UNIVERZITET U BEOGRADU
MATEMATIČKI FAKULTET

Dragan Doder

PRIMENE DESKRIPTIVNE TEORIJE SKUPOVA U TEORIJI MODELA

(magistarski rad)

BEOGRAD, 2008. godina

Magistarski rad:

Dragan Doder
Primene deskriptivne teorije skupova u teoriji modela

Mentor: dr Žarko Mijajlović

Komisija:

dr Žarko Mijajlović
dr Aleksandar Jovanović
dr Predrag Tanović

Sadržaj

Glava 1

PREDGOVOR

Osnovni rezultat rada predstavljaju dva pristupa za pokazivanje da za skupove opisive nekim od teorija i formula infinitarne logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ važi kontinuum hipoteza. To je, najvećim delom, sadržaj poslednje dve glave; pre toga su prikazane osnove teorije modela i deskriptivne teorije skupova koje se u njima koriste.

U drugoj, uvodnoj glavi izloženo je osnovno matematičko gradivo vezano za tezu, potrebno da bi rad mogao da se čita bez pomoćne literature. Prva tri poglavlja su uvod u treću glavu; u njima su sažeto izložene osnove teorije modela, pri čemu se mnogi pojmovi direktno prenose na pojmove treće glave (na primer, pojam modela, valuacije, slobodne promenljive, rečenice i zadovoljenja morao bi se inače definisati direktno za infinitarne logike). Četvrto poglavlje predstavlja gradivo opšte topologije na koje se oslanja četvrta glava.

U trećoj glavi prikazano je proširenje predikatske logike prvog reda, $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Primerima je ilustrovana njena izražajna moć, data je aksiomatizacija i pokazana potpunost. Zbog zaokruženosti priče, prikazani su osnovni rezultati i pomenute specifičnosti, poput gubitka kompaktnosti.

U četvrtoj glavi dat je pregled osnovnih pojmova i rezultata deskriptivne teorije skupova: poljskih prostora, Borelove i projektivne hijerarhije. Posebna pažnja posvećena je Teoremi o savršenom podskupu i Borelovim dejstvima poljskih grupa, što je od interesa za naredne dve glave.

Peta glava prezentuje jednostavan način za kodiranje raznih pojmova, u prvom redu prebrojivih struktura i nekih kombinatornih problema. Posebno, uvedena operacija $*$ kodira rečenice jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ u iskazni račun, sa prikladno odabranim skupom iskaznih slova, čime se na uniforman način dokazuju teoreme Reyes-a, Kueker-a i Burris-a i Kwaitinetz-a. Ideja je da se, u kombinaciji sa Teoremom o savršenom podskupu, pokaže da za broj mogućih kodiranja raznih pojmova važi kontinuum hipoteza. To se odnosi na prethodne teoreme, broj linearnih proširenja parcijalno uređenog prebrojivog skupa, broj prostih ideala prebrojivog prstena i još neke pojmove.

U šestoj glavi prikazan je dokaz Scott-ove teoreme primenom deskriptivne teorije skupova. Zatim je pokazano da je, za prebrojiv model $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ jezika $\mathcal{L}$, broj valuacija iz A^{Var} koje zadovoljavaju fiksiranu rečenicu ili tip jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ važi kontinuum hipoteza. Potom je razmatrana šira klasa modela i pokazan rezultat istog tipa za egzistencijalne formule, ili proizvoljne formule pod pretpostavkom Projektivne determinisanosti.

Na kraju, želeo bih da se zahvalim profesorima Žarku Mijajloviću, Aleksandru Jovanoviću i Predragu Tanoviću, bez čije pomoći i sugestija ovaj rad ne bi bio moguć.

Glava 2

Uvod

U ovom delu rada izloženo je osnovno matematičko gradivo vezano za tezu. U prva tri poglavlja uvode se elementarni pojmovi matematičke logike i iznose osnovni rezultati (bez dokaza), izabrani iz [1], [2], [3], [9] i [13]. Četvrto poglavlje prikazuje isključivo one delove opšte topologije (korišćeni izvori [4] i [11]) koji se pominju u četvrtoj glavi.

2.1 Iskazni račun

Jezik iskaznog računa čine logički simboli $\wedge$ (konjukcija) i $\neg$ (negacija), leva i desna zagrada i neprazan skup $\mathcal{P}$ iskaznih slova.

Skup *iskaznih formula* definišemo rekurzivno:

(1) svako iskazno slovo je iskazna formula;

(2) ako su φ i ψ iskazne formule, onda su i $(\varphi \wedge \psi)$ i $(\neg\varphi)$ iskazne formule;

(3) konačan niz simbola je iskazna formula samo ako je dobijen konačnom primenom pravila (1) i (2).

Skup iskaznih formula ćemo označavati sa $For_{\mathcal{P}}$.

Simbole $\vee$ (disjunkcija), $\rightarrow$ (implikacija) i $\leftrightarrow$ (ekvivalencija) uvodimo na uobičajen nacin:

$(\varphi \vee \psi)$ je zamena za $(\neg\,((\neg\varphi) \wedge (\neg\psi)))$;

$(\varphi \rightarrow \psi)$ je zamena za $((\neg\varphi) \vee \psi)$;

$(\varphi \leftrightarrow \psi)$ je zamena za $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\psi \rightarrow \varphi))$.

Takođe, uobičajeno je izostavljanje nepotrebnih zagrada, pri čemu prioritet ima veznik $\neg$, a zatim $\wedge$ i $\vee$.

Za proizvoljnu iskaznu formulu φ i proizvoljan skup $A \subset \mathcal{P}$, sa $A \models \varphi$ ćemo označavati činjenicu da je φ tačna u A i reći ćemo da je A *model* formule φ. Relaciju $\models$ definišemo na sledeći način:

(1) ako je φ iskazno slovo, onda važi $A \models \varphi$ akko $\varphi \in A$;
(2) ako je φ formula oblika $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, onda važi $A \models \varphi$ akko važi $A \models \varphi_1$ i $A \models \varphi_2$.
(3) ako je φ formula oblika $\neg\psi$, onda važi $A \models \varphi$ akko nije $A \models \psi$.

Kažemo da je iskazna formula φ *valjana,* u oznaci $\models \varphi$,ako važi $A \models \varphi$ za svaki skup $A \subset \mathcal{P}$.

Valuacija v je svako preslikavanje $v : \mathcal{P} \rightarrow 2$. Vrednost formule φ pri valuaciji v definiše se na sledeći nacin:
(1) ako je φ iskazno slovo, onda je vrednost formule φ jednaka $v(\varphi)$;
(2) ako je φ formula oblika $\varphi_1 \wedge \varphi_2$, onda je vrednost formule φ jednaka 1 ako je i vrednost formule φ_1 i vrednost formule φ_2 jednaka 1, inače je 0;
(3) ako je φ formula oblika $\neg\psi$, onda je vrednost formule φ različita od vrednosti formule ψ.

Kažemo da je φ *tautologija* - u zapisu $\vdash \varphi$ *(kontradikcija)*, ako je vrednost od φ jednaka 1 (0) pri svim valuacijama.

Prema teoremi potpunosti za iskazni racun, za proizvoljnu formulu φ važi $\vdash \varphi$ akko $\models \varphi$.

2.2 Formalizam predikatskog računa

Jezik prvog reda $\mathcal{L}$ *(relacijsko-operacijski jezik)* čine:
(1) logički simboli $\neg, \wedge$ i $\forall$ (univerzalni kvantor), zagrade i zapeta, prebrojiv skup promenljivih
$Var = \{x, y, \ldots, x_1, x_2, \ldots, y_1, \ldots\}$;
(2) skup funkcijskih simbola $Fun_{\mathcal{L}}$, skup relacijskih simbola $Rel_{\mathcal{L}}$ i skup simbola konstanti $R \in Rel_{\mathcal{L}}$.

Sa svakim elementom skupa $Fun_{\mathcal{L}} \cup Rel_{\mathcal{L}}$ zadaje se i njegova *arnost* - prirodan broj koji mu je pridruzen. Za funkcijski simbol $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ i relacijski simbol $R \in Rel_{\mathcal{L}}$ arnosti n kazemo da su n-arni. Posto je skup simbola (1) zajednički za svaki jezik prvog reda, uobičajeno je da se jezik zadaje kao skup relacijskih, funkcijskih i simbila konstanti, u zapisu $\mathcal{L} = Fun_{\mathcal{L}} \cup Rel_{\mathcal{L}} \cup Con_{\mathcal{L}}$. Iako nemamo ograničenja za kardinalnost jezika, obično je $\mathcal{L}$ najviše prebrojiv.

Model jezika $\mathcal{L}$ je uređeni par $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{R} \cup \mathcal{F} \cup \mathcal{C} \rangle$, pri čemu je M proizvoljan neprazan skup, a skupovi $\mathcal{R} = \left\{R^{\mathfrak{M}} | R \in Rel_{\mathcal{L}}\right\}$, $\mathcal{F} = \left\{f^{\mathfrak{M}} | f \in Fun_{\mathcal{L}}\right\}$ i $\mathcal{C} = \left\{c^{\mathfrak{M}} | c \in Con_{\mathcal{L}}\right\}$ sa sledećim svojstvima:
(1) za svaki n-arni relacijski simbol $R \in Rel_{\mathcal{L}}$ je $R^{\mathfrak{M}} \subset M^n$;
(2) za svaki n-arni funkcijski simbol $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ je $f^{\mathfrak{M}} : M^n \rightarrow M$;

(3) za svaki simbol konstante $c \in Con_{\mathcal{L}}$ je $c^{\mathfrak{M}} \in M$.

Ako je $s \in Fun_{\mathcal{L}} \cup Rel_{\mathcal{L}} \cup Con_{\mathcal{L}}$ i $\mathfrak{M}$ proizvoljan model, $s^{\mathfrak{M}}$ zovemo *interpretacija* simbola s u modelu $\mathfrak{M}$. Elemente skupova $\mathcal{R}$, $\mathcal{F}$ i $\mathcal{C}$ zovemo redom *relacijama, funkcijama* i *konstantama* modela $\mathfrak{M}$.

Skup *terma (izraza)* jezika $\mathcal{L}$ je najmanji nadskup skupa $Con_{\mathcal{L}} \cup Var$ za koji važi: ako je $f \in Fun_{\mathcal{L}}$ proizvoljan n-arni funkcijski simbol i ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ termi jezika $\mathcal{L}$, onda je i $f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ term jezika $\mathcal{L}$.

Složenost terma je broj funkcijskih simbola koji se u njemu javljaju, računajući njihovu višestrukost.

Formule jezika $\mathcal{L}$ definišemo rekurzivno:

(1) ako su $t_1, t_2, \ldots, t_n$ proizvoljni termi jezika $\mathcal{L}$, a R proizvoljni n-arni simbol jezika $\mathcal{L}$, onda su zapisi $t_1 = t_2$ i $R(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ *(atomične)* formule jezika $\mathcal{L}$;

(2) ako su φ i ψ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$ i x proizvoljna promenljiva, onda su i zapisi $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$ i $\forall x \varphi$ formule jezika $\mathcal{L}$;

(3) sve formule jezika $\mathcal{L}$ se dobijaju konačnom primenom prethodna dva pravila.

Skup formula jezika $\mathcal{L}$ označavamo sa $For_{\mathcal{L}}$. Kao i u slučaju iskaznog računa, uvodimo pomoćne logičke simbole i ne pišemo nepotrebne zagrade. Takođe uvodimo egzistencijalni kvantor:

$\exists x \varphi$ je zamena za $\neg\forall x \neg\varphi$.

Kažemo da je promenljiva x *slobodna* u formuli φ, ako postoji njeno pojavljivanje u φ koje nije pod dejstvom kvantora. Zapisom $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ ističemo činjenicu da su sve slobodne promenljive formule φ sadržane u skupu $\{x_1, \ldots, x_n\}$. *Rečenica* je formula u kojoj se ne javljaju slobodne promenljive.Ako je φ formula jezika $\mathcal{L}$ i t term jezika $\mathcal{L}$ u kojem se ne javlja promenljiva x, sa $\varphi(x/t)$ označavamo formulu u kojoj su sva slobodna javljanja promenljive x zamenjena termom t.

Neka je $\mathfrak{M}$ dati model jezika $\mathcal{L}$. *Valuacija* skupa promenljivih u modelu $\mathfrak{M}$ je bilo koja funkcija $v : Var \to M$. Za dati term t jezika $\mathcal{L}$ definišemo $t^{\mathfrak{M}} : M^{Var} \to M$:

(1) ako je t simbol konstante c, onda je $t^{\mathfrak{M}}(v) = c^{\mathfrak{M}}$, za svako $v \in M^{Var}$;

(2) ako je t promenljiva x, onda je $t^{\mathfrak{M}}(v) = v(x)$;

(3)ako je $t = f(t_1, t_2, \ldots, t_n)$, onda je $t^{\mathfrak{M}}(v) = f^{\mathfrak{M}}\left(t_1^{\mathfrak{M}}(v), t_2^{\mathfrak{M}}(v), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(v)\right)$.

Za datu valuaciju v, promenljivu x i $a \in M$, sa $v(x/a)$ označavamo valuaciju w koja se slaže sa v osim u promenljivoj x: $w(x) = a$.

Vezu između struktura i formula uspostavlja sledeća definicija.

Neka je $\mathfrak{M}$ model jezika $\mathcal{L}$. Definišemo *relaciju zadovoljenja* $\models$, $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$, za sve valuacije v i formule φ jezika $\mathcal{L}$:

(1) $\mathfrak{M} \models (t_1 = t_2)[v]$ akko $t_1^{\mathfrak{M}}(v) = t_2^{\mathfrak{M}}(v)$;
(2) $\mathfrak{M} \models R(t_1, t_2, \ldots, t_n)[v]$ akko $\left(t_1^{\mathfrak{M}}(v), t_2^{\mathfrak{M}}(v), \ldots, t_n^{\mathfrak{M}}(v)\right) \in R^{\mathfrak{M}}$;
(3) $\mathfrak{M} \models \neg\varphi[v]$ akko nije $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$;
(4) $\mathfrak{M} \models (\varphi \wedge \psi)[v]$ akko $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ i $\mathfrak{M} \models \psi[v]$;
(5) $\mathfrak{M} \models (\forall x\varphi)[v]$ akko za sve $a \in M$ važi $\mathfrak{M} \models \varphi[v(x/a)]$.

Ako važi $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ kažemo da je formula φ *zadovoljena* u modelu $\mathfrak{M}$ pri valuaciji v. Primetimo da zadovoljenje formule $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ pri valuaciji v zavisi samo od vrednosti $a_1 = v(x_1)$, $a_{2=}v(x_2)$,..., $a_n = v(x_n)$. Zato umesto $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$ pišemo i $\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]$. Specijalno, ako je φ rečenica i v_1 i v_2 bilo koje valuacije, $\mathfrak{M} \models \varphi[v_1]$ akko $\mathfrak{M} \models \varphi[v_2]$. Tada kazemo da je $\mathfrak{M}$ *model rečenice* φ i pišemo $\mathfrak{M} \models \varphi$, ako za sve valuacije v važi $\mathfrak{M} \models \varphi[v]$. Formula φ je valjana, u oznaci $\models \varphi$, ako je zadovoljena u svakom modelu jezika $\mathcal{L}$ pri svakoj valuaciji.

Teorija jezika $\mathcal{L}$ je bilo koji skup rečenica jezika $\mathcal{L}$. Kažemo da je $\mathfrak{M}$ *model teorije* T i pišemo $\mathfrak{M} \models T$, ako je $\mathfrak{M} \models \varphi$ za sve $\varphi \in T$. Zapis $T \models \varphi$ označava da je svaki model teorije T istovremeno i model od φ.

Neka su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ dva modela jezika $\mathcal{L}$. Kažemo da su $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ *elementarno ekvivalentni,* u zapisu $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}$, ako za sve rečenice φ važi $\mathfrak{M} \models \varphi$ akko $\mathfrak{N} \models \varphi$.

Tip $\Gamma(x_{1,} \ldots, x_n)$ je maksimalan neprotivrečan skup formula čije su sve slobodne promenljive iz skupa $\{x_{1,} \ldots, x_n\}$. Teorija T *realizuje* tip $\Gamma(x_{1,} \ldots, x_n)$, ako postoji model $\mathfrak{M}$ teorije T i elementi $a_1, \ldots, a_n \in \mathfrak{M}$ takvi da za svaku formulu $\varphi \in \Gamma$ važi $\mathfrak{M} \models \varphi[a_1, a_2, \ldots, a_n]$; u suprotnom ga ispušta. Teorija T *lokalno realizuje* tip $\Gamma(x_{1,} \ldots, x_n)$, ako postoji formula $\varphi(x_{1,} \ldots, x_n)$ takva da $T \cup \{\varphi\}$ ima model i za sve $\psi \in \Gamma$ važi $T \models (\varphi \rightarrow \psi)$.

2.3 Aksiome i osnovni rezultati predikatskog računa

Formula φ jezika $\mathcal{L}$ je *tautologija* ako se može dobiti iz tautologije iskaznog računa uniformnom zamenom iskaznih slova formulama jezika $\mathcal{L}$.

Logičke aksiome za $\mathcal{L}$ dele se na tri grupe aksioma:

Iskazne aksiome:

Svaka tautologija jezika $\mathcal{L}$ je iskazna aksioma jezika $\mathcal{L}$.

Aksiome jednakosti:

Neka su u, u_1, u_2, $\ldots, w$, w_1, $w_2, \ldots$ elementi skupa $Var \cup Con_{\mathcal{L}}$, R proizvoljan n-arni relacijski simbol i t proizvoljan n-arni term jezika $\mathcal{L}$. Tada su aksiome jednakosti:

$$(u = u);$$

$$\begin{array}{rcl} (u = w) & \to & (w = u)\,; \\ (u_1 = u_2 \wedge u_2 = u_3) & \to & (u_1 = u_3)\,; \\ (u_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge u_n = w_n) & \to & (R\,(u_1, \ldots, u_n) \to R\,(w_1, \ldots, w_n))\,; \\ (u_1 = w_1 \wedge \ldots \wedge u_n = w_n) & \to & (t\,(u_1, \ldots, u_n) \to t\,(w_1, \ldots, w_n))\,. \end{array}$$

Aksiome kvantora:

(1) Neka su φ i ψ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$ i neka x nije slobodna promenljiva u φ. Tada je i formula

$$(\forall x)\,(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to (\forall x)\,\psi)$$

logička aksioma.

(2) Neka su φ i ψ proizvoljne formule jezika $\mathcal{L}$ pri čemu je ψ formula $\varphi\,(x/t)$ i x nema vezana pojavljivanja u t. Tada je i formula

$$(\forall x)\,\varphi \to \psi$$

logička aksioma.

Pravila izvođenja predikatskog računa su:

Modus ponens:

$$\frac{\varphi,\ \varphi \to \psi}{\psi};$$

Pravilo generalizacije:

$$\frac{\varphi}{\forall x \varphi}.$$

Dokaz formule φ iz teorije T je konačan niz $\psi_1, \ldots, \psi_n$, pri čemu je $\psi_n = \varphi$ i svaki član niza je ili aksioma, ili element teorije T, ili je dobijen iz prethodnih članova niza primenom pravila izvođenja.

Formula φ je *teorema teorije* T, u oznaci $T \vdash \varphi$, ako postoji dokaz formule φ iz teorije T. Specijalno, za $T = \emptyset$ koristimo zapis $\vdash \varphi$ i kažemo da je φ *teorema jezika* $\mathcal{L}$. Teorija T je *protivrečna* ako $T \vdash \varphi$ za svaku formulu φ, inače je *neprotivrečna*.

Teorija modela za predikatski račun prvog reda je veoma razvijena. Sledeće tri teoreme su fundamentalni rezultati koji omogućuju proučavanje modela jezika prvog reda.

Teorema potpunosti daje vezu između sintakse i semantike i vodi ka rezultatima odlučivosti.

Teorema 2.1 (teorema potpunosti) *Neka je T teorija jezika $\mathcal{L}$, a φ rečenica jezika $\mathcal{L}$. Tada je $T \models \varphi$ akko $T \vdash \varphi$.*

Teorema 2.2 (teorema kompaktnosti) *Teorija T ima model akko svaki konačan podskup teorije T ima model.*

Teorema 2.3 (Löwenheim-Skolem) *Ako teorija T jezika $\mathcal{L}$ ima beskonačan model, onda ima beskonačan model kardinalnosti α, za svako $\alpha \geq |\mathcal{L}|$.*

Sledeća teorema nas motiviše da tipom zovemo i neprotivrečne skupove koji nisu maksimalni.

Teorema 2.4 (teorema o ispuštanju tipova) *Neka je T neprotivrečna teorija prebrojivog jezika $\mathcal{L}$ i $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ skup formula jezika $\mathcal{L}$. Ako T ima model koji lokalno ispušta Γ, onda T ima prebrojiv model koji ispušta Γ.*

Neki važni matematički pojmovi su izrazivi teorijama prvog reda; na primer, pojam grupe je izraziv teorijom jezika $\mathcal{L} = \{+, e\}$:

$$\begin{aligned}
&\forall x\,(x + e = x)\,;\\
&\forall x \exists y\,(x + y = e)\,;\\
&\forall x \forall y \forall z\,(x + (y + z) = (x + y) + z)\,.
\end{aligned}$$

Sledeća rečenica „govori" da struktura ima najviše n elemenata:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y\,(x_1 = y \vee \ldots \vee x_n = y)\,.$$

Međutim, ne postoji teorija prvog reda koja „govori" da je struktura konačna. Takođe, nije moguća karakterizacija uređenog polja realnih brojeva (do na izomorfizam) teorijom prvog reda. Ni mnogi drugi pojmovi matematike nisu izrazivi teorijom prvog reda.

Shodno tome, mnogi matematičari su tragali za jezikom čija će izražajna moć biti veća. Uz to, želja je bila da se očuvaju osnovne karakteristike logike prvog reda. Sledeća teorema govori da se oba cilja ne mogu istovremeno ispuniti.

Teorema 2.5 (Lindström) *Logika prvog reda je jedina logika zatvorena za $\wedge$, $\neg$ i $\forall$ u kojoj važe i teorema kompaktnosti i Löwenheim-Skolem-ova teorema.*

2.4 Osnovni pojmovi opšte topologije

Topologija na skupu X je skup $\mathcal{G}$ podskupova od X, sa sledećim svojstvima:

(1) $\varnothing, X \in \mathcal{G}$;

(2) za proizvoljan skup $\{G_i \mid i \in I\} \subset \mathcal{G}$ važi $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in \mathcal{G}$;

(3) ako $A \in \mathcal{G}$ i $B \in \mathcal{G}$, onda $A \cap B \in \mathcal{G}$.

Uređeni par $(X, \mathcal{G})$ zovemo *topološki prostor* (i obeležavamo samo sa X, ako se topologija podrazumeva). Elemente topologije zovemo *otvorenim* skupovima. Komplementi otvorenih skupova su *zatvoreni* skupovi. *Zatvorenje* $\overline{A}$ skupa A je najmanji zatvoren nadskup od A.

Skup A je *gust* u X, ako je $\overline{A} = X$; skup B je nigde gust, ako je $X \setminus \overline{B}$ gust. Topološki prostor $(X, \mathcal{G})$ je *separabilan*, ako postoji prebrojiv skup A koji je gust u X.

Skup A je *okolina* tačke x, ako postoji skup $G \in \mathcal{G}$ takav da je $x \in G \subset A$. Skup A je *gust u sebi*, ako za svaki element $x \in A$ i svaku okolinu U od x važi $A \cap U \neq \{x\}$.

Topološki prostor je *Hausdorfov,* ako svaka dva njegova različita elementa imaju disjunktne okoline.

Neka su $(X, \mathcal{G}_X)$ i $(Y, \mathcal{G}_Y)\, \mathcal{G}$ topološki prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je *neprekidna*, ako je $f^{-1}(G) \in \mathcal{G}_X$, kad god je $G \in \mathcal{G}_Y$. Neprekidna bijekcija f za koju je i f^{-1} neprekidna funkcija je *homeomorfizam.*

Ako je X proizvoljan skup, onda je $\mathcal{G} = \mathcal{P}(X)$ topologija na skupu X. Takvu topologiju zovemo *diskretna topologija.*

Baza $\mathcal{B}$ topološkog prostora $(X, \mathcal{G})$ je podskup od za koji važi:

(1) $\bigcup \mathcal{B} = X$;

(2) ako važi $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ i $x \in B_1 \cap B_2$, onda postoji skup $B \in \mathcal{B}$ takav da važi $x \in B \subset B_1 \cap B_2$;

(3) ako je $G \in \mathcal{G}$ i $x \in G$, onda postoji skup $B \in \mathcal{B}$ takav da važi $x \in B \subset G$.

Slaba baza topološkog prostora X je skup nepraznih otvorenih skupova takvih da je svaki otvoren skup nadskup bar jednog od njih.

Pokrivač skupa A je svaka kolekcija $\mathcal{U}$ podskupova od X takva da je $\bigcup \mathcal{U} = A$.

Skup je *kompaktan*, ako svaki njegov otvoren pokrivač ima konačan potpokrivač.

Neka su funkcije $\pi_j : \prod\limits_{i \in I} X_i \to X_j$ zadate sa $\pi_j\left((x_i)_{i \in I}\right) = x_j$.

Neka je $\{(X_i, \mathcal{G}_i) \mid i \in I\}$ familija topoloških prostora. Tada je

$$\bigcup_{i \in I} \left\{ \pi_j^{-1}(G) \mid G \in \mathcal{G}_j \right\}$$

skup za koji unije konačno mnogo njegovih elemenata čine bazu topologije na skupu $\prod\limits_{i \in I} X_i$. Topologiju određenu tom bazom zovemo *topologija proizvoda (topologija Tihonova).*

Metrika na skupu X je funkcija $d : X \times X \to \mathbb{R}$, takva da za sve $x, y, z \in X$ važi:

(1) $d(x, y) \geq 0$, $d(x, y) = 0$ akko $x = y$;
(2) $d(x, y) = d(y, x)$;
(3) $d(x, y) + d(y, z) \leq d(x, z)$.

Metrika d indukuje topologiju na skupu X zadatu bazom

$$\{\{y \mid d(x, y) < \varepsilon\} \mid x \in X,\ \varepsilon > 0\}.$$

Uređeni par (X, d) zovemo *metrički prostor.*

Topološki prostor je *metrizabilan*, ako postoji metrika koja ga indukuje.

Niz $(x_n)_{n \in \omega}$ u metričkom prostoru (X, d) je Cauchy-jev niz, ako za svako $\varepsilon > 0$ postoji $n\varepsilon \in \omega$ takav da za sve $m, n > n\varepsilon$ važi $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Metrički prostor (X, d) je *kompletan*, ako svaki Cauchy-jev niz u njemu konvergira.

Teorema 2.6 (Tychonoff) *Proizvod proizvoljne familije kompaktnih prostora je kompaktan prostor pri topologiji proizvoda.*

Tvrđenje 2.7 *Ako je topološki prostor kompaktan, onda je svaki zatvoren skup u njemu kompaktan.*

Tvrđenje 2.8 *Neprekidna slika kompaktnog skupa je kompaktan skup.*

Tvrđenje 2.9 *Kompaktni skupovi u Hausdorfovom prostoru su zatvoreni.*

Tvrđenje 2.10 *Neprekidna bijekcija kompaktnog skupa na Hausdorfov prostor je homeomorfizam.*

Glava 3

Infinitarne logike

U ovoj glavi dat je prikaz proširenja predikatske logike prvog reda, pre svega logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, sa motivima za njeno istraživanje i osnovnim rezultatima. Dokaz teoreme potpunosti preuzet je iz [5], pored koje je korišćena literatura i [12]. Bitna oblast infinitarnih logika, dopustivi fragmenti, nije prikazana pošto nije od interesa za rad.

3.1 Izražajnost infinitarnih logika

Neka je φ_n rečenica $\exists x_{1 \dots} \exists x_n \left(\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} x_i \neq x_j \right)$(„postoji bar n elemenata"). Tada teorija $T = \{\varphi_n \mid n \in \omega\}$ „govori" da je skup beskonačan. Sa druge strane, teorema kompaktnosti povlači da ne postoji teorija koja izražava ideju da je skup konačan.

Dati primer nam pokazuje da teorije mogu da simuliraju beskonačne konjukcije, ali ne i beskonačne disjunkcije. Logika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ prevazilazi taj problem - ona dopušta rečenice koje su ekvivalentne „negaciji" date teorije. Drugim rečima, nju možemo da shvatimo kao zatvorenje predikatskog računa prvog reda za „ispuštanje tipova".

Neka su α i β beskonačni kardinali. Tada se infinitarna logika $\mathcal{L}_{\alpha\beta}$ razlikuje od predikatske logike prvog reda po tome što dopušta konjukcije i disjunkcije dužine manje od α, kvantifikacije dužine manje od β i sadrži α promenljivih. Specijalno, $\mathcal{L}_{\omega\omega}$ je predikatska logika prvog reda. Njeno najslabije proširenje je logika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, zatvorena za prebrojive disjunkcije i konjukcije i sa ω_1 promenljivih.

Mnogi bitni pojmovi matematike koji ne mogu da se izraze u jeziku prvog reda, mogu se izraziti rečenicom jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Primeri:

1. Ako su φ_n rečenice „postoji bar n elemenata", onda je klasa konačnih modela karakterisana rečenicom
$$\bigvee_{n\in\omega}(\neg\varphi_n)\,.$$

2. Ako dodamo Peanovim aksiomama rečenicu
$$\forall x\,(x=0\vee x=1\vee x=2\vee\ldots)$$
dobijamo karakterizaciju klase modela izomorfnih standardnom modelu aritmetike.

3. Klasu Abelovih grupa sa torzijom karakterišu aksiome grupe i rečenica
$$\exists x\,(x=e\vee(x+x)=e\vee(x+x+x)=e\vee\ldots)\,.$$

Slično, za svaki prebrojiv tip može se naći rečenica jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ koja kaže da je taj tip ispušten.Međutim, pojam dobrog uređenja se ne može izraziti u $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Primer: Sledeća rečenica jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega_1}$ opisuje nepostojanje beskonačnih opadajućih lanaca:
$$\neg\exists x_0\exists x_1\exists x_2\ldots\left(\bigwedge_{n\in\omega}x_{n+1}<x_n\right).$$

Dakle, dobro uređenje je izrazivo u jeziku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega_1}$.

Prema teoremi Lindström-a, izražajnost jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ govori o gubitku neke od značajnih teorema logike prvog reda. Teorema kompaktnosti ne važi u $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, kao ni Löwenheim-Skolem-ova teorema, a teorema potpunosti (za prebrojive teorije) važi pošto dodamo infinitarno pravilo izvođenja.

3.2 Jezik $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$

Neka je $\mathcal{L}$ jezik prvog reda sa prebrojivo mnogo relacijskih, funkcijskih i simbola konstanti. U preostalom delu glave ćemo pretpostaviti da je Skup promenljivih Var kardinalnosti ω_1.

Jezik $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, pored simbola jezika $\mathcal{L}$, sadrži i simbole $\bigwedge$ i $\bigvee$ koji se mogu primenjivati na prebrojive skupove formula (tada su $\wedge$ i $\vee$ izvedeni simboli jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$).

Formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ definišemo na sledeći način:

(1) sve atomične formule jezika $\mathcal{L}$ su formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;

(2) ako je φ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ i x proizvoljna promenljiva, onda su i $(\neg\varphi)$, $\forall x\varphi$ i $\exists x\varphi$ formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;

(3) ako je Φ najviše prebrojiv skup formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, onda su i $(\bigwedge \Phi)$ i $(\bigvee \Phi)$ formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;

(4) formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ se mogu dobiti isključivo konačnom primenom prethodnih pravila.

Nepotrebne zagrade se obično ne pišu. Ako je $\Phi = \{\varphi_i \mid i \in \omega\}$, umesto $\bigwedge \Phi$ i $\bigvee \Phi$ pišemo i $\bigwedge\limits_{i\in\omega} \varphi_i$ i $\bigvee\limits_{i\in\omega} \varphi_i$.

Pojam *modela, valuacije, slobodne promenljive* i *rečenice* se definiše isto kao i u logici prvog reda. *Relacija zadovoljenja* $\models$ se uvodi pravilima logike prvog reda i sledećim pravilima:

(1) $\mathfrak{M} \models \bigwedge \Phi\,[v]$ akko za sve formule $\varphi \in \Phi$ važi $\mathfrak{M} \models \varphi\,[v]$;

(2) $\mathfrak{M} \models \bigvee \Phi\,[v]$ akko postoji formula $\varphi \in \Phi$ za koju važi $\mathfrak{M} \models \varphi\,[v]$

za proizvoljan model $\mathfrak{M} = \langle M, \ldots\rangle$ proizvoljnu valuaciju $v \in M^{Var}$ i proizvoljne najviše prebrojive skupove formula Φ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Valjana formula se definiše kao i u logici prvog reda. Oznaku $\mathfrak{M} \equiv \mathfrak{N}\,(\mathcal{L}_{\omega_1\omega})$ koristimo za elementarnu ekvivalentnost u $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$: modeli $\mathfrak{M}$ i $\mathfrak{N}$ zadovoljavaju iste $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$-rečenice.

Neka je C prebrojiv skup simbola konstanti koji se ne javljaju u jeziku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Neka je jezik $\mathcal{M}$ jezik dobijen od jezika $\mathcal{L}$ dodavanjem skupa simbola konstanti C. Sa $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$ označavamo infinitarni jezik koji odgovara jeziku $\mathcal{M}$. Jezik $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$ se u dokazima mnogih teorema koristi kao sredstvo za dobijanje rezultata u datom jeziku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Osnovni term je ili simbol konstante ili term oblika $f\,(c_1, \ldots, c_n)$, za neki n-arni funkcijski simbol f i $c_1, \ldots, c_n \in C$.

Za datu formulu φ jezika $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$ definišemo *formalnu negaciju* $\varphi\neg$ indukcijom:

(1) ako je φ atomična formula, onda je $\varphi\neg$ formula $\neg\varphi$;

(2) $(\neg\varphi)\,\neg$ je formula φ;

(3) $(\bigwedge \Phi)\,\neg$ je formula $\bigvee \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$;

(4) $(\bigvee \Phi)\,\neg$ je formula $\bigwedge \{\neg\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$;

(5) $(\forall x\varphi)\,\neg$je formula $\exists x\,(\neg\varphi)$;

(6) $(\exists x\varphi)\,\neg$je formula $\forall x\,(\neg\varphi)$.

Svojstvo neprotivrečnosti je skup S prebrojivih skupova rečenica jezika , takav da za svaki skup $s \in S$, svaku formulu φ i promenljivu x važi:

(1) $\varphi \notin s$ ili $(\neg\varphi \notin s)$;

(2) (pravila jednakosti) ako je t osnovni term i $c, d \in C$, onda važi:
ako $(c = d) \in s$, onda $s \cup \{d = c\} \in S$;
ako $t = c$, $\varphi(t) \in s$, onda $s \cup \{\varphi(c)\} \in s$;
$s \cup \{t = e\} \in S$, za neki simbol $e \in C$;
(3) ako $(\neg\varphi) \in s$, onda $s \cup \{\varphi\neg\} \in S$;
(4) ako $(\bigwedge \Phi) \in s$, onda $s \cup \{\varphi\} \in S$, za sve formule $\varphi \in \Phi$;
(5) ako $(\bigvee \Phi) \in s$, onda $s \cup \{\varphi\} \in S$, za neku formulu $\varphi \in \Phi$;
(6) ako$(\forall x \varphi(x)) \in s$, onda $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$, za sve simbole $c \in C$;
(7) ako$(\exists x \varphi(x)) \in s$, onda $s \cup \{\varphi(c)\} \in S$, za neki simbol $c \in C$.

Primer: Neka skup S čine sve prebrojive teorije koje imaju model $\mathfrak{M} = \left\langle \left\{ c^{\mathfrak{M}} \mid c \in C, \ldots \right\} \right\rangle$. Tada je S svojstvo neprotivrečnosti.

Logičke aksiome za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ su:
(1) iskazne aksiome, dobijene iz tautologija iskaznog računa uniformnom zamenom iskaznih slova formulama jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;
(2) ako je φ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, onda je

$$(\neg\varphi) \longleftrightarrow (\varphi\neg)$$

aksioma jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;
(3) ako je Φ prebrojiv skup formula i $\varphi \in \Phi$, onda je

$$\bigwedge \Phi \to \varphi$$

aksioma jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ ako su φ i ψ proizviljne formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, pri čemu je ψ formula $\varphi(x/t)$ i x nema vezana pojavljivanja u t, onda je formula

$$(\forall x)\, \varphi \to \psi$$

aksioma jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;
(5) aksiome jednakosti.

Pravila izvođenja:

1. modus ponens;

2. ako x nije slobodna promenljiva formule ψ, onda je pravilo izvođenja

$$\frac{\psi \to \varphi(x, \ldots)}{\psi \to \forall x \varphi(x, \ldots)};$$

3.

$$\frac{\psi \to \varphi_i, \text{ za sve } i \in \omega}{\psi \to \bigwedge_{i \in \omega} \varphi_i}.$$

Dokaz formule φ iz teorije T je najviše prebrojiv niz niz $\psi_1, \dots, \psi\alpha$, pri čemu je $\psi\alpha = \varphi$ i svaki član niza je ili aksioma, ili element teorije T, ili je dobijen iz prethodnih članova niza primenom pravila izvođenja.

Formula φ je *teorema teorije* T, u oznaci $T \vdash_{\mathcal{L}_{\omega_1\omega}} \varphi$, ako postoji dokaz formule φ iz teorije T. Formula φ je *teorema jezika* $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, u oznaci $\vdash_{\mathcal{L}_{\omega_1\omega}} \varphi$, ako postoji dokaz formule φ samo iz aksioma jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

3.3 Osnovni rezultati logike $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$

Neka je $\mathcal{L}$ jezik koji sadrži prebrojivo mnogo simbola konstanti $Con_{\mathcal{L}} = \{c\} \cup \{c_n \mid n \in \omega\}$. Ako je T teorija jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$

$$T = \{c \neq c_n \mid n \in \omega\} \cup \left\{ \forall x \left(\bigvee_{n \in \omega} (x = c_n) \right) \right\},$$

onda T nema model, iako svako konačan podskup od T ima model. Takođe, rečenica $\forall x \left(\bigvee_{n \in \omega} (x = c_n) \right)$ ima model kardinalnosti ω, ali nema modele kardinalnosti κ, za $\kappa > \omega$. Kao posledice dobijamo:

1. teorema kompaktnosti ne važi u logici $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$;

2. Löwenheim-Skolem-ova teorema ne važi u logici $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Napomenimo da, za merljiv kardinal κ, važi *slaba teorema kompaktnosti* za $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$: Ako je T teorija jezika $\mathcal{L}_{\kappa\kappa}$ kardinalnosti κ i ako svaka podteorija $T_1 \subset T$ za koju je $|T_1| < \kappa$ ima model, onda T ima model.

Kardinali koji zadovoljavaju ovako formulisano tvrđenje zovu se *slabo kompaktni kardinali* (dakle, svaki merljiv kardinal je slabo kompaktan; obrat ne važi).

Sledeća teorema daje važan opšti kriterijum za postojanje modela.

Teorema 3.1 (o postojanju modela) *Ako je S svojstvo neprotivrečnosti i $s \in S$, tada s ima model.*

Dokaz. Neka je S zatvoren za podskupove. Neka je Y najmanji nadskup od s koji je zatvoren za podformule i za koji važi:

ako $\varphi(t) \in Y$ i $c \in C$, onda $\varphi(c) \in Y$;

ako $(\neg\varphi) \in Y$, onda $(\varphi\neg) \in Y$;

ako $c, d \in C$, onda $(c = d) \in Y$.

Neka je $X = \{\varphi_i \mid i \in \omega\}$ skup svih rečenica iz Y i $T = \{t_i \mid i \in \omega\}$skup svih osnovnih terma. Neka je $s_0 = s$. Za već izabran skup $s_n \in S$, biramo $s_{n+1} \supset s_n$ iz S (na osnovu stavki (2), (6) i (7) definicije svojstva neprotivrečnosti) sa svojstvima:

ako $s_n \cup \{\varphi_n\} \in S$, onda $\varphi_n \in s_{n+1}$

ako $s_n \cup \{\varphi_n\} \in S$, $\varphi_n = \bigvee \Phi$ onda $\varphi \in s_{n+1}$, za neko $\varphi \in \Phi$;

ako $s_n \cup \{\varphi_n\} \in S, \varphi_n = \exists x \varphi(x)$ onda $\varphi(c) \in s_{n+1}$, za neko $c \in C$;

$(t_n = c) \in s_{n+1}$, za neko $c \in C$.

Neka je $s_\infty = \bigcup\limits_{n \in \omega} s_n$. Za $c, d \in C$ definiše se relacija $\sim$: $c \sim d$ akko $(c = d) \in s_\infty$. Iz stavke (2) definicije svojstva neprotivrečnosti sledi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Neka je $\mathfrak{A}$ model sa skupom nosačem $A = \{[c]_\sim \mid c \in C\}$. Po pravilima jednakosti, $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in s_\infty$ akko $\varphi(d_1, \ldots, d_n) \in s_\infty$, kad god $c_i \sim d_i$, pa je model određen uslovima:

$\mathfrak{A} \models (c = t)$ akko $(c = t) \in s_\infty$, za osnovni term t i $c \in C$;

$\mathfrak{A} \models R(c_1, \ldots, c_n)$ akko $R(c_1, \ldots, c_n) \in s_\infty$, za $c_1, \ldots, c_n \in C$ i n-arni relacijski simbol R.

Prva dva pravila definicije svojstva neprotivrečnosti obezbeđuju da je $\mathfrak{A}$ model za sve atomične rečenice iz s_∞ i njihove negacije. Ostala pravila su tačno ono sto je potrebno za indukciju po složenosti rečenice da bi se pokazalo da je $\mathfrak{A}$ model za s_∞. $\blacksquare$

Posledica 3.2 (Proširena teorema o postojanju modela) *Neka je S svojstvo neprotivrečnost i T prebrojiva teorija jezika $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$. Ako za sve $s \in S$ i $\varphi \in T$ važi $s \cup \{\varphi\} \in S$, onda $s \cup T$ ima model za sve $s \in S$.*

Teorema 3.3 (potpunosti za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) *Ako je φ rečenica jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, tada važi $\vdash_{\mathcal{L}_{\omega_1\omega}} \varphi$ akko $\models \varphi$.*

Dokaz. Neka je φ rečenica jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, tada važi $\vdash_{\mathcal{L}_{\omega_1\omega}} \varphi$ akko $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \varphi$: u svakom dokazu u $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$ javlja se najviše prebrojivo mnogo promenljivih, pa iz dokaza možemo izbaciti konstante iz C uniformno promenljivim koje se ne javljaju u dokazu.

Neka je S skup konačnih skupova s rečenica jezika $\mathcal{M}_{\omega_1\omega}$ u kojima se javlja konačan broj promenljivih i za koje važi $\nvdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \bigwedge s$. Lako se proverava da je S svojstvo neprotivrečnosti. Proverimo samo stavku (6):

Pretpostavimo suprotno; neka $(\bigvee \Phi) \in s$, za $s \in S$, a za svaku rečenicu $\varphi \in \Phi$ važi $s \cup \{\varphi\} \notin S$. Za sve $\varphi \in \Phi$ važi $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \neg \bigwedge (s \cup \{\varphi\})$, pošto se i u φ i u s javlja konačno mnogo konstanti iz C. Pošto je $\bigwedge (s \cup \{\varphi\}) \longleftrightarrow (\bigwedge s \wedge \varphi)$ iskazna aksioma (konjukcije u prethodnoj formuli su konačne), po modus ponensu dobijamo $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \neg (\bigwedge s \wedge \varphi)$. Slično, $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \bigwedge s \rightarrow \neg\varphi$, za svako $\varphi \in \Phi$, odakle se pravilom izvođenja 3. dobija $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \bigwedge s \rightarrow \bigwedge\limits_{\varphi\in\Phi} \neg\varphi$. Iz aksiome (2) i modus ponensa sledi da je $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \bigwedge s \rightarrow \neg \bigvee \Phi$. Pošto je $(\bigwedge s \rightarrow \neg \bigvee \Phi) \longleftrightarrow (\bigvee \Phi \rightarrow \neg \bigwedge s)$ iskazna aksioma , po modus ponensu dobijamo $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \neg \bigwedge s$, što je u suprotnosti sa početnom pretpostavkom.

Dakle, ako nije $\vdash_{\mathcal{M}_{\omega_1\omega}} \neg\varphi$, na osnovu teoreme o postojanju modela za neki model $\mathfrak{A}$ važi $\mathfrak{A} \models \varphi$.

Dokaz u suprotnom smeru je trivijalan. ■

Jedna od najvećih specifičnosti jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ je Scott-ova rečenica za prebrojive modele.

Teorema 3.4 (Scott) *Neka je $\mathfrak{A}$ prebrojiv model jezika $\mathcal{L}$. Tada postoji rečenica φ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ takva da za sve prebrojive modele $\mathfrak{B}$ jezika $\mathcal{L}$ važi $\mathfrak{B} \models \varphi$ akko $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Posledica 3.5 *Neka su $\mathfrak{A}$ i $\mathfrak{B}$ prebrojivi modeli jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, Ako važi $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}\,(\mathcal{L}_{\omega_1\omega})$ onda $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$.*

Videli smo da Löwenheim-Skolem-ova teorema ne važi u jeziku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Ipak, njen „donji” deo važi: u dokazu teoreme o postojanju modela pravi se prebrojiv model.

Teorema 3.6 (donja Löwenheim-Skolem-ova teorema za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) *Ako prebrojiva teorija T jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ ima model, onda T ima najviše prebrojiv model.*

„Problematičan” je bio „gornji” deo teoreme: ako T ima beskonačan model $\mathfrak{A}$, onda ima modele kardinalnosti κ, za svaki kardinal $\kappa > |\mathfrak{A}|$. Međutim, važi sledeći rezultat:

Teorema 3.7 (gornja Löwenheim-Skolem-ova teorema za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) *Ako prebrojiva teorija T jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ ima modele svih kardinalnosti $\beth\alpha$, za $\alpha < \omega_1$, onda T ima modele svih beskonačnih kardinalnosti.*

Za kraj, navodimo interpolacione teoreme za logiku $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$.

Teorema 3.8 (Craig-ova interpolaciona teorema za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) *Ako su φ i ψ rečenice jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ za koje važi $\models \varphi \rightarrow \psi$. Tada postoji rečenica θ takva da je $\models \varphi \rightarrow \theta$ i $\models \theta \rightarrow \psi$ i pri tome se u θ javljaju samo relacijski, funkcijski i simboli konstanti koji su zajednički za φ i ψ.*

Teorema 3.9 (Beth-ova interpolaciona teorema za $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$) *Neka su P i R n-arni relacijski simboli takvi da $P, R \notin \mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Ako sa $\varphi(P)$ označimo rečenicu jezika $(\mathcal{L} \cup \{P\})_{\omega_1\omega}$, a sa $\varphi(R)$ rečenicu jezika $(\mathcal{L} \cup \{R\})_{\omega_1\omega}$ dobijenu iz $\varphi(P)$ zamenom simbola P simbolom R. Ako važi*

$$\models \varphi(P) \wedge \varphi(R) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow R(x_1, \ldots, x_n))$$

onda postoji formula jezika takva da je

$$\models \varphi(P) \to (P(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \psi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Prema prethodnoj teoremi, ako $\varphi(P)$ definiše P implicitno, onda $\varphi(P)$ definiše P eksplicitno.

Glava 4

Elementi deskriptivne teorije skupova

Ova glava daje pregled Borelove i projektivne hijerarhije sa posebnim osvrtom na Teoremu o savršenom podskupu i Borelova dejstva grupe. Dokazani su samo rezultati koji vode ka dokazu Teoreme o savršenom podskupu (dokazi su preuzeti iz [7]). Pojmovi i rezultati su preuzeti iz[4] i [10].

4.1 Poljski prostori

Pri proučavanju „definabilnih" (pre svega Borelovih) podskupova skupa realnih brojeva $\mathbb{R}$, primećeno je da se mnogi rezultati prenose na širu klasu topoloških prostora. Izdvajanjem korišćenih svojstava prosrora $\mathbb{R}$, separabilnosti i metrizabilnosti kompletnom metrikom, prešlo se na proučavanje poljskih prostora.

Poljski prostor je topološki prostor koji je separabilan i kompletno metrizabilan.

Navodimo najvažnije primere poljskih prostora:

1. Skup realnih brojeva $\mathbb{R}$ sa uobičajenom metrikom.

2. *Baire-ov prostor* $\mathcal{N} = \omega^\omega$. Skup $\mathcal{N}$ čine svi nizovi prirodnih brojeva dužine ω. $\mathcal{N}$ postaje topološki prostor, ako topologiju Tihonova definiše diskretna topologija na ω. Jednu bazu topologije će činiti skupovi $\mathcal{N}_{n_0,\ldots,n_k} = \{(l_0, l_1, l_2, \ldots) \in \mathcal{N} \mid l_0 = n_0, l_1 = n_1, \ldots\}$, za sve prirodne brojeve k i sve $n_0, \ldots, n_k \in \omega$ (primetimo da su skupovi

$\mathcal{N}_{n_0,\ldots,n_k}$ otvoreno-zatvoreni). Metrika pri kojoj je prostor $\mathcal{N}$ kompletan je, za $l = (l_0, l_1, l_2, \ldots)$ i $h = (h_0, h_1, h_2, \ldots)$, data sa

$$d(l,h) = \begin{cases} 0, & \text{za } l = h, \\ \frac{1}{1+\text{`najmanji } n \text{ takav da je } l_n \neq h_n\text{"}}, & \text{za } l \neq h. \end{cases}$$

Može se pokazati da je $\mathcal{N}$ homeomorfan skupu iracionalnih brojeva sa topologijom preuzetom iz $\mathbb{R}$.

3. *Kantorov skup* $\mathcal{C} = 2^\omega$. Ako je topologija na skupu $2 = \{0,1\}$ diskretna, ona definiše topologiju Tihonova na $\mathcal{C}$. Baza i metrika se mogu izabrati na isti način kao u prethodnom primeru.

Tvrđenje 4.1 *Zatvoren podskup poljskog prostora je poljski prostor.*

Tvrđenje 4.2 *Ako su X_i $(i \in \omega)$ poljski prostori, onda je i $\prod_{i\in\omega} X_i$ poljski prostor.*

Specijalno, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^\omega$, $\mathcal{N}^n$, $\mathcal{N}^\omega$, $\mathcal{C}^n$, $\mathcal{C}^\omega \ldots$ su poljski prostori.

Neka je $l = (l_0, l_1, l_2, \ldots) \in \mathcal{N}$. Sa $l \mid n$ ćemo označavati $(l_0, \ldots, l_n)$. Pretpostavimo da je X kompletan metrički prostor. Neka su $A_{k_0,\ldots,k_n} \subset X$ zatvoreni skupovi za svaki konačan niz $k_0, \ldots, k_n$ prirodnih brojeva. Pretpostavimo da za skupove $A_{k_0,\ldots,k_n}$ važi:

(1) $A_{l|n+1} \subset A_{l|n}$;
(2) ako je $l \neq h$, onda za neko $m \in \omega$ važi $A_{l|m} \cap A_{h|m} = \varnothing$;
(3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta\left(A_{l|n}\right) = 0$;

za sve $l, h \in \mathcal{N}$ i sve $n \in \omega$.

Uvedimo skup $S = \left\{l \in \mathcal{N} \mid A_{l|n} \neq \varnothing \text{ za svako } n \in \omega\right\}$. Tada za svako $l \in S$ važi

$$A_{l|0} \cap A_{l|1} \cap A_{l|2} \cap \ldots = \{x\},$$

za neko $x \in X$ (za proizvoljne elemente $x_n \in A_{l|n}$ niz $(x_n)_{n\in\omega}$ će biti Košijev, pa će konvergirati nekom $x \in X$, a presek je singlton pošto dijametri konvergiraju ka nuli).

Označimo dobijeni x sa $f(l)$. Time je definisano preslikavanje $f : S \to X$, pri čemu važi

$$f[S] = \bigcup_{l\in S} \{f(l)\} = \bigcup_{l\in S} \bigcap_{n\in\omega} A_{l|n}.$$

Ako je $l \in S$ proizvoljno izabran i ε proizvoljan prirodan broj, $S \cap \mathcal{N}_{l|n}$ će za dovoljno veliko n biti okolina od l čija je slika dijametra manjeg od ε, pošto je $f\left[S \cap \mathcal{N}_{l|n}\right] \subset A_{l|n}$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \delta\left(A_{l|n}\right) = 0$.

Time je pokazano da je funkcija f neprekidna.

Funkcija f je očigledno injektivna, prema uslovu (2).

Pretpostavimo da je S Kantorov skup, $S = 2^{\omega}$. Pošto je S kompaktan skup, prema teoremi Tihonova, a $f[S]$ Hausdorfov, prema (**2.10**) preslikavanje $f : S \to f[S]$ je homeomorfno, pa $f[S]$ možemo identifikovati sa Kantorovim skupom. Time je pokazano:

Tvrđenje 4.3 *Ako su zadovoljeni uslovi* (1) $-$ (3), *gde je* $S = 2^{\omega}$, *onda je* $f(S)$ *Kantorov skup, pri čemu je* f *gore uvedena funkcija.*

Neka je $\{G_i \mid i \in \omega\}$ baza poljskog prostora X, pri čemu važi $\delta(G_i) \leq 1$. Definišemo skupove $A_{n_0,\ldots,n_k}$ indukcijom:

$A_n = \overline{G_n}$;

za skup $A_{n_0,\ldots,n_k}$, neka su skupovi $A_{n_0,\ldots,n_k,n_{k+1}}$ zatvorenja elemenata pokrivača (elementima baze) skupa $A_{n_0,\ldots,n_k}$, uz uslov $\delta\left(A_{n_0,\ldots,n_k,n_{k+1}}\right) \leq \frac{1}{k+1}$.

Za proizvoljan element $x \in X$ i $k \in \omega$ postoje $n_0, n_1, \ldots, n_k$ takvi da $x \in A_{n_0,\ldots,n_k}$. Tada je funkcija $f : \mathcal{N} \to X$ surjekcija, čime je pokazano:

Tvrđenje 4.4 *Svaki poljski prostor je neprekidna slika Baire-ovog prostora* $\mathcal{N}$.

4.2 Borelovi i analitički skupovi

Neka je X poljski prostor. Klasa *Borelovih skupova* je najmanja klasa zatvorena za prebrojive unije i preseke koja sadrži sve otvorene skupove u X. Klasu Borelovih skupova poljskog prostora X obeležavamo sa $\mathbf{B}(X)$.

Primetimo da je klasa $\mathbf{B}(X)$ zatvorena za komplemente.

Klase $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$, $\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$ i $\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X)$, za $1 < \alpha < \omega_1$ definišemo transfinitnom rekurzijom:

$\mathbf{\Sigma}^0_1(X) = \{G \subset X \mid G \text{ je otvoren}\}$;

$\mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) = \sim \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X)$;

$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \left\{\bigcup_{n\in\omega} A_n \mid A_n \in \mathbf{\Pi}^0_{\alpha_n}(X), \text{ za } \alpha_n < \alpha\right\}$, za $n > 1$;

$\mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) = \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cap \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X)$.

Indukcijom se pokazuje da važi:

$\mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \cup \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subset \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X)$.

Prema prethodnim definicijama je

$$\mathbf{B}(X) = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) = \bigcup_{\alpha\in\omega_1} \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X).$$

Sledeća shema opisuje hijerarhiju složenosti Borelovih skupova u ω_1 nivoa:

$$\mathbf{B} : \left\{ \begin{array}{cccccccc} & \mathbf{\Sigma}^0_1 & & \mathbf{\Sigma}^0_2 & & & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha & \\ \mathbf{\Delta}^0_1 & & \mathbf{\Delta}^0_2 & & \ldots & \mathbf{\Delta}^0_\alpha & & \ldots \\ & \mathbf{\Pi}^0_1 & & \mathbf{\Pi}^0_2 & & & \mathbf{\Pi}^0_\alpha & \end{array} \right. ,$$

pri čemu svaka klasa sadrži klase levo od nje.

Za neprebrojive poljske prostore, Borelova hijerarhija je prava:

Teorema 4.5 *Neka je X neprebrojiv poljski prostor. Tada za svaki ordinal $1 < \alpha < \omega_1$ važi:*

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) & \neq & \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X); \\ \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) & \subsetneq & \mathbf{\Sigma}^0_\alpha(X) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X); \\ \mathbf{\Delta}^0_\alpha(X) & \subsetneq & \mathbf{\Pi}^0_\alpha(X) \subsetneq \mathbf{\Delta}^0_{\alpha+1}(X). \end{array}$$

Definicija Borelovog skupa zavisi od date topologije. Proizvoljan Borelov skup možemo prevesti u otvoreno-zatvoren, „profinjenjem" topologije.

Teorema 4.6 *Neka je X poljski prostor sa datom topologijom $\mathcal{G}$ i neka je $A \subset X$ Borelov skup. Tada postoji topologija $\mathcal{G}_A \supset \mathcal{G}$ pri kojoj je X takođe poljski prostor, takva da je $A \in \mathcal{G}_A$ otvoreno-zatvoren.*

Teorema 4.7 (Lusin, Souslin) *Svaki neprezan Borelov skup u proizvoljnom poljskom prostoru je neprekidna slika Baire-ovog prostora $\mathcal{N}$.*

Neka su X i Y poljski prostori. Funkcija $f : X \to Y$ je *Borelova funkcija,* ako za svaki otvoren skup $G \subset Y$ važi $f^{-1}(G) \in \mathbf{B}(X)$.

Ako je $Y = \mathbb{R}$, Borelove funkcije se mogu generisati neprekidnim:

Teorema 4.8 (Lebesgue, Hausdorff) *Neka je X metrizabilan prostor. Klasa Borelovih funkcija iz $\mathbb{R}^X$ je najmanja klasa funkcija koja sadrži neprekidne funkcije i zatvorena je za tačka-po-tačka limese nizova funkcija.*

Neka je X poljski prostor. Skup $A \subset X$ je *analitički skup*, ako postoji poljski prostor Y i neprekidna funkcija $f : Y \to X$ takva da je $f[Y] = A$ (prema (**4.4**), u prethodnoj definiciji umesto Y možemo da pišemo $\mathcal{N}$).

Tvrđenje 4.9 *Ako su A_n $(n \in \omega)$ analitički skupovi u poljskom prostoru X, onda su i skupovi $\bigcup_{n\in\omega} A_n$ i $\bigcap_{n\in\omega} A_n$ analitički.*

Klasu analitičkih skupova obeležavamo sa $\mathbf{\Sigma}_1^1(X)$. Primetimo da prema prethodnom tvrđenju važi $\mathbf{B}(X) \subset \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$, pošto je svaki zatvoren podskup poljskog prostora poljski, prema (**4.1**) , a time i analitički. Navodimo nekoliko osnovnih rezultata o analitičkim skupovima.

Teorema 4.10 (Souslin) *Ako je poljski prostor X neprebrojiv, onda važi* $\mathbf{B}(X) \subsetneq \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$.

Komplement analitičkog skupa zovemo *ko-analitičkim skupom.* Klasu ko-analitičkih skupova poljskog prostora X obeležavamo sa $\mathbf{\Pi}_1^1(X)$. Klasa *bi-analitičkih* skupova je $\mathbf{\Delta}_1^1(X) = \mathbf{\Pi}_1^1(X) \cap \mathbf{\Sigma}_1^1(X)$.

Teorema 4.11 (Souslin) *Ako je poljski prostor, onda važi*

$$\mathbf{B}(X) = \mathbf{\Delta}_1^1(X).$$

Teorema 4.12 (Lusin, Souslin) *Neka su X i Y poljski prostori i $A \subset X$ Borelov skup. Ako je funkcija $f : X \to Y$ neprekidna i ako je $f\mid_A$ injekcija, onda je $f(A)$ Borelov skup.*

Teorema 4.13 (o separaciji, Lusin) *Ako su A i B disjunktni analitički skupovi u poljskom prostoru X, onda postoji Borelov skup C takav da je $A \subset C$ i $B \cap C = \varnothing$.*

Neka je $\sim$ relacija ekvivalencije na poljskom prostoru X. Skup A je $\sim$*-invarijantan*, ako za svaki element $x \in A$ važi $[x]_\sim \subset A$.

Tvrđenje 4.14 *Neka je $\sim$ analitička relacija ekvivalencije na poljskom prostoru X (kao podskup od $X \times X$). Ako su analitički skupovi $A \subset X$* i *$B \subset X$ disjunktni i $\sim$-invarijantni, onda postoji $\sim$-invarijantan Borelov skup C takav da je $A \subset C$ i $B \cap C = \varnothing$..*

Za tačku topološkog prostora kažemo da je *tačka kondenzacije*, ako je svaka njena okolina neprebrojiva.

Teorema 4.15 (o savršenom podskupu za analitičke skupove) *Ako je A analitički skup u poljskom prostoru X, onda je A ili najviše prebrojiv ili sadrži Kantorov skup.*

Dokaz. Pretpostavimo da je A neprebrojiv i neka je $f : \mathcal{N} \to A$ neprekidna surjekcija. Izaberimo za svaki element $x \in A$ po jedan element iz skupa $f^{-1}(\{x\})$ i formirajmo od tih elemenata skup $B \subset \mathcal{N}$. Tada je B neprebrojiv i $f\mid_B$ je bijekcija.

1. Skup B sadrži bar jednu tačku kondenzacije: ako nijedna tačka iz B nije tačka kondenzacije, možemo pokriti B sa prebrojivim okolinama

G_b tačaka $b \in B$. Zbog separabilnosti, skup B bi imao prebrojiv potpokrivač, pa ne bi bio neprebrojiv.

2. Skup $D \subset B$ svih tačaka kondenzacije je gust u sebi: ako za neko $d \in D$ postoji okolina G_d takva da je $G_d \cap D = \{d\}$, onda skup $D \setminus \{d\}$ možemo pokriti okolinama elemenata od D koje su prebrojive, odakle izdvajanjem prebrojivog potpokrivača dobijamo da je G_d prebrojiv.

Induktivno pravimo zatvorene skupove $A_{n_0,\ldots,n_k}$, za sve $k \in \omega$ i $n_0, \ldots, n_k \in \{0,1\}$, tako da važi:
(1) $\delta\left(A_{n_0,\ldots,n_k}\right) < \frac{1}{k+1}$;
(2) $A_{n_0,\ldots,n_{k+1}} \subset A_{n_0,\ldots,n_k}$;
(3) $A_{n_0,\ldots,n_k} = \overline{U_{n_0,\ldots,n_k}}$, za neki otvoren $U_{n_0,\ldots,n_k}$ takav da je $U_{n_0,\ldots,n_k} \cap D \neq \varnothing$;
(4) ako je $(n_0, \ldots, n_k) \neq (m_0, \ldots, m_k)$, onda je $f\left[A_{n_0,\ldots,n_k}\right] \cap f\left[A_{m_0,\ldots,m_k}\right] = \varnothing$.

1. Neka su $x_0, x_1 \in D$, $x_0 \neq x_1$. Tada je $f(x_0) \neq f(x_1)$, pa postoje disjunktne otvorene okoline G_0 i G_1 tačaka $f(x_0)$ i $f(x_1)$. Tada su $f^{-1}(G_0)$ i $f^{-1}(G_1)$ disjunktne otvorene okoline tačaka x_0 i x_1, pa postoje otvoreni skupovi U_0 i U_1 takvi da $x_i \in U_i \subset \overline{U_i} \subset f^{-1}(G_i)$, $i = 0, 1$. Biramo $A_i = \overline{U_i}$.

2. Neka su $A_{n_0,\ldots,n_k}$ skupovi sa traženim svojstvima, za neko k. Neka su $x_{n_0,\ldots,n_k,0}$ i $x_{n_0,\ldots,n_k,1}$ različiti elementi skupa $D \cap U_{n_0,\ldots,n_k}$. Ponavljamo postupak:

$$\begin{aligned} f\left(x_{n_0,\ldots,n_k,i}\right) &\in G_{n_0,\ldots,n_k,i}, \quad G_{n_0,\ldots,n_k,0} \cap G_{n_0,\ldots,n_k,1} = \varnothing; \\ x_{n_0,\ldots,n_k,i} &\in U_{n_0,\ldots,n_k,i} \subset \overline{U_{n_0,\ldots,n_k,i}} \subset U_{n_0,\ldots,n_k} \cap f^{-1}\left(G_{n_0,\ldots,n_k,i}\right); \\ \delta\left(U_{n_0,\ldots,n_k,i}\right) &\leq \frac{1}{k+2}. \end{aligned}$$

Ako je $S = \bigcup_{l \in \mathcal{C}} \bigcap_{n \in \omega} A_{l|n}$, S je Kantorov skup, prema (**4.3**), a $f|_S$ je injektivno, zbog uslova (4). ■

Kažemo da za klasu skupova $\mathcal{X}$ važi *kontinuum hipoteza*, ako za svaki skup $X \in \mathcal{X}$ važi $|X| \leq \aleph_0$ ili $|X| = 2^{\aleph_0}$. Pošto je prema (**4.4**) kardinalnost svakog poljskog prostora najviše $2^{\aleph_0}$, sledeće tvrđenje je neposredna posledica prethodne teoreme.

Tvrđenje 4.16 *Kontinuum hipoteza važi za klasu analitičkih skupova.*

4.3 Dejstvo Borelove grupe

Poljska grupa je grupa $(G,\cdot)$ sa poljskom topologijom na skupu G, pri čemu je preslikavanje $(x,y)\longmapsto xy^{-1}$ neprekidno.

Primer: Grupa S_∞ permutacija skupa ω je poljska grupa, sa topologijom preuzetom iz $\mathcal{N}$, pošto je S_∞ $\mathbf{\Pi}^0_2$ skup u $\mathcal{N}$. Kompletna metrika koja je indukuje je definisana sa $d_1(l,h)=d(l,h)+d\left(l^{-1},h^{-1}\right)$.

Borelova grupa je grupa $(G,\cdot)$ (sa poljskom topologijom na skupu G), pri čemu je preslikavanje $(x,y)\longmapsto xy^{-1}$ Borelovo.

Neka je G Borelova grupa i X poljski prostor. *Borelovo dejstvo* grupe G na X je Borelovo preslikavanje $(g,x)\longmapsto g.x$ iz $G\times X$ u X . *Orbita* elementa x je skup $\{g.x \mid g\in G\}$. Dejstvo grupe definiše relaciju ekvivalencije $\sim_G$na skupu X

$$x\sim_G y \text{ akko je } y \text{ u orbiti od } x.$$

Teorema 4.17 (Miller) *Neka je G Borelova grupa i X poljski prostor. Orbita svakog elementa od X pri Borelovom dejstvu grupe G je Borelov skup u X.*

Primer: Neka je $\mathcal{L}=\{R_i \mid i\in\omega\}$ prebrojiv relacijski jezik, pri čemu je relacijski simbol R_i arnosti n_i. Poljski prostor $X_{\mathcal{L}}=\prod\limits_{i\in\omega}2^{\omega^{n_i}}$ možemo shvatiti kao prostor modela jezika $\mathcal{L}$ kardinalnosti $\aleph_0$. Element $x=(x_i)_{i\in\omega}$ skupa $X_{\mathcal{L}}$ shvatamo kao prebrojivu strukturu $\mathcal{A}_x=\left(\omega,R_i^{\mathcal{A}_x}\right)$, pri čemu važi $R_i^{\mathcal{A}_x}(m_0,\ldots,m_{n_i-1})$ akko $x_i(m_0,\ldots,m_{n_i-1})=1$.

Dejstvo poljske grupe S_∞ na poljski prostor $X_{\mathcal{L}}$ je dato sa

$$\begin{aligned} l.x &= y \text{ akko za svaki prirodan broj } i \text{ važi:}\\ y_i(m_0,\ldots,m_{n_i-1}) &= 1 \text{ akko } x_i\left(l^{-1}(m_0),\ldots,l^{-1}(m_{n_i-1})\right)=1. \end{aligned}$$

Pri prethodnom identifikovanju $x=(x_i)_{i\in\omega}$ sa $\mathcal{A}_x$, permutaciju $l\in S_\infty$ za koju je $l.x=y$ možemo shvatiti kao izomorfizam modela $\mathcal{A}_x$ i $\mathcal{A}_y$. Tada je relacija ekvivalencije $\sim_{S_\infty}$ pri opisanom dejstvu upravo izomorfizam. Dakle, $\mathcal{A}_x\cong\mathcal{A}_y$ akko postoji premutacija $l\in S_\infty$ takva da je $l.x=y$.

Na osnovu (**4.17**), skup modela jezika izomorfnih datom modelu je Borelov.

Teorema 4.18 (Scott) *Za proizvoljan element $x\in X_{\mathcal{L}}$, klasa izomorfizma $\{y\mid\mathcal{A}_x\cong\mathcal{A}_y\}$ elementa x je Borelov skup u $X_{\mathcal{L}}$.*

Neka je dat poljski prostor X i Borelovo dejstvo poljske grupe G na X. Ako je $\sim_G$ relacija ekvivalencije određena dejstvom grupe G, $\sim_G$-invarijantne skupove ćemo u daljem tekstu zvati samo *invarijantnim*. Za proizvoljan skup $A \subset X$, označimo sa $[A]$ najmanji invarijantan nadskup skupa G, a sa (A) najveći invarijantan podskup skupa G.

Za proizvoljan topološki prostor X, Proizvoljan skup $A \subset X$ i otvoren skup $U \subset X$ uvodimo oznake:

$$\begin{array}{rcl} \forall^* x & \in & U\,(A\,(x)) \text{ za „} U \setminus A \text{ je prebrojiva unija nigde gustih skupova”;} \\ \exists^* x & \in & U\,(A\,(x)) \text{ za „} A \cap U \text{ nije prebrojiva unija nigde gustih skupova”.} \end{array}$$

Vaught-ove transformacije A^* i A^Δ skupa $A \subset X$ definišu se na sledeći način:

$$\begin{array}{rcl} A^* & = & \{x \mid \forall^* g \in G\,(g.x \in A)\}\,; \\ A^\Delta & = & \{x \mid \exists^* g \in G\,(g.x \in A)\}\,. \end{array}$$

Na sličan način, za neprazan otvoren skup $U \subset G$ definišu se *lokalne Vaught-ove transformacije* A^{*U} i $A^{\Delta U}$ skupa $A \subset X$:

$$\begin{array}{rcl} A^{*U} & = & \{x \mid \forall^* g \in U\,(g.x \in A)\}\,; \\ A^{\Delta U} & = & \{x \mid \exists^* g \in U\,(g.x \in A)\}\,. \end{array}$$

Tvrđenje 4.19 *Za proizvoljan skup $A \subset X$ i neprazan otvoren $U \subset G$ važi:*

(1) *A^* i A^Δ su invarijantni skupovi za koje je $(A) \subset A^* \subset A^\Delta \subset [A]$;*
(2) *A je invarijantan akko $A = A^*$ akko $A = A^\Delta$;*
(3) *ako je A Borelov skup, onda su i A^{*U} i $A^{\Delta U}$ Borelovi.*

Tvrđenje 4.20
(1) $\left(\bigcap\limits_{n\in\omega} A_n\right)^{*U} = \bigcap\limits_{n\in\omega} A_n^{*U}$.
(2) *Neka je $\{U_n \mid n \in \omega\}$ slaba baza za G i neka su skupovi $A_n\,(n \in \omega)$ i A Borelovi. Tada važi:*

$$\begin{array}{rcl} (\sim A)^{*U} & = & \sim \bigcup\limits_{U_n \subset U} A^{*U_n}; \\ \left(\bigcup\limits_{n\in\omega} A_n\right)^{*U} & = & \bigcap\limits_{U_i \subset U} \bigcup\limits_{U_j \subset U_i} \bigcup\limits_{n\in\omega} (A_n)^{*U_j}\,. \end{array}$$

4.4 Projektivna determinisanost

Projektivne klase $\mathbf{\Sigma}_n^1$ $\mathbf{\Pi}_n^1$i $\mathbf{\Delta}_n^1$ za $n \in \omega$, $n > 1$, definišemo transfinitnom rekurzijom:

$\mathbf{\Sigma}_1^1$ −analitički skupovi;

$\mathbf{\Pi}_n^1 = \sim \mathbf{\Sigma}_n^1$;

$\mathbf{\Sigma}_{n+1}^1 = \left\{ f(A) \mid A \in \mathbf{\Pi}_n^1(Z),\ f : Z \to X \text{ nepr., } X,\ Z\text{-poljski prostori} \right\}$;

$\mathbf{\Delta}_n^1 = \mathbf{\Sigma}_n^1 \cap \mathbf{\Pi}_n^1$.

Elementi projektivnih klasa su *projektivni skupovi*; klasu projektivnih skupova označavamo sa **P**.

Sledeća shema opisuje hijerarhiju složenosti projektivnih skupova u ω nivoa:

$$\mathbf{P} : \left\{ \begin{array}{ccccccccc} & \mathbf{\Sigma}_1^1 & & \mathbf{\Sigma}_2^1 & & & \mathbf{\Sigma}_n^1 & & \\ \mathbf{\Delta}_1^1 & & \mathbf{\Delta}_2^1 & & \dots & \mathbf{\Delta}_n^1 & & \dots & , \\ & \mathbf{\Pi}_1^1 & & \mathbf{\Pi}_2^1 & & & \mathbf{\Pi}_n^1 & & \end{array} \right.$$

pri čemu svaka klasa sadrži klase levo od nje.

Tvrđenje 4.21

(1) Klase su zatvorene za prebrojive preseke i unije, neprekidna preslikavanja i inverzne slike pri neprekidnim preslikavanjima.

(2) Klase su zatvorene za prebrojive preseke i unije i inverzne slike pri neprekidnim preslikavanjima.

(3) Klase su zatvorene za prebrojive unije, komplemente i inverzne slike pri neprekidnim preslikavanjima.

Neka su X i Y poljski prostori. Kažemo da je funkcija $f : X \to Y$ $\mathbf{\Sigma}_n^1$*-merljiva* ($\mathbf{\Delta}_n^1$-, $\mathbf{\Pi}_n^1$-), ako inverzna slika proizvoljnog skupa (pri preslikavanju f) klase $\mathbf{\Sigma}_n^1$ ($\mathbf{\Delta}_n^1$,$\mathbf{\Pi}_n^1$) takođe pripada klasi $\mathbf{\Sigma}_n^1$ ($\mathbf{\Delta}_n^1$,$\mathbf{\Pi}_n^1$).

Tvrđenje 4.22

(1) Funkcija je $\mathbf{\Sigma}_n^1$-merljiva akko je $\mathbf{\Delta}_n^1$-merljiva.

(2) Funkcija je $\mathbf{\Delta}_n^1$-merljiva akko njen graf pripada klasi $\mathbf{\Delta}_n^1$.

Specijalno, svaka $\mathbf{\Sigma}_1^1$-merljiva funkcija je borelova. *Projektivne funkcije* su funkcije koje su $\mathbf{\Delta}_n^1$-merljive, za neko n.

Neka je $A \neq \varnothing$ proizvoljan skup i $X \subset A^\omega$. *Beskonačna igra* $G(A, X)$ je igra koju igraju dva igrača, **A** i **B,** u ω koraka, prema sledećoj shemi:

$$\begin{array}{lccccc} \mathbf{A}: & a_0 & & a_2 & & \cdots \\ \mathbf{B}: & & a_1 & & a_3 & \cdots \end{array},$$

pri čemu igrač **A** bira proizvoljan element $a_0 \in A$, zatim igrač **B** bira proizvoljan element $a_0 \in A$ i nastavljajući igru naizmeničnim potezima formiraju niz $a = (a_0, a_1, a_2, \ldots) \in A^\omega$.

Igrač **A** je pobednik ako $a \in X$, inače je pobednik igrač **B**. *Strategija* (igrača **A** ili igrača **B**) je izbor elementa (tog igrača) u svakom potezu, u zavisnosti od prethodno izabranih elemenata oba igrača. Strategija za igrača **A** (igrača **B**) je *dobitna*, ako igrač **A** (igrač **B**) pobeđuje nezavisno od poteza igrača **B** (igrača **A**), igrajući po toj strategiji.

Igra $G\,(A, X)$ je *determinisana*, ako postoji dobitna strategija za jednog od igrača. Korišćenjem Aksiome izbora može se izabrati skup A i konstuisati skup X, takav da igra $G\,(A, X)$ je nije determinisana.

Tvrđenje 4.23 *Ako je A poljski prostor i $X \subset A\omega$ Borelov skup, igra $G\,(A, X)$ je determinisana.*

Projektivna determinisanost (PD):

Beskonačna igra $G\,(\omega, X)$ je determinisana za sve projektivne skupove $X \subset \mathcal{N}$.

Teorema 4.24 (Davis) *Pod pretpostavkom **(PD)** važi:*

ako je A projektivni skup u poljskom prostoru X, onda je A ili najviše prebrojiv ili sadrži Kantorov skup.

Posledica 4.25 *Ako pretpostavimo **(PD)**, kontinuum hipoteza važi za projektivne skupove.*

Glava 5

Metod iskaznog kodiranja

U ovoj glavi opisan je jedan način za kodiranje teorija jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ u iskazni račun $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$. Primenom tog kodiranja, na uniforman način su dokazane neke teoreme (Reyes, Kueker, Burris-Kwaitinetz). U kombinaciji sa Teoremom o savršenom podskupu je pokazano da za broj mogućnosti za kodiranje linearnih proširenja parcijalno uređenog prebrojivog skupa, prostih ideala prebrojivog prstena, maksimalnih lanaca i antilanaca i nekih kombinatornih problema važi kontinuum hipoteza.

5.1 Metod iskaznog kodiranja

Metoda iskaznog kodiranja se sastoji u interpretiranju matematičkog problema u iskaznom računu, gde se rešava primenom kompaktnosti, potpunosti i ostalim dostupnim sredstvima (npr predstavljanje Cohen-ovog forsinga preko Lindenbaum-ove algebre, [13]). Osnovni problem je u iskaznom predstavljanju raznih matematičkih koncepta, objekata...

U ovom poglavlju predstavljamo infinitarni iskazni račun, koji daje nešto veće mogućnosti za interpretaciju.

Za za beskonačan kardinal κ, $\mathcal{L}\kappa$ je proširenje klasičnog iskaznog računa $\mathcal{L}$, koji dopušta konjukcije i disjunkcije dužine manje od κ. Za dati skup iskaznih slova $\mathcal{P}$, skup iskaznih $\mathcal{L}\kappa$-formula formula $For_{\mathcal{P}}$ je najmanji nadskup skupa $\mathcal{P}$, za koji važi:

(1) ako je $\varphi \in For_{\mathcal{P}}$, onda je $\neg\varphi \in For_{\mathcal{P}}$;

(2) ako je $S \subset For_{\mathcal{P}}$ i $|S| < \kappa$, onda je $\bigwedge S \in For_{\mathcal{P}}$ i $\bigvee S \in For_{\mathcal{P}}$.

Skup svih iskaznih slova koja se javljaju u formuli φ označavamo sa $\mathcal{P}(\varphi)$.

Za datu valuaciju $v : \mathcal{P} \to 2$ vrednost formule pri valuaciji v definišemo indukcijom po složenosti formule:

1. ako je φ iskazno slovo, onda je $\varphi[v] = v(\varphi)$;
2. ako je φ oblika $\neg\psi$, onda je $\varphi[v] = 1$ akko je $\psi[v] = 0$.
3. ako je φ oblika $\bigvee S$, onda je $\varphi[v] = 1$ ako postoji $\psi \in S$ takav da je $\psi[v] = 1$, inače je $\varphi[v] = 0$.
4. ako je φ oblika $\bigwedge S$, onda je $\varphi[v] = 1$ ako za sve $\psi \in S$ važi $\psi[v] = 1$, inače je $\varphi[v] = 0$.

Kažemo da je valuacija v model formule φ, ako je $\varphi[v] = 1$. Skup svih modela formule φ označavamo sa $\mathfrak{M}(\varphi)$.

Za iskaznno slovo $p \in \mathcal{P}$ uvodimo oznake za *literale*: p^1 je oznaka za p, a p^0 za $\neg p$. Za klasičnu iskaznu formulu, njoj ekvivalentnu formulu u disjunktivnoj normalnoj formi je najlakše konstruisati tako što za disjunkte izaberemo konjukcije literala svih iskaznih slova koje se u njoj javljaju. Nazovimo takvu formulu direktnom disjunktivnom normalnom formom. Sledeće tvrđenje kaže da infinitarni iskazni račun $\mathcal{L}\kappa$ ne dopušta direktnu disjunktivnu normalnu formu (u smislu da se ne može za svaku njegovu formulu naći odgovarajuća gore opisana formula), za svako κ.

Tvrđenje 5.1 *Infinitarni iskazni račun $\mathcal{L}\kappa$ dopušta direktnu disjunktivnu normalnu formu akko je kardinal κ jako granični.*

Dokaz. Neka je φ formula iskaznog računa $\mathcal{L}\kappa$. Za neki kardinal $\lambda > \kappa$, lako se proveri da je $\bigvee\limits_{v\in\mathfrak{M}(\varphi)} \bigwedge\limits_{p\in\mathcal{P}(\varphi)} p^{v(p)}$ formula iskaznog računa $\mathcal{L}\lambda$ koja je ekvivalentna sa φ. Primetimo da je $|\mathcal{P}(\varphi)| < \kappa$, pa su podformule $\bigwedge\limits_{p\in\mathcal{P}(\varphi)} p^{v(p)}$ formule iskaznog računa $\mathcal{L}\kappa$. Takođe, pošto vrednost formule φ pri nekoj valuaciji zavisi samo od vrednosti slova iz $\mathcal{P}(\varphi)$ pri toj valuaciji, u formuli $\bigvee\limits_{v\in\mathfrak{M}(\varphi)} \bigwedge\limits_{p\in\mathcal{P}(\varphi)} p^{v(p)}$ se javlja najviše $2^{|\mathcal{P}(\varphi)|}$ različitih disjunkata. Tada je data formula iskaznog računa $\mathcal{L}\lambda$ takođe i formula iskaznog računa $\mathcal{L}\kappa$ ako je za svaki kardinal $\kappa_1 < \kappa$ i $2^{\kappa_1} < \kappa$.

Da bismo proverili obrat, pretpostavimo da je $2^{\kappa_1} \geq \kappa$ za neko $\kappa_1 < \kappa$. Ako je $\mathcal{P}_1 \subset \mathcal{P}$ skup iskaznih slova takav da je $|\mathcal{P}_1| = \kappa_1$, tada za formulu $\neg\bigwedge\mathcal{P}_1$ ne postoji ekvivalentna formula iskaznog računa $\mathcal{L}\kappa$ u direktnoj disjunktivnoj normalnoj formi. $\blacksquare$

5.2 Kodiranje u $\mathcal{L}_{\omega_1}$

Neka je $\mathbb{A} = \langle A, \ldots \rangle$ prebrojiv model prebrojivog jezika prvog reda $\mathcal{L}$ bez simbola konstanti i neka je $\mathcal{L}_{\mathbb{A}} = \mathcal{L} \cup \{c_a \mid a \in A\}$ prosto proširenje jezika $\mathcal{L}$ skupom simbola konstanti c_a. Označimo sa $Sent\left((\mathcal{L}_{\mathbb{A}})_{\omega_1\omega}\right)$ skup svih rečenica infinitarnog jezika $(\mathcal{L}_{\mathbb{A}})_{\omega_1\omega}$.

Jezik $\mathcal{L}$ određuje skup iskaznih slova

$$\mathcal{P} = \left\{p_{f,a_1,\ldots,a_{n+1}} \mid f \in Fun_{\mathcal{L}},\ f \text{ je } n\text{-aran}\right\} \cup \{q_{R,a_1,\ldots,a_n} \mid R \in Rel_{\mathcal{L}},\ R \text{ je } n\text{-aran}\}.$$

Neka je $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$ odgovarajući infinitarni iskazni račun sa skupom formula $For\left(\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}\right)$.

Definišemo preslikavanje $* : Sent\left((\mathcal{L}_{\mathbb{A}})_{\omega_1\omega}\right) \to For\left(\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}\right)$ na sledeći način:

$$(f(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) = c_b)^* = p_{f,a_1,\ldots,a_n,b},\ a_i, b \in A,\ f \in Fun_{\mathcal{L}},\ f \text{ je } n\text{-aran};$$

$$(R(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}))^* = q_{R,a_1,\ldots,a_n},\ a_i \in A,\ R \in Rel_{\mathcal{L}},\ R \text{ je } n\text{-aran};$$

$$(\neg\varphi)^* = \neg\varphi^*;$$

$$\left(\bigwedge_{n\in\omega} \varphi_n\right)^* = \bigwedge_{n\in\omega} \varphi_n^*;$$

$$\left(\bigvee_{n\in\omega} \varphi_n\right)^* = \bigvee_{n\in\omega} \varphi_n^*;$$

$$(\forall x\varphi)^* = \bigwedge_{a\in A} \varphi(c_a);$$

$$(\exists x\varphi)^* = \bigvee_{a\in A} \varphi(c_a);$$

$$(f(t_1(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}), \ldots, t_n(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})) = c_b)^* =$$

$$\bigwedge_{b_1,\ldots,b_n\in A} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) = c_{b_i}\right)^* \to p_{f,b_1,\ldots,b_n,b}\right);$$

$$(R(t_1(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}), \ldots, t_n(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m})))^* =$$

$$\bigwedge_{b_1,\ldots,b_n\in A} \left(\left(\bigwedge_{i=1}^{n} t_i(c_{a_1}, \ldots, c_{a_m}) = c_{b_i}\right)^* \wedge q_{R,b_1,\ldots,b_n}\right).$$

Ako je φ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1}^{\mathcal{P}}$, preslikavanje $\hat{\varphi} : 2^{\mathcal{P}} \to 2$ definišemo sa $\hat{\varphi}(v) = \varphi[v]$.

Lema 5.2
(1) *Ako je* φ *formula jezika* $\mathcal{L}\omega^{\mathcal{P}}$, *preslikavanje* $\hat{\varphi}$ *je neprekidno.*
(2) *Ako je* φ *formula jezika* $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$, *preslikavanje* $\hat{\varphi}$ *je Borelovo.*

Dokaz.
(1) Neka je $\{p_1, \ldots, p_n\}$ skup iskaznih slova koje učestvuju u formuli φ. Tada je

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] &= \left\{v \in 2^{\mathcal{P}} \mid \varphi[v] = 1\right\} \\ &= \bigcup \left\{\pi_1^{-1}[\{k_1\}] \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}[\{k_n\}] \mid \varphi[v] = 1, v(p_i) = k_i\right\}\end{aligned}$$

je otvoren, kao unija baznih skupova. Na isti način se pokazuje da je skup $\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$ otvoren, pa je preslikavanje $\hat{\varphi}$ neprekidno.

(2) Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule.

Ako je φ iskazno slovo, $\hat{\varphi}$ je neprekidna funkcija.

Neka je φ formula oblika $\neg\psi$. Tada je

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \hat{\psi}^{-1}[\{0\}].$$

Neka je φ formula oblika $\bigvee\limits_{n\in\omega} \psi_n$. Tada je skup

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \bigcup_{n\in\omega} \hat{\varphi}_n^{-1}[\{1\}].$$

Borelov kao prebrojiva unija Borelovih skupova. ■

Posledica 5.3 *Ako je* φ *formula iskaznog računa* $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$, *za broj modela formule* φ *važi kontinuum hipoteza.*

Napomenimo da je prvi deo tvrđenja koristan za određivanje složenosti skupa modela fiksirane $\mathcal{L}^{\mathcal{P}}_{\omega_1}$-teorije u Borelovoj hijerarhiji.

Sledeća teorema je varijanta rezultata Makkai-ja ([8]). Prikazujemo dokaz primenom operacije $*$.

Teorema 5.4 *Neka je* $\mathbb{A} = \langle A, \ldots\rangle$ *prebrojiv model prebrojivog jezika* $\mathcal{L}$ *i neka je* $\mathcal{L}'$ *prebrojivo proširenje jezika* $\mathcal{L}$. *Tada za broj* $\mathcal{L}'$*-ekspanzija* $\mathbb{A}'$ *od* $\mathbb{A}$ *koje su model prebrojive* $(\mathcal{L}')_{\omega_1\omega}$*-teorije* T *važi kontinuum hipoteza.*

Dokaz. Neka je $T^* = \{\varphi^* \mid \varphi \in T\}$. Tada je

$$\mathfrak{M}(T^*) = \bigcap_{\varphi\in T} \mathfrak{M}(\varphi^*).$$

Skup $\mathfrak{M}(T^*)$ je Borelov podskup od $2^{\mathcal{P}}$ kao prebrojiv presek Borelovih skupova.

Pokažimo da postoji bijekcija između $\mathfrak{M}(T^*)$ i ekspanzija $\mathbb{A}'$ od $\mathbb{A}$:

Neka je $v \in \mathfrak{M}(T^*)$. Definišemo ekspanziju $\mathbb{A}_v$ na sledeći način:

Za funkcijski simbol $f \in \mathcal{L}'$, neka je

$$\begin{aligned} f^{\mathbb{A}_v}(a_1,\ldots,a_n) &= b \text{ akko } \left(f\left(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}\right)=c_b\right)^*[v]=1 \\ \text{akko } v\left(p_{f,a_1,\ldots,a_n,b}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Za relacijski simbol $R \in \mathcal{L}'$, neka je

$$\begin{aligned} R^{\mathbb{A}_v}(a_1,\ldots,a_n) \text{ akko } \left(R\left(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}\right)\right)^*[v] &= 1 \\ \text{akko } v\left(q_{R,a_1,\ldots,a_n}\right) &= 1. \end{aligned}$$

Indukcijom po složenosti formule lako se pokazuje da je $\mathbb{A}_v$ model teorije T.

Za $v \neq w$ je $\mathbb{A}_v \neq \mathbb{A}_w$, pa je broj ekspanzija veći ili jednak broju modela od T^*.

Za suprotan smer, pretpostavimo da je $\mathbb{A}'$ ekspanzija od $\mathbb{A}$ u jeziku $\mathcal{L}'$ koja je model teorije T. Model $v_{\mathbb{A}'}$ teorije T^* definišemo na sledeći način:

$v_{\mathbb{A}'}\left(p_{f,a_1,\ldots,a_n,b}\right)=1$ akko $\mathbb{A}' \models f\left(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}\right)=c_b$,

$v_{\mathbb{A}'}\left(q_{R,a_1,\ldots,a_n}\right)=1$ akko $\mathbb{A}' \models R\left(c_{a_1},\ldots,c_{a_n}\right)$,

pa je broj ekspanzija manji ili jednak broju modela teorije T^*. ■

5.3 Primeri

Iako se neki od narednih primera mogu dobiti primenom prethodne teoreme, za svaki od primera daćemo, na uprošćen način primeren potrebi primera, direktnu primenu operacije $*$.

1. Kueker-ova teorema.

Neka je $\mathbb{A} = \langle A, \ldots \rangle$ prebrojiva algebra prebrojivog jezika prvog reda $\mathcal{L}$. Tada za broj automorfizama od $\mathbb{A}$ važi kontinuum hipoteza. ([6]).

Neka je $\mathcal{P} = \{p_{ab} \mid a, b \in A\}$ skup iskaznih slova, pri čemu za potencijalni automorfizam f sa p_{ab} označavamo $(f(a)=b)^*$. Definišimo iskaznu teoriju T koja opisuje pojam automorfizma:

$T_1 = \{\neg(p_{ab} \wedge p_{ac}) \mid a, b, c \in A, b \neq c\}$. Teorija T_1 opisuje pojam funkcije. Pri tom je $\mathfrak{M}(T_1) = \bigcap_{\varphi \in T_1} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$ zatvoren podskup od $2^{\mathcal{P}}$.

$T_2 = \left\{ \bigvee_{b \in A} p_{ab} \mid a \in A \right\}$. Teorija T_2 tvrdi da je A domen funkcije. Pri tom je $\mathfrak{M}(T_2) = \bigcap_{a \in A} \bigcup_{b \in A} \hat{p}_{ab}^{-1}[\{1\}]$ $\mathbf{\Pi}_2^0$ podskup od $2^{\mathcal{P}}$.

$T_3 = \{\neg(p_{ac} \wedge p_{bc}) \mid a, b, c \in A, a \neq b\}$. Teorija T_3 opisuje pojam injekcije. Pri tom je $\mathfrak{M}(T_3) = \bigcap\limits_{\varphi \in T_3} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$ zatvoren podskup od $2^{\mathcal{P}}$.

$T_4 = \left\{\bigvee\limits_{a \in A} p_{ab} \mid b \in A\right\}$. Teorija T_4 opisuje pojam surjekcije. Pri tom je $\mathfrak{M}(T_4) = \bigcap\limits_{b \in A} \bigcup\limits_{a \in A} \hat{p}_{ab}^{-1}[\{1\}]$ $\mathbf{\Pi}_2^0$ podskup od $2^{\mathcal{P}}$.

$T_5 = \bigcup\limits_{f} T_f$, pri čemu je za svako n i n-arnu funkciju f algebre $\mathbb{A}$ teorija T_f skup

$$\left\{\neg(p_{a_1 b_1} \wedge \ldots \wedge p_{a_n b_n}) \vee p_{f(a_1,\ldots,a_n) f(b_1,\ldots,b_n)} \mid a_i, b_i \in A\right\}.$$

Teorija T_5 opisuje pojam endomorfizma algebre $\mathbb{A}$. Pri tom je $\mathfrak{M}(T_5) = \bigcap\limits_{\varphi \in T_5} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}]$ zatvoren podskup od $2^{\mathcal{P}}$.

Jasno je da teorija $T = \bigcup\limits_{n=1}^{5} T_n$ opisuje pojam automorfizma algebre $\mathbb{A}$. Pri tom je

$$\mathfrak{M}(T) = \bigcap_{n=1}^{5} \mathfrak{M}(T_n)$$

$\mathbf{\Pi}_2^0$ podskup od $2^{\mathcal{P}}$, pa kontinuum hipoteza važi za broj modela teorije T.

Na kraju, primetimo da je preslikavanje $H : \mathfrak{M}(T) \to Aut\mathbb{A}$ definisano sa $(H(v))(a) = b$ akko $v(p_{ab}) = 1$ bijekcija , odakle dobijamo da kontinuum hipoteza važi za broj automorfizama proizvoljne prebrojive algebre.

Slično tvrđenje možemo dobiti ako umesto algebre posmatramo bilo koji prebrojiv model prebrojivog jezika prvog reda.

2. Linearne ekstenzije parcijalnih uređenja prebrojivog skupa.

Pokazano je da za dato uređenje $\langle A, \leq\rangle$ prebrojivog skupa A postoji linearna ekstenzija $\langle A, \preceq\rangle$. Pokažimo da broj ekstenzija zadovoljava kontinuum hipotezu.

Neka je $\mathcal{P} = \{p_{ab} \mid a, b \in A\}$ skup iskaznih slova, pri čemu za potencijalnu linearnu ekstenziju $\preceq$ sa p_{ab} označavamo $(a \preceq b)^*$. Definišimo iskaznu teoriju T koja opisuje pojam linearnog uređenja koje produžava relaciju $\leq$:

$T_1 = \{p_{ab} \mid a, b \in A, a \leq b\}$. Teorija T_1 tvrdi da relacija $\preceq$ produžava relaciju $\leq$.

$T_2 = \{p_{aa} \mid a \in A\}$. Teorija T_2 opisuje refleksivnost relacije $\preceq$.

$T_3 = \{\neg (p_{ab} \wedge p_{ba}) \mid a, b \in A, a \neq b\}$. Teorija T_3 tvrdi da je relacija $\preceq$ antisimetrična.

$T_4 = \{p_{ab} \wedge p_{bc} \to p_{ac} \mid a, b, c \in A\}$. Teorija T_4 obezbeđuje tranzitivnost.

$T_5 = \{p_{ab} \vee p_{ba} \mid a, b \in A\}$. Po teoriji T_4, relacija $\preceq$ je linearna.

Teorija $T = \bigcup_{n=1}^{5} T_n$ opisuje pojam linearne ekstenzije uređenja $\langle A, \leq \rangle$. Pri tom je

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}(T) &= \bigcap_{n=1}^{5} \mathfrak{M}(T_n) \\ &= \bigcap_{n=1}^{5} \bigcap_{\varphi \in T_i} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] \end{aligned}$$

zatvoren podskup od $2^{\mathcal{P}}$, pa kontinuum hipoteza važi za broj modela teorije T.

Preslikavanje $H : \mathfrak{M}(T) \to Lin\langle A, \leq \rangle$ (obeležimo $H(v)$ sa $\leq_v$) definisano sa $a \leq_v b$ akko $v(p_{ab}) = 1$ bijekcija između skupa modela teorije T i skupa linearnih ekstenzija $Lin\langle A, \leq \rangle$.

3. Bojenje grafa

Pog grafom podrazumevamo uređeni par $\langle \Gamma, R \rangle$, pri čemu je Γ neprazan skup, a R binarna operacija na njemu. Elemente skupa Γ zovemo čvorovima grafa. Kažem oda su čvorovi a i b povezani, ako je aRb ili bRa.

Poznato je da se čvorovi prebrojivog grafa mogu obojiti u četiri boje, tako da su povezani čvorovi različitih boja. Pokažimo da broj mogućnosti za takvo bojenje zadovoljava kontinuum hipotezu.

Neka je $\mathcal{P} = \{p_{ab} \mid a, b \in \Gamma\} \cup \{q_a^n \mid a \in \Gamma\ , n \in 4\}$, pri čemu p_{ab} označavamo činjenicicu da su a i b povezani (odnosno $(aRb)^* = p_{ab}$)., a q_a^n znači da je čvor a obojen bojom $n \in 4 = \{0, 1, 2, 3\}$, pri čemu podrazumevamo da su boje numerisane. Neka je $T = T_1 \cup T_2 \cup T_3$, gde je:

$$T_1 = \left\{ \bigvee_{n \in 4} q_a^n \mid a \in \Gamma \right\};$$

$$T_2 = \{\neg q_a^m \vee \neg q_a^n \mid a \in \Gamma,\ m, n \in 4,\ m \neq n\};$$

$$T_3 = \{\neg p_{ab} \vee \neg q_a^n \vee \neg q_b^n \mid a, b \in \Gamma,\ n \in 4\}.$$

Tada svaki model teorije T određuje jedinstveno bojenje grafa $\langle \Gamma, R \rangle$, a svako bojenje definiše teoriju, na prirodan, gore opisan način. Dakle, za broj bojenja važi kontinuum hipoteza.

4. Wang-ove domine

Ovaj primer opisuje pokrivanje ravni određenim tipom domina, opisan u [15]. Ravan treba pokriti sa prebrojivo mnogo domina, koje su kvadratnog oblika i koje su podeljene na četiri kvadrata dijagonalama. Svaki trougao numerisan je nekim prirodnom brojem. Tip domine je uređena četvorka (a, b, c, d), pri čemu je sa a numerisan donji trougao, sa b levi, sa c gornji i sa d desni trougao. Neka je S konačan skup tipova domina.

Ravan se pokriva na sledeći način:

Ivice domina imaju celobrojne koordinate. Pozicija domine je određena koordinatama donje desne ivice. Domine se kombinuju na uobičajen način. Koristeći Princip prenosa iz nestandardne analize, pokazuje se da mogućnost pokrivanja prvog kvadranta povlači mogućnost pokrivanja cele ravni. Naime, ako možemo da pokrijemo prvi kvadrant, po Principu prenosa možemo da pokrijemo i nestandardni prvi kvadrant. Za proizvoljan beskonačan prirodan broj H, pokrivanje galaksije od (H, H) je istovremeno i pokrivanje standardne ravni. Pokažimo da za broj pokrivanja važi kontinuum hipoteza.

Neka je $\mathcal{P} = \{p_{abcd}^{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z},\ (a, b, c, d) \in S\}$ skup iskaznih slova, pri čemu p_{abcd}^{mn} znači daje domina tipa (a, b, c, d) na poziciji (m, n).

$$T_1 = \{p_{abcd}^{mn} \mid m, n \in \mathbb{Z}\};$$

$$T_2 = \left\{\neg p_{abcd}^{mn} \vee \neg p_{pqrs}^{m(n-1)} \mid a \neq r,\ (a, b, c, d), (p, q, r, s) \in S\right\};$$

$$T_2 = \left\{\neg p_{abcd}^{mn} \vee \neg p_{pqrs}^{(m+1)n} \mid b \neq s,\ (a, b, c, d), (p, q, r, s) \in S\right\};$$

$$T_2 = \left\{\neg p_{abcd}^{mn} \vee \neg p_{pqrs}^{m(n+1)} \mid c \neq p,\ (a, b, c, d), (p, q, r, s) \in S\right\};$$

$$T_2 = \left\{\neg p_{abcd}^{mn} \vee \neg p_{pqrs}^{(m-1)n} \mid q \neq d,\ (a, b, c, d), (p, q, r, s) \in S\right\};$$

$$T = \bigcup_{n=1}^{5} T_n.$$

Pošto je $\mathfrak{M}(T) = \bigcap_{n=1}^{5} \mathfrak{M}(T_n)$, skup modela teorije T je Borelov podskup Kantorovog skupa $2^{\mathcal{P}}$. Odatle i broj pokrivanja zadovoljava kontinuum hipotezu.

Sledeći primeri se pokazuju primenon iste tehnike. Prikazane su skice kodiranja.

5. Teorema Burris-a i Kwaitinetz-a

Za broj kongruencija prebrojive algebre $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ važi kontinuum hipoteza. Ako za $a, b \in A$ i kongruenciju $\sim$ sa p_{ab} označimo činjenicu $a \sim b$, za proizvoljnu n-arnu operaciju f algebre $\mathfrak{A}$ uvodimo teoriju

$$T_f = \left\{ (p_{a_1 b_1} \wedge \ldots \wedge p_{a_n b_n}) \to p_{f(a_1,\ldots,a_n) f(b_1,\ldots,b_n)} \mid a_i, b_i \in A \right\}.$$

6. Prostor Zariskog

Za broj prostih (maksimalnih) ideala prebrojivog prstena $\langle P, +, \cdot \rangle$ (dakle i za prostor Zariskog prebrojivog prstena) važi kontinuum hipoteza. Ako p_a znači da a pripada idealu, teorija

$$\begin{aligned} &\{(p_a \wedge p_b) \to p_{a-b} \mid a, b \in P\} \cup \\ &\{p_a \to (p_{ab} \wedge p_{ba}) \mid a, b \in P\} \end{aligned}$$

opisuje ideal, a teorija

$$\{p_{ab} \to (p_a \vee p_b) \mid a, b \in P\}$$

maksimalnost.

7. Maksimalni lanci i antilanci

Za broj maksimalnih lanaca i antilanaca prebrojivog parcijalnog uređeja $\langle A, \leq \rangle$ važi kontinuum hipoteza. Ako p_a označava pripadnost lancu, a $(a \leq b)^* = q_{ab}$, teorijom

$$\begin{aligned} &\{q_{ab} \mid a \leq b,\ a, b \in A\} \cup \\ &\{\neg q_{ab} \mid a \not\leq b,\ a, b \in A\} \cup \\ &\{\neg p_a \vee \neg p_b \mid a \not\leq b, b \not\leq a,\ a, b \in A\} \cup \\ &\left\{ \bigwedge_{b \in P} (p_b \to (q_{ab} \vee q_{ba}) \to p_a) \mid a \in A \right\} \end{aligned}$$

su opisani maksimalni lanci; slično se opisuju maksimalni antilanci.

8. Uređenja formalno realnog polja

Polje u kojem -1 nije moguće zapisati kao sumu kvadrata elemenata polja zovemo *formalno realno polje*. Poznato je da su formalno realna polja tačno ona polja u kojima je moguće definisati uređenje, pri čemu može postojati više načina da se polje uredi. Za broj uređenja proizvoljnog prebrojivog formalno realnog polja $\langle P, +, \cdot, \leq, 0, 1\rangle$ važi kontinuum hipoteza. Ako za $a, b \in P$ sa p_{ab} označimo da je a manje od b u uvedenom uređenju, broj uređenja jednak je broju modela teorije

$$
\begin{aligned}
&\{p_{ab} \vee p_{ba} \mid a, b \in P\} \cup \\
&\{\neg p_{ab} \vee \neg p_{ba} \mid a, b \in P,\ a \neq b\} \cup \\
&\{p_{ab} \wedge p_{bc} \rightarrow p_{ac} \mid a, b, c \in P\} \cup \\
&\{p_{ab} \rightarrow p_{cd} \mid a, b, c, d \in P,\ b - a = d - c\} \cup \\
&\{p_{0a} \wedge p_{0b} \rightarrow p_{0c} \mid a, b, c \in P,\ ab = c\}\,.
\end{aligned}
$$

Glava 6

Neke primene deskriptivne teorije skupova

U prvom poglavlju prikazan je dokaz Scott-ove teoreme primenom nekih rezultata deskriptivne teorije skupova; dokaz je preuzet iz [4]. Zatim je pokazano da je, za prebrojiv model $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ jezika $\mathcal{L}$, broj valuacija iz A^{Var} koje zadovoljavaju fiksiranu rečenicu ili tip jezika $\mathcal{L}_{\omega_1 \omega}$ važi kontinuum hipoteza. Na kraju je razmatrana šira klasa modela i pokazan rezultat istog tipa za egzistencijalne formule.

6.1 Skotova teorema

Neka je $\mathcal{L}$ prebrojiv relacijski jezik i $X_{\mathcal{L}}$ odgovarajući poljski prostor, na koji grupa permutacija S_∞ skupa ω deluje na način opisan u poglavlju **4.3**. Takođe, svaki element $x = (x_i)_{i \in \omega}$ skupa $X_{\mathcal{L}}$ identifikujemo sa prebrojivom strukturom $\mathcal{A}_x$. Kažemo da je skup invarijantan ako je invarijantan u odnosu na relaciju ekvivalencije indukovanom dejstvom grupe S_∞.

Neka je jezik $\mathcal{L}_{\omega_1 \omega}$ dobijen od jezika $\mathcal{L}$, zatvaranjem za prebrojive disjunkcije i konjukcije, kao u poglavlju **3.2**. Pošto je slovo x rezervisano za elemente skupa $X_{\mathcal{L}}$, u ovom poglavlju ćemo promenljive označavati slovom z, često indeksirano.

Ako je $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1 \omega}$, skup $A_{\varphi,k} \subset X_{\mathcal{L}} \times \omega^k$ definišemo na sledeći način:

$$A_{\varphi,k} = \Big\{ (x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \in X_{\mathcal{L}} \times \omega^k \mid \mathcal{A}_x \models \varphi[n_0, \ldots, n_{k-1}] \Big\}.$$

Pretpostavljamo da je topologija na skupu $X_{\mathcal{L}} \times \omega^k$ topologija proizvoda, pri čemu je ω diskretan topološki prostor. Tada je za rečenicu φ skup $A_{\varphi,0} = \{x \in X_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{A}_x \models \varphi\}$ invarijantan.

Tvrđenje 6.1 *Za proizvoljnu formulu $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, skup $A_{\varphi,k}$ je Borelov.*

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule.

Neka je $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ atomična formula, na primer $R_{i_0}(z_0, \ldots, z_{k-1})$. Tada je skup

$$A_{\varphi,k} = \left\{(x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \in X_{\mathcal{L}} \times \omega^k \mid x_{i_0}(n_0, \ldots, n_{k-1}) = 1\right\}$$

otvoreno-zatvoren.

Neka je $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ formula oblika $\bigwedge\limits_{i\in\omega} \psi_i(z_0, \ldots, z_{k-1})$. Tada je

$$A_{\varphi,k} = \bigcap_{i\in\omega} A_{\psi_i,k}.$$

Neka je $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ formula oblika $\neg\psi(z_0, \ldots, z_{k-1})$. Tada je

$$A_{\varphi,k} =\sim A_{\psi,k}.$$

Neka je $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ formula oblika $\exists z\psi(z_0, \ldots, z_{k-1}, z)$. Tada je

$$A_{\varphi,k} = \bigcup_{n\in\omega} \left\{(x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \in X_{\mathcal{L}} \times \omega^k \mid (x, n_0, \ldots, n_{k-1}, n) \in A_{\psi,k+1}\right\},$$

a za fiksirano n je preslikavanje $(x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \longmapsto (x, n_0, \ldots, n_{k-1}, n)$ neprekidno. ■

Neka je $(\omega)^k = \left\{(n_0, \ldots, n_{k-1}) \in \omega^k \mid n_i \neq n_j \text{ za } i \neq j\right\}$. Ako je $(n_0, \ldots, n_{k-1}) \in (\omega)^k$, označimo sa $[(n_0, \ldots, n_{k-1})]$ skup

$$\left\{l^{-1} \mid l \in S_\infty \text{ i } l \mid k = (n_0, \ldots, n_{k-1})\right\}.$$

Primetimo da je $\bigcup\limits_{k\in\omega} \left\{[(n_0, \ldots, n_{k-1})] \mid (n_0, \ldots, n_{k-1}) \in (\omega)^k\right\}$ jedna baza toplоške grupe S_∞.

Za svaki skup $A \subset X_{\mathcal{L}}$ i $k \in \omega$, označimo sa A^{*k} skup

$$\left\{(x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \in X_{\mathcal{L}} \times \omega^k \mid (n_0, \ldots, n_{k-1}) \in (\omega)^k \text{ i } x \in A^{*[(n_0,\ldots,n_{k-1})]}\right\}$$

Tvrđenje 6.2 *Za svaki Borelov skup $A \subset X_{\mathcal{L}}$ i $k \in \omega$ postoji formula $\varphi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ za koju je $A^{*k} = A_{\varphi,k}$.*

Dokaz. Ako je U bazni skup u topološkom prostoru $2^{\omega^{n_j}}$ i $A = \pi^{-1}(U)$, onda je

$$A = \{x \in X_{\mathcal{L}} \mid \mathcal{A}_x \models \varphi[0, \ldots, n]\},$$

za neko $n \in \omega$ i neku bulovsku kombinaciju atomičnih formula φ. Tada

$$\begin{array}{rcl} (x, n_0, \ldots, n_{k-1}) & \in & A^{*k} \\ \text{akko } (n_0, \ldots, n_{k-1}) & \in & (\omega)^k \text{ i } \forall^* l \in [(n_0, \ldots, n_{k-1})] \, (l.x \in A) \\ \text{akko } (n_0, \ldots, n_{k-1}) & \in & (\omega)^k \text{ i } \forall^* l \in [(n_0, \ldots, n_{k-1})] \, \mathcal{A}_{l.x} \models \varphi[0, \ldots, n] \\ \text{akko } (n_0, \ldots, n_{k-1}) & \in & (\omega)^k \text{ i } \forall^* l \in [(n_0, \ldots, n_{k-1})] \, \mathcal{A}_x \models \varphi\left[l^{-1}(0), \ldots, l^{-1}(n)\right]. \end{array}$$

Razlikujemo dva slučaja:

1. ako je $k > n$, primetimo da je $l \in [(n_0, \ldots, n_{k-1})]$ akko $(n_0, \ldots, n_{k-1}) \subset l^{-1}$, odakle dobijamo $(n_0, \ldots, n_n) = \left(l^{-1}(0), \ldots, l^{-1}(n)\right)$ i

   $$(x, n_0, \ldots, n_{k-1}) \in A^{*k} \text{ akko } (n_0, \ldots, n_{k-1}) \in (\omega)^k \text{ i } \mathcal{A}_x \models \varphi[n_0, \ldots, n_n].$$

   Tada je $A^{*k} = A_{\varphi(z_0, \ldots, z_n) \wedge \bigwedge_{0 \le i < j < k} (z_i \neq z_j), k}$;

2. ako je $k \le n$, primetimo da svaki skup C iz S_∞, za koji je $[(n_0, \ldots, n_{k-1})] \setminus C$ prebrojiva unija nigde gustih skupova, ima neprazan presek sa svim skupovima oblika $[(n_0, \ldots, n_{k-1}, m_k, \ldots, m_n)]$. Tada važi

   $$\forall^* l \in [(n_0, \ldots, n_{k-1})] \, \mathcal{A}_x \models \varphi\left[l^{-1}(0), \ldots, l^{-1}(n)\right]$$

   akko za sve $n_k, \ldots, n_n \in \omega$ važi $\mathcal{A}_x \models \varphi[n_0, \ldots, n_n]$. Ako je $\psi(z_0, \ldots, z_{k-1})$ formula

   $$\forall z_k \cdots \forall z_n \left(\bigwedge_{0 \le i < j \le n} (z_i \neq z_j) \rightarrow \varphi(z_0, \ldots, z_n) \right) \wedge \bigwedge_{0 \le i < j < k} (z_i \neq z_j),$$

   onda je $A^{*k} = A_{\psi, k}$.

Dovoljno je pokazati da je klasa skupova za koje važi tvrđenje zatvorena za prebrojive preseke i komplemente.

Ako je $A = \bigcap_{n \in \omega} A_n$, pri čemu je $A_n^{*k} = A_{\varphi_n, k}$, za neke formule , onda, prema (**4.20**), važi

$$A^{*k} = \bigcap_{n \in \omega} A_n^{*k} = A_{\bigwedge_{n \in \omega} \varphi_n, k}.$$

Slično se pokazuje zatvorenost za komplemente, pomoću (**4.20**). ■

Teorema 6.3 (Lopez-Escobar) *Invarijantni Borelovi podskupovi od* $X_{\mathcal{L}}$ *su tačno skupovi oblika* $A_{\varphi,0}$*, gde je* φ *rečenica jezika* $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$*.*

Dokaz. Prema (**4.19**), A invarijantan akko je $A = A^*$. Za Borelov skup A, A^* je oblika $A_{\varphi,0}$, za neku rečenicu φ jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, na osnovu prethodnog tvrđenja. ■

Na osnovu prethodne teoreme i (**4.18**) neposredno sledi:

Teorema 6.4 (Scott) *Neka je* $\mathfrak{A}$ *prebrojiv model jezika* $\mathcal{L}$*. Tada postoji rečenica* φ *jezika* $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ *takva da za sve prebrojive modele* $\mathfrak{B}$ *jezika* $\mathcal{L}$ *važi* $\mathfrak{B} \models \varphi$ *akko* $\mathfrak{A} \cong \mathfrak{B}$*.*

6.2 Broj valuacija prebrojivih modela i tipovi

U preostalom delu rada pretpostavićemo da je skup Var promenljivih jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ prebrojiv.

Neka je $\mathfrak{B} = \langle B, \ldots \rangle$ prebrojiv model jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$. Ako posmatramo skup B kao diskretan topološki prostor, onda je skup valuacija B^{Var} homeomorfan Baire-ovom prostoru $\mathcal{N}$.

Ako je $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, preslikavanje $\hat{\varphi} : B^{Var} \to 2$ definišemo na sledeći način:

$$\hat{\varphi}(v) = \begin{cases} 1, & \mathfrak{B} \models \varphi[v] \\ 0, & \mathfrak{B} \not\models \varphi[v] \end{cases} .$$

Lema 6.5 *Ako je* $\varphi = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ *formula jezika* $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$*, preslikavanje* $\hat{\varphi}$ *je neprekidno.*

Dokaz. Skup

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] &= \left\{v \in B^{Var} \mid \mathfrak{B} \models \varphi[v]\right\} \\ &= \bigcup \left\{\pi_1^{-1}[\{a_1\}] \cap \ldots \cap \pi_n^{-1}[\{a_n\}] \mid a_i \in B \text{ i } \mathfrak{B} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]\right\} \end{aligned}$$

je otvoren, kao unija baznih skupova. Na isti način se pokazuje da je skup $\hat{\varphi}^{-1}[\{0\}]$ otvoren, pa je preslikavanje $\hat{\varphi}$ neprekidno. ■

Ako je $t(x_1, \ldots, x_n) = \{\varphi_n(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \omega\}$ prebrojiv tip jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, preslikavanje $\hat{t} : B^{Var} \to 2^\omega$ definišemo na sledeći način:

$$\hat{t}(v) = \langle \hat{\varphi}_n[v] \mid n \in \omega \rangle .$$

Posledica 6.6 *Za tip* $t(x_1, \ldots, x_n)$*, preslikavanje* $\hat{t}$ *je neprekidno.*

Dokaz. Prema prethodnoj lemi, preslikavanja $\hat{\varphi}_n$ su neprekidna, pa je $\hat{t}$ neprekidna, pošto su takve koordinatne funkcije $\pi_n \circ \hat{t} = \hat{\varphi}_n$. ■

Kao posledicu dobijamo da za broj svih valuacija koje zadovoljavaju tip $t(x_1, \ldots, x_n)$ važi kontinuum hipoteza, pošto je skup takvih valuacija $\hat{t}^{-1}[\{\langle 1, 1, 1, \ldots \rangle\}]$ zatvoren podskup Baire-ovog prostora B^{Var}.

Ako dopustimo da formule jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ sadrže beskonačno mnogo promenljivih, formulama $\varphi(x_0, x_1, \ldots)$ i tipovima $t(x_0, x_1, \ldots)$ možemo, na isti način kao u slučaju konačnog broja promenljivih, pridružiti funkcije $\hat{\varphi}$ i $\hat{t}$.

Tvrđenje 6.7 *Ako je $\varphi = \varphi(x_0, x_1, \ldots)$ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, preslikavanje $\hat{\varphi}$ je Borelovo.*

Dokaz. Tvrđenje dokazujemo indukcijom po složenosti formule.

Ako je φ atomična formula, $\hat{\varphi}$ je neprekidna funkcija, prema (**6.5**).

Neka je φ formula oblika $\neg\psi$. Tada je

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \hat{\psi}^{-1}[\{0\}].$$

Neka je φ formula oblika $\bigvee\limits_{n \in \omega} \psi_n$. Tada je

$$\hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] = \bigcup_{n \in \omega} \hat{\varphi}_n^{-1}[\{1\}].$$

Na kraju, ako je φ formula oblika $\exists x_0 \psi(x_0, x_1, \ldots)$, onda je skup

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{-1}[\{1\}] &= \left\{v \in B^{Var} \mid \mathfrak{B} \models \exists x \psi(x_0, x_1, \ldots)[v]\right\} \\ &= \bigcup_{b \in B} \left\{v \in B^{Var} \mid \mathfrak{B} \models \psi(b, x_1, \ldots)[v]\right\} \end{aligned}$$

Borelov kao prebrojiva unija Borelovih skupova, pošto je

$$\begin{aligned} & \left\{v \in B^{Var} \mid \mathfrak{B} \models \psi(b, x_1, \ldots)[v]\right\} \\ = & \left\{v \in B^{Var} \mid \mathfrak{B} \models \psi(x_0, x_1, \ldots)[v]\right\} \cap \\ & \left\{v \in B^{Var} \mid v(x_0) = b\right\}. \end{aligned}$$ ■

Posledica 6.8 *Za tip $t(x_0, x_1 \ldots)$, preslikavanje $\hat{t}$ je Borelovo.*

Posledica 6.9 *Ako je $t(x_0, x_1 \ldots)$ prebrojiv tip jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, za broj valuacija koje zadovoljavaju tip t važi kontinuum hipoteza.*

Primer: Za broj preseka prebrojivog linearnog uređenja važi kontinuum hipoteza. Pojam preseka opisuju sledeće formule:

$\forall x \bigvee_{n\in\omega} x = x_n$

$\bigwedge_{n\in\omega} x_{2n} < x_{2n+2}$

$\bigwedge_{n\in\omega} x_{2n+3} < x_{2n+1}$

$\bigwedge_{n,k\in\omega} x_{2n} < x_{2k+1}$

$\bigwedge_{n\in\omega} \bigvee_{k\in\omega} x_{2n} < x_{2k}$

$\bigwedge_{n\in\omega} \bigvee_{k\in\omega} x_{2k+1} < x_{2n+1}.$

6.3 Dalja razmatranja o broju valuacija

Razmotrimo mogućnost prenošenja rezultata prethodnog poglavlja na modele koji nisu nužno prebrojivi. Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, pri čemu je skup A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathfrak{A}$ su Borelove (primetimo da su u slučaju da je model prebrojiv sve relacije i funkcije Borelove). Tada je skup valuacija A^{Var} homeomorfan poljskom prostoru A^{ω}, pa valuacije možemo posmatrati kao nizove $(a_i)_{i\in\omega} \in A^{\omega}$.

Lema 6.10 *Neka je A poljski prostor i neka je B Borelov podskup od A^n. Ako je preslikavanje π permutacija skupa $\{0, 1, \ldots, n-1\}$, onda je i skup $\big\{\big(a_{\pi(0)}, \ldots, a_{\pi(n-1)}\big) \mid (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in B\big\}$ Borelov.*

Dokaz. Posledica ravnopravnosti koordinata u baznim skupovima topologije proizvoda. ■

Lema 6.11 *Neka je A poljski prostor i neka je B Borelov podskup od A^n. Tada su i skupovi $B \times A^{\omega\setminus n}$ i $B \times A^k$ Borelovi.*

Dokaz. Indukcijom se pokazuje da su skupovi B, $B \times A^{\omega\setminus n}$ i $B \times A^k$ iste složenosti u Borelovoj hijerarhiji.

Ako je skup B otvoren, onda je

$$B = \bigcup \left\{\pi^{-1}_{A^n,0}\left(U_{0,\alpha}\right) \cap \ldots \cap \pi^{-1}_{A^n,n-1}\left(U_{n-1,\alpha}\right) \mid \alpha \in J\right\},$$

za neke otvorene skupove $U_{i,\alpha}$ iz A, pri čemu je $\pi_{A^n,k} : A^n \to A$ k-ta projekcija. Tada je

$$B \times A^{\omega\setminus n} = \left\{\pi^{-1}_{A^{\omega},0}\left(U_{0,\alpha}\right) \cap \ldots \cap \pi^{-1}_{A^{\omega},n-1}\left(U_{n-1,\alpha}\right) \mid \alpha \in J\right\},$$

pri čemu je $\pi_{A^{\omega},k} : A^{\omega} \to A$ k-ta projekcija, pa je $B \times A^{\omega\setminus n}$ otvoren.

Ako je B $\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$−skup, onda je $B = \bigcup_{n\in\omega} B_n$, za neke $\mathbf{\Pi}^0_\alpha$-skupove B_n. Tada je i

$$B \times A^{\omega\setminus n} = \left(\bigcup_{n\in\omega} B_n\right) \times A^{\omega\setminus n} = \bigcup_{n\in\omega}\left(B_n \times A^{\omega\setminus n}\right)$$

$\mathbf{\Sigma}^0_{\alpha+1}$−skup, prema induktivnoj pretpostavci.

Ako je $\mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$−skup, onda je $B =\sim C$, za neki $\mathbf{\Sigma}^0_\alpha$ −skup C. Tada je

$$B \times A^{\omega\setminus n} = (\sim C) \times A^{\omega\setminus n} =\sim \left(C \times A^{\omega\setminus n}\right)$$

$\mathbf{\Pi}^0_{\alpha+1}$−skup, prema induktivnoj pretpostavci.

Na isti način se pokazuje i drugi deo tvrđenja. ■

Lema 6.12 *Ako je $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots\rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, pri čemu je skup A poljski prostor i pri čemu su sve funkcije modela $\mathfrak{A}$ Borelove, onda svaki term t jezika $\mathcal{L}$ definiše funkciju f koja je Borelova.*

Dokaz. Lemu dokazujemo indukcijom po složenosti terma.

Jasno je da termi složenosti 0 definišu unarne funkcije koje su ili identiteti ili konstantne funkcije, pa su neprekidne.

Neka je $t = g(t_1, \ldots, t_n)$, pri čemu je g funkcijski simbol i neka važi induktivna hipoteza, odnosno neka termi $t_1, \ldots, t_n$ određuju Borelove funkcije (ne obavezno interpretacije funkcijskih simbola!) $h_1, \ldots, h_n$. Pokažimo da je funkcija $f = g^{\mathfrak{A}} \circ (h_1, \ldots, h_n)$ Borelova. Kako je klasa Borelovih funkcija zatvorena za kompozicije, dovoljno je pokazati da je funkcija $(h_1, \ldots, h_n)$ Borelova. Ako su $x_0, \ldots, x_m$ sve promenljive koje se javljaju u termima t_i, primetimo da je graf funkcije $(h_1, \ldots, h_n)$ skup

$$\begin{aligned} S &= \left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid h_i(a_0, \ldots, a_m) = b_i, i \in \{1, \ldots, n\}\right\} \\ &= \bigcup_{1\le i\le n} \left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid h_i(a_0, \ldots, a_m) = b_i\right\}. \end{aligned}$$

Pri tom je skup

$$\begin{aligned} &\left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid h_1(a_0, \ldots, a_m) = b_1\right\} \\ = &\left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1) \in A^{m+n+1} \mid h_1(a_0, \ldots, a_m) = b_1\right\} \times A^{n-1} \end{aligned}$$

Borelov, prema lemi (**6.11**) i (**4.22**). Slično, primenom (**6.10**) i (**6.11**) dobijamo i da su ostali elementi unije Borelovi skupovi, pa je funkcija $(h_1, \ldots, h_n)$ Borelova, prema (**4.22**). ■

Tvrđenje 6.13 *Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \ldots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, pri čemu je skup A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathfrak{A}$ su Borelove. Ako je φ formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ u kojoj se ne javljaju kvantori, onda je skup valuacija koje zadovoljavaju formulu φ Borelov podskup od A^{Var}.*

Dokaz. Kako je

$$\begin{aligned}\left\{v \in A^{Var} \mid \mathfrak{A} \models \bigwedge_{n\in\omega} \varphi_n\right\} &= \bigcap_{n\in\omega} \left\{v \in A^{Var} \mid \mathfrak{A} \models \varphi_n\right\} \text{ i} \\ \left\{v \in A^{Var} \mid \mathfrak{A} \models \neg\varphi\right\} &= \sim \left\{v \in A^{Var} \mid \mathfrak{A} \models \varphi\right\},\end{aligned}$$

dovoljno je pokazati da tvrđenje važi za atomične formule.

Neka je $R\left(t_1\left(x_0, \ldots, x_m\right), \ldots, t_n\left(x_0, \ldots, x_m\right)\right)$ proizvoljna atomična formula i $R^{\mathfrak{A}}$ interpretacija simbola R, po pretpostavci Borelova. Pokažimo da je skup

$$S = \left\{(a_0, \ldots, a_m) \in A^{m+1} \mid R^{\mathfrak{A}}\left(t_1^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right], \ldots, t_n^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right]\right)\right\}$$

Borelov. Primetimo da je $S = \pi\left(S_1\right)$, gde je

$$S_1 = \left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid R^{\mathfrak{A}}\left(b_1, \ldots, b_n\right), b_i = t_i^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right]\right\}$$

i $\pi : A^{m+n+1} \to A^{m+1}$ projekcija,

$$\pi\left(\left(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n\right)\right) = \left(a_0, \ldots, a_m\right).$$

Pri tom je

$$\begin{aligned}S_1 = & \left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid R^{\mathfrak{A}}\left(b_1, \ldots, b_n\right)\right\} \\ & \cap \bigcap_{1\le i\le n} \left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid b_i = t_i^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right]\right\}.\end{aligned}$$

Skup

$$\begin{aligned}&\left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid R^{\mathfrak{A}}\left(b_1, \ldots, b_n\right)\right\} = \\ &A^{m+1} \times \left\{(b_1, \ldots, b_n) \in A^n \mid R^{\mathfrak{A}}\left(b_1, \ldots, b_n\right)\right\}\end{aligned}$$

je Borelov, prema (**6.11**). Takođe, skup

$$\begin{aligned}&\left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_n) \in A^{m+n+1} \mid b_i = t_i^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right]\right\} = \\ &\left\{(a_0, \ldots, a_m, b_1) \in A^{m+2} \mid b_i = t_i^{\mathfrak{A}}\left[a_0, \ldots, a_m\right]\right\} \times A^{n-1}\end{aligned}$$

je Borelov, na osnovu (**6.11**) i (**6.12**). Slično se pokazuje da su i ostali elementi preseka Borelovi skupovi, uz primenu (**6.10**), pa je skup S_1 Borelov.

Projekcija π je neprekidna. Pošto za proizvoljan niz $(a_0, \dots, a_m)$ postoji najviše jedan niz $(b_1, \dots, b_n)$ takav da $(a_0, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n) \in S_1$ $(b_i = t_i^{\mathfrak{A}}[a_0, \dots, a_m])$, $\pi\,|_{S_1}$ je injektivno preslikavanje. Prema teoremi (**4.12**), S je Borelov skup. Sada tvrđenje sledi na osnovu (**6.11**). ■

Posledica 6.14 *Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, pri čemu je skup A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathfrak{A}$ su Borelove. Ako jeφ egzistencijalna formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, za broj valuacija koje zadovoljavaju formulu φ važi kontinuum hipoteza.*

Dokaz. Projekcija određena kvantorom $\exists$ je neprekidno preslikavanje, pa je skup valuacija analitički skup. ■

Primer: Struktura $\mathbb{R}$ je poljski prostor, pri čemu su operacije $+, -, \cdot$ i relacija $\leq$ Borelove. Ako dodefinišemo operaciju $^{-1}$ na primer $0^{-1} = 1$, ona će biti Borelova. Tada se za svaku formulu koja ne dopušta deljenje nulom može primeniti prethodno tvrđenje.

Na kraju, napomenimo da se, koristeći (**4.21**), na isti način kao u dokazu od (**6.13**), može dokazati da važi sledeće tvrđenje:

Tvrđenje 6.15 *Neka je $\mathfrak{A} = \langle A, \dots \rangle$ model jezika $\mathcal{L}$, pri čemu je skup A poljski prostor i sve funkcije i relacije modela $\mathfrak{A}$ su projektivne. Ako je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, onda je skup valuacija koje zadovoljavaju formulu φ projektivni podskup od A^{Var}.*

Posledica 6.16 *Pretpostavimo da važi **(PD)** i da model $\mathfrak{A}$ zadovoljava uslove prethodnog tvrđenja. Ako je φ proizvoljna formula jezika $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$, za broj valuacija iz A^{Var} koje zadovoljavaju formulu φ važi kontinuum hipoteza.*

Dokaz. Direktna posledica od (**6.15**) i (**4.25**). ■

Literatura

[1] Barwise J, An introduction to first-order logic, iz: Handbook of Mathematical Logic, ed. Barwise J., North-Holland, Amsterdam (1977), pp. 5-46.

[2] Barwise J., Model-Theoretic Logics: Background and Aims, iz: Model-Theoretic Logic, ed. Barwise J., Feferman S., Springer-Verlag, New York (1985), pp. 233-282. pp. 3-23.

[3] Chang C. C., Keisler H. J., Model Theory, 3rd ed. North-Holand, Amsterdam (1990).

[4] Kechris A. S., Classical Descriptive Set Theory, Springer-Verlag (1995).

[5] Keisler H. J., Model Theory for Infinitary Logic, North-Holland, Amsterdam (1971).

[6] Kueker D., Definability, automorphisms and infinitary languages, iz: The Syntax and Semantics of Infinitary Logic, ed. Barwise J., Lecture Notes in Mathematics, Vol. 72, Springer, Berlin (1968), pp. 152-165.

[7] Kuratowski K., Mostowski A., Set Theory, PWN-Polish Scientific Publishers, Warszava (1967).

[8] Makkai M., Admissible sets and infinitary logic, iz: Handbook of Mathematical Logic, ed. Barwise J., North-Holland, Amsterdam (1977), pp. 233-282.

[9] Mijajlović Ž., An Introduction to Model Theory, University of Novi Sad, Institute of Mathematics (1987).

[10] Moschovakis Y. N., Descriptive Set Theory, North-Holland, Amsterdam (1980).

[11] Munkres J. R., Topology: A First Course, Prentice-Hall, New Jersey (1975).

[12] Nadel M., $\mathcal{L}_{\omega_1\omega}$ and Admissiible Fragments, iz: Model-Theoretic Logic, ed. Barwise J., Feferman S., Springer-Verlag, New York (1985), pp. 233-282. pp. 271-316.

[13] Perović A., Jovanović A., Veličković B., Teorija skupova, Matematički fakultet, Beograd (2007).

[14] Reyes G., Local definability theory, Ann. Math. Logic1, (1970) pp. 95-137.

[15] Wang H., Games, logic and computers, Scientific American, 213 (5), (1965), pp. 98-106.