tj. da je $\alpha_{(12)} = \frac{\pi}{2}$, dobivamo

$$- ds_{(1)} ds_{(2)} \overline{\alpha_{(12)}} = 2 d_{ij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j,$$

odnosno

$$(8.18) \quad -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(12)} = d_{ij} n_{(1)}^i n_{(2)}^j$$

i vidimo da tenzor brzine deformacije određuje u tački P brzinu promene pravog ugla između vektora $\overrightarrow{PP_1}$ i $\overrightarrow{PP_2}$. Na sličan način dobivamo

$$(8.19) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(23)} &= d_{ij} n_{(2)}^i n_{(3)}^j, \\ -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(31)} &= d_{ij} n_{(3)}^i n_{(1)}^j, \end{aligned}$$

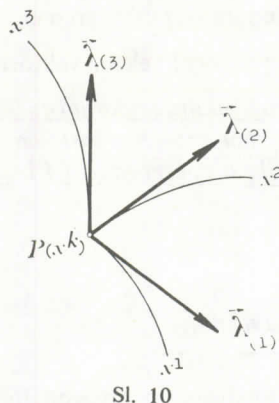
pa možemo pisati

$$(8.20) \quad -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(mn)} = d_{ij} m^i n^j,$$

gde su \vec{m} i \vec{n} jedinični vektori bilo koja dva ortogonalna pravca u tački P . Prema tome, možemo reći: tenzor brzine deformacije u svakoj regularnoj tački strujnog polja određuje, u fiksiranom trenutku vremena, brzinu promene pravog ugla između bilo koja dva ortogonalna pravca u toj tački.

Pretpostavimo sada da se kretanje fluida posmatra u odnosu na sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata x^k (sl. 10.). Kontravarijantne koordinate tangenčnih jediničnih vektora na koordinatne linije su

$$(8.21) \quad \lambda_{(k)}^i = \frac{\delta_k^i}{\sqrt{g_{kk}}}, \quad (\text{ne sumirati})$$



Sl. 10

odnosno

$$(8.22) \quad \begin{aligned} \{\lambda_{(1)}^i\} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}, 0, 0 \right\}, \\ \{\lambda_{(2)}^i\} &= \left\{ 0, \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}, 0 \right\}, \\ \{\lambda_{(3)}^i\} &= \left\{ 0, 0, \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \right\}. \end{aligned}$$

Brzine promene rastojanja između čestice koja se nalazi u tački P i njoj bliskih čestica koje se nalaze na koordinatnim linijama, na osnovu (8.17), su

$$(8.23) \quad \begin{aligned} \frac{\dot{ds}_{(1)}}{ds_{(1)}} &= d_{ij} \lambda_{(1)}^i \lambda_{(1)}^j = d_{11} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = d_{11}, \\ \frac{\dot{ds}_{(2)}}{ds_{(2)}} &= d_{ij} \lambda_{(2)}^i \lambda_{(2)}^j = d_{22} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = d_{22}, \\ \frac{\dot{ds}_{(3)}}{ds_{(3)}} &= d_{ij} \lambda_{(3)}^i \lambda_{(3)}^j = d_{33} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} = d_{33}, \end{aligned}$$

a brzine promene pravih uglova između koordinatnih linija, na osnovu (8.20), su

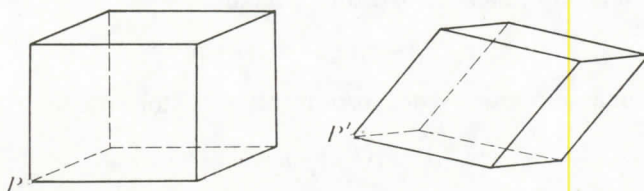
$$(8.24) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(31)} &= d_{ij} \lambda_{(3)}^i \lambda_{(1)}^j = d_{31} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} = d_{(31)}, \\ -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(12)} &= d_{ij} \lambda_{(1)}^i \lambda_{(2)}^j = d_{12} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} = d_{(12)}, \\ -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(23)} &= d_{ij} \lambda_{(2)}^i \lambda_{(3)}^j = d_{23} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{\sqrt{g_{33}}} = d_{(23)}. \end{aligned}$$

Prema tome, u odnosu na sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata, fizičke koordinate tenzora brzine deformacije možemo izraziti u obliku

$$(8.25) \quad \{d_{(ij)}\} = \begin{Bmatrix} d_{(11)} & d_{(12)} & d_{(13)} \\ d_{(21)} & d_{(22)} & d_{(23)} \\ d_{(31)} & d_{(32)} & d_{(33)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\dot{ds}_{(1)}}{ds_{(1)}} & -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(12)} & -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(13)} \\ -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(21)} & \frac{\dot{ds}_{(2)}}{ds_{(2)}} & -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(23)} \\ -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(31)} & -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(32)} & \frac{\dot{ds}_{(3)}}{ds_{(3)}} \end{Bmatrix}$$

gde su $\overline{ds_{(n)}}$ brzine promene rastojanja između čestice koja se, u fiksiranom trenutku vremena, nalazi u tački P i njoj bliskih čestica koje se, u istom trenutku vremena, nalaze u odgovarajućim tačkama koordinatnih linija, a $\overline{\alpha_{(mn)}}$ brzine promene pravih uglova između ortogonalnih materijalnih pravaca koji se, u uočenom trenutku vremena, poklapaju sa pravcima koordinatnih linija.

Tensorom brzine deformacije u potpunosti je određeno stanje brzine deformacije u svakoj tački strujnog polja. Znajući, naime, vrednost tenzora brzine deformacije u nekoj tački polja, možemo, na osnovu (8.17) i (8.20), odrediti brzinu promene rastojanja između čestice koja se u fiksiranom trenutku vremena, nalazi u toj tački i bilo koje druge njoj bliske čestice, kao i brzinu promene pravog ugla između bilo koja dva ortogonalna materijalna pravca u toj tački. Na taj način, vrednost tenzora brzine deformacije u svakoj tački polja karakteriše brzinu deformisanja fluidnog delića koordiniranog toj tački. Ako, naime, u nekom fiksiranom trenutku vremena, tački P polja koordiniramo fluidni delić oblika pravouglog paralelepipeda, tada će, u nekom drugom trenutku vremena, uočeni delić pripadati nekoj drugoj oblasti prostora, tj. biće koordiniran nekoj drugoj tački polja, recimo tački P' , i biće deformisan na taj način što će mu se, u opštem slučaju, promeniti i dužine ivica i pravi uglovi između njih (sl. 11.).



Sl. 11

Kao i tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti ima određenu fizičku interpretaciju. Radi boljeg shvatanja te interpretacije, pretpostavimo da je tenzor brzine deformacije identički jednak nuli u celom strujnom polju. Tada je brzina promene rastojanja između bilo koje dve bliske čestice jednaka nuli, što znači da se rastojanje između njih neće menjati tokom kretanja. Isto tako, ni uglovi između bilo koja dva materijalna pravca neće se menjati tokom kretanja. Na osnovu toga zaključujemo da fluidni delići tokom vremena neće menjati ni svoj oblik ni svoju zapreminu, tj. kretaće se kao elementi krutog tela. Da bismo to i računom pokazali, postupićemo na sledeći način.

Iz uslova da je tenzor brzine deformacije jednak nuli, dobivamo sistem od šest parcijalnih diferencijalnih jednačina:

$$v_{i,j} + v_{j,i} = 0.$$

Kovarijantnim diferenciranjem, odavde sledi

$$v_{i,jk} + v_{j,ik} = 0,$$

odnosno, cikličkom permutacijom indeksa i, j i k ,

$$v_{k,ij} + v_{i,jk} = 0.$$

Oduzimanjem prethodne od ove jednačine, dobivamo

$$v_{k,ij} - v_{j,ik} = 0,$$

odnosno

$$\omega_{kj,i} = 0,$$

odakle zaključujemo da tenzor vrtložnosti mora biti kovarijantno konstantni tenzor, tj. može biti funkcija samo vremena a ne i položaja. Prema tome, iz prethodne jednačine dobivamo

$$(8.26) \quad \omega_{kl} = \omega_{kl}(t).$$

Iz izraza (8.5), za gradijent brzine u ovom slučaju dobivamo

$$v_{k,l} = \omega_{kl}(t),$$

pa je, s obzirom na (8.2), razlika brzina dveju bliskih čestica

$$(8.27) \quad \delta v_k = \omega_{kl}(t) dx^l.$$

Imajući ovo u vidu, brzinu čestice koja se nalazi u tački P_1 koja je bliska čestici koja se nalazi u tački P , možemo izraziti u obliku

$$v_i(P_1) = v_i(P) + \omega_{ij}(P) dx^j,$$

odnosno, ako umesto tenzora vrtložnosti uvedemo vektor vrtložnosti,

$$(8.28) \quad v_i(P_1) = v_i(P) + \varepsilon_{ijk} \omega^k(P) dx^j,$$

gde je vektor vrtložnosti $\vec{\omega}$ takođe funkcija samo od vremena. U vektorskom obliku napisana, gornja jednačina je

$$(8.29) \quad \vec{v}(P_1) = \vec{v}(P) - \vec{\omega} \times \overrightarrow{PP_1}$$

i vidimo da je to jednačina koja određuje brzine tačaka krutog tela. Prvi član u jednačini (8.28), odnosno (8.29), predstavlja translatornu, a drugi rotacionu komponentu brzine proizvoljne čestice P_1 fluidnog delića. Ova druga komponenta je posledica obrtanja delića, kao krutog tela, ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko trenutne ose rotacije određene vektorom $\vec{\omega}$ u tački P delića.

S obzirom da, u slučaju kad je tenzor brzine deformacije jednak nuli, vrtlog predstavlja polje kovarijantno konstantnih vektora, tj. da u fiksiranom trenutku vremena ima istu vrednost u svim tačkama strujnog polja, jasno je da je kretanje fluida kao celine — kruto kretanje. Brzina proizvoljne čestice fluida opet je određena jednačinom (8.29), pri čemu sada tačka P_1 ne mora biti bliska tački P , koja je trenutni pol rotacije. Ova brzina, kao što je poznato, ne zavisi od izbora pola, ali za različite izbore trenutnog pola rotacije dobivaju se različite vrednosti translatorne i rotacione komponente brzine.

Ako je, međutim, tenzor brzine deformacije različit od nule, brzinu u tački P_1 , koja je bliska tački P , možemo izraziti u obliku

$$v_i(P_1) = v_i(P) + \delta v_i,$$

odnosno, koristeći (8.2) i (8.5), u obliku

$$(8.30) \quad v_i(P_1) = v_i(P) + d_{ij} dx^j + \omega_{ij} dx^j,$$

gde se vrednosti tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti uzimaju u tački P . Iz (8.30) vidimo da je relativna brzina čestice P_1 u odnosu na njoj blisku česticu P određena sa dve komponente. Prva od njih je određena vrednošću tenzora brzine deformacije u tački P i posledica je promene rastojanja između čestica P_1 i P . Ova komponenta se naziva *brzina deformacije* ili *brzina deformisanja* i očigledno je različita za različite čestice iz okoline tačke P , jer zavisi od vektora dx^k . Druga komponenta, koju možemo izraziti i u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \omega^k(P) dx^j,$$

je određena vrednošću tenzora vrtložnosti, odnosno vrtloga u tački P i posledica je kružnog kretanja čestice P_1 oko trenutne ose rotacije određene vektorom $\vec{\omega}$ u tački P . Ova komponenta se naziva *rotaciona komponenta* brzine čestice P_1 i očigledno je različita za različite čestice iz okoline tačke P , jer takođe zavisi od vektora dx^k . S obzirom, međutim, da vrtlog ima određenu vrednost u tački P polja, jasno je da će sve čestice iz okoline tačke P imati istu ugaonu brzinu $\vec{\omega}$ kružnog kretanja oko trenutne ose rotacije određene vektorom $\vec{\omega}$ u tački P . Imajući, međutim, u vidu da je tenzor vrtložnosti, pa, trema tome, i vrtlog, funkcija položaja, zaključujemo da će fluidni delići koji su koordinirani različitim tačkama polja imati i različite ugaone brzine obrtanja oko trenutnih osa rotacije određenih vektorom vrtložnosti u tim tačkama. To je bitna razlika između krutih rotacija fluidnih delića u ovom slučaju i u slučaju kada je tenzor brzine deformacije jednak nuli.

U najopštijem slučaju, dakle, kada su i tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti različiti od nule, iz (8.30) vidimo da se kretanje svakog fluidnog delića sastoji iz *translacije*, *čiste deformacije* i *krute rotacije*, pri čemu se, s obzirom da su brzina, tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti funkcije položaja, delići koordinirani različitim tačkama polja na različite načine i translatorno kreću i deformišu i kruto rotiraju oko svojih trenutnih osa rotacije. Osim ovog, najopštijeg slučaja kretanja, mogući su i sledeći specijalni slučajevi:

1. Kada su i tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti jednaki nuli, svi delići se kreću translatorno istom brzinom, pa možemo zaključiti da se i fluid kao celina kreće translatorno, jer brzina u svakom trenutku vremena predstavlja polje kovarijantno konstantnih vektora.

2. Kada je tenzor brzine deformacije jednak nuli, tada je, kao što smo već pokazali, tenzor vrtložnosti funkcija vremena a ne i položaja, pa se fluid kao celina kreće na isti način kao i kruto telo, tj. njegovo kretanje se sastoji iz translacije i krute rotacije oko trenutne ose rotacije koja prolazi kroz proizvoljno izabrani trenutni pol rotacije.

3. Kada je tenzor brzine deformacije različit od nule, a tenzor vrtložnosti identički jednak nuli, tada se fluidni delići kreću translatorno i na odgovarajući način deformišu, ali se ne obrću — ne vrtlože se. Iz tog razloga se ovakvo strujanje naziva *nevirtložno*. U suprotnom je *virtložno*.

V e ž b a n j a

1. Izraziti kontravarijantne, kovarijantne i fizičke koordinate tenzora brzine deformacije, tenzora vrtložnosti i vektora vrtložnosti u odnosu na:

- sistem Dekartovih pravougljih koordinata,
- sistem cilindarskih polarnih koordinata, i
- sistem sfernih polarnih koordinata.

2. Ako je, u odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata, strujanje određeno poljem brzine

$$v_x = a(b^2 - y^2), \quad v_y = 0, \quad v_z = 0,$$

gde su a i b konstante i dge je $-b \leq y \leq b$, odrediti koordinate tenzora brzine deformacije, tenzora vrtložnosti i vrtloga.

3. Ako je, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata, strujanje određeno poljem brzine

$$v^r = \dot{r} = 0, \quad v^\theta = \dot{\theta} = 0, \quad v^z = \dot{z} = a(R^2 - r^2),$$

gde su a i R konstante i gde je $r \leq R$, odrediti kontravarijantne, kovarijantne i fizičke koordinate tenzora brzine deformacije, tenzora vrtložnosti i vrtloga.

9. Glavni pravci tenzora brzine deformacije. U prethodnom odeljku smo pokazali da je brzina deformisanja jedna od komponenata brzine proizvoljne čestice P_1 fluidnog delića koordiniranog tački P polja. Ako je obeležimo sa \vec{D} , kontravarijantne koordinate brzine deformisanja se izražavaju u obliku

$$(9.1) \quad \vec{D}^i = d^i dx^i,$$

gde je \vec{dx} vektor položaja čestice P_1 u odnosu na tačku P . Iz (9.1) vidimo da je brzina deformisanja pojedinih čestica fluidnog delića u potpunosti određena vrednošću tenzora brzine deformacije u tački P strujnog polja.

U opštem slučaju brzina deformisanja pojedinih čestica fluidnog delića nije kolinearna sa vektorom položaja tih čestica u odnosu na tačku P . Može se sada postaviti pitanje: da li u tački P postoje takvi pravci za koje bi brzina deformisanja bila sa njima kolinearna? Ako takvi pravci postoje, tada za njih mora biti

$$d^j dx^j = d dx^i,$$

odnosno, ako ovu jednačinu podelimo intenzitetom vektora \vec{dx} ,

$$(9.2) \quad d^j \lambda^j = d \lambda^i,$$

gde je $\vec{\lambda}$ jedinični vektor vektora \vec{dx} , koji određuje pravac u tački P za koji je brzina deformisanja sa njim kolinearna, i gde je d skalarni faktor.

Jednačinu (9.2) možemo očigledno napisati u obliku

$$(9.3) \quad (d^j - d \delta^j_i) \lambda^j = 0$$

i ona predstavlja sistem od tri algebarske jednačine za određivanje koordinata vektora $\vec{\lambda}$. Da bi postojala netrivialna rešenja, mora determinanta gornjeg sistema biti jednaka nuli, tj.

$$(9.4) \quad |d_j^i - d \delta_j^i| = 0.$$

Ova determinantna jednačina, koja se još naziva i *sekularna* ili *karakteristična* jednačina, je algebarska jednačina trećeg stepena za određivanje onih vrednosti skalarnog faktora d za koje će sistem (9.3) imati netrivialna rešenja po koordinatama vektora $\vec{\lambda}$. U razvijenom obliku, determinantna jednačina (9.4) izgleda

$$(9.5) \quad d^3 - d_1 d^2 + d_{11} d - d_{111} = 0,$$

gde su

$$(9.6) \quad d_1 = \delta_i^j d_j^i = d_i^i = d_1^1 + d_2^2 + d_3^3,$$

$$d_{11} = \frac{1}{2!} \delta_{ki}^j d_i^k d_j^l = (d_1^1 d_2^2 - d_2^1 d_1^2) + (d_1^1 d_3^3 - d_3^1 d_1^3) + (d_2^2 d_3^3 - d_3^2 d_2^3),$$

$$d_{111} = \frac{1}{3!} \delta_{lmn}^{ijk} d_i^l d_j^m d_k^n = |d_j^i|,$$

glavne ili osnovne invarijante tenzora brzine deformacije.

S obzirom da je tenzor brzine deformacije simetričan, jednačina (9.4), odnosno (9.5), ima tri realna korena (za dokaz videti: T. Anđelić: Tenzorski račun, treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1973, strana 19). Neka su ti koreni $d_{(1)}$, $d_{(2)}$, i $d_{(3)}$; oni se nazivaju *sopstveni* ili *karakteristični* brojevi tenzora brzine deformacije.

Na osnovu (9.3), svakom karakterističnom broju odgovara po jedan vektor $\vec{\lambda}$. Prema tome, u najopštijem slučaju, kada su sva tri karakteristična broja međusobno različita, u svakoj tački strujnog polja postoje tri pravca za koje je brzina deformisanja sa njima kolinearna. Ti pravci se nazivaju *glavni pravci* tenzora brzine deformacije i može se pokazati da su međusobno ortogonalni (za dokaz videti: T. Anđelić: Tenzorski račun, treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1973, strana 97). Vektori $\vec{\lambda}_{(n)}$, $n=1, 2, 3$, koji određuju glavne pravce, nazivaju se *karakteristični vektori* tenzora brzine deformacije. Prema tome, u pravcima karakterističnih vektora, koji su međusobno ortogonalni, brzina deformisanja je sa njima kolinearna.

Ako kretanje fluida posmatramo u odnosu na sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata tako izabranih da se u tački P polja pravci koordinatnih linija poklapaju sa glavnim pravcima tenzora brzine deformacije u toj tački, tada su, na osnovu (8.17), brzine promene rastojanja između čestice P i bliskih joj čestica na koordinatnim linijama

$$(9.7) \quad \frac{d\vec{s}_{(n)}}{ds_{(n)}} = d_{ij} \lambda_{(n)}^i \lambda_{(n)}^j = d_{(n)} \lambda_{(n)j} \lambda_{(n)}^j = d_{(n)},$$

a, na osnovu (8.20), brzine promene pravih uglova između materijalnih pravaca koji se poklapaju sa pravicima koordinatnih linija jednake su nuli, tj.

$$(9.8) \quad -\frac{1}{2} \dot{\alpha}_{(mn)} = d_{ij} \lambda_{(m)}^i \lambda_{(n)}^j = d_{(m)} \lambda_{(m)j} \lambda_{(n)}^j = 0, \quad (m \neq n),$$

što sledi iz činjenice da su karakteristični vektori međusobno ortogonalni.

Prema tome, u odnosu na sistem glavnih koordinata, fizičke koordinate tenzora brzine deformacije, prikazane u obliku matrice, su

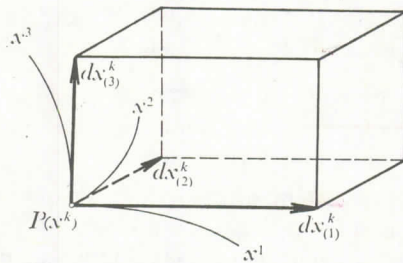
$$(9.9) \quad \{d_{(ij)}\} = \begin{Bmatrix} d_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & d_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & d_{(3)} \end{Bmatrix},$$

tj. matrica tih koordinata je dijagonalna, a elementi na glavnoj dijagonali su karakteristični brojevi tenzora brzine deformacije.

Glavne invarijante tenzora brzine deformacije, s obzirom da su skalarne invarijante, tj. nezavisne od koordinatnog sistema u odnosu na koji su date koordinate tenzora brzine deformacije, možemo sada izraziti i u obliku

$$(9.10) \quad \begin{aligned} d_I &= \delta_i^j d_j^i = d_{(1)} + d_{(2)} + d_{(3)}, \\ d_{II} &= \frac{1}{2!} \delta_{kl}^{ij} d_i^k d_j^l = d_{(2)} d_{(3)} + d_{(3)} d_{(1)} + d_{(1)} d_{(2)}, \\ d_{III} &= \frac{1}{3!} \delta_{lmn}^{ijk} d_i^l d_j^m d_k^n = d_{(1)} d_{(2)} d_{(3)}. \end{aligned}$$

8 **SPERNI I DEVIJATORSKI DELOVI TENZORA DEF.**
10. Brzina kubne dilatacije. U 3. odeljku smo pokazali da se brzina promene zapremine fluidnog delića koordiniranog tački P strujnog polja izražava preko vrednosti divergencije brzine u toj tački. Pokazaćemo sada to na jednostavniji način. Pretpostavimo u tom cilju da se kretanje fluida posmatra u odnosu na sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata. Ako u tački P uočimo fluidni delić oblika pravouglog paralelepipeda čija su ivice određene vektorima $\vec{dx}_{(1)}$, $\vec{dx}_{(2)}$ i $\vec{dx}_{(3)}$ (sl. 12.), tada, označavajući intenzitete tih vektora sa $ds_{(1)}$, $ds_{(2)}$ i $ds_{(3)}$, zapreminu uočenog delića možemo izraziti u obliku



Sl. 12

rima $\vec{dx}_{(1)}$, $\vec{dx}_{(2)}$ i $\vec{dx}_{(3)}$ (sl. 12.), tada, označavajući intenzitete tih vektora sa $ds_{(1)}$, $ds_{(2)}$ i $ds_{(3)}$, zapreminu uočenog delića možemo izraziti u obliku

$$dv = ds_{(1)} ds_{(2)} ds_{(3)}.$$

Diferenciranjem po vremenu, odavde dobivamo

$$\dot{dv} = \dot{ds}_{(1)} ds_{(2)} ds_{(3)} + ds_{(1)} \dot{ds}_{(2)} ds_{(3)} + ds_{(1)} ds_{(2)} \dot{ds}_{(3)},$$

odnosno,

$$\frac{\dot{d}v}{dv} = \frac{\dot{d}s_{(1)}}{ds_{(1)}} + \frac{\dot{d}s_{(2)}}{ds_{(2)}} + \frac{\dot{d}s_{(3)}}{ds_{(3)}}.$$

Ako sada iskoristimo relacije (8.23), dobivamo

$$(10.1) \quad \frac{\dot{d}v}{dv} = d_{\langle 11 \rangle} + d_{\langle 22 \rangle} + d_{\langle 33 \rangle} = g^{ij} d_{ij} = d_i^i = d_1 = v^i_{,i} = \text{div } \vec{v}.$$

Brzina promene zapremine fluidnog delića sračunata na jedinicu zapremine naziva se brzina kubne dilatacije i ona je, kao što vidimo, jednaka prvoj osnovnoj invarijanti tenzora brzine deformacije, odnosno divergenciji brzine. Napominjemo da, u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata, divergenciju brzine možemo izraziti u obliku (videti: T. Anđelić: Tenzorski račun, treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd 1973, strana 119, jednačina 16)

$$(10.2) \quad \text{div } \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (v^k \sqrt{g}), \quad (g = |g_{ij}|).$$

U odeljku 3. smo pokazali da se za slučaj nestišljivih fluida jednačina konzervacije mase svodi na uslov da je divergencija brzine jednaka nuli. Za slučaj nestišljivih fluida, jednačinu konzervacije mase, prema tome, možemo napisati u obliku

$$(10.3) \quad \frac{\partial}{\partial x^k} (v^k \sqrt{g}) = 0,$$

odnosno

$$(10.4) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (v^2 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^3} (v^3 \sqrt{g}) = 0,$$

gde su x^k proizvoljne krivolinijske koordinate.

Tenzor brzine deformacije, kao i svaki tenzor drugog reda, možemo na jednoznačan način razložiti na tzv. sferni i devijatorski deo:

$$(10.5) \quad d_{ij} = \frac{1}{3} d_1 g_{ij} + \bar{d}_{ij},$$

gde prvi član na desnoj strani određuje sferni deo tenzora brzine deformacije, a drugi, koji se izražava u obliku

$$(10.6) \quad \bar{d}_{ij} = d_{ij} - \frac{1}{3} d_1 g_{ij},$$

određuje devijatorski deo tenzora brzine deformacije.

S obzirom da tenzor brzine deformacije u svakoj tački strujnog polja u potpunosti određuje brzine deformisanja u okolini tih tačaka, tj. brzine deformisanja fluidnih delića koordiniranih tim tačkama, jasno je da njegov sferni i devijatorski deo takođe na izvestan način određuju te brzine. S obzirom da je u potpunosti određen prvom osnovnom invarijantom tenzora brzine deformacije, odnosno brzinom kubne dilatacije, sferni deo tenzora brzine deformacije određuje komponente

brzina deformisanja fluidnih delića koje su posledica promene zapremine fluidnih delića bez promene njihovog oblika. Devijatorski deo tenzora brzine deformacije, međutim, s obzirom da mu je prva invarijanta identički jednaka nuli, tj.

$$g^{ij} \bar{d}_{ij} = \bar{d}_1 = d_1 - \frac{1}{3} d_1 \cdot 3 = 0,$$

određuje one komponente brzina deformisanja fluidnih delića koje su posledica promene njihovog oblika bez promene zapremine, jer, kao što vidimo, ne obuhvata uticaj brzine kubne dilatacije.

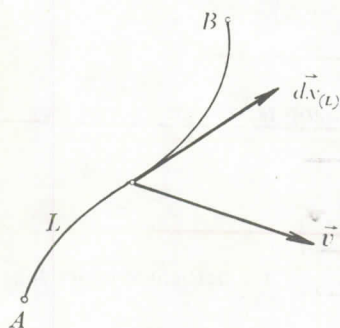
Vežbanja

1. Izraziti brzinu kubne dilatacije i napisati jednačinu konzervacije mase za nestišljive fluide u Dekartovim pravouglim, cilindarskim polarnim i sfernim polarnim koordinatama preko: a) kontravarijantnih, b) kovarijantnih i c) fizičkih koordinata brzine.

2. Ako se u svakoj tački strujnog polja bilo koja tri međusobno upravna pravca mogu uzeti za glavne pravce tenzora brzine deformacije, pokazati da je tenzor brzine deformacije jednak svom sfernom delu. Prodiskutovati karakter ovakvog kretanja fluida.

9

11. **Cirkulacija i protok.** Uočimo u strujnom polju dve tačke, obeležimo ih sa A i B , koje su spojene nekom krivom L (sl. 13.).



Sl. 13

Krivolinijski integral

$$(11.1) \quad J = \int_{L(A)}^{L(B)} \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} v_i dx_{(L)}^i,$$

gde smo sa $d\vec{x}_{(L)}$ označili orijentisani element luka krive L , naziva se struja fluida duž krive L . Ako, pak, u strujnom polju uočimo zatvorenu krivu L , tada se krivolinijski integral

$$(11.2) \quad \Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \oint_L v_i dx_{(L)}^i,$$

naziva cirkulacija fluida duž uočene zatvorene krive L .

S obzirom da zatvorena kriva L ograničava neku konačnu površ a u strujnom polju, možemo, pod pretpostavkom da na površi a nema singularnih tačaka strujnog polja, iskoristiti poznatu teoremu o transformaciji krivolinijskih integrala u površinske. Na taj način, iz (11.2) za cirkulaciju dobivamo

$$(11.3) \quad \Gamma = \oint_L v_i dx_{(L)}^i = \int_a \varepsilon_{ijk} v^{k,j} da^i,$$

gde je \vec{da} orijentisani element površi a . Napisana u vektorskim oznakama, ova relacija je oblika

$$(11.4) \quad \Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \int_a \text{rot } \vec{v} \cdot \vec{da},$$

ili, ako iskoristimo (8.11),

$$(11.5) \quad \Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = - \int_a 2\vec{\omega} \cdot \vec{da},$$

i vidimo da postoji veza između cirkulacije i vrtloga.

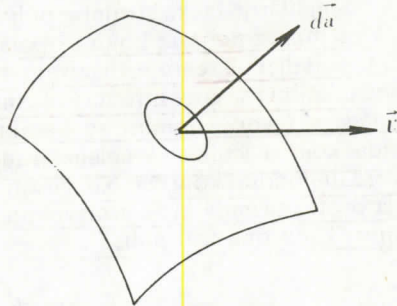
U 8. odeljku smo rekli da se strujanja kod kojih je tenzor vrtložnosti, pa, prema tome, i vrtlog, identički jednak nuli u celom strujnom polju nazivaju nevirtložna strujanja. Na osnovu toga i (11.5), odmah možemo zaključiti da će kod nevirtložnih strujanja cirkulacija uvek biti jednaka nuli, za proizvoljnu zatvorenu krivu liniju u strujnom polju, pod pretpostavkom, jasno, da na površi a koju ograničava kriva L nema singularnih tačaka.

Zamislimo neku fiksiranu konačnu površ a u strujnom polju, koja može biti proizvoljnog oblika (sl. 14). Svakoju tački ove površi, s obzirom da pripada strujnom polju, odgovara jedan vektor brzine. Površinskim integralom

$$(11.6) \quad Q = \int_a \vec{v} \cdot \vec{da} = \int_a v_i da^i$$

definiše se protok fluida kroz površ a . Protok fluida, prema tome, predstavlja zapreminu fluida koja u jedinici vremena prođe kroz tu površ. Ako je, pak, površ a zatvorena, tj. ako ograničava neku konačnu zapreminu v u strujnom polju, protok će biti

$$(11.7) \quad Q = \oint_a \vec{v} \cdot \vec{da} = \oint_a v_i da^i.$$



Sl. 14

S obzirom da je u ovom slučaju površ a zatvorena, možemo, pod pretpostavkom da u zapremini v , koju ograničava površ a , nema singularnih tačaka, iskoristiti poznatu teoremu o transformaciji površinskih integrala u zapreminske. Na taj način, za protok dobivamo

$$(11.8) \quad Q = \oint_a v_i da^i = \int_v v_{,k}^k dv,$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(11.9) \quad Q = \oint_a \vec{v} \cdot \vec{da} = \int_v \text{div } \vec{v} dv.$$

U slučaju strujanja nestišljivih fluida, s obzirom da je divergencija brzine identički jednaka nuli, iz (11.9) neposredno zaključujemo da će protok kroz bilo koju zatvorenu površ biti jednak nuli, pod pretpostavkom, jasno, da u zapremini v koju ograničava ta površ nema singularnih tačaka. Ovo, međutim, ne znači da

kroz uočenu zatvorenu površ ne protiče fluid, već da je zapremina fluida koja, u jedinici vremena, uđe kroz jedan deo površi a u zapreminu v prostora jednaka zapremini fluida koja, u jedinici vremena, izađe kroz drugi deo površi a iz te zapremine.

Ako je protok kroz zatvorenu površ različit od nule, jasno je sada da je fluid stišljiv i da protok u tom slučaju predstavlja razliku zapremine fluida koja u jedinici vremena uđe i zapremine fluida koja u jedinici vremena izađe iz zapremine v prostora koju ograničava zatvorena površ a .

Iz izraza za cirkulaciju i protok vidimo da su, u opštem slučaju, kada je strujanje nestacionarno, funkcije vremena. To znači da će kod nestacionarnih strujanja, s obzirom da se brzine menjaju sa vremenom u fiksiranim tačkama polja, cirkulacija i protok za fiksiranu krivu, odnosno površ, imati različite vrednosti u različitim trenucima vremena. Kod stacionarnih strujanja, međutim, oni imaju konstantne vrednosti.

IZDAŠNOST IZVORA (23)

12. Izvori i ponori. Već smo pomenuli da u strujnom polju mogu postojati singularne tačke u kojima brzina nije definisana. Takve tačke predstavljaju tačke prekida strujnog polja, i kao takve, moraju se izdvajati iz strujnog polja. Pomenuli smo, takođe, da takvih tačaka može biti konačan ili neograničen broj, pri čemu mogu biti na različite načine raspoređene u strujnom polju.

Singularne tačke strujnog polja mogu biti različitog karaktera. One singularne tačke strujnog polja iz kojih se pojavljuju nove količine fluida, koje, zatim, učestvuju u daljem kretanju, nazivaju se izvori. Analogno: singularne tačke strujnog polja u kojima se gubi izvesna količina fluida, tj. u koje čestice fluida poniru, nazivaju se ponori. Izvori i ponori su karakterisani izdašnošću koja predstavlja zapreminu fluida koja u jedinici vremena izađe iz izvora, odnosno uđe u ponor. Izdašnost izvora ili ponora, koju ćemo obeležiti sa ϵ , dobijamo, prema tome, kao graničnu vrednost protoka fluida kroz proizvoljnu zatvorenu površ koja obuhvata izvor, odnosno ponor, kada ona teži nuli, tj.

$$(12.1) \quad \epsilon = \lim_{a \rightarrow 0} \oint_a \vec{v} \cdot \vec{da} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_a v^i da_i.$$

Iz ove definicije izdašnosti, neposredno sledi da je za izvor $\epsilon > 0$, a za ponor $\epsilon < 0$, jer u prvom slučaju vektor brzine zaklapa oštar ugao sa pravcem spoljašnje normale površi a , a u drugom slučaju tup ugao.

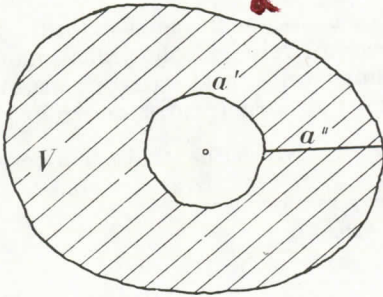
U slučaju nestišljivih fluida, međutim, izdašnost izvora ili ponora možemo izraziti kao protok fluida kroz proizvoljnu zatvorenu površ koja ograničava konačnu oblast prostora u kojoj se nalazi izvor, odnosno ponor, tj.

$$(12.2) \quad \epsilon = \oint_a \vec{v} \cdot \vec{da} = \int_a v^i da_i.$$

Da bismo to pokazali postupićemo na sledeći način.

Uočimo neku zatvorenu površ a' koja obuhvata izvor (izvor i ponor zvaćemo zajedničkim imenom: izvor, a razlikovaćemo ih po tome što je u prvom slučaju $\epsilon > 0$, a u drugom $\epsilon < 0$) i koja je obuhvaćena nekom drugom zatvorenom površi

a (sl. 15.). Spojimo, zatim, te dve površi nekom ravnom površi a'' . Na ovaj način formirali smo regularnu oblast prostora, koju ćemo obeležiti sa V , koja je ograničena zatvorenom površi $A = a' + 2a'' + a$. Protok fluida kroz površ A , s obzirom da ograničava regularnu oblast prostora, možemo, korišćenjem teoreme o divergenciji, izraziti u obliku



Sl. 15

$$\oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_V \text{div } \vec{v} dV.$$

Kako je, međutim, u slučaju nestišljivih fluida divergencija brzine jednaka nuli, biće i protok kroz površ A jednak nuli, tj.

$$(12.3) \quad \oint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = 0.$$

Ako sada element površi $d\vec{a}'$ orijentišemo ka oblasti V prostora, a element $d\vec{a}$ od te oblasti, integral po površi A možemo izraziti u obliku

$$\oint_A = -\oint_{a'} + \oint_a,$$

pri čemu se integrali po površi a'' potiru, jer se integracija po toj površi vrši dva puta, a prilikom druge integracije menja se smer normale na tu površ. Na osnovu poslednje jednačine i (12.3), dobivamo

$$\oint_{a'} \vec{v} \cdot d\vec{a}' = \oint_a \vec{v} \cdot d\vec{a},$$

odakle, izračunavanjem granične vrednosti kad a' teži nuli, sledi

$$\varepsilon = \lim_{a' \rightarrow 0} \oint_{a'} \vec{v} \cdot d\vec{a}' = \oint_a \vec{v} \cdot d\vec{a},$$

čime je dokazana važnost izraza (12.2).

U prethodnom odeljku smo izveli zaključak da je kod strujanja nestišljivog fluida protok kroz bilo koju zatvorenu površ u strujnom polju jednak nuli. Taj zaključak izveli smo, međutim, pod pretpostavkom da u oblasti prostora, koju ograničava uočena zatvorena površ, nema singularnih tačaka. Sada vidimo da je u slučaju kada uočena zatvorena površ obuhvata izvor, protok različit od nule, tj. jednak izdašnosti izvora, iako je fluid nestišljiv.

Postojanje izvora ima za posledicu pojavu novih količina mase fluida u strujnom polju. Količina mase fluida koja u jedinici vremena izađe iz izvora predstavlja izdašnost mase izvora. Ako, uopšte, količinu mase fluida koja u jedinici vremena prođe kroz neku konačnu površ a u strujnom polju definišemo kao protok Q_m mase kroz tu površ, tada je

$$(12.4) \quad Q_m = \int_a \rho \vec{v} \cdot d\vec{a},$$

odnosno

$$(12.5) \quad Q_m = \oint_a \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

u slučaju kad je površ a zatvorena. Jasno je da je, u slučaju strujanja nestišljivog fluida, protok mase kroz bilo koju zatvorenu površ u strujnom polju jednak nuli, ako u oblasti koju ograničava ta površ nema singularnih tačaka (izvora mase). To je lako pokazati ako površinski integral (12.5) transformišemo u zapreminski i iskoristimo uslov da je $\rho = \text{const.}$, odnosno $\text{div} \vec{v} = 0$. Uvodeći na ovaj način definisani pojam protoka mase, izdašnost mase izvora, ϵ_m , možemo izraziti u obliku

$$(12.6) \quad \epsilon_m = \lim_{a \rightarrow 0} \oint_a \rho \vec{v} \cdot d\vec{a}$$

odnosno

$$(12.7) \quad \epsilon_m = \oint_a \rho \vec{v} \cdot d\vec{a} = \rho \oint_a \vec{v} \cdot d\vec{a} = \rho \epsilon,$$

za slučaj nestišljivih fluida.

U 3. odeljku smo izveli jednačinu konzervacije mase u obliku (3.9), pri čemu smo naglasili da ona mora biti zadovoljena u svim regularnim tačkama strujnog polja. Prema tome, jasno je da jednačina konzervacije mase (3.9) neće biti zadovoljena u tačkama u kojima se nalazi izvor mase. Da bismo, međutim, izveli odgovarajuću jednačinu koja će biti zadovoljena i u tim tačkama, postupićemo na sledeći način.

Uočimo fluidni delić koji je koordiniran tački strujnog polja u kojoj se nalazi izvor. Brzina promene mase tog fluidnog delića očigledno je jednaka izdašnosti mase izvora, tj.

$$\dot{dm} = \epsilon_m.$$

Izražavajući sada \dot{dm} na isti način kao što smo to učinili u 3. odeljku, tj.

$$\dot{dm} = \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} \right] dv,$$

dobivamo, konačno,

$$(12.8) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho v^k)_{,k} = \bar{\epsilon}_m,$$

gde je $\bar{\epsilon}_m = \frac{\epsilon_m}{dv}$ specifična izdašnost mase izvora, tj. izdašnost mase izvora računata po jedinici zapremine.

13. Potencijalna strujanja. Za strujanje kažemo da je *potencijalno* ili *nevtložno* kada je tenzor vrtložnosti, ω , prema tome, i vrtlog jednak nuli u svim tačkama strujnog polja. S obzirom da je vrtlog povezan sa rotorom vektora brzine (jednačina (8.11)), zaključujemo da je kod potencijalnih strujanja i rotor brzine jednak nuli u

svim tačkama strujnog polja. Prema tome, u svakoj tački strujnog polja zadovoljen je uslov

$$(13.1) \quad \varepsilon^{ijk} v_{k,j} = 0,$$

koji predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine koje moraju zadovoljavati koordinate vektora brzine. Ovaj sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina će očigledno biti zadovoljen ako se brzina izrazi kao gradijent neke skalarne funkcije, tj.

$$(13.2) \quad v_k = \varphi_{,k} \equiv \frac{\partial \varphi}{\partial x^k},$$

jer je

$$\varepsilon^{ijk} \varphi_{,kj} = 0,$$

pošto je $\varphi_{,kj} = \varphi_{,jk}$ i $\varepsilon^{ijk} = -\varepsilon^{ikj}$.

Osnovna karakteristika potencijalnih strujanja je, kao što smo i ranije zaključili, činjenica da se fluidni delići prilikom kretanja ne obrću — ne vrtlože se. Njihovo kretanje se, prema tome, sastoji iz translacije i čiste deformacije. Iz (13.2) vidimo da se kod ovakvih strujanja koordinate brzine mogu izraziti kao parcijalni izvodi neke skalarne funkcije po koordinatama. Iz tog razloga se skalarna funkcija φ naziva potencijalna funkcija ili potencijal brzine. Ona je, u opštem slučaju, kada je strujanje nestacionarno, funkcija položaja i vremena, tj.

$$(13.3) \quad \varphi = \varphi(x^k, t).$$

Kod stacionarnih strujanja, međutim, potencijal brzine je funkcija samo položaja.

Geometrijsko mesto tačaka polja u kojima potencijal brzine ima istu vrednost obrazuje ekvipotencijalnu površ. Jednačina te površi je, prema tome,

$$(13.4) \quad \varphi(x^k, t) = C$$

gde je C proizvoljna realna konstanta. Za različite vrednosti konstante C dobivamo različite ekvipotencijalne površi u prostoru. U opštem slučaju, kada je strujanje nestacionarno, ekvipotencijalne površi se menjaju tokom vremena, dok kod stacionarnih strujanja one ostaju fiksne u prostoru.

Kod potencijalnih strujanja važi sledeći s t a v: U fiksiranom trenutku vremena, u svakoj tački strujnog polja vektor brzine je upravan na ekvipotencijalnu površ koja prolazi kroz tu tačku. DOKAZATI.

D o k a z. Uočimo, u nekom fiksiranom trenutku vremena, u strujnom polju jednu ekvipotencijalnu površ $\varphi = C$ (sl. 16). U proizvoljnoj tački A te površi uočimo jedinični vektor \vec{m} koji je tangentan na površ. Priraštaj potencijala brzine u pravcu vektora \vec{m} jednak je nuli, jer potencijal ima istu vrednost u svim tačkama ekvipotencijalne površi. Prema tome je

$$d\varphi_{(m)} = 0,$$

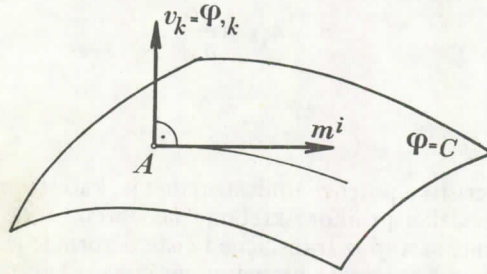
gde indeksom m u zagradi označavamo da se radi o priraštaju u pravcu jediničnog vektora \vec{m} . Kako, međutim, taj priraštaj, s obzirom da smo vreme fiksirali, možemo izraziti u obliku

$$d\varphi_{(m)} = \varphi_{,k} dx_{(m)}^k,$$

gde su $dx_{(m)}^k$ kontravarijantne koordinate orijentisanog elementa luka u pravcu jediničnog vektora \vec{m} , dobivamo

$$(13.5) \quad \varphi_{,k} dx_{(m)}^k = v_k dx_{(m)}^k = 0,$$

odakle zaključujemo da je vektor brzine upravan na vektor $\vec{dx}_{(m)}$, pa, prema tome, i na ekvipotencijalnu površ, čime je stav dokazan.



Sl. 16

Kod nestacionarnih strujanja tačka A (sl. 16) bi, u nekom drugom trenutku vremena, pripadala nekoj drugoj ekvipotencijalnoj površi. Međutim, i vektor brzine u tački A bi se promenio, tako da bi opet bio upravan na ekvipotencijalnu površ. Kod stacionarnih strujanja, međutim, ni ekvipotencijalne površi ni vektori brzine se ne menjaju u fiksiranim tačkama strujnog polja.

Kada smo definisali strujne linije u strujnom polju, rekli smo da su to linije u čijim tačkama je vektor brzine na njih tangentan. Orijetisani element luka strujne linije je, prema tome, u svakoj tački strujne linije kolinearano sa vektorom brzine. Imajući to u vidu, kao neposredna posledica prethodnog stava, sledi stav: *U svakoj tački potencijalnog strujnog polja strujne linije su, u svakom trenutku vremena, upravne na ekvipotencijalne površi.*

Uočimo u potencijalnom strujnom polju dve fiksirane tačke A i B . Tačka A neka pripada ekvipotencijalnoj površi $\varphi = \varphi_A$, a tačka B ekvipotencijalnoj površi $\varphi = \varphi_B$ (sl. 17). Kod nestacionarnih strujanja, s obzirom da se ekvipotencijalne površi menjaju sa vremenom, u različitim trenucima vremena tačke A i B pripadaće različitim ekvipotencijalnim površima. Ako tačke A i B spojimo nekom krivom linijom L , fluidna struja duž te linije iznosi

$$J = \int_{L(A)}^{L(B)} v_k dx_{(L)}^k = \int_{L(A)}^{L(B)} \varphi_{,k} dx_{(L)}^k,$$

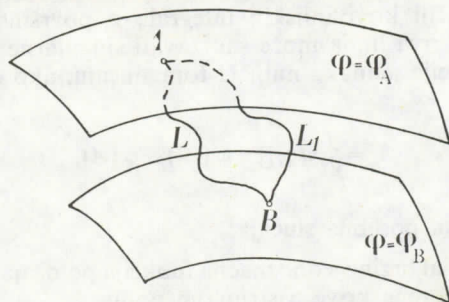
gde su $dx_{(L)}^k$ kontravarijantne koordinate orijentisanog elementa luka krive L . Kako je, međutim, u fiksiranom trenutku vremena,

$$\varphi_{,k} dx_{(L)}^k = d\varphi_{(L)}$$

gde je $d\varphi_{(L)}$ priraštaj potencijala φ u pravcu krive L , dobivamo

$$(13.6) \quad J = \int_{L(A)}^{L(B)} d\varphi_{(L)} = \varphi(B) - \varphi(A),$$

gde smo sa $\varphi(B)$ i $\varphi(A)$ označili vrednosti potencijala brzine u odgovarajućim tačkama B i A , u uočenom trenutku vremena. Na osnovu toga, zaključujemo da važi sledeći stav: Kod potencijalnih strujanja, u svakom trenutku vremena, fluidna struja duž proizvoljne krive linije, koja spaja dve fiksirane tačke polja, jednaka je razlici vrednosti potencijala brzine u krajnjim tačkama krive, koje oni imaju u tom trenutku vremena, i ne zavisi od oblika krive (putanje integracije).

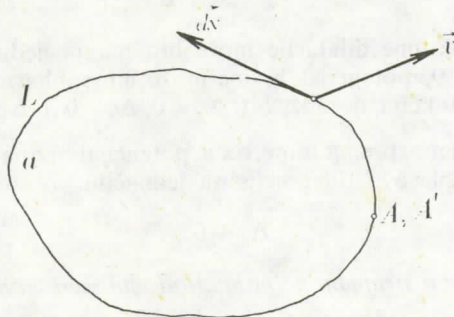


Sl. 17

Kao neposredna posledica ovog stava sledi s t a v: Kod potencijalnih strujanja, u svakom trenutku vremena, fluidna struja duž bilo koje krive, koja spaja bilo koje dve tačke na dvema ekvipotencijalnim površima, jednaka je razlici vrednosti potencijala brzine koje, u tom trenutku vremena, odgovaraju tim površima i ne zavisi od izbora tačaka niti krivih koje ih spajaju. Za dokaz ovog stava dovoljno je iskoristiti prethodni stav i činjenicu da potencijal brzine ima istu vrednost u svim tačkama ekvipotencijalne površi.

Ako u potencijalnom strujnom polju uočimo neku zatvorenu krivu liniju L (sl. 18), tada, pod pretpostavkom da u strujnom polju nema singularnih tačaka (u kom slučaju kažemo da strujno polje predstavlja jednostruko povezanu oblast), cirkulacija duž te krive je

$$(13.7) \quad \Gamma = \oint_L v_k dx_{(L)}^k = \int_a \varepsilon_{klm} v^{m,l} da = 0,$$



Sl. 18

jer je rotor brzine jednak nuli, pri čemu je a proizvoljna površ u strujnom polju koja je ograničena zatvorenom krovom linijom L . Prema tome, važi sledeći s t a v: U potencijalnom jednostruko povezanom strujnom polju cirkulacija je jednaka nuli duž bilo koje zatvorene krive linije dokazati.

11

lacija je jednaka nuli duž bilo koje zatvorene krive linije. Iz (13.7) zaključujemo da važi i obrnuto, tj. da važi Kelvinova teorema kinematike: Jednostruko povezano strujno polje je potencijalno ako i samo ako je cirkulacija jednaka nuli duž bilo koje zatvorene krive linije u strujnom polju.

Ako je, međutim, potencijalno strujno polje višestruko povezano, tj. ako u njemu ima singularnih tačaka, u opštem slučaju ne možemo koristiti Stoksovu teorem o transformaciji krivolinijskih integrala u površinske, jer površ a koju ograničava zatvorena kriva linija može sadržavati singularne tačke, pa ne možemo zaključiti da je cirkulacija jednaka nuli. U tom slučaju, ako cirkulaciju izrazimo u obliku

$$(13.8) \quad \Gamma = \oint_L d\varphi_{(L)} = \varphi(A') - \varphi(A),$$

moramo razlikovati dva posebna slučaja:

1. Ako je potencijal brzine jednoznačna funkcija položaja, cirkulacija je jednaka nuli duž bilo koje zatvorene krive u strujnom polju.

2. Ako je potencijal brzine višeznačna funkcija položaja, cirkulacija može biti jednaka ili različita od nule, što zavisi od toga da li je vrednost $\varphi(A)$ potencijala u tački A , od koje počinjemo integraciju, jednaka ili ne vrednosti potencijala $\varphi(A')$ u istoj tački, koju smo obeležili sa A' , ali posle obilaženja po zatvorenoj krivoj (sl. 18).

Iz (13.7) i (13.8), upoređivanjem zaključujemo: *kad je potencijalno strujno polje jednostruko povezano, tj. kad u njemu nema singularnih tačaka, potencijal brzine je jednoznačna funkcija položaja.* U protivnom, ovaj zaključak ne mora da važi.

Tenzor brzine deformacije, koristeći (8.4)₁ i (13.2), možemo, kod potencijalnih strujanja, izraziti u obliku

$$(13.9) \quad d_{kl} = \varphi_{,kl}$$

odakle, za prvu invarijantu tenzora brzine deformacije, odnosno divergenciju brzine, dobivamo

$$(13.10) \quad d_I = \operatorname{div} \vec{v} = g^{kl} \varphi_{,kl} = \Delta\varphi.$$

S obzirom da brzina kubne dilatacije može biti manja, jednaka ili veća od nule, tj. $d_I \leq 0$, $d_I = 0$ ili $d_I \geq 0$, potencijal brzine može biti subharmonijska, harmonijska ili superharmonijska funkcija, tj. može biti $\Delta\varphi \leq 0$, $\Delta\varphi = 0$ ili $\Delta\varphi \geq 0$. U slučaju kada je $d_I = \operatorname{div} \vec{v} = 0$, zaključujemo, prema tome, da je potencijal brzine harmonijska funkcija, tj. da zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu

$$(13.11) \quad \Delta\varphi = 0$$

i da kao takva *ne može u strujnom polju imati ni minimum ni maksimum.*

Potencijalno strujno polje kod koga je u svim tačkama divergencija brzine jednaka nuli naziva se *Laplasovo strujno polje*. Prema tome, potencijalno strujanje nestišljivog fluida pripada Laplasovom strujnom polju. Kod Laplasovog strujnog polja, kao i kod svakog strujnog polja u čijim tačkama je divergencija brzine jednaka nuli, protok kroz bilo koju zatvorenu površ je jednak nuli, pa zaključujemo da *strujne linije ne mogu ni počinjati niti se završavati u strujnom polju.*

V e ž b a n j a

1. Pokazati da potencijal brzine zadovoljava relacije

$$\dot{\varphi} - \frac{\partial \varphi}{\partial t} = (v)^2 \geq 0,$$

gde smo sa v označili intenzitet brzine.

2. Pokazati da je izvod potencijala brzine u pravcu vektora brzine jednak intenzitetu vektora brzine i na osnovu toga izvesti zaključke:

a) da potencijal brzine ne može nikada opadati po vrednosti u smeru kretanja duž strujnih linija, i

b) da su zaustavne tačke stacionarne tačke potencijala brzine duž strujnih linija na kojima se nalaze.

3. Napisati Laplasovu diferencijalnu jednačinu (13.11) u sistemu Dekartovih pravougljih, cilindarskih polarnih i sfernih polarnih koordinata.

4. Pokazati da kod potencijalnih strujanja vektor ubrzanja ima potencijal, tj. da se može izraziti u obliku

$$\vec{w} = \text{grad} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \varphi \right),$$

gde je φ potencijal brzine.

14. Vrtložna strujanja. Kada je pri strujanju fluida tenzor vrtložnosti različit od nule, za strujanje kažemo da je vrtložno. Kod vrtložnih strujanja, prema tome, u tačkama strujnog polja je

$$(14.1) \quad 2 \omega^i = \varepsilon^{ijk} \omega_{jk} = -\varepsilon^{ijk} v_{k,j} \neq 0,$$

pa zaključujemo da prilikom kretanja fluidni deliци i kruto rotiraju.

Vrtlog $\vec{\omega}$ je u opštem slučaju, kad je strujanje nestacionarno, funkcija položaja i vremena, tj.

$$(14.2) \quad \omega^k = \omega^k(x^i, t)$$

i kao vektorskom polju odgovaraju mu vektorske linije koje se nazivaju vrtložne linije. Diferencijalne jednačine vrtložnih linija su, prema tome,

$$(14.3) \quad \varepsilon_{ijk} \omega^j dx^k = 0,$$

odnosno

$$\frac{dx^1}{\omega^1} = \frac{dx^2}{\omega^2} = \frac{dx^3}{\omega^2},$$

gde su dx^k kontravarijantne koordinate orijentisanog elementa luka vrtložne linije. Integracijom ovog sistema od dve nezavisne diferencijalne jednačine, dobivamo konačne jednačine vrtložnih linija

$$(14.4) \quad f_1(x^1, x^2, x^3, t) = C_1, \quad f_2(x^1, x^2, x^3, t) = C_2$$

i vidimo da one, u opštem slučaju, kad je strujanje nestacionarno, nisu stacionarne linije u prostoru.

Vrtložne linije su stacionarne linije u strujnom polju ako i samo ako je

$$(14.5) \quad \varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega^j}{\partial t} \omega^k = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} \times \vec{\omega} = 0.$$

Odavde vidimo da je stacionarnost strujanja, odnosno stacionarnost polja vektora vrtložnosti $\left(\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = 0\right)$, dovoljan ali ne i potreban uslov za stacionarnost vrtložnih linija. Potreban i dovoljan uslov za to je uslov (14.5). Nestacionarna vrtložna strujanja kod kojih je zadovoljen uslov (14.5) nazivaju se *vrtložna strujanja sa stacionarnim vrtložnim linijama*. Jasno je da je stacionarno vrtložno strujanje specijalni slučaj ovog strujanja.

Iz (14.5) vidimo da kod nestacionarnih vrtložnih strujanja sa stacionarnim vrtložnim linijama mora biti

$$(14.6) \quad \frac{\partial \omega^i}{\partial t} = F(x^k, t) \omega^i,$$

gde funkcija $F(x^k, t)$ predstavlja proizvoljni skalarni faktor.

Vrtložne površi definišemo kao one površi u strujnom polju u čijoj svakoj tački i u svakom trenutku vremena je vektor vrtložnosti na njih tangentan. Drugim rečima, vrtložne površi su one površi u strujnom polju koje u svakom trenutku vremena predstavljaju skup vrtložnih linija. Pokazaćemo sada da važi sledeći s t a v: *Kod vrtložnih strujanja sa stacionarnim vrtložnim linijama i nestacionarnim poljem vektora vrtložnosti, koja zadovoljavaju uslov (14.6), ekviskalarne površi $F(x^k, t) = C$ su vrtložne površi.*

D o k a z. Ako, na osnovu (8.10), vrtlog izrazimo preko rotora vektora brzine, (14.6) možemo napisati u obliku

$$\varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)_{,j} = F(x^l, t) \varepsilon^{ijk} v_{k,j},$$

odnosno

$$\varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)_{,j} = \varepsilon^{ijk} (F v_k)_{,j} - \varepsilon^{ijk} (F_{,j} v_k).$$

Izračunavanjem divergencije, odavde dobivamo

$$\varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)_{,ij} = \varepsilon^{ijk} (F v_k)_{,ij} - \varepsilon^{ijk} F_{,ij} v_k - \varepsilon^{ijk} F_{,j} v_{k,i}$$

odnosno

$$\varepsilon^{ijk} F_{,j} v_{k,i} = 0, \quad (\text{grad } F \cdot \vec{\omega} = 0),$$

odakle zaključujemo da je vektor grad F upravan na vektor $\vec{\omega}$, odn. da su ekviskalarne površi $F(x^k, t) = C$ vrtložne površi kod kojih je u svakoj tački vektor $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ proporcionalan vektoru $\vec{\omega}$, tj. $\frac{\partial \omega^i}{\partial t} = C \omega^i$, čime je stav dokazan.

Iz (14.5) vidimo da vrtložno strujanje ima stacionarne vrtložne linije i kada je polje vrtloga stacionarno, tj. kada je ispunjen uslov

$$(14.7) \quad \frac{\partial \omega^i}{\partial t} = 0.$$

Ovaj uslov, međutim, može biti ispunjen i u slučaju kada strujanje nije stacionarno, tj. kada polje brzine nije stacionarno. Stoga važi sledeći s t a v: *Potreban i dovoljan uslov da polje vektora vrtložnosti bude stacionarno je da brzina bude zbir jednog potencijalnog i jednog stacionarnog polja.*

D o k a z. Ako, na osnovu (8.10), vrtlog izrazimo preko rotora vektora brzine, (14.7) možemo napisati u obliku

$$\varepsilon^{ijk} \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} \right)_{,j} = 0, \quad \left(\text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \right).$$

Ovaj je uslov, pa, prema tome, i uslov (14.7), očigledno ispunjen ako postoji skalarna funkcija $\chi = \chi(x^k, t)$, takva da je

$$\frac{\partial v_k}{\partial t} = \chi_{,k}, \quad \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \text{grad} \chi \right),$$

tj. ako lokalno ubrzanje ima potencijal. Integracijom, odavde dobivamo

$$(14.8) \quad v_k = \left(\int \chi(x^l, t) dt \right)_{,k} + f_k(x^l)$$

na osnovu čega zaključujemo da će polje vrtloga biti stacionarno i u slučaju kada je polje brzine nestacionarno, ali izraženo u obliku zbira jednog potencijalnog i jednog stacionarnog polja, čime je stav dokazan.

Na osnovu prethodnog možemo zaključiti da će vrtložne linije biti stacionarne linije u strujnom polju u tri posebna slučaja.

1. Kada je strujanje nestacionarno sa nestacionarnim poljem vrtloga, ali je zadovoljen uslov (14.5).

2. Kada je strujanje nestacionarno sa stacionarnim poljem vrtloga, u kom slučaju je polje brzine oblika (14.8).

3. Kada je strujanje stacionarno.

Na osnovu (8.10), za divergenciju vektora vrtložnosti dobivamo

$$(14.9) \quad \text{div} \vec{\omega} = \omega^i_{,i} = -\frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} v_{k,ji} \equiv 0,$$

i vidimo da je identički jednaka nuli u strujnom polju.

Ako u vrtložnom strujnom polju uočimo neku zatvorenu površ a , koja ograničava neku konačnu oblast v prostora, tada integralom

$$(14.10) \quad \oint_a \omega_i da^i = \oint_a \vec{\omega} \cdot \vec{da}$$

definišemo fluks vektora $\vec{\omega}$ kroz uočenu zatvorenu površ. Pretpostavljajući da je oblast v prostora, koju ograničava zatvorena površ a , jednostruko povezana oblast, tada, korišćenjem teoreme o divergenciji i (14.9), za fluks vektora $\vec{\omega}$ kroz zatvorenu površ dobivamo

$$(14.11) \quad \oint_a \omega^i da_i = \int_v \omega_{,i}^i dv \equiv 0.$$

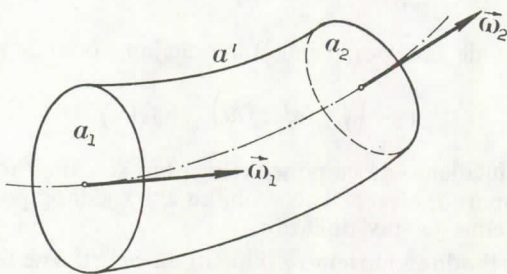
Na osnovu ovoga zaključujemo: *Vrtložne linije ne mogu ni početi niti se završiti u jednostruko povezanom vrtložnom strujnom polju.*

Ako vrtložnu cev definišemo kao površ koju obrazuju vrtložne linije koje prolaze kroz tačke neke zatvorene krive linije u strujnom polju, a vrtložno vlakno kao vrtložnu cev sa infinitezimalnim poprečnim presekom, možemo reći: *Vrtložne cevi, kao ni vrtložna vlakna ne mogu početi niti se završavati u jednostruko povezanom vrtložnom strujnom polju.*

S obzirom da zadovoljava (14.9), polje vrtloga je *solenoidno*. Stoga važi **prva Helmholtzova teorema**: *Jačina vrtloga je ista u svakom poprečnom preseku vrtložne cevi.* **DOKAZATI**

12

D o k a z. Uočimo zatvorenu površ u strujnom polju koja se sastoji iz površi dela omotača vrtložne cevi i površi dvaju njenih poprečnih preseka (sl. 19). S obzirom



Sl. 19

da je fluks vektora $\vec{\omega}$ kroz uočenu zatvorenu površ, na osnovu (14.11), jednak nuli, možemo pisati

$$\oint_a \omega_i da^i = - \int_{a_1} \omega_i da_1^i + \int_{a_2} \omega_i da_2^i + \int_{a'} \omega_i da'^i = 0.$$

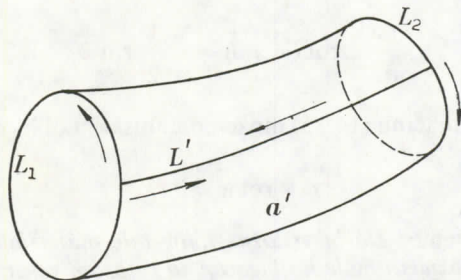
S obzirom, međutim, da je orijentisani element površi \vec{da}' upravan na vektor vrtložnosti u svakoj tački površi a' , treći integral na desnoj strani je jednak nuli, pa dobivamo

$$(14.12) \quad \int_{a_1} \omega_k da_1^k = \int_{a_2} \omega_k da_2^k.$$

Ako fluks vektora $\text{rot } \vec{v} = -2\vec{\omega}$ kroz površ poprečnog preseka vrtložne cevi definišemo kao jačinu vrtloga, zaključujemo da ona ima istu vrednost u svim poprečnim presecima vrtložne cevi, čime je teorema dokazana.

Ova se teorema može iskazati i u obliku koji je dao Kelvin: *Cirkulacija uzeta u istom smeru duž bilo koje dve zatvorene krive linije, koje ograničavaju poprečne preseke vrtložne cevi, ima istu vrednost.*

D o k a z. Uočimo na vrtložnoj cevi zatvorenu krivu liniju L koja se sastoji iz dveju zatvorenih krivih linija, L_1 i L_2 , koje ograničavaju dva poprečna preseka, i linije koja leži na omotaču vrtložne cevi i spaja krive L_1 i L_2 (sl. 20). Na ovaj način



Sl. 20

uočena zatvorena kriva linija L ograničava površ koja se nalazi na omotaču vrtložne cevi. Prema tome, koristeći Stoksovu teoremu o transformaciji krivolinijskih integrala u površinske i uzimajući u obzir činjenicu da je na omotaču vrtložne cevi vektor vrtložnosti upravan na orijentisani element površi, dobivamo

$$(14.13) \quad \oint_L v_k dx_{(L)}^k = \int_{a'} \varepsilon^{ijk} v_{k,j} da'_i = -2 \int_{a'} \omega^i da'_i = 0.$$

Kako je, međutim,

$$\oint_L v_k dx_{(L)}^k = \oint_{L_1} + \int_{L'} - \oint_{L_2} - \int_{L'}$$

dobivamo

$$(14.14) \quad \oint_{L_1} v_k dx_{(L_1)}^k = \oint_{L_2} v_k dx_{(L_2)}^k,$$

čime je teorema dokazana.

Vrtložne linije nisu u opštem slučaju materijalne linije, tj. ne predstavljaju skup uvek istih čestica fluida. U cilju da nađemo uslov pod kojim će one biti materijalne, s obzirom da su vektorske linije polja vrtloga, iskoristićemo jednačinu (6.7), odnosno (6.8). Prema tome, da bi vrtložne linije bile materijalne, mora biti ispunjen uslov

$$(14.15) \quad \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) \right] \times \vec{\omega} = 0,$$

pri čemu smo, koristeći jednačinu (6.8), iskoristili činjenicu da je $\text{div } \vec{\omega} = 0$.

Međutim, izračunavanjem rotora vektora ubrzanja, iz (7.15) dobivamo

$$\text{rot } \vec{w} = \text{rot} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \text{rot} (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}),$$

odnosno, koristeći (8.11),

$$\text{rot } \vec{w} = -2 \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} - 2 \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{v}).$$

Oдавde je

$$(14.16) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot} (\vec{\omega} \times \vec{v}) = -\frac{1}{2} \text{rot } \vec{w},$$

pa, na osnovu toga, jednačinu (14.15) možemo napisati u obliku

$$(14.17) \quad \vec{\omega} \times \text{rot } \vec{w} = 0.$$

Prema tome, zaključujemo: *Da bi vrtložne linije bile materijalne linije potrebno je i dovoljno da vektor vrtložnosti bude kolinearan sa rotorom vektora ubrzanja.*

Iz (14.17) vidimo da uslov

$$(14.18) \quad \text{rot } \vec{w} = 0$$

predstavlja dovoljan, ali ne i potreban uslov da vrtložne linije budu materijalne. Ovaj uslov će uvek biti ispunjen ako ubrzanje ima potencijal, tj. ako je

$$(14.19) \quad \vec{w} = \text{grad } \Phi,$$

gde je $\Phi = \Phi(x^k, t)$ potencijal ubrzanja.

Kada su vrtložne linije materijalne, jasno je da su vrtložne cevi i vrtložna vlakna materijalne površi. To znači da ako u fiksiranom trenutku vremena površ vrtložne cevi predstavlja skup određenih čestica fluida, predstavljace je skup istih čestica i docnije za sve vreme kretanja. Prema tome, uslov (14.17) je potreban i dovoljan, a (14.18) dovoljan da vrtložne cevi budu materijalne površi.

Jačinu vrtloga definisali smo kao fluks rotora brzine kroz površ poprečnog preseka vrtložne cevi. Pri tome smo pokazali da je u fiksiranom trenutku vremena jačina vrtloga ista u svim poprečnim presecima vrtložne cevi. Jasno je, međutim, da je u opštem slučaju jačina vrtloga funkcija vremena, tj. da u različitim trenucima vremena ima različite vrednosti, pri čemu u određenom trenutku vremena ima određenu vrednost koja je ista u svim poprečnim presecima vrtložne cevi. Pokazaćemo sada da važi sledeći s t a v: *Potreban i dovoljan uslov da jačina vrtloga svake vrtložne cevi bude ista u svim trenucima vremena je da ubrzanje ima potencijal.*

D o k a z. Brzinu promene jačine vrtloga možemo izraziti u obliku

$$(14.20) \quad \frac{D}{Dt} \int_a - 2\omega^k da_k = -2 \left(\int_a \dot{\omega}^k da_k + \int_a \omega^k \dot{da}_k \right).$$

Da bismo odredili brzinu promene orijentisanog elementa površi, pođimo od izraza

$$(14.21) \quad da_k = \varepsilon_{kij} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j, \quad (\vec{da} = \vec{dx}_{(1)} \times \vec{dx}_{(2)}),$$

gde smo sa $\vec{dx}_{(1)}$ i $\vec{dx}_{(2)}$ označili linearno nezavisne orijentisane elemente luka na površi poprečnog preseka vrtložne cevi. Diferenciranjem po vremenu, iz prethodnog izraza dobivamo

$$\dot{\vec{da}}_k = \varepsilon_{kij} v_{,l}^i dx_{(1)}^j + \varepsilon_{ijk} dx_{(1)}^i v_{,l}^j dx_{(2)}^k,$$

što, očigledno, možemo napisati u obliku

$$\dot{\vec{da}}_k = \varepsilon_{kij} v_{,l}^i (dx_{(1)}^j dx_{(2)}^k - dx_{(1)}^k dx_{(2)}^j),$$

odnosno

$$\dot{\vec{da}}_k = \varepsilon_{kij} v_{,l}^i \delta_{mn}^{lj} dx_{(1)}^m dx_{(2)}^n.$$

Iz (14.21), međutim, kompozicijom sa ε^{kmn} , dobivamo

$$da_k \varepsilon^{kmn} = \delta_{ij}^{mn} dx_{(1)}^i dx_{(2)}^j,$$

tako da je

$$\dot{\vec{da}}_k = \varepsilon_{kij} \varepsilon^{ljr} v_{,l}^i da_r = \delta_{ki}^{rl} v_{,l}^i da_r,$$

odnosno

$$(14.22) \quad \dot{\vec{da}}_k = v_{,l}^l da_k - v_{,k}^l da_l.$$

Koristeći ovaj izraz, (14.20) možemo pisati u obliku

$$\frac{D}{Dt} \int_a -2\omega^k da_k = -2 \int_a \left(\dot{\omega}^k da_k + \omega^k v_{,l}^l da_k - \omega^k v_{,k}^l da_l \right),$$

odnosno

$$\frac{D}{Dt} \int_a -2\omega^k da_k = -2 \int_a \left(\frac{\partial \omega^k}{\partial t} + \omega_{,l}^k v^l + \omega^k v_{,l}^l - \omega^l v_{,l}^k \right) da_k.$$

S obzirom da je $\omega_{,l}^l = 0$, biće

$$\begin{aligned} \omega_{,l}^k v^l + \omega^k v_{,l}^l - \omega^l v_{,l}^k &= (\omega^k v^l - \omega^l v^k)_{,l} = \delta_{mn}^{kl} (\omega^m v^n)_{,l} = \\ &= \delta_{mnr}^{klr} (\omega^m v^n)_{,l} = \varepsilon^{klr} \varepsilon_{mnr} (\omega^m v^n)_{,l}, \end{aligned}$$

pa dobivamo

$$(14.23) \quad \frac{D}{Dt} \int_a -2\omega^k da_k = -2 \int_a \left[\frac{\partial \omega^k}{\partial t} + \varepsilon^{klr} \varepsilon_{mnr} (\omega^m v^n)_{,l} \right] da_k$$

ili u vektorskom obliku

$$(14.24) \quad \frac{d}{dt} \int_a -2\vec{\omega} \cdot d\vec{a} = -2 \int_a \left[\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) \right] d\vec{a}.$$

Koristeći sada (14.16), konačno dobivamo

$$(14.25) \quad \frac{d}{dt} \int_a -2\vec{\omega} \cdot d\vec{a} = \int_a \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{a}.$$

Kada ubrzanje ima potencijal, zadovoljen je uslov (14.18), pa se (14.25) svodi na

$$(14.26) \quad \frac{d}{dt} \int_a -2\vec{\omega} \cdot d\vec{a} = 0,$$

odakle sledi

$$(14.27) \quad \int_a -2\vec{\omega} \cdot d\vec{a} = \text{const.},$$

čime je stav dokazan.

Prehodni stav je ekvivalentan teoremi: 13 Uslov da ubrzanje ima potencijal je potreban i dovoljan da cirkulacija duž bilo koje zatvorene materijalne krive linije ima istu vrednost u svim trenucima vremena. Ova se teorema u literaturi naziva i Thomsonova teorema. ~~POKAZATI~~

D o k a z. Ako je uočena zatvorena kriva linija materijalna, tada brzinu promene cirkulacije duž te krive možemo izraziti u obliku

$$(14.28) \quad \frac{D}{Dt} \oint_L v_k dx_{(L)}^k = \oint_L \overline{v_k \dot{dx}_{(L)}^k} = \oint_L w_k dx_{(L)}^k + \oint_L v_k v_{,i}^k dx_{(L)}^i.$$

Kako je, međutim,

$$\oint_L v_k v_{,i}^k dx_{(L)}^i = \frac{1}{2} \oint_L (v_k v^k)_{,i} dx_{(L)}^i = \frac{1}{2} \oint_L d_{(L)}(v)^2 = 0,$$

dobivamo

$$\frac{D}{Dt} \oint_L v_k dx_{(L)}^k = \oint_L w_k dx_{(L)}^k,$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(14.29) \quad \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \oint_L \vec{w} \cdot d\vec{x}_{(L)}.$$

Ako sada, pretpostavljajući da je strujno polje jednostruko povezano, krivolinijski integral transformišemo u površinski, dobivamo konačno

$$(14.30) \quad \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \int_a \text{rot } \vec{w} \cdot d\vec{a}.$$

Kada ubrzanje ima potencijal, zadovoljen je uslov (14.18), pa se (14.30) svodi na

$$(14.31) \quad \frac{d}{dt} \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = 0,$$

odakle sledi

$$(14.32) \quad \Gamma = \oint_L \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L)} = \text{const.},$$

čime je teorema dokazana.

Da je ova teorema ekvivalentna prethodnom stavu, lako je pokazati na sledeći način. Ako ubrzanje ima potencijal, tada bilo koju zatvorenu materijalnu krivu liniju možemo interpretirati kao krivu koja ograničava poprečni presek neke vrtložne cevi. Imajući to u vidu, transformacijom krivolinijskog integrala (14.31) u površinski neposredno dobivamo (14.26), odakle sledi (14.27).

Na osnovu dokazane teoreme zaključujemo da se cirkulacija duž bilo koje zatvorene materijalne krive linije (koja se, dakle, kreće zajedno sa česticima fluida) *ne može u strujnom polju ni stvoriti ni uništiti, već uvek ima konstantnu vrednost*. Iz tog razloga se strujanje kod koga ubrzanje ima potencijal naziva *strujanje sa nepromenljivom cirkulacijom*. Karakteristika ovakvog strujanja može biti iskazana i drugom i trećom Helmholtzovom teoremom. Druga Helmholtzova teorema glasi: *Kod strujanja sa nepromenljivom cirkulacijom vrtložne linije su materijalne*. Za dokaz ove teoreme dovoljno je iz (14.30), na osnovu (14.31), zaključiti da je rotor ubrzanja jednak nuli, pa iz (14.17) sledi da je to dovoljan uslov da vrtložne linije budu materijalne. Slobodnije, ovu teoremu možemo iskazati rečima: *Ako u nekom trenutku vremena čestice fluida obrazuju vrtložnu liniju, obrazovaće je one i docnije za sve vreme kretanja*. Treća Helmholtzova teorema glasi: *Kod strujanja kod kojih su vrtložne linije materijalne, u cilju da jačina vrtloga duž bilo koje vrtložne cevi bude nepromenljiva potrebno je i dovoljno da strujanje bude sa nepromenljivom cirkulacijom*. Za dokaz ove teoreme, s obzirom da su vrtložne linije materijalne, dovoljno je zatvorenu krivu L u (14.32) interpretirati kao zatvorenu krivu koja ograničava poprečni presek neke vrtložne cevi, pa transformisanjem tog integrala u površinski neposredno dobivamo (14.27).

Da bi vrtložne linije bile materijalne, pokazali smo da je potrebno i dovoljno da bude ispunjen uslov (14.15), odnosno (14.17). Jasno je, međutim, da one, kao takve, nisu u opštem slučaju stacionarne linije. Kombinujući (14.15) i (14.5), zaključujemo da je uslov

$$(14.33) \quad \vec{\omega} \times \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0,$$

potreban i dovoljan da materijalne vrtložne linije budu stacionarne linije u strujnom polju. Iz (14.33) zaključujemo, dalje, da je uslov

$$(14.34) \quad \text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0$$

dovoljan, ali ne i potreban za stacionarnost materijalnih vrtložnih linija.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da se uslov (14.17) može napisati u ekvivalentnom obliku

$$\omega^j w_{[i,j]} = 0,$$

gde je

$$w_{[i,j]} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w_i}{\partial x^j} - \frac{\partial w_j}{\partial x^i} \right).$$

2. Pokazati da je kod strujanja sa nepromenljivom cirkulacijom uvek ispunjen uslov

$$\oint_L \vec{w} \cdot d\vec{x}_{(L)} = 0.$$

3. Pokazati da se kod strujanja sa stacionarnim poljem vrtloga vektor ubrzanja može izraziti u obliku

$$\vec{w} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \chi \right) + \vec{\omega} \times \vec{v},$$

gde je χ potencijal lokalnog ubrzanja koji figuriše u jednačini (14.8).

4. Odrediti pod kojim se uslovima iz (14.8) dobiva polje brzine potencijalnih strujanja.

POKAZATI DA SU RIVANSKA STR. SLOŽENA LAMELARNA STR.

15. Lamelarna, složena lamelarna i zavojna strujanja. Za strujanje kažemo da je lamelarno ako i samo ako brzina ima potencijal, tj. ako je

$$(15.1) \quad v_k = \varphi_{,k},$$

gde je φ potencijal brzine. Prema tome, lamelarno strujanje je isto što i potencijalno (odjeljak 13).

Za strujanje kažemo da je složeno lamelarno ako se brzina može izraziti u obliku

$$(15.2) \quad v_k = FG_{,k}, \quad (\vec{v} = F \text{ grad } G),$$

gde su $F(x^l, t)$ i $G(x^l, t)$ skalarne funkcije.

Premda između njih ima izvesne analogije, složeno lamelarno strujanje je, za razliku od lamelnarnog, vrtložno. To je lako pokazati ako iz (15.2) izračunamo rotor brzine. Tada, naime, dobivamo

$$(15.3) \quad \epsilon^{ijk} v_{k,j} = \epsilon^{ijk} F_{,j} G_{,k},$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(15.4) \quad \text{rot } \vec{v} = \text{grad } F \times \text{grad } G.$$

Koristeći (8.11), odavde sledi

$$(15.5) \quad \vec{\omega} = -\frac{1}{2} \text{grad } F \times \text{grad } G,$$

pa, skalarnim množenjem sa $\vec{v} = F \text{ grad } G$, dobivamo

$$(15.6) \quad \vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0, \quad (\vec{v} \cdot \text{rot } \vec{v} = 0),$$

što je takođe uslov da strujanje bude složeno lamelarno. Na osnovu ovog uslova možemo reći: Da bi strujanje bilo složeno lamelarno potrebno je i dovoljno da u svakoj

tački strujnog polja i u svakom trenutku vremena vrtlog bude upravan na vektor brzine. Ovaj uslov možemo iskazati i rečima: Vrtložno strujanje je složeno lamelarno ako i samo ako su vrtložne linije upravne na strujne linije.

S obzirom da je gradijent skalarne funkcije upravan na odgovarajućim ekviskalarnim površima, iz (15.2) zaključujemo da su strujne linije upravne na ekviskalarnu površ $G(x^i, t) = \text{const.}$, što je u analogiji sa upravnošću strujnih linija na ekvipotencijalne površi kod lamelarnih strujanja. Iz tog razloga važi sledeći s t a v: Kod složenih lamelarnih strujanja strujne linije poseduju kongruenciju normalnih površi.

Ako uslov (15.6) napišemo u razvijenom obliku.

$$(15.7) \quad v_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^3} \right) + v_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^3} - \frac{\partial v_3}{\partial x^1} \right) + v_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right) = 0,$$

vidimo da će biti zadovoljen ako je, recimo,

$$(15.8) \quad v_1 = v_1(x^1, x^2, t), \quad v_2 = v_2(x^1, x^2, t), \quad v_3 = 0,$$

a što je, prema (5.9), uslov za dvodimenzijnska strujanja. Prema tome, zaključujemo: dvodimenzijnska strujanja su složena lamelarna strujanja.

15.9) Za strujanje kažemo da je zavojno (hētkoidno) ako je u svakoj tački polja i u svakom trenutku vremena vektor brzine kolinearan sa vektorom vrtložnosti, tj, ako je

$$(15.9) \quad \vec{\omega} \times \vec{v} = 0, \quad \vec{\omega} \neq 0.$$

Upoređujući ovaj uslov sa (14.34), zaključujemo: kod zavojnih strujanja vrtložne linije su materijalne i stacionarne, tj. poklapaju se sa strujnim linijama i putanjama čestica fluida. Ovaj zaključak važi bez obzira da li je strujanje, odnosno polje vektora vrtložnosti stacionarno ili ne.

Pokazaćemo sada da važi sledeći s t a v: Potreban i dovoljan uslov da zavojno strujanje bude stacionarno je da polje vektora vrtložnosti bude stacionarno.

D o k a z. Uslov (15.9) možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$(15.10) \quad \vec{\omega} = A(x^k, t) \vec{v}.$$

Ako je polje vektora vrtložnosti stacionarno, tada je

$$(15.11) \quad \frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = \frac{\partial A}{\partial t} \vec{v} + A \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0.$$

Iz (15.10), međutim, dobivamo

$$\text{rot } \vec{\omega} = \text{grad } A \times \vec{v} + A \text{rot } \vec{v},$$

odakle, množeći ovu jednačinu skalarno sa $\vec{\omega}$, s obzirom da je

$$(\text{grad } A \times \vec{v}) \cdot \vec{\omega} = (\text{grad } A \times \vec{v}) \cdot A \vec{v} = 0,$$

sledi

$$\vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{\omega} = A \vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{v},$$

odnosno, koristeći (8.11),

$$\vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{\omega} = -2A \vec{\omega} \cdot \vec{\omega}.$$

Odavde je

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\vec{\omega} \cdot \text{rot } \vec{\omega}}{\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}},$$

na osnovu čega zaključujemo da ako je $\vec{\omega}$ stacionarno vektorsko polje, tj. $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} = 0$,

biće i $\frac{\partial A}{\partial t} = 0$, pa iz (15.11) sledi $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, čime je stav dokazan.

S obzirom na uslov (15.9), iz (7.15) vidimo da se ubrzanje kod zavojnih strujanja može izraziti u obliku

$$(15.12) \quad \vec{w} = \frac{\partial v}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right)$$

i istog je oblika kao i u slučaju potencijalnih strujanja ($\vec{\omega} = 0$). Kada je, međutim, zavojno strujanje stacionarno, ili ekvivalentno, kada je polje vektora vrtložnosti stacionarno, iz (15.12) dobivamo

$$(15.13) \quad \vec{w} = \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right).$$

Vidimo, dakle, da ubrzanje u tom slučaju ima potencijal

$$(15.14) \quad \Phi = \frac{v^2}{2} + C$$

gde je C proizvoljna konstanta, pa na osnovu Tomsonove teoreme sledi da će strujanje imati nepromenljivu cirkulaciju. Prema tome, zaključujemo da važi Beltramijeva teorema: *Zavojno strujanje će imati nepromenljivu cirkulaciju ako i samo ako je stacionarno ili, ekvivalentno, ako je polje vektora vrtložnosti stacionarno.*

Vežbanja

1. Pokazati da kod složenih lamelarnih strujanja, kod kojih je polje brzine određeno izrazom (15.2), funkcije F i G zadovoljavaju relacije

$$F \frac{\partial G}{\partial s} = v \geq 0, \quad F \left(\dot{G} - \frac{\partial G}{\partial t} \right) = v^2 \geq 0,$$

gde je $\frac{\partial G}{\partial s}$ izvod u pravcu vektora brzine.

2. Pokazati da je kod zavojnih strujanja uvek ispunjen uslov

$$\omega_i v_j = \omega_j v_i.$$

3. Ako je kod zavojnih strujanja jačina vrtloga nepromenljiva duž svake vrtložne cevi, pokazati da ono mora biti stacionarno.

II DVODIMENZIJSKA STRUJANJA NESTIŠLJIVOG FLUIDA

16. Vrste dvodimenzijskih strujanja. Pri proučavanju kretanja fluida, u 4. odeljku smo rekli da pretpostavljamo da se ono odvija u trodimenzionom euklidskom prostoru, pri čemu ga možemo posmatrati u odnosu na proizvoljni u tom prostoru dopustivi sistem koordinata. Nezavisnost strujanja od izbora koordinatnog sistema omogućuje nam da koordinatni sistem biramo tako da proučavanje učinimo što je moguće jednostavnijim.

U 5. odeljku smo definisali dvodimenzijska strujanja kao ona strujanja kod kojih je moguće izabrati takav sistem koordinata (pravolinijskih ili krivolinijskih) u odnosu na koji će koordinate brzine biti oblika (5.9). Mi ćemo detaljnije proučiti dve posebne vrste dvodimenzijskih strujanja: *ravanska i osnosimetrična strujanja*.

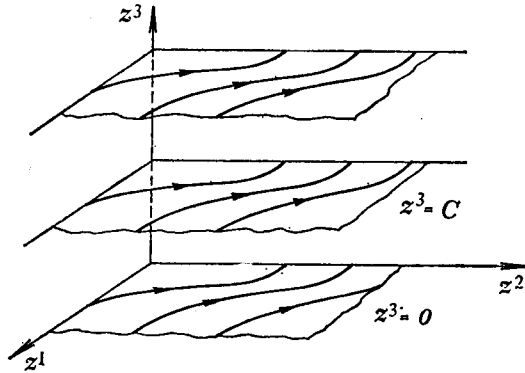
Za strujanje kažemo da je ravansko ako je strujna slika identična u svim ravnima koje su paralelne nekoj fiksiranoj ravni u prostoru. Za proučavanje ravanskog strujanja, prema tome, dovoljno je proučiti ga u jednoj od tih ravni pa da ono bude poznato u celom trodimenzionom prostoru.

Za strujanje kažemo da je osnosimetrično ako je strujna slika identična u svim ravnima koje prolaze kroz neku fiksiranu osu u prostoru. Za proučavanje osnosimetričnog strujanja takođe je dovoljno proučiti ga u jednoj od tih ravni pa da bude poznato u celom trodimenzionom prostoru. Kao primer osnosimetričnog strujanja može se navesti strujanje kroz prave cevi kružnog poprečnog preseka. S obzirom na simetriju ovakvog strujanja, očigledno je da je strujanje identično u svim ravnima koje prolaze kroz osu cevi, pa ga je, iz tog razloga, dovoljno proučiti u jednoj od tih ravni.

17. Ravanska strujanja. Pri proučavanju ravanskih strujanja u većini slučajeva je najpogodnije izabrati Dekartov pravougli sistem koordinata z^k , $k=1, 2, 3$, i to tako da ravni u kojima je strujanje identično budu koordinatne ravni $z^3=\text{const.}$ (slika 21). S obzirom na istovetnost strujanja u svim ravnima $z^3=\text{const.}$, strujanje je dovoljno proučiti u jednoj od tih ravni, recimo $z^3=0$, koja se naziva *osnovna ravan strujanja*.

Umesto Dekartovih pravougljih koordinata z^1 i z^2 možemo, koordinatnim transformacijama

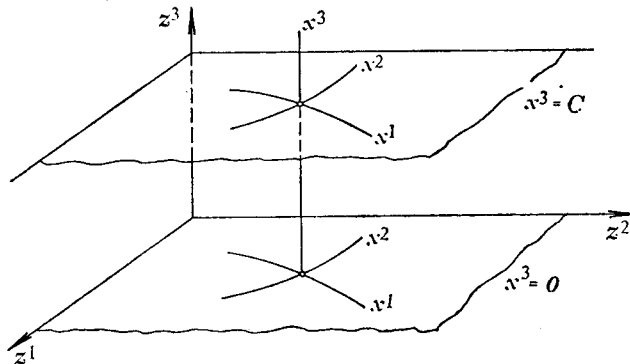
$$(17.1) \quad \begin{aligned} z^1 &= z^1(x^1, x^2), \\ z^2 &= z^2(x^1, x^2), \\ z^3 &= x^3, \end{aligned}$$



Sl. 21

u ravnima strujanja uvesti krivolinijske ortogonalne koordinate x^1 i x^2 (sl. 22). Koristeći transformacioni obrazac

$$g_{ij} = \delta_{kl} \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \frac{\partial z^l}{\partial x^j}$$



Sl. 22

i (17.1), za koordinate metričkog tenzora, u odnosu na sistem ortogonalnih koordinata x^k , dobivamo

$$(17.2) \quad \{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} g_{11}(x^1, x^2) & 0 & 0 \\ 0 & g_{22}(x^1, x^2) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

Koordinatna linija x^3 se poklapa sa Dekartovom osom x^3 , a ravni strujanja sa koordinatnim ravnima $x^3 = \text{const}$.

Polje brzine je određeno kontravarijantnim koordinatama

$$(17.3) \quad \{v^i\} = \{v^1(x^1, x^2, t), \quad v^2(x^1, x^2, t), 0\},$$

što je u saglasnosti sa (5.9). Vidimo, dakle, da vektor brzine, s obzirom da nema projekcije na x^3 osu, leži u ravni strujanja. Osim toga koordinate brzine ne zavise od x^3 , što znači da je brzina ista u odgovarajućim tačkama svih ravni strujanja $x^3 = \text{const}$.

S obzirom da je $v^3 = 0$, iz (10.4) vidimo da je u slučaju ravanskih strujanja jednačina konzervacije mase oblika

$$(17.4) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \sqrt{g}) + \frac{\partial}{\partial x^2} (v^2 \sqrt{g}) = 0,$$

gde je, iz (17.2),

$$(17.5) \quad \sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22}}.$$

16

18. Strujna funkcija za ravanska strujanja. U slučaju ravanskih strujanja, s obzirom da je $v^3 = 0$, iz (6.5) dobivamo diferencijalnu jednačinu strujnih linija u obliku

$$\frac{dx^1}{v^1} = \frac{dx^2}{v^2},$$

odnosno

$$(18.1) \quad v^1 dx^2 - v^2 dx^1 = 0.$$

Ova jednačina, međutim, u opštem slučaju nije egzaktna, pa je, radi dovođenja do potpunog diferencijala, treba pomnožiti integracionim faktorom λ , tj.

$$v^1 \lambda dx^2 - v^2 \lambda dx^1 = 0.$$

Integracioni faktor λ određujemo iz uslova

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \lambda) = \frac{\partial}{\partial x^2} (-v^2 \lambda),$$

odnosno

$$\frac{\partial}{\partial x^1} (v^1 \lambda) + \frac{\partial}{\partial x^2} (v^2 \lambda) = 0.$$

Za nestišljiv fluid očigledno je da se za integracioni faktor može uzeti $\lambda = \sqrt{g}$, jer je tada prethodni uslov identički zadovoljen, s obzirom da se poklapa sa jednačinom konzervacije mase (17.4). Prema tome, diferencijalna jednačina strujnih linija

$$v^1 \sqrt{g} dx^2 - v^2 \sqrt{g} dx^1 = 0$$

je egzaktna, pa možemo staviti da je njena leva strana jednaka potpunom diferencijalu neke skalarne funkcije $\psi(x^1, x^2, t)$, tj.

$$(18.2) \quad d\psi = v^1 \sqrt{g} dx^2 - v^2 \sqrt{g} dx^1,$$

tako da postaje

$$(18.3) \quad d\psi = 0.$$

Integracijom jednačine (18.3) dobivamo konačne jednačine strujnih linija

$$(18.4) \quad \psi(x^1, x^2, t) = C,$$

gde je C integraciona konstanta. Za različite vrednosti integracione konstante dobivamo jednačine pojedinih strujnih linija. Strujna linija koja se dobiva za $C=0$ naziva se nulta strujna linija ili nulta strujnica. Jednačine (18.4) određuju, prema tome, familiju strujnih linija u osnovnoj ravni strujanja $x^3=0$. U trodimenzionom prostoru, međutim, jednačina (18.4) određuje familiju cilindričnih površi koje se nazivaju strujne površi. Presecima strujnih površi sa ravnima strujanja $x^3=\text{const.}$ određene su strujne linije u ravnima strujanja, odnosno trodimenzionom prostoru.

Funkcija $\psi = \psi(x^1, x^2, t)$, s obzirom da određuje strujne linije, naziva se strujna funkcija. U opštem slučaju, kad je strujanje nestacionarno, s obzirom da strujna funkcija zavisi eksplicitno i od vremena, strujne linije, pa i strujne površi, nisu stacionarne u prostoru. Kod stacionarnih strujanja, međutim, kao i kod nestacionarnih strujanja kod kojih je vektor lokalnog ubrzanja kolinearan sa vektorom brzine (uslov (6.9)), strujne linije su stacionarne u prostoru, u kom slučaju se poklapaju sa putanjama čestica fluida.

U fiksiranom trenutku vremena, totalni diferencijal strujne funkcije je

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \psi}{\partial x^2} dx^2,$$

pa, izjednačavanjem koeficijenata uz dx^1 i dx^2 na desnoj strani ove jednačine sa koeficijentima uz dx^1 i dx^2 u jednačini (18.2), dobivamo

$$v^1 \sqrt{g} = \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad -v^2 \sqrt{g} = \frac{\partial \psi}{\partial x^1},$$

odakle sledi

$$(18.5) \quad v^1 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad v^2 = -\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Vidimo, dakle, da se kontravarijantne koordinate brzine mogu izraziti preko strujne funkcije. Pomoću koordinata metričkog tenzora (17.2) možemo iz kontravarijantnih odrediti kovarijantne i fizičke koordinate vektora brzine. Na taj način dobivamo

$$v_1 = g_{11} v^1, \quad v_2 = g_{22} v^2, \\ v_{\langle 1 \rangle} = \sqrt{g_{11}} v^1, \quad v_{\langle 2 \rangle} = \sqrt{g_{22}} v^2,$$

odnosno, koristeći (18.5) i (17.5),

$$(18.6) \quad v_1 = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad v_2 = -\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1},$$

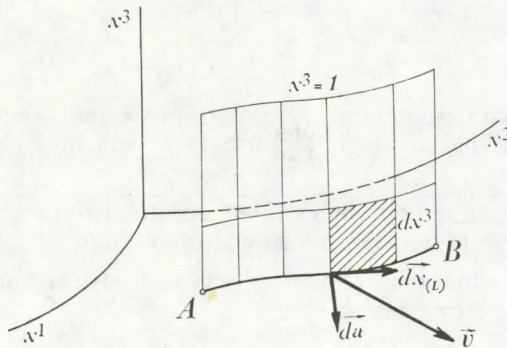
$$(18.7) \quad v_{\langle 1 \rangle} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad v_{\langle 2 \rangle} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Ako u osnovnoj ravni strujanja uočimo neku krivu liniju L , tada pod protokom fluida kroz tu krivu podrazumevamo protok kroz cilindričnu površ koja prolazi kroz tu krivu, a ograničena je ravnima $x^3=0$ i $x^3=1$. Pokazaćemo sada da važi sledeći s t a y: Protok fluida kroz krivu liniju u ravni strujanja, između dve na njoj proizvoljno izabrane tačke, jednak je razlici vrednosti strujne funkcije u tim tačkama i ne zavisi od oblika krive. **DOKAZATI**

17

D o k a z. Uočimo u osnovnoj ravni strujanja krivu L i na njoj dve proizvoljne tačke A i B (sl. 23.). Prema prethodnoj definiciji, protok kroz krivu L između uočenih tačaka iznosi

$$(18.8) \quad Q = \int_{x^3=0}^{x^3=1} \int_{L(A)}^{L(B)} v^i da_i.$$



Sl. 23

Orijentisani element površi možemo izraziti kao vektorski proizvod orijentisanog elementa luka krive L i orijentisanog elementa luka u pravcu ose x^3 , tj.

$$da_i = \epsilon_{ij3} dx_{(L)}^j dx^3,$$

pa je

$$v^i da_i = \epsilon_{3ij} v^i dx_{(L)}^j dx^3 = dx^3 \epsilon_{3ij} v^i dx_{(L)}^j,$$

odnosno

$$v^i da_i = dx^3 (\epsilon_{312} v^1 dx_{(L)}^2 + \epsilon_{321} v^2 dx_{(L)}^1),$$

jer je $v^3=0$ i $dx_{(L)}^3=0$. Kako je, dalje, $\epsilon_{312} = \sqrt{g}$ i $\epsilon_{321} = -\sqrt{g}$, biće

$$v^i da_i = dx^3 (v^1 \sqrt{g} dx_{(L)}^2 - v^2 \sqrt{g} dx_{(L)}^1),$$

odnosno, ako iskoristimo (18.2),

$$v^i da_i = dx^3 d\psi_{(L)},$$

gde smo sa $d\psi_{(L)}$ označili priraštaj strujne funkcije u pravcu krive L . Koristeći prethodni izraz, iz (18.8) za protok dobivamo

$$Q = \int_{x^3=0}^{x^3=1} dx^3 \int_{L(A)}^{L(B)} d\psi_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} d\psi_{(L)},$$

odnosno, posle integracije,

$$(18.9) \quad Q = \psi(B) - \psi(A),$$

čime je stav dokazan.

Iz (18.9) zaključujemo da će protok kroz zatvorenu krivu biti uvek jednak nuli kad je strujna funkcija jednoznačna funkcija položaja. U slučaju, pak, kad je strujna funkcija višeznačna funkcija položaja, protok kroz zatvorenu krivu može biti jednak ili različit od nule, što zavisi od toga da li se, polazeći od neke tačke na krivoj u ponovnim vraćanjem u tu tačku posle obilaženja po krivoj, vrednosti strujne funkcije razlikuju ili ne. Moguće je, naime, kao što ćemo kasnije videti, da se vrednost strujne funkcije ne menja posle obilaženja po krivoj, iako je strujna funkcija višeznačna funkcija položaja.

V e ž b a n j a

1. Izraziti preko strujne funkcije kontravarijantne, kovarijantne i fizičke koordinate vektora brzine u sistemu Dekartovih pravougljih i polarnih koordinata u ravni strujanja.

2. Pokazati da je kod ravanskih strujanja protok jednak nuli kroz proizvoljnu krivu između tačaka koje se nalaze na istoj strujnoj liniji.

3. Neka je, u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata, ravansko strujanje određeno poljem brzine

$$v_x = x, \quad v_y = -y, \quad v_z = 0.$$

a) Odrediti strujnu funkciju.

b) Odrediti jednačine nultih strujnica.

c) Izračunati protok kroz krivu liniju između tačaka $A(0,0)$ i $B(1,1)$.

d) Pokazati da je protok jednak nuli kroz proizvoljnu krivu između tačaka koje se nalaze na koordinatnim osama.

e) Pokazati da je protok jednak nuli kroz proizvoljnu zatvorenu krivu liniju.

4. Neka je, u odnosu na sistem polarnih koordinata r i θ , ravansko strujanje određeno kontravarijantnim koordinatama brzine

$$v^r = \frac{1}{r}, \quad v^\theta = 0.$$

a) Odrediti strujnu funkciju.

b) Pokazati da je protok kroz zatvorenu krivu jednak nuli ako ona ne obuhvata koordinatni početak (pol) i jednak 2π ako ga obuhvata.

18

19. **Vrtložna ravanska strujanja.** U prethodnom odeljku smo pokazali da se koordinate brzine mogu izraziti preko strujne funkcije. Imajući to u vidu, jasno je da se i koordinate tenzora vrtložnosti, pa, prema tome i vektora vrtložnosti mogu izraziti preko strujne funkcije.

Kovarijantne koordinate tenzora vrtložnosti su

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right).$$

S obzirom da je kod ravanskih strujanja $v^3=0$ i da v^1 i v^2 ne zavise od x^3 , zaključujemo da tenzor vrtložnosti ima samo jednu nezavisnu koordinatu koja je različita od nule i to

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right).$$

Ako u ovom izrazu kovarijantne koordinate brzine izrazimo preko strujne funkcije koristeći (18.6), dobivamo

$$(19.1) \quad \omega_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) \right].$$

Kontravarijantne koordinate vektora vrtložnosti su

$$\omega^i = \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk},$$

odnosno, s obzirom da su $\omega_{12} = -\omega_{21}$ jedine od nule različite kovarijantne koordinate tenzora vrtložnosti,

$$\omega^i = \frac{1}{2} (\epsilon^{i12} \omega_{12} + \epsilon^{i21} \omega_{21}) = \frac{1}{2} (\epsilon^{i12} \omega_{12} + \epsilon^{i12} \omega_{12}).$$

Prema tome je

$$\omega^i = \epsilon^{i12} \omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}} \epsilon^{i12} \omega_{12},$$

odakle zaključujemo da je jedina od nule različita kontravarijantna koordinata vrtloga

$$\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g}} \omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \omega_{12},$$

odnosno, ako iskoristimo (19.1),

$$(19.2) \quad 2\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) \right].$$

S obzirom da je $g_{33}=1$, ovo je ujedno i kovarijantna i fizička koordinata vrtloga.

Pokazaćemo sada da je (19.2) ekvivalentno sa

$$(19.3) \quad 2\omega^3 = \Delta \psi.$$

Da bismo to pokazali, pođimo od relacije

$$\text{div } \vec{a} = a^i_{,i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (a^i \sqrt{g}),$$

21
IZBRATI KOORD. VEKTORA VRTLOŽNOSTI
PREKO STRUJNE F-FE U SLUČAJU
STRUJANJA NESTIŠLJIVOG FLUIDA

gde su a^i kontravarijantne koordinate proizvoljnog vektora \vec{a} . Specijalno, ako u prethodnom izrazu stavimo $\vec{a} = \text{grad } \psi$, tj. $a^i = g^{ij} \psi_{,j}$, dobivamo

$$\text{div}(\text{grad } \psi) = g^{ij} \psi_{,ij} = \Delta \psi = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} g^{ij} \psi_{,j}).$$

Kako je kod ravanskih strujanja $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22}}$ i $\psi_{,3} = \frac{\partial \psi}{\partial x^3} = 0$, dobivamo

$$\Delta \psi = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\sqrt{g_{11} g_{22}} g^{11} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\sqrt{g_{11} g_{22}} g^{22} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) \right].$$

S obzirom da su koordinatne linije x^1 i x^2 međusobno ortogonalne, to je $g^{11} = \frac{1}{g_{11}}$ i $g^{22} = \frac{1}{g_{22}}$, pa prethodni izraz možemo napisati u obliku

$$\Delta \psi = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) \right],$$

čime je, s obzirom na (19.2), dokazana važnost relacije (19.3).

Prema tome, koordinate vektora vrtložnosti su

$$(19.4) \quad \{\omega^i\} = \{\omega_i\} = \{\omega_{(i)}\} = \left\{ 0, \quad 0, \quad \frac{1}{2} \Delta \psi \right\},$$

a intenzitet mu je jednak polovini laplasijana strujne funkcije.

Na osnovu (17.3) i (19.4) dobivamo da je

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v} = \omega^1 v_1 + \omega^2 v_2 + \omega^3 v_3 = 0,$$

a to je, prema (15.6), potreban i dovoljan uslov da strujanje bude složeno lamelarno. Prema tome, sledi: Ravansko vrtložno strujanje je složeno lamelarno strujanje.

S obzirom da vrtlog ima projekciju samo na x^3 osu, zaključujemo da je upravan na ravan strujanja. Na osnovu toga sledi zaključak: Kod ravanskih vrtložnih strujanja vrtložne linije su upravne na ravan strujanja. Pokazaćemo sada da važi i sledeći s t a v: Kod ravanskih vrtložnih strujanja vrtložne linije su stacionarne i materijalne, bez obzira da li je strujanje, odnosno polje vektora vrtložnosti stacionarno ili ne.

D o k a z. Da bi vrtložne linije bile stacionarne potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov (14.5). Kod ravanskih strujanja, s obzirom da je samo $\omega^3 \neq 0$, tj. $\omega^1 = \omega^2 = 0$, očigledno je uvek ispunjen uslov

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega^j}{\partial t} \omega^k = 0,$$

tj. vektor $\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t}$ je uvek kolinearan sa vektorom $\vec{\omega}$, čime je prvi deo stava dokazan.

Da bi vrtložne linije bile materijalne potrebno je i dovoljno da bude ispunjen uslov (14.15). S obzirom, međutim, da smo napred pokazali da su vrtložne linije stacionarne, uslov (14.15) se svodi na (14.33), koji možemo napisati u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j \varepsilon^{kmn} \varepsilon_{nrs} (\omega^r v^s)_{,m} = 0,$$

odnosno

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j \delta_{rs}^{km} (\omega^r v^s)_{,m} = 0,$$

ili

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j (\omega^k v^m - \omega^m v^k)_{,m} = 0.$$

Kako je, međutim, $\omega_{,m}^m = 0$ i $v_{,m}^m = 0$ ovaj uslov možemo, dalje, izraziti u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j (\omega_{,m}^k v^m - \omega^m v_{,m}^k) = 0,$$

ili, u ekvivalentnom obliku,

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j \left(\frac{\partial \omega^k}{\partial x^m} v^m - \omega^m \frac{\partial v^k}{\partial x^m} \right) = 0.$$

S obzirom da je kod ravanskih strujanja $\omega^1 = 0, \omega^2 = 0, v^3 = 0, \frac{\partial v^1}{\partial x^3} = 0$ i $\frac{\partial v^2}{\partial x^3} = 0$, gornji uslov je identički zadovoljen, čime je i drugi deo stava dokazan.

V e ž b a n j a

1. Koristeći (19.4), pokazati, integracijom diferencijalnih jednačina (14.3), da su vrtložne linije kod ravanskih strujanja stacionarne prave linije upravne na ravni strujanja.

2. Pokazati da se kod ravanskih strujanja vektorski proizvod vektora $\vec{\omega}$ i \vec{v} može izraziti u obliku

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = \frac{1}{2} \Delta \psi \text{ grad } \psi.$$

3. Koristeći rezultat prethodnog zadatka, pokazati da je vektor $\text{rot}(\vec{\omega} \times \vec{v})$ kolinearan sa vektorom $\vec{\omega}$, pa da je na taj način identički zadovoljen uslov (14.33), kao potreban i dovoljan da stacionarne vrtložne linije budu materijalne.

4. Pokazati da je kod ravanskih strujanja rotor vektora ubrzanja kolinearan sa vektorom vrtložnosti, tj. da je ispunjen uslov (14.17) kao potreban i dovoljan da vrtložne linije budu materijalne.

5. Pokazati da kod ravanskih vrtložnih strujanja ubrzanje ne može imati potencijal, bez obzira da li je strujanje ili polje vektora vrtložnosti stacionarno ili ne, izuzev u slučaju kad je

$$\frac{\delta \omega^k}{\delta t} = \frac{d \omega^k}{dt} = \frac{\partial \omega^k}{\partial t} + \frac{\partial \omega^k}{\partial x^l} v^l = 0,$$

odnosno kad je $\vec{\omega} = \text{const}$. Na osnovu toga izvesti sledeće zaključke:

a) da se cirkulacija duž svake zatvorene materijalne krive linije u ravni strujanja menja sa vremenom, tj. da je strujanje sa promenljivom cirkulacijom, i

b) da se jačina vrtloga duž svake materijalne vrtložne cevi menja sa vremenom, kad je $\vec{\omega} = \vec{\omega}(x^1, x^2, t)$.

6. Pokazati da kod ravanskih vrtložnih strujanja u ravni strujanja egzistira familija krivih linija $G = \text{const.}$, koje su upravne na strujne linije i koje se dobivaju kao vektorske linije vektorskog polja $\vec{\omega} \times \vec{v}$, pri čemu je $\vec{v} = F \text{ grad } G$ uslov integrabilnosti diferencijalne jednačine tih linija.

KOŠI-RIMANOVE JEDNAČINE

19

20. Potencijalna ravanska strujanja. Kod potencijalnih ravanskih strujanja, s obzirom da je tenzor vrtložnosti, pa, prema tome i vektor vrtložnosti jednak nuli, na osnovu (19.4) možemo pisati

$$(20.1) \quad 2\omega^3 = \Delta\psi = 0.$$

Prema tome, zaključujemo: Kod ravanskih potencijalnih strujanja strujna funkcija je harmonijska, tj. zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu.

U saglasnosti sa (13.2), vektor brzine možemo izraziti u obliku

$$(20.2) \quad v_i = \varphi_{,i} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i},$$

gde je

$$(20.3) \quad \varphi = \varphi(x^1, x^2, t)$$

potencijal brzine ili potencijalna funkcija za ravanska strujanja.

Iz (20.2) vidimo da su kovarijantne koordinate brzine jednake parcijalnim izvodima potencijala brzine. Iz (18.6), međutim, vidimo da se one mogu izraziti i preko parcijalnih izvoda strujne funkcije. Upoređivanjem ta dva izraza, dobivamo

$$(20.4) \quad v_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2}, \quad v_2 = \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = -\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1},$$

pa vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija povezani diferencijalnim jednačinama

$$(20.5) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1}.$$

Ove se jednačine nazivaju Koši-Rimanove jednačine i, kao što ćemo kasnije videti, igraju važnu ulogu kod potencijalnih ravanskih strujanja.

U sistemu Dekartovih pravouglanih koordinata x, y u ravni strujanja, s obzirom da je $g_{11} = 1$ i $g_{22} = 1$, Koši-Rimanove jednačine su oblika

$$(20.6) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Ako, međutim, u ravni strujanja uvedemo polarne koordinate r i θ , s obzirom da je u tom slučaju $g_{11} = 1$ i $g_{22} = r^2$, Koši-Rimanove jednačine su oblika

$$(20.7) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r}.$$

Jednačinama

$$(20.8) \quad \varphi(x^1, x^2, t) = C, \quad (C = \text{const.}),$$

određene su ekvipotencijalne linije u ravni strujanja, odnosno ekvipotencijalne cilindrične površi u trodimenzionom prostoru. Strujnom funkcijom kao što smo ranije videli, određene su strujne linije u ravni strujanja, odnosno cilindrične strujne površi u trodimenzionom prostoru. I ekvipotencijalne površi i strujne površi su upravne na ravan strujanja i njihovi preseki sa ravnima strujanja $x^3 = \text{const.}$ određuju ekvipotencijalne, odnosno strujne linije u trodimenzionom prostoru. Pokazaćemo sada da važi sledeći s t a v: Strujne linije i ekvipotencijalne linije su familije međusobno ortogonalnih linija u ravnima strujanja. **OKA 24 TI**

D o k a z. Gradijenti strujne i potencijalne funkcije su vektori koji su u ravnima strujanja upravni na strujne, odnosno ekvipotencijalne linije. Skalarni proizvod tih vektora možemo izraziti u obliku

$$\text{grad } \psi \cdot \text{grad } \varphi = g^{ij} \psi_{,i} \varphi_{,j} = g^{ij} \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j},$$

odnosno, s obzirom da je $\frac{\partial \psi}{\partial x^3} = 0$ i $\frac{\partial \varphi}{\partial x^3} = 0$,

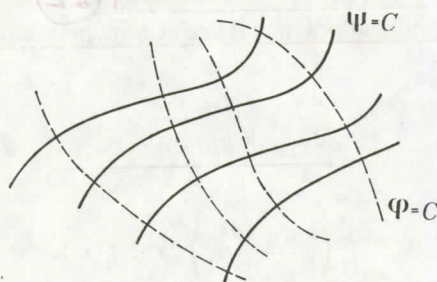
$$g^{ij} \psi_{,i} \varphi_{,j} = g^{11} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + g^{22} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}.$$

Ako sada iskoristimo Koši-Rimanove jednačine (20.5), dobivamo

$$g^{ij} \psi_{,i} \varphi_{,j} = \frac{1}{g_{11}} \sqrt{g_{11}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{g_{22}} \sqrt{g_{22}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2},$$

odnosno

$$g^{ij} \psi_{,i} \varphi_{,j} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} - \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = 0,$$



Sl. 24

na osnovu čega zaključujemo da su grad ψ i grad φ međusobno ortogonalni, odnosno da su strujne linije i ekvipotencijalne linije familije međusobno ortogonalnih linija u ravnima strujanja (sl. 24), čime je stav dokazan.

Na osnovu prethodnog stava, zaključujemo da važi i sledeći s t a v: Strujne i ekvipotencijalne površi su familije međusobno ortogonalnih cilindričnih površi u prostoru.

Polje potencijalnog ravanskog strujanja nestišljivog fluida, s obzirom da su i rotor brzine i divergencija brzine jednaki nuli, je, kao i u opštem slučaju trodimenzionog strujanja, Laplasovo strujno polje. U odeljku 13. smo pokazali da je u tom slučaju potencijal brzine harmonijska funkcija, tj. da zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu. Kod ravanskih potencijalnih strujanja, međutim, zamenjujući (20.2) u (10.2) i koristeći jednačinu konzervacije mase (3.12), tu jednačinu dobivamo u obliku

$$(20.9) \quad \Delta\varphi = \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \right) \right] = 0,$$

odakle sledi

$$(20.10) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right) = - \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^2} \right).$$

S obzirom da su kod ravanskih potencijalnih strujanja i strujna funkcija i potencijal brzine harmonijske funkcije, tj. da obe zadovoljavaju Laplasovu diferencijalnu jednačinu, kao i da su povezane Koši-Rimanovim jednačinama, čija je posledica upravnost strujnih i ekvipotencijalnih linija, zaključujemo: *ako postoji ravansko potencijalno strujanje sa strujnom funkcijom ψ i potencijalom brzine φ , postojaće i strujanje sa strujnom funkcijom φ i potencijalom brzine $-\psi$, odnosno sa strujnom funkcijom $-\varphi$ i potencijalom brzine ψ .* Lako je, naime, pokazati da ako se strujnoj funkciji i potencijalu brzine razmene uloge, pri čemu se jednoj od njih promeni znak, obe će, ponovo, zadovoljavati i Laplasove diferencijalne jednačine i Koši-Rimanove jednačine, tj. određivaće neko novo potencijalno ravansko strujanje.

Strujna funkcija i potencijal brzine mogu se odrediti integracijom odgovarajuće Laplasove diferencijalne jednačine uz odgovarajuće granične uslove. Međutim, dovoljno je da se na taj način odredi samo jedna od tih funkcija, a druga se, onda, može odrediti integracijom Koši-Rimanovih jednačina, što je u svakom slučaju jednostavniji postupak, jer su, za razliku od Laplasove diferencijalne jednačine, Koši-Rimanove jednačine — diferencijalne jednačine prvog reda. Izložićemo sada postupak integracije Koši-Rimanovih jednačina. 22

Ako je, na primer, poznat potencijal brzine φ , iz prve Koši-Rimanove jednačine (20.5) sledi

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1},$$

odakle je, integracijom,

$$(20.11) \quad \psi = \int_0^{x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right) dx^2 + f(x^1),$$

gde je $f(x^1)$ proizvoljna funkcija od x^1 . Da bismo odredili tu funkciju, diferenciraćemo prethodnu jednačinu po x^1 . Na taj način dobivamo

$$\frac{\partial\psi}{\partial x^1} = \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\varphi}{\partial x^1} \right) dx^2 + f'(x^1), \quad \left(f'(x^1) = \frac{\partial f(x^1)}{\partial x^1} \right),$$

ili, ako iskoristimo (20.10),

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = - \int_0^{x^2} \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) dx^2 + f'(x^1),$$

odnosno, posle integracije,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = - \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{x^2} + f'(x^1).$$

Iz druge Koši-Rimanove jednačine (20.5) sledi

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^1} = - \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2},$$

pa, zamenom u prethodnu jednačinu, dobivamo

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) \Big|_0^{x^2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} f'(x^1),$$

odnosno

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)_{x^2=0} - \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} f'(x^1).$$

Odavde je, očigledno,

$$f'(x^1) = - \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)_{x^2=0},$$

pa integracijom dobivamo

$$f(x^1) = - \int_0^{x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)_{x^2=0} dx^1.$$

Zamenjujući sada ovako nađenu funkciju $f(x^1)$ u (20.11), dobivamo, konačno, strujanu funkciju u obliku

$$(20.12) \quad \psi = \int_0^{x^2} \left(\frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) dx^2 - \int_0^{x^1} \left(\frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right)_{x^2=0} dx^1.$$

S obzirom da je, po pretpostavci, poznat potencijal brzine, integraciju možemo sprovesti i na taj način odrediti strujnu funkciju. Prilikom određivanja strujne funkcije moglo se poći u od druge Koši-Rimanove jednačine (20.5), u kom slučaju bismo dobili ekvivalentan rezultat.

Ako je, pak, poznata strujna funkcija, onda se, na ekvivalentan način, integracijom Koši-Rimanovih jednačina može odrediti potencijalna funkcija.

V e ž b a n j a

1. Ako je, u odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata x, y u ravni strujanja, ravansko potencijalno strujanje određeno poljem brzine

$$v_x = y, \quad v_y = x,$$

integracijom diferencijalnih jednačina (20.2) i (18.5) odrediti potencijal brzine i strujnu funkciju.

2. Ako je kod ravanskog potencijalnog strujanja potencijal brzine, u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata x, y u ravni strujanja, određen izrazom

$$\varphi = -2xy,$$

integracijom Koši-Rimanovih jednačina (20.6) odrediti strujnu funkciju.

3. Kod ravanskih strujanja, vektor \vec{a} , čije su kovarijantne koordinate

$$\{a_i\} = \{v^2, -v^1, 0\},$$

gde su v^1 i v^2 kontravarijantne koordinate vektora brzine, je upravan na vektor brzine, jer je, očigledno,

$$a_i v^i = v^2 v^1 - v^1 v^2 \equiv 0.$$

Pokazati da će vektorsko polje \vec{a} imati vektorske linije, upravne na strujne linije, ako i samo ako je strujanje složeno lamelarno ili lamelarno, tj. ako i samo ako je $\vec{v} = F \text{ grad } G$ ili $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, odnosno, što je ekvivalentno, ako i samo ako je $\vec{\omega} \cdot \vec{v} = 0$ ili $\vec{\omega} = 0$. (Uslovi $\vec{v} = F \text{ grad } G$, odnosno $\vec{v} = \text{grad } \varphi$, predstavljaju uslove integrabilnosti diferencijalne jednačine vektorskih linija vektorskog polja \vec{a}).

4. Pokazati da je kod ravanskih potencijalnih strujanja fluidna struja duž proizvoljne krive linije u ravni strujanja, između dve na njoj proizvoljno izabrane tačke, jednaka razlici vrednosti potencijala brzine u tim tačkama i da ne zavisi od oblika krive.

5. Ako ravansko potencijalno strujanje pripada jednostruko povezanom strujnom polju, pokazati da je cirkulacija duž bilo koje zatvorene krive u ravni strujanja jednaka nuli i da u tom slučaju potencijal brzine mora biti jednoznačna funkcija položaja.

6. S obzirom da je ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida u potpunosti određeno potencijalom brzine i strujnom funkcijom, pokazati da se strujanje neće promeniti ako tim funkcijama dodamo proizvoljnu konstantu, tj. da su potencijal brzine i strujna funkcija određene do na proizvoljnu konstantu.

21. Primeri osnovnih potencijalnih ravanskih strujanja. U ovom odeljku ćemo navesti nekoliko primera tzv. osnovnih ravanskih potencijalnih strujanja nestišljivog fluida.

a) *Stacionarno pravolinijsko strujanje.* U odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata, ovo strujanje je određeno potencijalom brzine

(21.1)

$$\varphi = ax + by,$$

gde su a i b realne konstante. Iz (20.12), za strujnu funkciju dobivamo

$$\psi = \int_0^y \frac{\partial \varphi}{\partial x} dy - \int_0^x \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_{y=0} dx,$$

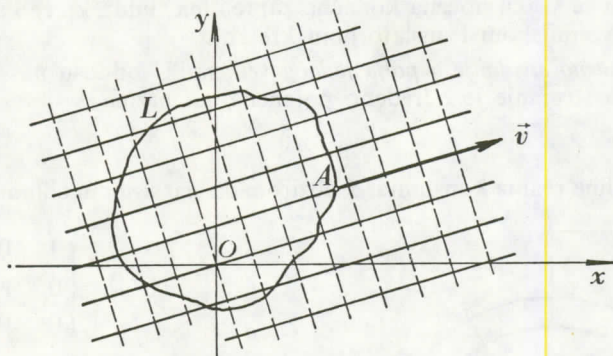
odnosno

$$(21.2) \quad \psi = ay - bx.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$y = \frac{b}{a}x + C,$$

i vidimo da su to prave linije koje sa pozitivnim smerom x -ose zaklapaju ugao $\alpha = \arctg\left(\frac{b}{a}\right)$ (sl. 25).



Sl. 25

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi = C$, odnosno

$$y = -\frac{a}{b}x + C,$$

i vidimo da su to prave linije koje sa pozitivnim smerom x -ose zaklapaju ugao $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$. Prema tome, strujne i ekvipotencijalne linije su familije međusobno upravanih pravih linija.

Projekcije brzine na koordinatne ose su, na osnovu (20.4),

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = a, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = b,$$

a intenzitet brzine je

$$v = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const.}$$

Vidimo, dakle, da je brzina polje konstantnog vektora, tj. istog je intenziteta i pravca, koji se poklapa sa pravcem strujnih linija, u svakoj tački strujnog polja. S obzirom da je strujanje ustaljeno, strujne linije se poklapaju sa putanjama čestica fluida.

S obzirom da je strujno polje jednostruko povezano, tj. da su strujna funkcija i potencijal brzine jednoznačne funkcije položaja, protok i cirkulacija su jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu liniju u strujnom polju, tj.

$$Q = \oint_L d\psi = \psi(A') - \psi(A) = 0,$$

$$\Gamma = \oint_L v_i dx_i(L) = \oint_L d\varphi = \varphi(A') - \varphi(A) = 0.$$

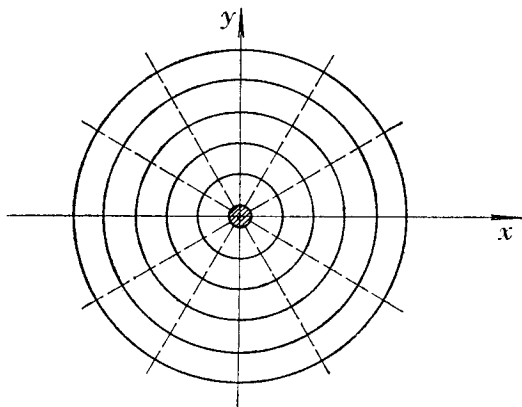
U posebnom slučaju kad je $a=0$, s obzirom da je tada $v_x=0$, fluid teče paralelno osi y . Ako je, pak, $b=0$, tada je $v_y=0$, pa fluid teče paralelno osi x .

Pošto je brzina polje konstantnog vektora, tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti su identički jednaki nuli u svim tačkama strujnog polja. Na osnovu toga zaključujemo da se svaka uočena konačna zapremina fluida kreće kao kruto telo u jednolikom pravolinijskom translatorskom kretanju.

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga.* U odnosu na sistem polarnih koordinata, ovo strujanje je određeno potencijalom brzine

$$(21.3) \quad \varphi = a\theta,$$

gde je a proizvoljna realna konstanta. S obzirom da je u sistemu cilindarskih polarnih koordinata



Sl. 26

$$\{g_{ij}\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix},$$

na osnovu (20.12) za strujnu funkciju dobivamo

$$\psi = - \int_0^r \left(\frac{a}{r} \right)_{\theta=0} dr,$$

odnosno, posle integracije,

$$(21.4) \quad \psi = -a \ln r.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi=C$, odnosno

$$r = C$$

i vidimo da su to koncentrični krugovi sa centrom u koordinatnom početku (sl. 26).

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi=C$, odnosno

$$\theta = C$$

i vidimo da su to prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak, pa su, prema tome, upravne na strujne linije.

Kovarijantne koordinate brzine, na osnovu (20.4), su

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} = a.$$

Kontravarijantne koordinate su

$$v^r = 0, \quad v^\theta = \frac{a}{r^2},$$

a fizičke

$$v_{\langle r \rangle} = 0, \quad v_{\langle \theta \rangle} = \frac{a}{r}.$$

Brzina, dakle, ima projekciju samo na θ koordinatnu liniju. Imajući to u vidu, kao i činjenicu da je strujanje stacionarno, tj. da se strujne linije poklapaju sa putanjama čestica fluida, zaključujemo da čestice fluida imaju kružno kretanje oko koordinatnog početka u ravni strujanja, tj. kreću se po koncentričnim krugovima u smeru suprotnom kretanju kazaljke časovnika (ako je $a > 0$) ili u smeru kretanja kazaljke časovnika (ako je $a < 0$).

Intenzitet brzine je

$$v = \frac{a}{r},$$

i vidimo da je konstantan duž svake strujne linije, odnosno putanje čestica fluida, ali je obrnuto proporcionalan rastojanju od koordinatnog početka. Prema tome, intenzitet brzine teži nuli kad r teži beskonačnosti. S druge strane, međutim, intenzitet brzine teži beskonačnosti kad r teži nuli. Na osnovu toga zaključujemo da koordinatni početak (pol) predstavlja singularnu tačku strujnog polja, odnosno da strujanje u polju jednog vrtloga ne pripada jednostruko povezanom strujnom polju, jer singularitet moramo izdvojiti iz strujnog polja obuhvatajući ga proizvoljnom zatvorenom krivom linijom u ravni strujanja. Ova kriva obuhvata oblast strujnog polja (šrafirana oblast na slici 26) koja se naziva *vertložno jezgro*. Na taj način strujno polje je podeljeno na dve oblasti. Prva oblast je izvan vrtložnog jezgra i neograničeno je velika, a druga je oblast vrtložnog jezgra i proizvoljno je mala. Strujanje se ne proučava u oblasti vrtložnog jezgra, već se pretpostavlja da se fluid u njoj kruto rotira konstantnom ugaonom brzinom. S obzirom da oblast vrtložnog jezgra može biti proizvoljno mala, možemo smatrati da predstavlja poprečni presek jednog vrtložnog vlakna, upravnog na ravan strujanja. Iz toga razloga se ovo strujanje i naziva strujanje u polju jednog vrtloga, premda je strujanje u oblasti izvan vrtložnog jezgra, koja je regularna oblast strujnog polja, nevrtložno. Ovo naročito podvlačimo zbog toga da se naziv ovog strujanja ne bi mešao sa pojmom vrtložnog strujanja.

Iz (21.3) vidimo da je potencijal brzine višeznačna funkcija položaja, jer istoj tački u ravni strujanja odgovara ugao θ i uglovi $\theta + 2k\pi$ ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$). Iz tog razloga cirkulacija duž zatvorene krive linije u ravni strujanja može biti jednaka ili različita od nule, što zavisi od toga da li kriva obuhvata singularitet ili ne. Ako, naime, u ravni strujanja uočimo neku zatvorenu krivu L_1 (sl. 26) koja ne obuhvata koordinatni početak, cirkulacija je

$$\Gamma = \oint d\varphi = \varphi(A') - \varphi(A) = a\theta_{A'} - a\theta_A = 0,$$

jer se, polazeći od proizvoljne tačke A na krivoj, posle obilaženja po krivoj ugao θ_A vraća na prvobitnu vrednost. Ako, međutim, uočimo zatvorenu krivu L_2 (sl. 26) koja obuhvata koordinatni početak, cirkulacija je

$$(21.5) \quad \Gamma = \varphi(A') - \varphi(A) = a(\theta_A + 2\pi) - a\theta_A = 2a\pi,$$

jer, polazeći opet od neke tačke A na krivoj, posle obilaženja po krivoj ugao θ_A priraste za 2π .

S obzirom da cirkulacija ne zavisi od oblika krive, jasno je da će imati istu vrednost i za krug proizvoljno malog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku, pa, prema tome, i za krug koji ograničava vrtložno jezgro. Ako, međutim, pretpostavimo da se fluid sadržan u oblasti vrtložnog vlakna, čiji je poprečni presek vrtložno jezgro, rotira kao kruto telo konstantnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, tada je oblast vrtložnog jezgra regularna, pa možemo pisati

$$\Gamma = \oint_{L'} \vec{v} \cdot d\vec{x}_{(L')} = -2 \int_{a'} \vec{\omega} \cdot d\vec{a}' = -2\omega \int da' = -2\omega a',$$

gde je L' krug koji ograničava vrtložno jezgro površine a' . Prema tome, zaključujemo: *cirkulacija je jednaka jačini vrtloga duž vrtložnog vlakna čiji je poprečni presek vrtložno jezgro*. Iz tog razloga se cirkulacija Γ naziva još i *jačina vrtloga*.

Iz (21.5), konstantu a možemo izraziti u obliku

$$a = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

pa potencijal brzine i strujnu funkciju možemo pisati u obliku

$$(21.6) \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r,$$

pri čemu promena znaka cirkulacije Γ ima za posledicu samo promenu smera kretanja čestica fluida.

Za razliku od potencijala brzine, strujna funkcija je jednoznačna funkcija položaja, pa je protok jednak nuli kroz bilo koju zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja.

Ako ovo strujanje posmatramo u trodimenzionom prostoru, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata r, θ, z , zaključujemo da su vrtlozi neprekidno raspoređeni duž z koordinatne ose, koja je singularna osa strujnog polja. Brzina je određena kovarijantnim koordinatama

$$\{v_i\} = \left\{ 0, \frac{\Gamma}{2\pi}, 0 \right\}.$$

Na osnovu ovoga lako je pokazati da je tenzor vrtložnosti identički jednak nuli, što je posledica pretpostavke da je strujanje potencijalno. Kovarijantne koordinate tenzora brzine deformacije su

$$2d_{ij} = v_{i,j} + v_{j,i} = \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - 2v_k \{ij\}^k,$$

odnosno, s obzirom da su kovarijantne koordinate vektora brzine konstante,

$$d_{ij} = -v_k \{ij\}^k.$$

Odavde zaključujemo da jedina nezavisna i od nule različita kovarijantna koordinata tenzora brzine deformacije iznosi

$$d_{r\theta} = -v_\theta \{r\theta\} = -\frac{\Gamma}{2\pi r},$$

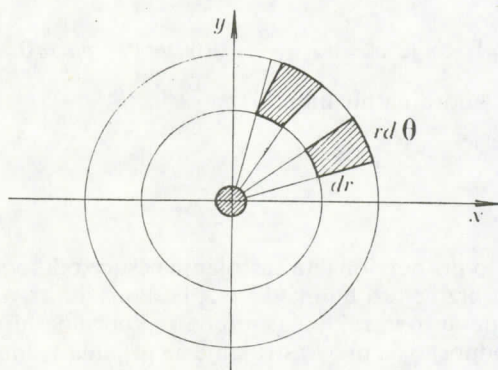
a fizička

$$d_{\langle r\theta \rangle} = \frac{d_{r\theta}}{\sqrt{g_{rr}g_{\theta\theta}}} = \frac{1}{r} d_{r\theta} = -\frac{\Gamma}{2\pi r^2}.$$

Prema tome, fizičke koordinate tenzora brzine deformacije su

$$\{d_{\langle ij \rangle}\} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} & 0 \\ -\frac{\Gamma}{2\pi r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

S obzirom da je tenzor vrtložnosti jednak nuli, a tenzor brzine deformacije različit od nule, zaključujemo da će se fluidni delići prilikom kretanja na određeni način deformisati, ali se neće kruto rotirati. Kako je $d_{\langle r\theta \rangle}$ jedina nezavisna i od nule različita fizička koordinata tenzora brzine deformacije, postojaće, kao što znamo, samo promena pravih uglova između materijalnih pravaca koji se poklapaju sa pravcima koordinatnih linija r i θ . Prema tome, ako uočimo fluidni delić čije se stranice poklapaju sa koordinatnim linijama, on će se pri kretanju deformisati na taj način što će postojati samo promene pravih uglova između njegovih stranica koje se poklapaju sa koordinatnim linijama r i θ (sl. 27).



Sl. 27

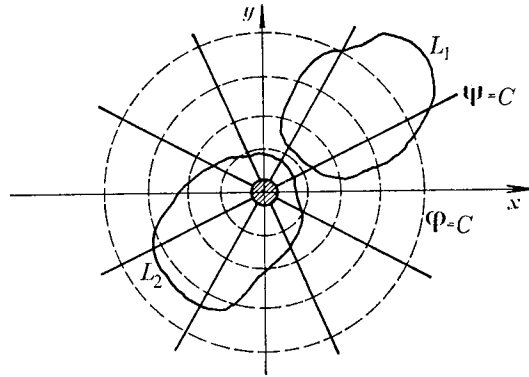
c) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora.* U odnosu na sistem polarnih koordinata u ravni strujanja, ovo je strujanje određeno potencijalom brzine

$$(21.7) \quad \varphi = a \ln r,$$

gde je a proizvoljna realna konstanta. Na osnovu (20.12), za strujnu funkciju dobivamo

$$(21.8) \quad \psi = a \theta.$$

Jednačine strujnih linija su $\theta=C$ i vidimo da su to prave linije koje prolaze kroz koordinatni početak (sl. 28). S obzirom da je strujanje stacionarno, one se, jasno, poklapaju sa putanjama čestica fluida.



Sl. 28

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $r=C$ i vidimo da su to koncentrični krugovi sa centrom u koordinatnom početku.

Kovarijantne koordinate brzine, na osnovu (20.4), su

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{a}{r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0.$$

S obzirom da je $g_{rr}=1$, to je $v^r = v_{(r)} = \frac{a}{r}$, dok je $v^\theta = v_{(\theta)} = 0$. Brzina, dakle, ima projekciju samo na r koordinatnu liniju.

Intenzitet brzine je

$$v = \frac{a}{r},$$

pa vidimo da je obrnuto proporcionalan rastojanju čestice od koordinatnog početka. Prema tome, intenzitet brzine teži nuli kad r teži beskonačnosti, a teži beskonačnosti kad r teži nuli. Na osnovu toga zaključujemo da je koordinatni početak singularna tačka strujnog polja, odnosno da ni ovo strujanje ne pripada jednostruko povezanom strujnom polju, jer singularitet moramo izdvojiti iz strujnog polja obuhvatajući ga proizvoljnom zatvorenim krivom linijom (šrafirana oblast na slici 28), kao i u prethodnom slučaju strujanja.

Kad je $a > 0$, tada je i $v_{(r)} > 0$, pa se čestice fluida radijalno kreću u svim pravcima udaljavajući se od koordinatnog početka, koji u tom slučaju predstavlja *izvor*. Nasuprot tome, kad je $a < 0$, s obzirom da je tada i $v_{(r)} < 0$, zaključujemo da se čestice fluida kreću ka koordinatnom početku, koji u tom slučaju predstavlja *ponor*.

Iz (21.7) vidimo da je potencijal brzine jednoznačna funkcija položaja, pa je cirkulacija jednaka nuli duž bilo koje zatvorene krive linije u ravni strujanja.

Za razliku od potencijala brzine, iz (21.8) vidimo da je strujna funkcija višeznačna funkcija položaja, jer svakoj tački u ravni strujanja odgovaraju polarni uglovi $\theta + 2k\pi$ ($k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Na osnovu toga zaključujemo da, iako je fluid nestišljiv, protok kroz zatvorenu krivu može biti jednak ili različit od nule, što zavisi od toga da li se, polazeći od neke tačke na krivoj, posle obilaženja po krivoj vrednost strujne funkcije menja ili ne. Ako, naime, u ravni strujanja uočimo zatvorenu krivu L_1 (sl. 28), koja ne obuhvata koordinatni početak, tada je protok kroz tu krivu jednak nuli, tj.

$$Q = \oint_{L_1} d\psi = \psi(A') - \psi(A) = a\theta_A - a\theta_A = 0,$$

er se, polazeći od tačke A na krivoj, posle obilaženja po krivoj vrednost strujne funkcije ne menja. Ako, međutim, uočimo zatvorenu krivu L_2 (sl. 28) koja obuhvata koordinatni početak, tada protok kroz tu krivu iznosi

$$Q = \oint_{L_2} d\psi = \psi(A') - \psi(A) = a(\theta_A + 2\pi) - a\theta_A = 2a\pi,$$

jer, polazeći od tačke A na krivoj, posle obilaženja po krivoj ugao θ_A priraste za 2π . S obzirom da protok ne zavisi od oblika krive, jasno je da će imati istu vrednost i za krug proizvoljno malog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku. Na osnovu toga zaključujemo: *protok fluida kroz bilo koju zatvorenu krivu koja obuhvata koordinatni početak jednak je izdašnosti izvora, odnosno ponora, pa možemo pisati*

$$\varepsilon = 2a\pi.$$

Odavde, za konstantu a dobivamo

$$a = \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

pa potencijal brzine i strujnu funkciju možemo izraziti u obliku

$$(21.9) \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta,$$

pri čemu promena znaka izdašnosti ε ima za posledicu samo promenu smera kretanja čestica fluida, tj. ako je $\varepsilon > 0$ radi se o izvoru, a ako je $\varepsilon < 0$ o ponoru. S obzirom da je ovo ravansko strujanje, tj. da protok fluida kroz zatvorenu krivu liniju predstavlja protok kroz cilindričnu površ koja prolazi kroz tu krivu a ograničena je ravnima $z=0$ i $z=1$, jasno je da izdašnost izvora predstavlja u stvari zapreminu fluida koja u jedinici vremena izađe iz jedinice dužine z ose.

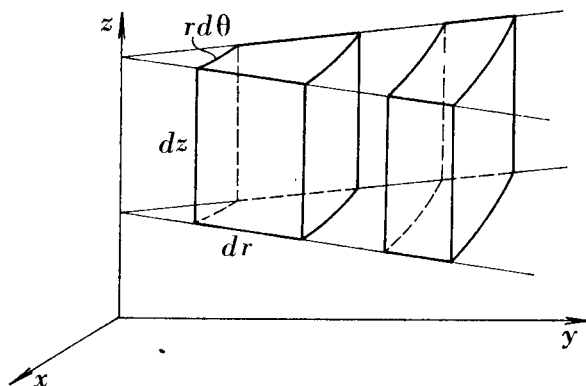
Ako ovo strujanje posmatramo u trodimenzionom prostoru, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata r, θ, z , zaključujemo da su izvori neprekidno raspoređeni duž z ose, koja je, kao i u prethodnom slučaju strujanja, singularna osa strujnog polja. Brzina je određena kovarijantnim koordinatama

$$\{v_i\} = \left\{ \frac{\varepsilon}{2\pi r}, 0, 0 \right\},$$

na osnovu čega je lako izračunati da je tenzor vrtložnosti identički jednak nuli, što je posledica pretpostavke da je strujanje potencijalno. Za fizičke koordinate tenzora brzine deformacije, međutim, dobivamo

$$\{d_{\langle ij \rangle}\} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

na osnovu čega zaključujemo da će se fluidni delići pri kretanju na određeni način deformisati, ali se neće kruto rotirati. Kako su $d_{\langle rr \rangle}$ i $d_{\langle \theta\theta \rangle}$ jedine od nule različite fizičke koordinate tenzora brzine deformacije, postojaće, kao što znamo, samo brzine promene rastojanja između čestica u pravcima koordinatnih linija r i θ .



Sl. 29

Prema tome, ako uočimo fluidni delić čije se stranice poklapaju sa koordinatnim linijama, on će se pri kretanju deformisati na taj način što će mu se menjati samo dužine stranica koje se poklapaju sa koordinatnim linijama r i θ (sl. 29).

22. Slaganje potencijalnih ravanskih strujanja. Potencijalno ravansko strujanje nestišljivog fluida kinematički je u potpunosti određeno potencijalom brzine i strujnom funkcijom. Jasno je, međutim, da se proizvoljno izabrani par funkcija ne može uvek uzeti kao potencijal brzine i strujna funkcija, jer, kao što smo pokazali, one moraju zadovoljavati i Laplasove diferencijalne jednačine i Koši-Rimanove jednačine. Prema tome, možemo zaključiti: *svake dve harmonijske funkcije koje zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine mogu se uzeti da budu potencijal brzine i strujna funkcija*, tj. određuju neko ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida.

Neka su, na primer, φ_1 i ψ_1 dve harmonijske funkcije koje zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine, tj.

$$(22.1) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi_1}{\partial x^1},$$

i neka su, još, φ_2 i ψ_2 druge dve harmonijske funkcije koje takođe zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine, tj.

$$(22.2) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi_2}{\partial x^1}.$$

S obzirom da je Laplasova diferencijalna jednačina linearna, očigledno je da će i funkcije $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ i $\psi = \psi_1 + \psi_2$ biti harmonijske, tj. biće

$$\Delta \varphi = \Delta (\varphi_1 + \varphi_2) = \Delta \varphi_1 + \Delta \varphi_2 = 0, \quad \Delta \psi = \Delta (\psi_1 + \psi_2) = \Delta \psi_1 + \Delta \psi_2 = 0.$$

Pošto su i Koši-Rimanove jednačine linearne, očigledno je da će ih zadovoljavati i funkcije $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ i $\psi = \psi_1 + \psi_2$. Da bi se to pokazalo, treba sabrati odgovarajuće strane jednačina (22.1) i (22.2). Na taj način se dobiva

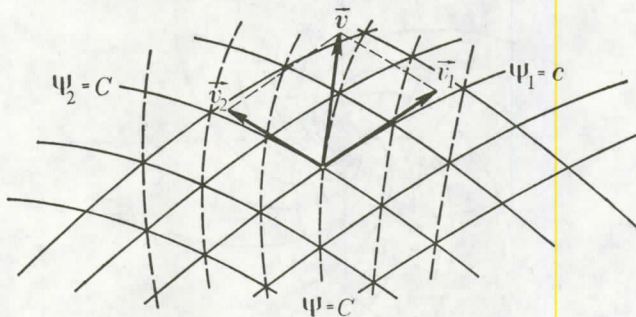
$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial (\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial (\psi_1 + \psi_2)}{\partial x^1},$$

odnosno

$$\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

Prema tome, pošto su harmonijske i pošto zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine, funkcije $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ i $\psi = \psi_1 + \psi_2$ se mogu uzeti za potencijal brzine i strujnu funkciju nekog mogućeg strujanja.

Strujanje sa potencijalom brzine $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ i strujnom funkcijom $\psi = \psi_1 + \psi_2$ predstavlja zbir dva komponentalna strujanja sa potencijalima φ_1 i φ_2 i strujnim funkcijama ψ_1 i ψ_2 . Jasno je da na isti način možemo sabrati konačan broj poznatih strujanja. Prema tome, vidimo da ako poznajemo izvestan broj strujanja, možemo, sabiranjem pojedinih od njih, dobiti čitav niz novih, ponekad veoma interesantnih strujanja. To još naročito dolazi do izražaja kad se uzme u obzir da potencijalu brzine i strujnoj funkciji možemo promeniti uloge uz odgovarajuću promenu znaka.



Sl. 30

Napomenimo, na kraju, da se dva strujanja mogu sabrati i čisto grafičkom metodom u ravni strujanja. Ako su, naime, u tačkama ravni strujanja poznate brzine komponentalnih strujanja, tada se mogu konstruisati njihove strujne linije, jer je vektor brzine u svakoj tački tangentan na strujnu liniju. Koristeći se sada pravilom paralelograma, tj. pravilom vektorskog sabiranja dva vektora, može se u svakoj tački odre-

diti brzina zbirnog strujanja, posle čega se mogu konstruisati i njegove strujne linije. Ako su strujne linije komponentalnih strujanja konstruisane na dovoljno malom rastojanju, tada su strujne linije zbirnog strujanja određene dijagonalama paralelograma koje obrazuju strujne linije komponentalnih strujanja (sl. 30). Pošto je ovo grafička metoda, jasno je da se prilikom rada mora usvojiti određena razmera za grafičko predstavljanje vektora brzine. Na potpuno isti način može se grafičkim putem sabrati i konačan broj komponentalnih strujanja.

23. Primeri zbirnih potencijalnih ravanskih strujanja. U ovom odeljku ćemo proučiti nekoliko primera zbirnih potencijalnih ravanskih strujanja nestišljivih fluida.

a) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga združenog sa izvorom.* Ako saberemo potencijale brzine i strujne funkcije strujanja u polju jednog vrtloga i strujanja u polju jednog izvora, dobivamo

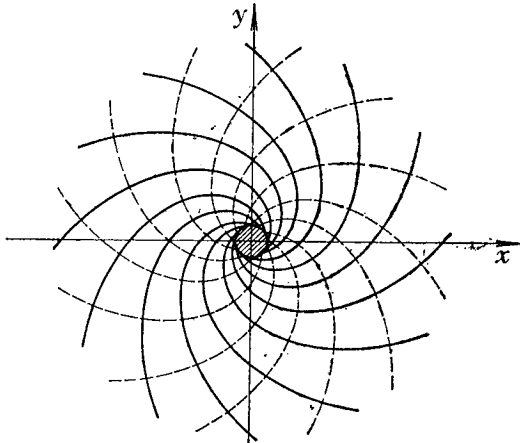
$$(23.1) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} (\varepsilon \ln r + \Gamma \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (-\Gamma \ln r + \varepsilon \theta).$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$r = e^{\frac{\varepsilon}{\Gamma} \theta + C},$$

i vidimo da je to familija logaritamskih spirala. Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi = C$, odnosno

$$r = e^{-\frac{\Gamma}{\varepsilon} \theta + C},$$



Sl. 31

i vidimo da su i one logaritamske spirale, ali upravne na strujne linije (sl. 31). Vrste spirala zavise od znaka cirkulacije Γ i izdašnosti ε , odnosno od toga da li je vrtlog pozitivne ili negativne cirkulacije združen sa izvorom ili ponorom. Strujanje prikazano na slici odgovara slučaju kada su veličine Γ i ε obe istog znaka, tj. kada su obe pozi-

tivne ili kada su obe negativne. Jasno je da od znaka izdašnosti ε zavisi i smer kretanja čestica fluida. Kada je, naime, $\varepsilon > 0$, u pitanju je izvor, i čestice se kreću po logaritamskim spiralama udaljavajući se od koordinatnog početka. Kada je $\varepsilon < 0$, biće suprotno. To se, uostalom, lako zaključuje iz kovarijantnih koordinata vektora brzine, koje, na osnovu (20.4), iznose

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -r \frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi}.$$

Fizičke koordinate vektora brzine su

$$v_{\langle r \rangle} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad v_{\langle \theta \rangle} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r},$$

pa za intenzitet brzine dobivamo

$$v = \sqrt{(v_{\langle r \rangle})^2 + (v_{\langle \theta \rangle})^2} = \frac{1}{2r\pi} \sqrt{\varepsilon^2 + \Gamma^2}.$$

Intenzitet brzine, dakle, teži beskonačnosti kad r teži nuli, pa zaključujemo da je koordinatni početak singularna tačka, koju, kao takvu, moramo izdvojiti iz strujnog polja.

S obzirom da strujno polje nije jednostruko povezano, tj. da potencijal brzine i strujna funkcija nisu jednoznačne funkcije položaja, lako je pokazati, koristeći (23.1), da su cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju krivu koja ne obuhvata koordinatni početak, a jednaki jačini Γ vrtloga, odnosno izdašnosti ε izvora ako kriva obuhvata koordinatni početak.

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora i jednog ponora jednakih izdašnosti.* Neka se, u odnosu na Dekartov pravougli sistem koordinata x, y u ravni strujanja, u tački $O_1(-a, 0)$ nalazi izvor izdašnosti ε (sl. 32). Ako, koordinatnim transformacijama

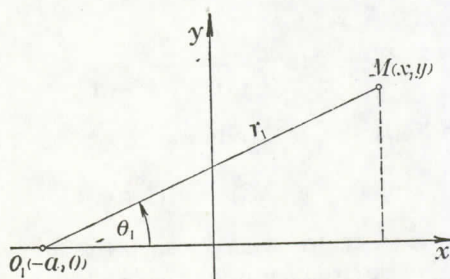
$$x + a = r_1 \cos \theta_1,$$

$$y = r_1 \sin \theta_1,$$

uvedemo polarne koordinate sa polom u tački O_1 , potencijal brzine i strujnu funkciju možemo izraziti u obliku

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln r_1, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta_1,$$

odakle zaključujemo da su strujnice prave $\theta_1 = C$, a ekvipotencijalne linije krugovi $r_1 = C$.



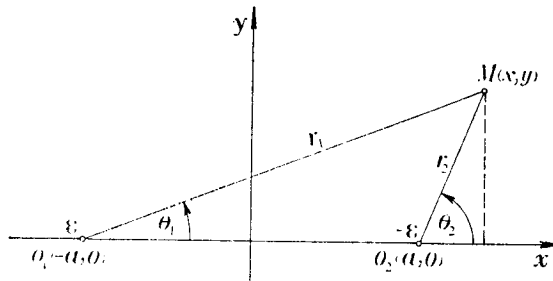
Sl. 32

Ako se u tački O_1 , sa Dekartovim pravouglim koordinatama $(-a, 0)$ nalazi izvor izdašnosti ε , a u tački O_2 , sa Dekartovim pravouglim koordinatama $(a, 0)$ nalazi ponor iste izdašnosti, potencijal brzine i strujna funkcija zbirnog strujanja su

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln r_1 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln r_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2}, \quad (23.2)$$

$$\psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta_1 - \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta_2 = \frac{\varepsilon}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2),$$

gde su r_2 i θ_2 polarne koordinate sa polom u tački O_2 (sl. 33.).



Sl. 33

Veze između Dekartovih pravouglih i uvedenih polarnih koordinata su

$$(r_1)^2 = (x + a)^2 + (y)^2, \quad (r_2)^2 = (x - a)^2 + (y)^2,$$

$$\theta_1 = \arctg \frac{y}{x + a}, \quad \theta_2 = \arctg \frac{y}{x - a},$$

pa potencijal brzine i strujnu funkciju (23.2) možemo, u odnosu na sistem Dekartovih pravouglih koordinata, izraziti u obliku

$$\varphi = \frac{\varepsilon}{4\pi} \ln \frac{(x + a)^2 + (y)^2}{(x - a)^2 + (y)^2}, \quad (23.3)$$

$$\psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \arctg \frac{-2ay}{(x)^2 + (y)^2 - a^2}.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

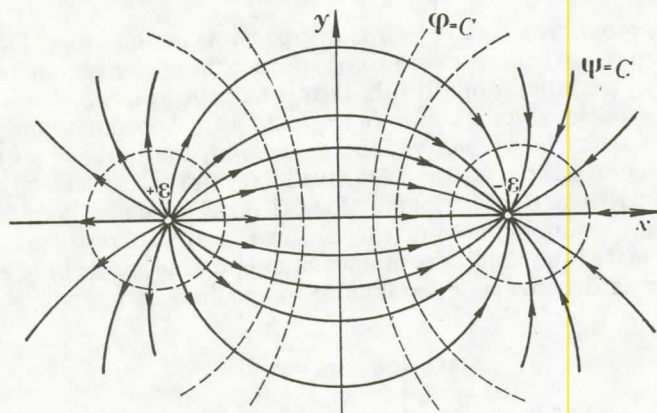
$$(x)^2 + (y + aC)^2 = a^2(1 + C^2)$$

i vidimo da su to krugovi sa centrima na y osi, pri semu svi prolaze kroz tačke $(-a, 0)$ i $(a, 0)$ (sl. 34). Nultu strujnicu dobivamo kad stavimo $\psi = 0$, pa iz (23.3)₂ vidimo da je njena jednačina $y = 0$, tj. ona se poklapa sa x koordinatnom osom.

Projekcije brzine na Dekartove pravougle ose su

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{x+a}{(x+a)^2 + (y)^2} - \frac{x-a}{(x-a)^2 + (y)^2} \right],$$

$$v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{y}{(x+a)^2 + (y)^2} - \frac{y}{(x-a)^2 + (y)^2} \right],$$



Sl. 34

odnosno, ako ih izrazimo preko polarnih koordinata,

$$v_x = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{\cos \theta_1}{r_1} - \frac{\cos \theta_2}{r_2} \right],$$

$$v_y = \frac{\varepsilon}{2\pi} \left[\frac{\sin \theta_1}{r_1} - \frac{\sin \theta_2}{r_2} \right],$$

pa je intenzitet brzine

$$v = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{(r_1)^2} + \frac{1}{(r_2)^2} - \frac{2}{r_1 r_2} \cos(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Odavde zaključujemo da intenzitet brzine teži beskonačnosti kad r_1 ili r_2 teži nuli. Prema tome, tačke u kojima se nalaze izvor i ponor su singularne tačke strujnog polja.

S obzirom da singularitete moramo izdvojiti iz strujnog polja, jasno je da ni ono nije jednostruko povezano. Međutim, kako je potencijal brzine jednoznačna funkcija položaja, zaključujemo da je cirkulacija jednaka nuli za proizvoljnu zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja, bez obzira da li obuhvata singularne tačke ili ne. Što se protoka tiče, moramo razlikovati tri posebna slučaja:

1. Ako kriva ne obuhvata nijednu singularnu tačku protok je jednak nuli, što se lako zaključuje iz (23.2)₂, jer posle obilaženja po krivoj strujna funkcija se vraća na prvobitnu vrednost.

2. Ako kriva obuhvata samo jednu singularnu tačku, protok je jednak izdašnosti izvora, odnosno ponora, što se takođe lako zaključuje iz (23.2)₂, jer posle obilaženja po krivoj samo jedan od uglova θ_1 i θ_2 prirašte za 2π .

3. Ako, pak, kriva obuhvata oba singulariteta, protok je jednak nuli, što je opet lako zaključiti iz (23.2)₂, jer posle obilaženja po krivoj oba ugla, θ_1 i θ_2 , prirastu za 2π .

U posmatranom strujanju, dakle, fluid izvire u tački $O_1(-a, 0)$, sa izdašnošću ε , a ponire u tački $O_2(a, 0)$ sa istom izdašnošću. Pri tome se čestice fluida kreću od izvora ka ponoru po kružnim lukovima, izuzimajući nultu strujnicu po kojoj se čestice kreću pravolinijski i to, s jedne strane, od izvora ka ponoru, a s druge, iz izvora u beskonačnost i iz beskonačnosti u ponor.

c) *Stacionarno strujanje u polju jednog dvopola.* U prethodnom slučaju strujanja izvor i ponor su se nalazili na x osi i to na međusobnom konačnom rastojanju $2a$. Interesantno, je, međutim, dopustiti da rastojanje između izvora i ponora teži nuli. U graničnom procesu, izvor i ponor će se poklopiti u koordinatnom početku, koji u tom slučaju predstavlja *dvopol*. Važno je, međutim, znati pravac po kome su se u graničnom procesu izvor i ponor približavali. Taj pravac se naziva *osa dvopola* i bitna je karakteristika ovog strujanja. Fizički je jasno da u graničnom procesu izdašnosti izvora i ponora moraju neograničeno rasti kad rastojanje između njih teži nuli, jer bi inače fluid koji izvire momentalno i ponirao, pa ne bi ni bilo strujanja. Iz toga razloga se ovo strujanje karakteriše momentom M dvopola koji mora biti konstantan i koji se definiše kao

$$(23.4) \quad M = \lim_{a \rightarrow 0} 2a\varepsilon = \text{const.}$$

Odavde vidimo da, u cilju da M bude konstanta, ε mora težiti beskonačnosti kad a teži nuli.

Potencijal brzine i strujnu funkciju dobićemo iz (23.3), ako izdašnost ε izrazimo preko momenta M dvopola i izračunamo graničnu vrednost kad a teži nuli, tj.

$$\varphi = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{M}{8a\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + (y)^2}{(x-a)^2 + (y)^2},$$

$$\psi = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{M}{4a\pi} \text{arctg} \frac{-2ay}{(x)^2 + (y)^2 - a^2}.$$

Primenom Lopitalovog pravila i izračunavanjem granične vrednosti, dobivamo

$$(23.5) \quad \varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{(x)^2 + (y)^2},$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{(x)^2 + (y)^2},$$

ili, ako koordinatnim transformacijama $x=r \cos \theta$, $y=r \sin \theta$, uvedemo polarne koordinate,

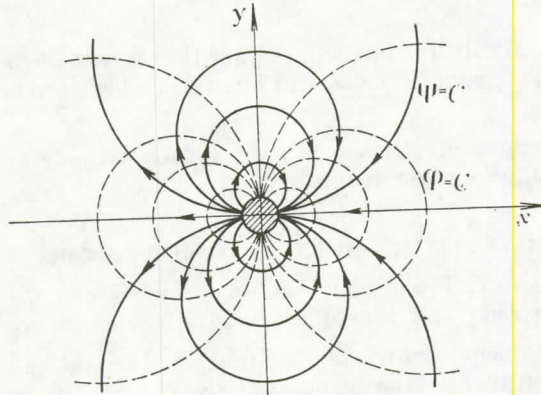
$$\varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{\cos \theta}{r},$$

$$\psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{\sin \theta}{r},$$

Jednačine strujnih linija su $\psi=C$, odnosno

$$(x)^2 + (y+C)^2 = C^2$$

i vidimo da su to krugovi sa centrima na y osi, pri čemu svi prolaze kroz koordinatni početak (sl. 35). Nultu strujnicu dobivamo kad stavimo $\psi=0$, pa vidimo da je njena jednačina $y=0$, tj. ona se poklapa sa x osom.



Sl. 35

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi=C$, odnosno

$$(x+C)^2 + (y)^2 = C^2,$$

pa vidimo da su i to krugovi, ali sa centrima na x osi, pri čemu takođe svi prolaze kroz koordinatni početak.

Projekcije brzine na Dekartove pravougle ose su

$$(23.6) \quad \begin{aligned} v_x &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{M}{2\pi} \frac{(x)^2 - (y)^2}{[(x)^2 + (y)^2]^2}, \\ v_y &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{M}{2\pi} \frac{2xy}{[(x)^2 + (y)^2]^2}, \end{aligned}$$

ili, ako uvedemo polarne koordinate,

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{M \cos 2\theta}{2\pi (r)^2}, \\ v_y &= -\frac{M \sin 2\theta}{2\pi (r)^2}, \end{aligned}$$

pa za intenzitet brzine dobivamo

$$v = \frac{M}{2\pi (r)^2}.$$

Vidimo, dakle, da je koordinatni početak singularna tačka, pa je moramo izvoditi iz strujnog polja, na osnovu čega zaključujemo da strujno polje nije jednostruko povezano. Međutim, s obzirom da su i potencijal brzine i strujna funkcija jednoznačne funkcije položaja, zaključujemo da su i cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja, bez obzira da li kriva obuhvata singularitet ili ne.

V e ž b a n j a

1. Proučiti stacionarno strujanje u polju jednog izvora i jednog ponora ako se nalaze na y osi, ako su jednakih izdašnosti i ako su podjednako udaljeni od koordinatnog početka.

2. Proučiti stacionarno strujanje u polju jednog dvopola koji se nalazi u koordinatnom početku, ako je osa dvopola:

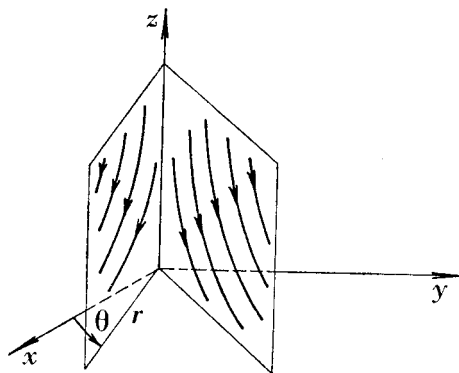
a) y osa,

b) bilo koja prava koja prolazi kroz koordinatni početak.

3. Proučiti kakvo će biti strujanje ako se potencijalu brzine i strujnoj funkciji (23.5) razmene uloge i ako se pri tome jednoj od njih promeni znak.

4. Odrediti potencijal brzine, strujnu funkciju i jednačinu nulte strujnice za zbirno stacionarno strujanje koje se dobiva sabiranjem pravolinijskog jednolikog strujanja paralelnog x osi i strujanja u polju jednog dvopola sa x osom kao osom dvopola.

24. Osnosimetrična strujanja. U odeljku 16. smo definisali osnosimetrično strujanje kao ono kod koga je strujna slika ista u svim ravnima koje prolaze kroz neku fiksiranu osu u trodimenzionom prostoru, koja je osa simetrije strujanja. Pri proučavanju ovakvih strujanja najpodesnije je izabrati sistem cilindarskih polarnih



Sl. 36

koordinata r , θ , z i to tako da se osa z poklapa sa osom simetrije strujanja (sl. 36). Ravni strujanja su, prema tome, koordinatne ravni $\theta = \text{const.}$ i strujanje se proučava u osnovnoj ravni strujanja $\theta = 0$.

U odnosu na izabrani sistem cilindarskih polarnih koordinata, koordinate metričkog tenzora su

$$(24.1) \quad \{g_{ij}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\sqrt{g}=r),$$

a polje brzine je određeno kontravarijantnim koordinatama

$$(24.2) \quad \{v^i\} = \{v^r(r, z, t), 0, v^z(r, z, t)\},$$

što je u saglasnosti sa (5.9). Brzina, dakle, nema projekcije na θ koordinatnu liniju, što znači da leži u ravni strujanja. Osim toga, koordinate brzine ne zavise od θ , što je posledica pretpostavke da je strujanje isto u svim ravnima strujanja.

S obzirom da je $v^\theta=0$, iz (10.4) vidimo da je u slučaju osnosimetričnih strujanja nestišljivog fluida jednačina konzervacije mase oblika

$$(24.3) \quad \frac{\partial}{\partial r}(rv^r) + \frac{\partial}{\partial z}(rv^z) = 0.$$

Prema tome, osnosimetrično strujanje nestišljivog fluida određeno je, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata sa metričkim tenzorom (24.1), poljem kontravarijantnih koordinata brzine (24.2), pri čemu mora biti zadovoljena jednačina (24.3).

24

25. Strujna funkcija za osnosimetrična strujanja. Diferencijalne jednačine strujnih linija (6.5) se u slučaju osnosimetričnih strujanja, s obzirom da je $v^\theta=0$, svode na jednačinu

$$\frac{dr}{v^r} = \frac{dz}{v^z},$$

odnosno

$$v^r dz - v^z dr = 0.$$

Ova jednačina, međutim, nije egzaktna, pa je, u cilju dovođenja njene leve strane do potpunog diferencijala, treba pomnožiti integracionim faktorom. Za integracioni faktor očigledno možemo uzeti $\sqrt{g}=r$, jer se tada uslov integrabilnosti poklapa sa jednačinom konzervacije mase (24.3) koja je zadovoljena u svakoj regularnoj tački ravni strujanja. Na taj način, diferencijalnu jednačinu strujnih linija možemo pisati u obliku

$$rv^r dz - rv^z dr = 0,$$

odnosno, s obzirom da joj je leva strana totalni diferencijal,

$$(25.1) \quad d\psi = rv^r dz - rv^z dr,$$

u obliku

$$d\psi = 0.$$

Integracijom ove jednačine dobivamo konačne jednačine strujnih linija

$$(25.2) \quad \psi(r, z, t) = C,$$

gde je $\psi = \psi(r, z, t)$ strujna funkcija za osnosimetrična strujanja.

Jednačinom (25.2) je određena familija strujnih linija u ravni strujanja. U trodimenzionom prostoru, međutim, ta jednačina određuje familiju strujnih površi kao obrtnih površi koje se dobivaju obrtanjem strujnih linija oko z ose. Preseci tih površi sa ravnima strujanja predstavljaju strujne linije u trodimenzionom prostoru.

Totalni diferencijal strujne funkcije možemo izraziti u obliku

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial r} dr + \frac{\partial \psi}{\partial z} dz,$$

pa, upoređivanjem sa (25.1), dobivamo

$$r v^r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad r v^z = -\frac{\partial \psi}{\partial r},$$

odakle sledi

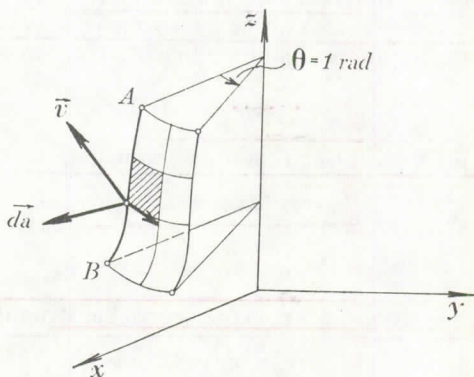
$$(25.2) \quad v^r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v^z = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Vidimo, dakle, da se koordinatne brzine mogu izraziti preko strujne funkcije, pri čemu, s obzirom da je $g_{rr}=1$ i $g_{zz}=1$, nema razlike između kontravarijantnih, kovarijantnih i fizičkih koordinata.

Kod osnosimetričnih strujanja, pod protokom kroz krivu liniju u ravni strujanja podrazumevamo protok kroz obrtnu površ koja se dobiva obrtanjem te krive za jedan radijan oko z ose. Kao i u slučaju ravanskih strujanja, pokazaćemo da i kod osnosimetričnih strujanja važi s t a v: *Protok fluida kroz krivu liniju u ravni strujanja, između dve na njoj proizvoljno izabrane tačke, jednak je razlici vrednosti strujne funkcije u tim tačkama i ne zavisi od oblika krive.*

D o k a z. Protok kroz krivu L u ravni strujanja, između tačaka A i B na krivoj (sl. 37), iznosi

$$Q = \int_a^{\theta=1} v^i da_i = \int_{\theta=0}^{\theta=1} \int_{L(A)}^{L(B)} v^i da_i.$$



Sl. 37

Orijentisani element površi možemo izraziti kao vektorski proizvod orijentisanog elementa luka krive L i orijentisanog elementa luka θ koordinatne linije, tj.

$$da_i = \varepsilon_{ijk} dx_{(L)}^k dx_{(\theta)}^j = \sqrt{g} e_{ijk} dx_{(L)}^k dx_{(\theta)}^j,$$

pa je

$$v^i da_i = r e_{ijk} v^i dx_{(L)}^k dx_{(\theta)}^j.$$

Kako je, međutim,

$$\{dx_{(L)}^k\} = \{dr, 0, dz\}, \quad \{dx_{(\theta)}^j\} = \{0, d\theta, 0\},$$

dobivamo

$$v^i da_i = r e_{123} v^r dz d\theta + r e_{321} v^z dr d\theta,$$

odnosno

$$v^i da_i = d\theta (r v^r dz - r v^z dr).$$

Koristeći sada (25.1), možemo pisati

$$v^i da_i = d\theta d\psi_{(L)},$$

pa za protok dobivamo

$$Q = \int_{\theta=0}^{\theta=1} d\theta \int_{L(A)}^{L(B)} d\psi_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} d\psi_{(L)},$$

odnosno

(25.3)

$$Q = \psi(B) - \psi(A),$$

što je i trebalo dokazati.

Kao i u slučaju ravanskih strujanja, i u ovom slučaju iz (25.3) vidimo da će protok biti jednak nuli kroz bilo koju zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja ako je strujna funkcija jednoznačna funkcija položaja, a može biti jednak ili različit od nule ako je višeznačna funkcija položaja, što zavisi od toga da li se posle obilaženja po krivoj vrednost strujne funkcije menja ili ne.

V e ž b a n j a

1. Ako na krivoj liniji u ravni strujanja uočimo dve tačke, A i B , tada obrtanjem krive oko z ose njen deo između uočenih tačaka obrazuje obrtnu površ čija je osa simetrije z osa. Pokazati da protok kroz tu obrtnu površ iznosi

$$Q = 2\pi [\psi(B) - \psi(A)].$$

2. Pokazati da je protok jednak nuli kroz obrtnu površ koja se dobiva obrtanjem strujne linije oko z ose.

(25)

26. **Vrtložna osnosimetrična strujanja.** S obzirom da se koordinate vektora brzine mogu izraziti preko strujne funkcije, jasno je da se i ostale kinematičke veličine, kao što su, na primer, tenzor brzine deformacije, tenzor vrtložnosti i vektor vrtložnosti, takođe mogu izraziti preko strujne funkcije.

S obzirom da je kod osnosimetričnih strujanja polje brzine određeno koordinatama (24.2), iz izraza kojim je definisan tenzor vrtložnosti, tj.

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} - \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right),$$

zaključujemo da je jedina nezavisna i od nule različita kovarijantna koordinata tenzora vrtložnosti:

$$\omega_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).$$

Ako koordinate brzine izrazimo preko strujne funkcije, koristeći (25.2), pri čemu uzimamo u obzir da su kontravarijantne i kovarijantne koordinate međusobno jednake, dobivamo

$$\omega_{rz} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right].$$

odnosno

$$(26.1) \quad \omega_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right)$$

S obzirom na koordinate metričkog tenzora (24.1), jasno je da je ovo ujedno i kontravarijantna i fizička koordinata tenzora vrtložnosti.

Ná osnovu definicije vektora vrtložnosti, tj.

$$\omega^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \omega_{jk},$$

zaključujemo da je jedina od nule različita kontravarijantna koordinata vektora vrtložnosti:

$$\omega^\theta = \frac{1}{2} (\varepsilon^{\theta rz} \omega_{rz} + \varepsilon^{\theta zr} \omega_{zr}) = \varepsilon^{\theta rz} \omega_{rz} = -\frac{1}{r} \omega_{rz},$$

odnosno, ako iskoristimo (26.1),

$$(26.2) \quad \omega^\theta = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

S obzirom da je $g_{\theta\theta} = r^2$, jedina od nule različita kovarijantna koordinata vektora vrtložnosti je

$$(26.3) \quad \omega_\theta = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right),$$

a fizička

$$(26.4) \quad \omega_{(\theta)} = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right).$$

Prema tome, kod osnosimetričnih strujanja vektor vrtložnosti je određen fizičkim koordinatama

$$(26.5) \quad \{\omega_{(i)}\} = \left\{ 0, -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), 0 \right\}$$

i vidimo da ima projekciju samo na θ koordinatnu liniju. To znači da su vrtložne linije upravne na ravni strujanja, tj. da su krugovi sa centrom na z osi. Kao i kod ravanskih strujanja i u ovom slučaju je identički ispunjen uslov

$$\vec{\omega} \cdot \vec{v} = \omega_1 v^1 + \omega_2 v^2 + \omega_3 v^3 \equiv 0,$$

što je, prema (15.6), potreban i dovoljan uslov da strujanje bude složeno lamelarno. Prema tome, sledi: Osnosimetrično strujanje je složeno lamelarno strujanje.

Analogno ravanskim strujanjima, i kod osnosimetričnih strujanja važi s t a v: *Kod osnosimetričnih strujanja vrtložne linije su stacionarne i materijalne, bez obzira da li je strujanje, odnosno polje vektora vrtložnosti stacionarno ili ne.*

D o k a z. Kod osnosimetričnih strujanja, s obzirom da je samo $\omega^2 \neq 0$, tj. $\omega^1 = 0$ i $\omega^3 = 0$, očigledno je identički ispunjen uslov

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \omega^j}{\partial t} \omega^k \equiv 0,$$

što je, prema (14.5), potrebno i dovoljno da vrtložne linije budu stacionarne, čime je prvi deo stava dokazan.

Da bi stacionarne vrtložne linije bile materijalne mora biti zadovoljen uslov (14.33), koji se, kao što je pokazano u odeljku 19., može napisati u obliku

$$\varepsilon_{ijk} \omega^j \left(\frac{\partial \omega^k}{\partial x^m} v^m - \omega^m \frac{\partial v^k}{\partial x^m} \right) = 0.$$

Kod osnosimetričnih strujanja, s obzirom da je $\omega^1 = 0$, $\omega^3 = 0$, $\frac{\partial v^1}{\partial x^2} = 0$ i $\frac{\partial v^3}{\partial x^2} = 0$, ovaj je uslov identički zadovoljen, čime je i drugi deo stava dokazan.

V e ž b a n j a

1. Koristeći (26.5), odnosno odgovarajuće kontravarijantne koordinate, integracijom diferencijalnih jednačina (14.3) pokazati da su kod osnosimetričnih strujanja vrtložne linije upravne na ravni strujanja i da su stacionarne, tj. da su krugovi sa centrima na z osi, jer se poklapaju sa θ koordinatnim linijama.

2. Pokazati da je kod vrtložnih osnosimetričnih strujanja rotor vektora ubrzanja kolinearan sa vektorom vrtložnosti.

3. Pokazati da se kod vrtložnih osnosimetričnih strujanja vektor brzine može izraziti u obliku

$$\vec{v} = F \text{ grad } G,$$

gde su $F(r, z, t)$ i $G(r, z, t)$ skalarne funkcije, što je uslov da strujanje bude složeno lamelarno.

26

27. Potencijalna osnosimetrična strujanja. Kod potencijalnih osnosimetričnih strujanja, s obzirom da je vektor vrtložnosti identički jednak nuli, iz (26.5) zaključujemo da strujna funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(27.1) \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Ovo, međutim, nije Laplasova diferencijalna jednačina, pa zaključujemo da kod osnosimetričnih potencijalnih strujanja strujna funkcija nije harmonijska.

U saglasnosti sa (13.2), vektor brzine možemo izraziti u obliku

$$(27.2) \quad \{v_i\} = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial r}, 0, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\},$$

gde je

$$(27.3) \quad \varphi = \varphi(r, z, t)$$

potencijalna funkcija za osnosimetrična strujanja.

Na osnovu (27.2) i (25.2) sledi

$$(27.4) \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

odakle zaključujemo da su potencijal brzine i strujna funkcija povezane diferencijalnim jednačinama

$$(27.5) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

koje su slične Koši-Rimanovim jednačinama kod ravanskih strujanja.

Jednačinom

$$(27.6) \quad \varphi(r, z, t) = C,$$

određena je familija ekvipotencijalnih linija u ravni strujanja, odnosno ekvipotencijalnih obrtnih površi u trodimenzionom prostoru. Lako je pokazati, koristeći jednačine (27.5), na sličan način kao kod ravanskih strujanja, da su strujne i ekvipotencijalne linije familije međusobno ortogonalnih linija u ravni strujanja, odnosno da su strujne i ekvipotencijalne obrtne površi familije međusobno ortogonalnih površi u trodimenzionom prostoru.

S obzirom da je fluid nestišljiv, potencijal brzine zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu, koja je — lako je pokazati — u ovom slučaju oblika

$$(27.7) \quad \Delta \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0.$$

Prema tome, potencijal brzine je harmonijska funkcija. Strujna funkcija, međutim, zadovoljava diferencijalnu jednačinu (27.1) i, kao što smo rekli, nije harmonijska. Jasnije je, stoga, da kod osnosimetričnih strujanja potencijalu brzine i strujnoj funkciji ne možemo menjati uloge, kao što smo to mogli, uz odgovarajuću promenu znaka, kod ravanskih potencijalnih strujanja.

Strujna funkcija i potencijal brzine se mogu odrediti integracijom diferencijalne jednačine (27.1), odnosno (27.7), uz odgovarajuće granične uslove. Međutim, dovoljno je na taj način odrediti samo jednu od tih funkcija, a druga se, onda, može odrediti integracijom jednačina (27.5). Pokazaćemo sada postupak integracije tih jednačina.

Naka je, na primer, poznat potencijal brzine φ . Iz prve jednačine (27.5), za strujnu funkciju tada dobivamo

$$(27.8) \quad \psi = \int_0^z r \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz + f(r)$$

gde je $f(r)$ proizvoljna funkcija. Da bismo odredili tu funkciju, diferencirajmo prethodnu jednačinu po r . Na taj način dobivamo

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = \int_0^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) dz + f'(r).$$

Ako, sada, iskoristimo drugu jednačinu (27.5), dobivamo

$$-r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \int_0^z \left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} \right) dz + f'(r).$$

Iz Laplasove diferencijalne jednačine (27.7) sledi

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} + r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = -r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right),$$

pa prethodnu jednačinu možemo izraziti u obliku

$$-r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\int_0^z \frac{\partial}{\partial z} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dz + f'(r),$$

odakle je, posle integracije,

$$-r \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) \Big|_0^z + f'(r).$$

Odavde sledi

$$f'(r) = -\left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0},$$

pa integracijom dobivamo

$$f(r) = -\int_0^r \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} dr.$$

Unoseći ovako nađenu funkciju $f(r)$ u (27.8), za strujnu funkciju konačno dobivamo

$$(27.9) \quad \psi = \int_0^z r \frac{\partial \varphi}{\partial r} dz - \int_0^r \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} dr.$$

Ekvivalentan rezultat bismo dobili da smo pošli od druge jednačine (27.5).

Na sličan način možemo odrediti potencijal brzine ako je poznata strujna funkcija.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da se Laplasova diferencijalna jednačina, koju zadovoljava potencijal brzine kod osnosimetričnih strujanja, može napisati u obliku (27.7).

2. Ako osnosimetrično potencijalno strujanje pripada jednostruko povezanom strujnom polju, pokazati da je cirkulacija duž bilo koje zatvorene krive u ravni strujanja jednaka nuli i da je potencijal brzine jednoznačna funkcija položaja.

28. Primeri potencijalnih osnosimetričnih strujanja. Proučimo sada nekoliko primera potencijalnih osnosimetričnih strujanja.

a) *Stacionarno pravolinijsko strujanje.* Ako je potencijalno osnosimetrično strujanje određeno potencijalom brzine

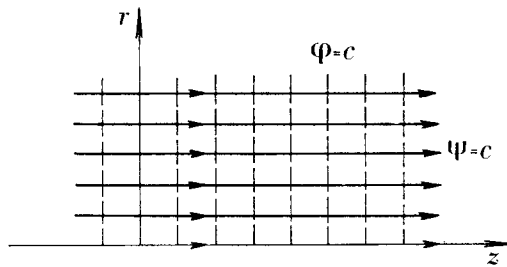
$$(28.1) \quad \varphi = az,$$

gde je a realna konstanta, za strujnu funkciju, koristeći (27.9), dobivamo

$$(28.2) \quad \psi = -a \frac{r^2}{2}.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$r = C$$



Sl. 38

i vidimo da su to prave linije u ravni strujanja koje su paralelne sa z osom (sl. 38). U trodimenzionom prostoru, međutim, to su cilindarske površi koje se dobivaju obrtanjem tih pravih oko z ose.

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi = C$, odnosno

$$z = C$$

i vidimo da su to poluprave (jer r ne može biti manje od nule) koje su upravne na z osu.

Projekcije brzine, na osnovu (27.4), su

$$v_{\langle r \rangle} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad v_{\langle z \rangle} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a = \text{const.},$$

pa vidimo da je brzina polje konstantnih vektora. Gradijenti brzine su, prema tome, jednaki nuli, pa je i tenzor brzine deformacije jednak nuli. S obzirom da je i tenzor vrtložnosti jednak nuli, zaključujemo da se fluidni delići pri kretanju neće ni deformisati ni obrtati. Njihovo kretanje, prema tome, kao i kretanje fluida sadržanog u konačnoj zapremini, je jednoliko pravolinijsko translatorno kruto kretanje.

S obzirom da su potencijal brzine i strujna funkcija jednoznačne funkcije položaja, cirkulacija i protok su jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja.

Napomenimo, na kraju, da se ovo strujanje, posmatrano u trodimenzionom prostoru, može proučavati i kao ravansko, što smo i učinili u odeljku 21. Oba načina, jasno, sa stanovišta trodimenzionog prostora, dovode do potpuno istih rezultata.

b) *Stacionarno strujanje u polju pravolinijski neprekidno raspoređenih izvora iste izdašnosti.* Ako je potencijalno osnosimetrično strujanje određeno potencijalom brzine

$$(28.3) \quad \varphi = a \ln r,$$

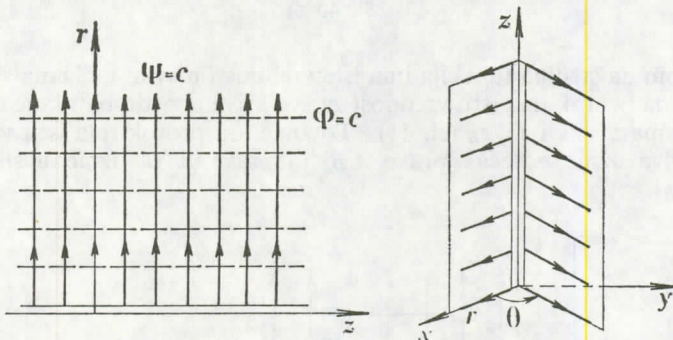
gde je a realna konstanta, za strujnu funkciju iz (27.9) dobivamo

$$(28.4) \quad \psi = az.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$z = C,$$

pa vidimo da su poluprave upravne na z osu (sl. 39.). U trodimenzionom prostoru to su strujne ravni $z = \text{const.}$, koje se dobivaju obrtanjem strujnih linija oko z ose.



Sl. 39

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi = C$, odnosno $r = C$, pa vidimo da su prave paralelne z osi u ravni strujanja. U trodimenzionom prostoru to su cilindarske površi koje se dobivaju obrtanjem ekvipotencijalnih linija oko z ose.

Koristeći (27.4), za projekcije brzine dobivamo

$$v_{(r)} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{a}{r}, \quad v_{(z)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

pa je intenzitet brzine

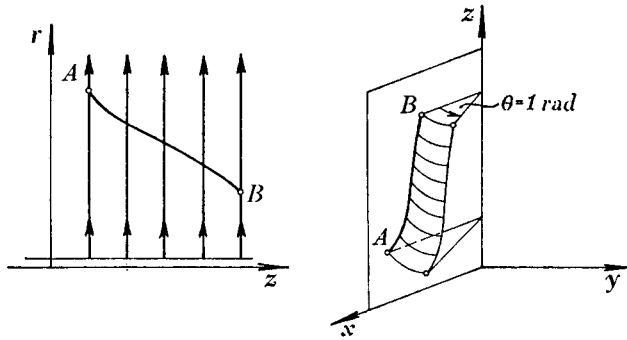
$$v = \frac{a}{r}.$$

Vidimo, dakle, da intenzitet brzine teži beskonačnosti kad r teži nuli, pa zaključujemo da su tačke z ose singularne tačke strujnog polja. Iz tog razloga z osu moramo izdvojiti iz strujnog polja (izdvojena oblast na slici 39). Prema tome, čestice fluida izviru (ili poniru) u tačkama z ose i radijalno se kreću u svim pravcima, ako se strujanje posmatra u trodimenzionom prostoru. Intenzitet brzine je obrnuto proporcionalan rastojanju od z ose i u graničnom procesu teži nuli kad r teži beskonačnosti.

Protok kroz krivu liniju u ravni strujanja, između dve na njoj proizvoljno izabrane tačke A i B (sl. 40), na osnovu (25.3) i (28.4), iznosi

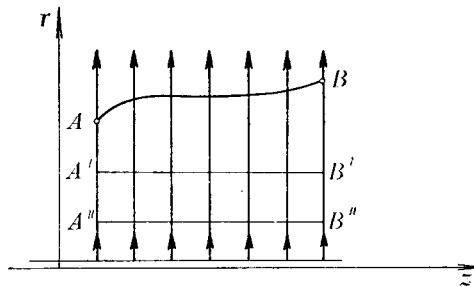
$$Q = \psi(B) - \psi(A) = a(z_B - z_A)$$

i vidimo da ne zavisi od oblika krive, već od vrednosti strujne funkcije u tačkama A i B .



Sl. 40

S obzirom da strujna funkcija ima iste vrednosti u svim tačkama strujne linije, zaključujemo da protok ima istu vrednost za sve krive između bilo koje dve tačke na strujnim linijama $z=z_A$ i $z=z_B$ (sl. 41). To znači da protok ima istu vrednost ako se umesto krive uzme odsečak prave $A'B'$ ili prave $A''B''$ između strujnih linija $z=z_A$ i $z=z_B$.



Sl. 41

Ako se strujanje posmatra u trodimenzionom prostoru, protok kroz obrtnu površ, koja se dobiva obrtanjem krive između tačaka A i B , iznosi

$$(28.5) \quad Q = 2 \pi a (z_B - z_A)$$

i, kao što vidimo, ne zavisi od oblika obrtne površi, tj. ima istu vrednost za sve obrtne površi između strujnih ravni $z=z_A$ i $z=z_B$. Protok će, dakle, imati istu vrednost ako za obrtnu površ uzmemo površ omotača kružnog cilindra proizvoljnog poluprečnika (sl. 42). S obzirom da poluprečnik cilindra može biti proizvoljno mali, zaključujemo: *Protok fluida kroz bilo koju obrtnu površ, između strujnih ravni $z=z_A$ i $z=z_B$, jednak je zapremini fluida koja u jedinici vremena izađe iz dužine $z_B - z_A$ z ose.*

Iz (28.5) konstantu a možemo izraziti u obliku

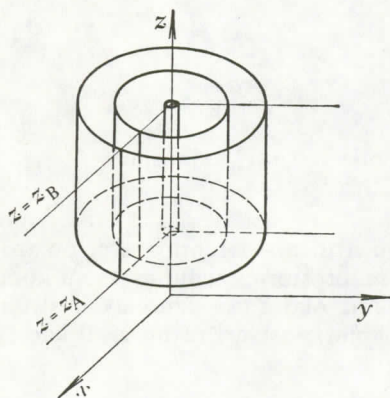
$$a = \frac{1}{2 \pi} \frac{Q}{z_B - z_A} = \frac{\varepsilon}{2 \pi},$$

gde je ϵ zapremina fluida koja u jedinici vremena izađe iz jedinice dužine z ose i naziva se *specifična izdašnost*. Prema tome, potencijal brzine (28.3) i strujnu funkciju (28.4) možemo sada izraziti u obliku

$$(28.6) \quad \varphi = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{\epsilon}{2\pi} z,$$

a protok kroz proizvoljnu obrtnu površ između strujnih ravni $z=z_A$ i $z=z_B$ u obliku

$$Q = \epsilon(z_B - z_A).$$



Sl. 42

S obzirom da su potencijal brzine i strujna funkcija jednoznačne funkcije položaja, cirkulacija i protok su jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu liniju u ravni strujanja. Pri tome treba imati na umu da u ravni strujanja ne može postojati zatvorena kriva linija koja obuhvata singularitete.

Ako ovo strujanje posmatramo u trodimenzionom prostoru, očigledno je da se može proučavati i kao ravansko, što smo i učinili u odeljku 21. Prema izloženom, vidi se da se dolazi do istih rezultata u trodimenzionom prostoru, bez obzira da li se strujanje proučava kao ravansko ili osnosimetrično. Da je to tako vidi se i iz fizičkih koordinata tenzora brzine deformacije, koje su, s obzirom na napred date projekcije brzine, u ovom slučaju oblika

$$\{d_{ij}\} = \frac{\epsilon}{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pa se vidi da su identične sa onim koje smo dobili u odeljku 21. Prema tome, fluidni delići će se deformisati na način prikazan na slici 29, pri čemu im se zapremina ne menja, jer je, s obzirom da je fluid nestišljiv, brzina kubne dilatacije jednaka nuli, tj.

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\dot{d}v}{dv} = d_{\langle rr \rangle} + d_{\langle \theta\theta \rangle} + d_{\langle zz \rangle} = \frac{\epsilon}{2\pi} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \right) \equiv 0.$$

c) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora.* Ako je potencijalno osnosimetrično strujanje određeno potencijalom brzine

$$(28.7) \quad \varphi = -a \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad (a = \text{const.}),$$

za strujnu funkciju, koristeći (27.9), dobivamo

$$\psi = a \int_0^z \frac{r^2 dz}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

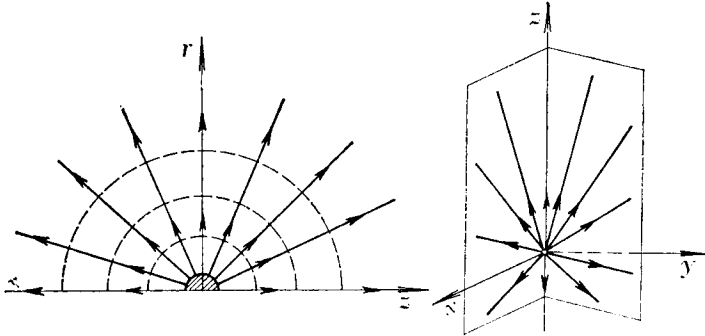
odnosno

$$(28.8) \quad \psi = a \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$z = Cr,$$

pa vidimo da su to u ravni strujanja poluprave koje polaze iz koordinatnog početka (sl. 43). U trodimenzionom prostoru, međutim, to su konusne površi koje se dobivaju obrtanjem strujnih linija oko z ose. Izuzetak je strujna površ koju obrtanjem obrazuje nulta strujnica, koja je ustvari ravan $z=0$ kao specijalni slučaj konusne površi.



Sl. 43

Jednačine ekvipotencijalnih linija su $\varphi = C$, odnosno

$$r^2 + z^2 = C^2,$$

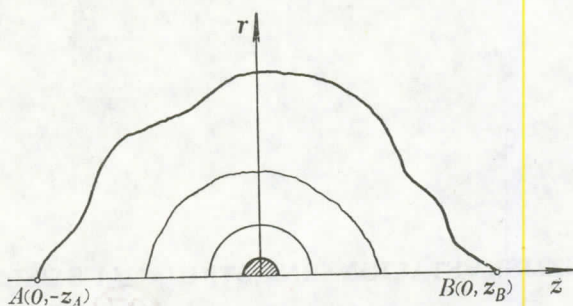
pa vidimo da su to krugovi u ravni strujanja sa centrom u koordinatnom početku. U prostoru od tri dimenzije ekvipotencijalne površi su koncentrične sfere.

Projekcije brzine, na osnovu (27.4) i (28.7), su

$$v_{(r)} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = a \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}}, \quad v_{(z)} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = a \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}},$$

pa vidimo da je koordinatni početak singularna tačka strujnog polja, tj. da strujno polje nije jednostruko povezano. Prema tome, zaključujemo da fluid u koordinatnom

početku izvire (ili ponire) i da se čestice fluida radijalno kreću u svim pravcima, pri čemu intenzitet brzine teži beskonačnosti kad r i z (istovremeno) teže nuli, a teži nuli kad r ili z teži beskonačnosti.



Sl. 44

Ako u ravni strujanja uočimo proizvoljnu krivu koja spaja tačke $A(0, -z_A)$ i $B(0, z_B)$ (sl. 44), tada, na osnovu (25.3), protok kroz tu krivu iznosi

$$Q = \psi(B) - \psi(A) = a \left[\left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_B - \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)_A \right],$$

odnosno

$$Q = 2a,$$

pa vidimo da ne zavisi od oblika krive ni od položaja tačaka A i B na z osi (bitno je samo da se te tačke nalaze sa različitih strana od izvora). Prema tome, protok će imati istu vrednost i za polukrug proizvoljnog poluprečnika sa centrom u koordinatnom početku.

Protok kroz obrtnu površ koja se dobiva obrtanjem oko z ose krive između tačaka A i B u ravni strujanja (sl. 44) jednak je, prema tome, protoku kroz bilo koju sfernu površ čiji je centar u koordinatnom početku i iznosi

$$Q = 4a\pi.$$

S obzirom da se može uzeti sfera proizvoljno malog poluprečnika, zaključujemo da je protok jednak izdašnosti izvora, tj.

$$\varepsilon = 4a\pi,$$

pa potencijal brzine i strujnu funkciju možemo pisati u obliku

$$\varphi = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}},$$

pri čemu pozitivna vrednost izdašnosti ε odgovara izvoru, a negativna ponoru.

Pošto su potencijal brzine i strujna funkcija jednoznačne funkcije položaja, cirkulacija i protok za bilo koju zatvorenu krivu u ravni strujanja jednaki su nuli, pri čemu opet moramo imati u vidu da u ravni strujanja (koja je, u stvari poluravan, za $r > 0$) ne može postojati zatvorena kriva koja obuhvata koordinatni početak.

III DVODIMENZIJSKA STACIONARNA STRUJANJA STIŠLJIVOG FLUIDA

27
29. Ravanska stacionarna strujanja stišljivog fluida. Kod stacionarnih strujanja, s obzirom da je $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$, jednačina konzervacije mase (3.10) se svodi na oblik

$$(29.1) \quad \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0.$$

Kod ravanskih strujanja, međutim, u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata sa metričkim tenzorom (17.2), ova jednačina je oblika

$$(29.2) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^1 \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^2 \right) = 0, \quad (\rho_0 = \text{const.}),$$

gde je $\sqrt{g} = \sqrt{g_{11} g_{22}}$, i mora biti zadovoljena u svim regularnim tačkama strujnog polja. Umesto ρ uveden je bezdimenzioni faktor $\frac{\rho}{\rho_0}$.

Diferencijalna jednačina strujnih linija,

$$v^1 dx^2 - v^2 dx^1 = 0,$$

nije egzaktna, pa je u slučaju strujanja stišljivih fluida moramo pomnožiti integracionim faktorom $\frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g}$, tako da je jednačina

$$\frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^1 dx^2 - \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^2 dx^1 = 0$$

integrabilna, jer se uslov njene integrabilnosti poklapa sa jednačinom konzervacije mase (29.2), koja je uvek zadovoljena. Prema tome, leva strana prethodne jednačine je totalni diferencijal strujne funkcije, tj.

$$(29.3) \quad d\psi = \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^1 dx^2 - \frac{\rho}{\rho_0} \sqrt{g} v^2 dx^1,$$

pa su konačne jednačine strujnih linija

$$(29.4) \quad \psi(x^1, x^2) = C.$$

Kako je, s druge strane, totalni diferencijal strujne funkcije

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial\psi}{\partial x^2} dx^2,$$

upoređivanjem sa (29.3), dobivamo

$$(29.5) \quad v^1 = \frac{\rho_0}{\rho \sqrt{g_{11} g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2}, \quad v^2 = -\frac{\rho_0}{\rho \sqrt{g_{11} g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1}.$$

Kovarijantne koordinate vektora brzine su

$$(29.6) \quad v_1 = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2}, \quad v_2 = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1},$$

a fizičke

$$(29.7) \quad v_{\langle 1 \rangle} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2}, \quad v_{\langle 2 \rangle} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1},$$

Jedina nezavisna i od nule različita kovarijantna koordinata tenzora vrtložnosti je

$$\omega_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x^2} - \frac{\partial v_2}{\partial x^1} \right),$$

za koju, koristeći (29.6), dobivamo

$$(29.8) \quad \omega_{12} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2} \right) \right],$$

pa je jedina od nule različita kontravarijantna koordinata vektora vrtložnosti

$$\omega^3 = \frac{1}{2} \varepsilon^{3jk} \omega_{jk} = \varepsilon^{312} \omega_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \omega_{12},$$

odnosno, koristeći (29.8),

$$(29.9) \quad 2\omega^3 = \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \left[\frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{22}}}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\sqrt{g_{11}}}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial\psi}{\partial x^2} \right) \right].$$

S obzirom da je $g_{33}=1$, ovo je ujedno i kovarijantna i fizička koordinata, i očigledno je možemo izraziti u ekvivalentnom obliku

$$(29.10) \quad 2\omega^3 = \frac{\rho_0}{\rho} \left[\Delta\psi - \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{g_{11}} \frac{\partial\rho}{\partial x^1} \frac{\partial\psi}{\partial x^1} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial\rho}{\partial x^2} \frac{\partial\psi}{\partial x^2} \right) \right]$$

ili, sažeto,

$$(29.11) \quad 2\omega^3 = \frac{\rho_0}{\rho} \left(\Delta\psi - \frac{1}{\rho} g^{ij} \frac{\partial\rho}{\partial x^i} \frac{\partial\psi}{\partial x^j} \right),$$

jer je $\frac{1}{g_{11}} = g^{11}$, $\frac{1}{g_{22}} = g^{22}$, $\frac{\partial\rho}{\partial x^3} = 0$ i $\frac{\partial\psi}{\partial x^3} = 0$.

Kad je strujanje potencijalno, tj. kad je

$$(29.12) \quad v_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \quad v_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x^2},$$

s obzirom da je vektor vrtložnosti jednak nuli, iz (29.9) vidimo da strujna funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(29.13) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\rho_0 \sqrt{g_{22}}}{\rho \sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\rho_0 \sqrt{g_{11}}}{\rho \sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

koju možemo napisati i u ekvivalentnom obliku

$$(29.14) \quad \rho \Delta \psi - \left(\frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \rho}{\partial x^1} \frac{\partial \psi}{\partial x^1} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \rho}{\partial x^2} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} \right) = 0,$$

ili, sažeto,

$$(29.15) \quad \rho \Delta \psi - g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \psi}{\partial x^j} = 0,$$

što neposredno sledi i iz (29.10), odnosno (29.11). Odavde se vidi da kad je fluid nestišljiv ($\rho = \text{const.}$) strujna funkcija zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu, tj. harmonijska je funkcija, što smo i ranije pokazali proučavajući ravanska potencijalna strujanja nestišljivog fluida.

Upoređivanjem (29.12) sa (29.6), vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija povezani diferencijalnim jednačinama

$$(29.16) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = - \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1},$$

koje su slične Koši-Rimanovim jednačinama za slučaj strujanja nestišljivih fluida.

Iz (29.12), kompozicijom sa odgovarajućim koordinatama metričkog tenzora, dobivamo kontravarijantne koordinate vektora brzine u obliku

$$(29.17) \quad v^1 = g^{11} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \quad v^2 = g^{22} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2},$$

pa, zamenjujući ih u jednačinu konzervacije mase (29.2), dobivamo diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava potencijal brzine:

$$(29.18) \quad \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{\rho \sqrt{g_{22}}}{\rho_0 \sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{\rho \sqrt{g_{11}}}{\rho_0 \sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \right) = 0.$$

Ovu jednačinu možemo napisati u ekvivalentnom obliku

$$(29.19) \quad \rho \Delta \varphi + \frac{1}{g_{11}} \frac{\partial \rho}{\partial x^1} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} + \frac{1}{g_{22}} \frac{\partial \rho}{\partial x^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = 0,$$

ili, sažeto,

$$(29.20) \quad \rho \Delta \varphi + g^{ij} \frac{\partial \rho}{\partial x^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} = 0,$$

pa vidimo da u slučaju nestišljivog fluida potencijal brzine zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu.

Za određivanje potencijala brzine i strujne funkcije može se iskoristiti sistem od dve diferencijalne jednačine (29.16) ili diferencijalne jednačine (29.13) i (29.18). Međutim, jednačine (29.13) i (29.18) nisu nezavisne od jednačina (29.16), jer se očigledno iz njih mogu dobiti ako diferenciranjem eliminišemo potencijal brzine φ , odnosno strujnu funkciju ψ . Istina, jednačine (29.13) i (29.18), što se funkcija φ i ψ tiče, nisu više spregnute, ali je zato povišen red jednačina. Za razliku od strujanja nestišljivog fluida, u pomenutim jednačinama, pored potencijala brzine i strujne funkcije, i gustina ρ figuriše kao nepoznata funkcija. Jasno je, međutim, da iz sistema od dve jednačine ne možemo odrediti tri nepoznate funkcije. Prema tome, za određivanje svih nepoznatih funkcija nedostaje nam još jedna jednačina. U specijalnom slučaju, kad je fluid nestišljiv, ta jednačina je $\rho = \text{const.}$, pa prethodne jednačine, kao što smo i ranije videli, predstavljaju kompletan sistem za određivanje potencijala brzine i strujne funkcije.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da se kod ravanskih stacionarnih strujanja jednačina konzevacije mase može napisati u obliku (29.2).

2. Pokazati da se diferencijalne jednačine (29.13) i (29.18) mogu dobiti iz sistema (29.16) eliminacijom potencijala brzine φ , odnosno strujne funkcije ψ .

3. Ako je pri stacionarnom strujanju brzina kubne dilatacije jednaka nuli, pokazati da je gustina ista (konstantna) u tačkama strujnih linija, odnosno strujnih površi. Na osnovu toga izvesti zaključak da ne može postojati ravansko strujanje stišljivog fluida pri kome je brzina kubne dilatacije jednaka nuli.

4. Vektor \vec{a} , čije su kontravarijantne koordinate

$$\{a^i\} = \{-v_2, v_1, 0\}$$

gde su v_1 i v_2 kovarijantne koordinate vektora brzine, je u svakoj tački ravni strujanja upravan na vektor brzine, jer je, očigledno,

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = a^i v_i = -v_2 v_1 + v_1 v_2 \equiv 0.$$

Pokazati da će, u slučaju stacionarnih ravanskih strujanja stišljivog fluida, vektorskom polju \vec{a} odgovarati vektorske linije, upravne na strujne linije, ako je zadovoljena jednačina (29.13).

5. Odrediti uslov pod kojim će vektorsko polje \vec{a} iz prethodnog zadatka imati vektorske linije, upravne na strujne linije, u slučaju kada jednačina (29.13) nije zadovoljena, tj. kada stacionarno ravansko strujanje stišljivog fluida nije potencijalno.

30. **Osnosimetrična stacionarna strujanja stišljivog fluida.** Kod osnosimetričnih stacionarnih strujanja stišljivog fluida, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata sa metričkim tenzorom (24.1), jednačina konzervacije mase (29.1) se može napisati u obliku

$$(30.1) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho}{\rho_0} r v_r \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{\rho_0} r v_z \right) = 0, \quad (\rho_0 = \text{const.}),$$

jer, kao što smo videli, nema razlike između kontravarijantnih, kovarijantnih i fizičkih koordinata vektora brzine.

Diferencijalna jednačina strujnih linija,

$$v_z dr - v_r dz = 0,$$

nije integrabilna, pa je moramo pomnožiti integracionim faktorom $\frac{\rho}{\rho_0} r$, tako da je

$$(30.2) \quad d\psi = \frac{\rho}{\rho_0} r v_z dr - \frac{\rho}{\rho_0} r v_r dz,$$

na osnovu čega dobivamo konačne jednačine strujnih linija u obliku

$$(30.3) \quad \psi(r, z) = C.$$

Koristeći (30.2), projekcije brzine možemo izraziti preko strujne funkcije u obliku

$$(30.4) \quad v_r = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v_z = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

na osnovu čega za jedinu nezavisnu i od nule različitu koordinatu tenzora vrtložnosti dobivamo

$$(30.5) \quad \omega_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right].$$

Jedina od nule različita kontravarijantna koordinata vektora vrtložnosti je

$$\omega^\theta = \varepsilon^{\theta rz} \omega_{rz} = -\frac{1}{r} \omega_{rz},$$

odnosno, ako iskoristimo (30.5),

$$(30.6) \quad 2\omega^\theta = -\frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right]$$

i možemo je, očigledno, izraziti u ekvivalentnom obliku

$$(30.7) \quad 2\omega^\theta = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r^2} \left[\left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \right].$$

Kad je strujanje potencijalno, tj. kad je

$$(30.8) \quad v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

vektor vrtložnosti je jednak nuli, pa iz (30.7) vidimo da strujna funkcija zadovoljava diferencijalnu jednačinu

$$(30.9) \quad \rho \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) - \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 0,$$

koja se, očigledno, za slučaj nestišljivih fluida svodi na (27.1).

Upoređivanjem (30.4) i (30.8), vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija povezani diferencijalnim jednačinama

$$(30.10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}.$$

Zamenjujući komponente brzine (30.8) u jednačini konzervacije mase (30.1), dobivamo diferencijalnu jednačinu koju zadovoljava potencijal brzine:

$$(30.11) \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho}{\rho_0} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\rho}{\rho_0} r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) = 0$$

i možemo je, očigledno, napisati u obliku

$$(30.12) \quad \rho \Delta \varphi + \frac{\partial \rho}{\partial r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial \rho}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

odakle vidimo da u slučaju nestišljivih fluida potencijal brzine zadovoljava Laplasovu diferencijalnu jednačinu.

Za određivanje potencijala brzine i strujne funkcije na raspolaganju nam je sistem diferencijalnih jednačina (30.10) ili diferencijalne jednačine (30.9) i (30.11). Međutim, kao i u slučaju ravanskih strujanja, i u ovom slučaju jednačine (30.9) i (30.11) nisu nezavisne od jednačina (30.10), jer se očigledno iz njih mogu dobiti eliminacijom potencijala brzine φ , odnosno strujne funkcije ψ . Takođe, u tim jednačinama figuriše i gustina kao nepoznata funkcija, pa vidimo da nam za određivanje svih nepoznatih funkcija, φ , ψ i ρ , nedostaje još jedna jednačina.

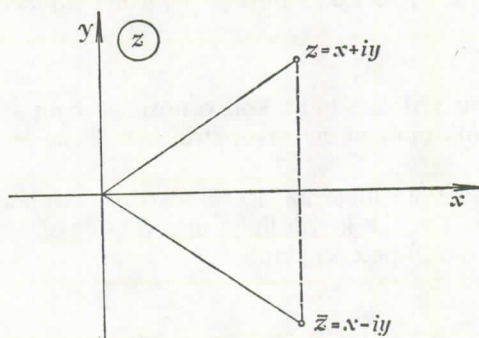
V e ž b a n j a

1. Pokazati da su vrtložne linije kod osnosimetričnih stacionarnih vrtložnih strujanja stišljivog fluida upravne na ravni strujanja, tj. da se pokalapaju sa θ koordinatnim linijama.

2. Pokazati da kod stacionarnih osnosimetričnih strujanja stišljivog fluida u ravni strujanja egzistira familija krivih linija upravnih na strujne linije, bez obzira da li je strujanje vrtložno ili potencijalno.

IV PRIMENA KOMPLEKSNIH FUNKCIJA KOD RAVANSKIH STRUJANJA NESTIŠLJIVIH FLUIDA

29
31. Kompleksni potencijal. Ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida, s obzirom da se odvija u trodimenzionom euklidskom prostoru, uvek je moguće proučavati u odnosu na sistem Dekartovih pravougljih koordinata x, y, z . Ako se još sistem Dekartovih pravougljih koordinata tako izabere da koordinatne ravni $z = \text{const.}$ budu ravni u kojima je strujanje identično, onda je dovoljno strujanje proučiti u jednoj od tih ravni, recimo $z = 0$, koja se naziva osnovna ravan strujanja.



Sl. 45

Položaj tačke u toj ravni određen je, prema tome, Dekartovim pravougljim koordinatama x i y . Ako osnovnu ravan strujanja uzmemo za kompleksnu ravan, onda je položaj tačke u toj ravni određen kompleksnim brojem $z = x + iy$ (sl. 45), gde je $i = \sqrt{-1}$ imaginarna jedinica. Njoj simetrična tačka u odnosu na x osu određena je konjugovano kompleksnim brojem $\bar{z} = x - iy$, tako da je

$$z + \bar{z} = 2x, \quad z - \bar{z} = 2iy,$$

odnosno

$$(31.1) \quad x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad y = -\frac{i}{2}(z - \bar{z}).$$

Ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida, videli smo, u potpunosti je određeno potencijalom brzine i strujnom funkcijom, koje su povezane Koši-Rimanovim jednačinama

$$(31.2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Za funkciju

$$(31.3) \quad w = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

mogli bismo zaključiti, na osnovu (31.1), da zavisi od promenljivih z i \bar{z} . Pokazaćemo, međutim, da važi sledeći s t a v: Kompleksna funkcija čiji realni i imaginarni deo zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine je funkcija kompleksne promenljive z .

D o k a z. Parcijalnim diferenciranjem po \bar{z} , iz (31.3) dobivamo

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} + i \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \bar{z}},$$

odnosno, s obzirom na (31.1),

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y}.$$

Ako sada iskoristimo Koši-Rimanove jednačine, pa, na primer, parcijalne izvode potencijala brzine izrazimo preko parcijalnih izvoda strujne funkcije, dobivamo

$$\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{i}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

na osnovu čega zaključujemo da funkcija w ne zavisi od \bar{z} . Prema tome je

$$(31.4) \quad w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y),$$

tj. funkcija (31.3) je kompleksna funkcija kompleksne promenljive $z = x + iy$, čime je stav dokazan.

Funkcija (31.4), čiju su realni i imaginarni deo potencijal brzine i strujna funkcija, naziva se kompleksni potencijal i u potpunosti određuje ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida.

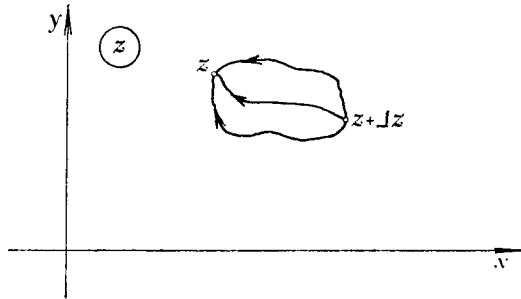
Iz teorije kompleksnih funkcija je poznato da su funkcije kompleksne promenljive čiji su realni i imaginarni delovi diferencijabilni i zadovoljavaju Koši-Rimanove jednačine — diferencijabilne, tj. da spadaju u klasu tzv. *analitičkih funkcija*. Prema tome, sledi s t a v: *Kompleksni potencijal je analitička kompleksna funkcija kompleksne promenljive.*

D o k a z. Svakoј tački kompleksne ravni, koja je određena kompleksnim brojem z , odgovara vrednost kompleksnog potencijala $w(z)$. Ako u kompleksnoj ravni uočimo dve bliske tačke z i $z + \Delta z$ (sl. 46), tada im odgovaraju vrednosti kompleksnog potencijala $w(z)$ i $w(z + \Delta z)$. Razlika vrednosti kompleksnog potencijala u tim tačkama je

$$\Delta w = w(z + \Delta z) - w(z).$$

Granična vrednost

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{w(z + \Delta z) - w(z)}{\Delta z} = \frac{dw}{dz},$$



Sl. 46

definiše izvod kompleksnog potencijala u tački $z = x + iy$. Na osnovu (31.4), možemo pisati

$$\frac{dw}{dz} = \frac{d\varphi + id\psi}{dx + idy} = \frac{d\varphi + id\psi}{dx(1 + iy')},$$

gde je $y' = \frac{dy}{dx}$ koeficijent pravca kojim se u graničnom procesu vrši približavanje tački z . Kako je, dalje,

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y} dy, \quad d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x} dx + \frac{\partial\psi}{\partial y} dy,$$

dobivamo

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} y' + i \frac{\partial\psi}{\partial x} + i \frac{\partial\psi}{\partial y} y'}{1 + iy'},$$

i vidimo da izvod kompleksnog potencijala zavisi od pravca y' . Ako su, međutim, zadovoljene Koši-Rimanove jednačine, parcijalne izvode strujne funkcije možemo izraziti preko parcijalnih izvoda potencijala brzine, pa dobivamo

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\frac{\partial\varphi}{\partial x} (1 + iy') - i \frac{\partial\varphi}{\partial y} (1 + iy')}{1 + iy'},$$

odnosno

$$(31.5) \quad \frac{dw}{dz} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - i \frac{\partial\varphi}{\partial y},$$

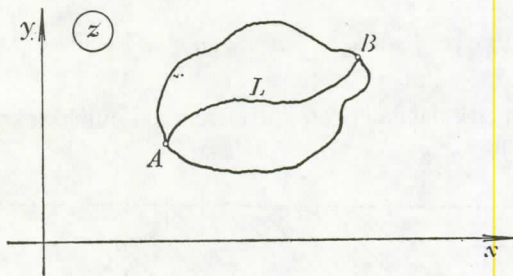
pa vidimo da izvod kompleksnog potencijala ne zavisi od pravca y' , tj. da je jednoznačno definisan. Prema tome, Koši-Rimanove jednačine predstavljaju potreban i dovoljan uslov da kompleksni potencijal bude analitička funkcija, čime je stav dokazan.

S obzirom da su parcijalni izvodi potencijala brzine jednaki projekcijama brzine na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata, iz (31.5) dobivamo

$$(31.6) \quad \frac{dw}{dz} = v_x - i v_y = \bar{v}.$$

Veličina \bar{v} , koja, kao što vidimo, određuje projekcije brzine na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata, naziva se *kompleksna brzina*. Njen realni deo je projekcija brzine na x osu, a imaginarni sa promenjenim znakom — na y osu. Iz (31.6) zaključujemo, prema tome, da važi s t a v: *Izvod kompleksnog potencijala u nekoj tački jednak je kompleksnoj brzini u toj tački.*

Kao posledica nezavisnosti izvoda kompleksnog potencijala od pravca, sledi s t a v: *Integral kompleksne brzine duž bilo koje krive između dve proizvoljno izabrane tačke u kompleksnoj ravni jednak je razlici vrednosti kompleksnog potencijala u tim tačkama i ne zavisi od oblika krive — putanje integracije.*



Sl. 47

D o k a z. Uočimo u kompleksnoj ravni dve tačke, A i B (sl. 47), koje se nalaze na proizvoljno izabranoj krivoj L . Krivolinijski integral

$$\int_{L(A)}^{L(B)} \bar{v} dz_{(L)},$$

možemo, s obzirom da izvod kompleksnog potencijala ne zavisi od pravca, tj. da važi (31.6), izraziti u obliku

$$\int_{L(A)}^{L(B)} \bar{v} dz_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} \frac{dw}{dz} dz_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} dw_{(L)},$$

odakle sledi

$$(31.7) \quad \int_{L(A)}^{L(B)} \bar{v} dz_{(L)} = w(B) - w(A),$$

čime je stav dokazan.

Kako je, međutim,

$$dw = d\varphi + id\psi,$$

na osnovu prethodnog stava dobivamo

$$(31.8) \quad \int_{L(A)}^{L(B)} \bar{v} dz_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} dw_{(L)} = \int_{L(A)}^{L(B)} d\varphi + i \int_{L(A)}^{L(B)} d\psi = J + iQ = w(B) - w(A),$$

odakle vidimo da se fluidna struja i protok dobivaju kao realni i imaginarni deo razlike kompleksnog potencijala u tačkama krive i da ne zavise od oblika krive — putanje integracije.

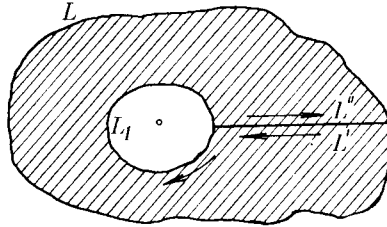
Kad je kriva L zatvorena, možemo primeniti **Košijevu teoremu** koja glasi: *Ako je $f(z)$ analitička funkcija u jednostruko povezanoj oblasti, integral te funkcije duž bilo koje zatvorene krive u toj oblasti jednak je nuli.* Prema tome, ako glatka kriva L obuhvata jednostruko povezanu oblast u kompleksnoj ravni, biće

$$\oint_L \bar{v} dz_{(L)} = 0,$$

odnosno

$$(31.9) \quad \oint_L \bar{v} dz_{(L)} = \oint_L dw_{(L)} = \oint_L d\varphi_{(L)} + i \oint_L d\psi = \Gamma + iQ = 0.$$

Vidimo, dakle, da su cirkulacija i protok uvek jednaki nuli ako kriva obuhvata jednostruko povezanu oblast.



Sl. 48

Ako, međutim, oblast koju obuhvata zatvorena kriva L sadrži singularitet, onda singularitet moramo izdvojiti drugom, proizvoljnom zatvorenom krivom L_1 (sl. 48) i na taj način formirati regularnu oblast (šrafirana prstenasta oblast na slici). Košijeva teorema se tada može primeniti, ali za krivu koja ograničava ovako formiranu regularnu oblast. Prema tome, dobivamo

$$\oint_L \bar{v} dz_{(L)} + \int_{L'} \bar{v} dz_{(L')} - \oint_{L_1} \bar{v} dz_{(L_1)} - \int_{L''} \bar{v} dz_{(L'')} = 0,$$

odnosno

$$(31.10) \quad \oint_L \bar{v} dz_{(L)} = \oint_{L_1} \bar{v} dz_{(L_1)}.$$

Kako kriva L_1 može ograničavati proizvoljno malu oblast u okolini singularne tačke, zaključujemo da su cirkulacija i protok za proizvoljnu krivu L koja obuhvata singularitet, na osnovu (31.9), jednaki jačini vrtloga, odnosno izdašnosti izvora.

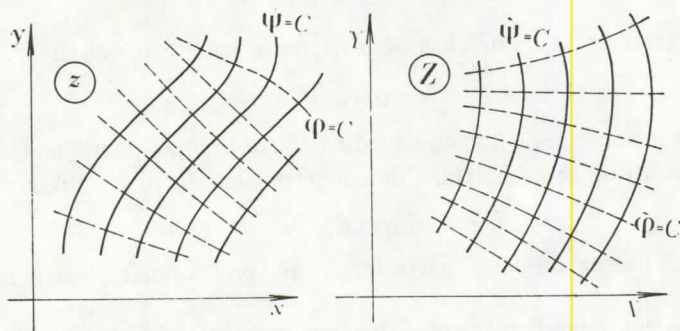
Ako, pak, zatvorena kriva L obuhvata konačan broj singulariteta, recimo N , tada je

$$(31.11) \quad \oint_L \bar{v} dz_{(L)} = \oint_{L_1} \bar{v} dz_{(L_1)} + \oint_{L_2} \bar{v} dz_{(L_2)} + \dots + \oint_{L_N} \bar{v} dz_{(L_N)},$$

gde su L_1, L_2, \dots, L_N proizvoljne zatvorene krive koje obuhvataju po jedan singularitet, pa na osnovu prethodnog zaključujemo: *Cirkulacija i protok za proizvoljnu zatvorenu krivu koja obuhvata konačan broj singulariteta jednaki su algebarskom zbiru jačina vrtloga, odnosno izdašnosti izvora koji se nalaze u tim singularitetima, tj.*

$$(31.12) \quad \begin{aligned} \Gamma &= \Gamma_1 + \Gamma_2 + \dots + \Gamma_K, \quad (K \leq N), \\ Q &= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_M, \quad (M \leq N). \end{aligned}$$

Osim navedenih, analitičke funkcije kompleksne promenljive poseduju još jednu osobinu koja ima veliku primenu u mehanici fluida. Poznato je, naime, da svaka analitička funkcija $Z=Z(z)$ konformno preslikava geometrijske objekte iz kompleksne ravni z u kompleksnu ravan Z . Osnovna karakteristika konformnog preslikavanja je što uglovi između preslikanih pravaca ostaju očuvani, a elementi luka proporcionalni, iz kog razloga se još naziva i *preslikavanje slično u malom* ili *preslikavanje po sličnosti u malom*. Ove osobine konformnog preslikavanja daju mogućnost da se iz nekog poznatog strujanja u kompleksnoj ravni z , konformnim preslikavanjima pomoću različitih analitičkih funkcija $Z=Z(z)$, odnosno $z=z(Z)$, dobiju nova strujanja u kompleksnoj ravni Z , jer se strujne i ekvipotencijalne linije preslikavaju u familiji međusobno ortogonalnih linija (sl. 49).



Sl. 49

Kompleksni potencijal strujanja u ravni Z dobiva se iz kompleksnog potencijala strujanja u ravni z na taj način što se promenljiva z zameni funkcijom preslikavanja, tj.

$$(31.13) \quad w(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y) = \tilde{w}[z(Z)] = \tilde{w}(Z) = \tilde{\varphi}(X, Y) + i\tilde{\psi}(X, Y),$$

gde su $\tilde{\varphi}(X, Y)$ i $\tilde{\psi}(X, Y)$ potencijal brzine i strujna funkcija strujanja u kompleksnoj ravni $Z=X(x, y) + iY(x, y)$. Iz (31.13) vidimo da je

$$(31.14) \quad \varphi(x, y) = \tilde{\varphi}(X, Y), \quad \psi(x, y) = \tilde{\psi}(X, Y),$$

pa zaključujemo da protok i fluidna struja, odnosno cirkulacija za preslikanu krivu imaju iste vrednosti, tj. preslikavanjem ne menjaju vrednosti, jer preslikanim strujnicama i ekvipotencijalnim linijama odgovara ista konstanta.

Kompleksna brzina u preslikanom strujanju je

$$(31.15) \quad \bar{V} = V_x - i V_y = \frac{d\tilde{w}}{dZ},$$

a kako je

$$(31.16) \quad \bar{v} = v_x - i v_y = \frac{dw}{dz} = \frac{d\tilde{w}}{dZ} \frac{dZ}{dz} = \bar{V} \frac{dZ}{dz} = (V_x - i V_y) \frac{dZ}{dz},$$

vidimo da je odnos kompleksnih brzina u nekoj tački prvog strujanja i odgovarajućoj tački preslikanog strujanja jednak vrednosti izvoda funkcije preslikavanja u toj tački.

Primena konformnog preslikavanja koristi se u mehanici fluida za rešavanje dva osnovna tipa zadataka:

1. Koristeći unapred izabranu funkciju preslikavanja, može se iz nekog poznatog strujanja odrediti kompleksni potencijal novog strujanja i na taj način omogućiti njegovo proučavanje.

2. Nalazeći analitičku funkciju koja nepoznato strujanje preslikava na neko proučeno, dakle poznato, može se, idući posle obrnutim redom, dobiti kompleksni potencijal nepoznatog strujanja i na taj način omogućiti njegovo proučavanje.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da se kompleksna brzina može izraziti u obliku

$$\bar{v} = v e^{i\vartheta},$$

gde je v intenzitet brzine, a ϑ ugao između vektora brzine i pozitivnog smera x ose.

2. Pokazati da se kompleksni potencijal može izraziti u obliku

$$w = R e^{i\Theta},$$

pri čemu se R i Θ na određeni način izražavaju preko potencijala brzine i strujne funkcije.

3. Koristeći Koši-Rimanove jednačine pokazati da su potencijal brzine i strujna funkcija harmonijske funkcije.

4. Pokazati da se izvod kompleksne brzine može izraziti u obliku

$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \frac{\partial v_x}{\partial x} - i \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{\partial v_y}{\partial y} - i \frac{\partial v_y}{\partial x}.$$

5. Pokazati da važe jednakosti

$$\frac{d\bar{v}}{dz} = \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} = -i \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}.$$

6. Ako je pri ravanskom potencijalnom strujanju nestišljivog fluida $v_x=0$, pokazati da je ono moguće ako i samo ako je $v_y=\text{const}$. Pokazati da važi i obrnuto.

7. Pokazati da pri konformnom preslikavanju uglovi između preslikanih pravaca ostaju očuvani, a elementi luka proporcionalni.

8. Pokazati da se pri konformnom preslikavanju nulta strujnica preslikava u liniju koja je opet nulta strujnica.

9. Pokazati da se pri konformnom preslikavanju zaustavna tačka ($\bar{v}=0$) preslikava u tačku koja je opet zaustavna tačka.

32. Kompleksni potencijali osnovnih strujanja. U odeljku 21. proučili smo primere osnovnih potencijalnih ravanskih strujanja nestišljivog fluida. U ovom odeljku, međutim, videćemo kako izgledaju kompleksni potencijali tih strujanja i na koji način ih određuju.

a) *Stacionarno pravolinijsko strujanje.* Ako je strujanje određeno kompleksnim potencijalom

$$(32.1) \quad w(z) = az,$$

gde je $a = a_1 - ia_2$ kompleksna konstanta, rastavljanjem na realni i imaginarni deo dobivamo

$$w(z) = (a_1 - ia_2)(x + iy) = a_1x + a_2y + i(-a_2x + a_1y),$$

pa su potencijal brzine i strujna funkcija, na osnovu (31.4),

$$(32.2) \quad \varphi = a_1x + a_2y, \quad \psi = -a_2x + a_1y,$$

što je identično sa (21.1) i (21.2).

Kompleksna brzina je

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = a = a_1 - ia_2,$$

odakle sledi

$$v_x = a_1, \quad v_y = a_2.$$

Cirkulacija i protok su jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu u kompleksnoj ravni (ravni strujanja), jer je kompleksna ravan jednostruko povezana oblast, pošto kompleksni potencijal nema u njoj singularnih tačaka.

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga.* Neka je strujanje određeno kompleksnim potencijalom

$$(32.3) \quad w(z) = -ia \ln z,$$

gde je a realna konstanta. Ako, međutim, u kompleksnoj ravni uvedemo polarne koordinate, tada je $z = re^{i\theta}$, pa za kompleksni potencijal dobivamo

$$w(z) = -ia \ln(re^{i\theta}) = -ia(\ln r + i\theta) = a\theta - ia \ln r,$$

odakle, na osnovu (31.4), vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija

$$(32.4) \quad \varphi = a\theta, \quad \psi = -a \ln r,$$

što je identično sa (21.3) i (21.4),

Iz (32.3) vidimo da kompleksni potencijal ima singularitet u tački $z=0$. Iz tog razloga cirkulacija i protok za bilo koju zatvorenu krivu koja ne obuhvata singularitet (koja, dakle, obuhvata jednostruko povezanu oblast), na osnovu (31.9) iznose

$$\Gamma + iQ = 0,$$

tj. jednaki su nuli.

Ako, međutim, zatvorena kriva obuhvata singularitet, na osnovu (31.10), vidimo da će cirkulacija i protok za tu krivu imati iste vrednosti kao i za bilo koju drugu zatvorenu krivu koja takođe obuhvata singularitet i određeni su relacijom

$$\Gamma + iQ = w(A') - w(A).$$

Kako je, međutim,

$$w(A) = a\theta_A - ia \ln r_A,$$

$$w(A') = a(\theta_A + 2\pi) - ia \ln r_A,$$

biće

$$\Gamma + iQ = 2a\pi,$$

odakle sledi

$$(32.5) \quad \Gamma = 2a\pi, \quad Q = 0.$$

Za konstantu a , prema tome, dobivamo

$$a = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

pa kompleksni potencijal (32.3) možemo izraziti u obliku

$$(32.6) \quad w(z) = -\frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

gde je Γ jačina vrtloga.

c) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora.* Ako je strujanje određeno kompleksnim potencijalom

$$(32.7) \quad w(z) = a \ln z,$$

gde je a realna konstanta, uvođenjem polarnih koordinata u kompleksnoj ravni, dobivamo

$$w(z) = a \ln(re^{i\theta}) = a(\ln r + i\theta) = a \ln r + ia\theta,$$

pa su potencijal brzine i strujna funkcija

$$(32.8) \quad \varphi = a \ln r, \quad \psi = a\theta,$$

što je identično sa (21.7) i (21.8).

S obzirom da je i u ovom slučaju tačka $z=0$ jedina singularna tačka kompleksnog potencijala, zaključujemo da su cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu koja ne obuhvata koordinatni početak, jer, kao i u prethodnom slučaju, ta kriva ograničava jednostruko povezanu oblast kompleksne ravni.

Za krivu koja obuhvata koordinatni početak, međutim, cirkulacija i protok su određeni relacijom

$$\Gamma + iQ = w(A') - w(A).$$

Kako je u ovom slučaju

$$w(A) = a \ln r_A + ia \theta_A,$$

$$w(A') = a \ln r_A + ia (\theta_A + 2\pi),$$

biće

$$\Gamma + iQ = i2a\pi,$$

odakle sledi

$$(32.9) \quad \Gamma = 0, \quad Q \equiv \varepsilon = 2a\pi.$$

Odavde, za konstantu a dobivamo

$$a = \frac{\varepsilon}{2\pi},$$

pa kompleksni potencijal (32.7) možemo izraziti, u obliku

$$(32.10) \quad w(z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln z,$$

gde je ε izdašnost izvora.

V e ž b a n j a

1. Diferenciranjem kompleksnog potencijala odrediti kompleksnu brzinu, pa na osnovu toga fizičke koordinate brzine u odnosu na sistem polarnih koordinata u ravni i to:

- a) kod strujanja u polju jednog vrtloga i
- b) kod strujanja u polju jednog izvora.

2. Odrediti fluidnu struju i protok za proizvoljnu krivu između tačaka $A(a, 0)$ i $B(0, b)$, za oba slučaja strujanja iz prethodnog zadatka.

33. Kompleksni potencijali zbirnih strujanja. U odeljku 22. smo pokazali da se ravanska potencijalna strujanja mogu sabirati na taj način što se potencijal brzine i strujna funkcija dobivaju sabiranjem potencijala brzine i strujnih funkcija komponentalnih strujanja. S obzirom da je kompleksni potencijal u potpunosti određen potencijalom brzine i strujnom funkcijom, jasno je da se kompleksni potencijal zbirnog strujanja dobiva sabiranjem kompleksnih potencijala komponentalnih strujanja. Prema tome, ako su $w_1(z)$, $w_2(z)$, \dots , $w_N(z)$ kompleksni potencijali N različitih strujanja, kompleksni potencijal njihovog zbirnog strujanja je

$$(33.1) \quad w(z) = w_1(z) + w_2(z) + \dots + w_N(z)$$

i rastavljajući ga na realni i imaginarni deo dobivamo potencijal brzine i strujnu funkciju zbirnog strujanja.

a) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga združenog sa izvorom.* Ako sabremo kompleksne potencijale strujanja u polju jednog vrtloga i strujanja u polju jednog izvora, (32.6) i (32.10), dobivamo

$$(33.2) \quad w(z) = \left(\frac{\Gamma}{2\pi i} + \frac{\varepsilon}{2\pi} \right) \ln z.$$

Uvodeći polarne koordinate, kompleksni potencijal možemo rastaviti na realni i imaginarni deo,

$$w(z) = \frac{1}{2\pi} (\varepsilon \ln r + \Gamma \theta) + \frac{i}{2\pi} (-\Gamma \ln r + \varepsilon \theta),$$

odakle za potencijal brzine i strujnu funkciju dobivamo

$$(33.3) \quad \varphi = \frac{1}{2\pi} (\varepsilon \ln r + \Gamma \theta), \quad \psi = \frac{1}{2\pi} (-\Gamma \ln r + \varepsilon \theta),$$

što su izrazi identični sa (23.1).

Kompleksna brzina je

$$\bar{v} = \frac{dw}{dz} = \frac{\varepsilon - i\Gamma}{2\pi z},$$

odnosno, ako je rastavimo na realni i imaginarni deo,

$$\bar{v} = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon x - \Gamma y}{x^2 + y^2} - \frac{i}{2\pi} \frac{\Gamma x + \varepsilon y}{x^2 + y^2},$$

odakle sledi

$$v_x = \frac{1}{2\pi} \frac{\varepsilon x - \Gamma y}{x^2 + y^2}, \quad v_y = \frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma x + \varepsilon y}{x^2 + y^2}.$$

S obzirom da je koordinatni početak jedina singularna tačka kompleksnog potencijala, lako je pokazati da su cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu koja ne obuhvata koordinatni početak, a jednaki jačini vrtloga, odnosno izdašnosti izvora ako kriva obuhvata koordinatni početak.

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora i jednog ponora jednakih izdašnosti.* Ako se izvor nalazi u tački $-a$, a ponor u tački a , gde je a realan broj, kompleksni potencijali strujanja u polju izvora i strujanja u polju ponora su $\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln(z+a)$ i $-\frac{\varepsilon}{2\pi} \ln(z-a)$, respektivno. Prema tome, kompleksni potencijal zbirnog strujanja, na osnovu (33.1), je

$$(33.4) \quad w(z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}.$$

Da bismo rastavili kompleksni potencijal na realni i imaginarni deo, uvedimo u kompleksnoj ravni polarne koordinate, tako da je

$$z+a = x+a+iy = r_1 e^{i\theta_1}, \quad z-a = x-a+iy = r_2 e^{i\theta_2},$$

gde je

$$r_1 = \sqrt{(x+a)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}.$$

$$\theta_1 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x+a}, \quad \theta_2 = \operatorname{arctg} \frac{y}{x-a},$$

Na taj način iz (33.4) dobivamo

$$w(z) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} + i \frac{\varepsilon}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2),$$

pa vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija

$$(33.5) \quad \varphi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{r_1}{r_2} = \frac{\varepsilon}{4\pi} \ln \frac{(x+a)^2 + y^2}{(x-a)^2 + y^2},$$

$$\psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \operatorname{arctg} \frac{-2ay}{x^2 + y^2 - a^2},$$

što je identično sa (23.3).

Iz (33.4) vidimo da kompleksni potencijal ima dva singulariteta: $z = -a$ i $z = a$. Na isti način kao i u prethodnim slučajevima, možemo pokazati da su cirkulacija i protok:

1. jednaki nuli ako zatvorena kriva ne obuhvata nijedan singularitet,
2. jednaki nuli i izdašnosti izvora, odnosno ponora, ako kriva obuhvata samo jedan singularitet i
3. jednaki nuli ako kriva obuhvata oba singulariteta.

c) *Stacionarno strujanje u polju jednog dvopola.* Ako je strujanje određeno kompleksnim potencijalom

$$(33.6) \quad w(z) = \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z},$$

rastavljanjem na realni i imaginarni deo, dobivamo

$$(33.7) \quad w(z) = \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi r} \cos \theta - i \frac{M}{2\pi r} \sin \theta,$$

odakle vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija

$$(33.8) \quad \varphi = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{M}{2\pi r} \cos \theta, \quad \psi = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2+y^2} = -\frac{M}{2\pi r} \sin \theta,$$

što je identično sa (23.5).

Kompleksni potencijal ima singularitet u tački $z=0$, pa zaključujemo da su cirkulacija i protok jednaki nuli za svaku zatvorenu krivu koja ne obuhvata koordinatni početak. Ako, međutim, kriva obuhvata koordinatni početak, cirkulacija i protok su određeni izrazom

$$\Gamma + iQ = w(A') - w(A).$$

Iz (33.7) vidimo da se vrednost kompleksnog potencijala neće promeniti posle obilaženja po krivoj, jer $\cos \theta$ i $\sin \theta$ ne menjaju vrednosti kad polarni ugao priraste za 2π , pa zaključujemo da su cirkulacija i protok jednaki nuli i za bilo koju zatvorenu krivu koja obuhvata koordinatni početak.

d) Stacionarno aciklično strujanje oko kružnog cilindra. Ako kod stacionarnog pravolinijskog strujanja sistem Dekartovih pravougljih koordinata tako izaberemo da je brzina paralelna x osi, kompleksni potencijal možemo napisati u obliku

$$(33.9) \quad w(z) = v_0 z,$$

gde je v_0 brzina jednolikog strujanja.

Ako sada saberemo stacionarno pravolinijsko strujanje sa stacionarnim strujanjem u polju jednog dvopola, na osnovu (33.1), sabiranjem kompleksnih potencijala (33.9) i (33.6), za kompleksni potencijal zbirnog strujanja dobivamo

$$(33.10) \quad w(z) = v_0 z + \frac{M}{2\pi} \cdot \frac{1}{z}.$$

Rastavljanjem kompleksnog potencijala na realni i imaginarni deo dobivamo

$$(33.11) \quad w(z) = x \left(v_0 + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) + i y \left(v_0 - \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

u Dekartovim pravougljim koordinatama, odnosno

$$(33.12) \quad w(z) = \left(v_0 r + \frac{M}{2\pi r} \right) \cos \theta + i \left(v_0 r - \frac{M}{2\pi r} \right) \sin \theta$$

u polarnim koordinatama. Odavde vidimo da su potencijal brzine i strujna funkcija

$$(33.13) \quad \varphi = x \left(v_0 + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right), \quad \psi = y \left(v_0 - \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right)$$

u Dekartovim koordinatama, odnosno

$$(33.14) \quad \varphi = \left(v_0 r + \frac{M}{2\pi r} \right) \cos \theta, \quad \psi = \left(v_0 r - \frac{M}{2\pi r} \right) \sin \theta$$

u polarnim koordinatama.

Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, odnosno

$$y \left(v_0 - \frac{M}{2\pi} \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C.$$

Jednačina nulte strujnice je

$$y = 0, \quad x^2 + y^2 = R^2,$$

gde je $R = \sqrt{\frac{M}{2\pi v_0}}$, pa vidimo da je to x osa i središnji krug poluprečnika R (sl. 50).

Strujne linije su simetrične prema osama x i y , kao što je prikazano na slici. Čestice fluida koje se kreću unutar kruga poluprečnika R ne napuštaju tu oblast, pa, ako to kretanje ne uzmemo u obzir, dobivamo strujanje oko kruga poluprečnika R , odnosno oko kružnog cilindra istog poluprečnika u trodimenzionom prostoru.

Iz izraza za poluprečnik R dobivamo

$$M = 2\pi v_0 R^2,$$

pa kompleksni potencijal (33.10) možemo izraziti u obliku

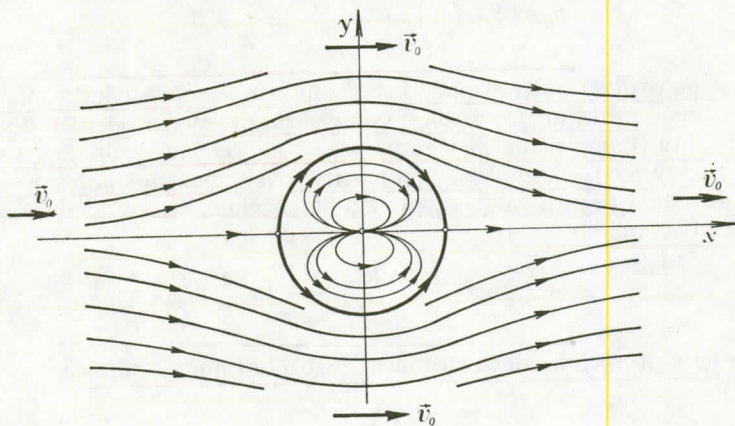
$$(33.15) \quad w(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right).$$

Odavde, za kompleksnu brzinu dobivamo

$$(33.16) \quad \bar{v} = \frac{dw}{dz} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right),$$

odakle sledi

$$(33.17) \quad v_x = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \cos 2\theta \right), \quad v_y = -v_0 \frac{R^2}{r^2} \sin 2\theta.$$



Sl. 50

Vidimo, dakle, da kad r teži beskonačnosti v_y teži nuli, a v_x teži v_0 . Prema tome, brzina u beskonačno udaljenim tačkama jednaka je brzini jednolikog strujanja. Na osnovu toga zaključujemo da unošenjem kružnog cilindra u jednoliko strujanje ono postaje poremećeno u svakoj konačnoj oblasti strujnog polja.

Iz (33.16) sledi da je kompleksna brzina jednaka nuli u tačkama $z = -R$ i $z = R$. Te tačke, su, prema tome, zaustavne tačke u strujnom polju. U prednjoj zaustavnoj tački, $z = -R$, nulta strujnica se razdvaja u dve strujnice koje se opet, u drugoj zaustavnoj tački, $z = R$, spajaju u jednu.

Iz (33.12) vidimo da je kompleksni potencijal jednoznačna funkcija položaja, pa su stoga cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju zatvorenu krivu u ravni strujanja, bez obzira da li ona obuhvata singularitet ili ne.

e) **Stacionarno ciklično strujanje oko kružnog cilindra.** Ako prethodnom strujanju dodamo stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga, jačine $-\Gamma$, koji se takođe nalazi u koordinatnom početku, kompleksni potencijal je, na osnovu (33.15) (32.6),

$$(33.18) \quad w(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z$$

i, u odnosu na sistem polarnih koordinata, možemo ga rastaviti na realni i imaginarni deo

$$w(z) = \left[v_0 r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \right] + i \left[v_0 r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \right],$$

pa za potencijal brzine i strujnu funkciju dobivamo

$$(33.19) \quad \varphi = v_0 r \left(1 + \frac{R^2}{r^2} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta, \quad \psi = v_0 r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln r.$$

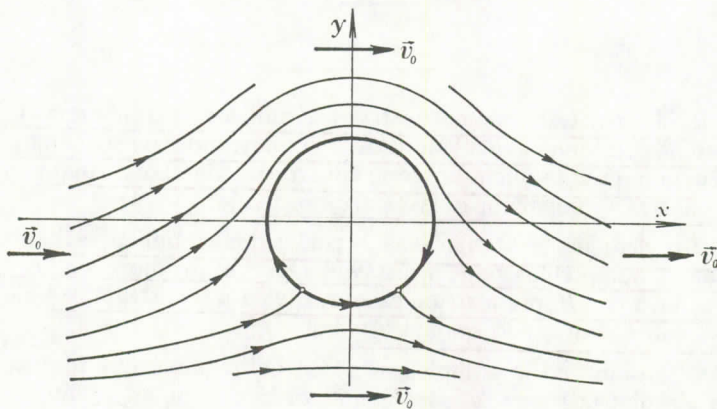
Jednačine strujnih linija su $\psi = C$, pa za $C = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln R$, dobivamo

$$(33.20) \quad v_0 r \left(1 - \frac{R^2}{r^2} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \ln \frac{r}{R} = 0.$$

Očigledno je da ovoj strujnici pripada i središnji krug $r=R$. Međutim, to nije nulta strujnica. Imajući, međutim, u vidu da je kompleksni potencijal određen do na proizvoljnu konstantu (kompleksnu ili realnu), jer su na taj način određeni i potencijal brzine i strujna funkcija, kompleksni potencijal uvek možemo napisati u takvom obliku da željena strujnica bude nulta. Na taj način, ako kompleksni potencijal (33.18) pišemo u obliku

$$(33.21) \quad w(z) = v_0 \left(z + \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R},$$

strujanje se neće promeniti, ali će strujnica (33.20) biti nulta strujnica.



Sl. 51

Iz (33.18) ili (33.21), diferenciranjem po z dobivamo kompleksnu brzinu u obliku

$$(33.22) \quad \bar{v} = v_0 \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z}.$$

Oдавde vidimo da će kompleksna brzina biti jednaka nuli u onim tačkama kompleksne ravni čiji kompleksni broj zadovoljava jednačinu

$$2 \pi v_0 z^2 + i \Gamma z - 2 \pi v_0 R^2 = 0.$$

Pošto je ovo kvadratna jednačina, njena rešenja, pa, prema tome, i položaj zaustavnih tačaka, zavisi od diskriminante

$$D = -\Gamma^2 + 16 \pi^2 v_0^2 R^2.$$

Stoga moramo razlikovati tri posebna slučaja:

1. Ako je $D > 0$, tj. $\Gamma < 4 \pi v_0 R$, kompleksna brzina je jednaka nuli u tačkama

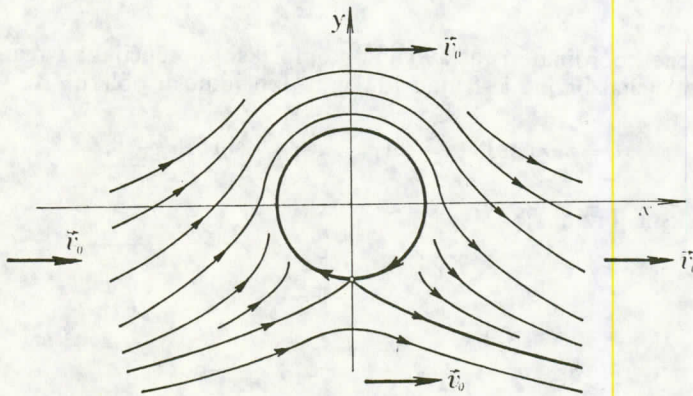
$$z_{1/2} = \pm \sqrt{R^2 - \frac{\Gamma^2}{16 \pi^2 v_0^2}} - \frac{i \Gamma}{4 \pi v_0}.$$

Lako je proveriti da je $|z_1| = R$ i $|z_2| = R$, pa zaključujemo da se zaustavne tačke nalaze na donjem polukrugu središnjeg kruga, simetrično raspoređene u odnosu na y osu (sl. 51).

2. Ako je $D = 0$, tj. $\Gamma = 4 \pi v_0 R$, kvadratna jednačina ima jedno rešenje

$$z_1 = z_2 = -\frac{i \Gamma}{4 \pi v_0} = -i R,$$

pa vidimo da se zaustavna tačka nalazi u preseku negativnog dela y ose i središnjeg kruga (sl. 52).



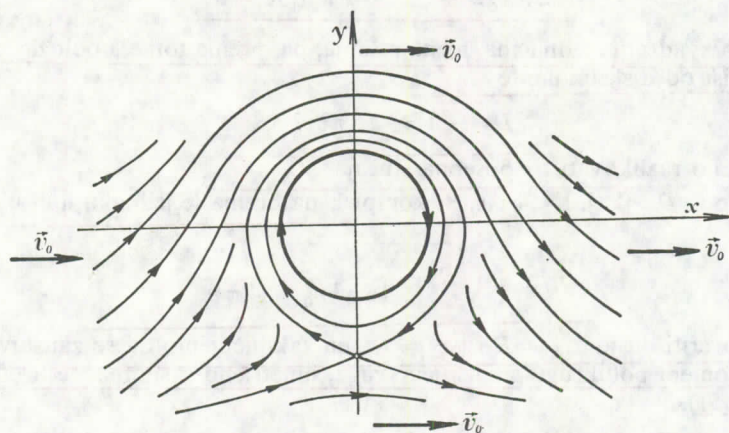
Sl. 52

3. Ako je, pak, $D < 0$, tj. $\Gamma > 4 \pi v_0 R$, kompleksna brzina je jednaka nuli u tačkama

$$z_{1/2} = \pm i \sqrt{\frac{\Gamma^2}{16 \pi^2 v_0^2} - R^2} - i \frac{\Gamma}{4 \pi v_0}.$$

Vidimo, dakle, da se obe zaustavne tačke nalaze na negativnom delu y ose, pri čemu se jedna od njih nalazi u središnjem krugu, a druga van njega (sl. 53).

Lako je pokazati da su cirkulacija i protok jednaki nuli za bilo koju krivu koja ne obuhvata koordinatni početak, a jednaki jačini vrtloga, odnosno nuli za bilo koju zatvorenu krivu koja ga obuhvata.



Sl. 53

f) *Izvori i ponori u stacionarnom pravolinijskom strujarju.* Ako saberemo stacionarno pravolinijsko strujanje sa stacionarnim strujanjem u polju jednog izvora, koji se nalazi u koordinatnom početku, kompleksni potencijal zbirnog strujanja je

$$(33.23) \quad w(z) = v_0 z + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z.$$

Uvodeći polarne koordinate i rastavlajući kompleksni potencijal na realni i imaginarni deo, potencijal brzine i strujnu funkciju dobivamo u obliku

$$(33.24) \quad \varphi = v_0 r \cos \theta + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln r, \quad \psi = v_0 r \sin \theta + \frac{\epsilon}{2\pi} \theta.$$

Kompleksna brzina je

$$(33.25) \quad \bar{v} = v_0 + \frac{\epsilon}{2\pi z},$$

odakle sledi

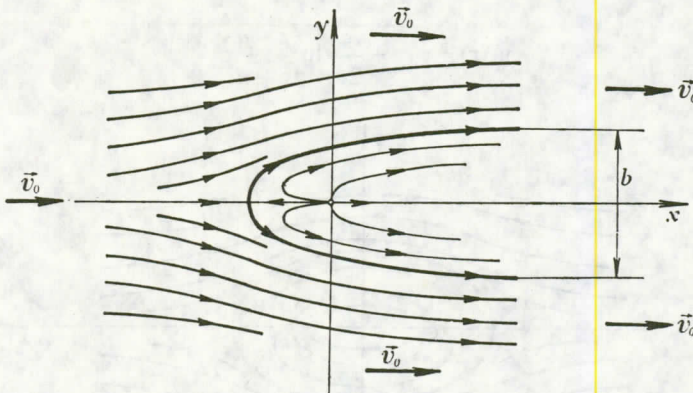
$$(33.26) \quad v_x = v_0 + \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} = v_0 + \frac{\epsilon}{2\pi r} \cos \theta,$$

$$v_y = \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{\epsilon}{2\pi r} \sin \theta.$$

Iz (33.25) dobivamo da je kompleksna brzina jednaka nuli u tački $z = -\frac{\epsilon}{2\pi v_0}$, koja je, prema tome, jedina zaustavna tačka u ravni strujanja (sl. 54). U toj tački strujna linija se razdvaja u dve strujnice koje se više ne spajaju i koje čine granicu između fluida iz izvora i fluida iz pravolinijskog strujanja. Strujna linija koja se u zaustavnoj

tački razdvaja u dve strujnice nije, međutim, nulta strujnica. Iz (33.24) zaključujemo, naime, da ona odgovara vrednosti strujne funkcije $\psi = C = \frac{\varepsilon}{2}$. S obzirom, međutim, da je strujna funkcija određena do na proizvoljnu konstantu, možemo joj dodati $-\frac{\varepsilon}{2}$, tako da postaje

$$(33.27) \quad \psi = v_0 r \sin \theta + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\theta - \pi),$$



Sl. 54

pa strujnica koja prolazi kroz zaustavnu tačku je nulta strujnica sa jednačinom

$$v_0 r \sin \theta + \frac{\varepsilon}{2\pi} (\theta - \pi) = 0,$$

odnosno

$$(33.28) \quad \theta = \pi \quad \text{i} \quad r = \frac{\varepsilon}{2\pi v_0} \frac{\pi - \theta}{\sin \theta}.$$

Grane nulte strujnice, koje po obliku podsećaju na paraboličku krivu, možemo posmatrati kao krutu granicu koja strujanje deli na dva dela. Ako zanemarimo strujanje unutar te granice (strujanje fluida iz izvora), dobivamo strujanje oko date krute konture u ravni strujanja, odnosno oko odgovarajućeg cilindričnog tela u trodimenzionom prostoru.

Iz (33.25), izračunavanjem granične vrednosti kad z teži beskonačnosti, zaključujemo da je brzina u beskonačno udaljenim tačkama ravni strujanja jednaka brzini v_0 jednolikog strujanja. Prema tome, i brzine čestica fluida koje izlaze iz izvora takođe su u beskonačno udaljenim tačkama jednake brzini jednolikog strujanja. Na osnovu toga zaključujemo da će širina konture koju obrazuje nulta strujnica — na slici 54 označena sa b — težiti konačnoj vrednosti. Jasno je, naime, da je protok fluida iz izvora, s obzirom da se ne meša sa fluidom iz jednolikog strujanja, jednak izdašnosti izvora i kroz širinu b u beskonačno udaljenim tačkama, tj.

$$b \cdot v_0 = \varepsilon.$$

Odavde sledi

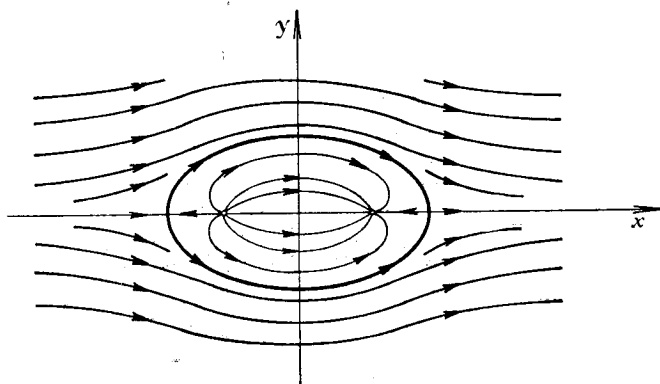
$$b = \frac{\varepsilon}{v_0}.$$

pa, pošto su ε i v_0 konačne veličine, zaključujemo da je to i b .

U ovom slučaju strujanja nulta strujnica nije zatvorena, pa cilindrično telo, koje se nalazi u jednolikoj struji, nije ograničeno. Zatvaranje nulte strujnice, međutim, može se postići ako strujanju dodamo i jedan ponor iste izdašnosti.

Ako, na primer, stacionarno pravolinijsko strujanje saberemo sa stacionarnim strujanjem u polju jednog izvora i jednog ponora istih izdašnosti, kompleksni potencijal je

$$(33.29) \quad w(z) = v_0 z + \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln \frac{z+a}{z-a}.$$



Sl. 55

S obzirom da su izdašnosti izvora i ponora jednake, jasno je da će sav fluid koji izlazi iz izvora ponirati u ponor, pa će, prema tome, u ravni strujanja postojati zatvorena strujna linija koja razdvaja fluid iz jednolikog strujanja od fluida iz izvora (sl. 55). Lako je pokazati da će u ovom slučaju u ravni strujanja biti dve zaustavne tačke. U prvoj se strujna linija razdvaja na dve, a u drugoj se te dve strujnice ponovo spajaju u jednu liniju. Ako zanemarimo strujanje fluida iz izvora, dobivamo strujanje oko zatvorene krive linije, koja po obliku podseća na elipsu, odnosno oko odgovarajućeg cilindričnog tela u trodimenzionom prostoru.

U cilju da se dobiju različiti oblici zadnjeg dela zatvorene konture, može se umesto jednog, iza izvora postaviti niz ponora pod uslovom jasno, da je zbir njihovih izdašnosti jednak izdašnosti izvora. Takođe da bi se dobili različiti oblici prednjeg dela konture, može se umesto jednog uzeti više izvora. Prema tome, u jednoliko strujanje možemo postaviti konačan broj izvora i konačan broj ponora, pa na taj način dobiti različite oblike zatvorene konture u ravni strujanja, odnosno ograničenog cilindričnog tela u trodimenzionom prostoru. Jedini uslov pri tome je da zbir izdašnosti izvora bude jednak zbiru izdašnosti ponora. Napomenimo, na kraju, da se može uzeti da su izvori i ponori neprekidno raspoređeni u određenim granicama duž bilo kojih linija u ravni strujanja. Na taj način, vidimo, ima neograničeno mnogo mogućnosti za formiranje različitih oblika cilindričnog tela koje se nalazi u jednolikoj struji ravanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida.

Vežbanja

1. Odrediti kompleksnu brzinu i projekcije brzine na ose Dekartovog pravouglonog sistema koordinata u slučaju stacionarnog strujanja u polju jednog izvora i jednog ponora jednakih izdašnosti.

2. Proučiti strujanje određeno kompleksnim potencijalom

$$w(z) = az + \frac{M}{2\pi} \frac{1}{z},$$

gde je $a = a_1 - ia_2$ kompleksna konstanta.

3. Odrediti položaj zaustavnih tačaka u slučaju strujanja određenog kompleksnim potencijalom (33.29), pa, zatim, jednačinu strujne linije na kojoj se one nalaze.

PRIMENA U MENANICI FLUIDA (32) (32)
 34. Primeri konformnog preslikavanja. U odeljku 31. je ukazano na osnovne karakteristike konformnog preslikavanja. Pri tome je istaknuto da se konformno preslikavanje primenjuje za rešavanje dva osnovna tipa zadatka. Sada ćemo, sa nekoliko primera, pokazati kako se ti zadaci rešavaju.

a) Preslikavanje stacionarnog pravolinijskog strujanja funkcijom $z = \ln Z$. Stacionarno pravolinijsko strujanje je, u kompleksnoj ravni z , određeno kompleksnim potencijalom $w(z) = v_0 z$, gde je v_0 brzina jednolikog strujanja (paralelnog x osi). Kompleksni potencijal u kompleksnoj ravni Z dobićemo ako promenljivu z zamenimo funkcijom preslikavanja, tj.

$$(34.1) \quad \tilde{w}(Z) = v_0 \ln Z.$$

Ovo je, kao što vidimo, kompleksni potencijal strujanja u polju jednog izvora koji se nalazi u koordinatnom početku. Prema tome, funkcijom $z = \ln Z$, stacionarno pravolinijsko strujanje u kompleksnoj ravni z preslikava se na strujanje u polju jednog izvora, izdašnosti $\varepsilon = 2\pi v_0$, u kompleksnoj ravni Z . Tačka $Z = 0$ je singularna tačka koja se ne preslikava konformno, jer joj u kompleksnoj ravni z odgovara beskonačno udaljena tačka.

Inverznom funkcijom, $Z = e^z$, strujanje u polju jednog izvora, izdašnosti ε , preslikava se u stacionarno pravolinijsko strujanje sa brzinom $v_0 = \frac{\varepsilon}{2\pi}$. Ako se, pak, izvor ne nalazi u koordinatnom početku, već u bilo kojoj tački $a = a_1 + ia_2$, funkcija preslikavanja je $z = \ln(Z - a)$, odnosno $Z = a + e^z$.

Ako se, pak, želi odrediti funkcija preslikavanja koja će poznato stacionarno pravolinijsko strujanje preslikati u poznato strujanje u polju jednog izvora, iskoristićemo činjenicu da su vrednosti kompleksnih potencijala iste u svim odgovarajućim tačkama kompleksnih ravni z i Z , tj. $w(z) = \tilde{w}(Z)$. Prema tome, dobivamo

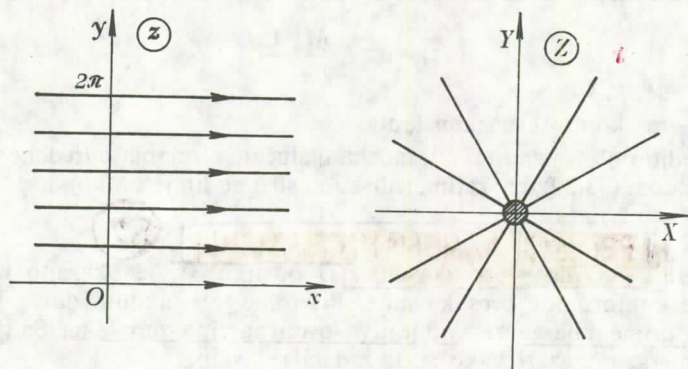
$$v_0 z = \frac{\varepsilon}{2\pi} \ln Z,$$

odakle je funkcija preslikavanja

$$z = \frac{\varepsilon}{2\pi v_0} \ln Z,$$

gde je v_0 brzina datog jednolikog strujanja, a ε izdašnost datog izvora.

Napomenimo, na kraju, da je, s obzirom da funkcija $\ln Z$ nije jednoznačna funkcija položaja, jer istoj tački $Z = Re^{i\theta} = Re^{i(\theta + 2k\pi)}$ odgovaraju različite vrednosti funkcije, dovoljno iz jednolikog strujanja preslikati samo interval $0 \leq y \leq 2\pi$ (sl. 56). Strujne linije van tog intervala preslikavaju se u već preslikane strujnice.



Sl. 56

b) Preslikavanje stacionarnog strujanja u polju jednog izvora funkcijom $z = \frac{1}{Z}$.

Ako se izvor nalazi u tački $z = -a$, gde je a realan broj, kompleksni potencijal u kompleksnoj ravni z je

$$w(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z + a).$$

Koristeći funkciju preslikavanja $z = \frac{1}{Z}$, za kompleksni potencijal u kompleksnoj ravni Z dobivamo

$$\tilde{w}(Z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{Z} + a\right),$$

i, ako ga napišemo u obliku

$$\tilde{w}(Z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(a - \frac{1}{Z}\right),$$

odnosno, s obzirom da je kompleksni potencijal određen do na proizvoljnu konstantu, u obliku

$$\tilde{w}(Z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{Z + \frac{1}{a}}{Z}\right)$$

vidimo da određuje strujanje u polju jednog izvora i jednog ponora istih izdašnosti.

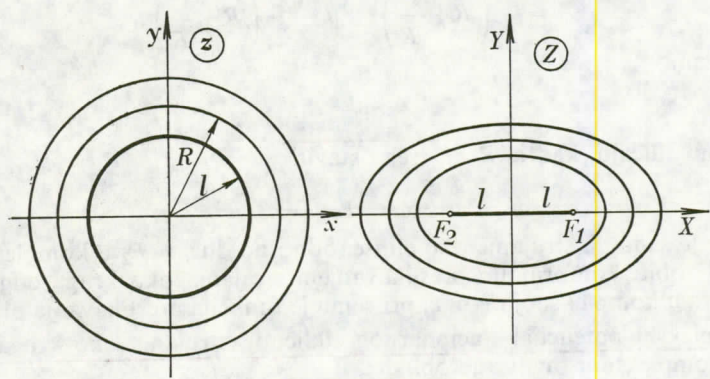
Izvor se nalazi u tački $Z = -\frac{1}{a}$, a ponor u tački $Z = 0$.

c) **Stacionarno strujanje oko eliptičkog cilindra i ravne ploče.** Analitička funkcija, koja određuje transformaciju Žukovskog,

$$(34.2) \quad Z = \frac{1}{2} \left(z + \frac{l^2}{z} \right), \quad (l = \text{const.})$$

konformno preslikava središnji krug poluprečnika $R=l$ u kompleksnoj ravni z u odsečak realne ose dužne $2l$ u kompleksnoj ravni Z , a koncentrične krugove poluprečnika $R>l$ konformno preslikava u konfokalne elipse čije je fokusno rastojanje jednako $2l$ (sl. 57). Da bismo to pokazali, uočimo bilo koji središnji krug u kompleksnoj ravni z , čiji je poluprečnik R veći od l . Tačke koje se nalaze na tom krugu zadovoljavaju jednačinu

$$(34.3) \quad z = R e^{i\theta}.$$



Sl. 57

Da bismo dobili jednačinu krive na koju se ovaj krug preslikava u kompleksnoj ravni Z , zamenićemo (34.3) u (34.2). Na taj način dobivamo

$$(34.4) \quad Z = \frac{1}{2} \left(R e^{i\theta} + \frac{l^2}{R} e^{-i\theta} \right).$$

Posebno, ako je $R=l$, biće

$$Z = \frac{1}{2} l (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = l \cos \theta,$$

odnosno

$$X = l \cos \theta, \quad Y = 0,$$

što je odsečak realne ose dužine $2l$ u intervalu $-l \leq X \leq l$.

Ako je, međutim, $R>l$, s obzirom da je $Z=X+iY$, iz (34.4) dobivamo

$$X = \frac{1}{2} \left(R + \frac{l^2}{R} \right) \cos \theta, \quad Y = \frac{1}{2} \left(R - \frac{l^2}{R} \right) \sin \theta,$$

što su parametarske jednačine elipse. Eliminacijom parametra θ biće jednačina elipse

$$\frac{X^2}{\frac{1}{4} \left(R + \frac{l^2}{R} \right)^2} + \frac{Y^2}{\frac{1}{4} \left(R - \frac{l^2}{R} \right)^2} = 1.$$

Ako sa λ i μ označimo poluose elipse ($\lambda > \mu$), dobivamo

$$\lambda^2 - \mu^2 = l^2.$$

Kako je, međutim, $\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} = l$ rastojanje fokusa elipse od koordinatnog početka, zaključujemo da su fokusi F_1 i F_2 u tačkama $Z = l$ i $Z = -l$, respektivno, pa je fokusno rastojanje jednako $2l$. Položaj fokusa, pa, prema tome i rastojanje između njih, ne zavisi od R , pa zaključujemo da su isti za sve preslikane elipse, tj. one su konfokalne. Takođe, s obzirom da je

$$\lambda = \frac{1}{2} \left(R + \frac{l^2}{R} \right), \quad \mu = \frac{1}{2} \left(R - \frac{l^2}{R} \right),$$

lako dobivamo

$$(34.5) \quad \lambda + \mu = R.$$

U posebnom slučaju, kad je $R = l$, treba staviti

$$(34.6) \quad \lambda = l, \quad \mu = 0.$$

Jasno je sada da strujanje oko elipse, odnosno duži $\overline{F_1 F_2}$ u kompleksnoj ravni Z možemo dobiti konformnim preslikavanjem strujanja oko kruga odgovarajućeg poluprečnika u kompleksnoj ravni z , pri čemu je funkcija preslikavanja oblika (34.2)

Kompleksni potencijal stacionarnog cikličnog strujanja oko kruga poluprečnika R u kompleksnoj ravni z je oblika

$$(34.7) \quad w(z) = az + a \frac{-R^2}{z} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln z,$$

gde je $a = a_1 - ia_2$ kompleksna brzina jednolikog strujanja, tj. kompleksna brzina u beskonačno udaljenim tačkama kompleksne ravni z , a $a = a_1 + ia_2$. Za $R > l$, ovo se strujanje preslikava, funkcijom (34.2), na strujanje oko elipse čije su poluose λ i μ u kompleksnoj ravni Z određene poluprečnikom R . Da bismo dobili kompleksni potencijal cikličnog strujanja oko elipse u kompleksnoj ravni Z , potrebno je da u (34.7) promenljivu z zamenimo funkcijom preslikavanja. Iz (34.2), međutim, dobivamo

$$(34.8) \quad z = Z + \sqrt{Z^2 - l^2},$$

pri čemu pred kvadratnim korenom uzimamo samo pozitivni znak, jer odgovara preslikavanju tačaka na krugu i tačaka spoljašnje oblasti kruga u tačke na elipsi i tačke spoljašnje oblasti elipse. Kada bismo, naime, pred kvadratnim korenom uzeli negativni znak, tj.

$$z = Z - \sqrt{Z^2 - l^2} = \frac{l^2}{Z + \sqrt{Z^2 - l^2}},$$

vidimo da tački $z = 0$ odgovaraju beskonačno udaljene tačke u kompleksnoj ravni Z , tj. tačke iz unutrašnje oblasti kruga preslikavaju se u tačke spoljašnje oblasti elipse.

Ako sada (34.8) zamenimo u (34.7) i pri tome iskoristimo (34.5), dobivamo kompleksni potencijal cikličnog strujanja oko elipse u kompleksnoj ravni Z u obliku

$$\tilde{w}(Z) = a(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}) + \bar{a} \frac{(\lambda + \mu)^2}{Z + \sqrt{Z^2 - l^2}} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}),$$

odnosno

$$\tilde{w}(Z) = a(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}) + \bar{a} \frac{(\lambda + \mu)^2}{l^2} (Z - \sqrt{Z^2 - l^2}) + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}).$$

U ovom izrazu, međutim, a je kompleksna brzina u beskonačno udaljenim tačkama kompleksne ravni z , tj. kompleksna brzina jednolikog strujanja oko kruga. Da bismo u prethodnom izrazu uveli kompleksnu brzinu u beskonačno udaljenim tačkama kompleksne ravni Z , tj. kompleksnu brzinu jednolikog strujanja oko elipse, podsetimo se da je odnos kompleksnih brzina u preslikanim tačkama jednak vrednosti izvoda funkcije preslikavanja u preslikanoj tački. Prema tome, ako sa $A = A_1 - iA_2$ označimo kompleksnu brzinu u beskonačno udaljenim tačkama kompleksne ravni Z , na osnovu (31.16) dobivamo

$$a = A \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{dZ}{dz}.$$

Kako je, međutim, iz (34.2),

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{R^2}{z^2} \right),$$

biće

$$a = \frac{A}{2},$$

pa kompleksni potencijal možemo pisati u obliku

$$(34.9) \quad \tilde{w}(Z) = \frac{1}{2} \left[A(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}) + \bar{A} \frac{(\lambda + \mu)^2}{l^2} (Z - \sqrt{Z^2 - l^2}) \right] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}).$$

Oдавde je lako proveriti da je

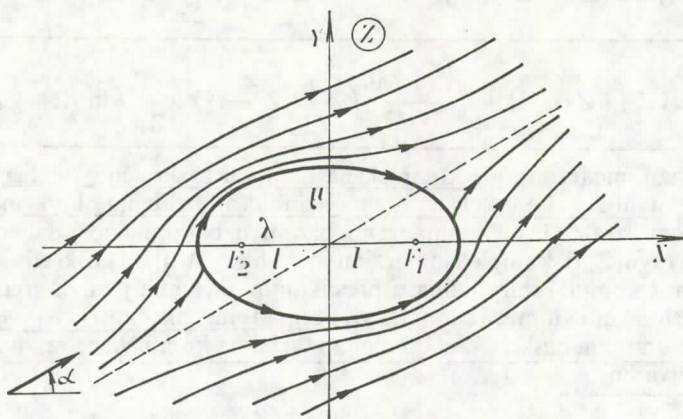
$$\lim_{z \rightarrow \infty} \bar{V} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{d\tilde{w}(Z)}{dZ} = A = A_1 - iA_2.$$

Kompleksnim potencijalom (34.9) u potpunosti je određeno stacionarno ciklično strujanje nestišljivog fluida oko elipse, odnosno eliptičkog cilindra u trodimenzionom prostoru, pri čemu su λ i μ poluose elipse, l polovina fokusnog rastojanja i A kompleksna brzina u beskonačno udaljenim tačkama. Jasno je da umesto l^2 u izrazu (34.9) možemo pisati $\lambda^2 - \mu^2$.

Ako u (34.9) stavimo $\Gamma = 0$, dobivamo kompleksni potencijal acikličnog strujanja oko elipse, odnosno eliptičkog cilindra u trodimenzionom prostoru, u obliku

$$(34.10) \quad \tilde{w}(Z) = \frac{1}{2} \left[A(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}) + \bar{A} \frac{(\lambda + \mu)^2}{l^2} (Z - \sqrt{Z^2 - l^2}) \right].$$

Ovo je strujanje prikazano na slici 58. Ugao koji pravac brzine u beskonačno udaljenim tačkama zaklana sa pozitivnim smerom X ose iznosi $\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$.



Sl. 58

Da bismo dobili kompleksni potencijal stacionarnog cikličnog strujanja oko duži F_1F_2 , odnosno oko ravne ploče u trodimenzionom prostoru, potrebno je da u izrazu (34.9), na osnovu (34.6), stavimo $\lambda = l$ i $\mu = 0$. Na taj način dobivamo

$$\tilde{w}(Z) = \frac{1}{2} [A(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}) + \bar{A}(Z - \sqrt{Z^2 - l^2})] + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}),$$

odnosno

$$(34.11) \quad \tilde{w}(Z) = A_1 Z - i A_2 \sqrt{Z^2 - l^2} + \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}).$$

Odavde za kompleksnu brzinu dobivamo

$$(34.12) \quad \bar{V} = \frac{d\tilde{w}}{dZ} = A_1 - \frac{i A_2 Z - \frac{\Gamma}{2\pi i}}{\sqrt{Z^2 - l^2}},$$

pa vidimo da ima singularitete u tačkama $Z = l$ i $Z = -l$. U tim tačkama, naime, kompleksna brzina je beskonačna.

Kompleksnim potencijalom (34.11) u potpunosti je određeno stacionarno ciklično strujanje oko duži dužine $2l$, odnosno oko ravne ploče širine $2l$ u trodimenzionom prostoru.

Ako u izrazu (34.11) stavimo $\Gamma = 0$, dobivamo kompleksni potencijal acikličnog stacionarnog strujanja oko ravne ploče u obliku

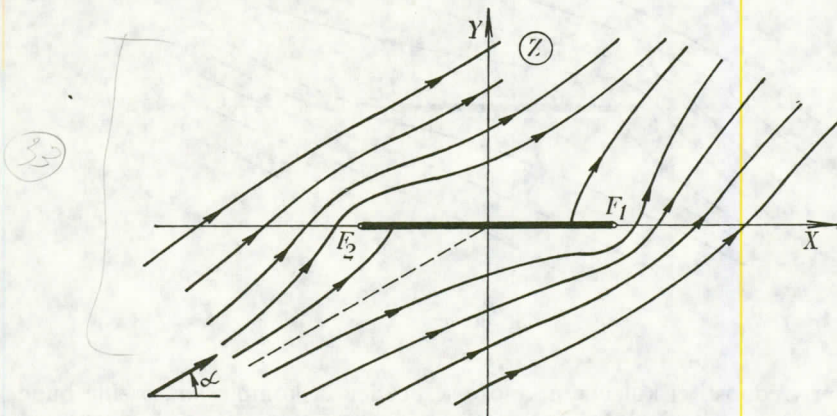
$$(34.13) \quad \tilde{w}(Z) = A_1 Z - i A_2 \sqrt{Z^2 - l^2}.$$

Ovo je strujanje prikazano na slici 59. Ugao koji pravac brzine u beskonačno udaljenim tačkama zaklana sa pozitivnim smerom X ose takode iznosi $\alpha = \arctg \frac{A_2}{A_1}$.

Iz (34.13) za kompleksnu brzinu dobivamo

$$\bar{V} = A_1 - \frac{i A_2 Z}{\sqrt{Z^2 - l^2}},$$

pa vidimo da je i u ovom slučaju kompleksna brzina beskonačna na ivicama ploče, tj. u tačkama $Z=l$ i $Z=-l$.



SI 59

U slučaju cikličnog strujanja može se pogodnim izborom jačine vrtloga postići da kompleksna brzina na zadnjoj ivici ploče (u tački $Z=l$) bude konačna. To će se postići ako je u tački $Z=l$, na osnovu (34.12), ispunjen uslov

$$i A_2 l - \frac{\Gamma}{2 \pi i} = 0,$$

odnosno, ako je

(34.14)

$$\Gamma = -2 \pi l A_2.$$

Sa ovom vrednošću cirkulacije Γ kompleksni potencijal (34.11) postaje

$$(34.15) \quad \tilde{w}(Z) = A_1 Z - i A_2 \sqrt{Z^2 - l^2} + i l A_2 \ln(Z + \sqrt{Z^2 - l^2}),$$

a kompleksna brzina je

$$\bar{V} = A_1 - \frac{i A_2 Z + \frac{l A_2}{i}}{\sqrt{Z^2 - l^2}},$$

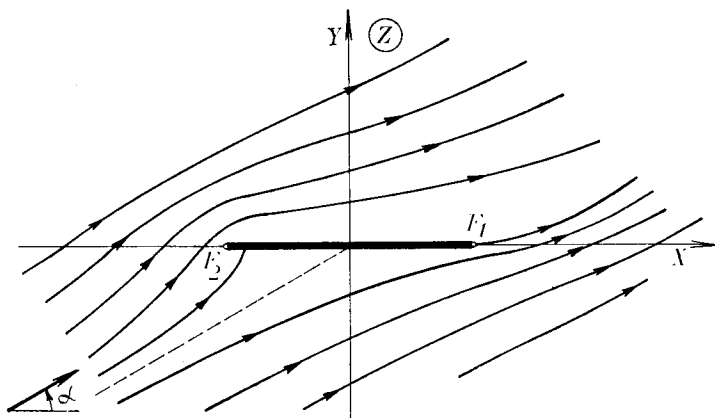
odnosno

$$(34.16) \quad \bar{V} = A_1 - i A_2 \sqrt{\frac{Z-l}{Z+l}}$$

Vidimo, dakle, da je sa vrednošću cirkulacije (34.14) kompleksna brzina na zadnjoj ivici ploče, tj. u tački $Z=l$, konačna, jer iz (34.16) sledi da je u toj tački

$$\bar{V}(l) = A_1.$$

Prema tome, zaključujemo da fluid sa ploče „glatko“ otiče, kao što je prikazano na slici 60.



Sl. 60

Izborom vrednosti cirkulacije ne može se postići da kompleksna brzina bude konačna i na prednoj ivici ploče. Tačka $Z = -l$, prema tome, je uvek singularna tačka kompleksne brzine, tj. brzina je u njoj neograničeno velika. U praktičnim primenama, s obzirom da ploča mora imati neku konačnu debljinu, u cilju da bi se to izbeglo, vrši se zaobljavanje prednje ivice ploče, pa se na taj način u izvesnoj meri postiže oko nje glatko strujanje. Zadnja ivica ploče, međutim, tanji se da bi se omogućilo da fluid sa ploče glatko otiče, sa čime se u izvesnoj meri smanjuje pojava vrtloga iza ploče.

V e ž b a n j a

1. Odrediti kompleksni potencijal i proučiti strujanje oko eliptičkog cilindra i ravne ploče ako je brzina jednolikog strujanja paralelna sa X osom.

2. Polazeći od kompleksnog potencijala stacionarnog strujanja u polju jednog vrtloga, koristeći transformaciju Žukovskog odrediti kompleksne potencijale i proučiti odgovarajuća strujanja oko eliptičkog cilindra i ravne ploče.

3. Polazeći od kompleksnog potencijala stacionarnog pravolinijskog strujanja kod koga je brzina paralelna sa x osom, odrediti kompleksni potencijal strujanja koje se dobiva preslikavanjem pomoću funkcije $z = Z^n$, gde je n bilo koji pozitivni ceo broj veći od 1, pa zatim, posebno, nacrtati strujne skice za $n=2, 3$ i 4. Za navedene vrednosti broja n odrediti koje se strujnice mogu uzeti za krute konture u ravni strujanja.

4. U slučaju cikličnog strujanja oko ravne ploče, kod koga je kompleksni potencijal oblika (34.15), odrediti položaj zaustavne tačke i pokazati da će se ona nalaziti u koordinatnom početku (na sredini ploče) ako ugao α koji brzina jednolikog strujanja zaklapa sa pozitivnim smerom X ose iznosi $\frac{\pi}{4}$.

DRUGI DEO

DINAMIKA FLUIDA

V OSNOVI DINAMIKE FLUIDA

35. Delovanje sila na fluid. Napon i tenzor napona. Sile koje deluju na fluid, sadržan u nekoj konačnoj zapremini, mogu biti *zapreminske* i *površinske*.

Zapreminske sile, koje se još nazivaju i spoljašnje sile, deluju na svaki fluidni delić u posmatranoj zapremini i računaju se po jedinici mase. Ako kontravarijantne koodrinatne zapreminske sile, računate po jedinici mase, označimo sa f^i , zapreminska sila koja deluje na fluidni delić zapremine dv iznosi

$$(35.1) \quad dF^i = f^i dm = \rho f^i dv,$$

a rezultujuća zapreminska sila koja deluje na fluid konačne zapremine v biće

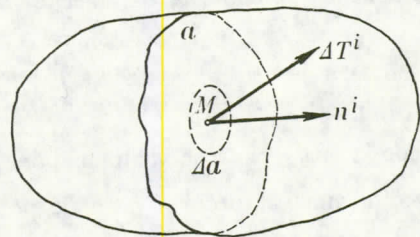
$$(35.2) \quad F^i = \int_v dF^i = \int_v f^i dm = \int_v \rho f^i dv.$$

Kao karakterističan primer zapreminske sile može se navesti sila Zemljine teže. Ako, naime, sa g^i označimo zapremisku silu Zemljine teže (silu Zemljine teže računatu po jedinici mase), za koju pretpostavljamo da je konstantna, rezultujuća sila Zemljine teže fluida sadržanog u konačnoj zapremini v biće

$$G^i = \int_v \rho g^i dv = g^i \int_v \rho dv = mg^i,$$

gde je m masa fluida zapremine v .

Da bismo objasnili postojanje površinskih sila u fluidu, koje se još nazivaju i unutrašnje sile, zamislimo da smo uočenu konačnu zapreminu fluida podelili na dva dela nekom ravnom površi a (sl. 61). Da bi na ovaj način formirani delovi fluida, posmatrani kao odvojeni, imali isto kretanje kao i u slučaju kad pripadaju celini, očigledno je da uticaj jednog dela na drugi moramo zameniti nekim silama koje deluju na graničnoj ravnoj površi a .



Sl. 61

Ako na zamišljenoj ravnoj površi a , sa normalom n^i , uočimo neku tačku M koja se nalazi u maloj konačnoj površi Δa , tada na element površi Δa deluje neka površinska sila sa kontravarijantnim koordinatama ΔT^i (sl. 61). Granična vrednost

$$(35.3) \quad t^i = \lim_{\Delta a \rightarrow 0} \frac{\Delta T^i}{\Delta a} = \frac{dT^i}{da}$$

naziva se *napon* u tački M za presečnu ravan određenu normalom n^i . U različitim tačkama presečne ravni napon može imati različite vrednosti, pa je, prema tome, funkcija položaja. Ako, međutim, zamislimo da uočena tačka M pripada nekoj drugoj presečnoj ravni, sa drugim jediničnim vektorom normale, evidentno je da bismo za napon mogli dobiti neku drugu vrednost. To znači da napon u jednoj tački može imati različite vrednosti za različite presečne ravni koje prolaze kroz tu tačku. Kako kroz jednu tačku možemo postaviti neograničen broj presečnih ravni, zaključujemo da u toj tački ima i neograničen broj vektora napona. Svi naponi u jednoj tački određuju *stanje napona* u toj tački. Prema tome, ako kažemo da nam je poznato stanje napona u nekoj tački u fluidu, to onda znači da nam je poznat vektor napona za bilo koju presečnu ravan u toj tački.

Iz definicije (35.3), vidimo da napon ima dimenziju sile po jedinici površine. Prema tome, on je vektorska veličina, sa kontravarijantnim koordinatama t^i koje su funkcije ne samo položaja već i presečne ravni u odnosu na koju se napon računa. S obzirom da je presečna ravan određena jediničnim vektorom normale, sa kontravarijantnim koordinatama n^i , možemo pisati

$$(35.4) \quad t^i = t^i(x^k, n^k).$$

Površinska sila koja deluje na element površi da , na osnovu (35.3), iznosi

$$(35.5) \quad dT^i = t^i da,$$

a rezultujuća površinska sila koja deluje na konačnu površ a je

$$(35.6) \quad T^i = \int_a t^i da,$$

pri čemu površ a može biti proizvoljnog oblika, a naponi u tačkama površi računaju se za presečne ravni tangentne na površ u odgovarajućim tačkama.

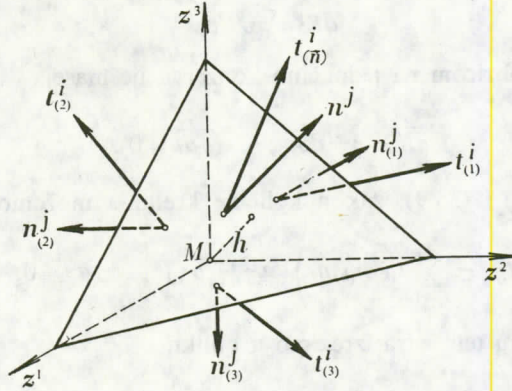
Na osnovu (35.2) i (35.6) zaključujemo da rezultujuću silu koja deluje na fluid konačne zaprenine v , ograničene zatvorenom površi a , možemo izraziti u obliku

$$(35.7) \quad \mathcal{F}^i = T^i + F^i = \oint_a t_{(\vec{n})}^i da + \int_v \rho f^i dv,$$

gde je sa $t_{(\vec{n})}^i$ označen vektor napona u tački površi, a za presečnu ravan određenu jediničnim vektorom \vec{n} normale površi u toj tački.

Stanje napona u svakoj tački u fluidu, rekli smo, određeno je vektorima napona u toj tački. Pokazaćemo, međutim, da važi sledeći s t a v: *Stanje napona u svakoj tački određeno je vektorima napona za bilo koje tri nekomplanarne presečne ravni u toj tački.*

D o k a z. Bez gubljenja u opštosti, a radi jednostavnosti pri izvođenju dokaza, pretpostavimo da su u tački poznati vektori napona za tri međusobno upravne presečne ravni. Te ravni možemo uzeti da budu koordinatne ravni sistema Dekartovih pravouglanih koordinata u uočenoj tački M (sl. 62). Koordinirajmo sada tački M



Sl. 62

fluidni delić oblika elementarnog tetraedra čije se teme i bočne strane nalaze u koordinatnim ravnima, a osnova u prvom oktantu. Obeležimo sa $da_{(\vec{n})}$ površinu osnove tetraedra, koja je određena jediničnim vektorom n^j spoljašnje normale, a sa $da_{(1)}$, $da_{(2)}$ i $da_{(3)}$, površine bočnih strana tetraedra, određene jediničnim vektorima spoljašnjih normala $n^j_{(1)}$, $n^j_{(2)}$ i $n^j_{(3)}$, respektivno, koji su ustavari suprotno orijentisani jedinični vektori koordinatnih osa. Neka su, dalje, $t^i_{(1)}$, $t^i_{(2)}$ i $t^i_{(3)}$ vektori napona u tački M za presečne ravni određene jediničnim vektorima spoljašnjih normala $n^j_{(1)}$, $n^j_{(2)}$ i $n^j_{(3)}$, a $t^i_{(\vec{n})}$ vektor napona u tački osnove tetraedra, koja ne prolazi kroz tačku M i koja je određena jediničnim vektorom n^j spoljašnje normale.

Primenjujući sada (35.7) na uočeni elementarni tetraedar, za rezultujuću silu dobivamo

$$d_{\mathcal{F}}^i = t^i_{(\vec{n})} da_{(\vec{n})} + t^i_{(1)} da_{(1)} + t^i_{(2)} da_{(2)} + t^i_{(3)} da_{(3)} + \rho f^i dv,$$

odnosno

$$d_{\mathcal{F}}^i = t^i_{(\vec{n})} da_{(\vec{n})} + \sum_{k=1}^3 t^i_{(k)} da_{(k)} + \rho f^i dv.$$

Kako su, međutim, površine bočnih strana tetraedra jednake projekcijama osnove tetraedra na koordinatne ravni, možemo pisati

$$da_{(k)} = -da_{(\vec{n})} n^j_{(k)} n_j, \quad (k = 1, 2, 3),$$

jer su $-n^j_{(k)}$ jedinični vektori koordinatnih osa. Prema tome, rezultujuću silu koja deluje na posmatrani fluidni delić možemo izraziti u obliku

$$(35.8) \quad d_{\mathcal{F}}^i = \left(t^i_{(\vec{n})} - \sum_{k=1}^3 t^i_{(k)} n^j_{(k)} n_j \right) da_{(\vec{n})} + \rho f^i dv.$$

Na osnovu zakona količine kretanja, rezultujuća sila je jednaka izvodu po vremenu količine kretanja fluidnog delića, tj.

$$d\mathcal{F}^i = \overline{dK^i},$$

gde je

$$dK^i = \rho v^i dv,$$

pa, prema tome, s obzirom na jednačinu konzervacije mase,

$$(35.9) \quad \overline{dK^i} = \rho \dot{v}^i dv, \quad (\overline{\rho dv} = 0).$$

Koristeći (35.8) i (35.9), zakon količine kretanja možemo izraziti u obliku

$$(35.10) \quad \left(t_{(\vec{n})}^i - \sum_{k=1}^3 t_{(k)}^i n_{(k)}^j n_j \right) da_{(\vec{n})} + \rho (f^i - \dot{v}^i) dv = 0.$$

Ako, dalje, zapreminu tetraedra izrazimo u obliku

$$dv = da_{(\vec{n})} \cdot \frac{h}{3},$$

gde je h visina tetraedra (normalno rastojanje od temena M do osnove tetraedra), iz (35.10) dobivamo

$$t_{(\vec{n})}^i - \sum_{k=1}^3 t_{(k)}^i n_{(k)}^j n_j + \rho (f^i - \dot{v}^i) \frac{h}{3} = 0,$$

jer (35.10) mora da važi za svako $da_{(\vec{n})}$. Izračunavanjem granične vrednosti kad h teži nuli, iz prethodne jednačine dobivamo

$$(35.11) \quad t_{(\vec{n})}^i = \sum_{k=1}^3 t_{(k)}^i n_{(k)}^j n_j.$$

Kad h teži nuli tada i zapremina tetraedra teži nuli, ali na takav način da stranice tetraedra zadržavaju svoju orijentaciju. Prema tome, u graničnom slučaju osnova tetraedra prolazi kroz tačku M pri čemu njenja orijentacija ostaje nepromenjena, pa je u (35.11) vektor napona $t_{(\vec{n})}^i$ definisan u tački M za presečnu ravan određenu jediničnim vektorom \vec{n} . Na osnovu toga zaključujemo: Vektor napona $t_{(\vec{n})}^i$ za bilo koju presečnu ravan, određenu jediničnim vektorom \vec{n} , može se odrediti ako se znaju vektori napona $t_{(k)}^i$, $k=1, 2, 3$, za bilo koje tri nekomplanarne presečne ravni u datoj tački, određene jediničnim vektorima normala $\vec{n}_{(k)}$, što je i trebalo dokazati.

Ako uvedemo oznaku

$$(35.12) \quad t^{ij} = \sum_{k=1}^3 t_{(k)}^i n_{(k)}^j,$$

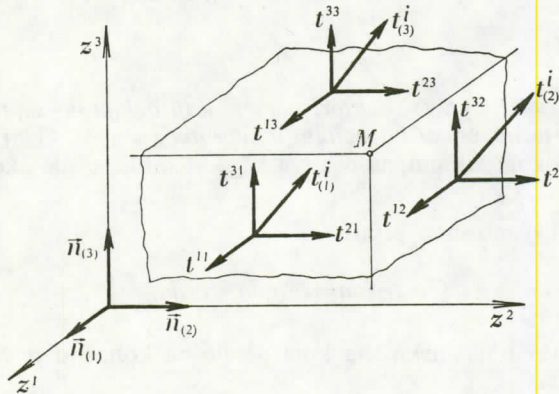
izraz (35.11) možemo napisati u obliku

$$(35.13) \quad t_{(\vec{n})}^i = t^{ij} n_j.$$

Tenzor t^{ij} se naziva *tenzor napona*. Iz (35.12) vidimo da je tenzor napona određen u svakoj tački ako se znaju vektori napona za bilo koje tri nekomplanarne presečne ravni u toj tački. S druge strane, iz (35.13) vidimo da tenzor napona u potpunosti određuje naponsko stanje u datoj tački, jer preko njega možemo odrediti vektor napona za bilo koju presečnu ravan u toj tački.

Tenzor napona ima devet koordinata koje se nazivaju *komponentalni naponi*. Prikazane u obliku matrice, te koordinate su

$$\{t^{ij}\} = \begin{Bmatrix} t^{11} & t^{12} & t^{13} \\ t^{21} & t^{22} & t^{23} \\ t^{31} & t^{32} & t^{33} \end{Bmatrix}.$$



Sl. 63

Ako u tački M uočimo tri međusobno upravne presečne ravni koje su paralelne koordinatnim ravnima sistema Dekartovih pravouglavih koordinata, tako da su jedinični vektori normala tih ravni jednaki jediničnim vektorima koordinatnih osa (sl. 63), na osnovu (35.12) biće

$$t_{(1)}^i = t^{ij} n_{(1)j}.$$

Međutim, kako je

$$\{n_{(1)j}\} = \{1, 0, 0\},$$

dobivamo

$$t_{(1)}^i = t^{i1},$$

pa su, izražene u matricnom obliku, koordinate vektora napona $t_{(1)}^i$:

$$(35.14) \quad \{t_{(1)}^i\} = \{t^{11}, t^{21}, t^{31}\}.$$

Na sličan način bismo dobili

$$(35.15) \quad \{t_{(2)}^i\} = \{t^{12}, t^{22}, t^{32}\},$$

$$(35.16) \quad \{t_{(3)}^i\} = \{t^{13}, t^{23}, t^{33}\},$$

pa vidimo da su komponentalni naponi t^{ij} u stvari projekcije vektora napona $t_{(1)}^i$, $t_{(2)}^i$ i $t_{(3)}^i$ na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata.

Komponentalni naponi koji se nalaze na glavnoj dijagonali matrice tenzora napona deluju upravno na presečne ravni i stoga se zovu *normalni komponentalni naponi*, a komponentalni naponi koji se nalaze van glavne dijagonale u matrici tenzora napona deluju u presečnoj ravni i zovu se *tangentni ili smičući komponentalni naponi*. U opštem slučaju možemo reći: *Koordinata t^{ij} tenzora napona je komponentalni napon za presečnu ravan sa normalom $\vec{n}_{(j)}$ koji deluje u pravcu jediničnog vektora $\vec{n}_{(i)}$* . Na primer, koordinata t^{23} je komponentalni napon za presečnu ravan sa normalom $\vec{n}_{(3)}$, a deluje u pravcu određenom jediničnom vektorom $\vec{n}_{(2)}$, kao što je prikazano na slici 63.

Iz (35.13), ako umesto vektora \vec{n} stavimo $-\vec{n}$, sledi

$$(35.17) \quad t_{(\vec{n})}^i = -t_{(-\vec{n})}^i,$$

pa zaključujemo da važi s t a v: *Vektori napona koji deluju na suprotne strane iste površi u datoj tački jednakog su intenziteta a suprotnog smera*. Ovaj je stav ekvivalentan trećem Njutnovom zakonu, na osnovu koga sledi da je sila akcije jednaka sili reakcije.

Koristeći (35.13) možemo pisati

$$dT^i = t_{(\vec{n})}^i da = t^{ij} n_j da = t^{ij} da_j,$$

tako da je rezultujuća površinska sila koja deluje na konačnu površ a

$$T^i = \int_a t^{ij} da_j,$$

gde je da_j orijentisani element površi. Na osnovu ovoga, rezultujuću silu koja deluje na fluid sadržan u konačnoj zapremini v , ograničenoj zatvorenom površi a , koja je predstavljena izrazom (35.7), možemo izraziti i u obliku

$$(35.18) \quad \mathcal{F}^i = \oint_a t^{ij} da_j + \int_v \rho f^i dv.$$

Zbog jednostavnosti pri izvođenju određenih izraza i zaključaka koristili smo sistem Dekartovih pravougljih koordinata. S obzirom da u tom slučaju nema razlike između kontravarijantnih, kovarijantnih i fizičkih koordinata, komponentalne napone, iako su biti označeni kao kontravarijantne koordinate, nazvali smo projekcije vektora napona na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata. Upotreba sistema Dekartovih pravougljih koordinata ne predstavlja, međutim, nikakvo ograničenje, jer su izvedeni izrazi tenzorskog karaktera, pa, kao takvi, važe i za proizvoljni dopustivi sistem krivolinijskih koordinata u euklidskom prostoru. U tom slučaju treba samo praviti razliku između kontravarijantnih, kovarijantnih i fizičkih koordinata. Kontravarijantne koordinate tenzora napona, na primer, su kontravarijantne koordinate odgovarajućih vektora napona u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata, dok su fizičke koordinate projekcije tih vektora na odgovarajuće koordinatne linije. Jasno je da pomoću koordinata metričkog tenzora možemo uspostaviti veze između kontravarijantnih, kovarijantnih i fizičkih koordinata.

36. Zakoni količine kretanja i momenta količine kretanja. Diferencijalne jednačine kretanja. Količina kretanja fluidnog delića, zapremine dv i mase $dm = \rho dv$, jednaka je proizvodu mase i brzine delića, tj.

$$(36.1) \quad dK^i = \rho v^i dv,$$

pa je količina kretanja fluida sadržanog u konačnoj zapremini v određena integralom

$$(36.2) \quad K^i = \int_v \rho v^i dv.$$

Zakon količine kretanja, glasi: *Izvod po vremenu količine kretanja jednak je rezultujućoj sili.* Matematička formulacija ovog zakona je, prema tome, oblika

$$(36.3) \quad \dot{K}^i = \mathcal{F}^i,$$

gde je rezultujuća sila \mathcal{F}^i određena izrazom (35.18).

Iz (36.2), diferenciranjem po vremenu, dobivamo

$$(36.4) \quad \dot{K}^i = \int_v \rho w^i dv, \quad (\dot{\rho} dv = 0),$$

gde su $w^i = \dot{v}^i$ kontravarijantne koordinate vektora ubrzanja, pa, koristeći (35.18), zakon količine kretanja možemo izraziti u obliku

$$(36.5) \quad \oint_a t^{ij} da_j + \int_v \rho (f^i - w^i) dv = 0.$$

Pretpostavljajući da tenzor napona, koji je funkcija položaja, nema singularnih tačaka u zapremini v ograničenoj zatvorenom površi a , površinski integral u (36.5) možemo transformisati u zapreminski, tj.

$$(36.6) \quad \oint_a t^{ij} da_j = \int_v t_{,j}^{ij} dv,$$

gde je $t_{,j}^{ij}$ divergencija tenzora napona. Prethodni izraz nam pokazuje da je rezultujuća površinska sila koja deluje na zatvorenu površ a jednaka fluksu tenzora napona kroz površ a . Koristeći sada (36.6), (36.5) možemo izraziti u obliku

$$\int_v t_{,j}^{ij} dv + \int_v \rho (f^i - w^i) dv = 0,$$

odnosno

$$\int_v (t_{,j}^{ij} + \rho f^i - \rho w^i) dv = 0.$$

Kako ova jednačina mora da važi za proizvoljno $dv \neq 0$, sledi da mora biti

$$(36.7) \quad t_{,j}^{ij} + \rho f^i = \rho w^i,$$

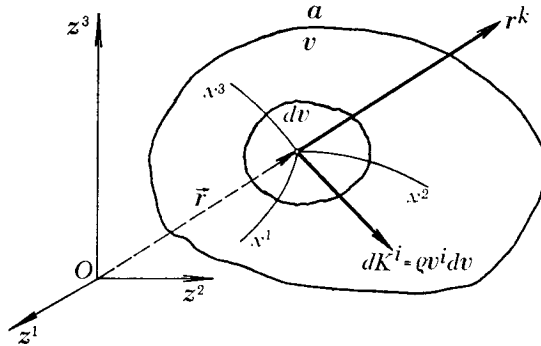
što je diferencijalna jednačina kretanja čestica fluida, koja se još naziva *prvi Košijev zakon kretanja*. Ova je jednačina izvedena u koordinatnom obliku i to kontravarijantnom, ali je jasno, možemo napisati i u kovarijantnom obliku,

$$(36.8) \quad g^{jk} t_{ij,k} + \rho f_i = \rho w_i,$$

i odgovaraju joj tri skalarnе jednačine.

Prvi Košijev zakon kretanja je ekvivalentan zakonu količine kretanja. Drugim rečima, da bi zakon količine kretanja bio zadovoljen mora biti zadovoljena jednačina (36.7) ili (36.8). Iz tog razloga se diferencijalna jednačina kretanja u literaturi još naziva i *jednačina balansa količine kretanja*.

Moment količine kretanja fluidnog delića, u odnosu na proizvoljno izabrani pol, dobiva se kao vektorski proizvod vektora položaja i količine kretanja delića. Pod vektorom položaja delića podrazumevamo vektor položaja tačke kojoj je delić koordiniran u odnosu na izabrani pol. Ako u proizvoljno izabranom polu O postavimo sistem Dekartovih pravougljih koordinata z^k , vektor položaja proizvoljne tačke u fluidu, sadržanom u konačnoj zapremini v ograničenoj zatvorenim površi a , određen je Dekartovim pravougljim koordinatama z^k , tj. $\vec{r} = \{z^k\}$ (sl. 64).



Sl. 64

Ako, međutim, koordinatnim transformacijama $z^k = z^k(x^l)$ uvedemo krivolinijske koordinate x^l , vektor položaja, u odnosu na sistem krivolinijskih koordinata x^l , određen je kontravarijantnim koordinatama

$$r^k = z^l \frac{\partial x^k}{\partial z^l},$$

pa moment količine kretanja fluidnog delića koordiniranog uočenoj tački u fluidu možemo izraziti u obliku

$$(36.9) \quad dL_{(o)i} = \varepsilon_{ijk} r^j dK^k = \rho \varepsilon_{ijk} r^j v^k dv.$$

Moment količine kretanja fluida sadržanog u konačnoj zapremini v , u odnosu na izabrani pol O , određen je, prema tome, integralom

$$(36.10) \quad L_{(o)i} = \int_v \rho \varepsilon_{ijk} r^j v^k dv.$$

Zakon momenta količine kretanja glasi: *Izvod po vremenu momenta količine kretanja u odnosu na proizvoljno izabrani pol jednak je momentu rezultujuće sile za isti pol*. Matematička formulacija zakona momenta količine kretanja je, prema tome, oblika

$$(36.11) \quad \dot{L}_{(o)i} = M_{(o)i},$$

gde smo sa $M_{(o)i}$ označili moment rezultujuće sile \mathcal{F}_i u odnosu na pol O .

Iz (36.10), diferenciranjem po vremenu, dobivamo

$$\dot{L}_{(o)i} = \int_v \rho \varepsilon_{ijk} (\dot{r}^j v^k) dv, \quad (\dot{\rho} dv) = 0,$$

odnosno

$$(36.12) \quad \dot{L}_{(o)i} = \int_v \rho \varepsilon_{ijk} r^j w^k dv,$$

jer je $\dot{r}^j = \frac{\delta r^j}{\delta t} = v^j$ i $\varepsilon_{ijk} v^j v^k = 0$.

Moment rezultujuće sile za pol O jednak je zbiru momenata površinskih i zapreminskih sila, tj.

$$M_{(o)i} = \oint_a \varepsilon_{ijk} r^j t^{kl} da_l + \int_v \rho \varepsilon_{ijk} r^j f^k dv.$$

Ako, međutim, površinski integral transformišemo u zapreminski,

$$\begin{aligned} \oint_a \varepsilon_{ijk} r^j t^{kl} da_l &= \int_v (\varepsilon_{ijk} r^j t^{kl})_{,l} dv = \int_v (\varepsilon_{ijk} \delta_l^j t^{kl} + \varepsilon_{ijk} r^j t^{kl}_{,l}) dv = \\ &= \int_v \varepsilon_{ijk} (t^{kj} + r^j t^{kl}_{,l}) dv, \end{aligned}$$

dobivamo

$$(36.13) \quad M_{(o)i} = \int_v \varepsilon_{ijk} (t^{kj} + r^j t^{kl}_{,l} + \rho r^j f^k) dv.$$

Koristeći sada (36.12) i (36.13), zakon momenta količine kretanja (36.11) možemo izraziti u obliku

$$\int_v \varepsilon_{ijk} [t^{kj} + r^j (t^{kl}_{,l} + \rho f^k - \rho w^k)] dv = 0.$$

Ako je, međutim, prvi Košijev zakon kretanja zadovoljen, ova se jednačina, s obzirom na (36.7), svodi na

$$\int_v \varepsilon_{ijk} t^{kj} dv = 0,$$

odakle, s obzirom na proizvoljnost zapreminskog elementa $dv \neq 0$, sledi

$$(36.14) \quad \varepsilon_{ijk} t^{kj} = 0,$$

odnosno

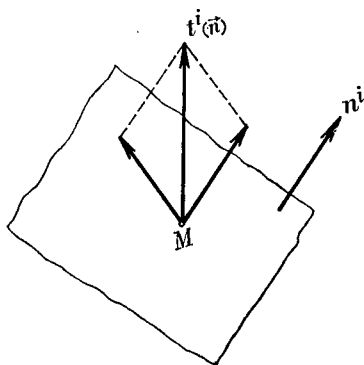
$$(36.15) \quad t^{[ij]} = 0, \text{ ili } t^{ij} = t^{ji},$$

što je drugi Košijev zakon kretanja.

Drugi Košijev zakon kretanja je ekvivalentan zakonu momenta količine kretanja. Drugim rečima, da bi zakon momenta količine kretanja bio zadovoljen mora biti zadovoljena jednačina (36.14), odnosno (36.15). Iz tog razloga se drugi Košijev zakon kretanja još naziva i jednačina balansa momenta količine kretanja. U ovom

slučaju, kao što vidimo, ta se jednačina svodi na uslov da tenzor napona mora biti *simetričan*. Prema tome, od devet koordinata tenzora napona, s obzirom da među njima postoje tri veze, tj. $t^{12}=t^{21}$, $t^{23}=t^{32}$ i $t^{31}=t^{13}$, samo su njih šest međusobno nezavisne.

37. Glavni pravci tenzora napona. U odeljku 35. smo pokazali da je naponsko stanje u bilo kojoj tački u potpunosti određeno tenzorom napona u toj tački. Ako, naime, znamo koordinate tenzora napona u nekoj tački, u odnosu na bilo koji sistem dopustivih koordinata, tada, na osnovu (35.13), možemo odrediti vektor napona za bilo koju presečnu ravan u toj tački koja je određena jediničnim vektorom nor-



Sl. 65

male \vec{n} . Taj vektor može u opštem slučaju biti ma kakvog položaja u odnosu na presečnu ravan, tako da ga možemo razložiti na komponentu upravnu na presečnu ravan i komponentu koja se nalazi u presečnoj ravni (sl. 65). Te komponente se nazivaju *normalni* i *tangentni* ili *smičući* napon u datoj tački za presečnu ravan određenu jediničnim vektorom normale \vec{n} . Jasno je da se, dalje, smičući napon može razložiti u dve komponente koje se nalaze u presečnoj ravni, tako da sve tri komponente predstavljaju komponentalne napone ako je presečna ravan paralelna jednoj od koordi-

natnih ravni sistema Dekartovih pravougljih koordinata.

Može se, međutim, postaviti pitanje: da li u datoj tački postoje takve presečne ravni za koje bi vektor napona bio na njih upravan, tj. za koje bi postojali samo normalni, a ne i smičući naponi? Ako takve ravni postoje, onda je za njih ispunjen uslov

$$(37.1) \quad t_{(n)}^i = \lambda n^i,$$

tj. vektor napona je kolinearan sa jediničnim vektorom normale presečne ravni, gde je λ proizvoljni skalarni faktor. Ovaj uslov, s obzirom na (35.13), možemo napisati u obliku

$$t^{ij} n_j = \lambda n^i,$$

odnosno

$$(37.2) \quad (t^{ij} - \lambda g^{ij}) n_j = 0,$$

što predstavlja sistem od tri homogene algebarske jednačine za određivanje tri nepoznate koordinate jediničnog vektora n_j . Da bi sistem imao netrivialna rešenja, mora determinanta sistema biti jednaka nuli, tj.

$$(37.3) \quad |t^{ij} - \lambda g^{ij}| = 0.$$

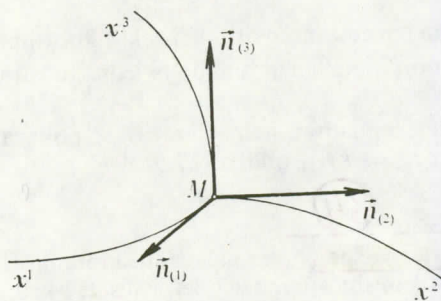
Ova determinantna jednačina je, u stvari, algebarska jednačina trećeg stepena λ^2 određivanje onih vrednosti skalarnog faktora λ za koje će sistem (37.2) imati netrivialna rešenja po n_j . U razvijenom obliku, ova jednačina je

$$(37.4) \quad \lambda^3 - t_1 \lambda^2 + t_{11} \lambda - t_{111} = 0,$$

gde su koeficijenti t_I , t_{II} i t_{III} oblika

$$(37.5) \quad \begin{aligned} t_I &= g_{ij} t^{ij} = \delta_i^j t_j^i = t_i^i, \\ t_{II} &= \frac{1}{2!} \delta_{kl}^{ij} t_i^k t_j^l, \\ t_{III} &= \frac{1}{3!} \delta_{rst}^{ijk} t_i^r t_j^s t_k^t = |t_j^i|, \end{aligned}$$

i nazivaju se *osnovne* ili *glavne* invarijante tenzora napona. S obzirom da je tenzor napona simetričan, kao i tenzor brzine deformacije, jednačina (37.4) ima sva tri realna rešenja. Ta rešenja, obeležimo ih sa $\lambda_{(k)}$ ($k=1, 2, 3$), jesu karakteristični brojevi matrice tenzora napona i nazivaju se *sopstvene* ili *karakteristične vrednosti* tenzora napona. Na osnovu (37.2), svakoj karakterističnoj vrednosti tenzora napona odgovara po jedan vektor $n_{(k)}$ koji se naziva *karakteristični vektor* tenzora napona. Prema tome, u svakoj tački postoje tri karakteristična vektora tenzora napona za koje se, s obzirom da je tenzor napona simetričan, kao i u slučaju tenzora brzine deformacije, može pokazati da su međusobno ortogonalni. Pravci koji su određeni karakterističnim vektorima tenzora napona nazivaju se *karakteristični* ili *glavni pravci* tenzora napona. Svaki od karakterističnih vektora određuje u datoj tački jednu presečnu ravan koja se naziva *glavna ravan* tenzora napona. Prema tome, u svakoj tački postoje tri međusobno ortogonalne presečne ravni (glavne ravni) za koje je vektor napona na njih upravan. Naponi za te presečne ravni nazivaju se *glavni naponi*. Glavni naponi, prema tome, su upravni na odgovarajućoj presečnoj ravni, tj. oni su normalni naponi.



Sl. 66

Ako u nekoj tački M izaberemo sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata tako da se jedinični vektori koordinatnih linija poklapaju sa karakterističnim vektorima tenzora napona (sl. 66), onda su, u odnosu na tako izabrani sistem koordinata, smičući komponentalni naponi jednaki nuli, tj. matrica tenzora napona je dijagonalna,

$$(37.6) \quad \{t^{ij}\} = \begin{Bmatrix} t^{11} & 0 & 0 \\ 0 & t^{22} & 0 \\ 0 & 0 & t^{33} \end{Bmatrix}, \quad \{t_{ij}\} = \begin{Bmatrix} t_{11} & 0 & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 \\ 0 & 0 & t_{33} \end{Bmatrix}, \quad \{t_{ij}\} = \begin{Bmatrix} t_{\langle 11 \rangle} & 0 & 0 \\ 0 & t_{\langle 22 \rangle} & 0 \\ 0 & 0 & t_{\langle 33 \rangle} \end{Bmatrix},$$

pa se osnovne invarijante tenzora napona mogu izraziti u obliku

$$(37.7) \quad \begin{aligned} t_I &= g_{11} t^{11} + g_{22} t^{22} + g_{33} t^{33} = t^1_1 + t^2_2 + t^3_3 = t_{\langle 11 \rangle} + t_{\langle 22 \rangle} + t_{\langle 33 \rangle}, \\ t_{II} &= t_{\langle 11 \rangle} t_{\langle 22 \rangle} + t_{\langle 11 \rangle} t_{\langle 33 \rangle} + t_{\langle 22 \rangle} t_{\langle 33 \rangle}, \\ t_{III} &= t_{\langle 11 \rangle} t_{\langle 22 \rangle} t_{\langle 33 \rangle}. \end{aligned}$$

Lako je pokazati, kao što smo pokazali u slučaju tenzora brzine deformacije, da su u odnosu na ovako izabrani sistem koordinata fizičke koordinate tenzora napona jednake karakterističnim vrednostima tenzora napona, tj.

$$(37.8) \quad \{t_{\langle ij \rangle}\} = \{t_j^i\} = \begin{Bmatrix} \lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{(3)} \end{Bmatrix},$$

pa se osnovne invarijante tenzora napona mogu izraziti i u obliku

$$(37.9) \quad \begin{aligned} t_I &= \lambda_{(1)} + \lambda_{(2)} + \lambda_{(3)}, \\ t_{II} &= \lambda_{(1)} \lambda_{(2)} + \lambda_{(2)} \lambda_{(3)} + \lambda_{(3)} \lambda_{(1)}, \\ t_{III} &= \lambda_{(1)} \lambda_{(2)} \lambda_{(3)}. \end{aligned}$$

V e ž b a n j a

1. Pokazati da jednačina (37.4) ima sva tri realna rešenja.
2. Pokazati da su glavni pravci tenzora napona međusobno ortogonalni.
3. Ako se sistem ortogonalnih krivolinijskih koordinata tako izabere da se u svakoj tački pravci koordinatnih linija poklapaju sa glavnim pravcima tenzora napona, pokazati:
 - a) da nema razlike između mešovitih i fizičkih koordinata tenzora napona,
 - b) da su fizičke koordinate tenzora napona jednake karakterističnim vrednostima tenzora napona.
4. Razvijanjem determinantne jednačine (37.3) pokazati da je oblika (37.4), pri čemu su koeficijenti t_I , t_{II} i t_{III} oblika (37.5).

34

38. **Konstitutivne jednačine.** Pri proučavanju kretanja fluida zaključili smo da se fluidni delić u najopštijem slučaju može i deformisati i kruto rotirati, što zavisi od vrednosti tenzora brzine deformacije i tenzora vrtložnosti u tački kojoj je delić koordiniran. Kako su, međutim, i tenzor brzine deformacije i tenzor vrtložnosti funkcije položaja, delići koordinirani različitim tačkama na različite načine će se i deformisati i kruto rotirati. Na osnovu toga zaključujemo da postoji relativno kretanje između fluidnih delića. Fluidi, kao i čvrsta tela, poseduju svojstvo da se kao otpor relativnom kretanju fluidnih delića u fluidu pojavljuju unutrašnje sile — naponi. Na primer, ako dva susedna delića klize jedan preko drugog, onda se kao otpor klizanju na dodirnim površinama delića pojavljuje sila trenja. Svojstvo fluida da se suprotstavlja deformisanju svojih delića naziva se *viskoznoš*.

Viskoznoš fluida je materijalna karakteristika. Eksperimentom se, naime, može utvrditi da se pri istom kretanju različitih fluida u njima pojavljuju različite unutrašnje sile, ili, pak, da pri dejstvu istih sila različiti fluidi imaju različita kretanja. Na taj

način dolazimo do saznanja da različiti fluidi imaju različite viskoznosti. Fluidi sa većom viskoznošću su teže pokretljivi, nasuprot fluidima sa malom viskoznošću koji veoma lako počinju da teku. Iz iskustva znamo da, na primer, voda lakše teče od mašinskog ulja, za koje onda kažemo da ima veću viskoznost od vode. Fizička je činjenica da svi realni fluidi poseduju svojstvo viskoznosti. U prirodi, dakle, nema neviskoznih fluida. Istina je, međutim, da postoje fluidi kod kojih je svojstvo viskoznosti neznatno u poređenju sa drugim fluidima, pa se pri proučavanju kretanja takvih fluida može pretpostaviti da su neviskozni. Jasno je da takva pretpostavka predstavlja izvesnu idealizaciju, ali je prihvatljiva iz dva razloga. S jedne strane, teorijsko proučavanje kretanja takvih fluida se veoma pojednostavljuje, što nije od malog značaja. S druge strane, međutim, dobiveni teorijski rezultati se sa zadovoljavajućom tačnošću poklapaju sa eksperimentima. Iz tih razloga model neviskoznog fluida nalazi svoje puno opravdanje.

Pri proučavanju kretanja onih fluida čije se viskozno svojstvo ne može zanemariti, mora se voditi računa o unutrašnjim silama koje se javljaju pri njegovom kretanju i utvrditi njihov uticaj na kretanje. Stoga je proučavanje kretanja viskoznih fluida dosta složenije. Ovo postoje još evidentnije kad se uzme u obzir da viskoznost fluida zavisi od više faktora. Na primer, poznato je da jedan isti fluid pokazuje različita viskozna svojstva na različitim temperaturama. Moguće je, takođe, da su viskozna svojstva određenog fluida različita u različitim pravcima, u kom slučaju za fluid kažemo da je *anizotropan*. Ako su, pak, viskozna svojstva ista za sve pravce u fluidu, onda kažemo da je *izotropan*. Osim toga, viskozno svojstvo fluida zavisi i od njegovog kretanja: pri različitim kretanjima fluid može pokazivati različita viskozna svojstva. Pri proučavanju kretanja viskoznih fluida uzimanje u obzir svih faktora koji utiču na viskoznost dovelo bi do velikih matematičkih teškoća, pa se, stoga, pristupa formiranju različitih modela viskoznog fluida kod kojih se samo pojedini od tih faktora uzimaju u obzir i to oni koji u konkretnom slučaju imaju najveći uticaj. Na taj način se stvara mogućnost za teorijsko proučavanje, a dobiveni rezultati mogu biti prihvaćeni kao zadovoljavajući.

Unutrašnje sile u fluidu manifestuju se postojanjem stanja napona u svakoj tački fluida, pa će raspored unutrašnjih sila biti poznat ako znamo koordinate tenzora napona u svakoj tački fluidnog prostora. Međutim, kako se u različitim tačkama prostora fluidni delići na različite načine deformišu, to raspored unutrašnjih sila zavisi od rasporeda tenzora brzine deformacije u fluidu. Tenzor napona, prema tome, izražava se kao funkcija tenzora brzine deformacije, za razliku od čvrstih tela kod kojih se izražava kao funkcija tenzora deformacije. Ta funkcionalna veza predstavlja jednu od osnovnih relacija koja karakteriše viskozni fluid i koja je neophodna za proučavanje njegovog kretanja.

Funkcionalna veza između tenzora napona i tenzora brzine deformacije može se dobiti, za određeni model viskoznog fluida, na dva različita načina. Prvi od njih bazira na isključivo energetskim razmatranjima. Imajući u vidu, naime, da je proces viskoznog tečenja ireverzibilan, kod koga, dakle, postoji disipacija energije, formiranjem funkcije disipacije energije i korišćenjem osnovnih zakona i principa termodinamike ireverzibilnih procesa, mogu se izvesti relacije između tenzora napona i tenzora brzine deformacije. Drugi način sastoji se u tome što se pretpostave relacije u najopštijem obliku, pa se, zatim, ograničavaju na taj način što im se nameću izvesni zahtevi invarijantnosti: nezavisnost od izbora koordinatnog sistema (tenzorski karakter jednačina), nezavisnost od posmatrača (princip objektivnosti), nezavisnost od pojedinih pravaca u fluidu (princip materijalne indiferencije), zahtev dimenzijske invarijantnosti (relacije moraju biti takvog oblika da su dimenzijski usaglašene)

itd. Na taj način iz najopštijeg pretpostavljenog oblika dobiva se mogući oblik tih relacija. Ove se relacije u literaturi pominju pod različitim nazivima. Kod nas najviše korišćen naziv, koji potiče iz engleske literature, je konstitutivne jednačine. Negde se one nazivaju reološke jednačine, jednačine ponašanja ili materijalne jednačine. Napominjemo da se ovde nećemo baviti pitanjem izvođenja konstitutivnih jednačina za pojedine modele viskoznog fluida, već ćemo samo pokazati kako izgledaju te jednačine pretpostavljajući da je viskozni fluid homogen i izotropan i da je proces njegovog tečenja izotermički, tj. da se odvija pri konstantnoj temperaturi. Na taj način eliminišemo uticaj eventualnih materijalnih simetrija u fluidu i uticaj temperature.

Kod homogenog izotropnog viskoznog fluida tenzor napona t^{ij} zavisi od tenzora brzine deformacije d^{kl} na takav način da je

$$(38.1) \quad t^{ij} = -p g^{ij} \quad \text{kad je} \quad d^{kl} = 0,$$

gde je $p = p(x^k, t)$ skalarna funkcija koja se naziva pritisak. Pritisak, prema tome, ne zavisi od tenzora brzine deformacije. Ako uvedemo oznaku

$$(38.2) \quad t^{ij} + p g^{ij} = \beta^{ij},$$

tada tenzor β^{ij} zavisi isključivo od tenzora brzine deformacije i naziva se tenzor viskoznosti. Tenzor viskoznosti, znači, jednak je nuli kad je tenzor brzine deformacije jednak nuli, što neposredno sledi iz (38.2) na osnovu (38.1).

Viskozni fluid kod koga je tenzor viskoznosti, izražen kao funkcija tenzora brzine deformacije, oblika

$$(38.3) \quad \beta^{ij} = \alpha_1 (d_I, d_{II}, d_{III}) g^{ij} + \alpha_2 (d_I, d_{II}, d_{III}) d^{ij} + \alpha_3 (d_I, d_{II}, d_{III}) d^i_k d^{kj},$$

gde su $\alpha_r = \alpha_r(d_I, d_{II}, d_{III})$, $r=1, 2, 3$, skalarne funkcije osnovnih invarijanata tenzora brzine deformacije, naziva se Stoksov fluid. Stoksov fluid, prema tome, karakterisan je konstitutivnom jednačinom (38.3), kojoj, s obzirom da je tenzor viskoznosti simetričan, odgovaraju šest međusobno nezavisnih skalarnih jednačina. Tenzorski, jednačina (38.3) je drugog stepena po tenzoru brzine deformacije. Po koordinatama tenzora brzine deformacije, međutim, ona je proizvoljnog stepena, jer funkcije α_1 , α_2 i α_3 mogu biti proizvoljnog stepena po koordinatama tenzora brzine deformacije koje su uključene u osnovnim invarijantama tenzora brzine deformacije.

Ako za funkcije α_1 , α_2 , i α_3 pretpostavimo da su neprekidne i diferencijabilne funkcije svojih argumenata, a ta pretpostavka je neophodna pri izvođenju konstitutivne jednačine (38.3), možemo ih predstaviti u obliku stepenog reda, tj.

$$(38.4) \quad \begin{aligned} \alpha_1 (d_I, d_{II}, d_{III}) &= \alpha_{10} + \alpha_{11} d_I + \alpha_{12} d_I^2 + \alpha_{13} d_{II} + \dots, \\ \alpha_2 (d_I, d_{II}, d_{III}) &= \alpha_{20} + \alpha_{21} d_I + \alpha_{22} d_I^2 + \alpha_{23} d_{II} + \dots, \\ \alpha_3 (d_I, d_{II}, d_{III}) &= \alpha_{30} + \alpha_{31} d_I + \alpha_{32} d_I^2 + \alpha_{33} d_{II} + \dots, \end{aligned}$$

gde su α_{rs} ($r=1, 2, 3, s=0, 1, 2, \dots, n$) konstante.

Ako se zadržimo na linearnim članovima po koordinatama tenzora brzine deformacije, konstitutivne jednačine (38.3), izražene kao linearne funkcije koordinata tenzora brzine deformacije, biće oblika

$$\beta^{ij} = (\alpha_{10} + \alpha_{11} d_I) g^{ij} + \alpha_{20} d^{ij}.$$

Međutim, kako tenzor viskoznosti mora biti jednak nuli kad je tenzor brzine deformacije jednak nuli, sledi da mora biti $\alpha_{10}=0$, pa dobivamo

$$(38.5) \quad \beta^{ij} = \alpha_{11} d_1 g^{ij} + \alpha_{20} d^{ij}.$$

Viskozni fluidi čije su konstitutivne jednačine ovog oblika nazivaju se Njutnovi fluidi. Konstitutivna jednačina Njutnovog fluida dobiva se, prema tome, kao linearna aproksimacija konstitutivne jednačine Stoksovog fluida.

Ako uvedemo oznake

$$\alpha_{11} = \mu, \quad \alpha_{20} = 2\eta,$$

konstitutivnu jednačinu Njutnovog fluida (38.5) možemo napisati u obliku

$$(38.6) \quad \beta^{ij} = \mu d_1 g^{ij} + 2\eta d^{ij},$$

odnosno, ako iskoristimo (38.2), u obliku

$$(38.7) \quad t^{ij} = -p g^{ij} + \mu d_1 g^{ij} + 2\eta d^{ij},$$

gde su, još jedanput da napomenemo, μ i η konstante.

Ako, na osnovu (10.5), tenzor brzine deformacije razložimo na sferni i devijatorski deo, konstitutivnu jednačinu (38.6) možemo napisati u obliku

$$\beta^{ij} = \left(\mu + \frac{2}{3} \eta \right) d_1 g^{ij} + 2\eta \bar{d}^{ij}.$$

Koeficijent

$$(38.8) \quad \eta_v = \mu + \frac{2}{3} \eta$$

nalazi se kao množilac uz brzinu promene kubne dilatacije, tj. uz onaj deo tenzora brzine deformacije koji karakteriše trenutnu brzinu promene zapremine fluidnog delića bez promene oblika, pa se stoga naziva koeficijent zapreminske viskoznosti. Koeficijent η , međutim, je množilac uz onaj deo tenzora brzine deformacije koji karakteriše trenutnu brzinu promene oblika delića bez promene zapremine, pa se stoga naziva koeficijent smičuće viskoznosti. Iz (38.8) dobivamo

$$\mu = \eta_v - \frac{2}{3} \eta,$$

pa konstitutivnu jednačinu (38.7) možemo izraziti u obliku

$$(38.9) \quad t^{ij} = -p g^{ij} + \left(\eta_v - \frac{2}{3} \eta \right) d_1 g^{ij} + 2\eta d^{ij}.$$

U ovoj jednačini, kao što vidimo, figurišu dva koeficijenta viskoznosti, kao dve materijalne konstante koje karakterišu mehaničke osobine fluida. Za različite fluide ti koeficijenti imaju različite vrednosti, pa je jasno da će se pri istom tenzoru brzine deformacije kod različitih fluida javljati različiti naponi. Napominjemo da se koeficijenti viskoznosti koji figurišu u jednačini (38.9) za pojedine fluide mogu odrediti jedino eksperimentalnim putem.

Kod onih fluida kod kojih je zapreminska viskoznost neznatna u odnosu na smičuću, može se uzeti da je $\eta_V=0$, pa je konstitutivna jednačina za takve fluide oblika

$$(38.10) \quad t^{ij} = -p g^{ij} - \frac{2}{3} \eta d_{1,j} g^{ij} + 2 \eta d^{ij}$$

i oni se nazivaju fluidi bez zapreminske viskoznosti.

Za nestišljive fluide, s obzirom da je $d_I=0$, iz (38.9) dobivamo konstitutivnu jednačinu u obliku

$$(38.11) \quad t^{ij} = -p g^{ij} + 2 \eta d^{ij}.$$

U slučaju nestišljivih fluida, prema tome, kao i u slučaju fluida bez zapreminske viskoznosti, u konstitutivnim jednačinama figurirše samo jedan — koeficijent smičuće viskoznosti.

35

39. Navije-Stoksove jednačine. Diferencijalnu jednačinu kretanja izveli smo u odeljku 36, jednačina (36.7). Ta jednačina, međutim, važi za bilo koju neprekidnu materijalnu sredinu i iz nje se mogu dobiti parcijalne diferencijalne jednačine kretanja za određeni kontinuum tek ako se znaju konstitutivne jednačine, tj. veze između veličina koje karakterišu naponsko stanje i stanje deformacije. Prema tome, da bismo dobili parcijalne diferencijalne jednačine kretanja viskoznog fluida potrebno je u jednačini (36.7) tenzor napona izraziti preko tenzora brzine deformacije, koristeći odgovarajuće konstitutivne jednačine.

Iz konstitutivne jednačine Njutnovog viskoznog fluida (38.9) dobivamo

$$t^{ij}_{,j} = -p_{,j} g^{ij} + \left(\eta_V - \frac{2}{3} \eta \right) d_{1,j} g^{ij} + 2 \eta d^{ij}_{,j}.$$

Međutim, kako je

$$d_{1,j} = v^k_{,kj}$$

i

$$d^{ij}_{,j} = \frac{1}{2} (v^{i,j} + v^{j,i})_{,j} = \frac{1}{2} (v^{i,j} + v^{j,i})_{,j} = \frac{1}{2} \Delta v^i + \frac{1}{2} v^k_{,k,i},$$

dobivamo

$$t^{ij}_{,j} = -p_{,j} g^{ij} + \left(\eta_V - \frac{2}{3} \eta \right) v^k_{,kj} g^{ij} + \eta \Delta v^i + \eta v^k_{,k,i} g^{ij},$$

odnosno

$$t^{ij}_{,j} = -p_{,j} g^{ij} + \left(\eta_V + \frac{1}{3} \eta \right) v^k_{,kj} g^{ij} + \eta \Delta v^i.$$

Zamenjujući sada ovaj izraz u (36.7), dobivamo

$$(39.1) \quad \rho w^i = \rho f^i - p_{,j} g^{ij} + \left(\eta_V + \frac{1}{3} \eta \right) v^k_{,kj} g^{ij} + \eta \Delta v^i,$$

što je sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine kretanja Njutnovog viskoznog fluida, koje se nazivaju Navije-Stoksove jednačine. Jednačina (39.1) je napisana u

kontravarijantnom obliku, ali je, jasno, možemo napisati i u odgovarajućem kovarijantnom obliku

$$(39.2) \quad \rho w_i = \rho f_i - p_{,i} + \left(\eta_V + \frac{1}{3} \eta \right) v_{,ki} + \eta \Delta v_i,$$

ili, pak, u vektorskom obliku

$$(39.3) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p + \left(\eta_V + \frac{1}{3} \eta \right) \text{grad} (\text{div } \vec{v}) + \eta \Delta \vec{v}.$$

Za fluide bez zapreminske viskoznosti, stavljajući $\eta_V = 0$ u prethodnoj jednačini, dobivamo

$$(39.4) \quad \rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \text{grad } p + \frac{1}{3} \eta \text{grad} (\text{div } \vec{v}) + \eta \Delta \vec{v},$$

odnosno

$$(39.5) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \frac{\nu}{3} \text{grad} (\text{div } \vec{v}) + \nu \Delta \vec{v},$$

gde je $\nu = \frac{\eta}{\rho}$ koeficijent kinematičke viskoznosti.

Za nestišljive fluide, s obzirom da je $\text{div } \vec{v} = 0$, Navije-Stoksova jednačina je oblika

$$(39.6) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v}.$$

Ako su, međutim, zapreminske sile konzervativne, tj.

$$\vec{f} = \text{grad } U,$$

uvođenjem generalisanog pritiska,

$$(39.7) \quad P = p - \rho U,$$

Navije-Stoksovu jednačinu za nestišljive fluide možemo pisati u obliku

$$(39.8) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = - \frac{1}{\rho} \text{grad } P + \nu \Delta \vec{v},$$

pri čemu generalisani pritisak obuhvata uticaj i pritiska p i zapreminskih sila.

Ako u Navije-Stoksovoj jednačini ubrzanje izrazimo u obliku (7.15), vidimo da ona predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine drugog reda. Kao nepoznate veličine u tim jednačinama figurišu brzina \vec{v} , gustina ρ i pritisak p , što je ukupno pet nepoznatih funkcija. Za njihovo određivanje na raspolaganju su nam tri Navije-Stoksove jednačine i jednačina konzervacije mase, pa vidimo da nedostaje još jedna jednačina. Ta jednačina je jednačina stanja fluida,

koja daje vezu između pritiska, gustine i u opštem slučaju temperature, na kojoj se, međutim, ovde nećemo zadržavati. U slučaju nestišljivih fluida, s obzirom da je ρ poznata konstanta, Navije-Stoksove jednačine zajedno sa jednačinom konzervacije mase, $v_{,k}^k = 0$, predstavljaju kompletan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija $v^i = v^i(x^k, t)$ i $p = p(x^k, t)$, uz, jasno, korektno postavljene početne i granične uslove.

I u slučaju nestišljivih fluida Navije-Stoksove jednačine su veoma složene. Osim toga što su drugog reda, one su i nelinearne, jer u izrazu za ubrzanje (7.15) figurišu i nelinearni članovi po koordinatama brzine, odnosno njihovim izvodima. Stoga pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja Navije-Stoksovih jednačina nije u opštem slučaju rešeno. Ne postoji, dakle, opšta metoda integracije tih jednačina. Zbog toga se, pri proučavanju konkretnih strujanja, postupa na dva načina: 1) ili se unapred pretpostavi oblik putanja čestica fluida, pa se, zatim, određuju partikularna rešenja koja odgovaraju tim putanjama i zadatim graničnim uslovima, 2) ili se jednačine rešavaju nekom od približnih metoda koje, u zavisnosti od karaktera strujanja, dopuštaju razna uprošćenja jednačina. U svakom slučaju rešenja moraju zadovoljavati zadate početne i granične uslove, koji mogu biti: kinematički i dinamički.

Početni uslovi moraju biti zadovoljeni u slučaju nestacionarnih strujanja i oni su kinematički ako je u fiksiranom trenutku vremena, recimo $t=0$, zadat raspored brzina u strujnom polju, tj.

$$(39.9) \quad v^i(x^k, 0) = v_0^i(x^k),$$

a dinamički, ako je u fiksiranom trenutku vremena zadat rasporeda napona u tačkama strujnog polja.

Kinematički granični uslovi sastoje se u tome što se brzinama daju određene vrednosti na graničnim površima. Kod viskoznih fluida, međutim, pretpostavlja se da su brzine čestica fluida na graničnim površima jednake brzini same površi, tj.

$$(39.10) \quad v^i/a = V^i,$$

gde je \vec{v}/a brzina čestica fluida na graničnoj površi a , a \vec{V} brzina granične površi. To znači da se pretpostavlja da je trenje između čestica fluida i granične površi toliko „jako“ da „lepi“ čestice uz granične površi. Dinamički granični uslovi sastoje se u tome što se naponima na graničnim površima daju određene vrednosti.

VI DINAMIKA NEVISKOZNIH FLUIDA

40. Stanje napona u neviskoznom fluidu. Model neviskoznog fluida ne obuhvata uticaj viskoznosti na ponašanje fluida. Konstitutivnu jednačinu neviskoznog fluida, prema tome, možemo dobiti iz (38.9) stavljajući da su koeficijenti viskoznosti jednaki nuli. Na taj način dobivamo

$$(40.1) \quad t^{ij} = -p g^{ij}.$$

Vidimo, dakle, da tenzor napona ne zavisi od tenzora brzine deformacije, već je u potpunosti određen hidrostatičkim pritiskom. To je jasno, jer kod neviskoznih fluida se ne javljaju unutrašnje sile kao otpori deformisanju fluidnih delića, pa je tenzor viskoznosti jednak nuli.

Kod neviskoznih fluida, prema tome, naponsko stanje u svakoj tački u fluidu je određeno vrednošću hidrostatičkog pritiska u toj tački. Vektor napona u bilo kojoj tački u fluidu, za proizvoljnu presečnu ravan određenu jediničnim vektorom normale \vec{n} , na osnovu (40.1), iznosi

$$(40.2) \quad t_{(\vec{n})}^i = t^{ij} n_j = -p g^{ij} n_j = -p n^i,$$

pa vidimo da je kolinearan sa vektorom \vec{n} a suprotno orijentisan, pri čemu mu je intenzitet određen vrednošću hidrostatičkog pritiska (sl. 67). Površinska sila koja deluje na element površi da , na osnovu (35.5) i (40.2), iznosi

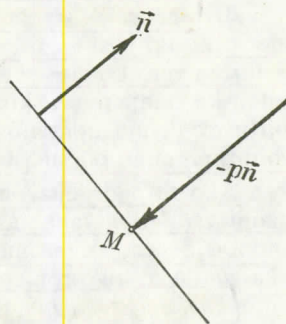
$$(40.3) \quad dT^i = t_{(\vec{n})}^i da = -p n^i da = -p da^i,$$

pa zaključujemo da važi stav: *Kod neviskoznih fluida površinska sila deluje uvek upravno na element površi.* Iz tog razloga se naziva elementarna sila pritiska i od sada ćemo je obeležavati sa $d\vec{P}$.

Rezultujuća sila pritiska, koja deluje na konačnu površ a , prema tome, iznosi

$$(40.4) \quad P^i = -\int_a p da^i.$$

S obzirom da je vektor napona uvek upravno na presečnu ravan, jasno je da u presečnoj ravni nema smičućih napona. U odnosu na proizvoljni sistem ortogonalnih



Sl. 67

koordinata matrica kontravarijantnih koordinata tenzora napona je oblika

$$(40.5) \quad \{t^{ij}\} = \begin{Bmatrix} -pg^{11} & 0 & 0 \\ 0 & -pg^{22} & 0 \\ 0 & 0 & -pg^{33} \end{Bmatrix},$$

dok su mešovite i fizičke koordinate međusobno jednake i prikazane u obliku matrice su

$$(40.6) \quad \{t_j^i\} = \{t_{ij}\} = \begin{Bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{Bmatrix},$$

Karakteristični brojevi tenzora napona, prema tome, međusobno su jednaki i iznose $-p$. Karakteristični pravci tenzora napona su ona koja tri međusobno upravna pravca, što znači da se jedinični vektori sistema ortogonalnih krivolinijskih koordinata uvek poklapaju sa karakterističnim vektorima tenzora napona. Drugim rečima, svaki pravac u fluidu može se uzeti za jedan od glavnih pravaca.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da je kod neviskoznih fluida devijatorski deo tenzora napona jednak nuli, tj. da je tenzor napona jednak svom sfernom delu.

2. Pokazati da se kod neviskoznog fluida ona koja tri međusobno upravna pravca mogu uzeti da budu glavni pravci tenzora napona.

3. Pokazati da kod neviskoznih fluida osnovne invarijante tenzora napona zadovoljavaju jednačinu

$$9t_{III} - t_1 t_{II} = 0.$$

36
41. **Jednačine stanja neviskoznih fluida.** Stanje fluida određuju tri fizičke veličine: pritisak, gustina i temperatura. Kod svakog fluida između tih veličina postoji analitička veza koja se naziva *jednačina stanja*. Pritisak, kao što smo videli, određuje naponsko stanje u neviskoznom fluidu. Pod njegovim dejstvom pojavljuju se naponi koji uvek deluju upravno na zamišljenu površ u fluidu. Ošobina fluida da menja svoju zapreminu pod dejstvom normalnih sila pritiska naziva se *stišljivost*.

Ako se pod dejstvom elementarnog pritiska dp zapremina dv fluidnog delića smanji za $d(dv)$, tada odnos $d(dv)/dv$ predstavlja relativnu promenu zapremine fluidnog delića, tj. promenu jedinice zapremine pod dejstvom elementarnog pritiska dp . Ako tu promenu izračunamo po jediničnom priraštaju pritiska, dobivamo *koeficijent stišljivosti*.

$$(41.1) \quad s = -\frac{1}{dv} \frac{d(dv)}{dp},$$

gde negativni znak dolazi zbog činjenice da se zapremina smanjuje pri povećanju pritiska i obrnuto. Recipročna vrednost koeficijenta stišljivosti,

$$(41.2) \quad e = -dv \frac{dp}{d(dv)},$$

37
naziva se modul stišljivosti. Iz jednačine konzervacije mase,

$$d(dm) = d(\rho dv) = d\rho dv + \rho d(dv) = 0,$$

dobivamo, međutim,

$$\frac{dv}{d(dv)} = -\frac{\rho}{d\rho},$$

pa modul stišljivosti možemo izraziti u obliku

$$(41.3) \quad e = \rho \frac{dp}{d\rho}.$$

Ako sada iskoristimo poznati Njutnov obrazac za brzinu prostiranja zvuka kroz homogeni neviskozni stišljivi fluid, tj.

$$(41.4) \quad c = \sqrt{\frac{e}{\rho}},$$

gde je c brzina prostiranja zvuka kroz posmatrani fluid, tada eliminisanjem modula stišljivosti e iz ove i jednačine (41.3), dobivamo

$$(41.5) \quad d\rho = \frac{dp}{c^2},$$

odnosno

$$(41.6) \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho}.$$

Brzina prostiranja zvuka predstavlja u stvari brzinu prostiranja bilo kog malog poremećaja, pa, prema tome, i brzinu prostiranja pritiska kroz fluid. Iz (41.5), međutim, vidimo da će biti $d\rho=0$, odnosno $\rho=\text{const.}$ (fluid nestišljiv), samo u slučaju kad je brzina c beskonačno velika, tj. kad se priraštaj pritiska trenutno prenosi kroz fluidni prostor. S obzirom, međutim, da brzina prostiranja pritiska ne može biti beskonačno velika, jasno je da ni fluid ne može biti nestišljiv, ali stišljivost se uvek može zanemariti kad je brzina c dovoljno velika a fluidni prostor dovoljno mali, tako da se priraštaj pritiska u jednoj tački u fluidu skoro trenutno prenosi u sve ostale tačke fluidnog prostora.

Stišljivost fluida se menja sa promenom pritiska i temperature. Eksperimentom se može ustanoviti da je stišljivost manja ako su pritisci i temperature veći. Tako, na primer, zapremina jednog litra vode na temperaturi 0°C smanji se za $0,0525\text{ cm}^3$ kad se pritisak poveća od nule na 1 kp/cm^2 , dok se pri istoj temperaturi smanji za $0,0488\text{ cm}^3$ kad se pritisak poveća od 199 kp/cm^2 na 200 kp/cm^2 . To znači da se stišljivost vode smanjuje ako se pri istoj temperaturi pritisak poveća. S druge strane, ako se zadrže promene pritiska ali na temperaturi od 20°C , utvrđuje se da se zapremina jednog litra vode smanji za $0,0491$, odnosno $0,0438\text{ cm}^3$, pa zaključujemo da se stišljivost vode smanjuje i pri povećanju temperature.

Fluid kod koga je pri konstantnoj temperaturi gustina konstantna, tj. kroz koji se pritisak trenutno prenosi, rekli smo da je nestišljiv. I kod takvih fluida, međutim, zapremina se menja sa promenom temperature. Ta promena vrši se po Gej-Lisakovom zakonu

$$(41.7) \quad dv_T = dv_0 [1 + \beta(T - T_0)],$$

gde je dv_T zapremina fluidnog delića na temperaturi T , dv_0 zapremina istog delića na temperaturi T_0 , a β koeficijent toplotnog širenja. Kako je

$$dv_T = \frac{dm}{\rho_T}, \quad dv_0 = \frac{dm}{\rho_0},$$

iz (41.7) dobivamo

$$(41.8) \quad \rho_T = \frac{\rho_0}{1 + \beta(T - T_0)},$$

gde su ρ_T i ρ_0 gustine na temperaturama T i T_0 , a razlika $T - T_0$ predstavlja priraštaj temperature. Eksperimentom se može utvrditi da koeficijent toplotnog širenja zavisi od temperature. Za male temperaturske razlike, međutim, možemo ga aproksimirati konstantom, jer bi već i linearna zavisnost od priraštaja temperature dovela u izrazu (41.8) do kvadratnog člana po $T - T_0$ koga, kao malu veličinu višeg reda, možemo zanemariti. Osim toga, kod tečnosti je koeficijent toplotnog širenja mnogo manji od jedinice. Pri temperaturskim razlikama od 0°C do 100°C , na primer, za vodu iznosi 0,00044, a za živu 0,00018. Kod tečnosti, prema tome, koeficijent toplotnog širenja ne samo da ne zavisi od temperaturskih priraštaja koji su dovoljno mali, već je i veoma mali broj, tako da se za njih sa dovoljnom tačnošću može uzeti da gustina ne zavisi od temperature, tj. da imaju jednačinu stanja

$$(41.9) \quad \rho = \rho_0 = \text{const.}$$

Znači, tečnosti sa dovoljno opravdanja možemo smatrati za nestišljive fluide, tj. da njihova gustina ne zavisi ni od pritiska ni od temperature. Jasno je da ovakva jednačina stanja predstavlja izvesnu idealizaciju: uključuje dve pretpostavke o fluidu. Prvo, da je brzina prostiranja zvuka kroz fluid dovoljno velika a fluidni prostor dovoljno mali, pa se može smatrati da se priraštaj pritiska trenutno prenosi u sve tačke fluidnog prostora i drugo, da se gustina fluida ne menja pri malim priraštajima temperature. Samo oni fluidi koji se tako ponašaju (a to su sve tečnosti) mogu se sa dovoljno opravdanja smatrati za nestišljive. Pri tome treba imati u vidu da se u izvesnim slučajevima stišljivost tečnosti ne može zanemariti. Kao primer može se navesti slučaj kad se tečnost nalazi u veoma dugačkim cevima, pa se, bez obzira na vrednost brzine prostiranja zvuka, ne može uzeti da se priraštaj pritiska trenutno prenosi sa jednog na drugi kraj cevi.

Za razliku od tečnosti, gasovi se ponašaju na sasvim drugačiji način. Za idealne (neviskozne) gasove uzima se da se ponašaju po opštoj jednačini stanja

$$(41.10) \quad \frac{\rho}{p} T = \frac{1}{gR},$$

gde je g ubrzanje Zemljine teže, R gasna konstanta koja ima dimenziju $[\text{kpm}/\text{kp}^\circ\text{K}]$ i T apsolutna temperatura koja se meri stepenima Kelvinovim, tj. $T^\circ\text{K} = 273 + t^\circ\text{C}$.

U vazduhoplovstvu stanje atmosferskog vazduha se svodi na tzv. *normalnu* ili *standardnu atmosferu*, u kojoj se uzima da atmosferski pritisak p_0 iznosi 760 milimetara živinog stuba (na morskome nivou), apsolutna temperatura $T_0 = 273 + 15^\circ\text{C} = 288^\circ\text{K}$, gasna konstanta $R = 29,27$, pa se za gustinu dobiva

$$\rho_0 = \frac{10\,333}{29,27 \cdot 288 \cdot 9,81} \approx 0,125 [\text{kp s}^2 \text{m}^{-4}],$$

tako da se jednačina stanja može napisati u obliku

$$(41.11) \quad \frac{\rho}{p} T = \frac{\rho_0}{p_0} T_0 = \text{const.}$$

Znači, da bismo odredili gustinu vazduha pri datom pritisku potrebno je prvo odrediti raspored temperature. On se, međutim, nalazi na osnovu termodinamičkih razmatranja u koje se ovde nećemo upuštati.

Ako se iz jednačine stanja stišljivog fluida temperatura može izdvojiti, gustina se izražava kao funkcija samo pritiska, tj.

$$(41.12) \quad \rho = f(p),$$

pa za fluid kažemo da je *barotropan*. Inače je *baroklin*. Jasno je da se nestišljivi fluidi, $\rho = \rho_0 = \text{const.}$, mogu smatrati za barotropne. Kod barotropnih fluida, uvodeći skalarnu funkciju pritiska

$$\Phi(p) = \int \frac{dp}{\rho},$$

tako da je

$$\Phi_{,i} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial x^i} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} p_{,i} = \frac{1}{\rho} p_{,i}.$$

vidimo da važi relacija

$$(41.13) \quad \frac{1}{\rho} p_{,i} = \left(\int \frac{dp}{\rho} \right)_{,i},$$

ili, u vektorskim oznakama,

$$(41.14) \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right).$$

Ako je proces izotermički (temperaturna konstantna), jednačina stanja barotropnog fluida je

$$(41.15) \quad \frac{\rho}{p} = \frac{\rho_0}{p_0},$$

odnosno

$$(41.16) \quad \rho = Cp$$

gde je C konstanta. Prema tome, kod izotermičkih procesa barotropnih fluida gustina je linearna funkcija pritiska.

Za politropske procese jednačina stanja barotropnog fluida je

$$(41.17) \quad \frac{\rho^n}{p} = \frac{\rho_0^n}{p_0},$$

odnosno

$$(41.18) \quad \rho^n = Cp,$$

gde je n ceo broj.

Za adijabatske procese (pri kojima nema dovođenja ni odvođenja toplote) jednačina stanja barotropnog fluida je

$$(41.19) \quad \frac{\rho^\kappa}{p} = \frac{\rho_0^\kappa}{p_0},$$

odnosno

$$(41.20) \quad \rho^\kappa = Cp,$$

gde je κ ma koji broj. Za vazduh, na primer, je $\kappa = 1,408$.

U svim navedenim procesima temperatura je isključena iz jednačine stanja. Fluid je, prema tome, barotropan. Za barotropne fluide, pokazali smo, važi relacija (41.13), odnosno (41.14).

DIF. JED. KRETANJA 38

42. Ojlerova jednačina. Da bismo dobili parcijalne diferencijalne jednačine kretanja nevizkoznog fluida, potrebno je da u diferencijalnoj jednačini kretanja kontinuuma (36.7) tenzor napona izrazimo preko konstitutivne jednačine nevizkoznog fluida (40.1). Iz (40.1), naime, dobivamo

$$t^{ij}_{,j} = -p_{,i} g^{ij},$$

pa, zamenjujući to u (36.7), biće diferencijalna jednačina kretanja nevizkoznog fluida oblika

$$(42.1) \quad \frac{\delta v^i}{\delta t} = f^i - \frac{1}{\rho} p_{,i} g^{ij}.$$

U kovarijantnom obliku ova jednačina je

$$(42.2) \quad \frac{\delta v_i}{\delta t} = f_i - \frac{1}{\rho} p_{,i},$$

a u vektorskim oznakama

$$(42.3) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Diferencijalna jednačina kretanja nevizkoznog fluida u ekvivalentnim oblicima (42.1), (42.2) i (42.3) poznata je pod nazivom Ojlerova diferencijalna jednačina kretanja, ili kratko, Ojlerova jednačina. Napred je napisana u ekvivalentnim koordinatnim oblicima i vektorskom obliku, i, jasno, odgovaraju joj tri skalarne jednačine. Lako je zapaziti da se jednačina (42.3) neposredno može dobiti iz Navije-Stoksove jednačine (39.3) ako se uzme da su koeficijenti viskoznosti jednaki nuli.

Ako kovarijantne koordinate vektora ubrzanja izrazimo u obliku (7.14), Ojlerovu jednačinu (42.2) možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{1}{2} (v_k v^k)_{,i} + \varepsilon_{ikl} v^k \varepsilon^{lmn} v_{m,n} = f_i - \frac{1}{\rho} p_{,i}$$

odnosno

$$(42.4) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,i} + 2 \varepsilon_{ikl} v^k \omega^l = f_i - \frac{1}{\rho} p_{,i}.$$

Napisana vektorskim oznakama, prethodna jednačina je oblika

$$(42.5) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(\vec{v} \times \vec{\omega}) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

ili, s obzirom na (8.11),

$$(42.6) \quad \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) - (\vec{v} \times \text{rot } \vec{v}) = \vec{f} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p.$$

Ova je jednačina ekvivalentna Ojlerovoj jednačini (42.3) i poznata je pod nazivom transformisana Ojlerova jednačina. Za razliku od Navije-Stoksove jednačine, ona predstavlja sistem od tri nelinearne parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda. Kao i u Navije-Stoksovoj jednačini, u njoj figurišu tri nepoznate veličine: brzina, pritisak i gustina, odnosno pet nepoznatih skalarnih funkcija: tri koordinate brzine, pritisak i gustina. Za njihovo određivanje, prema tome, potrebno je pet jednačina. To su tri Ojlerove jednačine, jednačina konzervacije mase i jednačina stanja.

Zbog nelinearnosti, Ojlerove jednačine su, kao i Navije-Stoksove, veoma složene za integraciju. Pitanje egzistencije i jedinstvenosti rešenja takođe u opštem slučaju nije rešeno. Zbog toga se prilikom integracije postupa na isti način kao i kod Navije-Stoksovih jednačina: ili se unapred pretpostavlja oblik putanja čestica fluida, ili se koristi neka od približnih metoda, što zavisi od konkretnog slučaja strujanja. U svakom slučaju se Ojlerove jednačine uprošćuju tako da se omogućuje njihova integracija. Jasno je da pri integraciji moraju biti zadani određeni početni i granični uslovi. Oni, kao i u slučaju viskozih fluida, mogu biti kinematički i dinamički i raznih oblika. Važno je, međutim, naglasiti da se kod neviskozih fluida ne može koristiti pretpostavka o prilepljivanju čestica fluida uz krute granične površi. To je jasno jer se kod neviskozih fluida trenje između fluidnih delića, kao i između fluidnih delića i granične površi, ne uzima u obzir. Stoga se brzini može nametnuti samo uslov da je njena normalna komponenta na graničnoj površi jednaka nuli, tj. da fluid klizi u tangentnom pravcu po graničnoj površi, bez obzira da li je to slobodna površ ili neka kruta površ u fluidu.

Pri strujanju neviskozih fluida Ojlerova jednačina uvek mora biti zadovoljena. Na osnovu toga, pokazaćemo sada da važi sledeći stav: Pri strujanju barotropnog neviskozog fluida u polju konzervativnih zapreminskih sila ubrzanje ima potencijal. 39

Dokaz. Ako su zapreminske sile konzervativne i ako je fluid barotropan, tada je

$$\vec{f} = \text{grad } U, \quad \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right),$$

pa Ojlerovu jednačinu (42.3) možemo napisati u obliku

$$(42.7) \quad \frac{d\vec{v}}{dt} = \text{grad} \left(U - \int \frac{dp}{\rho} \right),$$

odnosno

$$\vec{w} = \text{grad } \Phi, \quad \left(\Phi = U - \int \frac{dp}{\rho} \right),$$

gde je Φ potencijal ubrzanja, čime je stav dokazan.

Na osnovu (14.18) vidimo da je (42.7) dovoljan uslov da vrtložne linije budu materijalne. Takođe, na osnovu (14.27) zaključujemo da je to potreban i dovoljan uslov da jačina vrtloga bude nepromenljiva sa vremenom duž svake vrtložne cevi, a na osnovu (14.37) da je strujanje sa nepromenljivom cirkulacijom. Prema tome zaključujemo: ako barotropni neviskozni fluid struji u polju konzervativnih sila, zadovoljene su i Tompsonova i Helmholtcove teoreme (odjeljak 14).

V e ž b a n j a

1. Ojlerove diferencijalne jednačine (42.6), izražene preko fizičkih koordinata, napisati u sistemu:

- Dekartovih pravougljih koordinata,
- cilindarskih polarnih koordinata i
- sfernih polarnih koordinata.

2. Ako je strujanje neviskoznog fluida ravansko, napisati Ojlerove jednačine (42.6) preko fizičkih koordinata u sistemu

- Dekartovih pravougljih koordinata i
- polarnih koordinata.

3. Ako je strujanje neviskoznog fluida osnosimetrično, napisati Ojlerove jednačine (42.6) izražene preko fizičkih koordinata.

4. Ako pri strujanju neviskoznog fluida ubrzanje ima potencijal i ako su zapreminske sile konzervativne, pokazati da fluid mora biti barotropan.

5. Ako pri strujanju barotropnog neviskoznog fluida ubrzanje ima potencijal, pokazati da zapreminske sile moraju biti konzervativne.

40
43. **Helmholtcova jednačina.** Helmholtcova diferencijalna jednačina se dobiva iz transformisane Ojlerove jednačine eliminisanjem hidrostatičkog pritiska. Ako, naime, barotropni neviskozni fluid struji u polju konzervativnih sila, Ojlerovu jednačinu (42.4) možemo napisati u obliku

$$(43.1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2}\right)_{,i} + 2 v^k \omega_{ik} = \left(U - \int \frac{dp}{\rho}\right)_{,i}$$

pri čemu smo stavili $\varepsilon_{ikl} \omega^l = \omega_{ik}$. Ovu jednačinu očigledno možemo napisati u obliku

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + 2 v^k \omega_{ik} = \left(U - \frac{v^2}{2} - \int \frac{dp}{\rho}\right)_{,i}$$

pa izračunavanjem rotora, dobivamo

$$\frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon^{lji} v_{i,j}) + 2 \varepsilon^{lji} v_{,j}^k \omega_{ik} + 2 \varepsilon^{lji} v^k \omega_{ik,j} = 0,$$

jer se, s obzirom da je gradijent skalarne funkcije, desna strana anulira. Prethodnu jednačinu možemo, dalje, napisati u obliku

$$-\frac{\partial \omega^l}{\partial t} + \varepsilon^{lji} \varepsilon_{ikr} v_{,j}^k \omega^r + \varepsilon^{lji} \varepsilon_{ikr} v^k \omega_{,j}^r = 0,$$

odnosno

$$\frac{\partial \omega^l}{\partial t} = \delta_{kr}^{lj} v_{,j}^k \omega^r + \delta_{kr}^{lj} v^k \omega_{,j}^r$$

ili, s obzirom da je $\omega^k_{,k} = 0$, u obliku

$$\frac{\partial \omega^l}{\partial t} = v_{,r}^l \omega^r - v^k \omega_{,k}^l - v_{,k}^k \omega^l.$$

Iz jednačine konzervacije mase,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho v_{,k}^k = 0,$$

međutim, dobivamo

$$v_{,k}^k = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt},$$

pa prethodna jednačina postaje

$$\frac{\partial \omega^l}{\partial t} + \omega_{,k}^l v^k - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \omega^l = \omega^r v_{,r}^l,$$

odnosno

$$\frac{\delta \omega^l}{\delta t} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \omega^l = \omega^r v_{,r}^l.$$

Kako je, međutim,

$$\frac{\delta \omega^l}{\delta t} - \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dt} \omega^l = \rho \frac{\delta \left(\frac{\omega^l}{\rho} \right)}{\delta t},$$

prethodnu jednačinu možemo, konačno, napisati u obliku

$$(43.2) \quad \frac{\delta \left(\frac{\omega^l}{\rho} \right)}{\delta t} = \frac{\omega^k}{\rho} v_{,k}^l,$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(43.3) \quad \frac{d \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right)}{dt} = \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \cdot \nabla \right) \vec{v},$$

što je Helmholtcova jednačina. Ona je, kao što smo videli, dobivena iz Ojlerove jednačine (43.1), za neviskozni barotropni fluid koji se kreće u polju konzervativnih sila, eliminisanjem hidrostatičkog pritiska. U njoj, prema tome, figuriše jedna nepoznata manje, ali je zato povišen red jednačine.

Za nestišljive fluide, $\rho = \text{const.}$, Helmholtcova jednačina je oblika

$$(43.4) \quad \frac{\delta \omega^l}{\delta t} = \omega^k v_{,k}^l,$$

odnosno, u vektorskom obliku,

$$(43.5) \quad \frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \nabla) \vec{v}.$$

Helmholcovo jednačini (43.3) odgovara sistem od tri skalarne jednačine, koje, zajedno sa jednačinom konzervacije mase, predstavljaju kompletan sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina za određivanje nepoznatih funkcija v_i i ρ . U slučaju nestišljivih fluida, međutim, s obzirom da je ρ poznata konstanta, iz jednačina (43.5) mogu se odrediti koordinate brzine, uz, jasno, odgovarajuće početne i granične uslove.

Helmholcova jednačina je izvedena pod uslovima pod kojima ubrzanje ima potencijal, pa je jasno da su u tom slučaju zadovoljene Tompsonova i Helmholtcove teoreme.

44. Integrali Ojlerove jednačine. U odeljku 42. je pokazano da ubrzanje ima potencijal kad je neviskozni fluid barotropan i kad struji u polju konzervativnih zapreminskih sila. Ojlerova jednačina (42.4) može se u tom slučaju napisati u obliku

$$(44.1) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} \right)_{,i} = 2 \varepsilon_{ikl} \omega^k v^l$$

i pokazaćemo da se može integraliti u nekoliko specijalnih slučajeva.

1. Stacionarno zavojno strujanje. Kod zavojnih strujanja je vektor vrtložnosti kolinaran sa vektorom brzine, pa je

$$(44.2) \quad 2 \varepsilon_{ikl} \omega^k v^l = 0.$$

U odeljku 15. je pokazano da je zavojno strujanje stacionarno ako je polje vektora vrtložnosti stacionarno, pa je

$$(44.3) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = 0.$$

Koristeći sada (44.2) i (44.3), jednačina (44.1) postaje

$$(44.4) \quad \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} \right)_{,i} = 0,$$

odakle integracijom dobivamo

$$(44.5) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

gde je C integraciona konstanta. Ova jednačina mora biti zadovoljena u svakoj tački fluidnog prostora, pri čemu se integraciona konstanta određuje iz uslova da je u nekoj tački $x^i = x_0^i$ strujnog polja: $v = v_0$, $U = U_0$, $p = p_0$ i $\rho = \rho_0$. Na taj način dobivamo

$$(44.6) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - U_0 + \left(\int \frac{dp}{\rho} \right)_0,$$

gde izraz na desnoj strani predstavlja vrednost integracione konstante.

2. Potencijalno strujanje. Koši-Lagranžev integral. Ako je strujanje potencijalno, tada je

$$\omega^k = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{,i}$$

pa se jednačina (44.1) može napisati u obliku

$$(44.7) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} \right)_{,i} = 0,$$

odakle integracijom dobivamo

$$(44.8) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C(t),$$

gde je integraciona konstanta funkcija vremena, ako je strujanje nestacionarno.

Za stacionarna strujanja, međutim, s obzirom da je $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ i $C(t) = C$, prethodna jednačina postaje

$$(44.9) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C$$

i vidimo da je istog oblika kao jednačina (44.5) za slučaj zavojnih stacionarnih strujanja. Integraciona konstanta se određuje na isti način kao i u prethodnom slučaju, pa se jednačina (44.9) takođe može napisati u obliku (44.6).

Jednačina (44.8) za slučaj nestacionarnih strujanja, odnosno (44.9) za slučaj stacionarnih strujanja, naziva se *Koši-Lagranžev integral Ojlerove jednačine ili Koši-Lagranževa jednačina*. U literaturi se ona još naziva i *Bernulijeva jednačina za potencijalna strujanja*.

Za potencijalna strujanja nestišljivog fluida, s obzirom da je $\rho = \text{const.}$, jednačina (44.8) postaje

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = C(t),$$

odnosno, ako stavimo $v^2 = g^{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j}$,

$$(44.10) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} g^{ij} \varphi_{,i} \varphi_{,j} - U + \frac{p}{\rho} = 0,$$

gde smo integracionu konstantu izostavili, jer se uvek, umesto potencijala φ može uzeti potencijal

$$\varphi_1 = \varphi - \int C(t) dt.$$

U jednačini (44.10) kao nepoznane funkcije figurišu potencijal brzine φ i hidrostatički pritisak p . Za njihovo određivanje, pored jednačine (44.10), na raspolaganju nam je i jednačina konzervacije mase, koja je u ovom slučaju oblika

$$v_{,k}^k = \Delta \varphi = 0.$$

Prema tome, iz Laplasove diferencijalne jednačine, uz, jasno, određene granične uslove, potrebno je prvo odrediti potencijal brzine, a zatim se iz jednačine (44.10) može odrediti hidrostatički pritisak.

Kod potencijalnih strujanja stišljivih fluida, međutim, pored jednačine (44.8) i jednačine konzervacije mase, za određivanje nepoznatih funkcija φ , ρ i p potrebna je još i jednačina stanja fluida.

3. Bernulijev integral. Ako je pri strujanju neviskozno^g barotropno^g fluida u polju konzervativnih sila polje vektora vrtložnosti stacionarno, tada se brzina može izraziti kao zbir jednog potencijalnog i jednog stacionarnog polja (videti jednačinu (14.8)), pa je

$$(44.11) \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = \chi_{,i}, \quad (\chi = \chi(x^k, t)).$$

U ovom slučaju Ojlerova jednačina (44.1) postaje

$$\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi \right)_{,i} = 2 \varepsilon_{ikl} \omega^k v^l.$$

Ako sada ovu jednačinu skalarno pomnožimo sa orijentisanim elementom luka strujne linije, dobivamo

$$(44.12) \quad \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi \right)_{,i} dx^i_{(L)} = 2 \varepsilon_{ikl} \omega^k v^l dx^i_{(L)},$$

Kako je, međutim,

$$\left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi \right)_{,i} dx^i_{(L)} = d \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi \right)_{(L)},$$

gde se priraštaj računa u pravcu strujne linije, i

$$2 \varepsilon_{ikl} \omega^k v^l dx^i_{(L)} = 0,$$

jer je brzina kolinearna sa orijentisanim elementom luka strujne linije, jednačina (44.12) može da se napiše u obliku

$$d \left(\frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi \right)_{(L)} = 0.$$

Integracijom duž strujne linije, pri čemu vreme smatramo za parametar, odavde dobivamo

$$(44.13) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} + \chi = C(t).$$

Posebno, ako je strujanje stacionarno, (44.11) se svodi na

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = 0,$$

pa, bez gubljenja u opštosti, možemo uzeti da je $\chi=0$. Na taj način jednačina (44.13) postaje

$$(44.14) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = C,$$

što je *Bernulijev integral* Ojlerove jednačine ili *Bernulijeva jednačina*, iako je Bernuli nije izveo u ovom obliku već u specijalnom slučaju kad je fluid nestišljiv i kad struji u polju sile Zemljine teže. Važno je, međutim, ne ispustiti iz vida da je pri izvođenju jednačine (44.13), odnosno (44.14), integracija vršena duž strujne linije, pa te jednačine važe samo duž strujnih linija, tj. vrednost integracione konstante se menja od jedne do druge strujnice, pri čemu se, u slučaju stacionarnih strujanja, strujne linije poklapaju sa putanjama čestica fluida.

U Bernulijevoj jednačini (44.14) integracionu konstantu određujemo iz uslova da je u nekoj tački $x^i=x^i_0$ strujne linije (ili putanje čestica fluida): $v=v_0$, $U=U_0$, $p=p_0$ i $\rho=\rho_0$. Na taj način, jednačinu (44.14) možemo napisati u obliku

$$(44.15) \quad \frac{v^2}{2} - U + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - U_0 + \left(\int \frac{dp}{\rho} \right)_0,$$

pri čemu izraz na desnoj strani predstavlja vrednost integracione konstante koja se menja od jedne do druge strujne linije.

Bernulijeva jednačina (44.14), odnosno (44.15), je skalarna i u njoj figurišu tri nepoznate veličine: intenzitet brzine, gustina i hidrostatički pritisak, pa je jasno da iz nje ne možemo odrediti sve nepoznate veličine. Bernulijeva jednačina se može dalje uprostiti u zavisnosti od toga da li je fluid stišljiv ili ne. Iz tog razloga ćemo u sledećim odeljcima posmatrati odvojeno ta dva slučaja.

42

45. Bernulijeva jednačina za nestišljive fluide. Za nestišljive fluide jednačina stanja je $\rho=\text{const.}$, pa se Bernulijeva jednačina (44.15) može napisati u obliku

$$\frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - U_0 + \frac{p_0}{\rho},$$

odnosno

$$(45.1) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{p - p_0}{\rho} - (U - U_0) = 0,$$

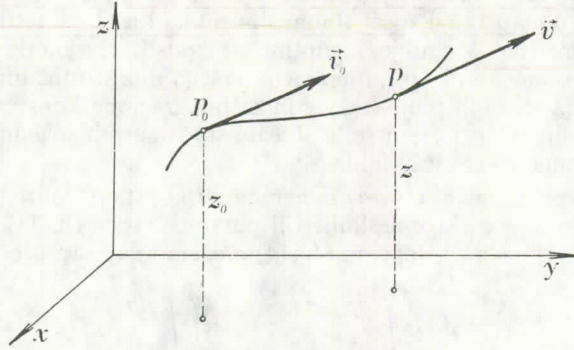
pri čemu gustina u njoj figuriše kao poznata konstanta.

Posebno, ako nestišljivi fluid struji u polju sile Zemljine teže i ako izaberemo sistem Dekartovih pravougljih koordinata x , y , z tako da osa z bude usmerena vertikalno naviše (sl. 68), potencijal zapreminske sile je $U = -gz$, gde je g ubrzanje Zemljine teže, pa se Bernulijeva jednačina (45.1) svodi na

$$(45.2) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} + gz = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho} + gz_0,$$

gde su v_0 , p_0 i z_0 odgovarajuće vrednosti u tački strujne linije sa Dekartovim pravougljim koordinatama x_0 , y_0 i z_0 (sl. 68). Svi članovi na levoj strani jednačine (45.2)

imaju dimenziju energije po jedinici mase: prvi član predstavlja kinetičku energiju, drugi — energiju pritiska ili pritisnu energiju, a treći — potencijalnu energiju, računajte po jedinici mase, pa zaključujemo: Pri stacionarnom strujanju bartropnog neviskoznog fluida u polju konzervativnih sila, zbir kinetičke, pritisne i potencijalne energije ima istu vrednost u svakoj tački strujne linije.



Sl. 68

Ako jednačinu (45.2) napišemo u obliku

$$(45.2) \quad \frac{v^2}{2g} + \frac{p}{\gamma} + z = \frac{v_0^2}{2g} + \frac{p_0}{\gamma} + z_0,$$

gde je $\gamma = \rho g$ specifična težina fluida, vidimo da svaki član ima dimenziju dužine: prvi se naziva brzinska visina, drugi — pritisna visina, a treći — geodezijska visina, pa zaključujemo: Pri stacionarnom strujanju nestišljivog barotropnog fluida u polju sile Zemljine teže, zbir brzinske, pritisne i geodezijske visine ima istu vrednost u svakoj tački strujne linije.

Ako se strujna linija nalazi u horizontalnoj ravni, s obzirom da sve tačke strujne linije imaju istu koordinatu z , jednačina (45.2) se svodi na

$$(45.4) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho},$$

odakle vidimo da je zbir kinetičke i pritisne energije konstantan duž svake horizontalne strujne linije. Na osnovu toga zaključujemo da će brzina biti veća u onim tačkama strujne linije u kojima je pritisak manji i obrnuto. S obzirom da je pritisak nenegativna veličina, najveća vrednost brzine postići će se u onim tačkama u kojima je pritisak jednak nuli, tj.

$$(45.5) \quad v_{\max}^2 = v_0^2 + 2 \frac{p_0}{\rho}.$$

Takođe, iz (45.4) zaključujemo da će pritisak imati najveću vrednost u onim tačkama strujne linije u kojima je brzina jednaka nuli, tj.

$$(45.6) \quad p_{\max} = p_0 + \rho \frac{v_0^2}{2}.$$

Prema tome, hidrostatički pritisak ima najveću vrednost u mirnom fluidu. Sa povećanjem brzine vrednost hidrostatičkog pritiska opada, ali ne može biti manja od nule. Nultoј vrednosti hidrostatičkog pritiska odgovara maksimalna vrednost brzine.

43

46. Bernulijeva jednačina za stišljive fluide. Kod strujanja stišljivih fluida mogu se zapreminske sile zanemariti, jer je njihov uticaj na strujanje neznatan prema uticaju ostalih sila. U tom slučaju Bernulijeva jednačina (44.15) postaje

$$(46.1) \quad \frac{v^2}{2} + \int \frac{dp}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \left(\int \frac{dp}{\rho} \right)_0,$$

odnosno

$$(46.2) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = 0.$$

Da bismo iz ove jednačine brzinu izrazili u funkciji samo pritiska ili samo gustine, potrebno je da imamo odgovarajuću jednačinu stanja. Posebno ćemo se zadržati na slučajevima izotermičkih i adijabatskih strujanja.

a) Kod izotermičkih procesa jednačina stanja je

$$(46.3) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

odakle dobivamo

$$dp = \frac{p_0}{\rho_0} d\rho,$$

odnosno

$$\frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho}{\rho},$$

pa je

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Na osnovu ovoga, Bernulijevu jednačinu (46.2) možemo napisati u obliku

$$(46.4) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0} = 0.$$

Iz (46.4), koristeći jednačinu stanja (46.3), za brzinu prostiranja zvuka dobivamo

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = c_0^2,$$

pa zaključujemo da je kod izotermičkih procesa barotropnih fluida brzina zvuka konstantna. Koristeći brzinu zvuka, jednačinu (46.4) možemo napisati u obliku

$$(46.5) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + 2 c_0^2 \ln \frac{\rho}{\rho_0} = 0,$$

odakle, s obzirom na (46.3), za raspored pritiska, odnosno gustine, u strujnom polju dobivamo

$$(46.6) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{v^2 - v_0^2}{2c^2}}$$

b) Kad adijabatskih procesa jednačina stanja je

$$(46.7) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

odakle dobivamo

$$\frac{dp}{p_0} = \kappa \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \frac{d\rho}{\rho_0},$$

odnosno

$$\frac{dp}{\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa-1} \frac{d\rho}{\rho}.$$

Ovaj izraz možemo napisati u obliku

$$\frac{dp}{\rho} = \kappa \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^{\kappa-2} d\rho,$$

pa dobivamo

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0^\kappa} \rho^{\kappa-1} \Big|_{p_0}^p,$$

odnosno, ako iskoristimo jednačinu stanja (46.7),

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho^\kappa} \rho^{\kappa-1} \Big|_{p_0}^p = \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p}{\rho} \Big|_{p_0}^p,$$

tj.

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right).$$

Prema tome, Bernulijevu jednačinu (46.2) možemo sada napisati u obliku

$$\frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right) = 0,$$

ili

$$(46.8) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right] = 0.$$

Koristeći jednačinu stanja (46.7), iz (41.6) za brzinu zvuka dobivamo

$$(46.9) \quad c^2 = \frac{dp}{d\rho} = \kappa \frac{p}{\rho}.$$

pa je

$$(46.10) \quad c_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Vidimo, dakle, da kod adijabatskih strujanja brzina zvuka nije ista u svim tačkama u fluidu, već se menja sa promenom pritiska i gustine. Brzina prostiranja zvuka iznosi c_0 u onim tačkama u kojima je pritisak p_0 i gustina ρ_0 . Koristeći (46.10) jednačinu (46.8) možemo izraziti u obliku

$$(46.11) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}} - 1 \right] = 0,$$

odnosno, koristeći jednačinu stanja (46.7),

$$(46.12) \quad \frac{v^2 - v_0^2}{2} + \frac{c_0^2}{\kappa - 1} \left[\left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{\kappa - 1} - 1 \right] = 0.$$

Iz ovih jednačina za raspored pritiska i gustine u funkciji brzine duž strujnih linija dobivamo

$$(46.13) \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}},$$

$$(46.14) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2 - v_0^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}.$$

Pri adijabatskoj promeni stanja, s obzirom da je

$$\int \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{c^2}{\kappa} = \frac{c^2}{\kappa - 1},$$

Bernulijevu jednačinu (46.2) možemo napisati u obliku

$$(46.15) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{c^2}{\kappa - 1} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \text{const.}$$

Ova jednačina važi duž svake strujne linije (za različite strujne linije različita je vrednost konstante) i pokazuje da je brzina čestica fluida manja u onima tačkama strujne linije u kojima je brzina prostiranja zvuka veća i obrnuto. Maksimalna brzina prostiranja zvuka postiže se u onim tačkama u kojima je brzina jednaka nuli, tj. u kojima fluid miruje. U mirnom vazduhu, na primer, pod uslovima standardne atmosfere na morskome nivou, maksimalna brzina zvuka ima vrednost

$$c_{\max} = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{1,408 \cdot 10333}{0,125}} \approx 342 \text{ m/s} \approx 1231 \text{ km/h},$$

što neposredno sledi iz (46.15), ako stavimo da je brzina jednaka nuli. Jasno je da će pri istim uslovima standardne atmosfere brzina prostiranja zvuka biti manja ako vazduh ne miruje već se kreće izvesnom brzinom.

U tačkama strujne linije u kojima je brzina prostiranja zvuka jednaka nuli, a tada je u njima pritisak jednak nuli, što se neposredno vidi iz (46.9), brzina čestica fluida ima maksimalnu vrednost. Stavljajući u jednačini (46.15) da je brzina prostiranja zvuka jednaka nuli, za maksimalnu vrednost brzine u toj tački strujne linije dobivamo

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0}.$$

Kako je, međutim, za $v_0 = 0$, $\kappa \frac{p_0}{\rho_0} = c_{\max}^2$, dobivamo

$$\frac{v_{\max}^2}{2} = \frac{c_{\max}^2}{\kappa - 1},$$

odakle sledi

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} c_{\max}.$$

Prema tome, maksimalnu brzinu čestica fluida, koja se postiže u tački strujne linije u kojoj je brzina prostiranja zvuka jednaka nuli, odnosno u kojoj je pritisak jednak nuli, izrazili smo preko maksimalne brzine prostiranja zvuka u toj tački, koja odgovara slučaju kad je brzina čestica fluida jednaka nuli u toj tački. Pod uslovima standardne atmosfere, maksimalna brzina čestica vazduha, prema tome, iznosi

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{0,408}} \cdot 342 \approx 760 \text{ m/s} \approx 2736 \text{ km/h}.$$

Tačke u fluidu u kojima je brzina čestica fluida jednaka brzini prostiranja zvuka nazivaju se *kritične tačke*, a brzine koje im odgovaraju — *kritične brzine*. Kritičnu brzinu dobivamo ako u jednačini (46.15) stavimo $v = c = v_{kr}$. Na taj način dobivamo

$$v_{kr}^2 \cdot \frac{\kappa + 1}{2(\kappa - 1)} = \frac{c_{\max}^2}{\kappa - 1},$$

odnosno

$$v_{kr} = c_{kr} = \sqrt{\frac{2}{\kappa + 1}} c_{\max} = \sqrt{\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1}} v_{\max}.$$

Za vazduh, pod uslovima standardne atmosfere, kritična brzina iznosi

$$v_{kr} = \sqrt{\frac{2}{2,408}} \cdot 342 \approx 312 \text{ m/s} \approx 1123 \text{ km/h}.$$

47. Primena Bernulijeve jednačine kod stacionarnih potencijalnih dvodimenzijских strujanja nestišljivih fluida. U slučaju stacionarnih potencijalnih strujanja barotropnog fluida u polju konzervativnih zapreminskih sila, Koši-Lagranžev integral (44.9) ne razlikuje se po obliku od Bernulijevog integrala (44.14), ali za razliku od njega on važi u svakoj tački u fluidu a ne samo duž strujnih linija, odnosno putanja čestica

fluida. Prema tome, kod stacionarnih potencijalnih strujanja nestišljivih fluida, Bernulijevu jednačinu možemo napisati u obliku.

$$(47.1) \quad \frac{v^2}{2} - U + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} - U_0 + \frac{p_0}{\rho}$$

i ona mora biti zadovoljena u svakoj tački strujnog polja, pri čemu su v_0 , U_0 i p_0 odgovarajuće vrednosti u nekoj fiksiranoj tački. U ovoj jednačini je ρ poznata konstanta, pa je jasno da se iz nje može odrediti raspored pritiska ako su poznati funkcija sile i raspored brzine u strujnom polju.

Uvodeći generalisani pritisak

$$(47.2) \quad P = p - \rho U,$$

Bernulijevu jednačinu (47.1) možemo napisati u obliku

$$(47.3) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{P_0}{\rho}.$$

U slučaju, pak, kad su zapreminske sile zanemarljive u odnosu na sile pritiska, možemo u jednačinama (47.1) i (47.2) izostaviti funkciju sile, pa se Bernulijeva jednačina svodi na oblik

$$(47.4) \quad \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = \frac{v_0^2}{2} + \frac{p_0}{\rho}.$$

Ovu jednačinu ćemo koristiti za određivanje rasporeda pritiska u strujnom polju kod već u kinematici proučenih dvodimenzijskih stacionarnih potencijalnih strujanja nestišljivih fluida.

1. *Ravanska strujanja.* U kinematici smo proučili izvestan broj ravanskih potencijalnih strujanja nestišljivih fluida. Za neke od tih strujanja odredićemo sada, korišćenjem Bernulijeve jednačine (47.4), raspored pritiska u strujnom polju.

a) *Stacionarno pravolinijsko strujanje.* Ovo je strujanje određeno potencijalom brzine (21.1), tako da je intenzitet brzine

$$v^2 = a^2 + b^2 = \text{const.},$$

gde su a i b projekcije vektora brzine na ose sistema Dekartovih pravouglanih koordinata u ravni strujanja. S obzirom da intenzitet brzine ima istu vrednost u svakoj tački strujnog polja, iz Bernulijeve jednačine (47.4) dobivamo

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho},$$

odnosno

$$p = p_0 = \text{const.}$$

Vidimo, dakle, da je pritisak konstantan, tj. ima istu vrednost u svim tačkama strujnog polja. Jasno je da ovakav rezultat ne bismo dobili ako bismo uzeli u obzir i uticaj odgovarajućih zapreminskih sila.

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga.* Ovo je strujanje određeno potencijalom brzine i strujnom funkcijom (21.6) tako da je intenzitet brzine

$$v = \frac{\Gamma}{2\pi r},$$

gde je Γ jačina vrtloga. U beskonačno udaljenim tačkama brzina je jednaka nuli, pa ako pritisak u tim tačkama označimo sa p_0 , Bernulijeva jednačina (47.4) postaje

$$\frac{\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}.$$

Odavde, za raspored pritiska odbivamo

$$p = p_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8\pi^2 r^2},$$

gde je p_0 pritisak u beskonačno udaljenim tačkama, tj. pritisak u mirnom fluidu. Prethodnu jednačinu, očigledno, možemo napisati

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2,$$

pa vidimo kako se menja pritisak sa promenom brzine. Maksimalna brzina čestica fluida postiže se u onim tačkama u kojima je pritisak jednak nuli, i, iz prethodne jednačine, za nju dobivamo

$$v_{\max} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}.$$

S obzirom da se veća brzina od ove ne može postići, zaključujemo da u tačkama strujnog polja mora biti zadovoljena relacija

$$\frac{\Gamma}{2\pi r} \leq \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}.$$

pri čemu se, jasno, uzimaju apsolutne vrednosti. Maksimalna brzina, prema tome, postići će se u onim tačkama $r=R$ za koje je zadovoljena jednakost

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}.$$

Kako, međutim, strujanje nema fizičkog smisla u oblasti $r < R$, jer bi u toj oblasti pritisak bio manji od nule, jasno je da vrtložno jezgro ne može biti manjeg poluprečnika od R . Ako uzmemo da se vrtložno jezgro obrće konstantnom ugaonom brzinom ω , apsolutnu vrednost jačine vrtloga možemo izraziti u obliku

$$\Gamma = 2a\omega = 2R^2\pi\omega,$$

pa prethodna jednačina daje

$$R\omega = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}},$$

odakle sledi

$$R = \frac{1}{\omega} \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}.$$

Poluprečnik vrtložnog jezgra, prema tome, veći je ako je ugaona brzina obrtanja vrtložnog jezgra manja i obrnuto. U svakom slučaju, za datu jačinu vrtloga Γ možemo odrediti poluprečnik vrtložnog jezgra i na taj način oblast u kojoj strujanje ima fizičkog smisla.

c) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora.* Ovo je strujanje određeno potencijalom brzine i strujnom funkcijom (21.9). S obzirom da je intenzitet brzine

$$v = \frac{\varepsilon}{2\pi r},$$

na sličan način kao i u prethodnom slučaju, iz Bernulijeve jednačine (47.4) za raspored pritiska dobivamo

$$p = p_0 - \frac{\rho \varepsilon^2}{8\pi^2 r^2},$$

gde je p_0 pritisak u beskonačno udaljenim tačkama, tj. tačkama u kojima fluid miruje.

Maksimalna brzina koja se kod ovog strujanja može postići iznosi

$$v_{\max} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}},$$

i postiže se u tačkama u kojima je pritisak jednak nuli, tj.

$$r = R = \frac{\varepsilon}{2\pi \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho}{2p_0}},$$

pa strujanje nema fizičkog smisla u oblasti $r < R$. Prema tome, oblast ograničenu poluprečnikom R moramo smatrati za singularnu oblast iz koje fluid izvire brzinom $v = v_{\max}$.

d) *Stacionarno aciklično strujanje oko kružnog cilindra.* Ovo je strujanje određeno kompleksnim potencijalom (33.15), a projekcije brzine na ose Dekartovog sistema pravougljih koordinata izrazima (33.17). U ovom slučaju, kao i u svim slučajevima kad fluid struji oko krutog tela, od posebnog je interesa da se odredi raspored pritiska na konturi tela. Na osnovu (33.17), stavljajući $r = R$, za kvadrat intenziteta brzine u tačkama konture cilindra dobivamo

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = 2v_0^2(1 - \cos 2\theta) = 4v_0^2 \sin^2 \theta.$$

Koristeći ovaj izraz, iz (47.4) sledi

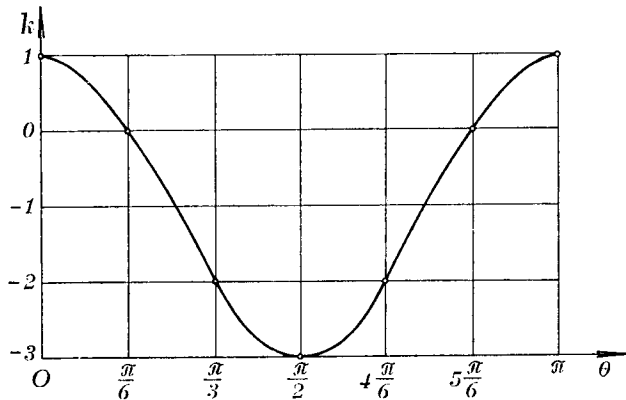
$$(47.5) \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 (1 - 4 \sin^2 \theta),$$

gde je p_0 pritisak u beskonačno udaljenim tačkama u kojima je brzina v_0 jednaka brzini jednolikog strujanja.

Izrazom (47.5) određen je pritisak u tačkama kruga poluprečnika R u ravni strujanja, izražen u funkciji polarnog ugla θ . Raspored pritiska po površi cilindra može biti određen i bezdimenzijskom veličinom

$$(47.6) \quad k = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \frac{v^2}{v_0^2} = 1 - 4 \sin^2 \theta,$$

koja se naziva *koeficijent pritiska*. Na ovaj način definisan, koeficijent pritiska je funkcija samo polarnog ugla, tj. ne zavisi od poluprečnika cilindra, gustine i od pritiska i brzine jednolikog strujanja. Zavisnost koeficijenta pritiska od polarnog ugla, u intervalu $0 \leq \theta \leq \pi$ (zbog simetrije strujanja u odnosu na x osu), grafički je



Sl. 69

prikazana na slici 69. Koeficijent pritiska je jednak jedinici u zaustavnim tačkama $\theta = \pi$ i $\theta = 0$. U tim tačkama je pritisak najveći i jednak je pritisku $p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2$. Polazeći od prednje zaustavne tačke, $\theta = \pi$, koeficijent pritiska se smanjuje i postaje jednak nuli u tački $\theta = \frac{5}{6} \pi$, u kom slučaju je $p = p_0$. Idući dalje, koeficijent pritiska ima negativnu vrednost i postiže minimum, $k = -3$, u tački $\theta = \frac{\pi}{2}$, u kom slučaju je $p = p_0 - \frac{3}{2} \rho v_0^2$. U intervalu $0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$ raspored pritiska je simetričan, što se vidi i na slici 69.

Najveća brzina se postiže u tačkama u kojima pritisak ima najmanju vrednost. U ovom slučaju to su tačke $\theta = \pm \frac{\pi}{6}$ i intenzitet brzine u njima iznosi $v = 2v_0$.

Ako Bernulijevu jednačinu (47.4) napišimo u obliku

$$(47.7) \quad p + \frac{1}{2} \rho v^2 = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2,$$

vidimo da svaki član ima dimenziju pritiska. Član $\frac{1}{2} \rho v^2$ se naziva *dinamički pritisak*, pa iz Bernulijeve jednačine (47.7) zaključujemo: *Zbir hidrostatičkog i dinamičkog pritiska je isti u svim tačkama strujnog polja*. Dinamički pritisak ima maksimalnu vrednost u tačkama u kojima je hidrostatički pritisak jednak nuli, a jednak je nuli u zaustavnim tačkama u kojima hidrostatički pritisak ima maksimalnu vrednost. Iz jednačine (47.7), stavljajući $p=0$, za maksimalnu brzinu dobivamo

$$(47.8) \quad v_{\max} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho} + v_0^2},$$

što je saglasno sa (45.5), ali važi za celo strujno polje, a ne samo duž strujne linije. U ovom slučaju strujanja p_0 i v_0 su hidrostatički pritisak i brzina u beskonačno udaljenim tačkama, a hidrostatički pritisak ima najmanju vrednost,

$$(47.8) \quad p = p_0 - \frac{3}{2} \rho v_0^2,$$

u tačkama $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$. U tim tačkama, kao što smo napred videli, brzina ima najveću vrednost koja iznosi $v=2v_0$. Jasno je stoga da su tačke $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ one tačke površi cilindra u kojima brzina može dostići maksimalnu vrednost, tj. u kojima hidrostatički pritisak može biti jednak nuli. Da u tim tačkama hidrostatički pritisak ne bi bio manji od nule, mora biti

$$(47.9) \quad p_0 \geq \frac{3}{2} \rho v_0^2,$$

što neposredno sledi iz (47.8), odnosno

$$(47.10) \quad v_0 \leq \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho}}.$$

Brzini jednolikog strujanja $v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho}}$ odgovara maksimalna brzina u tačkama

$\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ površi cilindra i iznosi

$$(47.11) \quad v_{\max} = 2 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho}}.$$

Veća brzina od ove ne može se postići, jer bi za brzine jednolikog strujanja koje su veće od $\sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho}}$ hidrostatički pritisak u tačkama $\theta = \pm \frac{\pi}{2}$ trebalo da bude negativan, što je fizički nemoguće, pa se u tim tačkama narušava kontinuitet strujanja, tj. u okolini tih tačaka nastaju praznine. Ova pojava se naziva *kavitacija* i može se eksperimentalnim putem ustanoviti. Napominjemo da je pojava kavitacije u tačkama strujnog polja nepoželjna, jer je posledica narušavanja kontinuiteta strujanja.

e) *Stacionarno ciklično strujanje oko kružnog cilindra.* Ovo je strujanje određeno kompleksnim potencijalom (33.21). Kompleksna brzina je određena izrazom (33.22), pa, stavljajući $r=R$, tj. $z=Re^{i\theta}$, dobivamo kompleksnu brzinu u tačkama kruga poluprečnika R ,

$$\bar{v} = v_0 (1 - e^{-2i\theta}) + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta} = 2v_0 i e^{-i\theta} \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2} + \frac{i\Gamma}{2\pi R} e^{-i\theta},$$

odnosno

$$\bar{v} = i e^{-i\theta} \left(2v_0 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R} \right).$$

Za intenzitet brzine odavde dobivamo

$$v = |\bar{v}| = v_0 \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R v_0} \right),$$

pa vidimo da se za $\Gamma=0$ svodi na intenzitet brzine u slučaju acikličnog strujanja. Koristeći prethodni izraz, iz Bernulijeve jednačine (47.7) dobivamo

$$(47.12) \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \left[1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R v_0} \right)^2 \right].$$

Koeficijent pritiska je, prema tome,

$$(47.13) \quad k = \frac{p - p_0}{\frac{1}{2} \rho v_0^2} = 1 - \left(2 \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi R v_0} \right)^2,$$

pa prethodnu jednačinu možemo napisati u obliku

$$(47.14) \quad p = p_0 + \frac{1}{2} \rho v_0^2 \cdot k.$$

Iz (47.13) vidimo da za razliku od acikličnog strujanja u ovom slučaju koeficijent pritiska nije funkcija samo položaja tačaka na krugu $r=R$, već zavisi i od poluprečnika cilindra i vrednosti cirkulacije. Za $\Gamma=0$ (47.13) se svodi na (47.6).

Lako je izračunati da koeficijent pritiska (47.13) ima minimum u tački $\theta = \frac{\pi}{2}$. U toj tački, prema tome, pritisak ima najmanju, a brzina najveću vrednost. Stavljajući $\theta = \frac{\pi}{2}$ iz (47.13) dobivamo najmanju vrednost koeficijenta pritiska

$$(47.15) \quad k_{\min} = - \left(3 + \frac{2\Gamma}{\pi R v_0} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 R^2 v_0^2} \right).$$

Jasno je da je ovo minimalna vrednost koeficijenta pritiska za dato Γ , R i v_0 . Promenom tih vrednosti, međutim, minimalna vrednost koeficijenta pritiska se menja. U specijalnom slučaju kad je, na primer, $\Gamma = 4\pi R v_0$, u kom slučaju u strujnom polju postoji jedna zaustavna tačka, $z = R e^{-i\frac{\pi}{2}}$, minimalna vrednost koeficijenta pritiska iznosi $k = -15$.

Minimalnoj vrednosti koeficijenta pritiska (47.15) odgovara u tački $\theta = \frac{\pi}{2}$ najmanja vrednost hidrostatičkog pritiska, koja, na osnovu (47.14), iznosi

$$(47.16) \quad p = p_0 - \frac{3}{2} \rho v_0^2 - \frac{\rho \Gamma}{R \pi} v_0 - \frac{\rho \Gamma^2}{8 R^2 \pi^2}.$$

S obzirom da pritisak ima uvek najmanju vrednost u tački $\theta = \frac{\pi}{2}$, jasno je da u toj tački brzina može najpre dostići maksimalnu moguću vrednost u slučaju kad pritisak u njoj bude jednak nuli. Staljavući $p=0$, iz prethodne jednačine dobivamo

$$(47.17) \quad p_0 = \frac{3}{2} \rho v_0^2 + \frac{\rho \Gamma}{R \pi} v_0 + \frac{\rho \Gamma^2}{8 R^2 \pi^2},$$

odnosno, ako ovu jednačinu rešimo po v_0 ,

$$(47.18) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{36} \frac{\Gamma^2}{R^2 \pi^2}} - \frac{1}{3} \frac{\Gamma}{R \pi},$$

pri čemu smo negativno rešenje po v_0 odbacili, jer pod intenzitetom brzine podrazumevamo apsolutnu vrednost brzine koja ne može biti negativna

Iz Bernulijeve jednačine (47.7), za brzinu dobivamo

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} (p_0 - p) + v_0^2},$$

pa će u tački $\theta = \frac{\pi}{2}$, u kojoj je pritisak određen vrednošću (47.16), brzina imati vrednost

$$(47.19) \quad v = \sqrt{4 v_0^2 + \frac{2 \Gamma}{R \pi} v_0 + \frac{\Gamma^2}{4 R^2 \pi^2}}.$$

Brzina će u ovoj tački imati maksimalnu moguću vrednost kad pritisak bude jednak nuli, odnosno kad za dato p_0 , Γ i R brzina jednolikog strujanja ima vrednost (47.18). Koristeći (47.18) iz (47.19), prema tome, dobivamo

$$(47.20) \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{8}{3} \frac{p_0}{\rho} + \frac{5}{36} \frac{\Gamma^2}{R^2 \pi^2} - \frac{2}{3} \frac{\Gamma}{R \pi} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{36} \frac{\Gamma^2}{R^2 \pi^2}}}.$$

Vidimo, dakle, da maksimalna brzina koja se može postići zavisi, pored pritiska p_0 u beskonačno udaljenim tačkama, i od cirkulacije Γ i poluprečnika cilindra R . Za dato p_0 , Γ i R veća brzina od ove ne može se postići, pa pritisak p_0 i brzina v_0 moraju zadovoljavati relacije

$$(47.21) \quad p_0 \geq \frac{3}{2} \rho v_0^2 + \frac{\rho \Gamma}{R \pi} v_0 + \frac{\rho \Gamma^2}{8 R^2 \pi^2},$$

odnosno

$$(47.22) \quad v_0 \leq \sqrt{\frac{2}{3} \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{36} \frac{\Gamma^2}{R^2 \pi^2}} - \frac{1}{3} \frac{\Gamma}{R \pi}.$$

Ako je pri datim vrednostima p_0 , Γ i R brzina jednolikog strujanja v_0 veća od (47.18), u tački $z = Re^{i\frac{\pi}{2}}$ pritisak bi bio manji od nule, pa zaključujemo da će se u toj tački narušiti kontinuitet strujanja, tj. pojaviće se kavitacija.

Iz (47.20) vidimo da se taj izraz za slučaj $\Gamma = 0$ svodi na (47.11), tj. na odgovarajući izraz u slučaju acikličnog strujanja. U posebnom slučaju, kad je, na primer, $\Gamma = 4R\pi v_0$, u kom slučaju u strujnom polju postoji samo jedna zaustavna tačka, $z = Re^{-i\frac{\pi}{2}}$, brzina u tački $z = Re^{i\frac{\pi}{2}}$ iznosi

$$(47.23) \quad v = 4v_0,$$

što neposredno sledi iz (47.19). Brzina jednolikog strujanja pri kojoj se u tački $z = Re^{i\frac{\pi}{2}}$ postiže $p = 0$, na osnovu (47.18) iznosi

$$(47.24) \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{15} \frac{p_0}{\rho}}.$$

Prema tome, da ne bi došlo do pojave kavitacije, brzina jednolikog strujanja mora u ovom slučaju zadovoljavati relaciju

$$(47.25) \quad v_0 \leq \sqrt{\frac{2}{15} \frac{p_0}{\rho}}.$$

Maksimalna brzina koja se može postići u tački $z = Re^{i\frac{\pi}{2}}$, na osnovu (47.23) i (47.24), iznosi

$$(47.26) \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{32}{15} \frac{p_0}{\rho}}.$$

Veća brzina od ove ne može se postići, jer bi se pri povećanju brzine v_0 iznad vrednosti (47.24) pojavila kavitacija.

2. *Osnosimetrična strujanja.* U odeljku 28. smo proučili nekoliko primera stacionarnih potencijalnih osnosimetričnih strujanja nestišljivih fluida. Pri tom smo pokazali da se pravolinijsko strujanje i strujanje u polju niza neprekidno raspoređenih izvora može proučavati ili kao ravansko ili kao osnosimetrično strujanje. Iz tog razloga ovde ćemo se zadržati samo na primeru stacionarnog potencijalnog strujanja u polju jednog izvora.

Stacionarno potencijalno strujanje nestišljivog fluida u polju jednog izvora ($\varepsilon > 0$) određeno je, u odnosu na sistem cilindarskih polarnih koordinata, potencijalom brzine i strujnom funkcijom

$$\varphi = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}}, \quad \psi = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}}.$$

Koristeći bilo koju od ovih funkcija, za intenzitet vektora brzine dobivamo

$$(47.27) \quad v = \frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{1}{r^2 + z^2}.$$

Iz Bernulijeve jednačine (47.4) za raspored pritiska dobivamo

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho v^2,$$

gde su p_0 i $v_0=0$ hidrostatički pritisak i brzina u beskonačno udaljenim tačkama. Koristeći (47.27), prethodnu jednačinu, možemo napisati u obliku

$$(47.28) \quad p = p_0 - \frac{\rho \varepsilon^2}{32 \pi^2} \frac{1}{(r^2 + z^2)^2},$$

i njome su, za dato p_0 , ρ i ε , određeni pritisci u svakoj regularnoj tački ravni strujanja (koordinatni početak je jedina singularna tačka).

Ako, pak, jednačinu (47.28) napišemo u obliku

$$(47.29) \quad p = p_0 - \frac{\rho \varepsilon^2}{32 \pi^2} \frac{1}{R^4},$$

gde je $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ poluprečnik kruga u ravni strujanja $\theta = \text{const.}$, odnosno poluprečnik sfere u trodimenzionom prostoru, zaključujemo da su pritisci isti u svim tačkama sfere $R = \text{const.}$ i da rastu sa povećanjem poluprečnika R , od nule do vrednosti p_0 u beskonačno udaljenim tačkama. Hidrostatički pritisak je jednak nuli u tačkama

$$(47.30) \quad R = \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \pi} \sqrt{\frac{\rho}{2 p_0}}},$$

što se, stavljajući $p=0$, neposredno dobiva iz (47.29). U tim tačkama brzina dostiže maksimalnu moguću vrednost koja iznosi

$$(48.31) \quad v_{\max} = \sqrt{2 \frac{p_0}{\rho}}.$$

Za dato p_0 i ρ veća brzina od ove ne može se postići, pa strujanje ima fizičkog smisla samo u oblasti

$$(47.32) \quad R \geq \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \pi} \sqrt{\frac{\rho}{2 p_0}}}.$$

Oblast $R < \sqrt{\frac{\varepsilon}{4 \pi} \sqrt{\frac{\rho}{2 p_0}}}$ moramo, prema tome, smatrati za singularnu oblast iz koje fluid izvire maksimalnom brzinom (47.31).

48. Primena Bernulijeve jednačine kod stacionarnih potencijalnih ravanskih strujanja stišljivih fluida. Ravanska potencijalna strujanja stišljivih fluida, pretpostavljajući da su stacionarna, razmatrali smo u odeljku 29. Pri tome smo pokazali da su potencijal brzine i strujna funkcija povezane parcijalnim diferencijalnim jednačinama

$$(48.1) \quad \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \quad \frac{1}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \psi}{\partial x^1}.$$

U ovim jednačinama pored potencijala brzine i strujne funkcije, kao nepoznata veličina figuriše i gustina ρ . Prema tome, za određivanje svih nepoznatih funkcija, φ , ψ i ρ , pored jednačina (48.1), potrebna je još jedna jednačina. Napominjemo da ta jednačina ne može biti jednačina konzervacije mase, jer je ona iskorišćena pri izvođenju jednačina (48.1), tj. identički je zadovoljena.

Primenićemo sada Bernulijevu jednačinu u dva konkretna slučaja stacionarnih ravanskih potencijalnih strujanja stišljivih fluida.

a) *Stacionarno strujanje u polju jednog vrtloga.* Neka je, u odnosu na sistem polarnih koordinata u ravni strujanja, potencijal brzine,

$$(48.2) \quad \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi} \theta,$$

isti kao u slučaju strujanja nestišljivog fluida. Kovarijantne koordinate brzine su tada

$$v_r = 0, \quad v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi},$$

pa je intenzitet brzine

$$(48.3) \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Pretpostavljajući da se strujanje odvija pri adijabatskoj promeni stanja, iz Bernulijeve jednačine (46.12) dobivamo

$$(48.4) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}},$$

pri čemu su $c_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}$, ρ_0 , p_0 i $v_0 = 0$ odgovarajuće vrednosti u beskonačno udaljenim tačkama, tj. u mirnom fluidu.

Zamenjujući (48.3) u (48.4), dobivamo

$$(48.5) \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{c_0^2} \frac{1}{r^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}.$$

Na ovaj način, korišćenjem Bernulijeve jednačine u odgovarajuće jednačine stanja, odredili smo raspored gustine u strujnom polju. Prema tome, pošto je gustina, kao funkcija položaja, poznata, iz jednačina (48.1) možemo odrediti strujnu funkciju. Jednačine (48.1) u sistemu polarnih koordinata glase

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

pa, s obzirom na (48.2), iz prve od ovih jednačina sledi

$$\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0,$$

a druga se može napisati u obliku

$$\frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\rho \Gamma}{\rho_0 2\pi r},$$

odnosno, ako iskoristimo (48.5),

$$\frac{d\psi}{dr} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\kappa-1}{8\pi^2} \frac{\Gamma}{c_0^2} \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}}.$$

Odavde je

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int \frac{1}{r} \left(1 - \frac{\kappa-1}{8\pi^2} \frac{\Gamma}{c_0^2} \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{1}{\kappa-1}} dr.$$

Ovaj integral, međutim, ne može se izračunati u konačnom obliku, ali iz njega zaključujemo da je strujna funkcija — funkcija samo od r , pa su strujne linije ($\psi = \text{const.}$) koncentrični krugovi $r = \text{const.}$ sa centrom u koordinatnom početku.

Raspored pritiska u strujnom polju dobivamo iz (46.13), stavljajući $v_0 = 0$, tj.

$$(48.6) \quad p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{2} \frac{v^2}{c_0^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}},$$

odnosno, koristeći (48.3),

$$(48.7) \quad p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa-1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{c_0^2} \frac{1}{r^2}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}}.$$

Hidrostatski pritisak je jednak nuli u tačkama

$$(48.8) \quad r = R = \sqrt{\frac{\kappa-1}{8\pi^2} \frac{\Gamma^2}{c_0^2}} = \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{p_0}},$$

i u tim tačkama brzina ima maksimalnu vrednost

$$(48.9) \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\kappa-1}} c_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0}}, \quad (c_0 = c_{\max}).$$

Veća brzina od ove ne može se postići, pa strujanje nema fizičkog smisla u oblasti

$$r < \frac{\Gamma}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa-1}{2\kappa} \frac{\rho_0}{p_0}}.$$

Tu oblast, prema tome, moramo smatrati za singularnu oblast u kojoj se fluid rotira kao kruto telo konstantnom ugaonom brzinom

$$\omega = \frac{\Gamma}{2R^2\pi} = 4\pi \frac{\kappa}{\kappa-1} \frac{p_0}{\rho_0} \frac{1}{\Gamma}, \quad (R\omega = v_{\max}).$$

b) *Stacionarno strujanje u polju jednog izvora.* U ovom slučaju pretpostavljamo da su strujne linije prave koje prolaze kroz koordinatni početak, tj. da je strujanje određeno strujnom funkcijom

$$(48.10) \quad \psi = \frac{\varepsilon}{2\pi} \theta,$$

na isti način kao i u slučaju strujanja nestišljivog fluida.

Iz (48.10), za kovarijantne koordinate brzine dobivamo

$$v_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{\rho_0}{\rho r}, \quad v_\theta = \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -\frac{\rho_0 r}{\rho} \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0,$$

pa je intenzitet brzine

$$(48.11) \quad v = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{\rho_0}{\rho}.$$

Za razliku od strujanja u polju jednog vrtloga, u ovom slučaju brzina zavisi i od gustine ρ . U prvom slučaju, kao što se vidi iz (48.5), strujne linije $r = \text{const.}$ su ujedno i ekviskalarne linije polja gustine, tj. gustina je konstantna u tačkama jedne strujne linije. U tom slučaju, dakle, fluid struji u slojevima jednake gustine, pa je divergencija brzine, odnosno brzina kubne dilatacije jednaka nuli, što ima za posledicu da su i koordinate brzine i potencijal brzine isti kao i u slučaju strujanja nestišljivog fluida. Iz toga razloga smo i pošli od izraza za potencijal brzine koji je isti kao i u slučaju strujanja nestišljivog fluida. U ovom slučaju, međutim, polazimo od toga da su strujne linije, odnosno strujna funkcija isti kao i u slučaju strujanja nestišljivog fluida, na vidimo da polje brzine zavisi i od polja gustine. Lako je pokazati da u ovom slučaju brzina kubne dilatacije nije jednaka nuli, tj. da fluid ne struji u slojevima jednake gustine.

Pretpostavljajući opet da se strujanje odvija pri adijabatskoj promeni stanja, Bernulijeva jednačina je oblika (46.14) i iz nje dobivamo

$$(48.12) \quad \rho = \rho_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}},$$

gde su ponovo $c_0^2 = \kappa \frac{p_0}{\rho_0}$, ρ_0 , p_0 i $v_0 = 0$ odgovarajuće vrednosti u mirnom fluidu.

Zamenjujući (48.12) u (48.11), dobivamo

$$(48.13) \quad v \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Raspored pritiska u strujnom polju dobivamo iz (46.13), stavljajući $v_0 = 0$, tj.

$$(48.14) \quad p = p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Stavljajući $p = 0$, iz ove jednačine dobivamo maksimalnu brzinu:

$$(48.15) \quad v_{\max} = \sqrt{\frac{2}{\kappa - 1}} c_0 = \sqrt{\frac{2\kappa}{\kappa - 1}} \frac{p_0}{\rho_0}, \quad (c_0 = c_{\max}),$$

pa (48.13) možemo napisati u obliku

$$(48.16) \quad v \left(1 - \frac{v^2}{v_{\max}^2} \right)^{\frac{1}{\kappa - 1}} = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r}.$$

Iz prethodne jednačine brzina se može izraziti kao funkcija položaja, ali je to komplikovano. Međutim, iz te jednačine zaključujemo da beskonačno udaljenim tačkama odgovaraju dve brzine: $v=0$ i $v=v_{\max}$. Maksimalna brzina, prema tome, može se postići samo u beskonačno udaljenim tačkama u kojima je, u tom slučaju, hidrostatički pritisak jednak nuli. Takođe, brzina može biti jednaka nuli samo u beskonačno udaljenim tačkama u kojima je, u tom slučaju, hidrostatički pritisak jednak p_0 . Već iz ovoga zaključujemo da su moguća dva različita strujanja.

Ako u jednačini (48.16) veličinu r posmatramo kao funkciju brzine, tj.

$$(48.17) \quad r = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{v} \left(\frac{v_{\max}^2}{v_{\max}^2 - v^2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}}$$

možemo zaključiti da postoji oblast u kojoj jednačina (48.16) ne daje rešenje za brzinu. Da bismo odredili tu oblast potrebno je da nađemo vrednost brzine za koju r ima minimalnu vrednost. Diferenciranjem po v i izjednačavanjem izvoda sa nulom, iz jednačine (48.17) dobivamo

$$\frac{(v_{\max}^2 - v^2)^{\frac{1}{\kappa-1}} - \frac{2}{\kappa-1} v^2 (v_{\max}^2 - v^2)^{\frac{1}{\kappa-1} - 1}}{v^2 (v_{\max}^2 - v^2)^{\frac{2}{\kappa-1}}} = 0,$$

odnosno, posle sređivanja

$$\frac{(v_{\max}^2 - v^2)^{\frac{1}{\kappa-1}}}{v^2} \left[1 - \frac{2}{\kappa-1} \frac{v^2}{(v_{\max}^2 - v^2)} \right] = 0.$$

Ova jednačina je zadovoljena kad je izraz u uglastoj zagradi jednak nuli, tj. kad je

$$(48.18) \quad v = \sqrt{\frac{\kappa-1}{\kappa+1}} v_{\max},$$

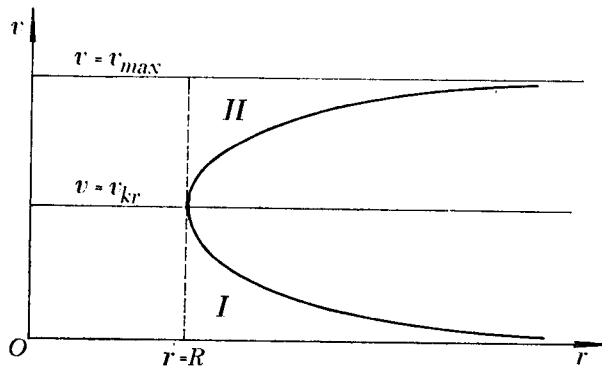
odnosno, s obzirom na (46.16), kad je $v=v_{kr}$. Iz (48.17), koristeći (48.18), dobivamo minimalnu vrednost poluprečnika r :

$$(48.19) \quad r_{\min} = R = \frac{\varepsilon}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa+1}{\kappa-1}} \left(\frac{\kappa+1}{2} \right)^{\frac{1}{\kappa-1}} \frac{1}{v_{\max}}.$$

Prema tome, iz (48.16) sledi da strujanje u oblasti $r < R$ nije definisano. Stoga pretpostavljamo da iz te oblasti fluid izvire brzinom koja je, prema (48.18), jednaka kritičnoj brzini, tj. brzini prostiranja zvuka.

Iz napred izloženog zaključujemo da postoje dva različita slučaja strujanja. U prvom slučaju fluid izvire iz oblasti $r < R$ kritičnom brzinom, $v=v_{kr}$, i njegove čestice se kreću radialno u svim pravcima pri čemu im se brzine smanjuju i u beskonačno udaljenim tačkama postaju jednake nuli. Najveća brzina, prema tome, koja se u ovom slučaju postiže jednaka je kritičnoj brzini i postiže se u tačkama kruga $r=R$. Strujanje se, dakle, odvija podzvučnim brzinama. U drugom slučaju fluid izvire iz oblasti $r < R$ takođe kritičnom brzinom, $v=v_{kr}$, i njegove čestice se kreću radialno u svim pravcima pri čemu im se brzine povećavaju i u beskonačno udaljenim tačkama dostižu maksimalnu moguću vrednost (48.15). Prema tome,

najmanja brzina koja se u ovom slučaju postiže jednaka je kritičnoj brzini, a postiže se takođe u tačkama kruga $r=R$. Zavisnost brzine od položaja grafički je prikazana, za oba slučaja strujanja, na slici 70. Oba strujanja, prema tome, imaju istu brzinu,



Sl. 70

koja je jednaka brzini prostiranja zvuka, samo u tačkama kruga $r=R$. Hidrostatički pritisak u tim tačkama, na osnovu (48.14) i (48.18), iznosi

$$p_{kr} = p_0 \left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{\alpha}{\alpha - 1}}.$$

Jasno je da se oba strujanja ne mogu odvijati istovremeno, niti jedno može preći u drugo. Moguće je, dakle, ili jedno ili drugo strujanje.

V e ž b a n j a

1. Pokazati da je kod ravanskog stacionarnog potencijalnog strujanja stišljivog fluida u polju jednog vrtloga brzina kubne dilatacije jednaka nuli, tj. da fluid struji u slojevima jednake gustine.

2. U slučaju ravanskog stacionarnog potencijalnog strujanja stišljivog fluida u polju jednog izvora, pokazati:

a) da se brzina kubne dilatacije može izraziti u obliku

$$d_1 = \frac{\varepsilon}{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right),$$

b) da su ekvipotencijalne linije krugovi $r = \text{const.}$, i

c) da je vektor brzine kolinearan sa vektorom grad ρ , tj. da su ekvipotencijalne linije ujedno i ekviskalarne linije polja gustine.

3. Kod adijabatskih strujanja iz prethodnog zadatka pokazati:

a) da je gustina u tačkama kruga $r_{\min} = R$ određena izrazom

$$\rho_{kr} = \rho_0 \left(1 - \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} \right)^{\frac{1}{\alpha - 1}},$$

b) da se, polazeći od ρ_{kr} , gustina povećava sa povećanjem radijusa r , pri čemu u beskonačno udaljenim tačkama dostiže vrednost ρ_0 , kad se strujanje odvija podzvučnim brzinama, i

c) da se, polazeći od ρ_{kr} , gustina smanjuje sa povećanjem radijusa r , pri čemu u beskonačno udaljenim tačkama postaje jednaka nuli, kad se strujanje odvija nadzvučnim brzinama.

4. Pokazati da se kod strujanja iz prethodnog zadatka modul stišljivosti može izraziti u obliku

$$e = \kappa p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{2} \frac{v^2}{c_0^2} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Na osnovu ovoga, dalje, pokazati:

a) da u tačkama $r=R$, u kojima brzina ima kritičnu vrednost, modul stišljivosti iznosi

$$e_{kr} = \kappa p_0 \left(1 - \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}};$$

b) da se, polazeći od ove vrednosti, modul stišljivosti povećava kad r raste, pri čemu u beskonačno udaljenim tačkama dostiže vrednost $e = \kappa p_0$, kad se strujanje odvija podzvučnim brzinama;

c) da se, polazeći od iste vrednosti, modul stišljivosti smanjuje kad r raste, pri čemu postaje jednak nuli u beskonačno udaljenim tačkama, kad se strujanje odvija nadzvučnim brzinama.

49. Sile pritiska na cilindričnom telu pri ravanskom potencijalnom strujanju nestišljivog fluida. U odeljku 47. je pokazano kako se, primenom Bernulijeve jednačine, može odrediti raspored pritiska na površi kružnog cilindra pri ravanskom potencijalnom strujanju nestišljivog fluida. Jasno je da se na analogan način može odrediti raspored pritiska na površi bilo kog cilindričnog tela, ako je poznat kompleksni potencijal odgovarajućeg ravanskog strujanja. Ako je poznat hidrostatički pritisak u svakoj tački konture tela, rezultujuća sila pritiska koja deluje na uočeno telo, na osnovu (40.4), iznosi

$$(49.1) \quad P_k = - \int_a p da_k,$$

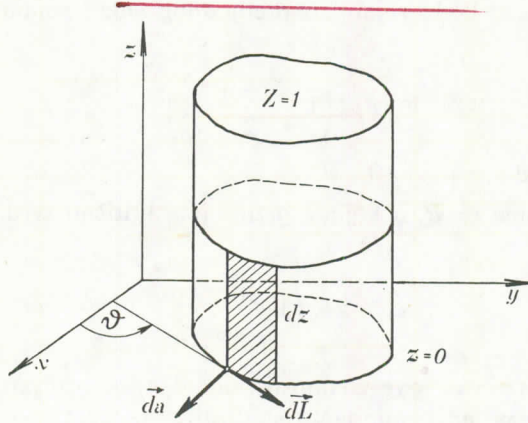
gde je a površina cilindričnog tela.

Kod ravanskih strujanja, međutim, s obzirom da je slika strujanja identična u svim ravnima paralelnim osnovnoj ravni strujanja, $z=0$, dovoljno je izračunati rezultujuću silu pritiska koja deluje na deo cilindričnog tela između ravni strujanja koje se nalaze na međusobnom rastojanju jednakom jedinici, recimo između ravni $z=0$ i $z=1$ (sl. 71). Orijentisani element površi možemo u tom slučaju izraziti u obliku

$$(49.2) \quad da_k = e_{ki3} dL^i dz,$$

gde je $\vec{dL} = \{dL_x, dL_y\}$ orijentisani element luka krive linije L koja ograničava telo u osnovnoj ravni strujanja $z=0$. Rezultujuću silu pritiska, koja deluje na uočeni deo cilindričnog tela, možemo sada, koristeći (49.1) i (49.2), izraziti u obliku

$$P_k = - \int_L p e_{ki3} dL^i \int_0^1 dz,$$



Sl. 71

odnosno

$$(49.3) \quad P_k = - \int_L p e_{ki3} dL^i.$$

Ako projekcije sile \vec{P} na ose sistema Dekartovih pravougljih koordinata obeležimo sa P_x i P_y , iz (49.3) dobivamo

$$(49.4) \quad P_x = - \int_L p dL_y, \quad P_y = \int_L p dL_x,$$

pa, ako obrazujemo kompleksni izraz

$$(49.5) \quad \bar{P} = P_x - iP_y,$$

biće

$$(49.6) \quad \bar{P} = -i \int_L p (dL_x - i dL_y).$$

Kako je, međutim,

$$dL_x - i dL_y = dL (\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = dL e^{-i\vartheta} = \bar{dz}_{(L)},$$

gde je ϑ ugao koji tangenta na krivu L u osnovnoj ravni strujanja zaklapa sa pozitivnim smerom x ose (sl. 71.), izraz (49.6) možemo napisati u obliku

$$(49.7) \quad \bar{P} = -i \int_L p \bar{dz}_{(L)}.$$

Kako je, dalje,

$$dz_{(L)} = dL_x + i dL_y = dL e^{i\vartheta},$$

biće

$$\overline{dz_{(L)}} = dL e^{-i\vartheta} = \frac{dz_{(L)}}{e^{i\vartheta}} e^{-i\vartheta} = e^{-2i\vartheta} dz_{(L)},$$

pa (49.7) možemo izraziti u obliku

$$(49.8) \quad \overline{P} = -i \int_L p e^{-2i\vartheta} dz_{(L)},$$

gde je $dz_{(L)}$ priraštaj kompleksnog broja z duž krive L .

Pretpostavljamo da se pri strujanju fluida ne odvaja od konture tela, tako da je kriva L u osnovnoj ravni strujanja deo jedne strujne linije $\psi = \text{const.}$ (obično se uzima, kao što smo ranije videli, da je kriva L deo nulte strujnice). Prema tome, duž konture L zadovoljena je Bernulijeva jednačina koja je, ako zanemarimo zapreminske sile, oblika

$$\frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} = C = \text{const.}$$

• Odavde za hidrostatički pritisak dobivamo

$$p = \rho \left(C - \frac{v^2}{2} \right),$$

pa (49.8) možemo izraziti u obliku

$$(49.9) \quad \overline{P} = -i \rho \int_L \left(C - \frac{v^2}{2} \right) e^{-2i\vartheta} dz_{(L)}.$$

Ako je kriva L zatvorena, tada je

$$\oint_L C e^{-2i\vartheta} dz_{(L)} = C \oint_L e^{-2i\vartheta} dz_{(L)} = C \oint_L \overline{dz_{(L)}} = 0,$$

jer se \overline{z} ne menja posle obilaženja po krivoj, pa se (49.9) svodi na

$$(49.10) \quad \overline{P} = i \frac{\rho}{2} \oint_L (v e^{-i\vartheta})^2 dz_{(L)}.$$

Kako je, međutim,

$$v e^{-i\vartheta} = v (\cos \vartheta - i \sin \vartheta) = v_x - i v_y = \overline{v},$$

izraz (49.10) možemo, konačno, napisati u obliku

$$(49.11) \quad \overline{P} = i \frac{\rho}{2} \oint_L \overline{v}^2 dz_{(L)},$$

ili

$$(49.12) \quad \overline{P} = i \frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 dz_{(L)}.$$

Prema tome, vidimo da rezultujuću silu pritiska možemo odrediti ako je poznat kompleksni potencijal strujanja oko datog cilindričnog tela.

Rezultujući moment sila pritiska prema z osi možemo izraziti u obliku

$$(49.13) \quad M_k = - \int_a p e_{kij} r^i da^j,$$

gde je $\vec{r} = \{r^i\} = \{x, y\}$. S obzirom da je

$$da^j = e^{jm3} dL_m dz,$$

rezultujući moment sila pritiska koje deluju na deo cilindričnog tela između ravni $z=0$ i $z=1$, iznosi

$$M_k = - \int_L p e_{kij} e^{jm3} r^i dL_m \int_0^1 dz,$$

odnosno

$$M_k = \int_L p \delta_{ik}^m r^i dL_m.$$

Pošto je $r^3=0$, ovaj izraz možemo svesti na oblik

$$(49.14) \quad M_k = \int_L p r^m dL_m \delta_k^3,$$

odakle sledi da je jedina od nule različita koordinata rezultujućeg momenta

$$M_z \equiv M = \int_L p r^m dL_m,$$

odnosno

$$(49.15) \quad M = \int_L p (x dL_x + y dL_y).$$

Da bismo (49.15) izrazili na pogodniji način, pođimo od kompleksnog izraza

$$z \cdot \overline{dz}_{(L)} = (x + iy) (dL_x - i dL_y),$$

odnosno

$$z \overline{dz}_{(L)} = x dL_x + y dL_y + i (y dL_x - x dL_y).$$

Realni deo ovog kompleksnog izraza je

$$x dL_x + y dL_y = \operatorname{Re} (z \overline{dz}_{(L)}),$$

pa, s obzirom da je

$$\overline{dz}_{(L)} = e^{-2i\theta} dz_{(L)},$$

biće i

$$x dL_x + y dL_y = \operatorname{Re} (z e^{-2i\theta} dz_{(L)}).$$

Koristeći ovaj izraz, (49.15) možemo napisati u obliku

$$(49.16) \quad M = \operatorname{Re} \left(\int_L p z e^{-2i\theta} dz_{(L)} \right).$$

Ako sada, koristeći Bernulijevu jednačinu, hidrostatički pritisak izrazimo preko kvadrata intenziteta brzine, dobivamo

$$M = \operatorname{Re} \left[\rho \int_L \left(C - \frac{v^2}{2} \right) z e^{-2i\theta} dz_{(L)} \right].$$

Kako je, međutim,

$$\operatorname{Re} \left(\oint_L C z e^{-2i\theta} dz_{(L)} \right) = C \oint_L (x dL_x + y dL_y) = C/2 \oint_L d(x^2 + y^2)_{(L)} = 0,$$

prethodni izraz se, u slučaju kad je kriva L zatvorena, svodi na oblik

$$M = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_L z (v e^{-i\theta})^2 dz_{(L)} \right],$$

odnosno

$$M = \operatorname{Re} \left(-\frac{\rho}{2} \oint_L \bar{v}^2 z dz_{(L)} \right),$$

ili, konačno,

$$(49.17) \quad M = \operatorname{Re} \left[-\frac{\rho}{2} \oint_L \left(\frac{dw}{dz} \right)^2 z dz_{(L)} \right].$$

Vidimo, dakle, da i rezultujući moment možemo odrediti ako je poznat kompleksni potencijal odgovarajućeg strujanja.

Izrazi (49.12) i (49.17), koji određuju rezultujuću silu pritiska i rezultujući moment, nazivaju se **Blazijus-Čapljiginovi obrasci**. Uopšte, ova metoda za određivanje glavnog vektora i glavnog momenta naziva se Blazijus-Čapljiginova metoda, jer su je oni, nezavisno jedan od drugog, u opštem obliku formulisali godine 1910, premda je prvi uveo Žukovski još 1906. godine.

50. Praktično izračunavanje glavnog vektora i glavnog momenta Izrazi (49.12) i (49.17) mogu se integraliti ako se iskoriste poznati stavovi iz teorije funkcija kompleksne promenljive.

Pri ravanskom potencijalnom strujanju oko cilindričnog tela pretpostavljamo da je oblast kompleksne ravni izvan zatvorene krive L regularna, tj. da kompleksni potencijal, pa, prema tome, i kompleksna brzina, nemaju singulariteta na krivoj L i van nje. Što se tiče oblasti koju ograničava kriva L to ne mora da bude, tj. u toj oblasti mogu postojati singulariteti. Štaviše, u kinematici smo videli, zahvaljujući singularitetima u toj oblasti, kontura tela, tj. kriva L , može se dobiti kao deo jedne strujne linije (nulte strujnice). S obzirom, prema tome, da je kompleksna brzina regularna u tačkama krive L i u oblasti van krive, možemo je, u okolini tačke $z = \infty$, razviti u Loranov red,

$$(50.1) \quad \bar{v} = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots,$$

gde su koeficijenti $a_k, k=0, 1, 2, \dots$, kompleksni brojevi. Prvi član reda je, očigledno, jednak kompleksnoj brzini u beskonačnosti, tj.

$$(50.2) \quad a_0 = v_{x0} - i v_{y0} = v_0.$$

Integracijom kompleksne brzine po krvoji L dobivamo

$$(50.3) \quad \oint_L \bar{v} dz = \oint_L (d\varphi + id\psi) = \Gamma + iQ = \Gamma,$$

jer je protok fluida kroz krivu L jednak nuli, pri čemu je cirkulacija Γ jednaka algebarskom zbiru jačina vrtloga koji se mogu nalaziti u singularnim tačkama oblasti ograničene krivom L .

Integral

$$\oint_L f(z) dz$$

jednak je nuli, na osnovu Košijeve teoreme, ako je funkcija $f(z)$ regularna u oblasti koju ograničava kriva L . Ako, međutim, taj integral nije jednak nuli, tada

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L f(z) dz,$$

predstavlja ostatak ili reziduum funkcije $f(z)$. S obzirom da je

$$\oint_L \frac{dz}{z^n} = \begin{cases} 2\pi i & \text{za } n=1 \\ 0 & \text{za } n \neq 1, \end{cases}$$

gde je n ma koji ceo broj, iz (50.1) zaključujemo da je a_1 ostatak funkcije \bar{v} , tj. da je

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_L \bar{v} dz = a_1,$$

odnosno

$$\oint_L \bar{v} dz = 2\pi i a_1.$$

Upoređujući ovo sa (50.3), dobivamo

$$\Gamma = 2\pi i a_1,$$

odnosno

$$(50.4) \quad a_1 = -\frac{i\Gamma}{2\pi}.$$

U izrazima (49.12) i (49.17) kao podintegralne funkcije figurišu \bar{v}^{-2} i $\bar{v}^{-2} z$. Iz (50.1) dobivamo

$$(50.5) \quad \oint_L \bar{v}^{-2} dz = a_0^2 + \frac{2a_0 a_1}{z} + \frac{a_1^2 + 2a_0 a_2}{z^2} + \dots,$$

odakle zaključujemo da je $2a_0 a_1$ ostatak funkcije \bar{v}^{-2} tj. da je

$$\oint_L \bar{v}^{-2} dz_{(L)} = 4\pi i a_0 a_1.$$

Koristeći ovaj rezultat, (49.12) možemo izraziti u obliku

$$(50.6) \quad \bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1,$$

odnosno, ako još iskoristimo (50.2) i (50.4),

$$(50.7) \quad \bar{P} = \rho\Gamma v_{y0} + i\rho\Gamma v_{x0} = i\rho\bar{v}_0\Gamma,$$

odakle, na osnovu (49.5), dobivamo

$$(50.8) \quad P_x = \rho\Gamma v_{y0}, \quad P_y = -\rho\Gamma v_{x0}.$$

Vidimo, dakle, da je rezultujuća sila pritiska određena vrednošću cirkulacije i vrednošću brzine u beskonačno udaljenim tačkama. Kad je strujanje aciklično, tj. kad je cirkulacija jednaka nuli, vidimo da je rezultujuća sila pritiska jednaka nuli.

Pravac brzine u beskonačno udaljenim tačkama određuje pravac strujanja. U ravni strujanja rezultujuću silu pritiska možemo razložiti na komponentu u pravcu strujanja i komponentu upravnu na pravac strujanja. Komponenta rezultujuće sile pritiska čiji se pravac poklapa sa pravcem strujanja naziva se *sila otpora*, a komponenta upravna na pravac strujanja — *sila uzgona*. Pokazaćemo sada da važi teorema Kute-Žukovskog: *Pri cikličnom ravanskom potencijalnom strujanju nestišljivog fluida oko cilindričnog tela sila otpora je jednaka nuli, tj. rezultujuća sila pritiska jednaka je sili uzgona.*

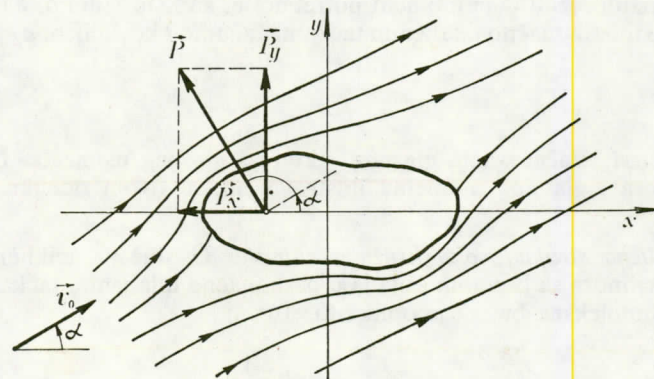
D o k a z. Rezultujuća sila pritiska i brzina u beskonačno udaljenim tačkama određeni su koordinatama

$$\vec{P} = \{P_x, P_y\}, \quad \vec{v}_0 = \{v_{x0}, v_{y0}\}.$$

Koristeći (50.8), dobivamo

$$\vec{P} \cdot \vec{v}_0 = \rho\Gamma v_{y0} v_{x0} - \rho\Gamma v_{x0} v_{y0} \equiv 0.$$

Vidimo, dakle, da je rezultujuća sila pritiska upravna na pravac brzine u beskonačno udaljenim tačkama (sl. 72), čime je teorema dokazana.



Sl. 72

U posebnom slučaju, kad je brzina u beskonačno udaljenim tačkama paralelna sa x osom, stavljajući $v_{y0}=0$, iz (50.8) dobivamo

$$(50.9) \quad P_x = 0, \quad P_y = -\rho \Gamma v_{x0}.$$

Intenzitet sile otpora naziva se *otpor*, a sile uzgona — *uzgon*. Iz (50.9) vidimo da su u ovom slučaju otpor i uzgon jednaki projekcijama rezultujuće sile pritiska na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata. Sila otpora je jednaka nuli, a sila uzgona je jednaka rezultujućoj sili pritiska i upravna je na pravac strujanja, što je u saglasnosti sa teoremom Kute-Žukovskog.

Iz (50.5), množenjem sa z , dobivamo

$$(50.10) \quad \bar{v}^2 \cdot z = a_0^2 z + 2 a_0 a_1 + \frac{a_1^2 + 2 a_0 a_2}{z} + \dots,$$

odakle zaključujemo da je $a_1^2 + 2 a_0 a_2$ reziduum funkcije $\bar{v}^2 z$, tj. da je

$$\oint_L \bar{v}^2 z dz_{(L)} = 2 \pi i (a_1^2 + 2 a_0 a_2).$$

Koristeći ovaj izraz, (49.17) možemo izraziti u obliku

$$M = Re [-\rho \pi i (a_1^2 + 2 a_0 a_2)],$$

odnosno, ako još iskoristimo (50.2) i (50.4),

$$(50.11) \quad M = Re \left[\rho \pi i \left(\frac{\Gamma^2}{4 \pi^2} - 2 \bar{v}_0 a_2 \right) \right].$$

Kako je, međutim,

$$Re \left(\rho \pi i \frac{\Gamma^2}{4 \pi^2} \right) = 0,$$

jer je izraz u zagradi imaginaran, (50.11) možemo napisati i u obliku

$$(50.12) \quad M = -2 \pi \rho Re (i \bar{v}_0 a_2).$$

Da bismo odredili rezultujući moment potrebno je, kao što vidimo, da, pored kompleksne brzine u beskonačno udaljenim tačkama, znamo i koeficijent a_2 u Loranovom redu (50.1).

51. Primeri izračunavanja glavnog vektora i glavnog momenta. Izračunavanje glavnog vektora i glavnog momenta ilustrovaćemo u ovom odeljku na nekoliko primera.

a) *Aciklično strujanje oko kružnog cilindra.* U slučaju acikličnog strujanja oko kružnog cilindra sa brzinom koja je u beskonačno udaljenim tačkama paralelna sa x osom, kompleksna brzina je oblika (33.16), tj.

$$\bar{v} = v_{x0} - v_{x0} R^2 \frac{1}{z^2}.$$

Upoređujući ovaj izraz sa Loranovim redom (50.1), nalazimo

$$a_0 = v_{x0}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -v_{x0} R^2,$$

pa, na osnovu (50.6) i (50.12), dobivamo

$$\bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1 = 0,$$

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re}(i\bar{v}_0 a_2) = -2\pi\rho \operatorname{Re}(-iv_{x0}^2 R^2) = 0.$$

Vidimo, dakle, da su i glavni vektor i glavni moment jednaki nuli.

Isti rezultat bismo dobili i u slučaju kad brzina u beskonačno udaljenim tačkama zaklapa ugao $\alpha = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{v_{y0}}{v_{x0}}$ sa pozitivnim smerom x ose. Kompleksni potencijal, naime, u tom slučaju je oblika

$$w(z) = \bar{v}_0 z + v_0 \left(1 + \frac{R^2}{z}\right),$$

gde je $\bar{v}_0 = v_{x0} - iv_{y0}$ i $v_0 = v_{x0} + iv_{y0}$, pa je kompleksna brzina

$$\bar{v} = \bar{v}_0 - v_0 R^2 \frac{1}{z^2},$$

odakle, upoređivanjem sa (50.1), nalazimo

$$a_0 = \bar{v}_0, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -v_0 R^2.$$

Na osnovu ovih izraza, iz (50.6) i (50.12) dobivamo

$$\bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1 = 0,$$

i

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re}(i\bar{v}_0 v_0 R^2),$$

odnosno

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re}[i(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) R^2] = 0.$$

b) Ciklično strujanje oko kružnog cilindra. U slučaju cikličnog strujanja oko kružnog cilindra, sa brzinom u beskonačnosti koja je paralelna sa x osom, kompleksna brzina je određena izrazom (33.22), tj.

$$\bar{v} = v_{x0} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} - v_{x0} R^2 \frac{1}{z^2}.$$

Upoređivanjem sa Loranovim redom (50.1), u ovom slučaju dobivamo

$$a_0 = v_{x0}, \quad a_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad a_2 = -v_{x0} R^2,$$

pa iz (50.6) sledi

$$\bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1 = -i\rho\Gamma v_{x0},$$

odakle dobivamo

(51.1)

$$P_x = 0, \quad P_y = \rho\Gamma v_{x0}.$$

Iz (50.12), međutim, sledi

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re}(i\bar{v}_0 a_2) = 2\pi\rho \operatorname{Re}(iv_{x0}^2 R^2) = 0.$$

Vidimo, dakle, da je sila uzgona upravna na x osu, tj. na pravac strujanja, i da, s obzirom da je glavni moment jednak nuli, prolazi kroz koordinatni početak, tj. pravac njenog dejstva se poklapa sa y osom.

U slučaju, pak, kad brzina u beskonačnosti zaklapa ugao α sa pozitivnim smerom x ose, koji se naziva *napadni ugao*, kompleksni potencijal je

$$w(z) = \bar{v}_0 z + v_0 \left(1 + \frac{R^2}{z}\right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{z}{R},$$

pa je kompleksna brzina

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z} - v_0 R^2 \frac{1}{z^2}.$$

Upoređivanjem sa (50.1), odavde dobivamo

$$a_0 = \bar{v}_0, \quad a_1 = \frac{i\Gamma}{2\pi}, \quad a_2 = -v_0 R^2,$$

pa je, iz (50.6),

$$\bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1 = -i\rho \bar{v}_0 \Gamma,$$

odakle sledi

$$P_x = -\rho v_{y0} \Gamma, \quad P_y = \rho v_{x0} \Gamma.$$

Na osnovu (50.12) dobivamo

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re}(i\bar{v}_0 a_2) = 2\pi\rho \operatorname{Re}[i(v_{x0}^2 + v_{y0}^2) R^2] = 0,$$

pa zaključujemo da pravac dejstva sile uzgona opet prolazi kroz koordinatni početak.

Stavljajući

$$v_{x0} = |\bar{v}_0| \cos \alpha, \quad v_{y0} = |\bar{v}_0| \sin \alpha,$$

projekcije sile uzgona možemo izraziti u obliku

$$(51.2) \quad P_x = -\rho |\bar{v}_0| \Gamma \sin \alpha, \quad P_y = \rho |\bar{v}_0| \Gamma \cos \alpha,$$

pa je intenzitet sile uzgona (uzgon)

$$P = |\bar{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = \rho |\bar{v}_0| \Gamma.$$

Vidimo, dakle, da uzgon ne zavisi od napadnog ugla α , ali se pravac dejstva sile uzgona menja sa promenom napadnog ugla, pri čemu uvek prolazi kroz koordinatni početak i sa pozitivnim smerom y ose zaklapa ugao koji je jednak napadnom uglu. Stavljajući $\alpha=0$, projekcije sile uzgona (51.2) se, očigledno, svode na (51.1).

47 c) Ciklično strujanje oko ravne ploče. U slučaju cikličnog strujanja oko ravne ploče pri kome cirkulacija ima vrednost za koju je brzina konačna na zadnjoj ivici ploče kompleksna brzina je, na osnovu (34.16),

$$(51.3) \quad \bar{v} = v_{x0} - iv_{y0} \sqrt{\frac{z-l}{z+l}}.$$

Razvijanjem u Loranov red, odavde dobivamo

$$\bar{v} = v_{x0} - iv_{y0} + ilv_{y0} \frac{1}{z} - \frac{i}{2} l^2 v_{y0} \frac{1}{z^2} + \dots,$$

pa, upoređivanjem sa (50.1), sledi

$$(51.4) \quad \begin{aligned} a_0 &= \bar{v}_0 = v_{x0} - iv_{y0}, \\ a_1 &= ilv_{y0}, \\ a_2 &= -\frac{i}{2} l^2 v_{y0}. \end{aligned}$$

Koristeći prva dva od ovih izraza, iz (50.6) dobivamo

$$\bar{P} = -2\pi\rho a_0 a_1 = -2\pi\rho \bar{v}_0 ilv_{y0},$$

odnosno

$$\bar{P} = -2\pi\rho lv_{y0}^2 - i2\pi\rho lv_{x0}v_{y0},$$

odakle sledi

$$(51.5) \quad P_x = -2\pi\rho lv_{y0}^2, \quad P_y = 2\pi\rho lv_{x0}v_{y0}.$$

Koristeći (51.4)₃, iz (50.12) dobivamo

$$M = -2\pi\rho \operatorname{Re} \left[i(v_{x0} - iv_{y0}) \left(-\frac{i}{2} l^2 v_{y0} \right) \right],$$

odnosno

$$M = -\pi\rho \operatorname{Re} (l^2 v_{y0} v_{x0} - il^2 v_{y0}^2),$$

odakle sledi

$$(51.6) \quad M = -\pi\rho l^2 v_{x0} v_{y0}.$$

Ako projekcije brzine u beskonačno udaljenim tačkama izrazimo preko intenziteta brzine i napadnog ugla, tj.

$$(51.7) \quad \begin{aligned} v_{x0} &= |\bar{v}_0| \cos \alpha, \\ v_{y0} &= |\bar{v}_0| \sin \alpha, \end{aligned}$$

projekcije sile uzgona (51.5) možemo izraziti u obliku

$$P_x = -2\pi\rho l |\bar{v}_0|^2 \sin^2 \alpha, \quad P_y = 2\pi\rho l |\bar{v}_0|^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Intenzitet sile uzgona je

$$(51.8) \quad P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2} = 2\pi\rho l |\bar{v}_0|^2 \sin \alpha,$$

pa vidimo da zavisi i od napadnog ugla α .

Uvodeći koeficijent uzgona,

$$(51.9) \quad c_P = \frac{P}{\frac{1}{2} \rho |\bar{v}_0|^2 2l},$$

intenzitet sile uzgona možemo izraziti u obliku

$$(51.10) \quad P = c_P \frac{1}{2} \rho |\bar{v}_0|^2 2l.$$

Vidimo, dakle, da se uzgon dobiva kao proizvod koeficijenta uzgona, dinamičkog pritiska u beskonačno udaljenim tačkama i dužine ploče.

Koristeći (51.8), koeficijent uzgona (51.9) iznosi

$$(51.11) \quad c_P = 2\pi \sin \alpha.$$

Za male napadne uglove, $\sin \alpha \approx \alpha$, koeficijent uzgona je

$$(51.12) \quad c_P \approx 2\pi\alpha.$$

Na osnovu (51.11), odnosno (51.12), i (51.10) zaključujemo da uzgon zavisi od napadnog ugla, dinamičkog pritiska u beskonačno udaljenim tačkama i dužine ploče.

Koristeći (51.7), moment (51.6) možemo izraziti u obliku

$$(51.13) \quad M = -\pi\rho l^2 |\bar{v}_0|^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Uvodeći koeficijent momenta,

$$(51.14) \quad c_M = \frac{|M|}{\frac{1}{2} \rho |\bar{v}_0|^2 4l^2},$$

moment možemo izraziti u obliku

$$(51.15) \quad |M| = c_M \frac{1}{2} \rho |\bar{v}_0|^2 4l^2.$$

Vidimo, dakle, da se moment dobiva kao proizvod koeficijenta momenta, dinamičkog pritiska u beskonačno udaljenim tačkama i kvadrata dužine ploče. Napominjemo da dužina ploče u izrazima (51.10) i (51.15) predstavlja, u stvari, površinu ploče između ravni strujanja $z=0$ i $z=1$.

Koristeći (51.13), koeficijent momenta (51.14) iznosi

$$(51.16) \quad c_M = \frac{\pi}{2} \sin \alpha \cos \alpha.$$

Za male napadne uglove, koeficijent momenta je

$$(51.17) \quad c_M \approx \frac{\pi}{2} \alpha, \quad (\sin \alpha \approx \alpha, \cos \alpha \approx 1),$$

pa, koristeći (51.12), odnos između koeficijenta momenta i koeficijenta uzgona iznosi

$$\frac{c_M}{c_P} = \frac{1}{4}.$$

S obzirom da su koeficijent momenta i koeficijent uzgona za male vrednosti napadnog ugla linearne funkcije napadnog ugla, prethodni odnos možemo izraziti u obliku

$$\frac{\frac{dc_M}{d\alpha}}{\frac{dc_P}{d\alpha}} = \frac{dc_M}{dc_P} = \frac{1}{4},$$

i on se, sa dovoljnom tačnošću, poklapa sa eksperimentalnim rezultatima ne samo za ravnu ploču, već i za tanke simetrične aeroprofile (kao što je, na primer, simetrični poprečni presek tankog avionskog krila).

S obzirom da je M moment sile uzgona u odnosu na koordinatni početak, linija dejstva sile uzgona (napadna linija) zadovoljava jednačinu

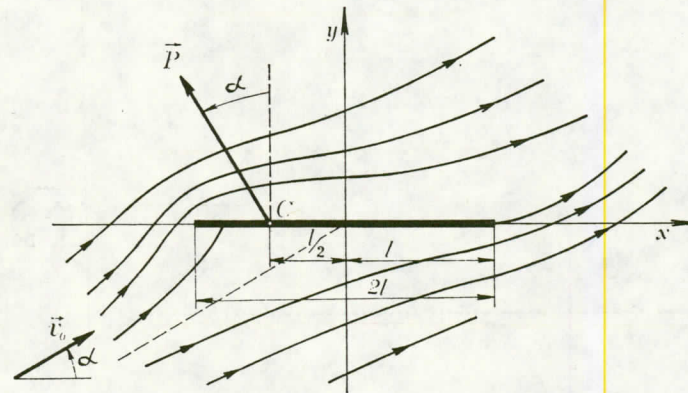
$$xP_y - yP_x = M,$$

odnosno

$$(51.18) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = -\frac{1}{2} l \cos \alpha.$$

Tačka u kojoj napadna linija sile uzgona preseca ploču naziva se *centar pritiska*. Koordinate centra pritiska dobivamo ako u jednačini (51.18) stavimo $y=0$. Na taj način dobivamo

$$x_C = -\frac{l}{2},$$



Sl. 73

tj. koordinate centra pritiska su $x_C = -\frac{l}{2}$ i $y_C = 0$ (sl. 73). Vidimo, dakle, da se centar

pritiska nalazi na četvrtini dužine ploče, računajući od prednje ivice ploče, i da njegov položaj ne zavisi ni od brzine u beskonačno udaljenim tačkama ni od napadnog ugla. Prema tome, promenom napadnog ugla menja se i uzgon i napadna linija sile uzgona (koja je uvek upravna na pravac strujanja), ali tako da centar pritiska ostaje stalan. Posebno, ako je napadni ugao jednak nuli, iz (51.8) i (51.13) zaključujemo da su i uzgon i moment jednaki nuli.

34

TREĆI DEO
STATIKA FLUIDA

VII OSNOVI STATIKE FLUIDA

52. Stanje napona u mirnom fluidu. Iako se u okviru mehanike fluida tretira u većini slučajeva odvojeno, a u okvirima mehanike krutih tela i kao poseban predmet, statika je u suštini specijalni slučaj dinamike. Osnovne jednačine statike, naime, slede iz odgovarajućih dinamičkih jednačina ako se uzme da su brzine ili polja konstantnih vektora ili jednake nule. U prvom slučaju fluid kao celina ima jednoliko translatorno kretanje, a u drugom — miruje. S obzirom da su, sa stanovišta statike, oba slučaja ekvivalentna, može se pretpostaviti, bez gubljenja u opštosti, da fluid miruje.

Stanje napona u mirnom fluidu određeno je tenzorom napona koji se može dobiti iz konstitutivne jednačine viskoznog fluida ako se u njoj stavi da je brzina jednaka nuli. Na taj način, iz (38.9) dobivamo

$$(52.1) \quad t^{ij} = -pg^{ij}.$$

Vidimo, dakle, da je stanje napona u tačkama mirnog fluida u potpunosti određeno hidrostatičkim pritiskom, na isti način kao i pri kretanju neviskoznih fluida. Na osnovu toga zaključujemo da u slučaju mirovanja fluida nema značaja da li je viskozan ili ne. Drugim rečima, efekti koji se uočavaju u mirnom fluidu nezavisni su od viskoznosti.

S obzirom da je tenzor napona u potpunosti određen samo hidrostatičkim pritiskom, tj. da je sfernog oblika, zaključujemo, na isti način kao i u odeljku 40, da su vektori napona upravni na presečne ravni u svakoj tački u fluidu, da su u jednoj tački svi istog intenziteta koji je jednak vrednosti hidrostatičkog pritiska u toj tački i da su suprotno orijentisani u odnosu na jedinični vektor normale presečne ravni. Prema tome, sila pritiska koja deluje na element površine da određena je izrazom

$$(52.2) \quad dP^i = -p da^i,$$

pa rezultujuća sila pritiska, koja deluje na konačnu površinu a , iznosi

$$(52.3) \quad P^i = - \int_a p da^i.$$

53. Diferencijalne jednačine ravnoteže. Kada fluid miruje kažemo da se nalazi u stanju ravnoteže. Diferencijalne jednačine ravnoteže kontinuuma (tzv. *Navijeove jednačine*) dobivaju se iz diferencijalnih jednačina kretanja ako se u njima stavi da je brzina jednaka nuli. Prema tome, stavljajući $v^i=0$, ili, što je ekvivalentno, $w^i \equiv \dot{v}^i=0$, iz diferencijalne jednačine kretanja kontinuuma (36.7) dobivamo diferencijalnu jednačinu ravnoteže u obliku

$$(53.1) \quad t_{,j}^{ij} + \rho f^i = 0.$$

Jasno je da ovu jednačinu možemo dobiti i iz uslova da je zbir svih sila koje deluju na fluid jednak nuli. Da bismo to pokazali, uočimo fluid sadržan u nekoj konačnoj zapremini v , ograničenoj zatvorenom površi a , koji se nalazi u ravnoteži. Tada, s obzirom na (35.18), možemo pisati

$$\oint_a t^{ij} da_j + \int_v \rho f^i dv = 0,$$

odnosno, ako površinski integral transformišemo u zapreminski,

$$\int_v (t_{,j}^{ij} + \rho f^i) dv = 0.$$

Oдавде, pošto jednačina mora biti zadovoljena za proizvoljno $dv \neq 0$, neposredno dobivamo lokalnu jednačinu (53.1).

Koristeći (52.1), iz (53.1) dobivamo

$$(53.2) \quad f^i = \frac{1}{\rho} g^{ij} p_{,j},$$

ili, u vektorskim oznakama,

$$(53.3) \quad \vec{f} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

što je diferencijalna jednačina ravnoteže fluida. Ova je jednačina napisana u koordinatnom, odnosno vektorskom obliku i, jasno, odgovara joj sistem od tri skalarne diferencijalne jednačine. U literaturi se jednačina (53.3) naziva Ojlerova jednačina ravnoteže fluida ili Ojlerova jednačina za miran fluid. Očigledno je da se ona neposredno može dobiti iz Navije-Stoksove jednačine (39.3) ili Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja nevizkoznih fluida (42.3), ako se stavi da je brzina jednaka nuli.

Iz (53.3) vidimo da je polje zapreminske sile složeno lamelarno. Stoga važi s t a v: *U mirnom fluidu egzistira familija površi $p=\text{const}$. koje su upravne na vektorske linije zapreminske sile.* Dokaz ovog stava je trivijalan, jer je iz (53.3) očigledno da je vektor \vec{f} kolinearisan sa vektorom grad p . Prethodni stav se može iskazati i na sledeći način: *Fluid može biti u ravnoteži ako i samo ako su zapreminske sile upravne na ekviskalarne površi hidrostatičkog pritiska.*

Iz jednačine (53.3) mogu se isključiti gustina i hidrostatički pritisak. U tom cilju napisaćemo jednačinu (53.3) u obliku

$$\rho f_k = p_{,k}$$

i primeniti na nju operaciju rotora. Na taj način dobivamo

$$\epsilon^{ijk} (\rho f_k)_{,j} = 0, \quad (\text{rot } (\rho \vec{f}) = 0),$$

odnosno

$$(53.4) \quad \epsilon^{ijk} \rho_{,j} f_k + \rho \epsilon^{ijk} f_{k,j} = 0,$$

ili, u vektorskom obliku,

$$(53.5) \quad \text{grad } \rho \times \vec{f} + \rho \text{ rot } \vec{f} = 0.$$

Ako sada jednačinu (53.4) skalarno pomnožimo sa f_i , dobivamo

$$(53.6) \quad \epsilon^{ijk} f_i f_k{}_{,j} = 0,$$

jer je $\epsilon^{ijk} \rho_{,j} f_i f_k = 0$. U vektorskom obliku prethodna jednačina je

$$(53.7) \quad \vec{f} \cdot \text{rot } \vec{f} = 0.$$

Jednačina (53.6), odnosno (53.7), s obzirom da je dobivena iz diferencijalne jednačine ravnoteže (53.3), predstavlja potreban i dovoljan uslov da fluid bude u ravnoteži. Kako, međutim, jednačina (53.7) predstavlja potreban i dovoljan uslov da polje zapreminske sile bude složeno lamelarno, tj. da je oblika

$$(53.8) \quad \vec{f} = F \text{ grad } G,$$

zaključujemo: Da bi fluid bio u ravnoteži potrebno je i dovoljno da polje zapreminske sile bude složeno lamelarno.

Iz (53.7) vidimo da je uslov

$$(53.9) \quad \text{rot } \vec{f} = 0,$$

dovoljan, ali ne i potreban, da fluid bude u ravnoteži. Kako, međutim, (53.9) predstavlja potreban i dovoljan uslov da polje zapreminske sile bude lamelarno, tj. da je oblika

$$(53.10) \quad \vec{f} = \text{grad } U,$$

zaključujemo: Da bi fluid bio u ravnoteži dovoljno je, ali ne i potrebno, da polje zapreminske sile bude lamelarno, tj. da je zapreminska sila konzervativna.

Prema tome, jednačina (53.7) određuje klasu zapreminskih sila pod čijim dejstvom fluid može biti u ravnoteži. Na osnovu jednačina (53.8) i (53.10) vidimo da fluid može biti u ravnoteži u dva slučaja: 1) kad je polje zapreminske sile složeno lamelarno i 2) kad je polje zapreminske sile lamelarno, tj. kad je zapreminska sila konzervativna. Da bi fluid bio u ravnoteži prvi uslov je potreban i dovoljan, a drugi — dovoljan.

Kad su zapreminske sile konzervativne, tj. kad su oblika (53.10), iz (53.5) dobivamo

$$(53.11) \quad \text{grad } \rho \times \vec{f} = 0,$$

odakle zaključujemo da je vektor \vec{f} kolinearan sa vektorom grad ρ . Stoga važi s t a v: Kad je fluid u ravnoteži pod dejstvom konzervativne zapreminske sile, vektorske

linije zapreminske sile su upravne na površi konstantne gustine. Zapreminske sile su, dakle, upravne na ekviskalarne površi polja gustine. Kako su, međutim, u slučaju ravnoteže zapreminske sile uvek upravne na ekviskalarne površi polja hidrostatičkog pritiska, zaključujemo da važi i s t a v: *Kad je fluid u ravnoteži pod dejstvom konzervativne zapreminske sile površi konstantne gustine poklapaju se sa površima konstantnog hidrostatičkog pritiska.* Može se pokazati da važi i obrnuto, tj. da važi s t a v: *Ako se ekviskalarne površi gustine poklapaju sa ekviskalarnim površima hidrostatičkog pritiska, ravnoteža je moguća ako i samo ako su zapreminske sile konzervativne.*

D o k a z. Ako se ekviskalarne površi gustine poklapaju sa ekviskalarnim površima hidrostatičkog pritiska, biće

$$\text{grad } \rho \times \text{grad } p = 0,$$

pa i

$$\text{grad } \rho \times \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0,$$

odnosno, ako iskoristimo diferencijalnu jednačinu ravnoteže (53.3),

$$\text{grad } \rho \times \vec{f} = 0.$$

Na osnovu ovoga, iz (53.5) dobivamo

$$\text{rot } \vec{f} = 0,$$

odakle sledi

$$\vec{f} = \text{grad } U,$$

čime je stav dokazan.

49
54. **Osnovna jednačina statike fluida.** S obzirom da pretpostavljamo da su zapreminske sile poznate (zadate), u Ojlerovoj diferencijalnoj jednačini ravnoteže kao nepoznate funkcije figurišu gustina ρ i hidrostatički pritisak p . S obzirom, međutim, da jednačina (53.3) predstavlja sistem od tri parcijalne diferencijalne jednačine prvog reda, jasno je da joj, kao karakteristična jednačina, odgovara jedna obična diferencijalna jednačina. Da bismo dobili tu jednačinu, pomnožimo jednačinu (53.2) skalarno vektorom $d\vec{x}_i$. Na taj način dobivamo

$$(54.1) \quad \frac{dp}{\rho} = f_k dx^k.$$

U odnosu na sistem Dekartovih pravouglanih koordinata, ako uvedemo oznake

$$\vec{f} = \{f_k\} = \{X, Y, Z\},$$

$$d\vec{x} = \{dx^k\} = \{dx, dy, dz\},$$

jednačina (54.1) je oblika

$$(54.2) \quad \frac{dp}{\rho} = X dx + Y dy + Z dz.$$

Jednačina (54.1) se naziva osnovna jednačina statike fluida. U njoj, kao nepoznate funkcije, figurišu ρ i p , pa je jasno da za njihovo određivanje moramo koristiti još i jednačinu stanja fluida.

U prethodnom odeljku smo zaključili da fluid može biti u ravnoteži ili kad je polje zapreminske sile složeno lamelarno, u kom slučaju je zapreminska sila oblika (53.8), ili, pak, kad je polje zapreminske sile lamelarno, u kom slučaju je zapreminska sila oblika (53.10). U prvom slučaju Ojlerova jednačina (53.3) je oblika

$$(54.3) \quad F \operatorname{grad} G = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

odakle, skalarnim množenjem sa \vec{dx} , dobivamo osnovnu jednačinu u obliku

$$F dG = \frac{1}{\rho} dp,$$

odnosno

$$(54.4) \quad \frac{dp}{\rho F} = dG.$$

U drugom slučaju, kad su zapreminske sile konzervativne, Ojlerova jednačina (53.3) je oblika

$$(54.5) \quad \operatorname{grad} U = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p,$$

pa, skalarnim množenjem sa vektorom \vec{dx} , dobivamo osnovnu jednačinu u obliku

$$(54.6) \quad \frac{dp}{\rho} = dU.$$

55. Uslovi integrabilnosti i integrali diferencijalnih jednačina ravnoteže. U slučaju kad je polje zapreminske sile složeno lamelarno, Ojlerova diferencijalna jednačina ravnoteže je oblika (54.3), odnosno

$$(55.1) \quad \operatorname{grad} G = \frac{1}{\rho F} \operatorname{grad} p,$$

pri čemu su skalarne funkcije F i G poznate. Da bi ova jednačina bila integrabilna, mora njena desna strana biti gradijent neke skalarne funkcije. Prema tome, primenjujući operaciju rotora, iz jednačine (55.1) dobivamo uslov njene integrabilnosti u obliku

$$(55.2) \quad \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\rho F} \operatorname{grad} p \right) = 0.$$

Ovaj uslov, s obzirom da je $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} p) = 0$, možemo izraziti u obliku

$$(55.3) \quad \operatorname{grad} \left(\frac{1}{\rho F} \right) \times \operatorname{grad} p = 0,$$

i vidimo da će biti zadovoljen ako i samo ako se ekviskalarne površi funkcije ρF poklapaju sa ekviskalarnim površima hidrostatičkog pritiska. Kako je u tom slučaju ρF funkcija samo hidrostatičkog pritiska, može se uvesti skalarna funkcija pritiska

$$(55.4) \quad \Phi(p) = \int \frac{dp}{\rho F},$$

tako da je

$$\text{grad } \Phi = \Phi'(p) \text{ grad } p = \frac{1}{\rho F} \text{ grad } p,$$

odnosno

$$(55.5) \quad \frac{1}{\rho F} \text{ grad } p = \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho F} \right).$$

Prema tome, kad je uslov integrabilnosti (55.2), odnosno (53.3), zadovoljen, važi jednačina (55.5), pa diferencijalnu jednačinu ravnoteže (55.1) možemo napisati u obliku

$$(55.6) \quad \text{grad } G = \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho F} \right)$$

i možemo je integraliti. Skalarnim množenjem sa \vec{dx} , naime, dobivamo

$$(55.7) \quad dG = d \left(\int \frac{dp}{\rho F} \right),$$

odakle je, posle integracije,

$$(55.8) \quad \int \frac{dp}{\rho F} - G = C, \quad (C = \text{const}).$$

Ova jednačina predstavlja integral Ojlerove diferencijalne jednačine ravnoteže u slučaju kad je polje zapreminske sile složeno lamelarno i mora biti zadovoljena u svakoj tački u fluidu. Jasno je da smo jednačinu (55.8) mogli dobiti integracijom osnovne jednačine (54.4) kad je ispunjen uslov integrabilnosti. Kad je, naime, ispunjen uslov integrabilnosti, tj. kad je ρF funkcija samo hidrostatičkog pritiska, leva strana jednačine (54.4) predstavlja totalni diferencijal skalarne funkcije pritiska (55.4), pa integracijom neposredno dobivamo (55.8).

U slučaju kad su zapreminske sile konzervativne, Ojlerova diferencijalna jednačina ravnoteže je oblika (54.5), sa uslovom integrabilnosti

$$(55.9) \quad \text{rot} \left(\frac{1}{\rho} \text{ grad } p \right) = 0,$$

odnosno

$$(55.10) \quad \text{grad} \left(\frac{1}{\rho} \right) \times \text{grad } p = 0.$$

Ovaj uslov će biti zadovoljen ako i samo ako se ekviskalarne površi gustine poklapaju sa ekviskalarnim površima hidrostatičkog pritiska, tj. ako i samo ako je gustina funkcija jedino hidrostatičkog pritiska. Uslov da je fluid barotropan, prema tome,

predstavlja uslov integrabilnosti diferencijalne jednačine ravnoteže u slučaju kad su zapreminske sile konzervativne. Stoga važi s t a v: *Fluid može biti u ravnoteži pod dejstvom konzervativnih zapreminskih sila ako i samo ako je barotropan.* Jasno je da važi i obrnuto, tj. da važi s t a v: *Barotropni fluid može biti u ravnoteži ako i samo ako su zapreminske sile konzervativne.*

Kad je ispunjen uslov integrabilnosti, tj. kad je fluid barotropan, važi jednačina (41.14), pa diferencijalnu jednačinu ravnoteže (54.5) možemo napisati u obliku

$$(55.11) \quad \text{grad } U = \text{grad} \left(\int \frac{dp}{\rho} \right),$$

i možemo je integraliti. Skalarnim množenjem sa \vec{dx} , naime, dobivamo

$$(55.12) \quad dU = d \left(\int \frac{dp}{\rho} \right),$$

odakle je, posle integracije,

$$(55.13) \quad \int \frac{dp}{\rho} - U = C, \quad (C = \text{const.}).$$

Ova jednačina predstavlja integral Ojlerove diferencijalne jednačine ravnoteže u slučaju kad su zapreminske sile konzervativne i mora biti zadovoljena u svakoj tački u fluidu. Jasno je da smo jednačinu (55.13) mogli dobiti integracijom osnovne jednačine (54.6) kad je ispunjen uslov integrabilnosti, tj. kad je fluid barotropan. S obzirom da je tada gustina funkcija samo pritiska, leva strana jednačine (55.6) je totalni diferencijal, pa integracijom neposredno dobivamo (55.13).

Integral Ojlerove diferencijalne jednačine ravnoteže može se dobiti iz integrala Ojlerove diferencijalne jednačine kretanja ako se stavi da je brzina jednaka nuli. Stavljajući, naime, da je brzina jednaka nuli, Bernulijeva jednačina (44.9), odnosno (44.14), se svodi na jednačinu (55.13), pri čemu integraciona konstanta C ima istu vrednost u svim tačkama u fluidu. To je jasno jer je Bernulijeva jednačina izvedena pod istim uslovima kao i jednačina (55.13): da je fluid barotropan i da su zapreminske sile konzervativne.

Integracionu konstantu u jednačini (55.13) možemo odrediti iz uslova da je u nekoj tački u fluidu: $p=p_0$, $\rho=\rho_0$ i $U=U_0$. Na taj način, jednačinu (55.13) možemo izraziti u obliku

$$(55.14) \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} - (U - U_0) = 0.$$

VIII RAVNOTEŽA BAROTROPNIH FLUIDA U POLJU SILE

ZEMLJINE TEŽE

57

ODREDITI RASPORED PRITISKA U NESTIŠLJIVOM MIKROSM FLUIDU
POD DEJSTVOM SILE ZEMLJINE TEŽE

56. Nestišljivi fluidi. U odeljku 41. smo pokazali da se tečnosti mogu posmatrati kao nestišljivi fluidi. Prema tome, za tečnosti, s obzirom da je kod njih jednačina stanja $\rho = \text{const.}$, konačna jednačina ravnoteže (55.14) se može napisati u obliku

$$(56.1) \quad \frac{p - p_0}{\rho} - (U - U_0) = 0.$$

Ako sistem Dekartovih pravougljih koordinata izaberemo tako da osa z bude vertikalna i orijentisana naviše, i ako na fluid, kao zapreminska sila, deluje samo sila Zemljine teže, funkcija sile je

$$(56.2) \quad U = -gz,$$

pa jednačina (56.1) može da se izrazi u obliku

$$(56.3) \quad \frac{p - p_0}{\rho} + g(z - z_0) = 0,$$

odnosno

$$(56.4) \quad p - p_0 + \gamma(z - z_0) = 0,$$

odakle sledi

$$(56.5) \quad p = p_0 + \gamma(z_0 - z),$$

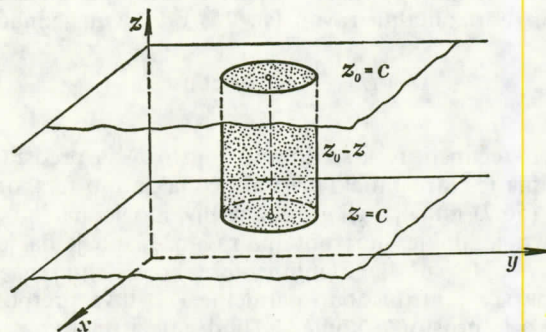
gde je $\gamma = \rho g$ specifična težina tečnosti, koja za određenu tečnost ima konstantnu vrednost. Vidimo, dakle, da je hidrostatički pritisak funkcija samo koordinate z . Na osnovu toga zaključujemo da su horizontalne ravni, $z = \text{const.}$, ravni konstantnog hidrostatičkog pritiska.

Ako jednačinu (56.4) napišemo u obliku

$$(56.6) \quad p - p_0 = \gamma(z_0 - z),$$

vidimo da je razlika pritisaka u tačkama sa koordinatama z_0 i z jednaka težini stuba tečnosti sa jediničnom površinom osnove između ravni $z = z_0$ i $z = z$ (sl. 74).

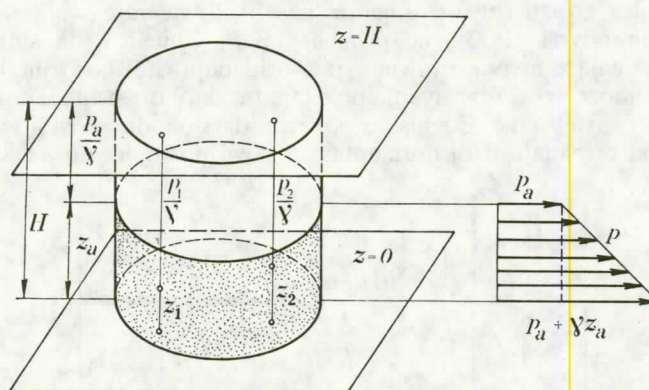
Uočimo sada tečnost koja se nalazi u nekom sudu i koja je u ravnoteži. Sistem Dekartovih pravougljih koordinata izaberimo tako da ose x i y leže u ravni dna suda a osu z orijentišimo vertikalno naviše (sl. 75.). Neka se slobodna površ tečnosti, kojim se ona graniči sa atmosferskim vazduhom, nalazi na visini $z=z_a$ od dna suda.



Sl. 74

Jasno je da je slobodna površ tečnosti horizontalna ravan, jer predstavlja geometrijsko mesto tačaka konstantnog pritiska $p=p_a$, gde je p_a atmosferski pritisak na slobodnoj površi tečnosti. Na osnovu jednačine (56.5), dobivamo

$$(56.7) \quad p = p_a + \gamma(z_a - z).$$



Sl. 75

Vidimo, dakle, da je pritisak najmanji u tačkama slobodne površi, gde je jednak atmosferskom, i da se linearno povećava sa povećanjem rastojanja od slobodne površi, što je grafički prikazano na slici 75. Najveći pritisak je u tačkama dna suda u kojima iznosi $p=p_a + \gamma z_a$.

Jednačinu (56.7) možemo napisati u obliku

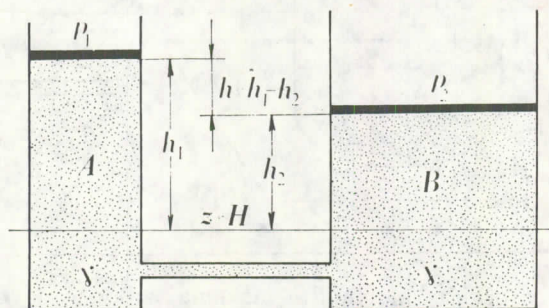
$$(56.8) \quad \frac{p}{\gamma} + z = \frac{p_a}{\gamma} + z_a,$$

i vidimo da se ona neposredno dobiva iz Bernulijeve jednačine (45.3) ako se stavi da je brzina jednaka nuli. Prema tome, važi s t a v: Ako se tečnost nalazi u ravnoteži pod dejstvom sile Zemljine teže, zbir pritiska i geodezijske visine ima istu vrednost u svakoj tački tečnosti. Ako bismo, dakle, geodezijskoj visini svake tačke u tečnosti dodali odgovarajuću pritisnu visinu, geometrijske mesto krajnjih tačaka tako dobivenih duži predstavljalo bi horizontalnu ravan (sl. 75) određenu jednačinom

$$z = H = \frac{p_a}{\gamma} + z_a = \text{const.}$$

Slobodna površ tečnosti uvek se dobiva iz uslova da predstavlja geometrijsko mesto tačaka u kojima je hidrostatički pritisak jednak atmosferskom pritisku. Prema tome, iz jednačine (56.7), stavljajući $p = p_a$, dobivamo jednačinu slobodne površi: $z = z_a$. Slobodna površ je, dakle, horizontalna ravan. Jasno je da je ovakav rezultat posledica pretpostavke da su sile Zemljine teže koje deluju na pojedine fluidne deliće vertikalnog pravca i međusobno paralelne. Ovakva pretpostavka, međutim, ima smisla samo ako je prostor u kome se fluid nalazi relativno mali u odnosu na dimenzije Zemlje. Ako, međutim, prostor u kome se tečnost nalazi nije mali u odnosu na dimenzije Zemlje, kao što je, na primer, slučaj sa vodom koja se nalazi u okeanima ili morima, činjenicu da pravac dejstva sile Zemljine teže uvek prolazi kroz središte Zemlje ne smemo zanemariti. U tom slučaju, prema tome, s obzirom da su površi konstantnog pritiska uvek upravne na pravac dejstva zapremne sile, zaključujemo da će slobodna površ biti sfernog oblika.

Činjenica da je slobodna površ tečnosti koja se nalazi u ravnoteži pod dejstvom samo sile Zemljine teže horizontalna ima i praktične primene. Poznato je, na primer, da se ta činjenica koristi i u instrumentu, tzv. libeli, za određivanje horizontalnog položaja ravnih površi. Praktične primene ima i činjenica da slobodne površi tečnosti koje se nalaze u spojenim sudovima pripadaju istoj horizontalnoj ravni, jer se na taj način može vršiti utvrđivanje položaja tačaka koje pripadaju istoj horizontalnoj ravni, tzv. nivelisanje. Da bismo pokazali da slobodne površi tečnosti u spojenim sudovima pripadaju istoj horizontalnoj ravni postupićemo na sledeći način.



Sl. 76

Uočimo dva spojena suda, A i B, (sl. 76) u kojima se nalazi tečnost specifične težine γ . Neka se slobodne površi tečnosti u sudovima, u čijim tačkama su pritisci p_1 i p_2 , nalaze na rastojanjima h_1 i h_2 od proizvoljno izabrane horizontalne ravni $z = H = \text{const.}$, tako da je $h = h_1 - h_2$ razlika nivoa tečnosti u sudovima. Ako se tečnost u sudovima nalazi u ravnoteži, pritisak u tačkama ravni $z = H$ ima istu vrednost,

jer su horizontalne ravni — ravni konstantnog pritiska. Ako, međutim, sud A posmatramo kao odvojen, pritisak u tačkama ravni $z=H$ iznosi $p_1 + \gamma h_1$, a ako, pak, sud B posmatramo kao odvojen pritisak u tačkama iste ravni iznosi $p_2 + \gamma h_2$. Izjednačavajući ova dva izraza, dobivamo

$$(56.9) \quad p_2 - p_1 = \gamma (h_1 - h_2) = \gamma h.$$

Vidimo, dakle, da je razlika pritiska u tačkama slobodnih površi tečnosti u sudovima jednaka težini stuba tečnosti jedinične površine osnove i visine $h=h_1-h_2$. Ako je, međutim, $p_2=p_1=p_a$, iz (56.9) sledi $h=0$, odnosno $h_1=h_2$, čime je pokazano da slobodne površi tečnosti koje se u oba suda graniče sa atmosferskim vazduhom pripadaju istoj horizontalnoj ravni.

U odeljku 41. smo pokazali da se pritisak kroz nestišljiv fluid trenutno prenosi. Pokazaćemo sada da u slučaju ravnoteže nestišljivog fluida pod dejstvom sile Zemljine teže važi **Paskalov zakon**. Ako se tečnost nalazi u ravnoteži u polju sile Zemljine teže, svaka promena pritiska u jednoj tački podjednako se prenosi u sve ostale tačke u tečnosti. Da bismo to pokazali uočimo u tečnosti koja se nalazi u ravnoteži dve tačke u kojima su pritisci p_1 i p_2 . Razlika pritiska u tim tačkama određena je izrazom

$$(56.10) \quad p_2 - p_1 = \gamma (z_1 - z_2).$$

Ako sada pretpostavimo da se pritisak p_2 na neki način poveća za δp_2 , a istovremeno pritisak p_1 za δp_1 , i da pri tome ravnoteža nije poremećena, na osnovu (56.10) zaključujemo da mora biti

$$(p_2 + \delta p_2) - (p_1 + \delta p_1) = \gamma (z_1 - z_2),$$

odnosno $\delta p_2 = \delta p_1$. Prema tome, ako se u jednoj tački u tečnosti pritisak poveća za neku vrednost, povećaće se za istu vrednost i u svim ostalim tačkama u tečnosti. Ovo svojstvo tečnosti takođe ima velike praktične primene. Na njemu se, naime, zasniva rad hidrauličkih mašina (hidrauličke prese, dizalice i sl.), kao i hidrauličkih kočnica.

53. ODREDITI RASPORED PRITISKA U STIŠLJIVOM MIRNOM FLUIDU POD DEJSTVOM PRI IZOTERMIČKOJ PROMENI STANJA

57. **Stišljivi fluidi.** Ako sistem Dekartovih pravouglanih koordinata izaberemo tako da osa z bude usmerena vertikalno naviše, jednačinu (55.14) možemo napisati u obliku

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} + g(z - z_0) = 0,$$

jer je funkcija sile oblika (56.2). Prethodnu jednačinu možemo, dalje, izraziti u obliku

$$(57.1) \quad z - z_0 = -\frac{1}{g} \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho}.$$

Da bismo iz ove jednačine odredili raspored pritiska ili gustine moramo imati i odgovarajuću jednačinu stanja. S obzirom da je po pretpostavci fluid barotropan, posmatraćemo odvojeno slučajeve kad je promena stanja izotermička i kad je adijabatska.

a) Izotermička promena stanja. U ovom slučaju jednačina stanja je

$$(57.2) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0},$$

pa je

$$(57.3) \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0}.$$

Koristeći ovaj izraz, iz (57.1) dobivamo

$$(57.4) \quad z - z_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} \ln \frac{\rho}{\rho_0},$$

odakle sledi

$$(57.5) \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{g \rho_0}{p_0} (z - z_0)},$$

odnosno, koristeći jednačinu stanja (57.2),

$$(57.6) \quad p = p_0 e^{-\frac{g \rho_0}{p_0} (z - z_0)}.$$

Jednačinama (57.5) i (57.6) određen je raspored gustine i pritiska u fluidu. Iz njih vidimo da gustina i pritisak opadaju eksponencijalno sa povećanjem visine. Osim toga, vidimo da su horizontalne ravni, $z = \text{const.}$, ravni i konstantne gustine i konstantnog pritiska.

b) Adijabatska promena stanja. U ovom slučaju jednačina stanja je

$$(57.7) \quad \frac{p}{p_0} = \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^\kappa,$$

pa je

$$\int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{p_0}{\rho_0} \right),$$

odnosno, ako iskoristimo jednačinu stanja,

$$(57.8) \quad \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho} = \frac{\kappa}{\kappa - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left[\left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} - 1 \right].$$

Koristeći ovaj izraz, iz (57.1) dobivamo

$$(57.9) \quad z - z_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \right],$$

odakle sledi

$$(57.10) \quad p = p_0 \left[1 - \frac{g \rho_0}{p_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} (z - z_0) \right]^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}.$$

Koristeći jednačinu stanja (57.7), jednačinu (57.9) možemo izraziti u obliku

$$(57.11) \quad z - z_0 = \frac{p_0}{g \rho_0} \frac{\kappa}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\kappa - 1} \right],$$

odakle sledi

$$(57.12) \quad \rho = \rho_0 \left[1 - \frac{g \rho_0}{p_0} \frac{\kappa - 1}{\kappa} (z - z_0) \right]^{\frac{1}{\kappa - 1}}.$$

Jednačinama (57.10) i (57.12) određen je raspored pritiska i gustina pri adijabataskoj ravnoteži stišljivih fluida pod dejstvom sile Zemljine teže. Iz tih jednačina vidimo da su horizontalne ravni, $z = \text{const.}$, ravni i konstantnog pritiska i konstantne gustine, što je posledica pretpostavke da je fluid barotropan. Iz jednačina (57.9) i (57.11) možemo odrediti horizontalne ravni u kojima pritisci, odnosno gustine, imaju zadate vrednosti.

Napominjemo da se izvedene jednačine ne mogu sa dovoljnom tačnošću primeniti na vazduh u atmosferi, naročito kad su visinske razlike velike. Razlog za to je što se stanje vazduha u atmosferi ne menja ni po izotermi ni po adijabati, već na promenu njegovog stanja utiče više faktora, od kojih je temperatura jedan od najbitnijih. Stoga se u tehničkim primenama stanje vazduha u atmosferi svodi na *normalnu* ili *standardnu atmosferu*. Ako sistem Dekartovih pravouglanih koordinata izaberemo tako da osa z bude usmerena vertikalno naviše i da koordinatnom početku odgovara nulta nadmorska visina, standardna atmosfera je karakterisana sa:

$$z = z_0 = 0, \quad T_0 = 273 + 15^\circ \text{C} = 288^\circ \text{K}, \quad \rho = \rho_0 = 0,125 \frac{\text{kps}^2}{\text{m}^4} \quad \text{i} \quad p = p_0 = 760 \text{ mm Hg.}$$

Što se, pak, rasporeda temperature tiče, uzima se da u granicama do 11000 m (tzv. *troposferi*) temperatura linearno opada sa visinom za $6,5^\circ \text{C}$ na svakih 1000 m. Iznad te visine (u tzv. *stratosferi*) uzima se da je temperatura konstantna i da iznosi $-56,5^\circ \text{C}$. U stratosferi se, prema tome, stanje vazduha menja po izotermi. Prema tome, u troposferi (do 11000 m) temperatura je određena izrazom

$$(57.13) \quad T = T_0 - \lambda z,$$

gde je

$$\lambda = \frac{6,5}{1000} = 0,0065^\circ \text{C/m},$$

pa je jednačina stanja vazduha

$$(57.14) \quad \frac{p}{\rho} = RT.$$

Osnovna jednačina ravnoteže (54.2) se svodi na

$$(57.15) \quad \frac{dp}{\rho} = -g dz$$

i može se, koristeći (57.13) i (57.14), integraliti. Koristeći (57.14), iz (57.15), naime, dobivamo

$$\frac{RT}{p} dp = -g dz,$$

odnosno, ako iskoristimo (57.13),

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g dz}{R(T_0 - \lambda z)}.$$

Integracijom, odavde dobivamo

$$\ln \frac{p}{p_0} = \frac{g}{R\lambda} \ln \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right),$$

odnosno

$$(57.16) \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right)^{\frac{g}{\lambda R}},$$

gde je p_0 pritisak na morskome nivou koji iznosi 760 mm Hg.

Da bismo dobili raspored gustine u troposferi, napisaćemo jednačinu stanja (57.14) u obliku

$$p = R \rho T,$$

odakle diferenciranjem dobivamo

$$dp = RT d\rho + R\rho dT,$$

odnosno, ako iskoristimo (57.13),

$$dp = RT d\rho - R\rho \lambda dz.$$

Koristeći ovaj izraz, osnovna diferencijalna jednačina ravnoteže (57.15) se svodi na

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\lambda R - g}{R} \frac{dz}{T_0 - \lambda z},$$

odakle integracijom dobivamo

$$\ln \frac{\rho}{\rho_0} = \ln \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right)^{\frac{g}{\lambda R} - 1},$$

odnosno

$$(57.17) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{\lambda}{T_0} z \right)^{\frac{g}{\lambda R} - 1},$$

gde je ρ_0 gustina na morskome nivou koja iznosi $0,125 \text{ kp s}^2 \text{ m}^{-4}$.

Jednačinama (57.16) i (57.17) određen je raspored pritiska i gustine u troposferi. Ako konstante T_0 , λ i R izrazimo njihovim brojnim vrednostima, te jednačine možemo napisati u obliku

$$(57.18) \quad \frac{p}{p_0} = \left(1 - \frac{z}{44300} \right)^{5,255},$$

$$(57.19) \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 - \frac{z}{44300} \right)^{4,255},$$

pri čemu smo za gasnu konstantu uzeli vrednost $R = 29,27 \cdot g$.

Iz jednačina (57.18) i (57.19) vidimo da su u troposferi horizontalne ravni, $z = \text{const.}$, ravni i konstantnog pritiska i konstantne gustine, iako vazduh nismo posmatrali kao barotropni fluid.

U stratosferi, kao delu atmosfere iznad 11000 m, s obzirom da se uzima da je temperatura konstantna ($-56,5^\circ\text{C}$), promena stanja je izotermička, pa je raspored gustine i pritiska određen izrazima (57.5) i (57.6). Jednačina stanja vazduha u štratosferi je, prema tome,

$$(57.20) \quad \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho_0} = RT,$$

gde su p_0 i ρ_0 pritisak i gustina na donjoj granici stratosfere, tj. na visini od 11000 m, i gde apsolutna temperatura iznosi $T = 273 - 56,5^\circ\text{C} = 216,5^\circ\text{K}$. Iz jednačine stanja (57.20) dobivamo

$$\frac{g \rho_0}{p_0} = \frac{g}{RT} = \frac{g}{g \cdot 29,27 \cdot 216,5} = \frac{1}{6337},$$

pa su, na osnovu (57.5) i 57.6), pritisak i gustina određeni izrazima

$$(57.21) \quad \frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\frac{z-11000}{6337}},$$

pri čemu relacije važe za $z \geq 11000$ m. Pritisak p_0 i gustinu ρ_0 na visini od 11000 m, koji figurišu u jednačini (57.21) određujemo iz izraza (57.18) i (57.19) u kojima, pak, p_0 i ρ_0 predstavljaju pritisak i gustinu na morskome nivou. Na taj način, za pritisak p_0 i gustinu ρ_0 na visini od 11000 m, koji figurišu u jednačinama (57.21), dobivamo $p_0 = 169,6$ mm Hg i $\rho_0 = 0,0371$ kp s² m⁻⁴.

U donjoj tablici date su vrednosti temperature, pritiska i gustine na pojedinim visinama standardne atmosfere.

z m	t °C	p mm Hg	ρ kp s ² m ⁻⁴
-1000	21,50	854,59	0,1374
- 500	18,25	806,17	0,1311
0	15,00	760,00	0,1250
500	11,75	715,99	0,1191
1000	8,50	674,07	0,1134
1500	5,25	634,16	0,1079
2000	2,00	596,18	0,1027
2500	- 1,25	560,07	0,0976
3000	- 4,50	525,75	0,0927
3500	- 7,75	493,15	0,0880
4000	-11,00	462,21	0,0835
4500	-14,25	432,86	0,0792
5000	-17,50	405,04	0,0751
5500	-20,75	378,68	0,0711
6000	-24,00	353,73	0,0673
6500	-27,25	330,13	0,0636
7000	-30,50	307,82	0,0601
7500	-33,75	286,74	0,0568
8000	-37,00	266,85	0,0535
8500	-40,25	248,11	0,0505
9000	-43,50	230,42	0,0475
9500	-46,75	213,78	0,0447
10000	-50,00	198,12	0,0421
10500	-53,25	183,41	0,0395
11000	-56,50	169,60	0,0371
11500	-56,50	156,73	0,0343
12000	-56,50	144,84	0,0317
12500	-56,50	133,85	0,0293
13000	-56,50	123,69	0,0271
13500	-56,50	114,31	0,0250
14000	-56,50	105,64	0,0231
14500	-56,50	97,62	0,0214
15000	-56,50	90,22	0,0197

58. **Relativno mirovanje nestišljivih fluida.** U prethodna dva odeljka posmatrali smo ravnotežno stanje fluida koji su mirovali, odnosno imali jednoliko translatorno kretanje u polju sile Zemljine teže. S obzirom da u tom slučaju, kao zapreminska sila, na fluid deluje samo sila Zemljine teže, pokazali smo da su ravni konstantnog pritiska — horizontalne ravni. Slobodna površ tečnosti, prema tome, uvek je horizontalna ravan. U ovom odeljku, međutim, proučićemo ravnotežno stanje tečnosti koje se nalaze u relativnom mirovanju. Za tečnost kažemo da se nalazi u relativnom

mirovanju ako se nalazi u sudu koji se kreće a tečnost pri tome u odnosu na sud miruje. Jasn^o je da u tom slučaju pored sile Zemljine teže moramo uzeti u obzir i uticaj sile inercije. Sila inercije, računata po jedinici mase, jednaka je suprotno orijentisanom vektoru ubrzanja, pa se Ojlerova diferencijalna jednačina ravnoteže (53.3) može, u slučaju relativnog mirovanja fluida, napisati u obliku

$$(58.1) \quad \vec{f} - \vec{w} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

odnosno

$$(58.2) \quad \vec{F} = \frac{1}{\rho} \text{grad } p,$$

gde je

$$(58.3) \quad \vec{F} = \vec{f} - \vec{w},$$

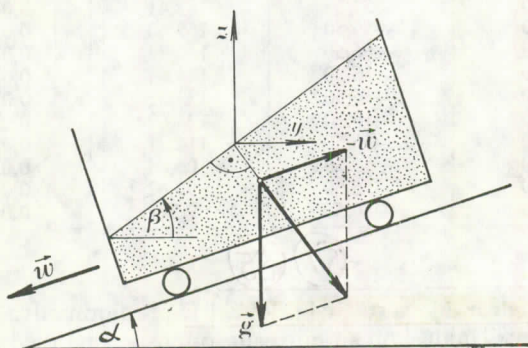
rezultujuća zapreminska sila.

Iz (58.2) vidimo da u fluidu koji se nalazi u relativnom mirovanju egzistira familija površi $p = \text{const.}$ koje su upravne na vektorske linije rezultujuće zapreminske sile. Prema tome, površi konstantnog pritiska uvek su upravne na pravac dejstva rezultujuće zapreminske sile. Na osnovu toga zaključujemo da će i slobodna površ tečnosti, u čijim tačkama je pritisak jednak atmosferskom pritisku, biti površ u čijoj svakoj tački je pravac dejstva rezultujuće zapreminske sile na nju upravan.

Posebno ćemo proučiti dva moguća slučaja relativnog mirovanja tečnosti.

54 a) **Translatorno kretanje sa konstantnim ubrzanjem.** Pretpostavimo da se sud sa tečnošću kreće niz strmu ravan, koja sa horizontalnom ravni zaklapa ugao α (sl. 77), sa konstantnim ubrzanjem \vec{w} . Ako na slobodnoj površi tečnosti sistem Dekartovih pravouglanih koordinata izaberemo tako da osa z bude orijentisana vertikalno naviše, a osa x upravna na ravan kretanja, koordinate rezultujuće zapreminske sile su

$$X = 0, \quad Y = w \cos \alpha, \quad Z = w \sin \alpha - g,$$



Sl. 77

gde smo sa w označili intenzitet vektora ubrzanja. Da bismo odredili raspored pritiska u tečnosti, iskoristićemo osnovnu jednačinu ravnoteže (54.2) u kojoj,

međutim, X , Y i Z predstavljaju projekcije rezultujuće zapreminske sile. Na taj način dobivamo

$$\frac{dp}{\rho} = w \cos \alpha dy + (w \sin \alpha - g) dz,$$

odakle sledi

$$p + C = \rho [yw \cos \alpha + z(w \sin \alpha - g)].$$

Integracionu konstantu određujemo iz uslova da je u tačkama $y=z=0$ pritisak jednak atmosferskom pritisku. Na taj način dobivamo $C = -p_a$, pa se prethodna jednačina može napisati u obliku

$$(58.4) \quad p - p_a = \rho [yw \cos \alpha + z(w \sin \alpha - g)].$$

Ovom jednačinom su određeni pritisci u pojedinim tačkama u tečnosti. Da bismo dobili jednačinu slobodne površi tečnosti, treba u jednačini (58.4) da stavimo da je $p = p_a$. Na taj način dobivamo

$$(58.5) \quad z = \frac{w \cos \alpha}{g - w \sin \alpha} y,$$

pa vidimo da je slobodna površ tečnosti ravan koja sa horizontalnom ravni zaklapa ugao

$$\beta = \arctg \frac{w \cos \alpha}{g - w \sin \alpha}.$$

b) Obrtanje konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne ose. Neka se tečnost nalazi u cilindričnom sudu poluprečnika R i neka se sud obrće konstantnom ugaonom

brzinom ω oko svoje vertikalne ose simetrije (sl. 78). S obzirom na viskoznost tečnosti, jasno je da će se tečnost u sudu početi obrtati i posle izvesnog vremena obrtaće se zajedno sa sudom kao kruto telo. Na deliće tečnosti, pored sile Zemljine teže, delovaće tada, kao sila inercije, i aksifugalna sila. Ako sistem Dekartovih pravouglanih koordinata izaberemo tako da se osa z poklapa sa osom simetrije suda i da je orijentisana vertikalno naviše, a da se koordinatni početak nalazi na slobodnoj površi tečnosti, projekcije rezultujuće zapreminske sile su

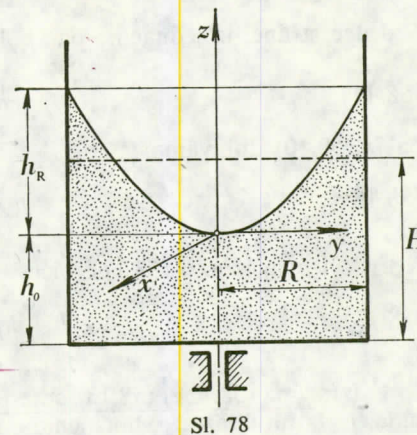
$$(58.6) \quad X = \omega^2 x, \quad Y = \omega^2 y, \quad Z = -g,$$

gde je ω intenzitet ugaone brzine obrtanja tečnosti i suda. Koristeći ove izraze, osnovna jednačina ravnoteže (54.2) se svodi na

$$(58.7) \quad dp = \rho (\omega^2 x dx + \omega^2 y dy - g dz).$$

Integracijom odavde dobivamo

$$(58.8) \quad p - p_a = \frac{\rho}{2} [\omega^2 (x^2 + y^2) - 2gz],$$



Sl. 78

pri čemu smo integracionu konstantu odredili iz uslova da je u koordinatnom početku pritisak jednak atmosferskom pritisku. Ovom jednačinom određen je raspored pritiska u tečnosti. Vidimo da pritisci u pojedinim tačkama u tečnosti zavise i od intenziteta ugaone brzine obrtanja tečnosti.

Da bismo dobili jednačinu slobodne površi tečnosti, stavićemo u jednačini (58.8) da je $p=p_a$. Na taj način dobivamo jednačinu slobodne površi tečnosti u obliku

$$(58.9) \quad z = \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2)$$

i vidimo da je to obrtni paraboloid sa temenom u koordinatnom početku (sl. 78). Prema tome, slobodna površ tečnosti, koja je pre obrtanja bila horizontalna ravan, prelazi za vreme obrtanja u obrtni paraboloid. S obzirom da je tečnost po pretpostavci nestišljiva, tj. da ne može promeniti svoju zapreminu, jasno je da će se tečnost za vreme obrtanja popeti uz zidove suda, odnosno spustiti duž ose obrtanja u odnosu na prvobitni nivo. Da bismo odredili na koju će se visinu tečnost popeti uz zidove suda, odnosno spustiti duž ose obrtanja, postupićemo na sledeći način.

Ako visinu tečnosti pre obrtanja označimo sa H , a sa $h_0 + h_R$ i sa h_0 visinu tečnosti duž vidova suda i ose obrtanja za vreme obrtanja, iz jednakosti zapremina tečnosti pre i za vreme obrtanja dobivamo

$$R^2 \pi H = R^2 \pi h_0 + \frac{1}{2} R^2 \pi h_R,$$

odakle sledi

$$(58.10) \quad H = h_0 + \frac{1}{2} h_R.$$

S druge strane, iz jednačine paraboloida (58.9) dobivamo

$$(58.11) \quad h_R = \frac{\omega^2}{2g} R^2,$$

pa iz (58.10) dobivamo

$$(58.12) \quad h_0 = H - \frac{\omega^2}{4g} R^2.$$

Koristeći ovaj izraz i (58.11), biće

$$(58.13) \quad h_0 + h_R = H + \frac{\omega^2}{4g} R^2.$$

Izrazima (58.12) i (58.13) određena je visina tečnosti duž ose obrtanja i zidova suda. Iz tih izraza zaključujemo da će se tečnost uz zidove suda popeti, odnosno duž ose obrtanja spustiti u odnosu na prvobitnu visinu H za isti iznos

$$(58.14) \quad \frac{1}{2} h_R = \frac{\omega^2}{4g} R^2.$$

Vidimo, dakle, da visina do koje će se tečnost popeti uz zidove suda, odnosno spustiti duž ose obrtanja, zavisi, za fiksirano R , isključivo od ugaone brzine obrtanja. Kad je ugaona brzina obrtanja veća tečnost će se popeti na veću visinu duž zidova suda i obrnuto.

$$H = \frac{\omega^2}{4g} R^2$$

$$\omega = \frac{\sqrt{4gH}}{R} = \frac{2\sqrt{gH}}{R}$$

Iz proučenih primera relativnog mirovanja tečnosti vidimo da se pritisci u tačkama tečnosti, zbog uticaja sila inercije, razlikuju od pritisaka koji se pojavljuju u slučaju kad na tečnost deluje samo sila Zemljine teže. Ova činjenica je veoma važna i u praktičnim primenama. Da bismo to ilustrovali, pomenimo samo da se pojedine tečnosti koriste kao pogonsko sredstvo u raznim pokretnim objektima. Ako se, na primer, radi o avionu, tečna goriva se smeštaju u posebne sudove — rezervoare i jasno je da prilikom leta aviona, usled različitih ubrzanja, može doći do promene pritiska pa, prema tome, i do promene sila pritiska kojima tečno gorivo deluje na zidove rezervoara. Određivanje ovih sila je važno zbog pravilnog dimenzionisanja rezervoara, a njih možemo odrediti ako znamo, za različita ubrzanja, vrednosti hidrostatičkog pritiska u pojedinim tačkama u tečnosti.

Iz (58.8) vidimo da je hidrostatički pritisak u nekoj tački u tečnosti koja se obrće konstantnom ugaonom brzinom veći za član

$$\frac{1}{2} \rho \omega^2 (x^2 + y^2),$$

od hidrostatičkog pritiska koji bi odgovarao toj tački u slučaju da fluid miruje, tj. da na njega deluje samo sila Zemljine teže. Prema tome, povećanjem ugaone brzine obrtanja, možemo pritisak u svakoj tački povećavati do željene vrednosti. Ova činjenica ima i praktičnih primena u tehnici. Jasno je, naime, da ako se pomешaju dve tečnosti različitih specifičnih težina i takva mešavina ostavi da miruje pod dejstvom samo sile Zemljine teže, tečnosti će se posle izvesnog vremena razdvojiti na taj način što će tečnost sa većom specifičnom težinom zauzeti položaj ispod tečnosti sa manjom specifičnom težinom. Razlog tome je nejednak pritisak, usled različitih specifičnih težina, na istoj dubini od slobodne površi, a horizontalne ravni, kao što smo pokazali, moraju biti ravni konstantnog pritiska. Razdvajanje tečnosti može trajati veoma dugo ako su tečnosti veoma viskozne a razlika specifičnih težina mala, jersu sile trenja koje se suprotstavljaju razdvajanju velike, a razlika u pritiscima mala. Obrtanjem tečnosti konstantnom ugaonom brzinom povećavaju se pritisci u tačkama tečnosti pa se na taj način može ubrzati proces razdvajanja tečnosti. Razdvajanje će biti brže ukoliko je razlika pritisaka u istoj tački veća. Ako osu z od slobodne površi orijentišemo vertikalno naviše, razlika pritisaka dve tečnosti različitih gustina, odnosno specifičnih težina, u istoj tački iznosi

$$p_1 - p_2 = -(\gamma_1 - \gamma_2) z,$$

a ako se tečnosti obrću konstantnom ugaonom brzinom razlika pritisaka u istoj tački je

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \omega^2 (x^2 + y^2) - (\gamma_1 - \gamma_2) z,$$

i očigledno je veća nego u prvom slučaju kad na fluid deluje samo sila Zemljine teže. Povećanjem ugaone brzine obrtanja, prema tome, može se ubrzavati proces razdvajanja tečnosti. Na ovom principu, kao što je poznato, rade tzv. separatori, koji se upotrebljavaju u industriji nafte, mlekarstvu itd.

V e ž b a n j a

1. Odrediti raspored pritiska i jednačinu slobodne površi tečnosti ako se sud sa tečnošću kreće pravolinijski po horizontalnoj ravni sa konstantnim ubrzanjem.

2. Odrediti raspored pritiska i jednačinu slobodne površi tečnosti ako se sud sa tečnošću kreće vertikalno naviše konstantnim ubrzanjem.

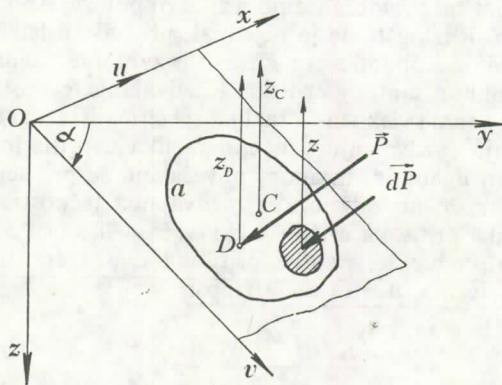
3. Odrediti raspored pritiska i jednačinu slobodne površi tečnosti ako se sud sa tečnošću kreće vertikalno naniže konstantnim ubrzanjem. Pokazati da je hidrostatički pritisak u svakoj tački u tečnosti jednak atmosferskom pritisku ako sud sa tečnošću slobodno pada.

4. Ako se u sudu koji miruje u polju sile Zemljine teže nalaze dve tečnosti različitih specifičnih težina koje se ne mešaju, pokazati da je površ koja razdvaja tečnosti horizontalna ravan.

59. Delovanje pritiska na površi potopljene u tečnosti. Ako se tečnost specifične težine γ nalazi u ravnoteži pod dejstvom samo sile Zemljine teže i ako sistem Dekartovih pravouglanih koordinata tako izaberemo da ose x i y leže u ravni slobodne površi tečnosti a osu z orijentišemo vertikalno naniže, hidrostatički pritisak u pojedinim tačkama u tečnosti je određen izrazom

$$(59.1) \quad p = p_a + \gamma z.$$

56 a) **Delovanje pritiska na ravne površi.** Uočimo konačnu ravnu površ a koja je potopljena u tečnosti specifične težine γ tako da osa x leži u ravni potopljene površi koja sa slobodnom površi tečnosti zaklapa ugao $\alpha \neq 0$ (sl. 79).



Sl. 79

Ako zanemarimo uticaj atmosferskog pritiska, pritisak u tačkama tečnosti je određen izrazom

$$p = \gamma z,$$

pa silu pritiska koja deluje na element površi da možemo izraziti u obliku

$$dP^i = -p da^i = -\gamma z da^i.$$

Kako je, međutim,

$$da^i = da n^i,$$

gde je \vec{n} jedinični vektor normale potopljene površi, biće

$$dP^i = -\gamma z da n^i.$$

Rezultujuća sila pritiska koja deluje na konačnu potopljenu površ je, prema tome,

$$P^i = - \int_a \gamma z da n^i,$$

odnosno

$$(59.2) \quad P^i = - \gamma n^i \int_a z da,$$

jer je $n^i = \text{const.}$, s obzirom da je potopljena površ ravna.

Ako potopljenu površ posmatramo kao geometrijsku figuru, njeno težište C se nalazi na dubini

$$z_c = \frac{1}{a} \int_a z da,$$

tako da je

$$(59.3) \quad \int_a z da = z_c a,$$

jer integral na desnoj strani jednačine (59.2) predstavlja statički moment potopljene površi prema slobodnoj površi.

Koristeći (59.3), jednačina (59.2) postaje

$$(59.4) \quad P^i = - \gamma z_c a n^i,$$

odnosno

$$(59.5) \quad P^i = - p_c a n^i,$$

gde smo sa p_c označili vrednost hidrostatičkog pritiska u težištu potopljene ravne površi.

Iz (59.4) vidimo da je intenzitet rezultujuće sile pritiska određen izrazom

$$(59.6) \quad P = \gamma z_c a,$$

odnosno

$$(59.7) \quad P = p_c a,$$

pa zaključujemo da važi s t a v: Intenzitet rezultujuće sile pritiska koja deluje na potopljenu ravnu površ jednak je pritisku u težištu potopljene površi pomnoženim površinom potopljene površi.

Ako napadnu tačku rezultujuće sile pritiska — centar pritiska — označimo sa D , koordinate te tačke možemo dobiti primenom Varinjonove teoreme za sistem paralelnih sila u prostoru: Moment rezultante paralelnih sila prema koordinatnoj ravni jednak je zbiru momenata komponenta prema istoj ravni. Na taj način dobivamo

$$(59.8) \quad P x_D = \gamma \int_a x z da, \quad P y_D = \gamma \int_a y z da, \quad P z_D = \gamma \int_a z^2 da,$$

odnosno

$$(59.9) \quad x_D = \frac{\gamma}{P} \int_a x z da, \quad y_D = \frac{\gamma}{P} \int_a y z da, \quad z_D = \frac{\gamma}{P} \int_a z^2 da.$$

Koordinate centra pritiska je pogodnije izraziti u odnosu na sistem koordinata u ravni potopljene površi. Ako, naime, u ravni potopljene površi uvedemo, kao Gausove parametre, pravougle Dekartove koordinate u i v tako da se osa u poklapa sa osom x prvobitno izabranog sistema koordinata (sl. 79), veza između tako uvedenih i prvobitnih koordinata je određena koordinatnim transformacijama

$$x = u, \quad y = v \cos \alpha, \quad z = v \sin \alpha.$$

Na osnovu ovih transformacija, iz (59.9) dobivamo

$$(59.10) \quad u_D = \frac{1}{av_c} \int_a uv da = \frac{I_{uv}}{av_c},$$

$$v_D = \frac{1}{av_c} \int_a v^2 da = \frac{I_u}{av_c},$$

gde je I_{uv} proizvod inercije potopljene površi a za ose u i v koji se, s obzirom da su te ose međusobno upravne, naziva centrifugalni moment inercije, a I_u je aksijalni moment inercije površi a za osu u .

Ako iskoristimo Hajgens-Štajnerovu teorem u vezi momenata inercije za dve paralelne ose, možemo pisati

$$I_u = I_c + v_c^2 a,$$

gde je I_c aksijalni moment inercije površi a za težišnu osu, pa drugu od jednačina (59.10) možemo izraziti u obliku

$$(59.11) \quad v_D = \frac{I_c + v_c^2 a}{av_c} = v_c + \frac{I_c}{av_c},$$

odakle zaključujemo da je $v_D > v_c$, tj. da važi s t a v: Ako je ravna površ potopljena u tečnosti, centar pritiska je uvek dublji od njenog težišta. Iz (59.11) zaključujemo da će razlika u dubinama centra pritiska i težišta biti manja ukoliko je v_c veće, tj. ukoliko je težište površi a dublje.

Prethodni stav ne važi ako je potopljena ravna površ horizontalna, jer se u tom slučaju centar pritiska poklapa sa težištem potopljene površi. Da bismo to pokazali, uočimo horizontalnu ravnu konačnu površ koja se nalazi na dubini H od slobodne površi (sl. 80). Veze između Dekartovih pravougljih koordinata x , y i z i Dekartovih pravougljih koordinata u i v u horizontalnoj ravni potopljene površi su

$$x = u, \quad y = v, \quad z = H = \text{const.}$$

Kako sve tačke potopljene površi imaju istu dubinu, jasno je da će i težište i centar pritiska imati istu dubinu H . Na osnovu (59.4), rezultujuća sila pritiska je

$$(59.12) \quad P^i = -\gamma H a n^i$$

a njen intenzitet je

$$(59.13) \quad P = \gamma H a.$$

Vidimo, dakle, da rezultujuća sila pritiska deluje vertikalno naniže, a njen intenzitet je jednak težini stuba tečnosti koji ima oblik cilindra sa potopljenom ravnom površi kao osnovom.

Da bismo odredili položaj centra pritiska, primenićemo Varignonovu teoremu za koordinatne ravni $x=0$ i $y=0$. Na taj način dobivamo

$$\begin{aligned} P x_D &= \int_a x p da = \\ &= \int_a x \gamma H da = \gamma H \int_a x da, \end{aligned}$$

odnosno

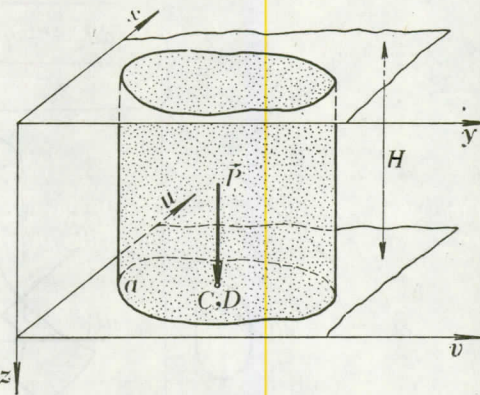
$$x_D = \frac{\gamma H}{P} \int_a x da = \frac{1}{a} \int_a x da = x_c.$$

Na sličan način dobivamo

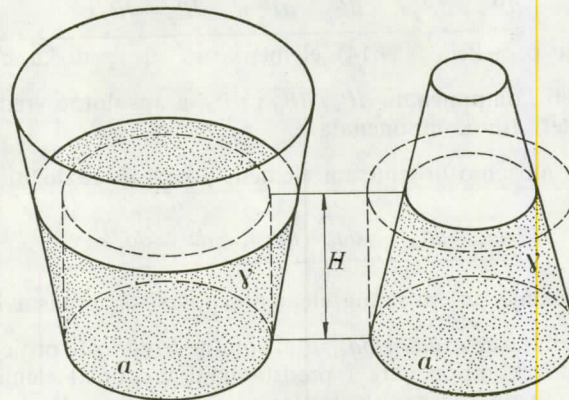
$$y_D = \frac{1}{a} \int_a y da = y_c,$$

pa kako je još i $z_D = z_c = H$, zaključujemo da se centar pritiska poklapa sa težištem.

Ako se tečnost nalazi u sudu čije ravno dno ima površinu a , intenzitet rezultujuće sile pritiska koja deluje na dno suda određen je izrazom (59.13) i vidimo da je jednak težini cilindričnog stuba tečnosti sa dnom suda kao osnovom i visinom jednakom rastojanju od dna suda do slobodne površi tečnosti. Osim toga, vidimo da rezultujuća sila pritiska ne zavisi od oblika suda, što predstavlja tzv. **Paskalov hidrostatički paradoks**. Prema tome, rezultujuće sile pritiska koje deluju na dna sudova prikazanih na slici 81 imaju iste intenzitete ako su dna tih sudova iste površine i ako je rastojanje od dna suda do slobodne površi tečnosti isto za oba suda.



Sl. 80

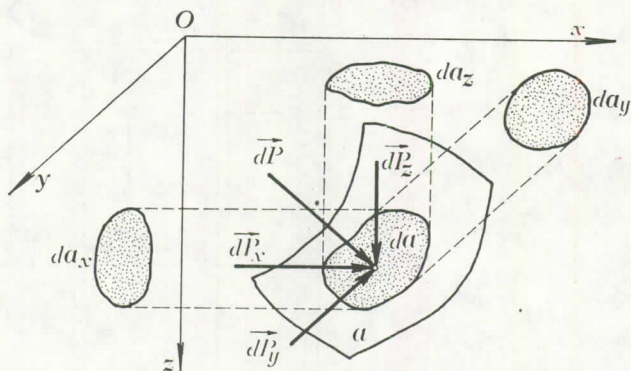


Sl. 81

57

b) Delovanje pritiska na krive površi. Neka je konačna kriva površ a potopljena u tečnosti specifične težine γ . Ako sistem Dekartovih pravougljih koordinata izaberemo tako da osa z bude orijentisana vertikalno naniže, a ose x i y da leže u ravni slobodne površi tečnosti (sl. 82), sila pritiska koja deluje na element površi da iznosi

$$dP_k = -\gamma z da_k.$$



Sl. 82

Ovoj jednačini, u odnosu na izabrani sistem Dekartovih pravougljih koordinata, odgovaraju sledeće tri skalarne jednačine

$$(59.14) \quad dP_x = -\gamma z da_x, \quad dP_y = -\gamma z da_y, \quad dP_z = -\gamma z da_z,$$

gde su dP_x , dP_y i dP_z projekcije elementarne sile pritiska, a da_x , da_y i da_z projekcije orijentisanog elementa površi na ose Dekartovog pravouglog sistema koordinata.

Ako elementarnu silu pritiska \vec{dP} razložimo u pravcima koordinatnih osa u komponente \vec{dP}_x , \vec{dP}_y i \vec{dP}_z , tada je, označavajući jedinične vektore koordinatnih osa sa \vec{i} , \vec{j} i \vec{k} ,

$$(59.15) \quad \vec{dP}_x = dP_x \vec{i}, \quad \vec{dP}_y = dP_y \vec{j}, \quad \vec{dP}_z = dP_z \vec{k}.$$

Vidimo, dakle, da projekcije (59.14) elementarne sile pritiska \vec{dP} predstavljaju algebarske vrednosti komponenata \vec{dP}_x , \vec{dP}_y i \vec{dP}_z , a apsolutne vrednosti projekcija (59.14) su intenziteti tih komponenata.

Na isti način možemo orijentisani element površi \vec{da} razložiti u komponente

$$(59.16) \quad \vec{da}_x = da_x \vec{i}, \quad \vec{da}_y = da_y \vec{j}, \quad \vec{da}_z = da_z \vec{k},$$

pa vidimo da projekcije orijentisanog elementa površi \vec{da} predstavljaju algebarske vrednosti komponenata \vec{da}_x , \vec{da}_y i \vec{da}_z , a apsolutne vrednosti projekcija da_x , da_y i da_z su intenziteti tih komponenata i predstavljaju vrednosti elementarnih ravnih površina koje se dobivaju kao projekcije elementarne površi da na ravni paralelne koordinatnim ravnima (sl. 82).

Koristeći (59.14) i (59.16), iz (59.15) dobivamo

$$(59.17) \quad \vec{dP}_x = -\gamma z \vec{da}_x, \quad \vec{dP}_y = -\gamma z \vec{da}_y, \quad \vec{dP}_z = -\gamma z \vec{da}_z,$$

pa vidimo da se elementarne sile pritiska \vec{dP}_x , \vec{dP}_y i \vec{dP}_z dobivaju kao sile pritiska koje deluju na vertikalne i horizontalnu projekciju elementarne površi da na ravni koje su u datoj tački krive površi a paralelne koordinatnim ravnima. Integracijom, iz (59.17) dobivamo

$$(59.18) \quad \vec{P}_x = -\gamma \int_{a_x} z \vec{da}_x, \quad \vec{P}_y = -\gamma \int_{a_y} z \vec{da}_y, \quad \vec{P}_z = -\gamma \int_{a_z} z \vec{da}_z,$$

gde su a_x , a_y i a_z ravne površi koje se dobivaju kao projekcije date krive površi na ravni paralelne koordinatnim ravnima.

Intenziteti sila (59.18) su

$$(59.19) \quad |\vec{P}_x| = \gamma \int_{a_x} z |da_x|, \quad |\vec{P}_y| = \gamma \int_{a_y} z |da_y|, \quad |\vec{P}_z| = \gamma \int_{a_z} z |da_z|.$$

Kako je, međutim,

$$\int_{a_x} z |da_x| = z_{cx} |a_x|, \quad \int_{a_y} z |da_y| = z_{cy} |a_y|,$$

gde su z_{cx} i z_{cy} dubine težišta površi a_x i a_y od slobodne površi tečnosti, jer ti integrali predstavljaju statičke momente površina a_x i a_y prema slobodnoj površi tečnosti, tj. koordinatnoj ravni $z=0$, i

$$\int_{a_z} z |da_z| = V,$$

gde je V zapremina vertikalnog cilindra od date krive površi do slobodne površi tečnosti, izraze (59.19) možemo napisati u obliku

$$(59.20) \quad |\vec{P}_x| = \gamma z_{cx} |a_x|, \quad |\vec{P}_y| = \gamma z_{cy} |a_y|, \quad |\vec{P}_z| = \gamma \cdot V.$$

Horizontalne sile pritiska \vec{P}_x i \vec{P}_y dobivaju se, dakle, kao sile pritiska koje deluju na ravne površi a_x i a_y koje se dobivaju kao projekcije date krive površi a na ravni paralelne koordinatnim ravnima $x=0$ i $y=0$. Sila \vec{P}_z je vertikalna sila pritiska i njen intenzitet je jednak težini cilindričnog stuba tečnosti od date krive površi do slobodne površi tečnosti. Rezultujuću silu pritiska možemo dobiti kao rezultantu horizontalnih i vertikalne sile pritiska, tj.

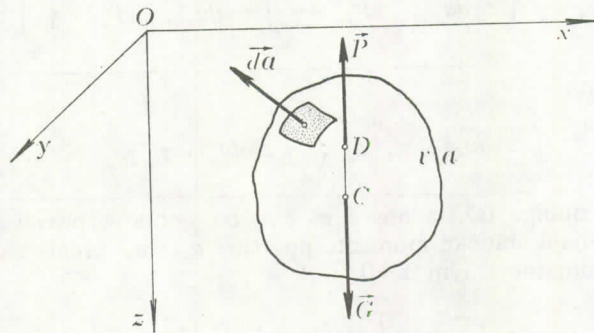
$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y + \vec{P}_z = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} + P_z \vec{k},$$

pod uslovom da se te sile seku u istoj tački. U opštem slučaju, međutim, taj uslov nije ispunjen, pa se takve sile svode na glavni vektor i glavni moment. Redukcija, kao što je poznato, ima bezbroj, ali postoji samo jedna pri kojoj i glavni vektor i glavni moment imaju isti pravac, u kom slučaju se dobiva dinamika pritiska.

Napadne linije sila pritiska dobivamo iz uslova da sile \vec{P}_x i \vec{P}_y deluju u centrima pritiska površi a_x i a_y , a napadna linija sile \vec{P}_z prolazi kroz težište zapremine V fluida. Centri pritiska na površima a_x i a_y određuju se na isti način kao i u prethodno razmatranom slučaju delovanja pritiska na ravne površi i zbog toga se na njihovom određivanju ovde nećemo zadržavati. Napominjemo samo da je u ovom slučaju zadatak olakšan jer su ravne površi a_x i a_y vertikalne.

59
60. Delovanje pritiska na telo potopljeno u tečnosti. Neka je kruto telo zapremine V , ograničene zatvorenom površi a , potopljeno u tečnosti specifične težine γ . Ako sistem Dekartovih pravouglanih koordinata izaberemo tako da ose x i y leže u ravni slobodne površi tečnosti, a osa z da bude orijentisana vertikalno naniže (sl. 83), hidrostatički pritisak u proizvoljnoj tački tečnosti je određen izrazom

$$(60.1) \quad p = p_a + \gamma z.$$



Sl. 83

Elementarna sila pritiska, koja deluje na element površi da zatvorene površi a koja ograničava zapreminu V tela, iznosi

$$dP_k = -p da_k,$$

pa je rezultujuća sila pritiska

$$(60.2) \quad P_k = - \oint_a p da_k.$$

Ako površinski integral transformišemo u zapreminski, rezultujuću silu pritiska (60.2) možemo izraziti u obliku

$$(60.3) \quad P_k = - \int_V p_{,k} dV,$$

ili, u vektorskim oznakama,

$$(60.4) \quad \vec{P} = - \int_V \text{grad } p dV.$$

Iz (60.1), međutim, dobivamo

$$\text{grad } p = \gamma \vec{k},$$

gde je \vec{k} jedinični vektor koordinatne ose z , pa (60.4) možemo izraziti u obliku

$$(60.5) \quad \vec{P} = -\gamma \vec{k} \int_V dV,$$

odakle sledi

$$(60.6) \quad \vec{P} = -\gamma V \vec{k}.$$

Rezultujuća sila pritiska koja deluje na potopljeno telo naziva se *sila potiska*. Iz (60.6) vidimo da sila potiska uvek deluje vertikalno naviše, a njen intenzitet,

$$(60.7) \quad P = \gamma V,$$

se dobiva kao proizvod specifične težine tečnosti i zapremine potopljenog tela. Stoga važi Arhimedova teorema: Svako telo potopljeno u tečnosti gubi prividno od svoje težine onoliko koliko teži njime istisnuta tečnost.

Napadna tačka rezultujuće sile Zemljine teže koja deluje na potopljeno telo (težine potopljenog tela) uvek je u težištu C tela. Napadna tačka sile potiska, koja se naziva centar potiska, uvek je, međutim, u težištu D zapremine potopljenog tela, jer je gustina tečnosti konstantna, pri čemu pod težištem zapremine potopljenog tela podrazumevamo težište tela pod pretpostavkom da je telo homogeno. Jasno je da se centar potiska ne nalazi u težištu tela ako potopljeno telo nije homogeno. Ako je, pak, telo homogeno, centar potiska neće se nalaziti u težištu tela ako je telo samo delimično potopljeno, jer se centar potiska nalazi u težištu zapremine potopljenog dela tela.

Ako je potopljeno telo homogeno, centar potiska se poklapa sa težištem tela, pa će telo biti u ravnoteži ako je potisak jednak težini tela, tj. ako je

$$\gamma V = \gamma_1 V,$$

odnosno $\gamma = \gamma_1$, gde je γ_1 specifična težina tela. Ako, pak, sila potiska nije jednaka težini tela, telo neće biti u ravnoteži, pri čemu su moguća dva slučaja:

- kad je $\gamma_1 > \gamma$ telo tone;
- kad je $\gamma_1 < \gamma$ telo se penje u tečnosti sve dok delimično ne izroni, tako da sila potiska koja deluje na potopljeni deo tela bude jednaka težini tela.

Ako potopljeno telo nije homogeno, centar potiska se ne poklapa sa težištem tela. Ako pri tome centar potiska i težište tela ne pripadaju istoj vertikali, sila potiska i težina tela obrazuju spreg koji telo obrće i dovodi u položaj pri kome centar potiska i težište pripadaju istoj vertikali. Ako je u tom položaju sila potiska jednaka težini tela, telo će se nalaziti u ravnoteži. Ako je, međutim, sila potiska manja od težine tela, telo će da tone, a ako je veća od težine tela, telo će da se penje sve dok jednim delom ne izroni, tako da sila potiska koja deluje na potopljeni deo tela bude jednaka težini tela.

Za tela koja su samo jednim delom potopljena u tečnosti kaže se da plivaju. Položaji centra potiska i težišta tela određuju karakter ravnoteže tela, što je naročito važno kod tela koja plivaju. Ravnoteža, naime, može biti *stabilna*, *labilna* i *indiferentna*, a poznato je da se kod plovnih objekata, na primer, zahteva da ravnoteža ne bude labilna.

120.000

LITERATURA

1. *Andelić T.*: Tenzorski račun, treće izdanje, Naučna knjiga, Beograd, 1973.
2. *Andelić T.*: Osnovi mehanike neprekidnih sredina, Beograd, 1950.
3. *Leko M., Plavšić M.*: Rešeni problemi iz tenzorskog računa sa primenama u mehanici, Građevinska knjiga, Beograd, 1973.
4. *Voronjec K.*: Tehnička hidromehanika, Beograd, 1951.
5. *Voronjec K., Obradović N.*: Mehanika fluida, Građevinska knjiga, Beograd, 1960.
6. *Krsmanović Lj., Saljnikov V., Šašić M., Đurić M., Ašković R., Đorđević V.*: Zbirka zadataka iz mehanike fluida, Naučna knjiga, Beograd 1965.
7. *Truesdell C., Toupin R.*: The Classical Field Theories, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, 1960.
8. *Serrin J.*: Mathematical Principles of Classical Fluid Mechanics, Handbuch der Physik, Bd. VIII/1, Ed. S. Flügge, Springer-Verlag, 1959.
9. *Eringen C.*: Mechanics of Continua, John Wiley and Sons, Inc., New York — London — Sydney, 1967.
10. *Лойцянский Л.*: Механика жидкости и газа, Москва, 1957.
11. *Кочин Н., Кибель И., Розе Н.*: Теоретическая Гидромеханика, ч. 1 и 2., Москва — Ленинград, 1948.
12. *Ландау Л., Лифшиц Е.*: Механика сплошных сред, Москва, 1954.