

S. M. TARG

TEORIJSKA MEHANIKA

KRATAK KURS

TREĆE IZDANJE

Preveo s ruskog

Dr Ing. LJUBODRAG B. RADOSAVLJEVIĆ,
vanredni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

IZDAVAČKO PREDUZEĆE
GRAĐEVINSKA KNJIGA
BEOGRAD, 1967.

С. М. ТАРГ

КРАТКИЙ КУРС ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Издание второе, стереотипное

Государственное издательство
физико-математической литературы
Москва, 1961

Stručni redaktor

Dr KONSTANTIN VORONJEC

redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu
i redovni član Srpske Akademije Nauka i Umetnosti

Za preduzeće odgovara glavni urednik *Lj. Jurela* — Urednik *D. Lazić*
Naslovna strana *N. Dudić* — Korektor *Lj. Račosavljević*
Tiraž 5000 primeraka.

Štampa: Beogradski grafički zavod — Beograd

SADRŽAJ

Predgovor autora	IX
Predgovor drugom izdanju	X
Predgovor prevodioca	XI
Predgovor drugom izdanju	XI
Predgovor trećem izdanju	XI
Uvod	1

PRVI DEO

STATIKA KRUTOG TELA

Glava I. Osnovni pojmovi i aksiome statike	7
§ 1. Predmet statike	7
§ 2. Sila	8
§ 3. Aksiome statike	10
§ 4. Veze i njihove reakcije	13
§ 5. Aksioma o vezama	15
Glava II Sistem sučeljnih sila	16
§ 6. Geometrijski način slaganja sistema sučeljnih sila	16
§ 7. Razlaganje sila	18
§ 8. Projekcija sile na osu i na ravan	21
§ 9. Analitički način definisanja sile	22
§ 10. Analitički način slaganja sila	23
§ 11. Ravnoteža sistema sučeljnih sila	25
§ 12. Statički određeni i statički neodređeni zadaci	26
§ 13. Rešavanje zadataka statike	27
§ 14. Moment sile za tačku (ili centar)	34
§ 15. Varinjonova teorema o momentu rezultante	36
§ 16* Momentne jednačine za ravan sistem sučeljnih sila	36
Glava III Ravni sistemi paralelnih sila i spregova	39
§ 17. Slaganje i razlaganje paralelnih sila	39
§ 18. Spreg sila. Moment sprega sila	41
§ 19. Ekvivalentnost spregova sila	43
§ 20. Slaganje spregova koji deluju u istoj ravni. Uslovi ravnoteže spregova	45
Glava IV. Proizvoljan ravan sistem sila	47
§ 21. Teorema o redukciji sile na tačku (paralelnom prenošenju sile)	47
§ 22. Svođenje (redukcija) ravnog sistema sila na datu tačku	48
§ 23. Svođenje (redukcija) ravnog sistema sila na prostiji oblik	50
§ 24. Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila	52

§ 25.	Ravnoteža ravnog sistema paralelnih sila	54
§ 26.	Rešavanje zadataka	54
§ 27.	Ravnoteža sistema krutih tela	60
§ 28*.	Kontinualna raspodela sila	64
Glava V.	Elementi grafičke statike	68
§ 29.	Poligon sila i verižni poligon. Svodenje ravnog sistema sila na dve sile	68
§ 30.	Grafičko određivanje rezultante	69
§ 31.	Grafičko određivanje rezultujućeg sprega	70
§ 32.	Grafički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila	71
§ 33.	Određivanje reakcija oslonaca	71
§ 34*.	Grafičko rešavanje ravnih rešetki	72
§ 35*.	Dijagrami Maksvela i Kremone (Kremonin plan sila)	74
Glava VI.	Trenje	76
§ 36.	Zakoni trenja klizanja	76
§ 37.	Reakcija hrapave veze. Ugao trenja	78
§ 38.	Ravnoteža pri trenju	79
§ 39*.	Trenje konopca (užeta) o cilindričnu površinu	81
§ 40*.	Trenje kotrljanja i obrtanja	83
Glava VII.	Proizvoljni prostorni sistem sila. Spregovi u prostoru	85
§ 41.	Moment sile za tačku (centar) kao vektor	85
§ 42.	Moment sile za osu	86
§ 43.	Zavisnost između momenta sile za tačku i momenta sile za osu	89
§ 44.	Spreg sila kao vektor	90
§ 45*.	Slaganje spregova u prostoru. Uslovi ravnoteže spregova	91
§ 46.	Svodenje (redukcija) prostornog sistema sila na datu tačku	93
§ 47*.	Svodenje prostornog sistema sila na prostiji oblik	95
§ 48.	Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila. Slučaj paralelnih sila	97
§ 49.	Varinjonova teorema o momentu rezultante za osu	98
§ 50.	Zadaci o ravnoteži tela pod dejstvom prostornog sistema sila	99
§ 51*.	Uslovi ravnoteže neslobodnog krutog tela. Pojam o stabilnosti ravnoteže	105
Glava VIII.	Težište	107
§ 52.	Centar (središte) paralelnih sila	107
§ 53.	Težište krutog tela	109
§ 54.	Težište homogenih tela	110
§ 55.	Način određivanja težišta tela	110
§ 56.	Položaj težišta nekih homogenih tela	113

DRUGI DEO

KINEMATIKA TAČKE I KRUTOG TELA

Glava IX.	Pravolinijsko kretanje tačke	119
§ 57.	Uvod u kinematiku	119
§ 58.	Zakon pravolinijskog kretanja	120
§ 59.	Brzina i ubrzanje tačke pri pravolinijskom kretanju	121
§ 60.	Neki primeri pravolinijskog kretanja tačke	123
§ 61.	Dijagrami kretanja, brzine i ubrzanja tačke	124
§ 62.	Rešavanje zadataka	125
Glava X.	Krivolinijsko kretanje tačke	128
§ 63.	Vektorski način definisanja kretanja tačke	128
§ 64.	Vektor brzine tačke	129
§ 65.	Vektor ubrzanja tačke	130
§ 66.	Teorema o projekcijama izvoda vektora	131
§ 67.	Analitički (koordinatni) način definisanja kretanja tačke. Određivanje putanje brzine i ubrzanja tačke	132
§ 68.	Prirodni način definisanja kretanja tačke. Određivanje brzine tačke	137
§ 69.	Tangencijalno i normalno ubrzanje tačke	138
§ 70.	Neki posebni slučajevi kretanja tačke	140

§ 71*. Brzina u polarnim koordinatama	144
§ 72*. Grafičko ispitivanje kretanja tačke	145
Glava XI. Translatorno i obrtno kretanje krutog tela	149
§ 73. Translatorno kretanje	149
§ 74. Obrtno kretanje krutog tela. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje	151
§ 75. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo kretanje	153
§ 76. Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće	154
Glava XII. Ravno kretanje krutog tela	158
§ 77. Jednačine ravnog kretanja. Razlaganje kretanja na translatorno i obrtno	158
§ 78. Određivanje putanja tačaka tela	160
§ 79. Određivanje brzina tačaka tela	160
§ 80. Teorema o projekcijama brzina dveju tačaka tela	162
§ 81. Određivanje brzina tačaka tela pomoću trenutnog pola brzina	162
§ 82. Rešavanje zadataka	165
§ 83*. Plan brzina	169
§ 84. Određivanje ubrzanja tačaka tela	170
§ 85*. Trenutni pol ubrzanja	176
Glava XIII. Kretanje krutog tela oko nepomične tačke. Slobodno kretanje krutog tela	179
§ 86. Obrtno kretanje krutog tela oko nepomične tačke	179
§ 87*. Brzine i ubrzanja tačaka tela	181
§ 88. Opšti slučaj kretanja slobodnog krutog tela	182
Glava XIV. Složeno kretanje tačke	184
§ 89. Relativno, prenosno i apsolutno kretanje	184
§ 90. Slaganje brzina	185
§ 91. Slaganje ubrzanja. Koriolisova teorema	189
§ 92*. Izračunavanje koriolisovog ubrzanja	192
§ 93. Rešavanje zadataka	195
Glava XV. Složeno kretanje krutog tela	200
§ 94. Slaganje translatorskih kretanja	200
§ 95. Slaganje obrtanja oko dveju paralelnih osa	200
§ 96. Cilindrični zupčasti prenosnici	203
§ 97*. Slaganje obrtanja oko osa koje se seku	206
§ 98*. Slaganje translatorskog i obrtnog kretanja. Zavojno kretanje	207

TREĆI DEO

DINAMIKA TAČKE

Glava XVI. Uvod u dinamiku. Zakoni dinamike	213
§ 99. Osnovni pojmovi i definicije	213
§ 100. Zakoni dinamike	214
§ 101. Sistemi jedinica	216
§ 102. Zadaci dinamike za slobodnu i neslobodnu materijalnu tačku	218
§ 103. Rešavanje prvog zadatka dinamike (određivanje sile kada je poznato kretanje)	218
Glava XVII. Diferencijalne jednačine kretanja tačke i njihovo integriranje	220
§ 104. Pravolinijsko kretanje tačke	220
§ 105. Rešavanje zadataka	223
§ 106*. Padanje tela u otpornoj sredini (u vazduhu)	228
§ 107. Krivolinijsko kretanje tačke	230
§ 108. Kretanje tačke izbačene pod izvesnim uglom prema horizontu u homogenom polju teže	232
Glava XVIII. Opšti zakoni dinamike tačke	235
§ 109. Količina kretanja i kinetička energija tačke	235
§ 110. Impuls sile	236

§ 111.	Zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja tačke	237
§ 112.	Rađ sile. Snaga	238
§ 113.	Primeri za izračunavanje rada	241
§ 114.	Zakon o promeni (priraštaju) kinetičke energije tačke	243
§ 115.	Rešavanje zadataka	244
§ 116.	Zakon o promeni momenta količine kretanja (zakon o zamahu — zakon momenata)	250
Glava XIX.	Prinudno kretanje tačke i Dalamberov princip	254
§ 117.	Jednačine kretanja tačke po datoj nepomičnoj krivoj	254
§ 118.	Određivanje reakcija veza	256
§ 119.	Dalamberov princip	258
Glava XX.	Relativno kretanje tačke	262
§ 120.	Jednačine relativnog kretanja i relativnog mirovanja tačke	262
§ 121.	Uticaj obrtanja Zemlje na ravnotežu i kretanje tela	265
§ 122*.	Skretanje tačke koja pada usled obrtanja Zemlje	268
Glava XXI.	Oscilatorno kretanje tačke	271
§ 123.	Slobodne harmonijske oscilacije	271
§ 124.	Matematičko klatno	275
§ 125*.	Prigušene oscilacije	276
§ 126.	Prinudne oscilacije. Rezonanca	279
Glava XXII.	Kretanje tela u polju dejstva Zemljine teže	287
§ 127*.	Kretanje materijalne tačke izbačene pod uglom prema horizontu u polju dejstva Zemljine teže (Zemljinog privlačenja)	287
§ 128*.	Veštački Zemljini sateliti (sputnici). Eliptične putanje	292

ČETVRTI DEO

DINAMIKA SISTEMA I KRUTOG TELA

Glava XXIII.	Uvod u dinamiku sistema. Momenti inercije krutog tela	299
§ 129.	Mehanički sistem (sistem materijalnih tačaka). Unutrašnje i spoljašnje sile	299
§ 130.	Masa sistema. Središte (centar) sistema materijalnih tačaka	300
§ 131.	Moment inercije tela za osu. Poluprečnik inercije	301
§ 132.	Moment inercije nekih homogenih tela	302
§ 133.	Moment inercije tela za paralelne ose	304
Glava XXIV.	Zakon o kretanju središta masa sistema	306
§ 134.	Diferencijalne jednačine kretanja sistema	306
§ 135.	Zakon o kretanju središta masa	307
§ 136.	Zakon o održanju kretanja središta masa	308
§ 137.	Rešavanje zadataka	310
Glava XXV.	Zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja sistema	313
§ 138.	Količine kretanja sistema	313
§ 139.	Zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja sistema	314
§ 140.	Zakon o održanju količine kretanja sistema	315
§ 141.	Rešavanje zadataka	316
§ 142*.	Telo promenljive mase. Kretanje raketa	318
Glava XXVI.	Zakon o promeni momenta količine kretanja sistema	322
§ 143.	Glavni moment količina kretanja sistema (zamah)	322
§ 144.	Zakon o promeni glavnog momenta količina kretanja sistema (zakon momenata)	323
§ 145.	Zakon o održanju glavnog momenta količina kretanja (zamaha)	324
§ 146.	Rešavanje zadataka	326
Glava XXVII.	Zakon o priraštaju kinetičke energije sistema	329
§ 147.	Kinetička energija sistema	329
§ 148.	Zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije sistema	333

§ 149. Neki slučajevi izračunavanja rada	335
§ 150. Rešavanje zadataka	337
§ 151. Polje sile. Pojam o potencijalnoj energiji	341
§ 152. Zakon o održanju mehaničke energije	343
Glava XXVIII. Neki slučajevi kretanja krutog tela	344
§ 153. Obrtno kretanje krutog tela	344
§ 154. Fizičko klatno	346
§ 155. Eksperimentalno određivanje momenata inercije	348
§ 156. Ravno kretanje krutog tela	348
§ 157*. Približna teorija žiroskopskih pojava	354
Glava XXIX. Dalamberov princip. Dinamički pritisci na osu tela koje se obrće	359
§ 158. Dalamberov princip za sistem	359
§ 159. Glavni vektor i glavni moment sile inercije krutog tela	360
§ 160. Rešavanje zadataka	361
§ 161*. Dinamički pritisci na osu tela koje se obrće	365
§ 162*. Glavne ose inercije tela. Dinamičko uravnotežavanje masa	367
Glava XXX. Princip mogućnih pomeranja i opšta jednačina dinamike	371
§ 163. Mogućna (virtualna) pomeranja sistema. Broj stepena slobode kretanja	371
§ 164. Idealne veze	372
§ 165. Princip mogućnih (virtualnih) pomeranja	373
§ 166. Rešavanje zadataka	374
§ 167. Opšta jednačina dinamike	378
Glava XXXI. Teorija udara	382
§ 168. Osnovna jednačina teorije udara	382
§ 169. Opšti zakoni teorije udara	383
§ 170. Koeficijent uspostavljanja pri udaru	385
§ 171. Udar tela o nepomičnu pregradu	386
§ 172. Upravni centralni sudar dvaju tela (sudar kugli)	388
§ 173. Gubitak kinetičke energije pri apsolutno neelastičnom sudaru dvaju tela. Teorema Karno	390
§ 174*. Udar po telu koje se obrće	391
Registar imena	395
Registar pojmova	397

PREDGOVOR AUTORA

Ovaj kurs teorijske mehanike namenjen je, pre svega, redovnim i vanrednim studentima onih tehničkih fakulteta koji proučavaju mehaniku po skraćenom programu. Kako ti programi mogu da budu veoma različiti, to se pri izboru i izlaganju materije vodilo računa, pre svega, o tome, da kurs predstavlja celinu i da da predstavu o osnovnim metodama mehanike, čije je znanje neophodno inženjeru, kao i oblastima primene te nauke. Uzeto je u obzir i to da se udžbenikom mogu koristiti, kako oni koji mehaniku izučavaju po skraćenom programu, tako i oni koji je izučavaju po znatno širem programu.

Predstavu o materiji kursa daje Sadržaj. Mada je kurs kratak, ipak su u njemu razmotreni u vrlo malom opsegu i takvi problemi kao što su kretanje tela u polju sile Zemljine teže (veštački sateliti — sputnici i eliptične putanje), kretanje tela promenljive mase (kretanje raketa), elementarna teorija žiroskopskih pojava i drugo. Ovi problemi vrlo su aktuelni u naše doba, i moraju imati koliko-toliko mesta u programima čak i vrlo kratkih kurseva.

Pri formiranju kursa pošlo se od dubokog ubeđenja, potvrđenog višegodišnjom praksom, da u udžbeniku, a naročito kratkom, treba uvek ići od posebnog ka opštem. Zato u udžbeniku izlaganju statike u prostoru prethodi statika u ravni, dinamici sistema prethodi dinamika tačke, proučavanju krivolinijskog kretanja prethodi proučavanje pravolinijskog kretanja, itd. Ovaj put omogućuje učenicima da brže i bolje usvoje materiju, a osim toga sam proces učenja čini očiglednijim i postupnijim.

Pri izlaganju materije u knjizi je pored geometrijske i analitičke metode korišćena kao osnovna, opšte priznata u današnje doba, vektorska metoda, koja ima ne-sumljivo čitav niz preimućstava. Međutim, uglavnom su primenjivane one vektorske operacije, koje su, po svom karakteru, analogne odgovarajućim skalarnim operacijama i za čije usvajanje nije potrebno poznavanje mnogih novih pojmova.

Mnogo prostora u udžbeniku dato je primerima i metodama rešavanja zadataka. Ovoj materiji posvećeno je više od jedne trećine cele knjige; pri tome se naročito vodilo računa o tome da se objasni suština odgovarajućih mehaničkih pojava i da se prouče osnovni tipovi zadataka, koji su rešavani raznim metodama koje su izložene u knjizi. Rešavanje zadataka praćeno je komentarima, koji treba da pomognu studentima u njihovom samostalnom radu pri proučavanju kursa. U tom smislu ova knjiga može da bude od koristi studentima svih tehničkih struka, a naročito vanrednim studentima.

Pri korišćenju knjige treba imati u vidu da su zvezdicama označeni oni paragrafi ili odeljci pojedinih paragrafa, koji, u slučaju potrebe, mogu u potpunosti da se izostave, a da to ne ometa razumevanje čitavog ostalog materijala; međutim, ti paragrafi (odeljci) mogu biti međusobno povezani, tako, da se u jednim citiraju obrasci izvedeni u drugim. Numerisanje formula u svakom od četiri dela je neprekidno i pri pozivanju na formule iz istog odeljka naznačen je samo njihov broj; međutim, pri pozivanju na formule iz drugih odeljaka dat je pored broja formule još i broj paragrafa.

Autor izražava svoju zahvalnost F. R. Gantmahu, A. J. Išljinskom i G. N. Svešnikovu, na ukazanim, vrlo korisnim, savetima, koji su prihvaćeni pri konačnom redigovanju teksta. Autor izražava takođe zahvalnost svim svojim kolegama na pažnji prema ovom radu i za sve primedbe učinjene pri pregledu rukopisa.

Autor moli sve one, koji bi imali posle čitanja ove knjige neke kritičke primedbe i savete, da mu ih dostave na adresu izdavačkog preduzeća.

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U drugom nepromenjenom (stereotipnom) izdanju »Kratkog kursa teorijske mehanike« unete su samo neznatne izmene i ponegde nešto preciznije definicije, a takođe su ispravljene i primećene štamparske greške.

Pri unošenju ispravki uzete su u obzir kritičke primedbe dobijene od čitalaca. Svima onima koji su učinili ove primedbe autor duguje svoju duboku zahvalnost.

PREDGOVOR PREVODIOCA

U bogatoj ruskoj literaturi udžbenik S. M. Targa »Kratak kurs teorijske mehanike« zauzima posebno mesto. Njegove odlike su višestruke. Pre svega, retko je u kom udžbeniku ove vrste, na tako malo prostora, tako koncizno, tako jasno i sa tako jednostavnim matematičkim aparatom, rečeno toliko mnogo, koliko u ovom udžbeniku. Tom prilikom, po mišljenju prevodioca, upravo briljantno je objašnjena suština mehaničkih pojava i svih načela na kojima počiva mehanika. Dalja odlika ovog udžbenika sastoji se u tome što je velika pažnja obraćena na metodologiju rešavanja zadataka, što se, takođe, vrlo retko može naći, i u takvom obimu, u postojećoj literaturi. Najzad, vrlo pažljivo odabranih 169 zadataka, detaljno urađenih i praćenih majstorskim komentarima i analizama, čine posebnu vrednost ovog udžbenika, jer primena zakona i principa mehanike, pri rešavanju konkretnih zadataka, pričinjava onima koji je izučavaju najveću teškoću.

U jeku reforme višeg školstva u našoj zemlji i prelaza na sistem višestepenog studiranja, ovaj udžbenik će, bez sumnje, moći da nađe višestruku upotrebu. U prvom redu on predstavlja vrlo pogodan udžbenik za nastavu mehanike na prvom stepenu svih tehničkih fakulteta, a takođe i na Višim tehničkim školama, mada je on pisan tako, da može da posluži kao udžbenik i na drugom stepenu na onim tehničkim fakultetima, koji izučavaju mehaniku po skraćenom programu. Najzad, s obzirom na iznete odlike ovog udžbenika, on će moći, takođe, vrlo dobro da posluži i svim vanrednim studentima svih tehničkih fakulteta, tj. svima onima koji nisu u mogućnosti da se koriste redovnom i potpunom nastavom iz ove oblasti.

Pri prevodenju ovog dela sve ruske oznake zamenjene su našim uobičajenim oznakama, koje se upotrebljavaju na domaćim mašinskim fakultetima. Tu i tamo, doduše vrlo retko, dodata je i po koja rečenica, koje, po mišljenju prevodioca, doprinose boljem razumevanju i preciznijem definisanju odgovarajuće materije. Učinjeno je sve da udžbenik bude što pregledniji i lakši za upotrebu. U tom cilju sve važnije formule i obrasci su uokvireni, svi naslovi paragrafa su izdvojeni i istaknuti, izlaganje materije u pojedinim glavama počinje na posebnim stranama, itd.

Prevodilac smatra za svoju naročitu dužnost da oda zahvalnost na ovom mestu svima onima koji su u bilo kom vidu doprineli da ovo delo postane dostupno našim čitaocima. U prvom redu oдаje zahvalnost Izdavačkom preduzeću »Građevinska knjiga«, koje je našlo razumevanja da u svoj izdavački plan stavi i prevodenje ovog udžbenika. Ne manju zahvalnost duguje stručnom redaktoru ove knjige dr Konstantinu Voronjecu, koji je uložio vrlo mnogo truda da ovaj prevod bude što bolji. Njegove dragocene primedbe i saveti doprineli su mnogo kvalitetu prevoda ovog

udžbenika. Isto tako, prevodilac duguje ne manju zahvalnost i ing Milanu Vrečku, koji je pristao da bude korektor ove knjige. Tokom rada na korigovanju ovog dela njegovi stručni saveti daleko su prešli okvire rada jednog korektora. Najzad, potrebno je odati zahvalnost i radnom kolektivu Grafičke škole sa praktičnom obukom, koji je uložio mnogo napora da sa vrlo skromnim grafičkim sredstvima, koja su mu stajala na raspolaganju, složi ovaj vrlo težak slog.

Predajući ovaj prevod našoj javnosti i našim čitaocima, duboko uverenje je svih onih koji su sarađivali na ovom poslu da će ovaj udžbenik dati svoj doprinos izučavanju mehanike i izgradnji nastave iz ove oblasti u našoj zemlji. U isto vreme oni su svesni da ovaj prevod možda ima i nedostataka. Iz tog razloga umoljavaju se sve kolege po struci i svi čitaoci da sve svoje kritičke primedbe i savete, koje budu imali posle čitanja ovog prevoda, dostave prevodiocu.

Beograd, 22. maja 1962. god.

Lj. B. Radosavljević

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

Sama činjenica da je za godinu dana rasprodato prvo izdanje ovog udžbenika i da je nastala potreba da se izda drugo izdanje, svedoči da je ovaj prevod brzo našao svoje mesto u udžbeničkoj literaturi u našem sistemu školstva.

Pri pripremanju rukopisa za drugo izdanje učinjeno je sve da udžbenik u svakom pogledu bude što bolji. Čitav tekst je ponovo pregledan i ispravljen. Unete su i sve prerađene koje je učinio sam autor u novom ruskom izdanju. Ispravljene su i sve primećene štamparske greške, čiji broj u prvom izdanju nije bio mali. Sve slike su zamenjene novim tehnički bolje urađenim slikama. Radi lakše upotrebe udžbenika pridodat je ovom prilikom registar pojmova i imena. S obzirom na nove zakonske propise, koji su stupili na snagu u našoj zemlji donošenjem Zakona o merilima i jedinicama i merilima, u ovom izdanju upotrebljavaju se jedinice koje propisuje ovaj Zakon. Najzad, novo izdanje je tehnički daleko bolje urađeno u štampariji »Minerva« iz Subotice, koja raspolaže kompletnim grafičkim sredstvima.

Smatram za svoju dužnost da se na ovaj način zahvalim svim kolegama i saradnicima na kritičkim primedbama i primećenim štamparskim greškama u prvom izdanju. Posebnu zahvalnost dugujem ing Branku Vojnoviću, višem predavaču Mašinskog fakulteta Univerziteta u Sarajevu, koji nije žalio truda da mi svesrdno pomogne pri pripremanju rukopisa za drugo izdanje ovog prevoda.

Beograd, avgusta 1963. god.

Lj. B. Radosavljević

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Ovo izdanje se ne razlikuje od prethodnog, s tim što su samo izvršene ispravke zapaženih štamparskih grešaka u drugom izdanju.

Beograd, oktobra 1967. god.

Lj. B. Radosavljević

UVOD

Razvitak savremene tehnike postavlja pred inženjere raznovrsne probleme, koji su vezani za proračun različitih konstrukcija (građevina, mostova, kanala, brana, itd.), zatim za projektovanje, proizvodnju i eksploataciju različitih mašina, mehanizama, motora, a posebno takvih objekata, kao što su automobili, lokomotive, morski i rečni brodovi, avioni, rakete, predmeti naoružanja i slično. Bez obzira na raznorodnost svih tih problema, njihovo rešavanje, u izvesnoj fazi, počiva na nekoliko opštih principa i ima zajedničku naučnu bazu. Ovo se objašnjava time što u svim pomenutim problemima značajno mesto zauzimaju oni problemi kod kojih treba da se prouče zakoni kretanja ili ravnoteže ovih ili onih materijalnih tela.

Nauka o opštim zakonima kretanja i ravnoteže materijalnih tela, kao i o uzajamnim dejstvima, koja tom prilikom nastaju, između materijalnih tela, zove se teorijska mehanika. Teorijska mehanika predstavlja jednu od naučnih osnova savremenih tehničkih disciplina.*

Pod kretanjem u mehanici podrazumevamo promenu položaja, koja se vrši tokom vremena, jednog materijalnog tela u odnosu na drugo materijalno telo u prostoru. Mehaničkim uzajamnim dejstvom između materijalnih tela naziva se takav oblik uzajamnog dejstva koji ima za posledicu promenu stanja kretanja posmatranih materijalnih tela ili pak promenu njihovog oblika (deformaciju). Velicina koja predstavlja količinsku meru uzajamnog dejstva između materijalnih tela zove se u mehanici *sila*.

* Mehanikom se u širem smislu te reči naziva nauka koja je posvećena rešavanju bilo kojih zadataka koji su vezani za proučavanje kretanja ili ravnoteže ovih ili onih materijalnih tela, kao i uzajamnim dejstvima, koja tom prilikom nastaju, između materijalnih tela. Teorijska mehanika predstavlja deo mehanike u kome se proučavaju *opšti zakoni* kretanja i uzajamnih dejstava materijalnih tela, tj. takvi zakoni, koji, na primer, važe za kretanje Zemlje oko Sunca, za ispaljivanje raketa i artiljerijskog zrna, itd. Drugi deo mehanike sačinjavaju različite opšte i specijalne tehničke discipline posvećene projektovanju i proračunu konkretnih konstrukcija, motora, mehanizama i mašina ili njihovih delova (detalja). Sve te tehničke discipline baziraju na zakonima i metodama teorijske mehanike.

Osnovni zadatak teorijske mehanike sastoji se u proučavanju opštih zakona kretanja i ravnoteže materijalnih tela pod dejstvom sila koje na njih deluju.

Prema karakteru problema koji se proučavaju u teorijskoj mehanici obično se usvaja njena podela na tri odvojene discipline: *Statiku, Kinematiku i Dinamiku*.

Statika proučava zakone slaganja sila i uslove ravnoteže materijalnih tela pod dejstvom sila.

Kinematika proučava opšta geometrijska svojstva kretanja tela.

Dinamika proučava zakone kretanja materijalnih tela pod dejstvom sila.

Prema svojstvima materije koju proučava teorijska mehanika se deli na:

a) *mehaniku materijalne tačke i sistema materijalnih tačaka*, tj. takvih tela čije se dimenzije pri proučavanju njihovih kretanja (ili pak pri razmatranju njihove ravnoteže) mogu da zanemare*;

b) *mehaniku krutog tela*, tj. takvih tela čije se deformacije (promena oblika) pri proučavanju njihovih kretanja (ili pak pri proučavanju njihove ravnoteže) mogu da zanemare;

c) *mehaniku tela promenljive mase*, tj. takvih tela čija se masa u toku vremena menja;

d) *mehaniku deformabilnih tela*, tj. takvih tela čiji se oblik i zapremina pri kretanju (ili ravnoteži) menja (*teorija elastičnosti i teorija plastičnosti*);

e) *mehaniku tečnosti (hidromehanika)*, i

f) *mehaniku gasova (aeromehanika i gasna dinamika)*.

U opštem kursu teorijske mehanike obično se proučava samo mehanika materijalne tačke i krutog tela, kao i opšti zakoni kretanja sistema materijalnih tačaka.

Teorijska mehanika pripada klasi prirodnih nauka, tj. nauka o zbivanjima u prirodi. Ona počiva na zakonima koji proističu iz iskustva, a koji se odnose na određenu klasu prirodnih pojava vezanih za kretanje materijalnih tela. Uloga i značaj teorijske mehanike sastoji se ne samo u tome što ona predstavlja naučnu bazu mnogih oblasti savremene tehnike, već i u tome što njeni zakoni i metode omogućuju da se prouči i objasni čitav niz važnih pojava u svetu koji nas okružuje. Time ona doprinosi daljem napretku i razvoju prirodnih nauka u celini, a takode i izgradnji pravilnog materijalističkog posmatranja sveta.

Pojava i razvitak mehanike**, kao nauke, nerazdvojno je vezan za istorijski razvoj proizvodnih snaga društva, i za nivo proizvodnje i tehnike na svakoj etapi njegovog razvoja.

U drevno doba, kada su se zahtevi proizvodnje svodili uglavnom na zadovoljenje potreba građevinske tehnike, počela je da se razvija nauka o takozvanim

* Primenba prevodioca. Kod nas se pojam materijalne tačke strožije definiše i pod materijalnom tačkom se podrazumeva tačka koja zastupa translatorno pokretno kruto telo određene mase.

**Termin »mehanika« prvi put se pojavio u delima jednog od najistaknutijih filozofa stare ere Aristotela (384—322. pre naše ere) i potiče od grčke reči *μηχανή*, koja u savremenom smislu znači »konstrukcija«, »mašina«, »pronazak«.

prostim mašinama (kotur, vratilo, poluga, strma ravan) i opšta nauka o ravnoteži tela (statika). Osnovna načela statike nalaze se već u delima jednog od najvećih naučnika stare ere Arhimeda (287—212. pre naše ere).

- Razvoj dinamike započeo je znatno kasnije. U XV—XVI veku pojava i razvoj buržoaskih odnosa u zemljama zapadne i centralne Evrope, poslužili su kao podsticaj za značajan uspon različitih zanata, trgovine, moreplovstva i nauke o ratovanju (pojava vatrenog oružja), kao i za važna astronomska otkrića. Sve je to omogućilo da se prikupe velike količine materijala (činjenica) iz iskustva, čija je sistematizacija i uopštavanje, izvršena u XVII veku, dovela do otkrića zakona dinamike. Glavna zasluga za stvaranje (formulisanje) osnova dinamike pripada genijalnim istraživačima Galileu Galileju (1564—1642) i Isaku Njutnu (1643—1727). U Njutnovom delu »Matematički osnovi prirodne filozofije«, koje je izdato 1687. god., bili su izloženi u sistemskoj formi osnovni zakoni takozvane klasične mehanike (Njutnovi zakoni). Docnije su ti zakoni dugim iskustvom provereni i potvrđeni u procesu opšte društveno-proizvodne prakse čovečanstva. Ovo omogućuje da naša saznanja u oblasti mehanike, koja počivaju na Njutnovim zakonima, smatramo vrlo pouzdanim saznanjima na koja inženjer može smelo da se osloni u svojoj praktičnoj delatnosti.*

U XVIII veku započeo je u mehanici intenzivan razvoj analitičkih metoda tj. metoda koje su zasnovane na primeni diferencijalnog i integralnog računa. Metode za rešavanje zadataka dinamike tačke i krutog tela postavljanjem i integriranjem odgovarajućih diferencijalnih jednačina razradio je veliki matematičar i mehaničar Leonard Ojler (1707—1783). Od drugih istraživanja u ovoj oblasti najveći značaj za razvitak mehanike imali su radovi istaknutih francuskih naučnika — Ž. Dalamberta (1717—1783), koji je formulisao svoj poznati princip za rešavanje zadataka iz dinamike, i Ž. Lagranža (1736—1813), koji je razradio opštu analitičku metodu za rešavanje zadataka iz dinamike na osnovu Dalamberovog principa i principa virtualnih pomeranja. U današnje doba analitičke metode predstavljaju osnovne metode za rešavanje zadataka u dinamici.

Kinematika, kao posebni odeljak mehanike, izdvojila se tek u XIX veku, pod uticajem zahteva koje je postavljao razvoj mašinske tehnike. U današnje doba kinematika ima veliki samostalan značaj pri proučavanju kretanja mehanizama i mašina.

U Rusiji su veliki uticaj na razvitak prvih istraživanja u oblasti mehanike imali radovi genijalnog naučnika i mislioca M. V. Lomonosova (1711—1765), a takođe i stvaralaštvo L. Ojlera, koji je dugo vremena živio i radio u Peterburgu (Lenjingradu). Od mnogobrojnih domaćih (ruskih) naučnika, koji su dali značajan dopri-

* Najnoviji razvitak nauke je pokazao da je pri brzinama, koje su bliske brzini svetlosti, kretanje tela podvrgnuto zakonima mehanike teorije relativiteta, dok je kretanje mikrodelića (elektrona, pozitrona i dr.) formulisano zakonima kvantne mehanike. Ova otkrića su jednovremeno precizirala oblast primene klasične mehanike i potvrdila pouzdanost njenih zakona koji se odnose na kretanja svih tela, koja se razlikuju od mikrodelića, a pri brzinama, koje nisu bliske brzini svetlosti, tj. na kretanja onih tela, koja su imala i imaju ogroman praktični značaj u tehnici i nebeskoj mehanici.

nos razvitku različitih oblasti teorijske mehanike, treba, pre svega, pomenuti: M. V. Ostrogradskog (1801—1861), kome pripada niz važnih proučavanja analitičkih metoda za rešavanje zadataka dinamike; P. L. Čebiševa (1821—1894), koji je dao nov pravac u proučavanju mehanizama; S. V. Koyalevsku (1850—1891), koja je rešila jedan od najtežih problema dinamike krutog tela; A. M. Ljapunova (1856—1918), koji je razradio nove metode za proučavanje stabilnosti kretanja; I. V. Meščerskog (1859—1935), koji je postavio osnove mehanike promenljive mase; K. E. Ciolkovskog (1857—1935), koji je dao niz fundamentalnih otkrića u teoriji raketnog kretanja; A. N. Krilova (1863—1945), koji je razradio teoriju broda i mnogo doprineo razvitku teorije žiroskopskih pribora.

Veliki značaj za najnovija istraživanja u mehanici imali su radovi »oca ruske avijacije« N. E. Žukovskog (1847—1921) i njegovog bliskog učenika S. A. Čapljigina (1869—1942). Karakteristična crta u stvaralaštvu N. E. Žukovskog bila je primena metoda mehanike na rešavanje aktuelnih tehničkih zadataka. Tome cilju, pod uticajem Žukovskog, usmerena je i nastava teorijske mehanike u višim tehničkim školama u našoj zemlji (SSSR-u)

Zadatak neprekidnog razvoja i usavršavanja socijalističke proizvodnje, koji se u naše doba postavlja pred domaću (rusku) nauku i tehniku, a takođe i zadatak unošenja savremene tehnike u proizvodnju, zahteva dalju i širu izgradnju inženjerskih kadrova i širenje teorijske baze njihovih znanja. Izvesnu ulogu pri rešavanju ovog zadatka ima i proučavanje jednog od naučnih osnova savremene tehnike — teorijske mehanike.

PRVI DEO

STATIKA KRUTOG TELA

OSNOVNI POJMOVI I AKSIOME STATIKE

§ 1. Predmet statike

Statikom se naziva deo mehanike u kome se proučavaju zakoni slaganja sila i uslovi ravnoteže materijalnih tela na koja deluju sile.

Pod ravnotežom podrazumevaćemo stanje mirovanja tela u odnosu na druga materijalna tela. Ako telo u odnosu na koje posmatramo ravnotežu može da se smatra nepokretnim, onda se ravnoteža uslovno naziva apsolutna, a u protivnom slučaju relativna. U statici ćemo proučavati samo tzv. apsolutnu ravnotežu tela. Pri praktičnim inženjerskim proračunima ravnoteža u odnosu na Zemlju, ili pak u odnosu na tela koja su čvrsto vezana za Zemlju, može se smatrati apsolutnom. Ova konvencija biće obrazložena u dinamici, gde se pojam o apsolutnoj ravnoteži može definisati daleko strožije. Tamo će takođe biti proučen i problem o relativnoj ravnoteži tela.

Uslovi ravnoteže tela suštinski zavise od toga da li je telo u čvrstom, tečnom ili gasovitom agregatnom stanju. Ravnoteža tečnih i gasovitih tela proučava se u kursovima hidrostatike i aerostatike. U opštem kursu mehanike proučavaju se obično samo problemi o ravnoteži krutih tela.

Sva tela u prirodi pod uticajem spoljašnjih sila menjaju u većoj ili manjoj meri svoj oblik i zapreminu (deformišu se). Veličina tih deformacija zavisi od materijala tela, od njegovih geometrijskih oblika i dimenzija, a takođe i od sila (opterećenja) koja deluju na tela. Da bi se obezbedila trajnost različitih inženjerskih konstrukcija biraju se dimenzije pojedinih delova, a takođe i materijal od koga se oni izrađuju tako da njihove deformacije pri očekivanom opterećenju budu male (nezatne).^{*} Iz tog razloga, pri proučavanju opštih uslova ravnoteže tela, potpuno je dopušteno da se zanemare male deformacije odgovarajućih tela i da se ta tela posmatraju kao nedeformabilna ili apsolutno kruta. Pod *apsolutno krutim telom* podrazumevamo takvo telo kod koga rastojanje između dve bilo koje njegove tačke ostaje uvek nepromenjeno. U protivnom slučaju, ako se to rastojanje menja, telo

^{*} Na primer, materijal i dimenzije štapova, koji su sastavni delovi neke konstrukcije, biraju se tako da se pri delovanju opterećenja njihova dužina poveća ili smanji za manje od hiljaditog dela prvobitne dužine. Deformacija ovoga reda je dopuštena pri savijanju, uvijanju, itd.

se zove *čvrsto*. Uбудuće, pri rešavanju raznih problema u statici, smatraćemo da su sva tela apsolutno kruta, i zvaćemo ih kruta tela ili samo kratko tela. Kako će kasnije biti pokazano u § 3 uslovi ravnoteže koji se dobijaju za kruto telo mogu se primeniti ne samo na tela koja se neznatno deformišu, već takođe i na ma kakva deformabilna tela. Na taj način oblast praktične primene statike krutih tela je vrlo široka.

Deformacije tela uzimaju se u obzir pri proračunu raznih delova inženjerskih konstrukcija i mašina. Takvi problemi proučavaju se u kursovima otpornosti materijala i teorije elastičnosti.

Da bi kruto telo pod dejstvom nekog sistema sila bilo u ravnoteži (u miru) potrebno je da te sile zadovoljavaju određene *uslove ravnoteže* datog sistema sila. Iznalaženje tih uslova predstavlja jedan od osnovnih zadataka statike. Međutim, za iznalaženje uslova ravnoteže različitih sistema sila, a takođe i za rešavanje čitavog niza drugih problema u mehanici, neophodno je umeti:

- a) slagati sile koje deluju na kruto telo;
- b) zamenjivati dejstvo jednog sistema sila drugim sistemom sila, i u posebnim slučajevima
- c) svoditi dati sistem sila na prostiji oblik.

Iz tih razloga u statici krutog tela proučavaju se sledeća dva osnovna problema:

1. slaganje sila i svođenje sistema sila koji deluje na kruto telo na prostiji oblik;
2. određivanje uslova ravnoteže sistema sila koji deluje na kruto telo.

Zadaci statike mogu se rešavati ili putem odgovarajućih geometrijskih konstrukcija (geometrijske i grafičke metode), ili pak numeričkim računom (analitička metoda). U ovom kursu proučićemo i jednu i drugu metodu imajući uvek u vidu da geometrijske konstrukcije imaju prvostepenu ulogu pri rešavanju raznih problema u mehanici

§ 2. Sila

Stanje ravnoteže ili kretanja nekog tela zavisi od karaktera uzajamnog dejstva između njega i drugih tela, tj. od pritiska, privlačenja ili odbijanja, koje dato telo podnosi u rezultatu tih uzajamnih dejstava. *Veličina koja predstavlja količinsku meru mehaničkog uzajamnog dejstva između materijalnih tela zove se u mehanici sila.*

Veličine sa kojima ćemo imati posla u mehanici možemo podeliti u dve grupe, i to na:

- a) skalarne (skalare) — koje su potpuno određene svojom bročanom vrednošću, i
- b) vektorske (vektore) — koje su sem bročane vrednosti određene sa još dva podatka: pravcem i smerom u prostoru.

Sila je vektorska veličina. Njeno dejstvo na telo određuje se:

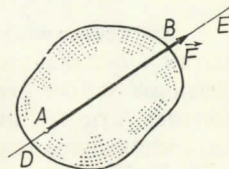
1. bročanom vrednošću, tj. *modulom ili intenzitetom sile*;
2. *pravcem i smerom sile*, i
3. *napadnom tačkom sile*.

Modul — intenzitet sile određuje se upoređivanjem njene veličine sa silom koja je uzeta za jedinicu. U statici za jedinicu sile uzima se sila od jednog *kiloponda* (1 kp)*. Za statičko merenje sile služe pribori poznati iz fizike, koji se zovu dinamometri.

* To je tehnička jedinica za silu. Vidi § 101.

Pravac, smer i napadna tačka sile zavise od karaktera uzajamnog dejstva materijalnih tela i njihovog međusobnog položaja. Na primer, sila teže, koja deluje na bilo koje telo, usmerena je vertikalno naniže. Sile pritiska dveju glatkih kugli, koje su priljubljene jedna uz drugu, usmerene su po normali na površine obe kugle u tačkama njihovog dodira i deluju u tim tačkama.

Grafički se sila prikazuje usmerenim odsečkom (sa strelicom). Dužina* tog odsečka (AB na sl. 1) prikazuje u razmeri intenzitet sile; pravac i smer odsečka prikazuju pravac i smer dejstva sile, a njegov početak (tačka A na sl. 1) obično se poklapa sa napadnom tačkom sile. Ponekad se sila prikazuje i drugojaciše; npr. da u napadnoj tački sile bude vrh (strelica) odsečka koji prikazuje silu (vidi sl. 4, c). Prava DE , duž koje je usmerena sila, zove se *napadna linija sile* ili *linija dejstva sile*. Silu, kao vektorsku veličinu, označavaćemo slovom F latinske azbuke sa strelicom $\vec{F}$. Intenzitet sile označavaćemo ili sa $|\vec{F}|$, ili jednostavno F .



Sl. 1

U daljim izlaganjima *sistemom sila* zvaćemo skup svih sila koje deluju na bilo koje kruto telo. Usvojimo isto tako i sledeće nazive:

1. Telo koje nije neposredno vezano za druga tela i koje iz datog položaja može slobodno da pređe u bilo koji drugi položaj u prostoru zove se *slobodno telo*.
2. Ako slobodno telo pod dejstvom datog sistema sila može da bude u miru, onda se takav sistem sila zove *uravnoteženi sistem sila*.
3. Ako jedan sistem sila, koji deluje na slobodno telo, može da se zameni drugim sistemom sila, a da se pri tome ne izmeni stanje mirovanja ili stanje kretanja krutog tela, onda se za takva dva sistema sila kaže da su *ekvivalentna*.
4. Ako je dati sistem sila ekvivalentan samo jednoj sili, onda se ta sila zove *rezultanta* datog sistema sila. Na taj način rezultanta je takva sila koja sama (jedina) može da zameni dejstvo datog sistema sila na kruto telo.

Sila, koja je po intenzitetu jednaka rezultanti, koja ima isti pravac kao i rezultanta, ali je suprotnog smera, zove se *uravnotežavajuća (suprotna) sila*.

5. Sile koje deluju na kruto telo mogu da se podele na spoljašnje i unutrašnje. *Spoljašnjim silama* nazivaju se sile koje deluju na deliće datog tela od strane drugih materijalnih tela. *Unutrašnjim silama* nazivaju se sile kojima delići jednog istog tela deluju jedni na druge.

6. Sila koja deluje samo u jednoj bilo kojoj tački tela zove se *koncentrisana sila*. Sile koje deluju na sve tačke zapremine tela ili pak dela njegove površine zovu se *kontinualno raspoređene (podeljene) sile*.

Pojam o koncentrisanoj sili je uslovan — konvencionalan, jer je nemoguće postići da sila deluje na telo samo u jednoj tački. Sile koje u mehanici smatramo za koncentrisane predstavljaju u suštini rezultantu nekog sistema kontinualno raspoređenih sila.

* Jedinica za dužinu je metar [m].**

Metar je dužina jednaka 1 650 763, 73 talasnih dužina radijacije u vakuumu koja odgovara prelazu između nivoa $2p_{10}$ i $5d_5$ atoma kriptona 86. To je tzv. »talasni metar«.

Izvedene množine i delovi metra su:

— kilometar [km]	1 km = 1000 m
— decimetar [dm]	1 dm = 0,1 m
— centimetar [cm]	1 cm = 0,01 m
— milimetar [mm]	1 mm = 0,001 m
— mikron [μ m]	1 μ m = 0,000 001 m

** Tekst o jedinicama za dužinu ubacio je prevodilac.

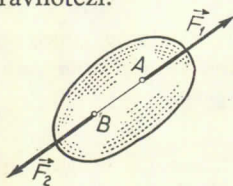
Tako, npr., u mehanici se smatra da sila teže, koja deluje na dato telo, predstavlja rezultantu sila teže njegovih delića. Napadna linija te rezultante prolazi kroz tačku koju nazivamo težište tela*

§ 3. Aksiome statike

Sve teoreme i jednačine statike izvode se iz nekoliko osnovnih postavki, koje se usvajaju bez matematičkih dokazivanja i nazivaju se *aksiomama* ili *principima statike*. Aksiome statike predstavljaju rezultat uopštavanja mnogobrojnih opita i opažanja utvrđenih praktičnim iskustvom pri posmatranju ravnoteže i kretanja tela. Izvestan broj tih aksioma je posledica osnovnih zakona mehanike sa kojima ćemo se upoznati u dinamici.

Aksioma 1. *Ako na slobodno telo deluju dve sile, onda to telo može da se nalazi u ravnoteži, tada i samo tada, ako su te sile jednake po intenzitetu ($F_1 = F_2$) i ako su usmerene duž istog pravca u suprotnim smerovima (sl. 2).*

Aksioma 1. definiše najprostiji sistem uravnoteženih sila, jer kako pokazuju opiti i iskustvo, slobodno telo na koje deluje samo jedna sila ne može da se nalazi u ravnoteži.



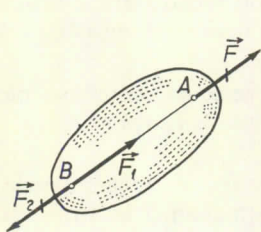
Sl. 2

Aksioma 2. *Dejstvo datog sistema sila na kruto telo ne menja se, ako se datom sistemu sila doda ili oduzme uravnoteženi sistem sila.*

Ova aksioma tvrdi da su dva sistema sila, koja se razlikuju samo za jedan uravnoteženi sistem sila, ekvivalentna jedan drugom.

Posledica prve i druge aksiome. *Napadna tačka sile, koja deluje na kruto telo, može da se prenosi duž napadne linije sile u bilo koju drugu tačku krutog tela.*

Neka, npr., kruto telo napada sila $\vec{F}$ u tački A (sl. 3). Uočimo na napadnoj liniji ove sile bilo koju drugu tačku, npr. tačku B i opteretimo u toj tački dato telo sa dve uravnotežene sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, ali takve da je $\vec{F}_1 = \vec{F}$ i $\vec{F}_2 = -\vec{F}$. Dodavanjem ovih dveju



Sl. 3

uravnoteženih sila, dejstvo sile $\vec{F}$ na kruto telo neće se promeniti. Međutim, sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_2$ prema aksiomi 1, predstavljaju uravnoteženi sistem sila, pa se onda takav sistem sila može ukloniti**. Na kraju, kao što vidimo, na telo deluje samo jedna sila $\vec{F}_1$ koja je jednaka sili $\vec{F}$, ali je njena napadna tačka u tački B.

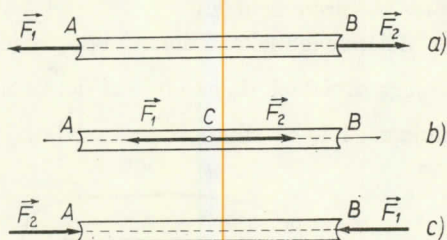
Na taj način može se smatrati da vektor koji predstavlja silu $\vec{F}$ može da napada kruto telo u bilo kojoj tački na napadnoj liniji sile (takav vektor zove se — *klizeći vektor*, ili *vektor vezan za pravu*).

Ovakav jedan zaključak važi samo za sile koje deluju na kruto telo. Pri inženjerskim proračunima takav jedan zaključak može da se iskoristi samo onda kada se ispituje dejstvo spoljašnjih sila na jednu konstrukciju, tj. drugim rečima kada se određuju uslovi ravnoteže cele konstrukcije.

* Problem o određivanju položaja težišta biće proučen u VIII glavi. Učinićemo predhodnu napomenu: ako homogeno telo ima centar (tačku) simetrije (pravougaoni štapić, cilindar, kugla, itd.), onda se težište takvog tela nalazi u njegovom centru simetrije.

** Uklonjene ili prenete sile biće u daljim izlaganjima precrtane na crtežu.

Tako, npr., štap prikazan na sl. 4, a) biće u ravnoteži ako je $F_1 = F_2$. Pri prenošenju napadne tačke obeju sila u bilo koju tačku C štapa (sl. 4, b), ili pak pri prenošenju napadne tačke sile $\vec{F}_1$ u tačku B , a sile $\vec{F}_2$ u tačku A (sl. 4, c) neće se poremetiti ravnoteža štapa. Međutim, dejstvo unutrašnjih sila u svakom od posmatranih slučajeva biće drugojačije. U prvom slučaju je štap pod dejstvom datih sila zategnut; u drugom slučaju uopšte nije napregnut, dok je u trećem slučaju pritisnut*. Prema tome, pri određivanju unutrašnjih sila nije dopušteno da se prenoši napadna tačka sile duž njene napadne linije.



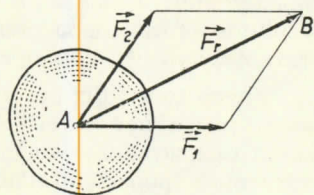
Sl. 4

Aksioma 3 (aksioma o paralelogramu sila). *Dve sile koje napadaju kruto telo u jednoj tački imaju rezultantu prikazanu dijagonalom paralelograma konstruisanog nad datim silama.*

Vektor $\vec{F}_r$ čiji je intenzitet jednak dužini dijagonale paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, čiji se pravac poklapa sa pravcem dijagonale paralelograma i koji je usmeren od tačke A ka tački B (sl. 5) zove se geometrijski zbir vektora $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, tako da je:

$$\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Prema tome, aksioma 3. može da se formuliše i na sledeći način: *rezultanta dveju sila koje napadaju kruto telo u jednoj tački jednaka je geometrijskom (vektorskom) zbiru tih sila sa napadnom tačkom u istoj tački.*



Sl. 5

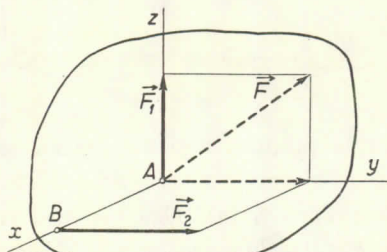
U daljim izlaganjima treba razlikovati pojam sume (zbira) sila i pojam njihove rezultante. Neka, npr.,

na kruto telo deluju sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ sa napadnim tačkama u A i B (sl. 6). Pri iznalaženju sume dveju sila njih možemo prenositi u proizvoljno izabrane tačke. Npr., na sl. 6 sile $\vec{F}$ je suma sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ($\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$), kao dijagonala odgovarajućeg paralelograma. Međutim, sile $\vec{F}$ nije njihova rezultanta, jer nije teško videti da sile $\vec{F}$ ne može da zameni dejstvo sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na kruto telo. Ne samo to, već treba reći da sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ uopšte nemaju rezultantu, kako će to biti pokazano u § 47.

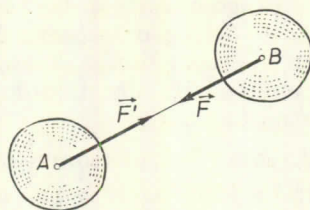
* Da bi štap bio zategnut (ili pritisnut) silom $\vec{F}_1$, potrebno je da se na jedan kraj štapa deluje tom silom, a da se drugi kraj štapa ili pričvrsti kruto, ili pak da se na njega deluje silom $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$, kako je pokazano na sl. 4. Zatežuća (ili pritiskujuća) sile biće u oba slučaja jedna te ista i jednaka F_1 , a ne $2 F_1$, kako se ponekad pogrešno misli.

Aksioma 4. *Dva materijalna tela uvek deluju jedno na drugo silama istih intenziteta, duž istog pravca (napadne linije), ali u suprotnim smerovima (kraće rečeno dejstvo je jednako protivdejstvu).*

Zakon o jednakosti dejstva i protivdejstva je jedan od osnovnih zakona mehanike. Iz njega proizlazi, da ako telo A deluje na telo B silom $\vec{F}$, onda istovremeno i telo B deluje na telo A silom $\vec{F}' = -\vec{F}$ (sl. 7).



Sl. 6



Sl. 7

Međutim, sile $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ ne predstavljaju uravnoteženi sistem sila, jer one deluju na različita tela.

Svojstvo unutrašnjih sila. Prema aksiomi 4. bilo koja dva delića krutog tela deluju jedan na drugi silama istih intenziteta, ali suprotno usmerenih duž iste napadne linije. Kako se pri proučavanju opštih uslova ravnoteže telo može smatrati apsolutno krutim onda prema aksiomi 1., sve unutrašnje sile predstavljaju sistem uravnoteženih sila, koji, opet, prema aksiomi 2., može da se ukloni.

Prema tome, pri postavljanju opštih uslova ravnoteže treba uzimati u obzir samo spoljašnje sile, koje deluju na dato telo, ili pak na datu konstrukciju. U daljim razmatranjima kadgod budemo govorili o silama podrazumevaćemo da se radi samo o spoljašnjim silama (izuzev u izvesnim specijalnim slučajevima kada će to biti naglašeno).

Aksioma 5 (princip ukrućivanja). *Ako se bilo koje deformabilno telo pod dejstvom datog sistema sila nalazi u ravnoteži, onda će ravnoteža da se održi i tada, kada se telo ukruti (postane apsolutno kruto).*

Ova aksioma potpuno je očigledna. Tako npr. jasno je da se ravnoteža jednog lanca neće poremetiti, ako karike iz kojih se on sastoji zavarimo jedne za druge; isto tako, ravnoteža savitljivog konopca neće se poremetiti ako konopac postane kruti krivi štap, itd. Kako na telo koje se nalazi u miru pre i posle ukrućivanja deluje isti sistem sila, to aksioma 5. može da se iskaže i u drugojačijem obliku: *sile, koje u slučaju ravnoteže deluju na neko deformabilno telo, zadovoljavaju iste uslove kao i u slučaju kada deluju na kruto telo; međutim, ti uslovi koji su za deformabilno telo potrebni, ne moraju u isto vreme da budu i dovoljni.*

Tako, npr., za ravnotežu savitljivog konopca na koji deluju dve sile na njegovim krajevima, potrebni su isti uslovi kao i za kruti štap (sile treba da su istih intenziteta i da deluju duž istog pravca — napadne linije u suprotnim smerovima). Međutim, ti uslovi nisu dovoljni. Za ravnotežu konopca potrebno je još da sile budu i zatežuće, tj. usmerene kao na sl. 4, a.

Princip ukrućivanja upotrebljava se vrlo često u inženjerskim proračunima. On omogućuje da se bilo koje deformabilno telo (kaiš, uža, lanac i slično) ili bilo koja pomerljiva konstrukcija, posmatra pri postavljanju uslova ravnoteže, kao kruta,

i da se za ispitivanje ravnoteže takvih tela upotrebe metode i zakoni koji važe u statici krutog tela. Ako uslovi ravnoteže dobiveni tim putem nisu dovoljni za rešavanje posmatranog zadatka, onda se dopunski uslovi ravnoteže dobijaju iz uslova ravnoteže pojedinih izdvojenih delova konstrukcije, ili pak iz posmatranja njihovih deformacija (problemi koji uzimaju u obzir i deformacije, rešavaju se u kursu otpornosti materijala).

§ 4. Veze i njihove reakcije

Po definiciji, telo koje nije vezano za druga tela i koje može slobodno da pređe u bilo koji proizvoljni položaj u prostoru, zove se *slobodno telo* (npr. balon u vazduhu). Telo čije je kretanje u prostoru ometeno bilo kojim drugim telom (preprekom) zove se *vezano (neslobodno) telo*. *Prepreke koje sprečavaju kretanje jednog tela zovu se veze.*

Tako, npr., teret koji leži na stolu predstavlja vezano (neslobodno) telo. Vrata postavljena na šarke takođe su vezano telo. Veze u ovim slučajevima su: sto za teret, koji mu ne dopušta da se kreće vertikalno naniže, dok su za vrata veze šarke, koje im ne dopuštaju da se odvoje od stuba za koji su pričvršćena.

Telo koje pod uticajem datih sila teži da izvrši pomeranje koje ne dopuštaju veze, deluju na vezu silom, koja se zove *pritisak na vezu* ili jednostavno samo *pritisak*. Prema aksiomi 4. i veza deluje na telo silom istog intenziteta i pravca, ali suprotnog smeru. *Sila kojom veza deluje na telo, i koja sprečava ova ili ona (neka) njegova pomeranja zove se reakcija veze (protivdejstvo veze).*

Ubuduće sile koje ne predstavljaju reakcije veze (kao npr., sila teže) zvaćemo *aktivnim silama*. Odlike aktivnih sila sastoje se u tome što njihov intenzitet i pravac ne zavisi neposredno od drugih sila koje deluju na telo. Reakcije veza, pak, razlikuju se od aktivnih sila, koje deluju na telo, po tome, što njihova veličina uvek zavisi od tih sila i unapred nije poznata (ako nikakve aktivne sile ne deluju na telo, onda je reakcija veze jednaka nuli). Da bi se odredile reakcije potrebno je da se reši odgovarajući statički zadatak. *Reakcija veze usmerena je u suprotnom smeru od smeru u kome veza ne dopušta pomeranje tela.* Ako veza jednovremeno ne dopušta pomeranje tela u više pravaca, onda je pravac reakcije veze takođe unapred nepoznat i mora da se odredi rešavanjem odgovarajućeg zadatka.

Određivanje pravilnog pravca i smeru reakcije igra pri rešavanju statičkih zadataka vrlo važnu ulogu. Iz tog razloga razmotrimo detaljno kako su usmerene reakcije za neke osnovne oblike veza (dopunski primeri dati su u § 26).

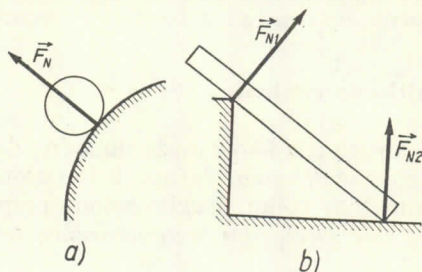
1. Glatka površina (ravan) ili oslonac. Pod glatkom površinom podrazumevamo površinu takvih svojstava da trenje tela, koje se nalazi na njoj, u prvom približenju može da se zanemari. Takva površina sprečava kretanje tela samo u pravcu zajedničke normale na površine dodirnih tela, a u tački njihovog dodira (sl. 8, a)*.

Zato je reakcija $\vec{F}_N$ glatke površine ili glatkog oslonca usmerena po zajedničkoj normalni na površine dodirnih tela, a u tački njihovog dodira, koja je u isto vreme i napadna tačka reakcije. Ako pak jedna od dodirnih površina predstavlja tačku (vidi sl. 8, b) onda je reakcija usmerena po normalni na drugu površinu.

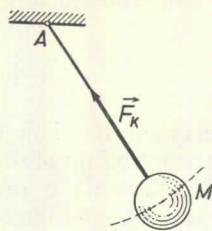
2. Konopac Veza ostvarena u vidu savitljivog neistegljivog konopca (sl. 9) ne dozvoljava telu M da se udalji od tačke vešanja u pravcu AM . Iz tog razloga reakcija konopca $\vec{F}_K$ usmerena je duž samog konopca ka tački vešanja.

* Na slikama 8—11 nisu prikazane sile koje deluju na tela. U slučajevima, prikazanim na sl. 8 i 9, reakcije imaju naznačene pravce i smerove pri bilo kojim datim silama nezavisno od toga da li se pri tome telo nalazi u miru ili se kreće.

3. Cilindrični zglobo (ležište). Ako su dva tela spojena osovnicom kroz otvore na tim telima, onda se takva veza zove šarnir ili cilindrični zglobo; geometrijska osa osovinice zove se osa šarnira. Telo AB vezano šarnirom za oslonac D (sl. 10, a) može slobodno da se obrće oko ose šarnira (u ravni crteža); pri tome kraj A tela ne

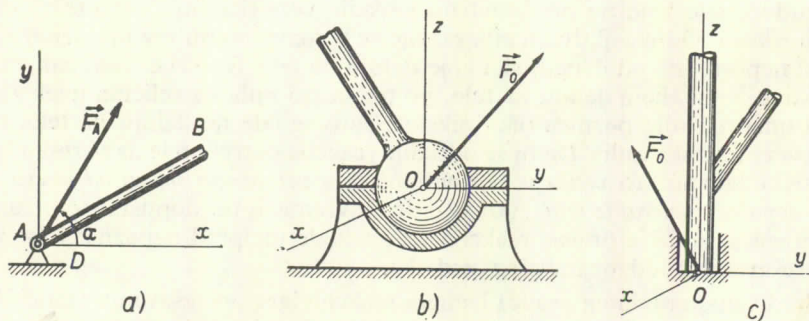


Sl. 8



Sl. 9

može da se pomera ni u kom pravcu normalnom na pravac ose šarnira. Iz tog razloga reakcija $\vec{F}_A$ cilindričnog zglobo može da ima bilo koji pravac u ravni upravnoj na osi šarnira, tj. u ravni Axy . U tom slučaju nije poznat unapred ni intenzitet sile $\vec{F}_A$, a takođe ni njen pravac. U tom slučaju, dakle, za silu $\vec{F}_A$, treba odrediti dve veličine: intenzitet F_A i ugao α .



Sl. 10

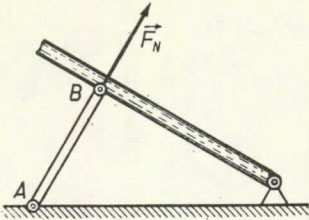
4. Sferni zglobo (ležište) i podupirač. Ovaj oblik veze pričvršćuje neku tačku tela tako da ona ne može da se kreće ni u kom pravcu u prostoru. Primer takve veze je npr. veza kojom se fotoaparat pričvršćuje za stativ (sl. 10, b), ili pak podupirač sa kosnikom (sl. 10, c). Reakcija sfernog zglobo $\vec{F}_O$ ili podupirača može da ima proizvoljan pravac u prostoru. U ovom slučaju, dakle, unapred nije poznat ni intenzitet reakcije F_O , a takođe ni uglovi koje ona zaklapa sa osama x , y , z .

5. Štap. Ako se tanki štap, na čijim krajevima deluju dve sile, nalazi u ravnoteži, onda prema aksiomi 1. te sile moraju da imaju pravac ose štapa (sl. 4, a i 4, b). Prema tome, štap opterećen silama na krajevima, čiju težinu možemo zanemariti prema tim silama, »radi« samo na zatezanje ili pritisak. Ako u bilo kojoj konstrukciji takav štap AB ostvaruje vezu (sl. 11) onda će reakcija štapa $\vec{F}_N$ imati pravac ose štapa*

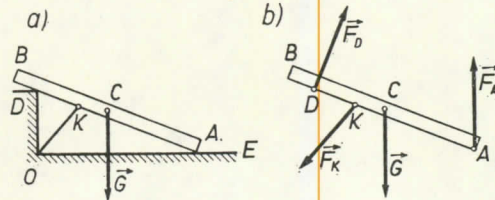
* Ovaj zaključak strogo uzev ima mesta u tom slučaju ako su krajevi štapa pričvršćeni sarnirima — zglobovima. Ali praktično može se smatrati da je reakcija štapa usmerena duž ose štapa u slučajevima kada su krajevi štapa zavareni.

§ 5. Aksioma o vezama

Ravnoteža vezanih (neslobodnih) tela proučava se u statici na osnovu sledeće aksiome: *svako vezano (neslobodno) telo može se posmatrati kao slobodno, ako uklonimo veze i njihov uticaj na telo zamenimo dejstvom reakcija veza.*



Sl. 11



Sl. 12

Tako, npr., štap AB , težine G , na sl. 12, a, čije kretanje sprečavaju površina OE , oslonac D i konopac OK , može se posmatrati kao slobodno telo (sl. 12, b), koje se nalazi u ravnoteži pod dejstvom aktivne sile $\vec{G}$ i reakcija $\vec{F}_A$, $\vec{F}_D$ i $\vec{F}_K$. Intenziteti ovih reakcija mogu se odrediti iz uslova ravnoteže sila koje deluju na telo, koje je sada slobodno. U ovome se sastoji osnovna metoda za rešavanje zadataka statike.

Određivanje reakcija ima taj praktični značaj, što znajući njih, prema aksiomi 4., znamo i pritiske na veze, tj. početne podatke, koji su potrebni za proračun čvrstoće (otpornosti) odgovarajućih delova konstrukcije.

Glava II

SISTEM SUČELJNIH SILA

§ 6. Geometrijski način slaganja sistema sučeljnih sila

Pri proučavanju statike postupno ćemo prelaziti sa prostijih na složenije sisteme sila. Počnimo sa razmatranjem sistema sučeljnih sila. *Sistemom sučeljnih sila naziva se takav sistem sila čije se napadne linije seku u jednoj tački* (vidi sl. 16, a). To je, dakle, sistem sila, koji napada jednu tačku tela. Sistem sučeljnih sila koji deluje na kruto telo može da se zameni njemu ekvivalentnim sistemom sila, koji deluje u jednoj tački (na sl. 16, a u tački A).

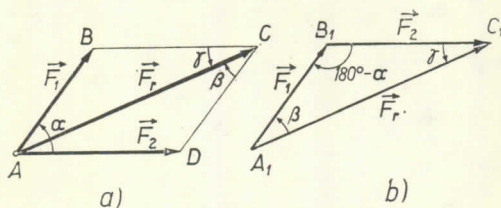
Problem određivanja rezultante sistema sučeljnih sila, svodi se, prema aksiomi 3, na operaciju slaganja tih sila.

1. Slaganje dveju sila. Rezultanta $\vec{F}_r$ dveju sučeljnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ nalazi se na dva načina:

a) po pravilu o paralelogramu sila (sl. 13, a), ili pak

b) konstrukcijom tzv. trougla sila (sl. 13, b), koji u stvari predstavlja polovinu tog paralelograma.

Konstrukcija trougla sila vrši se na sledeći način: iz proizvoljno izabrane tačke



Sl. 13

A_1 nanese se vektor koji predstavlja jednu silu, a iz njegovog kraja B_1 vektor, koji predstavlja drugu silu; kada spojimo tačku A_1 (početak prvog vektora) i tačku C_1 (kraj drugog vektora), dobićemo vektor, koji po pravcu i veličini predstavlja rezultantu $\vec{F}_r$. Ona je usmerena od tačke A_1 ka tački C_1 .

Intenzitet rezultante određujemo iz jednačine koja se dobija primenom kosinusne teoreme

$$F_r^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 F_1 F_2 \cos(180^\circ - \alpha),$$

gde je α ugao između napadnih linija sila. Prema tome, izlazi da je

$$F_r = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos \alpha}. \quad (1)$$

Uglove β i γ , koje rezultanta zaklapa sa svojim komponentama, možemo odrediti korišćenjem sinusne teoreme. Imajući u vidu da je $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha$ dobivamo

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{F_r}{\sin \alpha}. \quad (2)$$

Ukoliko se tačka u kojoj se seku napadne linije sučelnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ nalazi van tela (sl. 14 a) rezultantu tih sila možemo odrediti na taj način što ćemo zamisliti da smo povećali dimenzije tela do veličine koja je na slici označena crtkastim linijama. Posle toga prenosimo sile u tačku O , konstruišemo zatim paralelogram sila i iznalazimo rezultantu $\vec{F}_r$, koja može da se prenese u bilo koju tačku C tela na napadnoj liniji rezultante $\vec{F}$.

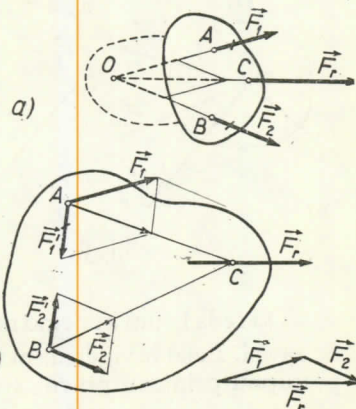
Ako se napadne linije sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ seku van crteža na kome se vrši slaganje tih sila (sl. 14, b), onda tačku kroz koju prolazi rezultanta možemo odrediti na sledeći način. U napadnim tačkama A i B sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ naneseemo dve proizvoljno izabrane uravnotežene sile $\vec{F}'_1$ i $\vec{F}'_2$ ($\vec{F}'_1 = -\vec{F}'_2$) u pravcu AB . Prema aksiomi 2. dejstvo sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ na telo time se ne menja. Ako sada složimo sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}'_1$ i sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}'_2$ po pravilu paralelograma, sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zameničemo drugim ekvivalentnim sistemom sila čije se napadne linije seku u tački C . Kroz tu tačku prolaziće rezultanta $\vec{F}_r$. Intenzitet ovog vektora možemo odrediti iz trougla sila (sl. 14, b).

2. Slaganje tri sile koje ne leže u jednoj ravni. Rezultanta $\vec{F}_r$ tri sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, koje ne leže u jednoj ravni, dobija se kao dijagonala paralelepipeda konstruisanog nad tim silama (*pravilo paralelepipeda*). Da je to zaista tako možemo se uveriti primenjujući postupno pravilo paralelograma (sl. 15).

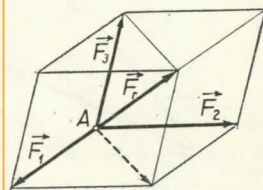
3. Slaganje sistema sila. Postupnom primenom aksiome o paralelogramu sila dolazi se do sledećeg zaključka: *rezultanta proizvoljnog broja sučelnih sila jednaka je njihovom geometrijskom zbiru sa napadnom tačkom u tački u kojoj se seku njihove napadne linije.*

Veličina $\vec{F}_R$ koja je jednaka geometrijskom zbiru svih sila nekog sistema (koji može da bude bilo kakav) zove se *glavni vektor* tog sistema sila. Glavni vektor određuje se ili postupnim slaganjem sila po pravilu paralelograma ili konstrukcijom poligona sila. Drugi način je prostiji i pogodniji. Tako, npr., ako treba da se odredi glavni vektor sistema sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$,

(sl. 16, a), prvo iz proizvoljno izabrane tačke O , naneseemo vektor $\vec{Oa}$, koji u izabranoj razmeri predstavlja silu $\vec{F}_1$; zatim od tačke a naneseemo vektor $\vec{ab}$, koji predstavlja silu

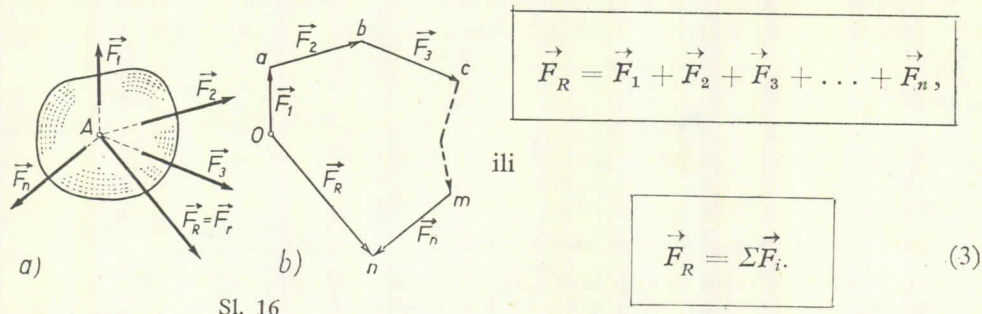


Sl. 14



Sl. 15

$\vec{F}_2$; zatim od tačke b vektor $\vec{bc}$, koji predstavlja silu $\vec{F}_3$, itd.; od kraja m predposlednjeg vektora nanese vektor $\vec{mn}$, koji predstavlja silu $\vec{F}_n$. Ako spojimo početak prvog vektora sa krajem poslednjeg vektora dobićemo vektor $\vec{On} = \vec{F}_R$, koji predstavlja geometrijski zbir, odnosno glavni vektor datog sistema sila:



Sl. 16

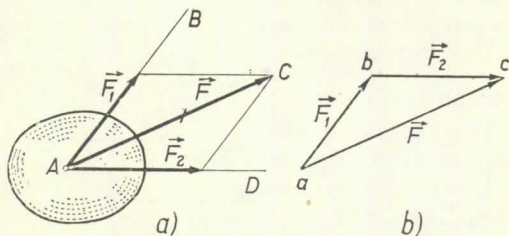
Od reda kojim budemo nanosili sile, intenzitet, pravac i smer glavnog vektora $\vec{F}_R$ ne zavisi. Lako je videti da ovaj način konstrukcije poligona sila predstavlja, u stvari, postupnu primenu pravila trougla sila.

Slika dobivena na sl. 16, b zove se *poligon (plan) sila* ili *vektorski poligon*. Na taj način *geometrijski zbir* ili *glavni vektor sistema sila* dobiva se kao *završna strana poligona konstruisanog od tih sila (pravilo poligona sila)*. Pri konstrukciji poligona sila (vektorskog poligona) treba voditi računa o tome da strelice svih komponentnih vektora treba da budu usmerene u istu stranu (po obimu poligona), dok je strelica vektora $\vec{F}_R$ usmerena u suprotnu stranu.

Ako silu $\vec{F}_R = \vec{F}_r$ određenu pomoću poligona sila nanese u tački A tela (sl. 16, a), onda ona zamenjuje dejstvo svih sila na telo, tj. ona će biti rezultanta datog sistema sila.

§ 7. Razlaganje sila

Razložiti datu silu u nekoliko komponentata znači naći takav sistem od nekoliko sila kome je data sila rezultanta. U opštem slučaju takav zadatak je neodređen i on ima jednoznačno rešenje samo kada se postave dopunski uslovi. Proučimo dva najvažnija posebna slučaja.



Sl. 17

1. Razlaganje sile u dva data pravca. Razložimo datu silu $\vec{F}$ (sl. 17) u dva pravca koji su paralelni pravcima AB i AD (sile i pravci leže u jednoj ravni). Zadatak se svodi na konstrukciju takvog

paralelograma, kome bi dijagonala predstavljala silu $\vec{F}$, a njegove strane treba da budu paralelne pravcima AB i AD . Ovaj zadatak rešavamo na sledeći način. Kroz početak

i kraj sile $\vec{F}$ povlačimo pravce, koji su paralelni pravcima AB i AD . Sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ biće tražene komponente jer je $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}$.

Razlaganje sile može da se izvede i konstrukcijom trougla sile (sl. 17, b). U tom slučaju treba najpre u proizvoljno izabranoj tački a da se nanese sila $\vec{F}$ i kroz njene krajnje tačke da se povuku pravci paralelni pravcima AB i AD do njihovog preseka. Nađene sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ zamenjuju silu $\vec{F}$ ako ih naneseemo u tački A ili bilo kojoj drugoj tački na napadnoj liniji sile $\vec{F}$.

2. Razlaganje sile u tri data pravca. Ako dati pravci ne leže u jednoj ravni, onda je zadatak određen, jer se svodi na konstrukciju takvog paralelepipeda kome dijagonala predstavlja datu silu $\vec{F}$, dok su mu ivice paralelne datim pravcima (vidi sl. 15).

Ostavljamo čitaocu da sam prouči slučaj razlaganja date sile $\vec{F}$ u dve sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje leže u istoj ravni sa silom $\vec{F}$, ako su dati intenziteti sile F_1 i F_2 , pri čemu je $F_1 + F_2 \geq F$. Zadatak ima dva rešenja.

Rešavanje zadataka. Metodu razlaganja sile možemo upotrebiti za određivanje pritiska na veze, koji nastaju dejstvom datih sila. Pri tome, da bismo odredili pritisak na veze, koje čvrsto vezuju telo i čine ga nepomičnim, treba data sila da se razloži u pravce reakcija tih veza, jer prema aksiomi 4. pritisak na vezu i reakcija imaju isti pravac (deluju duž iste napadne linije). Prema tome, da bismo rešili neki zadatak korišćenjem ove metode treba unapred da se znaju pravci odgovarajućih reakcija veza.

Zadatak 1. Štapovi AC i BC vezani su za vertikalni zid i međusobom zglobovima u tačkama A , B i C , pri čemu je $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, a ugao $\sphericalangle ABC = \alpha$ (vidi sl. 18, a). U zglobu C obešen je teret težine G . Zaneamarujući težine štapova, odrediti silu koja pritiskuje štap BC .

Rešenje. Dejstvo sile $\vec{G}$ prenosi se na oba štapa. Njihove reakcije u tom slučaju usmerene su duž štapova. Iz tog razloga da bismo odredili silu koju tražimo naneseemo silu $\vec{G}$ u tačku C i razložimo je u pravce AC i BC . Komponenta $\vec{F}_1$ biće tražena sila. Iz trougla CDE dobijamo

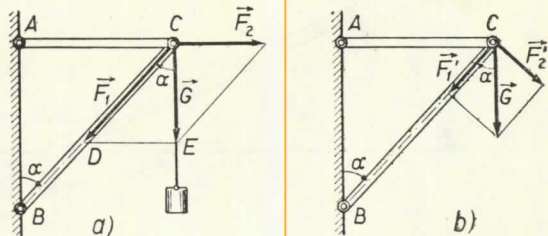
$$F_1 = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Iz istog trougla nalazimo da je štap AC zategnut silom

$$F_2 = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Sa povećanjem ugla α sile u oba štapa se povećavaju i pri uglu α , koji je blizak uglu od 90° , dostižu vrlo velike veličine. Npr., kada je $G = 100$ kp i $\alpha = 85^\circ$, dobijamo da je $F_1 \approx 1150$ kp, a $F_2 \approx 1140$ kp. Da bismo smanjili sile u štapovima potrebno je da se smanji ugao α .

Iz dobijenih rezultata se vidi da u nekim slučajevima i pri delovanju relativno male sile mogu opterećenja u pojedinim delovima konstrukcije da budu vrlo velika (vidi takođe zadatak 2). Ovo se objašnjava time, što se sile slažu i razlažu po pravilu paralelograma, a kod paralelograma dijagonala može da bude mnogo manja od njegovih strana. Prema tome, ako pri rešavanju nekog zadatka dobijemo da je neka reakcija veoma velika u poređenju sa datim silama, to ne mora nikako da znači da smo pri rešavanju zadatka učinili neku grešku.



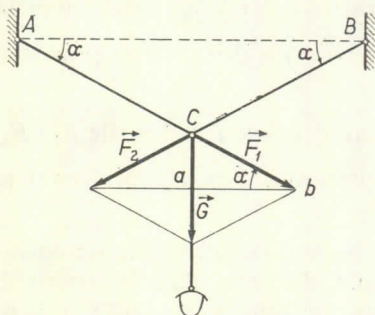
Sl. 18

U zaključku ukažimo na karakterističnu grešku koja se često čini prilikom primene metode razlaganja sile. U zadatku 1. potrebno je da se odredi sila u štapu BC . Nanesimo silu $\vec{G}$ u tačku C (sl. 18, b) i razložimo je u pravac štapa BC i u pravac koji je upravan na njemu. U tom slučaju dobićemo

$$F'_1 = G \cos \alpha, \quad F'_2 = G \sin \alpha.$$

Razlaganje je u ovom slučaju izvršeno ispravno, ali sila $\vec{F}'_1$ nije tražena sila u štapu BC , jer se dejstvo sile $\vec{F}'_2$ ne prenosi u potpunosti samo na štap AC . Sila $\vec{F}'_2$ deluje jednovremeno na oba štapa, pa će, prema tome, izazvati dopunski pritisak na štap BC , koji nije obuhvaćen silom $\vec{F}'_1$.

Navedeni primer pokazuje da data sila mora da se razlaže u pravce traženih reakcija veza, er u protivnom slučaju nećemo dobiti traženo rešenje.



Sl. 19

Zadatak 2. Lampa težine $G = 20$ kp (sl. 19) obešena je o dva konopca AC i BC , koji obrazuju iste uglove $\alpha = 5^\circ$ sa horizontalom. Odrediti kolikom su silom zategnuti konopci.

Rešenje. Nanesimo silu $\vec{G}$ u tačku C i razložimo je u pravce konopaca. Paralelogram sile u datom slučaju biće romb. Njegove dijagonale su međusobom upravne i tačka preseka ih deli na jednake delove. Iz trougla aCb izlazi da je:

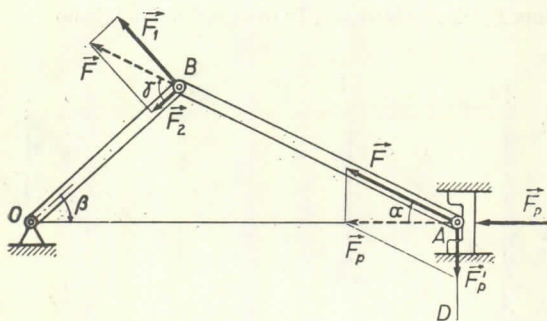
$$\frac{G}{2} = F_1 \sin \alpha,$$

odakle je

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} \frac{G}{\sin \alpha} \approx 115 \text{ kp.}$$

Iz dobijenih rezultata vidimo da se sa smanjivanjem ugla α zatežuće sile u konopcima brzo povećavaju (npr., kada je $\alpha = 1^\circ$, onda je $F_1 \approx 573$ kp.) Ako pokušamo da zategnemo konopac tako da on zauzme horizontalan položaj onda će se u tom položaju on prekinuti jer kada $\alpha \rightarrow 0$, tada $F_1 \rightarrow \infty$.

Zadatak 3. Odrediti obimnu silu u tački B krivaje klipnog mehanizma, koji je prikazan na sl. 20, a takođe i pritisak na osovinu O krivaje, koji nastaje usled dejstva sile $\vec{F}_p$ u tački A klipa, a u položaju koji je određen uglovima α i β . Težinu klipne poluge AB i krivaje OB zanemariti.



Sl. 20

Rešenje. Da bismo odredili tražene sile potrebno je prethodno

da odredimo silu $\vec{F}$, kojom klipna poluga AB deluje na zglobo B . Silu $\vec{F}$ odredićemo razlaganjem sile $\vec{F}_p$ u pravce AB i AD (AD — pravac u kome klip pritiskuje na vodice). Tako dobijamo:

$$F = \frac{F_p}{\cos \alpha}.$$

Nanesimo sada silu $\vec{F}$ u tačku B i razložimo je tako, kako je pokazano na sl. 20. Na taj način odredićemo obimnu silu $\vec{F}_1$ i pritisak $\vec{F}_2$ na osovinu krivaje:

$$F_1 = F \sin \gamma, \quad F_2 = F \cos \gamma.$$

Ugao γ , kao spoljašnji ugao trougla OBA , jednak je $\alpha + \beta$. Prema tome, definitivno dobijamo:

$$F_1 = F_p \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}, \quad F_2 = F_p \frac{\cos(\alpha + \beta)}{\cos \alpha}.$$

Kako je $\alpha + \beta \leq 180^\circ$ i $\alpha < 90^\circ$, to je uvek $F_1 > 0$, tj. sila F_1 je uvek usmerena tako, kako je na slici pokazano. Sila F_2 će biti usmerena od B ka O dotle, dok bude ispunjen uslov $\alpha + \beta < 90^\circ$; kada bude $\alpha + \beta > 90^\circ$ sila F_2 će promeniti smer i delovaće u suprotnom smeru. Za $\alpha + \beta = 90^\circ$ izlazi da je $F_2 = 0$.

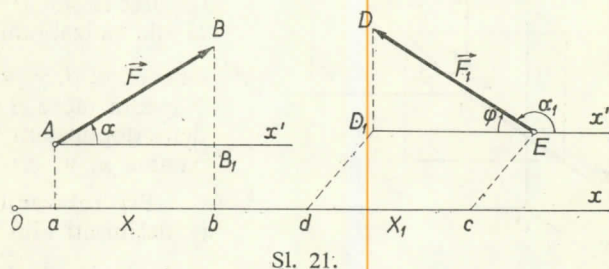
Iz datog primera vidimo da se metodom razlaganja sila možemo koristiti i u onim slučajevima kada sila deluje na tela koja se ne nalaze u ravnoteži. U tom slučaju za određivanje pritiska na vezu, sila treba da se razloži u pravac reakcije veze i u pravac pomeranja napadne tačke date sile (kako je to učinjeno u tački B). Pritisci na veze, određeni na ovaj način, zovu se *statički pritisci*, jer pri njihovom određivanju nismo uzeli u obzir mase, brzine i ubrzanja tela koja se kreću. Praktično rezultate takvog računa možemo koristiti samo u onim slučajevima, kada su brzine i ubrzanja tela koja se kreću mala. Pritisci na veze, koji se određuju vodeći računa o masama, brzinama i ubrzanjima tela koja se kreću, zovu se *dinamički pritisci*. Ovi pritisci se nalaze metodama dinamike (§ 161):

§ 8. Projekcija sile na osu i na ravan

Predimo sada na proučavanje analitičke metode za rešavanje zadataka statike. Ova metoda zasniva se na pojmu projekcije sile na osu.

Projekcijom sile na osu naziva se skalarna veličina koja je jednaka proizvodu iz intenziteta sile i kosinusa ugla između pravca sile i pozitivnog smera ose. Iz ove definicije proizilazi da su projekcije sile na bilo koje paralelne i jednako usmerene prave jednake jedna drugoj. Ovom se činjenicom vrlo dobro koristimo ako je potrebno da projiciramo silu na osu koja ne leži u istoj ravni sa silom. Označimo

projekciju sile $\vec{F}$ na osu Ox simbolom X . Tada za sile prikazane na sl. 21 dobijamo*



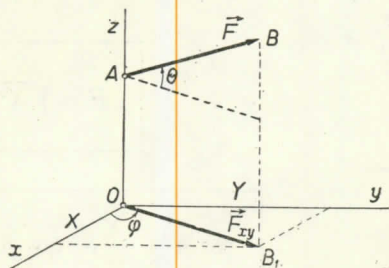
Sl. 21.

$$X = F \cos \alpha; \quad X_1 = F_1 \cos \alpha_1 = -F_1 \cos \varphi. \quad (4)$$

Kao što vidimo iz ovog primera projekcija sile na osu je pozitivna, ako je ugao između pravca sile i pozitivnog smera ose oštar, i negativna, ako je taj ugao tup. Ako je pak sila upravna na osi onda je njena projekcija na osu jednaka nuli.

Iz crteža jasno proizilazi da je projekcija sile na osu jednaka dužini odsečka koji se nalazi između projekcija krajeva vektora sile, koji se uzima sa odgovarajućim znakom. ($X = \overline{AB_1} = \overline{ab}$; $X_1 = -\overline{D_1E} = -\overline{de}$).

Projekcijom sile $\vec{F}$ na ravan Oxy naziva se vektor $\vec{F}_{xy} = \overrightarrow{OB_1}$ koji se nalazi između projekcija početne i krajnje tačke sile $\vec{F}$ na tu ravan (sl. 22). Na taj način za razliku od projekcije sile na osu, projekcija sile na ravan je vektorska veličina, jer ona nije okarakterisana samo svojom brojanom



Sl. 22

* Pozitivnim smerom na osi smatraćemo smer od tačke O (koordinatnog početka) u stranu gde stoji slovo x , kojim je obeležena osa. Strelice na crtežima upotrebljavaćemo samo pri prikazivanju vektora.

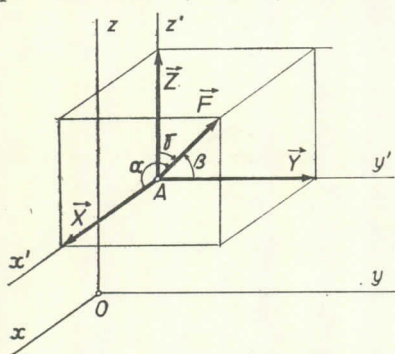
vrednošću, već takođe i pravcem i smerom u ravni Oxy . Intenzitet ove projekcije iznosi $F_{xy} = F \cos \theta$, gde je θ ugao između pravca sile $\vec{F}$ i njene projekcije $\vec{F}_{xy}$.

U nekim slučajevima kada treba da se odredi projekcija sile na osu, vrlo je zgodno najpre da se odredi projekcija te sile na ravan u kojoj leži ta osa i zatim da se ta projekcija na ravan ponovo projicira na datu osu. Npr., u slučaju prikazanom na sl. 22 bilo bi

$$X = F_{xy} \cos \varphi = F \cos \theta \cos \varphi; \quad Y = F_{xy} \sin \varphi = F \cos \theta \sin \varphi.$$

§ 9. Analitički način definisanja sile

Za analitički način definisanja sile neophodno je izabrati koordinatni sistem $Oxyz$ u odnosu na koji će se određivati pravac sile u prostoru. U mehanici se obično koristi koordinatni sistem desne dispozicije, tj. takav sistem kod koga će doći do poklapanja najkraćim putem ose Ox sa osom Oy , ako osu Ox okrećemo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku i kada to obrtanje posmatramo iz pozitivnog



Sl. 23

smera ose Oz (sl. 23). Vektor $\vec{F}$ koji predstavlja silu možemo tada prikazati ako znamo intenzitet te sile F i uglove α , β i γ koje zaklapa ta sila sa izabranim koordinatnim osama. Veličine F , α , β , γ potpuno određuju datu silu $\vec{F}$. Napadna tačka A sile mora tada da bude određena dopunskim podacima, tj. svojim koordinatama x , y , z .

Pri rešavanju zadataka statike pogodnije je definisati silu njenim projekcijama. Poka-

žimo da će sila $\vec{F}$ biti potpuno određena ako su poznate njene projekcije X , Y , Z na ose pravo-

uglog dekartovog koordinatnog sistema. Naime, iz formula (4) proizlazi

$$X = F \cos \alpha; \quad Y = F \cos \beta; \quad Z = F \cos \gamma.$$

Ako ove tri jednačine dignemo na kvadrat i saberemo ih dobićemo $X^2 + Y^2 + Z^2 = F^2$, jer je $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$. Prema tome u krajnjem rezultatu dobijamo:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2},$$

(5).

$$\cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}, \quad \cos \gamma = \frac{Z}{F}.$$

Formule (5) omogućuju da se odredi intenzitet sile i uglovi koje ona gradi sa koordinatnim osama, ako su poznate projekcije sile na koordinatne ose. Primetimo da ispred kvadratnog korena u prvoj od formula (5) uvek uzimamo znak plus, jer ta formula određuje intenzitet sile.

Ako silu $\vec{F}$ razložimo u pravce koji su paralelni pravcima koordinatnih osa (vidi sl. 23) dobićemo komponente $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, koje su brojčano jednake projekcijama sile na koordinatne ose. Odavde proizlazi da vektor sile $\vec{F}$ može da se konstruiše i geometrijskim putem koristeći pravilo paralelepipeda ako su poznate projekcije sile.

U slučaju kada sve sile leže u jednoj ravni, svaka od sila može da se definiše njenim projekcijama na ose Ox i Oy . Tada formule kojima se potpuno definiše sila pomoću svojih projekcija glase:

$$F = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos \alpha = \frac{X}{F}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{F}. \quad (6)$$

U ovom drugom slučaju, ako su poznate njene projekcije, sila se grafičkim putem određuje korišćenjem pravila o paralelogramu sila.

§ 10. Analitički način slaganja sila

Prelaz od zavisnosti između vektora na zavisnost između njihovih projekcija može da se izvrši ako iskoristimo sledeću teoremu iz geometrije: *projekcija vektora koji predstavlja geometrijski zbir vektora na bilo koju osu jednaka je algebarskom zbiru projekcija komponentnih vektora na istu osu*. Naime, neka je (sl. 24)

$$\vec{s} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \vec{a}_4.$$

Tada je:

$$a_{1x} = \overline{ab}; \quad a_{2x} = \overline{bc}; \quad a_{3x} = \overline{cd}; \\ a_{4x} = \overline{de}; \quad s_x = \overline{ae}.$$

Ako sada saberemo redom prve četiri projekcije dobićemo

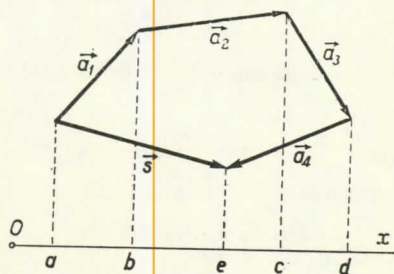
$$a_{1x} + a_{2x} + a_{3x} + a_{4x} = \overline{ae} = s_x,$$

čime je teorema dokazana. Pri bilo kom broju komponentata biće:

$$\text{ako je } \vec{s} = \sum \vec{a}_i, \quad \text{onda je } s_x = \sum a_{ix}. \quad (7)$$

Pređimo sada na slaganje sila. Neka sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ bude određen svojim projekcijama na koordinatne ose. Označimo geometrijski zbir (glavni vektor) tih sila sa $\vec{F}_R$, tako da je $\vec{F}_R = \sum \vec{F}_i$. Tada, prema jednačini (7) biće:

$$X_R = \sum X_i, \quad Y_R = \sum Y_i, \quad Z_R = \sum Z_i. \quad (8)$$



Sl. 24

Kad znamo X_R , Y_R i Z_R , onda prema formuli (5) imamo

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2 + Z_R^2},$$

$$\cos \alpha = \frac{X_R}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{Y_R}{F_R}, \quad \cos \gamma = \frac{Z_R}{F_R}.$$

(9)

Formule (8) i (9) omogućuju da se reši problem slaganja sila analitičkim putem. Za sile koje leže u ravni (ravan sistem sila), odgovarajuće formule prelaze u

$$X_R = \sum X_i; \quad Y_R = \sum Y_i; \quad F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2};$$

$$\cos \alpha = \frac{X_R}{F_R}, \quad \cos \beta = \frac{Y_R}{F_R}$$

(10)

Ako su sile definisane svojim intenzitetima i uglovima koje zaklapaju sa koordinatnim osama, onda da bismo upotrebili analitičku metodu slaganja sila, moramo najpre da odredimo projekcije tih sila na ose koordinatnog sistema.

Zadatak 4. Odrediti zbir tri sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$, čije su projekcije na koordinatne ose jednake: $X_1 = 6$ kp, $Y_1 = 3$ kp, $Z_1 = 12$ kp; $X_2 = 3$ kp, $Y_2 = -7$ kp, $Z_2 = 1$ kp; $X_3 = 5$ kp, $Y_3 = 2$ kp, $Z_3 = -8$ kp.

Rešenje. Po formulama (8) nalazimo:

$$X_R = 6 + 3 + 5 = 14 \text{ kp}; \quad Y_R = 3 - 7 + 2 = -2 \text{ kp}; \quad Z_R = 12 + 1 - 8 = 5 \text{ kp},$$

Ako zamenimo ove vrednosti u jednačini (9), dobijamo:

$$F_R = \sqrt{14^2 + (-2)^2 + 5^2} = 15 \text{ kp};$$

$$\cos \alpha = 14/15; \quad \cos \beta = -2/15; \quad \cos \gamma = 1/3.$$

Konačno je $F_R = 15$ kp, $\alpha = 21^\circ$, $\beta = 97^\circ 40'$, $\gamma = 70^\circ 30'$

Zadatak 5. Odrediti rezultantu (glavni vektor) tri sučeljne sile koje deluju u istoj ravni (sl. 25, a); ako je dato:

$$F_1 = 17,32 \text{ kp}, \quad F_2 = 10 \text{ kp}, \quad F_3 = 24 \text{ kp}, \quad \varphi = 30^\circ, \quad \psi = 60^\circ.$$

Rešenje. Izračunajmo projekcije datih sila na koordinatne ose: $X_1 = F_1 \cos \varphi = 15$ kp;

$$X_2 = -F_2 \cos \psi = -5 \text{ kp}; \quad X_3 = 0; \quad Y_1 = -F_1 \sin \varphi = -8,66 \text{ kp}; \quad Y_2 = F_2 \sin \psi = 8,66 \text{ kp};$$

$$Y_3 = -F_3 = -24 \text{ kp}. \quad \text{Tada po formulama (10) dobijamo:}$$

$$X_R = 15 - 5 = 10 \text{ kp};$$

$$Y_R = -8,66 + 8,66 - 24 = -24 \text{ kp}.$$

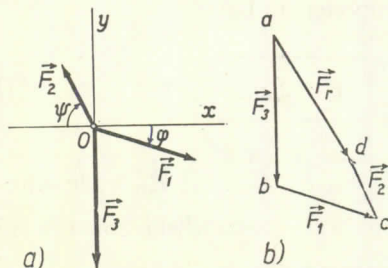
Prema tome je:

$$F_R = \sqrt{10^2 + (-24)^2} = 26 \text{ kp};$$

$$\cos \alpha = 5/13, \quad \cos \beta = -12/13.$$

Konačno je $F_R = 26$ kp, $\alpha = 67^\circ 20'$, $\beta = 157^\circ 20'$

Da bismo rešili ovaj zadatak geometrijskom metodom potrebno je da najpre usvojimo izvesnu razmeru (npr. $1 \text{ cm} \hat{=} 10 \text{ kp}$), i da konstruišemo od sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ poligon sila (sl. 25, b). Završna.



Sl. 25

strana ovog poligona sila $\vec{ad}$ u datoj razmeri određuje intenzitet, pravac i smer vektora $\vec{F}_R$. Ako na primer, pri merenju dobijemo da je $\overline{ad} \approx 2,5$ cm. onda to znači da je $F_R = 25$ kp, pa greška u odnosu na tačno analitičko rešenje iznosi oko 4%.

§ 11. Ravnoteža sistema sučelnih sila

Iz zakona mehanike proizlazi da kruto telo na koje deluje uravnoteženi sistem sila može da se nalazi ne samo u miru, već može i da se kreće, pri čemu se takvo kretanje zove kretanje »po inerciji«. Takvo je, na primer, ravnomerno (jednoliko) translaciono i pravolinijsko kretanje tela.

Oдавде proizlazi vrlo važan zaključak: *uslove ravnoteže statike zadovoljavaju sile koje deluju kako na telo koje miruje, tako i na telo koje se kreće »po inerciji«* (vidi zadatak 6.). Oдавде sleduje da je uravnoteženost sila, koje deluju na slobodno kruto telo, potreban, ali ne u isto vreme i dovoljan uslov za ravnotežu (mirovanje) krutog tela. U stanju mirovanja telo će se nalaziti samo u tom slučaju, ako je ono mirovalo i do trenutka kada je počelo dejstvo uravnoteženih sila na telo.

Za ravnotežu sučelnog sistema sila koje napadaju kruto telo potrebno je i dovoljno da rezultanta tih sila (odnosno njihov glavni vektor) bude jednaka nuli. Uslovi, koje treba da zadovoljavaju same sile, mogu da se izraze kako u analitičkom, tako i u geometrijskom obliku. Proučicemo i jedan i drugi način.

1. Geometrijski uslovi ravnoteže. Kako se rezultanta sučelnog sistema sila $\vec{F}_r$ određuje kao završna strana poligona sila konstruisanog od tih sila, to rezultanta $\vec{F}_r$ može da bude jednaka nuli, tada i samo tada, kada se kraj poslednje sile u poligonu sila poklapa sa početkom prve sile, tj. drugim rečima kada je poligon sila zatvoren.

Prema tome, *za ravnotežu sučelnog sistema sila potrebno je i dovoljno, da poligon sila, konstruisan od tih sila, bude zatvoren.*

2. Analitički uslovi ravnoteže. Intenzitet rezultante sučelnog sistema sila, kao što znamo, određen je formulom:

$$F_r = \sqrt{X_r^2 + Y_r^2 + Z_r^2}.$$

Kako se pod korenom nalazi zbir pozitivnih članova, to će F_r biti jednako nuli, tada i samo tada, ako je jednovremeno: $X_r = 0$, $Y_r = 0$, $Z_r = 0$, tj. kada, kako proizlazi iz formula (8), sile koje deluju na telo zadovoljavaju jednačine:

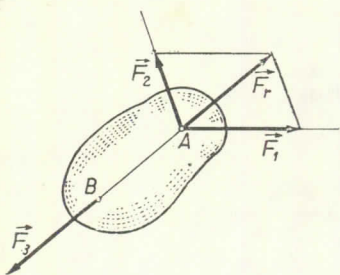
$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma Z_i = 0. \quad (11)$$

Jednačine (11) izražavaju u analitičkom obliku uslove ravnoteže: *za ravnotežu prostornog sistema sučelnih sila, potrebno je i dovoljno, da suma projekcija tih sila na svaku od tri koordinatne ose bude jednaka nuli.*

Ako pak sve sučelne sile leže u ravni, onda one obrazuju ravan sistem sučelnih sila. Očevidno je da u slučaju ravnog sistema sučelnih sila postoje samo dva uslova ravnoteže:

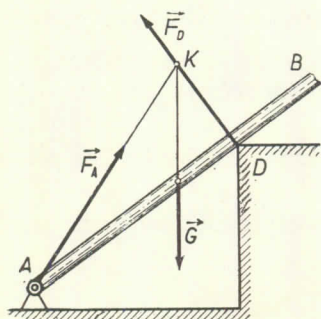
$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0. \quad (12)$$

Jednačine (11) i (12) izražavaju isto tako i neophodne uslove za ravnotežu slobodnog krutog tela, koje se nalazi pod dejstvom sučelnih sila.



Sl. 26

sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ u tu tačku i njihovo dejstvo zamenimo njihovom rezultantom $\vec{F}_r$. Sada će na telo delovati samo dve sile: sila $\vec{F}_r$ i sila $\vec{F}_3$, čija će napadna tačka biti u nekoj tački B tela. Ako se telo pri tome nalazi u ravnoteži, onda će, prema aksiomi 1., sile $\vec{F}_r$ i $\vec{F}_3$ biti usmerene duž istog pravca, tj. duž prave AB. Prema tome, i napadna linija sile $\vec{F}_3$ takođe prolazi kroz tačku A, što je i trebalo dokazati.



Sl. 27

Primer. Neka se štap AB, vezan zglobovima u tački A, oslanja na ispust D (sl. 27). Štap možemo smatrati slobodnim telom ako odstranimo veze i njihovo dejstvo zamenimo reakcijama. Tada će štap biti u ravnoteži pod dejstvom triju sila. Napadne linije dveju od tih sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_D$ su poznate; one se seku u tački K. Prema tome, reakcija zgloba $\vec{F}_A$, koja deluje u tački A, mora takođe da prolazi kroz tačku K, tj. mora da bude usmerena duž prave AK. Teorema o tri sile u ovom slučaju omogućuje da unapred odredimo napadnu liniju reakcije u zglobovima A, koja je nepoznata. Njen intenzitet odredićemo iz trougla sila.

Primer. Neka se štap AB, vezan zglobovima u tački A, oslanja na ispust D (sl. 27). Štap možemo smatrati slobodnim telom ako odstranimo veze i njihovo dejstvo zamenimo reakcijama. Tada će štap biti u ravnoteži pod dejstvom triju sila. Napadne linije dveju od tih sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_D$ su poznate; one se seku u tački K. Prema tome, reakcija zgloba $\vec{F}_A$, koja deluje u tački A, mora takođe da prolazi kroz tačku K, tj. mora da bude usmerena duž prave AK. Teorema o tri sile u ovom slučaju omogućuje da unapred odredimo napadnu liniju reakcije u zglobovima A, koja je nepoznata. Njen intenzitet odredićemo iz trougla sila.

§ 12. Statički određeni i statički neodređeni zadaci

Pri rešavanju zadataka o ravnoteži vezanog krutog tela reakcije veza predstavljaju veličine koje unapred nisu poznate. Broj ovih nepoznatih reakcija zavisi od broja i karaktera veza. Odgovarajući statički zadatak može biti rešen samo u tom slučaju

3. Teorema o tri sile. Pri rešavanju zadataka statike ponekad je vrlo korisno da se upotrebi sledeća teorema: *ako se slobodno kruto telo nalazi u ravnoteži pod dejstvom triju neparalelnih sila, koje leže u jednoj ravni, onda napadne linije tih sila moraju da se seku u jednoj tački.*

Da bismo dokazali ovu teoremu uočimo bilo koje dve (od tri) sile, npr. $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Kako po uslovima teoreme ove sile leže u jednoj ravni i nisu paralelne, to će se njihove napadne linije seći u nekoj tački A (sl. 26). Nanesimo

Telo će biti u ravnoteži pod dejstvom triju sila ako je poligon od tri sile, tj. trougao sila, zatvoren. Prema tome, da bi kruto telo pod dejstvom triju sila u ravni bilo u ravnoteži, potrebna su i dovoljna sledeća dva uslova:

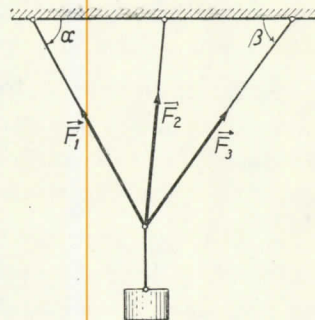
- da se napadne linije seku u jednoj tački, i
- da je trougao sila zatvoren.

kada broj nepoznatih reakcija ne prelazi broj uslova ravnoteže, koji sadrže te nepoznate reakcije. Takvi zadaci zovu se *statički određeni*, a sistemi tela, koji zadovoljavaju ovaj uslov, zovu se *statički određeni sistemi*.

Zadaci kod kojih je broj nepoznatih reakcija veći od broja uslova ravnoteže, koji sadrže ove reakcije, zovu se *statički neodređeni*, dok se takvi sistemi tela zovu *statički neodređeni sistemi*.

Kao primer za statički neodređen sistem može da posluži teret obešen o tri konopca, koji leže u jednoj ravni (sl. 28). U tom slučaju imamo tri nepoznate veličine, tri sile u konopcima F_1 , F_2 , F_3 , a, kao što znamo, za ravan sistem sučeljnih sila mogu da se postave samo dva uslova ravnoteže (12).

Očividno je da statička neodređenost nastaje zbog postojanja suvišnih veza. U datom slučaju da bismo pri proizvoljnim uglovima α i β obezbedili ravnotežu, dovoljno je da teret obesimo o dva konopca (vidi zadatak 2., sl. 19), jer je treći konopac za obezbeđenje ravnoteže nepotreban.



Sl. 28

U daljim izlaganjima razmatraćemo samo statički određene zadatke, tj. takve zadatke kod kojih je broj nepoznatih reakcija veza jednak broju uslovnih jednačina ravnoteže, koje sadrže nepoznate reakcije. Za rešavanje statički neodređenih zadataka nužno je da se odbaci pretpostavka da su tela kruta, već ih treba smatrati čvrstim, tj. takvim da se pod dejstvom sila mogu deformisati. Zadaci ovakve prirode rešavaju se u kursovima otpornosti materijala i statike inženjerskih konstrukcija.

§ 13. Rešavanje zadataka statike

Rešavanje zadataka statike svodi se na određivanje pritisaka na oslonce, ili pak sila u različitim delovima jedne konstrukcije, pri ravnoteži. Isto tako, rešavanje zadataka statike sastoji se u određivanju opštih uslova ravnoteže jedne konstrukcije, ako je ona podvrgnuta vezama koje dopuštaju neka pomeranja.

Samo u vrlo prostim slučajevima zadaci ove vrste mogu da se rešavaju metodom razlaganja sila (§ 7). Međutim, obično se u statici koristi druga, pogodnija, metoda rešavanja zadataka zasnovana na razmatranju uslova ravnoteže tela na koja deluju sile, koje treba da se odrede, ili pak sile, jednake tim silama. Kako razmatrana konstrukcija predstavlja skup čitavog niza tela vezanih jedno za drugo, to pre nego što se pristupi rešavanju zadatka ovom metodom treba da se *izabere ono telo čiju ravnotežu treba posmatrati da bismo odredili tražene veličine*.

Sam proces rešavanja zadatka svodi se na sledeći redosled operacija:

1. Izbor tela čija ravnoteža treba da se prouči. Pri rešavanju jednog određenog zadatka treba da se prouči ravnoteža tela na koje deluju date i tražene sile, ili pak sile, koje su jednake silama koje se traže (npr., ako treba da se odredi pritisak na oslonac, onda se može posmatrati ravnoteža tela na koje deluje sila jednaka pritisku na oslonac — tj. reakcija oslonca — veze, i slično).

Kada date sile deluju na jedno telo, a sve sile koje treba da se odrede deluju na drugo telo, može da se desi da je potrebno posmatrati posebno (pojedinačno) ravnotežu svakog od ta dva tela, a ponekad se mora proučiti i ravnoteža tela za koja su ova dva tela vezana:

2. Oslobođanje tela od veza i prikazivanje sila koje deluju na telo kao i reakcija uklonjenih veza. Telo oslobođeno od veza treba da se prikaže (nacrtati) posebno* (kao na sl. 12, b). Pri prikazivanju reakcija treba o njima imati u vidu sve ono što je rečeno u § 4.

3. Postavljanje uslova ravnoteže. Oblik tih uslova zavisi od toga kakav sistem sila deluje na posmatrano telo posle oslobađanja tela od veza i koja se metoda rešavanja želi da primeni (geometrijska ili analitička). O načinima postavljanja uslova ravnoteže za različite sisteme sila biće govora na odgovarajućim mestima kursa.

4. Određivanje traženih veličina, proveravanje tačnosti rešenja i analiza dobijenih rezultata. Vrlo važno mesto pri rešavanju nekog zadatka ima pedantno nacrtani crtež. On omogućuje da se brže odredi pravilan put rešavanja i da se izbegnu greške pri postavljanju uslova ravnoteže. Računske operacije treba izvoditi pažljivo i po određenom redosledu.

Preporučuje se da se pri rešavanju zadataka svi računi, po pravilu, sprovedu u opštim brojevima (algebarski). U tom slučaju se za tražene veličine dobivaju formule, koje omogućuju da se izvrši analiza dobijenih rezultata. Osim toga, rešenja u opštem obliku omogućuju da se nekad otkrije učinjena greška kontrolisanjem dimenzija (dimenzija leve i desne strane jednačine mora da bude ista). Ako rešenja nađemo u opštim brojevima, onda brojčane vrednosti stavljamo u dobivene izraze *obavezno* tek na kraju.

U ovom paragrafu bavićemo se ravnotežom tela na koja deluju sučeljne sile. Za rešavanje ovakvih zadataka može da se upotrebi geometrijska i analitička metoda.

1. Geometrijska metoda. Ova metoda je pogodnija kada je ukupni broj sila (i aktivnih i reakcija) tri. Pri ravnoteži trougao ovih sila mora da bude zatvoren (konstrukciju trougla sila treba obavezno započinjati sa datom poznatom silom). Zatvaranjem ovog trougla određuju se tražene veličine.

2. Analitička metoda. Ova metoda može da se upotrebi pri proizvoljnom broju sila. Da bi se postavili uslovi ravnoteže, kojih, u slučaju ravnoteže ravnog sistema sila ima dva [formule (12)], a u slučaju prostornog sistema sila ima tri [formule (11)], treba, pre svega, da se izabere koordinatni sistem u odnosu na koji ćemo da rešavamo zadatak. Taj izbor može da se izvrši potpuno proizvoljno. Međutim, dobivene jednačine (uslovi ravnoteže) će se jednostavnije rešavati, ako jednu od koordinatnih osa izaberemo tako, da ona bude upravna na neku od nepoznatih sila. Pre nego što se postave uslovi ravnoteže, korisno je, da se, u prvo vreme, dok se ne stekne potrebna rutina, određene projekcije sila na izabrane koordinatne ose unose u posebnu tablicu (vidi zadatke 6, 10 i 11).

Niz dopunskih objašnjenja biće dat tokom rešavanja zadataka u ovom paragrafu.

* Kada se stekne dovoljna rutina može telo čiju ravnotežu razmatramo da se izdvoji iz konstrukcije samo u mislima i na opštem crtežu mogu se prikazati sve aktivne sile koje deluju na telo (i samo na njega) i reakcije veza (kao na sl. 31). Međutim, ako je potrebno da se razmotri ravnoteža još jednog tela konstrukcije, onda je bolje da se to telo izdvoji i da se prikaže na posebnom crtežu.

Zadatak 6. Teret težine G leži na glatkoj strmoj ravni, koja sa horizontom gradi ugao α (sl. 29, a). Odrediti veličinu sile F , koja je paralelna datoj ravni, a kojom treba delovati na teret da bi on bio u ravnoteži. Odrediti i silu pritiska tereta F_p na strmu ravan u tom položaju.

Rešenje. Tražene sile deluju na razna tela: sila $\vec{F}$ na teret, a sila $\vec{F}_p$ na strmu ravan. Da bismo rešili zadatak umesto sile F_p tražićemo reakciju $\vec{F}_N$, koja ima isti intenzitet, isti pravac, a suprotan smer od sile $\vec{F}_p$. U tom slučaju će i data sila $\vec{G}$ i tražene sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_N$ delovati na teret, tj. na jedno isto telo. Razmotrimo ravnotežu tereta. U mislima odstranimo vezu (strmu ravan) i posmatrajmo teret kao slobodno telo (sl. 29, b)

i prikažimo (nacrtajmo) aktivne sile $\vec{G}$ i $\vec{F}$ koje deluju na telo kao i reakciju veze $\vec{F}_N$. Za određivanje traženih sila možemo iskoristiti geometrijske i analitičke uslove ravnoteže slobodnog krutog tela. Razmotrimo oba načina rešavanja.

Geometrijski način. Pri ravnoteži trougao sila konstruisan od sila $\vec{G}$, $\vec{F}$, $\vec{F}_N$ mora da bude zatvoren. Konstrukciju trougla sila započinjemo sa datom (poznatom) silom $\vec{G}$ (sl. 29, c). Zatim kroz početak i kraj ove sile povucimo prave koje su paralelne sa napadnim linijama sila $\vec{F}$ i $\vec{F}_N$. Tačka preseka ovih pravih određuje teme c zatvorenog trougla sila abc , čije će strane bc i ca u izabranoj razmeri biti jednake traženim silama. Smer ovih sila se određuje po pravilu strelica: kako je u ovom slučaju rezultanta jednaka nuli, to pri obilaženju oko trougla vrhovi strelica ne smeju da se sučeljavaju ni u jednoj tački (temenu trougla).

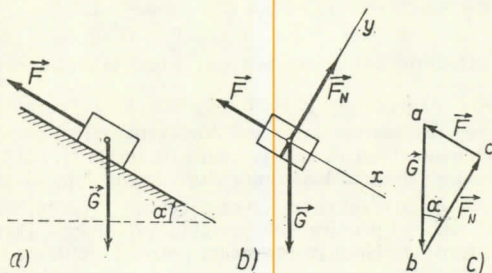
Intenzitet traženih sila može da se odredi iz trougla abc i putem numeričkog računa (u tom slučaju ne treba voditi računa o razmeri u kojoj su nanete sile). Primetimo da je $\angle abc = \alpha$. Prema tome, u ovom slučaju biće:

$$F = G \sin \alpha, \quad F_N = G \cos \alpha.$$

Analitički način. Kako je dati sistem sila ravan, izaberimo dve koordinatne ose, pri čemu, radi uprošćenja računa, osu Ox povlačimo upravno na nepoznatu silu F_N . Odredimo projekcije tih sila na koordinatne ose (vidi tablicu)*.:

$\vec{X}_i$	$\vec{G}$	$\vec{F}$	$\vec{F}_N$
X_i	$G \sin \alpha$	$-F$	0
Y_i	$-G \cos \alpha$	0	F_N

* Tablicu treba ispunjavati po stupcima, tj. najpre treba odrediti projekcije sile $\vec{G}$, zatim projekcije $\vec{F}$, itd. Prethodno sastavljanje ovih tablica umanjuje mogućnost pravljenja grešaka u jednačinama ravnoteže; zato je vrlo korisno da se u početku koristimo ovakvim tablicama dok se dovoljno ne uvežbamo u projiciranje sila.



Sl. 29

i, koristeći se uslovima ravnoteže (12), postavimo jednačine:

$$\Sigma X_i \equiv G \sin \alpha - F = 0,$$

$$\Sigma Y_i \equiv -G \cos \alpha + F_N = 0.$$

Rešavanjem ovih jednačina dobijamo:

$$F = G \sin \alpha, \quad F_N = G \cos \alpha.$$

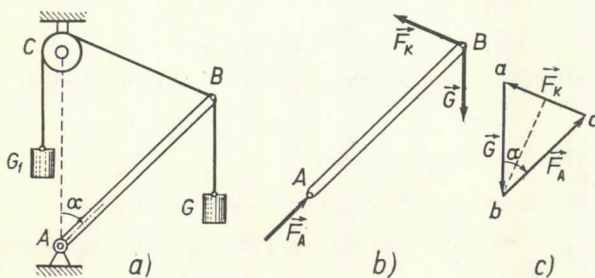
Traženi pritisak tereta na ravan jednak je po intenzitetu nađenoj sili $\vec{F}_N = G \cos \alpha$, ima isti pravac kao i sila $\vec{F}_N$, samo je suprotnog smera.

Primitimo da je radi održavanja tereta na strmoj ravni (u ravnoteži), potrebno da na teret delujemo silom F , koja je manja od tereta G . Na taj način strma ravan predstavlja jednu od najprostijih mašina, koja omogućuje da manjom silom uravnotežimo veću.

Kako je bilo ukazano na početku § 11, dobijeni rezultati važe ne samo u slučaju mirovanja tela, već takođe i pri njegovom kretanju »po inerciji«. Prema tome, da bi se teret kretao jednoliko (ravnomerno) uz glatku strmu ravan, potrebno je da na teret delujemo istom silom $F = G \sin \alpha$ kojom teret održavamo u ravnoteži; isto tako, silom $F = G \sin \alpha$ treba kočiti teret, ako želimo, da se teret ravnomerno (jednoliko) spušta niz ravan*. Da bi teret vršio jedno od tih kretanja potrebno je da mu se saopšti odgovarajuća početna brzina. Ako takvu brzinu ne saopštimo telu, onda će se teret pod dejstvom sile $F = G \sin \alpha$ nalaziti u miru. Pritisak na ravan u svim slučajevima jednak je $G \cos \alpha$.

Iz ovog primera proizlazi jedan opšti zaključak: u zadacima statike koje rešavamo pomoću jednačina ravnoteže, umesto sile pritiska na veze nalazimo reakcije veza, koje imaju isti intenzitet i isti pravac kao i sile pritiska, ali suprotan smer. Međutim, pri rešavanju zadataka metodom razlaganja sile (§ 7) neposredno nalazimo sile pritiska na veze.

Zadatak 7. Štap AB pričvršćen je za nepomičan zglobov A (sl. 30, a). O kraj B obešen je teret težine $G = 10$ kp i pričvršćen je konopac, koji je prebačen preko kotura C . O njegov drugi kraj obešen je teret težine $G_1 = 14,1$ kp. Osovina kotura C i zgloba A nalaze se na istoj vertikali, pri čemu je $\overline{AC} = \overline{AB}$. Odrediti pri kome će uglu α sistem biti u ravnoteži i kolika će u tom položaju biti sila u štapu AB ; težinu štapa i dimenzije kotura zanemariti.



Sl. 30

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu štapa AB na koji deluju sve date i tražene sile. Odstranimo veze i posmatrajmo štap kao slobodno telo na koje deluju sile:

težina tereta $\vec{G}$, sila u konopcu $\vec{F}_K$ i reakcija zgloba $\vec{F}_A$, usmerena duž štapa AB , jer štap u datom slučaju može da radi samo na zatezanje ili pritisak (vidi § 4). Ako trenje konopca o kotur možemo da zanemarimo, onda će sila u konopcu, koji je prebačen preko kotura, u položaju ravnoteže, biti jednaka težini tereta obešenog o konopac, tj. $F_K = G_1$.

Primenimo geometrijski način rešavanja i konstruišimo od sila $\vec{G}$, $\vec{F}_K$ i $\vec{F}_A$ zatvoreni trougao. sila abc (sl. 30, c), započinjući konstrukciju sa silom $\vec{G}$. Iz sličnosti trouglova abc i ABC nalazimo da je $ab = bc$ i $\angle abc = \alpha$. Prema tome je

$$F_A = G, \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{G_1}{2G},$$

jer je $F_K = G_1 = 2G \sin \frac{\alpha}{2}$.

Iz dobijenih rezultata proizlazi da je pri $\alpha < 180^\circ$ ravnoteža moguća samo u tom slučaju ako je $G_1 < 2G$. Štap će u tom slučaju biti pritisnut silom koja je jednaka G , nezavisno od veličine tereta G_1 i ugla α .

* Primedba prevodioca. Istom silom treba pridržavati telo (ili ga podupirati) i u slučaju ako se ono kreće po strmoj ravni horizontalno (upravno na sliku).

Slučaj kada je $\alpha = 180^\circ$, treba da bude proanaliziran posebno. Lako je videti da je u tom slučaju ravnoteža moguća pri bilo kojim veličinama G i G_1 . Tom prilikom ako je $G > G_1$, štap će biti zategnut silom koja je jednaka $G - G_1$, a ako je $G_1 > G$, onda će štap biti pritisnut silom koja je jednaka $G_1 - G$.

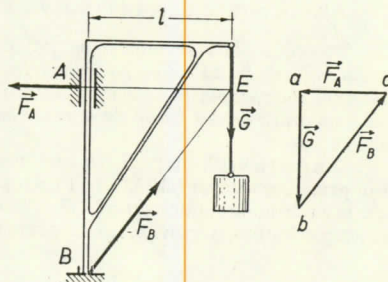
Za date brojčane podatke nalazimo $F_A = 10 \text{ kp}$, $\alpha = 90^\circ$ (štap je horizontalan).

Obratimo pažnju na to, da sila $\vec{G}_1$ (težina tereta) nije ušla neposredno u uslove ravnoteže (u trougao sila), jer ta sila deluje na teret, a ne na štap AB , čiju ravnotežu razmatramo.

Da bismo ubuduće umanjili broj crteža nećemo prikazivati odvojeno telo čiju ravnotežu posmatramo (kao slobodno telo); međutim, pri nanošenju sila koje deluju na telo uvek treba u mislima telo predstaviti kao slobodno, tj. kako je prikazano na slici 29, b; 30, b ili 12, b.

Zadatak 8. Kran oslonjen na sferni zglob (ležište) B i cilindrično ležište A nosi teret G (sl. 31). Zanimajući težinu konstrukcije odrediti reakcije F_A i F_B , ako je strela kрана jednaka l i ako je $AB = h$.

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu čitavog kрана kao celine jer na kran deluju sve date i tražene sile. U mislima odstranimo veze (ležište A i ležište B) i posmatrajmo kran kao slobodno telo na koje deluje data sila $\vec{G}$, reakcija $\vec{F}_A$, koja je upravna na obrtnu osu AB , i reakcija $\vec{F}_B$, koja može da ima bilo koji proizvoljan pravac u ravni crteža. Međutim, kran se nalazi u ravnoteži pod dejstvom triju sila; prema tome, njihove napadne linije moraju da se seku u jednoj tački. Ta tačka je u datom slučaju tačka E , u kojoj se seku napadne linije sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_A$. Prema tome, reakcija $\vec{F}_B$ biće usmerena duž prave BE .



Sl. 31

Primenjujući geometrijski način rešavanja konstruišimo od sila $\vec{G}$, $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ zatvoreni trougao sila abc , počinjući konstrukciju od date sile $\vec{G}$. Iz sličnosti trouglova abc i ABE nalazimo:

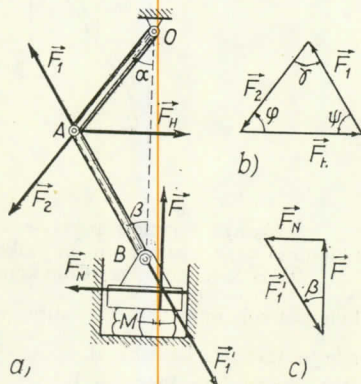
$$\frac{F_A}{G} = \frac{l}{h}, \quad \frac{F_B}{G} = \frac{\sqrt{h^2 + l^2}}{h},$$

odakle je

$$F_A = \frac{l}{h} G, \quad F_B = G \sqrt{1 + \frac{l^2}{h^2}}.$$

Iz trougla abc se vidi da su smerovi reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ prikazani pravilno na crtežu. Pritisci na ležište A i B biće brojčano jednaki veličinama reakcija F_A i F_B , ali će biti suprotnog smera. Veličine ovih reakcija biće utoliko veće ukoliko je veći odnos l/h .

Proučeni zadatak predstavlja primer za korišćenje teoreme o tri sile. Obratimo pažnju na sledeći zaključak: ako su u zadatku date dimenzije delova konstrukcije, onda pri rešavanju trougla sila treba iskoristiti sličnost trouglova; međutim, ako su dati uglovi (zadatak 6.), onda je korisnije da se primene trigonometrijske formule.



Sl. 32

Zadatak 9. U zglobu A kolenaste prese deluje horizontalna sila $\vec{F}_H$ (sl. 32, a). Zanimajući težinu štapova i klipa odrediti silu pritiska klipa na telo M pri datim vgllovima α i β .

Rešenje. Razmotrimo najpre ravnotežu zgloba A na koji deluje jedina data sila $\vec{F}_H$. Na osovinu zgloba, kao slobodno telo, osim sile $\vec{F}_H$ deluju i reakcije štapova $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje su usmerene

duž štapova. Konstruišimo trougao sila (sl. 32, b). Uglovi u njemu su: $\varphi = 90^\circ - \alpha$, $\psi = 90^\circ - \beta$, $\gamma = \alpha + \beta$. Korišćenjem sinusne teoreme dobićemo

$$\frac{F_1}{\sin \varphi} = \frac{F_H}{\sin \gamma}, \quad F_1 = \frac{\cos \alpha}{\sin(\alpha + \beta)} F_H.$$

Razmotrimo sada ravnotežu klipa. Na klip, ako ga posmatramo kao slobodno telo, deluju tri sile: reakcija $\vec{F}'_1 = -\vec{F}_1$ štapa AB, reakcija zida $\vec{F}_N$ i reakcija tela koje presujemo $\vec{F}$. S obzirom da je broj sila tri, one pri ravnoteži moraju da prolaze kroz istu tačku.

Ako od ovih sila konstruišemo trougao sila (sl. 32, c), onda ćemo iz njega dobiti

$$F = F'_1 \cos \beta.$$

Zamenjujući F'_1 veličinom koja je njoj jednaka F_1 , najzad dobijamo

$$F = F_H \frac{\cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{F_H}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}.$$

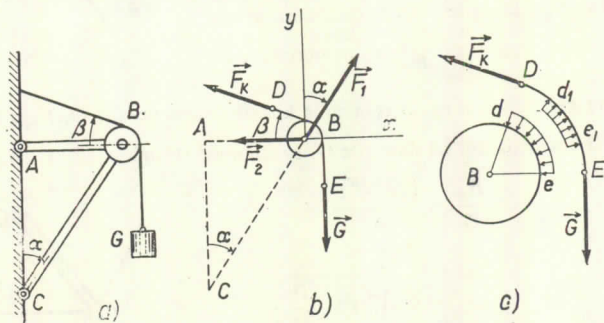
Sila pritiska klipa na telo M jednaka je po intenzitetu sili F, samo je suprotnog smera.

Iz poslednje formule se vidi da će se pri jednoj istoj sili F_H pritisak F povećavati kada se uglovi α i β budu smanjivali.

Ako su dužine štapova OA i AB jednake, onda je $\alpha = \beta$ i $F = \frac{1}{2} F_H \operatorname{ctg} \alpha$.

Iz redosleda rešavanja ovog zadatka proizlazi sledeći zaključak: u nekim zadacima data sila (ili date sile) mogu da deluju na jedno telo, a tražena sila (ili tražene sile) mogu da deluju na drugo telo; u takvim slučajevima treba najpre da se razmotri ravnoteža prvog tela i da se odredi sila kojom ono deluje na drugo telo, a zatim da se pređe na razmatranje ravnoteže drugog tela i da se odrede tražene veličine.

Zadatak 10. Štapovi AB i BC vezani su za vertikalni zid i međusobom zglobovima, a u tački B je pričvršćen kotur (sl. 33, a). Preko kotura je prebačen konopac, čiji je jedan kraj vezan za zid, dok je za drugi kraj obešen teret G. Odrediti reakcije u štapovima, zanemarujući njihovu težinu i dimenzije kotura. Uglovi α i β su poznati.



Sl. 33

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu kotura sa delom konopca DE koji je priljubljen uz kotur*; uklonimo veze i zamenimo ih reakcijama (sl. 33, b).

Tada će na kotur sa delom konopca delovati četiri spoljašnje sile: zatežuća sila u desnom delu konopca koja je jednaka $\vec{G}$; zatim, zatežuća sila u levom delu konopca koja je jednaka $\vec{F}_K$ (ove dve sile brojčano su jednake, tj. $G = F_K$) i reakcije štapova $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje su usmerene duž štapova. Ako zanemarimo dimenzije kotura, onda dati sistem sila predstavlja sistem sila koji napada jednu

* U sličnim slučajevima korisno je razmatrati kotur zajedno sa delom konopca koji je priljubljen uz njega kao jedno telo. Tada nepoznati uzajamni pritisci konopca i kotura, raspodeljeni po luku $\widehat{de}$, predstavljaju uravnoteženi sistem unutrašnjih sila, koje ne ulaze u uslove ravnoteže (vidi § 3, posledice aksiome 4.). Ako se pak kotur posmatra odvojeno (sl. 33, c — razmera je na ovom crtežu izmenjena, onda će na kotur delovati po luku $\widehat{de}$ kontinualno raspodeljene sile pritiska konopca, čija rezultanta treba da se odredi postavljajući dopunske uslove ravnoteže dela konopca DE (korišćenjem principa ukrućivanja) što komplikuje račun.

tačku. Kako je broj ovih sila veći od tri, korisno je da se pri rešavanju ovog zadatka upotrebi analitička metoda. Povucimo koordinatne ose kako je pokazano na crtežu i odredimo projekcije svih sila na ove ose (vidi tablicu).

$\vec{F}_i$	$\vec{G}$	$\vec{F}_K$	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$
X_i	0	$-F_K \cos \beta$	$F_1 \sin \alpha$	$-F_2$
Y_i	$-G$	$F_K \sin \beta$	$F_1 \cos \alpha$	0

Zatim, korišćenjem uslova ravnoteže (12), postavimo odgovarajuće jednačine i istovremeno zamenimo veličinu sile F_K sa veličinom G ; tako dobijamo:

$$\begin{cases} \Sigma X_i \equiv -G \cos \beta + F_1 \sin \alpha - F_2 = 0, \\ \Sigma Y_i \equiv -G + G \sin \beta + F_1 \cos \alpha = 0. \end{cases}$$

Iz druge jednačine nalazimo:

$$F_1 = \frac{1 - \sin \beta}{\cos \alpha} G.$$

Ako smenimo ovaj izraz u prvu od gornjih jednačina, i ako izvršimo potrebne transformacije, posle sređivanja, dobićemo:

$$F_2 = \frac{\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha} G.$$

Iz dobijenog izraza za F_1 sleduje da je pri bilo kojim veličinama oštarih uglova α i β , $F_1 > 0$. To znači da je reakcija $\vec{F}_1$ uvek usmerena tako, kako je pokazano na crtežu. Pritisak kotura na štap usmeren je u suprotnom smeru (štap BC je pritisnut). Međutim, za reakciju $\vec{F}_2$ dobićemo drugi rezultat. Smatramo da su uglovi α i β uvek oštri. Kako je

$$\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta) = \sin \alpha - \sin(90^\circ - \alpha + \beta),$$

to će ova razlika biti pozitivna, ako je $\alpha > (90^\circ - \alpha + \beta)$, ili kada je $2\alpha > 90^\circ + \beta$. Odatle sleduje da je pri $\alpha > (45^\circ + \beta/2)$ veličina $F_2 > 0$, tj. reakcija $\vec{F}_2$ ima smer naznačen na crtežu; ako je pak $\alpha < (45^\circ + \beta/2)$, onda je $F_2 < 0$, tj. reakcija $\vec{F}_2$ ima suprotan smer (od A ka B). U prvom slučaju štap AB je zategnut, dok je u drugom slučaju pritisnut. Kada je $\alpha = 45^\circ + \beta/2$, tada je $F_2 = 0$.

Obratimo pažnju na sledeće zaključke:

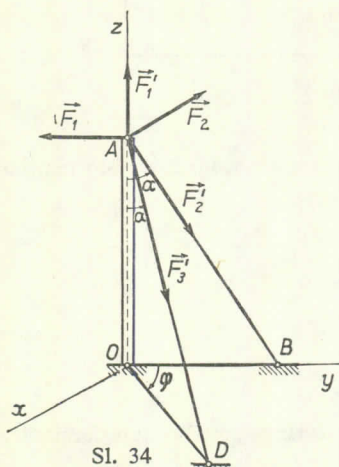
1. Ako u sistemu postoje koturi sa prebačenim konopcima, onda pri postavljanju uslova ravnoteže treba da se posmatra kotur zajedno sa priljubljenim delom konopca uz njega kao jedno telo. Ako pri tome zanemarimo trenje konopca o kotur ili trenje na osovini kotura, onda će sile u oba dela konopca biti jednake po intenzitetu i usmerene oš kotur (u protivnom slučaju konopac bi klizao u stranu veće sile u konopcu, ili bi se kotur obrtao; vidi takode zadatak 13.).

2. Ako pri predstavljanju sila bilo koju od reakcija veze ne usmerimo u stranu u koju ona stvarno deluje, onda će ta činjenica da se otkrije pri konstruisanju poligona sila (pravilo strelica), dok će pri analitičkom rešavanju veličina takve reakcije ispasti negativna.

Međutim, u svim slučajevima, kada se to unapred može predvideti, treba reakciju veze odmah usmeriti pravilno. Na primer, u zadatku 8 smer reakcije ležišta A može da se utvrdi sledećim rašuđivanjem: ako uklonimo ležište, onda će kran pod dejstvom sile $\vec{G}$ početi da pada udesno; prema tome, sila $\vec{F}_A$ koja zamenjuje dejstvo ležišta, mora da deluje ulevo, da bi održala kran u ravnoteži.

Zadatak 11. Vertikalni stub OA , poboden u zemlju, vezan je pomoću dve zatege AB i AD , čiji pravci zaklapaju sa stubom jednake uglove $\alpha = 30^\circ$; ugao između ravni AOB i AOD iznosi $\varphi = 60^\circ$ (sl. 34). Za stub su vezana, paralelno osama Ox i Oy , dva međusobno upravna horizontalna telefonska voda, od kojih je svaki zategnut silom $F = 100$ kp. Odrediti vertikalni pritisak na stub i sile u zategama zanemarujući njihove težine.

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu čvora A , u kome se susreću zatege i telefonski vodovi. Na čvor deluju zatežuće sile u vodovima $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), sile u zategama $\vec{F}'_2$ i $\vec{F}'_3$, kao i reakcija



Sl. 34

stuba $\vec{F}'_1$. Kao što vidimo sistem sila je prostorni. Povucimo koordinatne ose (vidi sliku) i odredimo projekcije svih sila na ove ose i zatim ih unesimo u tablicu (projekcije sile $\vec{F}'_3$ na ose x i y izračunaćemo tako kako je bilo pokazano na kraju § 8.

$\vec{F}_i$	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}'_1$	$\vec{F}'_2$	$\vec{F}'_3$
X_i	0	$-F$	0	0	$F'_3 \sin \alpha \sin \varphi$
Y_i	$-F$	0	0	$F'_2 \sin \alpha$	$F'_3 \sin \alpha \cos \varphi$
Z_i	0	0	F'_1	$-F'_2 \cos \alpha$	$-F'_3 \cos \alpha$

Sada korišćenjem uslova ravnoteže (11), postavimo jednačine:

$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= -F + F'_3 \sin \alpha \sin \varphi = 0 \\ \Sigma Y_i &= -F + F'_2 \sin \alpha + F'_3 \sin \alpha \cos \varphi = 0, \\ \Sigma Z_i &= F'_1 - F'_2 \cos \alpha - F'_3 \cos \alpha = 0. \end{aligned}$$

Rešavanjem ovih jednačina nalazimo:

$$F'_1 = F \left(1 + \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{ctg} \alpha, \quad F'_2 = F \frac{1 - \operatorname{ctg} \varphi}{\sin \alpha}, \quad F'_3 = \frac{F}{\sin \alpha \sin \varphi}$$

Iz dobijenih rezultata se vidi da je pri $\varphi < 45^\circ$ veličina $F'_2 < 0$, pa reakcija $\vec{F}'_2$ ima suprotan smer od smera koji je pokazan na slici. Kako konopac ne može da radi na pritisak, to odatle proizlazi da konopac AB treba da se postavi tako da ugao φ bude veći od 45° . Za date brojčane podatke dobićemo:

$$F'_1 = 273 \text{ kp}, \quad F'_2 = 85 \text{ kp}, \quad F'_3 = 231 \text{ kp}.$$

§ 14. Moment sile za tačku (ili centar)

Opit pokazuje da kruto telo pod dejstvom sila može pored translatorsnog kretanja da vrši i obrtanje oko neke tačke (centra). Obrtni efekat sile karakteriše se njenim *momentom*.

Neka sila $\vec{F}$ napada kruto telo u tački A (sl. 35). Pretpostavimo da ova sila teži da obrne kruto telo oko tačke O . Normala h , spuštена iz tačke (centra) O na napadnu liniju sile $\vec{F}$, naziva se *krakom* sile za tačku O . Kako napadnu tačku sile možemo proizvoljno pomerati duž njene napadne linije, to, očividno, obrtni efekat sile zavisi od:

a) intenziteta sile F i dužine kraka h ;

- b) položaja ravni obrtanja OAB , koja prolazi kroz tačku O i kroz silu $\vec{F}$;
 c) od smera obrtanja u toj ravni.

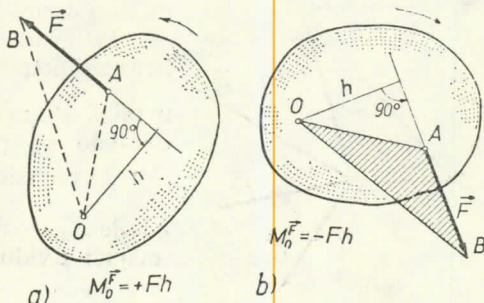
Ograničimo se za sada na sisteme sila koji deluju u jednoj ravni. U tom slučaju ravan obrtanja je za sve sile ista i neki dopunski uslovi nisu potrebni, dok smer obrtanja može da se okarakterise znakom, smatrajući obrtanje u nekom smeru pozitivnim i u suprotnom smeru negativnim.

Tada za količinsku meru obrtnog efekta sile može da se uvede sledeći pojam o momentu sile: *momentom sile*

$\vec{F}$ za tačku O naziva se veličina (uzeta sa odgovarajućim znakom) koja je jednaka proizvodu iz intenziteta sile i kraka sile.

Moment sile $\vec{F}$ za tačku O označićemo simbolom $M_O^{\vec{F}}$. Prema tome

$$M_O^{\vec{F}} = \pm Fh. \quad (13)$$



Sl. 35

U daljim izlaganjima smatraćemo da moment ima znak plus (tj. da je pozitivan), ako teži da obrne kruto telo oko tačke O u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku i znak minus (tj. da je negativan), ako teži da obrne kruto telo u smeru obrtanja kazaljke na časovniku. Tako, npr., moment sile $\vec{F}$, prikazane na sl. 35, *a*, za tačku O ima znak plus (pozitivan je), dok je moment sile $\vec{F}$, prikazane na sl. 35, *b* negativan (ima znak minus). Ako silu merimo u kilopondima, a krak u metrima, onda će se moment sile meriti u *kilopondmetrima*.

Primitimo sledeća svojstva momenta sile:

1. Moment sile se ne menja pri pomeranju napadne tačke sile duž njene napadne linije.
2. Moment sile za tačku O jednak je nuli samo u tom slučaju, kada je sila jednaka nuli, ili pak ako napadna linija sile prolazi kroz tačku O , tj. ako je krak sile jednak nuli.
3. Brojčana veličina momenta prikazana je dvostrukom površinom trougla OAB (sl. 35, *b*).

$$M_O^{\vec{F}} = \pm 2 \cdot \text{površina } \triangle OAB. \quad (14)$$

Ovaj rezultat proizlazi iz činjenice da je

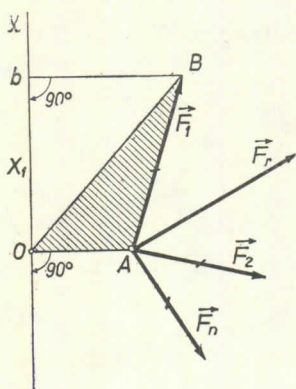
$$\text{površina } \triangle OAB = \frac{1}{2} \overline{AB} \cdot h = \frac{1}{2} Fh.$$

4. Moment sile $\vec{F}$ za tačku O određuje tačku kroz koju prolazi napadna linija sile; ta tačka udaljena je od tačke O za rastojanje

$$h = \frac{|M_O^{\vec{F}}|}{F},$$

pri čemu se h nanosi po normali spuštenoj na pravac vektora $\vec{F}$ u stranu koja je određena znakom momenta.

§ 15. Varinjonova teorema o momentu rezultante



Sl. 36

Ova teorema glasi: *Moment rezultante ravnog sistema sučelnih sila za proizvoljnu tačku jednak je algebarskom zbiru momenata komponentata za istu tačku (Varinjonova teorema).**

Da bismo dokazali ovu teoremu odredimo najpre izraz za moment bilo koje sile za tačku O , koja deluje u tački A , npr. sile $\vec{F}_1$ (sl. 36). Povucimo osu Ox upravno na pravu OA . Tada je

$$2 \cdot \text{površina } \triangle OAB = \overline{OA} \cdot \overline{Ob} = \overline{OA} \cdot X_1,$$

gde je X_1 — projekcija sile $\vec{F}_1$ na osu Ox ; odavde, imajući u vidu izraz (14), proizlazi

$$M_O^{\vec{F}_1} = \overline{OA} \cdot X_1. \quad (15)$$

Formula (15) važi i u slučaju kada sila $\vec{F}_1$ prolazi ispod linije OA ; u tom slučaju moment će samo biti negativan, jer će biti negativna i sama projekcija X_1 .

Razmotrimo sada ravan sistem sučelnih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ sa napadnom tačkom u tački A (sl. 36). Napadna tačka njihove rezultante takođe je u tački A ; pri tome je $\vec{F}_r = \Sigma \vec{F}_i$. Tada je, na osnovu teoreme o projekciji sume sila na osu: $X_r = \Sigma X_i$. Ako obe strane ove jednačine pomnožimo sa $\overline{OA}$, dobićemo:

$$\overline{OA} \cdot X_i = \Sigma (\overline{OA} \cdot X_i),$$

ili, prema formuli (15) biće

$$M_O^{\vec{F}_r} = \Sigma M_O^{\vec{F}_i}. \quad (16)$$

Formula (16) u matematičkom obliku iskazuje Varinjonovu teoremu.

§ 16.* Momentne jednačine za ravan sistem sučelnih sila

Uslovi ravnoteže ravnog sistema sučelnih sila mogu da se postave ne samo pomoću projekcija tih sila na ose koordinatnog sistema, već takođe i pomoću momenata tih sila. Pokažimo da su za ravnotežu ravnog sistema sučelnih sila potrebni i dovoljni sledeći uslovi:

$$\Sigma M_B^{\vec{F}_i} = 0, \quad \Sigma M_C^{\vec{F}_i} = 0 \quad (17)$$

* P. Varinjon (1654—1722) — istaknuti francuski naučnik, matematičar i mehaničar. Izložio je osnove statike u knjizi «Nacrt nove mehanike» (1687).

pri čemu su B i C — bilo koje tačke, koje ne leže na istoj pravoj sa tačkom A u kojoj se sučeljavaju sile (sl. 37).

Neophodnost tih uslova je očevidna, jer ako je, npr., $\Sigma \vec{M}_B^{F_i} \neq 0$, onda je kako se vidi iz obrasca (16), i $M_B^{\vec{F}_r} \neq 0$, a to znači da je $\vec{F}_r \neq 0$, pa u tom slučaju ne može biti ravnoteže.

Dokažimo sada da su ti uslovi u isto vreme i dovoljni. Ako su uslovi (17) zadovoljeni onda je na osnovu Varinjo-nove teoreme $M_B^{\vec{F}_r} = 0$ i $M_C^{\vec{F}_r} = 0$, što je opet moguće, ili kada je $\vec{F}_r = 0$, ili pak, kada napadna linija rezultante jednovremeno prolazi i kroz tačku B i kroz tačku C . Međutim, ovo drugo je u našem slučaju nemoguće, jer rezultanta sučelnog sistema sila mora da prolazi kroz tačku A (sl. 17), dok prava BC , prema postavljenim uslovima, ne prolazi kroz tačku A . Prema tome, kada su uslovi (17) ispunjeni onda je rezultanta $\vec{F}_r = 0$, tj. ravan sistem sučelnih sila zaista se nalazi u ravnoteži.

Ako je ispunjen samo jedan, bilo koji od uslova (17), onda, očevidno, ravan sistem sučelnih sila neće biti u ravnoteži.

Pri rešavanju zadataka korišćenjem uslova (17) moguće je da se postave jednačine (uslovi) ravnoteže u takvom obliku da svaka jednačina sadrži samo po jednu nepoznatu veličinu; da bismo to postigli potrebno je da se tačke za koje ćemo određivati momente biraju na napadnim linijama sila koje treba odrediti.

Zadatak 12. Rešiti zadatak 7. pomoću momentnih jednačina.

Rešenje. Uvedimo oznake $\overline{AB} = \overline{AC} = a$ i uzmimo tačke A i C za momentne tačke (sl. 38). Ako iz tačke A spustimo normale AE i AK na napadne linije sila $\vec{F}_K$ i $\vec{G}$, dobićemo:

$$\overline{AE} = a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad \overline{AK} = a \sin \alpha; \quad \text{prema tome,} \quad M_A^{\vec{F}_K} =$$

$$= F_K a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad M_A^{\vec{G}} = -G a \sin \alpha. \quad \text{Osim toga } M_A^{\vec{F}_A} = 0. \quad \text{Na}$$

analogan način možemo izračunati momente sila i za tačku C . Najзад, postavljanjem uslova ravnoteže (17), dobijamo:

$$\left| \begin{array}{l} \Sigma M_A^{F_i} \equiv F_K a \cos \frac{\alpha}{2} - G a \sin \alpha = 0, \\ \Sigma M_C^{F_i} \equiv F_A a \sin \alpha - G a \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

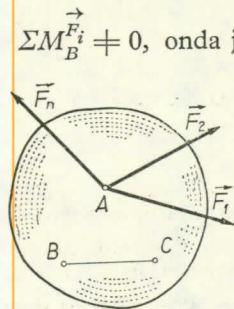
Iz prve jednačine, s obzirom da je $F_K = G_1$, nalazimo

$$\left(G_1 - 2 G \sin \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} = 0.$$

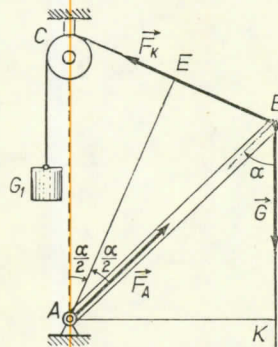
Odavde za ugao α , koji određuje položaj ravnoteže, dobijamo dve vrednosti

$$\alpha = 180^\circ \quad \text{i} \quad \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{G_1}{2G}.$$

Iz druge jednačine pri $\alpha \neq 180^\circ$ nalazimo $F_A = G$.



Sl. 37



Sl. 38

Zadatak 13. U zadatku 10. odrediti reakciju F_2 korišćenjem momentne jednačine.

Rešenje. Birajući tačku C za momentnu tačku (vidi sl. 33, b) i stavljajući $\overline{CB} = a$, dobijamo:

$$\sum \vec{M}_C^{F_i} \equiv F_K a \cos(\alpha - \beta) + F_2 a \cos \alpha - G_1 a \sin \alpha = 0.$$

Odavde, kako je $F_K = G$, izlazi odmah da je:

$$F_2 = G \frac{\sin \alpha - \cos(\alpha - \beta)}{\cos \alpha}.$$

Reakciju F_1 možemo odrediti postavljenjem momentne jednačine za tačku A .

Momentne jednačine, kao što vidimo, možemo koristiti za proveru tačnosti rezultata dobijenih drugim metodama.

Primetimo da ispravnost jednačine $F_K = G$ može da se potvrdi postavljanjem momentne jednačine za središte kotura (ova jednačina, kako će biti dokazano u § 24, važi i za proizvoljan sistem sila u ravni). Odavde dobijamo $F_K r - Gr = 0$, gde je r — poluprečnik kotura, ili $F_K = G$.

RAVNI SISTEMI PARALELNIH SILA I SPREGOVA

§ 17. Slaganje i razlaganje paralelnih sila

Odredimo rezultantu dveju paralelnih sila koje deluju na kruto telo. Ovde mogu da nastanu dva slučaja: 1) paralelne sile su usmerene u istu stranu, i 2) paralelne sile su usmerene u suprotne strane.

1) Slaganje dveju sila usmerenih u istu stranu. Neka na kruto telo deluju dve paralelne sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ (sl. 39). Koristeći aksiome 1 i 2 prećićemo od datog sistema sila na njemu ekvivalentan ravan sistem od dve sučeljne sile $\vec{F}_1''$ i $\vec{F}_2''$. Da bismo to postigli nanesimo u tačkama A i B dve uravnotežene sile $\vec{F}_1'$ i $\vec{F}_2'$ ($\vec{F}_1' = -\vec{F}_1''$), usmerene duž prave AB , i složimo ih sa silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ po pravilu paralelograma. Dobivene sile $\vec{F}_1'$ i $\vec{F}_2''$ prenesemo u tačku O , u kojoj se seku njihove napadne linije i zatim razložimo obe sile u njihove prvobitne komponente. Posle toga u tački O delovaće dve uravnotežene sile $\vec{F}_1'$ i $\vec{F}_2''$, koje onda možemo da uklonimo, a pored njih delovaće duž iste prave sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Prenesimo ove sile u tačku C i zamenimo ih rezultantom $\vec{F}_r$, čiji je intenzitet jednak

$$F_r = F_1 + F_2. \quad (18)$$

Sila $\vec{F}_r$ je rezultanta paralelnih sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, koje napadaju kruto telo u tačkama A i B . Da bismo odredili položaj tačke C razmotrimo trouglove: OAC , Oab i OCB , Omb . Iz sličnosti ovih trouglova sleduje:

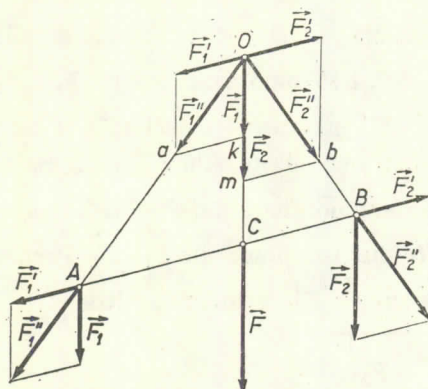
$$\frac{\overline{AC}}{\overline{OC}} = \frac{F_1'}{F_1} \quad \text{i} \quad \frac{\overline{BC}}{\overline{OC}} = \frac{F_2'}{F_2},$$

ili $\overline{AC} \cdot F_1 = \overline{BC} \cdot F_2$, jer je $F_1' = F_2'$.

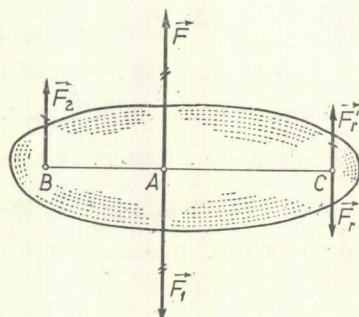
Odavde, imajući u vidu svojstva proporcija, i činjenicu da je $\overline{BC} + \overline{AC} = \overline{AB}$ i $F_1 + F_2 = F_r$, dobijamo

$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r} \quad (19)$$

Prema tome, *rezultanta dveju paralelnih sila koje deluju na kruto telo i koje su usmerene u istu stranu, jednaka je po intenzitetu zbiru intenziteta njenih komponentenata, paralelna im je i usmerena je u istu stranu; napadna linija rezultante prolazi između napadnih tačaka komponentenata, a na rastojanjima od tih tačaka koja su obrnuto proporcionalna silama.*



Sl. 39



Sl. 40

2) *Slaganje dveju sila usmerenih u suprotne strane.* Neka na kruto telo deluju dve sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ i neka je (da bi zadatak bio određen) $F_1 > F_2$ (sl. 40) Uočimo na produžetku prave BA bilo koju tačku C i nanesimo u njoj dve uravnotežene sile $\vec{F}_r$ i $\vec{F}'_r$, paralelne silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$. Pri tome, intenzitete ovih sila i položaj tačke C izaberimo tako da budu zadovoljene jednačine

$$F_r = F_1 - F_2; \quad (20)$$

$$\frac{\overline{BC}}{F_1} = \frac{\overline{AC}}{F_2} = \frac{\overline{AB}}{F_r} \quad (21)$$

Tada, ako složimo sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}'_r$, po formulama (18) i (19) nalazimo da će njihova rezultanta po intenzitetu biti jednaka $F_2 + F'_r$, tj. biće jednaka sili $\vec{F}$ sa napadnom tačkom u tački A . Sada sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_1$, kao uravnotežene možemo ukloniti. Kao što vidimo, u krajnjem rezultatu sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ biće zamenjene jednom silom $\vec{F}_r$, koja predstavlja njihovu rezultantu. Intenzitet ove rezultante, kao i napadna tačka C ove rezultante određeni su formulama (20) i (21). Na taj način možemo reći: *rezultanta dveju paralelnih sila koje deluju na kruto telo i koje su usmerene u suprotne strane, jednaka je po intenzitetu razlici intenziteta njenih komponentenata, paralelna im je i usmerena je u stranu sile većeg intenziteta; napadna linija rezultante prolazi*

izvan pravolinijskog odsečka koji spaja napadne tačke sila koje slažemo, a na rastojanjima od tih tačaka obrnuto proporcionalnim intenzitetima sila.

Ako na kruto telo deluje veći broj paralelnih sila, onda njihovu rezultantu, ukoliko ona postoji, možemo dobiti ili postupnom primenom pravila za slaganje dveju paralelnih sila, ili, pak, pomoću metode koja će biti izložena u glavi IV.

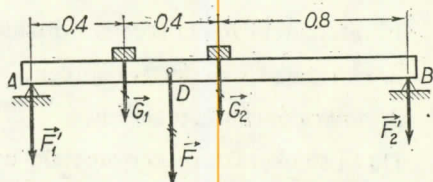
3) Razlaganje sila. Pomoću dobijenih formula moguće je da se reši i zadatak razlaganja date sile, u dve paralelne joj sile, koje su usmerene u istu, ili pak u suprotne strane. Ovaj zadatak biće potpuno određen tek ako su dati izvesni dopunski uslovi (npr., napadne linije obeju traženih sila ili pak intenzitet i napadna linija jedne od njih).

Zadatak 14. Odrediti pritiske horizontalne grede na oslonce A i B , ako su težine tereta koji leže na gredi $G_1 = G_2 = 80$ kp (sl. 41). Dimenzije su date na crtežu težinu grede zanemariti.

Rešenje. Najpre zamenimo sile $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$ njihovom rezultantom $\vec{F}$, koja prolazi kroz tačku D . Intenzitet rezultante je $F = 160$ kp. Zatim, razložimo silu $\vec{F}$ na sile $\vec{F}'_1$ i $\vec{F}'_2$ u pravce reakcija oslonaca (vidi napomenu u § 7), koje predstavljaju tražene pritiske na oslonce. Iz jednačine

$$\frac{F'_1}{DB} = \frac{F}{AB} \quad \text{i} \quad F'_2 = F - F'_1,$$

nalazimo $F'_1 = 100$ kp $F'_2 = 60$ kp.



Sl. 41

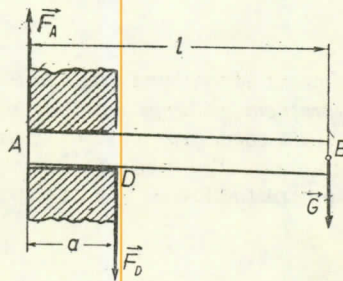
Zadatak 15. U zid, debljine $a = 0,5$ m, uzidana je greda AB , dužine $l = 2,5$ m (sl. 42). O kraj B grede obešen je teret $G = 3$ Mp. Zanemarujući težinu grede, odrediti pritiske na zid, smatrajući da oni deluju u tačkama A i D (greda je vrlo malo iskrivljena).

Rešenje. Da bismo odredili tražene pritiske razložimo silu $\vec{G}$ na sile $\vec{F}_D$ i $\vec{F}_A$ u pravce reakcija oslonaca u tačkama D i A . Kako sila $\vec{G}$ ne leži između traženih sila, to će pritisci biti usmereni u suprotne strane, pri čemu će intenzitet sile $\vec{F}_D$ (koja je bliža sili $\vec{G}$) biti veći od $\vec{F}_A$ i ova sila imaće isti smer kao i sila $\vec{G}$. Iz jednačina

$$\frac{F_D}{l} = \frac{G}{a} \quad \text{i} \quad G = F_D - F_A,$$

nalazimo

$$F_D = \frac{l}{a} G = 15 \text{ Mp}; \quad F_A = 12 \text{ Mp}.$$



Sl. 42

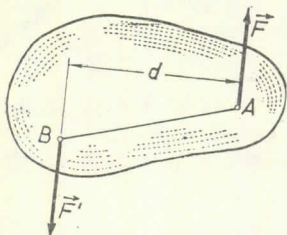
Za kontrolu može da se postavi druga proporcija:

$$\frac{F_A}{l - a} = \frac{G}{a}.$$

§ 18. Spreg sila. Moment sprega sila

Spregom sila naziva se sistem od dve paralelne sile, istih intenziteta, a suprotnih smerova, koje deluju na kruto telo (sl. 43). Sistem sila, koji obrazuje spreg, očividno se ne nalazi u ravnoteži (na osnovu aksiome 1.). U isto vreme spreg sila, za razliku od do sada proučenih sistema sila, nema rezultantu.

Naime, ako bi spreg imao neku rezultantu $\vec{F}_r$, onda bi sistem sila $\vec{F}$, $\vec{F}'$ i $\vec{F}_r = -\vec{F}_r$ morao da bude u ravnoteži, što je nemoguće, jer je $\vec{F} + \vec{F}' + \vec{F}_r \neq 0$



Sl. 43

(pošto je $\vec{F} + \vec{F}' = 0$, a $\vec{F}_r \neq 0$); međutim, za ravnotežu bilo kog sistema sila, kako će to biti dokazano, potrebno je da njihov geometrijski zbir bude jednak nuli. Na taj način, spreg sila ne može se zameniti niti uravnotežiti jednom silom. Prema tome, svojstva sprega, kao posebne mere mehaničkog uzajamnog dejstva između tela, treba posebno proučiti.

Ravan koja prolazi kroz napadne linije sila koje obrazuju spreg zove se *ravan dejstva sprega*. Rastojanje d između napadnih linija sila sprega zove se *krak sprega*. Dejstvo sprega sila na kruto telo svodi se na izvestan obrtni efekat, koji zavisi od:

1. intenziteta F sila sprega i dužine njegovog kraka d ;
2. položaja ravni dejstva sprega;
3. smera obrtanja u toj ravni.

Da bi se okarakterisao ovaj efekat uvodi se pojam momenta sprega.

U ovoj glavi proučićemo svojstva spregova koji deluju u jednoj ravni. Za ovaj slučaj, po analogiji se pojmom momenta sile (§ 14), moguće je izreći sledeću definiciju: *momentom sprega sila naziva se veličina, uzeta sa odgovarajućim znakom, koja je jednaka proizvodu iz intenziteta jedne od sila i kraka sprega**. Označimo moment sprega simbolom $\mathfrak{M}$. Tada je

$$\mathfrak{M} = \pm F \cdot d. \quad (22)$$

Moment sprega ima znak plus (pozitivan je), kada spreg teži da obrne telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku, i znak minus (negativan je), kada spreg teži da obrne telo u smeru obrtanja kazaljke na časovniku. Moment sprega sila, kao i moment sile, meri se u kilopondmetrima. Očevidno je da je moment sprega jednak momentu jedne od sila za napadnu tačku druge sile (sl. 43):

$$\mathfrak{M} = M_B^{\vec{F}} = M_A^{\vec{F}'}. \quad (23)$$

Dokažimo sledeću teoremu o momentu sprega sila: *algebarska suma momenata svake od sila, koje obrazuju spreg, za bilo koju tačku, koja leži u ravni dejstva sprega, ne zavisi od izbora te tačke i jednaka je momentu sprega sila*. Izaberimo u ravni dejstva sprega sila bilo koju tačku O ; sa sl. 44 nalazimo

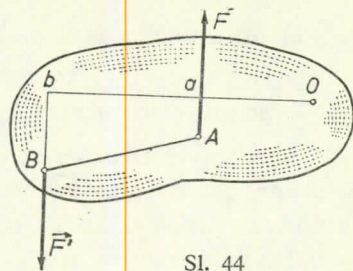
$$M_O^{\vec{F}} = -F \cdot \overline{Oa} \quad \text{i} \quad M_O^{\vec{F}'} = F \cdot \overline{Ob}.$$

* Ovaj pojam ne treba mešati sa pojmom momenta sile. Pojam momenta sile vezan je za tačku, za koju se određuje moment sile. Moment sprega sila definisan je pak samo silama koje obrazuju spreg i krakom sprega; ni sa kojom tačkom u ravni ova veličina ne stoji u vezi. Teoriju spregova razradio je poznati francuski mehaničar i geometričar L. Poanson (1777—1859).

Ako saberemo ove jednačine i ako primetimo da je $\overline{Ob} - \overline{Oa} = d$ i $F' = F$, gde je d krak sprega, dobićemo:

$$\mathfrak{M} = M_O^{\vec{F}} + M_O^{\vec{F}'} \quad (24)$$

Dokazanu teoremu korisno je upotrebiti pri izračunavanju momenta sila koje obrazuju spreg za bilo koju tačku.

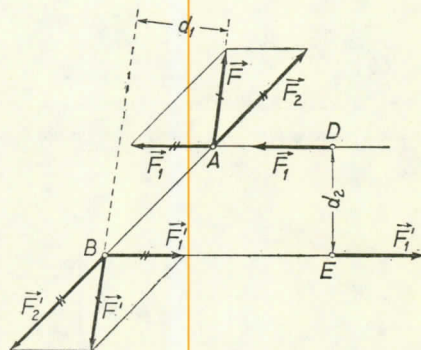


Sl. 44

§ 19. Ekvivalentnost spregova sila

Da bismo ustanovili uslove ekvivalentnosti dva sprega, dokažimo najpre sledeću teoremu: *ne menjajući uticaj dejstva na telo, može se spreg sila, koji deluje na kruto telo, zameniti bilo kojim drugim spregom, koji leži u istoj ravni i ima isti moment.*

Neka na kruto telo deluje spreg $(\vec{F}, \vec{F}')$ sa krakom d_1 . Prikažimo sile tog sprega sa proizvoljno uzetim napadnim tačkama na njihovim napadnim linijama; neka to budu tačke A i B (sl. 45) i povucimo kroz te tačke dve bilo koje paralelne prave AD i BE . Rastojanje između tih pravih označimo sa d_2 . Razložimo sada silu $\vec{F}$ u komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ duž pravaca BA i AD , a silu $\vec{F}'$ u komponente $\vec{F}'_1$ i $\vec{F}'_2$ duž pravaca AB i BE . Očevидno je da je pri tome $F_1 = -F'_1$



Sl. 45

i $F_2 = -F'_2$. Sile F_2 i F'_2 , kao uravnotežene, možemo ukloniti. Kao što vidimo u krajnjem rezultatu spreg $(\vec{F}, \vec{F}')$ zamenjen je spregom $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$, koji obrazuju druge sile, sa drugim krakom; ove sile očevидno možemo da uzmemo tako da deluju u bilo kojim tačkama D i E na njihovim napadnim linijama. Pri tome, s obzirom na potpuno proizvoljan izbor tačaka A i B , a takođe i na proizvoljan izbor pravaca AD i BE , može se smatrati da se spreg $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ nalazi bilo gde u ravni svog dejstva. Pokažimo na kraju da su momenti ovih spregova međusobom jednaki. Kako je sila $\vec{F}$ rezultanta sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, to je prema Varinjonovoj teoremi

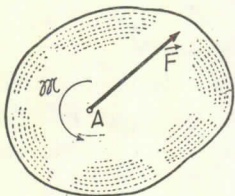
$$M_B^{\vec{F}} = M_B^{\vec{F}_1} + M_B^{\vec{F}_2}.$$

Međutim, kako je: $M_B^{\vec{F}} = Fd_1$, $M_B^{\vec{F}_1} = F_1d_2$, $M_B^{\vec{F}_2} = 0$, to proizlazi da je $Fd_1 = F_1d_2$, tj. momenti ovih spregova jednaki su jedan drugom, čime je teorema dokazana.

Iz dokazane teoreme proizlaze sledeće osobine sprega sila:

- 1) dati spreg može se prenositi bilo kako u ravni svog dejstva;
- 2) kod datog sprega može se menjati intenzitet sila ili pak krak sprega, ali tako da se pri tome moment sprega sila ne promeni.

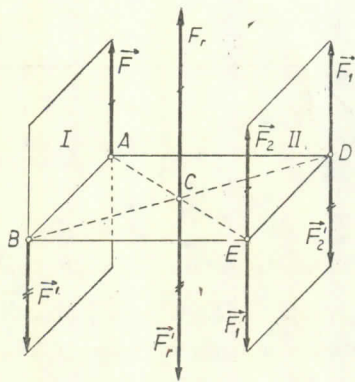
Odavde proizlazi da su dva sprega, koja deluju u istoj ravni i koji imaju iste momente, ekvivalentna međusobom, jer preko navedenih operacija oni mogu da se pretvore jedan u drugi. Istovremeno iz svih dokazanih teorema može da se zaključi, da je dejstvo sprega stvarno okarakterisano njegovim momentom.



Sl. 46

Da bismo definisali spreg sila koji deluje u datoj ravni, dovoljno je na osnovu svega izloženog, da se da samo njegov moment; čemu su pri tome jednake sile, ili pak krak sprega — nije bitno. Iz tog razloga, naročito u tehnici, spreg se često prikazuje kružnom strelicom (usmerenim kružnim lukom), koja pokazuje smer obrtanja, ne ucrtavajući sile koje obrazuju spreg (npr., na sl. 46 je prikazano da na kruto telo deluju sila $\vec{F}$ i spreg momenta M).

Dokažimo sada drugu teoremu: *dejstvo sprega sila na kruto telo se ne menja, ako spreg prenesemo iz date ravni u bilo koju drugu proizvoljno izabranu njoj paralelnu ravan.*



Sl. 47

Neka spreg $(\vec{F}, \vec{F}')$ deluje u ravni (I) (sl. 47). Povucimo ravan (II), paralelnu ravni (I), i uočimo u njoj odsečak DE , jednak i paralelan odsečku AB . U tačkama D i E nanesimo dva para uravnoteženih sile $\vec{F}_1 = \vec{F}_2 = \vec{F}$ i $\vec{F}' = \vec{F}'_2 = \vec{F}'$. Primetimo da slika $ABDE$ predstavlja paralelogram čije su dijagonale tačkom C podeljene na dva jednaka dela.

Složimo sada paralelne sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_2$; s obzirom da su one jednakih intenziteta, mogu da se zamene rezultantom $\vec{F}_r$, sa napadnom tačkom u sredini odsečka AE , tj. u tački C ; pri tome je $F_r = 2F$. Slično tome sile $\vec{F}'$ i $\vec{F}'_2$ možemo posle slaganja zameniti rezultantom $\vec{F}'_r$, sa napadnom tačkom u tački C na sredini odsečka BD ; pri tome je: $F'_r = 2F' = F_r$. Sile $\vec{F}_r$ i $\vec{F}'_r$, kao uravnoteženje, možemo sada da uklonimo. Kao što vidimo, u krajnjem rezultatu smo spreg

$(\vec{F}, \vec{F}')$, koji deluje u ravni (I), zamenili spregom $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$ koji deluje u ravni (II).

Iz dokazane teoreme proizlazi, da će dva sprega koja deluju u paralelnim ravnima i koja imaju iste momente, biti takođe ekvivalentna.

Obratimo pažnju na sledeću analogiju. Sila koja deluje na kruto telo okarakterisana je svojim intenzitetom, napadnom linijom i smerom duž napadne linije; napadnu tačku sile možemo proizvoljno pomerati duž njene napadne linije. Spreg sila koji deluje na kruto telo, određen je intenzitetom svog momenta, ravniom svog dejstva i smerom obrtanja; spreg sila, pak, u ravni njegovog dejstva, možemo sasvim proizvoljno premeštati.

Problem o tome kako će da se kreće kruto telo ako na njega deluje spreg sila, spada u probleme dinamike. Pomoću teorema koje važe u dinamici može se dokazati da proizvoljan spreg, koji deluje na slobodno kruto telo, obrće kruto telo oko njegovog težišta (vidi § 136). Ako pak telo ima nepomičnu obrtnu osu, onda spreg sila, koji deluje bilo gde u ravni upravnoj na osi obrtanja izaziva obrtanje datog tela oko date ose i to uvek dejstvom istog momenta, što proizlazi iz jednačine (24).

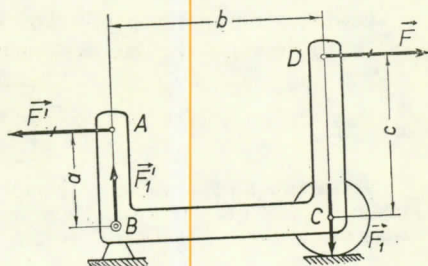
Zadatak 16. Kriva poluga $ABCD$ (sl. 48) nalazi se u ravnoteži pod dejstvom dveju paralelnih sila $\vec{F}$ i $\vec{F}'$, koje obrazuju spreg. Odrediti pritiske na ležišta, ako je $\overline{AB} = a = 15$ cm, $\overline{BC} = b = 30$ cm, $\overline{CD} = c = 20$ cm, $F = F' = 30$ kp.

Rešenje. Zamenimo spreg sila $(\vec{F}, \vec{F}')$ ekvivalentnim spregom $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, čije sile imaju pravce reakcije oslonaca. Tada momenti ovih spregova moraju biti jednaki, tj. $F(c - a) = F_1 b$.

Prema tome, pritisci na oslonce brojčano su jednaki

$$F_1 = F'_1 = \frac{c - a}{b} F = 5 \text{ kp}$$

i usmereni kako je pokazano na slici.



Sl. 48

§ 20. Slaganje spregova koji deluju u istoj ravni.

Uslovi ravnoteže spregova

Dokažimo sledeću teoremu o slaganju spregova: *sistem spregova, koji deluje u jednoj ravni, može se zameniti jednim spregom, koji deluje u istoj toj ravni i čiji je moment jednak algebarskoj sumi momenata komponentnih spregova.* Neka na kruto telo deluju tri sprega čiji su momenti: $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ i $\mathcal{M}_3$ (sl. 49). Na osnovu teoreme o ekvivalentnosti spregova možemo ova tri sprega zameniti sa druga tri sprega $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$, $(\vec{F}_2, \vec{F}_2')$ i $(\vec{F}_3, \vec{F}_3')$, koja imaju isti krak d i momente:

$$\mathcal{M}_1 = F_1 d,$$

$$\mathcal{M}_2 = -F_2 d,$$

$$\mathcal{M}_3 = F_3 d.$$

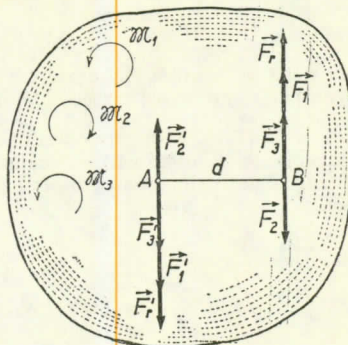
Ako sada složimo posebno sile koje deluju u tačkama A i B, dobićemo u tački B silu $\vec{F}_r$, a u tački A silu $\vec{F}'_r$, koje su jednakih intenziteta

$$F_r = F'_r = F_1 - F_2 + F_3$$

Kao što vidimo, u krajnjem rezultatu smo tri sprega zamenili jednim spregom $(\vec{F}_r, \vec{F}'_r)$ čiji je moment

$$\mathcal{M} = F_r d = F_1 d + (-F_2 d) + F_3 d = \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 + \mathcal{M}_3.$$

Za slučaj navedena tri sprega teorema je dokazana. Očevидno je da bismo do istog rezultata došli i u slučaju da smo radili sa proizvoljnim brojem spregova.



Sl. 49

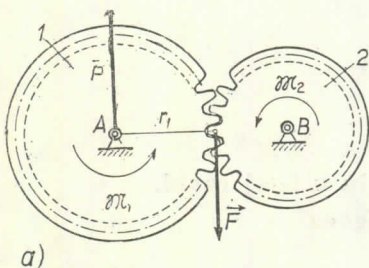
Sistem koji se sastoji od n spregova, čiji su momenti $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3, \dots, \mathcal{M}_n$, može se zameniti jednim spregom čiji jemoment

$$\mathcal{M} = \sum \mathcal{M}_i. \quad (25)$$

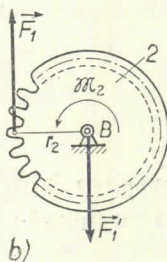
Iz dokazane teoreme proizlazi da je za ravnotežu ravnog sistema spregova potrebno i dovoljno da algebarska suma momenata tih spregova bude jednaka nuli

$$\sum \mathcal{M}_i = 0. \quad (26)$$

Zadatak 17. Na zupčanik 1, poluprečnika r_1 , deluje spreg sila čiji je moment $\mathcal{M}_1$ (sl. 50, a). Odrediti moment $\mathcal{M}_2$ sprega sila, kojim treba delovati na zupčanik 2, poluprečnika r_2 , da bi se održala ravnoteža.



Sl. 50



Rešenje. Razmotrimo najpre uslove ravnoteže zupčanika 1. Na ovaj zupčanik deluje spreg čiji je moment $\mathcal{M}_1$, koji može da bude uravnotežen samo dejstvom drugog sprega, u datom slučaju spregom $(\vec{F}, \vec{F}')$, koji nastaje od pritiska F na zubac od strane zupčanika 2 i od reakcije F' vratila u tački A. Tom prilikom je, prema jednačini (26), $\mathcal{M}_1 + (-Fr_1) = 0$ ili $F = \mathcal{M}_1/r_1$.

Razmotrimo sada uslove ravnoteže zupčanika 2. Prema aksiomi 4. na ovaj zupčanik deluje zupča-

nik 1 silom $\vec{F}_1 = -\vec{F}$ (sl. 50, b), koja sa reakcijom vratila B obrazuje spreg $(\vec{F}_1, \vec{F}'_1)$, čiji je moment jednak $-\vec{F}_1 r_2$. Ovaj spreg treba da uravnoteži spreg koji deluje na zupčanik 2, čiji je moment $\mathcal{M}_2$; prema tome, na osnovu uslova (25) biće $\mathcal{M}_2 + (-F'_1 r_2) = 0$. Oдавде, s obzirom da je $F'_1 = F$, nalazimo:

$$\mathcal{M}_2 = \frac{r_2}{r_1} \mathcal{M}_1.$$

Ne treba se čuditi što spregovi čiji su momenti $\mathcal{M}_1$ i $\mathcal{M}_2$ ne zadovoljavaju uslove ravnoteže (26). Stvar je u tome što ovi spregovi deluju na razna tela.

Sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_1$ koje smo odredili rešavanjem ovog zadatka nazivaju se *obimne sile*, koje deluju na zupčanik. Kao što vidimo, obimna sila je jednaka količniku iz momenta sprega sila koji deluje na zupčanik i poluprečnika zupčanika

$$F = \frac{\mathcal{M}_1}{r_1} = \frac{\mathcal{M}_2}{r_2}.$$

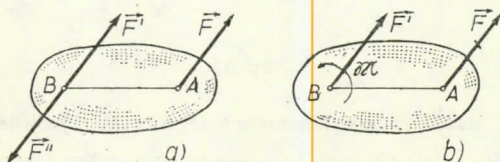
PROIZVOLJAN RAVAN SISTEM SILA

§ 21. Teorema o redukciji sile na tačku (paralelnom prenošenju sile)

Mnogi zadaci statike, a između njih i zadatak o svođenju (redukciji) sistema sila na prostiji oblik, mogu se rešiti korišćenjem sledeće teoreme: *silu koja deluje na kruto telo, možemo, ne menjajući njeno dejstvo, preneti paralelno njoj samoj u bilo koju tačku tela, ako pri tom sili pridodamo spreg, čiji je moment jednak momentu sile koju prenosimo za tačku u koju se sila prenosi.*

Neka na kruto telo deluje sila $\vec{F}$, čija je napadna tačka A (sl. 51, a). Dejstvo ove sile se ne menja, ako u bilo kojoj tački tela B dodamo dve uravnotežene sile $\vec{F}'$ i $\vec{F}''$, takve da je $\vec{F}' = \vec{F}$, $\vec{F}'' = -\vec{F}$. Dobiveni sistem od tri sile predstavlja silu $\vec{F}'$, koja je jednaka sili $\vec{F}$, sa napadnom tačkom u tački B i spreg $(\vec{F}, \vec{F}'')$ čiji je moment

$$\mathcal{M} = M_B^{\vec{F}}. \quad (27)$$



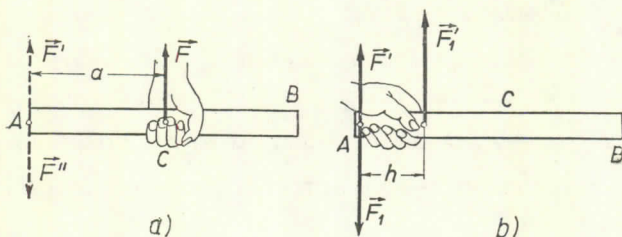
Sl. 51

Poslednja jednačina proizlazi iz formule (23). Prema tome, teorema je dokazana. Rezultat koji daje ova teorema može takođe da se prikaže i na način kako je to pokazano na sl. 51, b (na tom crtežu sila $\vec{F}$ je precrtana). Razmotrimo nekoliko primera na koje može da se primeni gornja teorema.

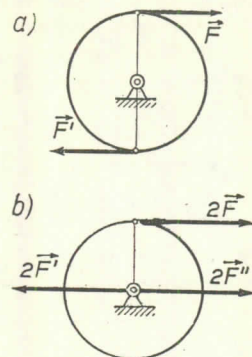
Primer 1. Da bismo održali u ravnoteži gredu AB , dužine $2a$, i težine G , treba, očevидno, delovati na sredini grede u tački C silom $\vec{F}$, koja je usmerena naviše, a koja je po intenzitetu jednaka G (sl. 52, a). Saglasno dokazanoj teoremi silu $\vec{F}$ možemo da zamenimo silom $\vec{F}'$, koja deluje na kraju A grede i spregom momenta $\mathcal{M} = Fa$. Ako krak ovog sprega smanjimo na veličinu h , onda sile $\vec{F}$ i $\vec{F}'$, koje obrazuju spreg sila, treba povećati toliko (sl. 52, b) da bude $F_1 h = Fa$. Prema tome, da bismo održali gredu u ravnoteži držeći je za kraj A , potrebno je da na gredu, osim sile $\vec{F}'$, delujemo

takođe i spregom sila ($\vec{F}_1, \vec{F}_1'$). Ovaj rezultat, koji proizlazi iz dokazane teoreme, neposredno oseća čovečija ruka, kada najpre držimo gredu za njenu sredinu (sl. 52, a) i zatim za kraj (sl. 52, b).

Primer 2. Na doboš a), poluprečnika r , namotana su u suprotnim smerovima dva konopca, na čijim krajevima deluju dve sile $\vec{F}$ i $\vec{F}' = -\vec{F}$ (sl. 53); na doboš b) istog poluprečnika namotan je konopac, na čijem kraju deluje sila $2\vec{F}$. U čemu se razlikuje dejstvo ovih sila?



Sl. 52



Sl. 53

Na doboš a) deluje samo spreg sila ($\vec{F}, \vec{F}'$) čiji je moment $2Fr$, koji obrće doboš. Silu, koja deluje na doboš b) možemo zameniti silom $2\vec{F}' = 2\vec{F}$, koja deluje na vratilo doboša i spregom sila ($2\vec{F}, 2\vec{F}'$). U krajnjem rezultatu dobijamo da na doboš deluju: 1) spreg sila istog momenta kao i u prvom slučaju čiji je moment $2Fr$ i koji obrće doboš, i 2) sila $2\vec{F}'$, koja izaziva pritisak na vratilo doboša. Oba doboša obrću se istovetno. Međutim, kao što smo videli, vratilo drugog doboša podnosi i pritisak, koji je jednak $2F$, dok vratilo prvog doboša ne podnosi nikakav pritisak.

§ 22. Svođenje (redukcija) ravnog sistema sila na datu tačku

Neka na kruto telo deluje proizvoljan ravan sistema sila: $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$. Uočimo u toj ravni proizvoljnu tačku O , koju ćemo nazvati *redukciona tačka*. Korišćenjem teoreme koja je dokazana u § 21 prenesimo sve sile u tačku O (sl. 54, a). Posle ove operacije na telo deluje sistem sila

$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1; \quad \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \quad \vec{F}'_n = \vec{F}_n, \quad (28)$$

sa napadnom tačkom u tački O , i sistem spregova, čiji će momenti, prema formuli (27), biti

$$\mathfrak{M}_1 = M_O^{\vec{F}_1}, \quad \mathfrak{M}_2 = M_O^{\vec{F}_2}, \dots, \quad \mathfrak{M}_n = M_O^{\vec{F}_n}. \quad (28')$$

Sile koje deluju u tački O možemo zameniti jednom silom $\vec{F}_R$, čija se napadna tačka nalazi u istoj tački; pri tome je $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}'_i$, ili, prema jednačini (28)

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i. \quad (29)$$

Isto tako, na osnovu teoreme o slaganju spregova, sve spregove možemo zameniti jednim spregom, koji takođe deluje u istoj ravni. Moment tog sprega je $M_O = \sum M_O$, ili, prema jednačini (28)

$$M_O = \sum M_O^{\vec{F}_i} \quad (30)$$

Veličinu $\vec{F}_R$, koja je jednaka geometrijskom zbiru svih sila sistema, nazvaćemo, kao što je poznato, *glavni vektor sistema*; veličinu M_O , koja je jednaka zbiru momenata svih sila sistema za tačku O , nazvaćemo *glavni moment sistema za tačku O* . Prema tome, ovde smo dokazali sledeću teoremu: *svaki ravan sistem*

sila, koji deluje na kruto telo, pri svođenju (redukciji) na tačku O , može da se zameni jednom silom $\vec{F}_R$, koja je jednaka glavnom vektoru datog sistema sila sa napadnom tačkom u tački O , i spregom, čiji je moment M_O , koji je jednak glavnom momentu sistema za tačku O (sl. 54, c).

Primerimo da sila $\vec{F}_R$ nije rezultanta datog sistema sila, jer ona sama ne može da zameni dati sistem sila, već zajedno sa spregom.

Iz dokazane teoreme proizlazi da su dva sistema sila, koji imaju jednake glavne vektore i glavne momente, međusobom statički ekvivalentna. *Da bi se definisao ravan sistem sila dovoljno je da se da glavni vektor i glavni moment tog sistema sila za neku tačku O ($\vec{F}_R, M_O$).*

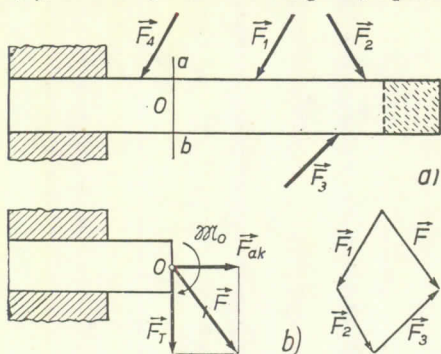
Veličina $\vec{F}_R$ može se odrediti geometrijskim putem pomoću poligona sila (sl. 54, b), ili pak analitičkim putem po formulama (10) (vidi § 10); od izbora tačke O veličina $\vec{F}_R$ očividno, ne zavisi. Veličina M_O određuje se po formuli (30). Pri promeni redukcionice tačke O veličina momenta M_O može u opštem slučaju da se promeni, zbog promene momenata komponentnih sila. Prema tome, kada se daje glavni moment, neophodno je reći za koju tačku je on izračunat.

Zadatak 18. Na gredu, uzdanu u zid (sl. 55, a), deluju spoljašnje sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$. Odrediti unutrašnja opterećenja u preseku ab grede*.

Rešenje. Prenesimo sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, koje deluju na deo grede desno od preseka ab u tačku O preseka. Na osnovu dokazane teoreme ove sile možemo zameniti jednom silom $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$, čija se napadna tačka nalazi u tački O i spregom čiji je moment $M_O = M_O^{\vec{F}_1} + M_O^{\vec{F}_2} + M_O^{\vec{F}_3}$. Lako je zaključiti da se dejstvo delova grede jedan na drugi, ne bi promenilo, kad bi se s početka od grede odsekao neopterećeni kraj (šrafirani deo). Ali, posle prenošenja svih sila u tačku O , desni deo grede postaje neopterećen, i može se ukloniti s tim da se greda prikaže onako kako je pokazano

* Unutrašnjim opterećenjima u preseku ab nazivaju se sile kojim delovi grede razdvojeni datim presekom deluju jedan na drugi. Na osnovu dokazane teoreme sistem ovih unutrašnjih sila može da bude zamenjen jednom silom, čija je napadna tačka, na primer, u težištu preseka, i spregom,

na sl. 55, b. Tada, ako razložimo silu $\vec{F}$, u komponente $\vec{F}_{ak}$ i $\vec{F}_T$ (u pravcu ose grede i upravno na nju), dobićemo, da na levi deo grede, u preseku ab , deluju:



Sl. 55

1) transverzalna (poprečna) sila $\vec{F}_T$, koja teži da smakne presek ab u pravcu ab ;

2) aksijalna sila $\vec{F}_{ak}$, koja izaziva zatezanje (ili pritisak, ako je usmerena u suprotnom smeru) grede duž njene ose,

3) spreg momenta $\mathcal{M}_O$, koji se zove *napadni moment* ili *moment savijanja*, koji u datom slučaju izaziva istezanje gornjih vlakana grede i sabijanje donjih vlakana. Na osnovu aksiome 4. levi deo grede deluje na desni deo silama i spregom istog intenziteta, ali suprotnih smerova.

Na analogan način određuju se unutrašnja opterećenja i u bilo kom drugom preseku grede.

Primerdaba. Tražena opterećenja možemo odrediti, takođe, i nanošenjem spoljašnjih sila, koje deluju na levi deo grede, u težište O preseka;

na taj način odredićemo dejstvo levog dela grede na desni deo u preseku ab . Međutim, u spoljašnja opterećenja spadaju, tada, i reakcije ukleštenja koje moramo prethodno odrediti iz uslova ravnoteže cele grede (§ 26). To isto bismo morali da učinimo i u prethodnom rešenju, ako bi bilo koja veza delovala na desni deo grede.

§ 23. Svođenje (redukcija) ravnog sistema sila na prostiji oblik

Teorema koju smo dokazali u § 22 omogućuje da se reši zadatak svođenja (redukcije) ravnog sistema sila na prostiji oblik. Rezultat zavisi od toga čemu je jednak glavni vektor $\vec{F}_R$ i glavni moment $\mathcal{M}_O$ datog sistema sila.

1) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R = 0$ i $\mathcal{M}_O = 0$, onda se on nalazi u ravnoteži. Podrobnije razmatranje slučaja ravnoteže ravnog sistema sila izvršićemo u sledećem paragrafu.

2) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R = 0$, $\mathcal{M}_O \neq 0$, onda se dati sistem sila svodi na spreg čiji je moment $\mathcal{M}_O = \sum M_O^{\vec{F}_i}$. U tom slučaju veličina momenta $\mathcal{M}_O$ ne zavisi od izbora redukcione tačke O, jer bismo, u slučaju kada bi ona zavisila od izbora tačke O, dobili da se jedan isti sistem sila može zameniti raznim, međusobno neekvivalentnim, spregovima, što je nemoguće.

3) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R \neq 0$, onda se on svodi na jednu silu, tj. na rezultantu. Tada su moguća dva slučaja:

a) $\vec{F}_R \neq 0$, $\mathcal{M}_O = 0$. U tom slučaju sistem se odmah svodi na jednu silu, tj. na rezultantu $\vec{F}_R = \vec{F}_r$, koja prolazi kroz tačku O.

b) $\vec{F}_R \neq 0$, $\mathcal{M}_O \neq 0$. U tom slučaju (sl. 56, a) silu $\vec{F}_R$ možemo preneti u takvu tačku C, za koju će njen moment biti $-\mathcal{M}_O$. Tom prilikom kao što je poznato dodaje se spreg momenta $-\mathcal{M}_O$, koji uravnotežuje spreg momenta $\mathcal{M}_O$, i ceo sistem sila zamenjuje se jednom rezultantom $\vec{F}'_R = \vec{F}_R = \vec{F}_r$, koja prolazi kroz tačku C. Položaj tačke C, tj. rastojanje $d = \overline{OC}$ ($\overline{OC} \perp \vec{F}_R$) nalazimo tada iz jedinačine

$$|\mathcal{M}_O| = F_R d.$$

(31)

Dobiveni rezultat možemo formulirati i ovako: ako se pri svođenju sistema sila na tačku O , sistem sila svede na silu $\vec{F}_R$ i spreg, čiji je moment $\mathcal{M}_O$, onda taj sistem sila možemo zameniti samo jednom rezultantom $\vec{F}'_R = \vec{F}_R = \vec{F}_r$, koja prolazi od tačke O , na takvom rastojanju, da bude ispunjen uslov

$\mathcal{M}_O = M_{O'R}$ Redosled računanja u ovom slučaju prikazan je u zadatku 20.

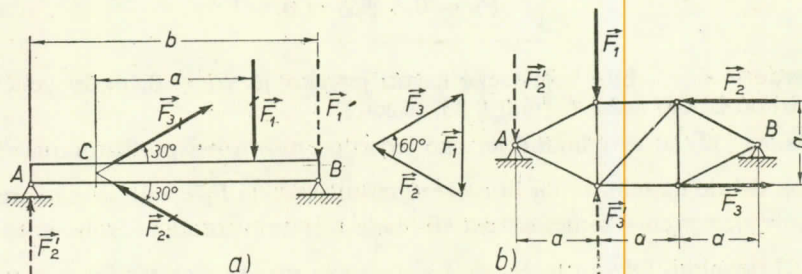
Taj rezultat može se dobiti i drugim putem, ako prikažemo spreg, čiji je moment $\mathcal{M}_O$, tako, kao što je pokazano na sl. 56, *b* i ako sile sprega

$\vec{F}'_R$ i $\vec{F}''_R$ izaberemo tako da budu po

intenzitetu jednake F_R . Pri tome krak sprega, tj. $d = \overline{OC}$ određujemo opet iz jednačine (31). Uklonimo zatim sile $\vec{F}_R$ i $\vec{F}''_R$, kao uravnotežene, tako da se u krajnjem rezultatu sistem sila svodi na rezultantu $\vec{F}'_R = \vec{F}_R = \vec{F}_r$, koja prolazi kroz tačku C , tj. dobijamo isti rezultat kao i ranije.

Dobiveni rezultati pokazuju, da se ravan sistem sila, ako se ne nalazi u ravnoteži, svodi ili na rezultantu (kada je $\vec{F}_R \neq 0$), ili pak na spreg (kada $\vec{F}_R = 0$).

Zadatak 19. Svesti na prostiji oblik sistem sila, koji deluje na gredu i rešetku prikazane na sl. 57, *a* i *b*, ako su sve sile po intenzitetu jednake jedna drugoj; odrediti pritiske na oslonce.



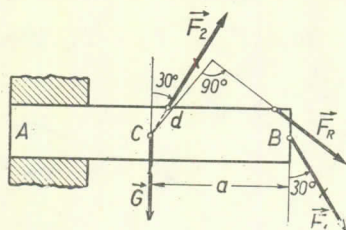
Sl. 57

Rešenje. 1) Polygon sila, konstruisan od sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, koje deluju na gredu (sl. 57, *a*) je zatvoren; prema tome $\vec{F}_R = 0$. Suma momenata svih sila za bilo koju tačku (npr., tačku C) jednaka je $-Fa$, gde je F intenzitet svake od sila. Prema tome, dati sistem sila svodi se na spreg čiji je moment $\mathcal{M} = -Fa$. Ako predstavimo ovaj spreg silama, koje su na crtežu prikazane iscrtkano, zaključujemo da sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, izazivaju pritiske $\vec{F}'_1$ i $\vec{F}'_2$, koji su brojčano jednaki $F \frac{a}{b}$.

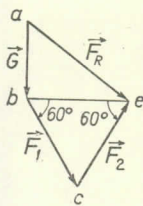
2) Primetimo da sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ (sl. 57, *b*) obrazuju spreg, koji ćemo pomeriti u položaj koji je prikazan iscrtkano na slici. U tom slučaju se sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_3$ uzajamno uravnotežuju i sistem sila se svodi na rezultantu $\vec{F}_R = \vec{F}_r = \vec{F}_2$.

Oдавде zaključujemo, da se dejstvo sila $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, svodi na vertikalni pritisak u osloncu A ; oslonac B je tom prilikom neopterećen.

Zadatak 20. Odrediti rezultantu sila, koje deluju na gredu (sl. 58), ako je $G = 3 \text{ Mp}$, $F_1 = F_2 = F = 4 \text{ Mp}$, a rastojanje $\overline{CB} = a = 0,8 \text{ m}$.



Sl. 58



Rešenje. Konstrukcijom poligona sila od sila $\vec{G}$, $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, nalazimo da je sila $\vec{F}_R$ (glavni vektor datog sistema sila) po intenzitetu jednaka $F_R = 5 \text{ Mp}$, jer je u datom poligonu $\overline{be} = 2 F \cos 60^\circ = 4 \text{ Mp}$; $\overline{ab} = 3 \text{ Mp}$. Dalje, birajući tačku C za momentnu tačku u kojoj se seku pravci sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_2$, nalazimo da je glavni moment sistema

$\mathcal{M}_C = \mathcal{M}_C^{\vec{F}_1} = -F a \cos 30^\circ = -1,6 \sqrt{3} \text{ kpm}$. Tada, po formuli (31) dobijamo

$$d = \frac{|\mathcal{M}_C|}{F_R} = 0,32 \sqrt{3} \approx 0,55 \text{ m}.$$

Ako iz tačke C povučemo pravu, upravnu na pravac $\vec{F}_R$, i ako duž nje naneseimo otsečak d , odredićemo napadnu liniju rezultante. Kako je $\mathcal{M}_C < 0$, to rezultanta prolazi desno od tačke C (moment sile $\vec{F}_R$ za tačku C mora da bude negativan).

§ 24. Uslovi ravnoteže ravnog sistema sila

Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila potrebno je i dovoljno da jednovremeno budu ispunjeni uslovi:

$$\vec{F}_R = 0, \quad \mathcal{M}_O = 0. \quad (32)$$

Ovde je O — bilo koja tačka ravnine, jer ako je $\vec{F}_R = 0$, onda veličina $\mathcal{M}_O$ ne zavisi od izbora tačke O (vidi § 23, tačka 2).

Uslovi (32) su neophodni, jer ako jedan od njih nije ispunjen, onda se sistem sila, koji deluje na telo, svodi ili na rezultantu (kada je $\vec{F}_R \neq 0$), ili na spreg (kada je $\mathcal{M}_O \neq 0$), i prema tome, sistem sila tada nije uravnotežen. Istovremeno uslovi (32) su i dovoljni, jer ako je $\vec{F}_R = 0$ sistem sila može da se svede na spreg čiji je moment $\mathcal{M}_O$, a kako je $\mathcal{M}_O = 0$, to se zaista sistem sila nalazi u ravnoteži.

Odredimo uslove ravnoteže u analitičkom obliku koji proističu iz jednačina (32). Te uslove možemo dobiti u tri različita oblika, koje ćemo postupno razmotriti.

1. Osnovni oblik uslova ravnoteže. Veličine F_R i $\mathcal{M}_O$ određene su izrazima:

$$F_R = \sqrt{X_R^2 + Y_R^2},$$

pri čemu je $X_R = \sum X_i$, $Y_R = \sum Y_i$; $\mathcal{M}_O = \sum M_O^{\vec{F}_i}$. Međutim, F_R može da bude jednako nuli samo u tom slučaju kao je istovremeno: $X_R = 0$ i $Y_R = 0$. Prema tome, uslovi (32) biće zadovoljeni, ako je

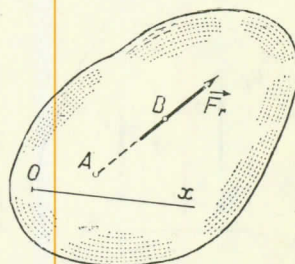
$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_O^{\vec{F}_i} = 0. \quad (33)$$

Jednačine (33) izražavaju u analitičkom obliku sledeće uslove ravnoteže: *za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, potrebno je i dovoljno, da suma projekcija sila na svaku od dve bilo koje koordinatne ose bude jednaka nuli i da suma momenata svih sila za bilo koju tačku, koja leži u ravni dejstva sila, bude jednaka nuli.* Istovremeno, uslovi (33) izražavaju potrebne uslove ravnoteže slobodnog krutog tela na koje deluje ravan sistem sila. U mehaničkom smislu prva dva uslova izražavaju nemogućnost pomeranja tela u pravcu koordinatnih osa, dok treći uslov izražava nemogućnost obrtanja oko ose upravne na ravan Oxy .

2.* Drugi oblik uslova ravnoteže: *Za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, potrebno je i dovoljno, da suma momenata svih sila za bilo koje dve proizvoljno izabrane tačke A i B , i suma projekcija sila na osu Ox , koja nije normalna na pravu AB , bude jednaka nuli:*

$$\Sigma \vec{M}_A^{F_i} = 0, \quad \Sigma \vec{M}_B^{F_i} = 0, \quad \Sigma X_i = 0. \quad (34)$$

Neophodnost ovih uslova je očevidna, jer ako bilo koji od tih uslova nije ispunjen, onda će biti ili $\vec{F}_R \neq 0$ ili $M_A \neq 0$ ($M_B \neq 0$) i ravnoteža neće postojati. Dokažimo da su ovi uslovi i dovoljni. Ako su za dati sistem sila ispunjena samo prva dva od navedenih uslova onda će biti $M_A = 0$ i $M_B = 0$. Takav sistem sila, prema onome što je rečeno u § 23, može i da ne bude u ravnoteži, a da ima rezultantu $\vec{F}_R$ koja istovremeno prolazi kroz tačke A i B^* (sl. 59). Međutim, prema trećem uslovu mora da bude $X_R = \Sigma X_i = 0$. Kako osa Ox nije normalna na pravac AB , onda poslednji uslov može da bude zadovoljen samo kada je rezultanta $F_R = 0$, tj. samo ako ravnoteža zaista postoji.



Sl. 59

3.* Treći oblik uslova ravnoteže (*tri momentne jednačine*): *za ravnotežu proizvoljnog ravnog sistema sila, potrebno je i dovoljno, da suma momenata svih sila za proizvoljno izabrane tačke A , B i C , koje ne leže na jednoj pravoj, bude jednaka nuli.*

$$\Sigma \vec{M}_A^{F_i} = 0, \quad \Sigma \vec{M}_B^{F_i} = 0, \quad \Sigma \vec{M}_C^{F_i} = 0. \quad (35)$$

Neophodnost ovih uslova, kao i u prethodnom slučaju, je očevidna. Da su uslovi (35) i dovoljni proizlazi iz činjenice, što ako se pri istovremenom zadovoljenju tih uslova dati sistem sila ne bi nalazio u ravnoteži, onda bi se on sveo na rezultantu, koja istovremeno prolazi kroz tačke A , B i C , što je opet nemoguće, jer ove tri tačke ne leže na istoj pravoj. Prema tome, kada su uslovi (35) ispunjeni, nastupa ravnoteža.

U svim razmatranim slučajevima za ravnotežu ravnog sistema sila dobili smo po *tri uslova ravnoteže*. Uslove (33) smatramo osnovnim, jer ako se koristimo njima, onda ne podleže nikakvim ograničenjima ni izbor koordinatnih osa ni momentnih tačaka.

* Ovo proizlazi iz slučaja 3,a) koji je razmotren u § 23.

Ako na kruto telo, zajedno sa ravnim sistemom sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, deluje u istoj ravni i sistem spregova, čiji su momenti $M_1, M_2, M_3, \dots, M_n$, onda je očividno da u jednačinama projekcija spregova ne ulaze, jer je suma projekcija sila spregova na bilo koju osu jednaka nuli. Nasuprot tome, u momentnoj jednačini sumi momenata sila dodaje se algebarski zbir momenata spregova, jer je suma momenata sila spregova za bilo koju tačku jednaka momentu spregova [§ 18, formula (24)]. Na taj način, na primer, uslovi ravnoteže (33), kada na telo deluje sistem sila i sistem spregova, prelaze u

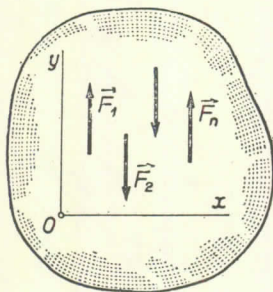
$$\Sigma X_i = 0, \quad \Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma M_O^{\vec{F}_i} + \Sigma M_i = 0. \quad (36)$$

Na analogan način transformišu se i uslovi (34) i (35).

§ 25. Ravnoteža ravnog sistema paralelnih sila

U slučaju, kada su sve sile koje deluju na kruto telo paralelne međusobom, možemo osu Ox izabrati tako da bude normalna na sile, a osu Oy tako da bude paralelna silama (sl. 60). U tom slučaju će projekcija svake sile na osu Ox biti jednaka nuli i prvi od uslova (33) prelazi tada u identitet $0 = 0$. Prema tome, za ravnotežu ravnog sistema paralelnih sila ostaju dva uslova:

$$\Sigma Y_i = 0, \quad \Sigma M_O^{\vec{F}_i} = 0, \quad (37)$$



Sl. 60

pri čemu je osa Oy paralelna silama.

Drugi oblik uslova ravnoteže ravnog sistema paralelnih sila možemo dobiti iz jednačina (34), koje sada postaju:

$$\Sigma M_A^{\vec{F}_i} = 0, \quad \Sigma M_B^{\vec{F}_i} = 0. \quad (38)$$

Pri tome tačke A i B ne smeju da leže na pravoj koja je paralelna silama.

§ 26. Rešavanje zadataka

Pri rešavanju zadataka iz ovog odeljka treba imati u vidu sve ono što je već rečeno u § 13.

Opet podvlačimo da kada pristupamo rešavanju nekog zadatka, treba, pre svega, da se izdvoji telo, čija ravnoteža u datom slučaju treba da se razmotri. Zatim, kada smo izdvojili to telo, potrebno je dalje da ga posmatramo kao slobodno i da nacrtamo sve aktivne sile koje deluju na telo, a zatim i sve reakcije veza pošto smo veze uklonili.

Posle toga, treba postaviti uslove ravnoteže i pri tome treba odabrati onu grupu uslova, koja će u datom slučaju dovesti do najbržeg rešenja postavljenog zadatka (najprostije će, razume se, biti takve jednačine od kojih svaka sadrži samo jednu od nepoznatih veličina).

Da bismo dobili uslove ravnoteže u što prostijem obliku treba se pridržavati sledećih preporuka (ukoliko one ne otežavaju tok računa):

- a) pri postavljanju jednačina projekcija, jednu od koordinatnih osa treba povući tako da bude normalna na neku od nepoznatih sila;
 b) pri postavljanju momentnih jednačina, momentne tačke treba birati tako, da se što veći broj nepoznatih sila seče u toj tački.

Pri izračunavanju momenata često je vrlo korisno da se razloži data sila u dve komponente i zatim da se upotrebi Varinjonova teorema.

Rešavanje mnogih zadataka statike svodi se na određivanje otpora oslonaca, koji služe za oslanjanje ili pak ukleštavanje grede, rešetke ili slično. U tehničkoj praksi obično se susrećemo sa sledećim vrstama oslonaca (osim onih koje smo već naveli u § 4);

1. Pokretni oslonac (ležište) (sl. 61, oslonac A). Reakcija $\vec{F}_A$ takvog oslonca usmerena je po normali na površinu na koju se oslanja pokretni oslonac.

2. Nepokretni oslonac (ležište) (sl. 61, oslonac B). Reakcija takvog oslonca prolazi kroz osu ležišta i može da ima proizvoljan pravac u ravni crteža (tj. upravno na osu ležišta). Pri rešavanju zadataka reakciju $\vec{F}_B$ prikazujemo preko

njenih komponentata $\vec{X}_B$ i $\vec{Y}_B$ u pravcima koordinatnih osa. Ako smo pri rešavanju zadatka odredili ove komponentne reakcije X_B i Y_B , onda možemo odrediti i ukupnu reakciju $\vec{F}_B$; intenzitet ove reakcije iznosi $F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2}$

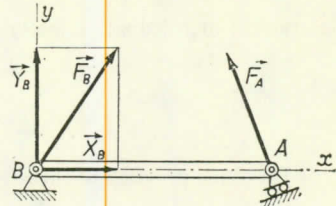
Način oslanjanja, prikazan na sl. 61, upotrebljava se radi toga da ne bi u gredi AB nastali dopunski naponi pri promeni njene dužine usled promene temperature ili pri savijanju.

3. Ukleštenje (sl. 62). U ovom slučaju na ukleštenom kraju grede od strane oslončnih površina deluje na gredu sistem kontinualno raspoređenih sila. Ako te sile redukujemo na tačku A , možemo ih zameniti nepoznatom silom $\vec{F}_A$ sa napadnom tačkom u tački A , i spregom M_A , čiji moment nije unapred poznat. Silu $\vec{F}_A$ možemo prikazati preko njenih komponentata $\vec{X}_A$ i $\vec{Y}_A$. Prema tome, ako je veza ostvorena u vidu ukleštenja, onda je za određivanje njene reakcije potrebno da se odrede tri veličine X_A , Y_A i M_A .

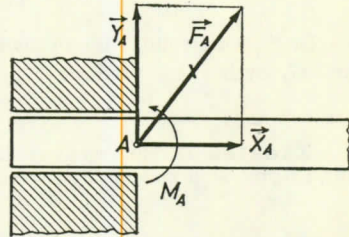
Problem o pravcu i smeru reakcija pri drugim vidovima veza detaljno je razmotren u § 4.

Zadatak 21. Odrediti sile kojima tačkovi A i B dizalice, koja je shematski prikazana na sl. 63, pritiskuju na šine. Težina dizalice iznosi $G = 4$ Mp; njeno težište leži na pravoj DE . Težina tereta koji dizalica podiže iznosi $G_1 = 1$ Mp, strela dizalice $b = 3,5$ m; rastojanje $AB = 2a = 2,5$ m.

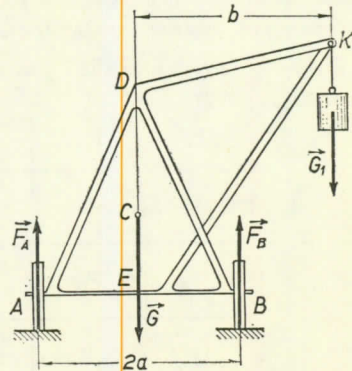
Rešenje. Razmotrimo ravnotežu čitave dizalice. Na dizalicu, ako je smatramo slobodnim telom, deluju date sile $\vec{G}$ i $\vec{G}_1$ i reakcije uklonjenih veza $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$. Za dobijeni sistem paralelnih sila postavimo uslove ravnoteže (37), uzimajući tačku A za momentnu tačku



Sl. 61



Sl. 62



Sl. 63

i projicirajući sile na vertikalnu osu; tako dobijamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum Y_i \equiv F_A + F_B - G - G_1 = 0, \\ \sum M_A^{\vec{F}_i} \equiv -Ga + F_B \cdot 2a - G_1(a+b) = 0. \end{array} \right.$$

Rešavanjem ovih jednačina, nalazimo:

$$F_A = \frac{1}{2}G - \frac{1}{2}G_1\left(\frac{b}{a} - 1\right) = 1,1 \text{ Mp};$$

$$F_B = \frac{1}{2}G + \frac{1}{2}G_1\left(\frac{b}{a} + 1\right) = 3,9 \text{ Mp}.$$

Da bismo proverili dobijene rezultate postavimo momentnu jednačinu za tačku B

$$\sum M_B^{\vec{F}_i} \equiv -F_A \cdot 2a + Ga - G_1(b-a) = 0.$$

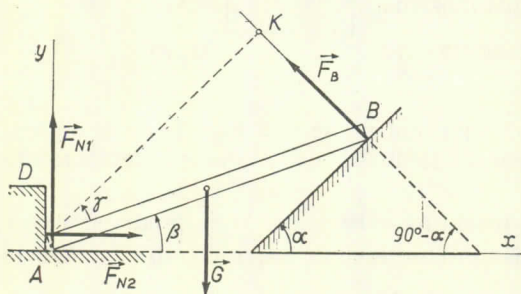
Ako sada nađenu vrednost za F_A smenimo u gornju jednačinu, uverićemo se da ona zadovoljava ovu jednačinu. Traženi pritisci točkova na šine brojčano su jednaki F_A i F_B , ali su usmereni naniže.

Iz dobijenog rezultata se vidi, da pri

$$G_1 = \frac{a}{b-a}G = 2,22 \text{ Mp}.$$

reakcija F_A postaje nula i u tom slučaju levi točak prestaje da pritiskuje šinu. Pri daljem povećanju tereta G_1 dizalica bi se preturila. Najveći teret G_1 pri kome dizalica ostaje u ravnoteži, određuje se iz uslova $\sum M_B^{\vec{F}_i} = 0$.

Zadatak 22. Homogena greda AB, težine G kp, oslanja se krajem A na glatku horizontalnu avan i ispust D, a krajem B na strmu ravan, koja sa horizontom zaklapa ugao α (sl. 64). Greda je



Sl. 64

nagnuta prema horizontu pod uglom β . Odrediti sile pritiska grede na obe ravni i na ispust D.

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu grede AB uklanjajući veze i smatrajući gredu slobodnim telom. Tada na gredu

deluju: data sila $\vec{G}$, čija je napadna tačka

na sredini grede i reakcije veza $\vec{F}_B$,

$\vec{F}_{N1}$, $\vec{F}_{N2}$, koje imaju pravce koji su upravni

na odgovarajuće ravni. Povucimo koordi-

nate ose (vidi sl. 64) i postavimo jednačine

ravnoteže (33) uzimajući momente sila za

tačku A, u kojoj se seku napadne linije

dveju nepoznatih sila. Prethodno izraču-

najmo projekcije svake od sila na koordi- natne ose i njihove momente za tačku A, i zatim unesimo sve nađene vrednosti u tablicu*; tom prilikom uveli smo oznake $\overline{AB} = 2a$

* $\angle KAB = \gamma$ ($\overline{AK}$ je krak sile $\vec{F}_B$ za tačku A).

$\vec{F}_i$	$\vec{F}_{N1}$	$\vec{F}_{N2}$	$\vec{G}$	$\vec{F}_B$
X_i	0	F_{N2}	0	$-F_B \sin \alpha$
Y_i	F_{N1}	0	$-G$	$F_B \cos \alpha$
$M_A^{\vec{F}_i}$	0	0	$-Ga \cos \beta$	$F_B \cdot 2a \cos \gamma$

* Pri popunjavanju tablice treba imati u vidu napomenu učinjenu u fusnoti na str. 29

Postavimo sada uslove ravnoteže:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &\equiv F_{N_2} - F_B \sin \alpha = 0, \\ \Sigma Y_i &\equiv F_{N_1} - G + F_B \cos \alpha = 0, \\ \Sigma \vec{M}_A^{F_i} &\equiv -Ga \cos \beta + 2F_B a \cos \gamma = 0.\end{aligned}$$

Iz poslednje jednačine nalazimo:

$$F_B = \frac{1}{2} G \frac{\cos \beta}{\cos \gamma}.$$

Kako je $\overline{AK}$ paralelno strmoj ravni, to je $\angle KAx = \alpha$; odavde je $\gamma = \alpha - \beta$. Prema tome, konačno je

$$F_B = \frac{1}{2} G \frac{\cos \beta}{\cos (\alpha - \beta)}.$$

Sada, rešavanjem prve dve jednačine, dobijamo:

$$F_{N_1} = G \left[1 - \frac{\cos \alpha \cos \beta}{2 \cos (\alpha - \beta)} \right], \quad F_{N_2} = G \frac{\sin \alpha \cos \beta}{2 \cos (\alpha - \beta)}.$$

Pritisci na ravan jednaki su po intenzitetu odgovarajućim reakcijama i usmereni u suprotne strane.

Da bismo proverili tačnost dobijenih rezultata za reakcije F_{N_1} i F_{N_2} možemo postaviti momentne jednačine za tačke u kojima se seku napadne linije sile $\vec{F}_B$ i F_{N_2} , i sile $\vec{F}_B$ i F_{N_1} .

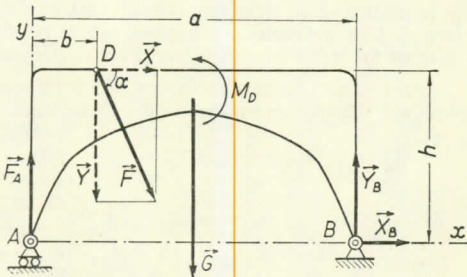
Iz redosleda rešavanja prethodnog zadatka proizlazi *zaključak*: kada je za određivanje projekcije, ili pak momenta sile, potrebno da znamo bilo koju veličinu (dužinu ili ugao), koja nije data u uslovima zadatka, onda ta veličina treba da se označi nekim simbolom i da se uvede u jednačine ravnoteže. Ako tokom rešavanja zadatka ta veličina ne ispadne iz računa, onda ona treba da se izrazi preko datih veličina.

Zadatak 23. Simetrični luk (sl. 65) opterećen je sistemom sila koji se svodi na silu $F=4$ Mp a napadnom tačkom u tački D , i na spreg, čiji je moment $M_D = 12$ Mpm. Težina luka iznosi $G = 8$ Mp; pojedine dimenzije su: $a = 10$ m, $b = 2$ m, $h = 3$ m, $\alpha = 60^\circ$. Odrediti reakcije u pokretnom osloncu A i nepokretnom osloncu B .

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu celog luka, uklanjajući veze i smatrajući luk slobodnim telom. Tada će na luk delovati date sile $\vec{G}$ i $\vec{F}$ i spreg čiji je moment M_D , a takođe i reakcije

$\vec{F}_A$, $\vec{X}_B$ i $\vec{Y}_B$ (reakciju u nepokretnom osloncu prikazali smo njenim dvema komponentama, kako je pokazano na sl. 61). Kod ovog zadatka najprostije je da se postave uslovi ravnoteže u obliku (34), uzimajući momente za tačke A i B i projicirajući sve sile na osu Ax . U tom slučaju u svakoj od jednačina ravnoteže ulazi samo po jedna nepoznata sila. Izračunajmo momente i projekcije svake od sila i unesimo nađene veličine u tablicu. Tom prilikom, da bismo izračunali

moment sile $\vec{F}$, razložićemo je u njene komponente $\vec{X}$, $\vec{Y}$ i iskoristićemo Varinjonovu teoremu.



Sl. 65

$\vec{F}_i$	$\vec{F}_A$	$\vec{G}$	$\vec{X}_B$	$\vec{Y}_B$	$\vec{F}$	M_D
X_i	0	0	X_B	0	$F \cos \alpha$	0
$M_A^{F_i}$	0	$-G \frac{a}{2}$	0	$Y_B a$	$- X h - Y b$	M_D
$M_B^{F_i}$	$-F_A a$	$G \frac{a}{2}$	0	0	$- X h + Y (a-b)$	M_D

Postavljajući uslove ravnoteže, imajući u vidu da je $|X| = F \cos \alpha$, $|Y| = |F| \sin \alpha$, dobijamo:

$$\Sigma X_i \equiv X_B + F \cos \alpha = 0, \quad (a)$$

$$\Sigma \vec{M}_A^{F_i} \equiv Y_B a - G \frac{a}{2} - F b \sin \alpha - F h \cos \alpha + M_D = 0, \quad (b)$$

$$\Sigma \vec{M}_B^{F_i} \equiv -F_A a + G \frac{a}{2} - F h \cos \alpha + F(a-b) \sin \alpha + M_D = 0. \quad (c)$$

Rešavanjem dobijenih jednačina, nalazimo:

$$X_B = -F \cos \alpha = -2 \text{ Mp},$$

$$Y_B = \frac{1}{2} G + F \frac{b \sin \alpha + h \cos \alpha}{a} - \frac{M_D}{a} \approx 4,09 \text{ Mp},$$

$$F_A = \frac{1}{2} G + F \frac{(a-b) \sin \alpha - h \cos \alpha}{a} + \frac{M_D}{a} \approx 7,37 \text{ Mp}.$$

Kao što vidimo, veličinu X_B dobili smo sa negativnim znakom. Prema tome, komponenta $\vec{X}_B$ ima suprotan smer od smera koji je prikazan na crtežu, što je moglo da se predvidi i unapred.

Ukupna reakcija oslonca B nalazi se kao geometrijska suma sila $\vec{X}_B$ i $\vec{Y}_B$. Njen intenzitet je

$$F_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} \approx 4,55 \text{ Mp}.$$

Ako bi spreg koji deluje na luk imao suprotan smer od smera koji je naznačen na crtežu (sl. 65), onda je $M_D = -12 \text{ Mpm}$. U tom slučaju dobijamo $Y_B = 6,49 \text{ Mp}$, $F_A = 4,97 \text{ Mp}$; veličina X_B se tom prilikom ne menja.

Da bismo proverili tačnost dobijenih rezultata projicirajmo sve sile na osu Ay :

$$\Sigma Y \equiv F_A + Y_B - G - F \sin \alpha = 0. \quad (d)$$

Ako u ovu jednačinu smenimo nađene vrednosti za F_A i Y_B , možemo se uveriti da je prethodna jednačina zadovoljena (smena treba da se izvrši i sa opštim brojevima, da bismo proverili tačnost formula, a takođe i sa brojčanim podacima, da bismo proverili izvršene račune).

Treba imati u vidu da pri ovakvoj vrsti kontrole može da se desi da ne otkrijemo grešku, koja je nastala usled netačnog određivanja projekcija ili momenta sila, koje su upravne na osi Ay . Iz tog razloga potrebno je još jednom da se proveri ovaj deo računa, ili pak, radi kontrole, može da se postavi još jedna jednačina, na primer, momentna jednačina za tačku D.

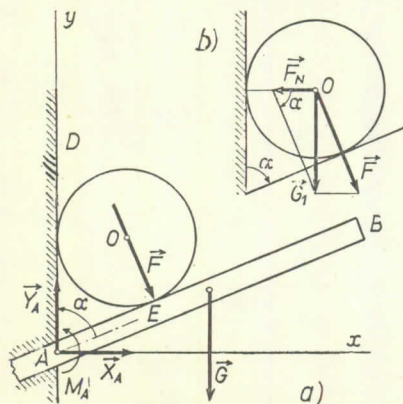
Prisetimo takođe sledeće: kao što je poznato, pri postavljanju uslova (34) osu na koju projiciramo sve sile moramo izabrati tako da ne bude upravna na pravac AB, tj. da to ne bude u našem slučaju osa Ay . Ako bismo to ipak učinili, tj. ako bi nam treća jednačina bila jednačina ravnoteže u obliku projekcija na osu Ay , onda bismo dobili sistem jednačina (b), (c), (d), koje sadrže samo dve nepoznate F_A i Y_B (u ovom sistemu jedna od jednačina bila bi posledica ostalih). To znači da na ovaj način ne bismo bili u stanju da odredimo reakciju X_B .

Zadatak 24. Greda AB, dužine $b = 0,8 \text{ m}$ i težine $G = 100 \text{ kp}$, uzidana je u zid i sa njim zaklapa ugao $\alpha = 60^\circ$ (sl. 66, a). Unutar ugla DAB leži cilindar težine $G_1 = 180 \text{ kp}$, koji dodiruje gredu u tački E, pri čemu je $\overline{AE} = a = 0,3 \text{ m}$. Odrediti reakcije ukleštenja.

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu grede uklanjajući veze i smatrajući gredu slobodnim telom. Tada na gredu deluju: sila $\vec{G}$, čija se napadna tačka nalazi na

sredini grede, sila pritiska cilindra $\vec{F}$, koja deluje u tački

E upravo na gredu (Pazi! nikako $\vec{G}_1$ koja deluje na cilindar, a ne na gredu!) i reakcije ukleštenja, koje ćemo predstaviti komponentama $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ i spregom čiji je moment M_A (vidi sl. 62).



Sl. 66

Da bismo postavili uslove ravnoteže (33) izračunajmo projekcije svih sila na koordinatne ose i izračunajmo njihove momente na tačku A (vidi tablicu).

$\vec{F}_i$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$	$\vec{F}$	$\vec{G}$	M_A
X_i	X_A	0	$F \cos \alpha$	0	0
Y_i	0	Y_A	$-F \sin \alpha$	$-G$	0
$M_A^{F_i}$	0	0	$-Fa$	$-G \frac{b}{2} \sin \alpha$	M_A

Da bismo odredili pritisak $\vec{F}$ razložimo silu $\vec{G}_1$ sa napadnom tačkom u središtu cilindra, u njene komponente $\vec{F}$ i $\vec{F}_N$, koje su upravne na gredu i na zid (sl. 66, b). Iz paralelograma sila nalazimo:

$$F = \frac{G_1}{\sin \alpha}$$

Postavimo sada uslove ravnoteže smenjajući u njih istovremeno umesto sile F nađenu vrednost. Tako dobijamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X_i \equiv X_A + G_1 \operatorname{ctg} \alpha = 0, \\ \Sigma Y_i \equiv Y_A - G_1 - G = 0, \\ \Sigma M_A^{F_i} \equiv M_A - G_1 \frac{a}{\sin \alpha} - G \frac{b}{2} \sin \alpha = 0. \end{array} \right.$$

Rešavanjem ovih jednačina, nalazimo:

$$X_A = -G_1 \operatorname{ctg} \alpha = 103,8 \text{ kp}; \quad Y_A = G + G_1 = 280 \text{ kp};$$

$$M_A = G_1 \frac{a}{\sin \alpha} + G \frac{b}{2} \sin \alpha = 96,9 \text{ kpm}.$$

Reakcija ukleštenja sastoji se iz sile $F_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}$ i sprega čiji je moment M_A .

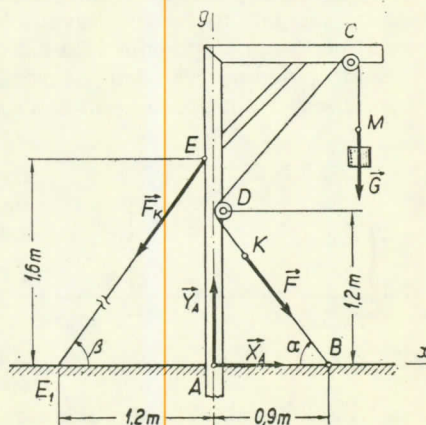
U zaključku podvucimo još jednom osnovni zaključak koji proizilazi iz redosleda rešavanja ovog zadatka: u uslove ravnoteže ulaze samo sile koje neposredno deluju na telo čiju ravnotežu posmatramo.

Zadatak 25. Za stub sa kosnikom pričvršćena su dva kotura C i D , preko kojih je prebačen konopac, za čiji je kraj obešen teret $G = 240 \text{ kp}$. Drugi kraj konopca pričvršćen je u tački B . Stub se održava u ravnoteži pomoću zatege EE_1 . Zanimajući težinu stuba sa kosnikom i trenje u koturima, odrediti silu u zategi, a takođe i reakciju ukleštenja A , smatrajući da je ukleštenje zglobov (tj. ukleštenje nije kruto i dozvoljava obrtanje stuba oko tačke A). Rastojanje kotura C od stuba jednako je 1 m ; ostale dimenzije su date na crtežu.

Rešenje. Uklanjajući veze, proučimo ravnotežu cele konstrukcije, tj. stuba sa kosnikom, i delom konopca $KDCM$, koji je prebačen preko koturova (vidi zadatak 10; konstrukcija je kruta i može se smatrati krutim telom). Na konstrukciju deluju sledeće spoljašnje sile: težina

tereta $\vec{G}$, sila $\vec{F}$ u delu konopca DB i reakcije veza $\vec{F}_K$,

$\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$. Unutrašnje sile, koje se uzajamno uravnotežuju, nisu prikazane na slici. Kako je pri odsustvu trenja u koturima sila u konopcu svuda ista, to je, po intenzitetu $F = G$



Sl. 67

Izračunajmo projekcije svih sila na koordinatne ose i njihove momente za tačku A (tom prilikom uvedimo u račun uglove α i β) i sve nađene veličine unesimo u tablicu.

$\vec{F}_i$	$\vec{G}$	$\vec{F}$	$\vec{F}_K$	$\vec{X}_A$	$\vec{Y}_A$
X_i	0	$F \cos \alpha$	$-F_K \cos \beta$	X_A	0
Y_i	$-G$	$-F \sin \alpha$	$-F_K \sin \beta$	0	Y_A
$M_{A_i}^{\vec{F}_i}$	$-G \cdot 1,0$	$-F \cdot 0,9 \sin \alpha$	$F_K \cdot 1,2 \sin \beta$	0	0

Iz pravouglih trouglova AAE_1 i ADB nalazimo da je $\overline{EE_1} = 2,0$ m, $\overline{DB} = 1,5$ m. Oдавде je $\sin \alpha = \sin \beta = 0,8$; $\cos \alpha = \cos \beta = 0,6$. Prema tome, u datom slučaju je $\alpha = \beta$. Postavimo sada uslove ravnoteže, smenjajući istovremeno trigonometrijske funkcije nadenim vrednostima i smatrajući da je $F = G$. Na taj način dobijamo:

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma X_i = 0,6 G - 0,6 F_K + X_A = 0, \\ \Sigma Y_i = -G - 0,8 G - 0,8 F_K + Y_A = 0, \\ \Sigma M_{A_i}^{\vec{F}_i} = -1,0 G - 0,72 G + 0,96 F_K = 0. \end{array} \right.$$

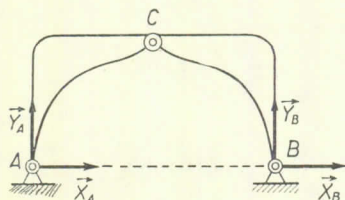
Rešavanjem ovih jednačina, nalazimo:

$$F_K = \frac{43}{24} G = 430 \text{ kp}; \quad X_A = \frac{19}{40} G = 114 \text{ kp}; \quad Y_A = \frac{97}{30} G = 776 \text{ kp}.$$

Obratimo pažnju na sledeće zaključke: 1) pri postavljanju uslova ravnoteže svaku konstrukciju koja posle uklanjanja veza ostaje kruta možemo smatrati krutim telom; 2) unutrašnje sile, koje deluju na delove konstrukcije (u razmotrenom slučaju sile u delu konopca DC , koje deluju na koture C i D), ne ulaze u uslove ravnoteže, kao uzajamno uravnotežene sile.

§ 27. Ravnoteža sistema krutih tela

Statički proračun inženjerskih konstrukcija u mnogim slučajevima svodi se na razmatranje uslova ravnoteže konstrukcije koja se sastoji iz sistema krutih tela međusobno spojenih bilo kakvim vezama. Veze pomoću kojih su međusobno vezana pojedina tela date konstrukcije nazvaćemo *unutrašnje veze*, za razliku od *spoljašnjih veza*, preko kojih se čitava konstrukcija vezuje za oslonce.



Sl. 68

Ako posle uklanjanja spoljašnjih veza (oslonaca) konstrukcija ostaje i dalje kruta, onda se na nju, pri ispitivanju ravnoteže, primenjuju svi zakoni, koji važe za ravnotežu krutog tela. Primeri takvih konstrukcija proučeni su u zadacima 23 i 25 (vidi slike 65 i 67).

Međutim, mogu se sresti takve konstrukcije, koje posle uklanjanja spoljašnjih veza ne ostaju više krute. Primer takve konstrukcije je tzv. luk sa tri zgloba (sl. 68). Ako uklonimo oslonce A i B , onda luk sa tri zgloba nije više krut; pojedini njegovi delovi mogu da se obrću oko tačke (zgloba) C .

Na osnovu principa ukrućivanja datog u aksiomi 5., sistem sila koji deluje na takvu konstrukciju mora da zadovolji uslove ravnoteže krutog tela. Međutim, već

je bilo spomenuto, da ti uslovi, mada su potrebni, nisu u isto vreme i dovoljni, pa, prema tome, iz takvih uslova nismo u stanju da odredimo sve nepoznate veličine. Da bismo postavili i ostale uslove potrebno je da razmotrimo ravnotežu jednog ili više delova (tela) iz kojih se sastoji konstrukcija.

Tako, npr., ako postavimo uslove ravnoteže za proizvoljan ravan sistem sila koje deluju na luk sa tri zgloba prikazan na sl. 68 dobićemo tri jednačine u kojima figurišu četiri nepoznate veličine X_A , Y_A , X_B , Y_B . Ako pak postavimo još i uslove ravnoteže za bilo koji od delova ove konstrukcije za levi ili za desni deo dobićemo još tri uslova ravnoteže u kojima se pojavljuju dve nove nepoznate veličine X_C , Y_C , koje na sl. 68 nisu prikazane. Prema tome, na taj način, dobićemo sistem od šest jednačina sa šest nepoznatih veličina.

Drugi način za rešavanje zadataka ove vrste sastoji se u tome da uopšte ne postavljamo uslove ravnoteže za čitavu konstrukciju kao celinu, već da je odmah raščlanimo na njene sastavne delove i zatim da postavljamo uslove ravnoteže za svaki od delova konstrukcije, smatrajući posebno svaki deo konstrukcije kao slobodno kruto telo. U takvim slučajevima reakcije unutrašnjih veza javljaju se uvek u parnom broju, istih su intenziteta, istih pravaca, a suprotnih smerova. Ako na svaki od n delova neke konstrukcije deluje proizvoljan ravan sistem sila, onda je moguće postaviti $3n$ jednačina (uslova ravnoteže), koje omogućuju da se odrede $3n$ nepoznatih veličina. Treba da se napomene da se pri drugim sistemima sila broj jednačina ravnoteže menja. Ako je broj nepoznatih veličina veći od broja postavljenih jednačina, onda je zadatak statički neodređen.

Primer na kome je prikazan redosled rešavanja za zadatke ove vrste dat je u zadatku 27.

Zadatak 26. Štap AD , težine $G_1 = 15$ kp, vezan je za vertikalni zid zglibom A , dok je kosnik CB , težine $G_2 = 12$ kp, krajem C vezan zglibom za vertikalni zid, a krajem B , opet zglibom, za štap AD (sve dimenzije date su na crtežu). O kraj D štapa AD obešen je teret $G = 30$ kp. Odrediti reakcije u zglibovima A i C .

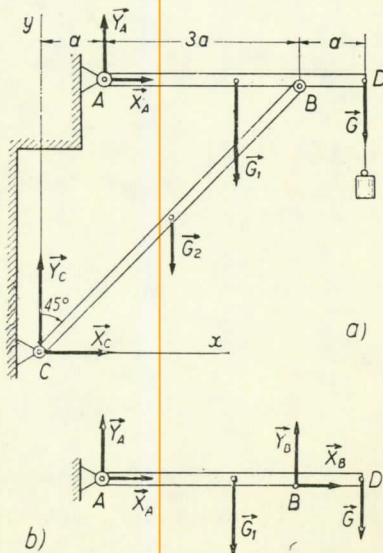
Rešenje. Uklanjajući sve spoljašnje veze, razmotrimo ravnotežu cele konstrukcije. Na nju deluju date sile: $\vec{G}$, $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$ i reakcije veza $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_C$, $\vec{Y}_C$. Ako uklonimo spoljašnje veze, onda ova konstrukcija nije više kruta (štap BC može da se obrće oko zgloba B); međutim, na osnovu principa ukrućivanja sile koje deluju na ovaj štap, pri ravnoteži, moraju da zadovolje uslove ravnoteže statike. Postavljanjem ovih uslova nalazimo:

$$\sum X_i \equiv X_A + X_C = 0,$$

$$\sum Y_i \equiv Y_A + Y_C - G_1 - G_2 - G = 0,$$

$$\sum M_A^{\vec{F}_i} \equiv X_C \cdot 4a - Y_C \cdot a - G_2 \cdot a - G_1 \cdot 2a - G \cdot 4a = 0.$$

Tri dobijene jednačine, kao što vodimo, sadrže četiri nepoznate X_A , Y_A , X_C , Y_C . Da bismo rešili ovaj zadatak razmotrimo dopunske uslove ravnoteže grede AD (sl. 69, b). Na nju deluju sile $\vec{G}$, $\vec{G}_1$ i reakcije $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{X}_B$, $\vec{Y}_B$; četvrtu jednačinu, koja nedostaje,



Sl. 69

dobićemo postavljanjem momentne jednačine za tačku B (u tom slučaju u ovu jednačinu ne ulaze nove nepoznate X_B, Y_B). Tako dobijamo:

$$\sum \vec{M}_B^F \equiv -Y_A \cdot 3a + G_1 \cdot a - G \cdot a = 0.$$

Rešavajući sada dati sistem od četiri jednačine (polazeći od poslednje), nalazimo:

$$Y_A = \frac{1}{3} (G_1 - G) = -5 \text{ kp}; \quad Y_C = \frac{2}{3} G_1 + G_2 + \frac{4}{3} G = 62 \text{ kp};$$

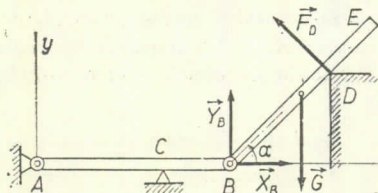
$$X_C = \frac{2}{3} G_1 + \frac{1}{2} G_2 + \frac{4}{3} G = 56 \text{ kp}; \quad X_A = -X_C = -56 \text{ kp}.$$

Iz dobijenih rezultata se vidi da sile $\vec{X}_A$ i $\vec{Y}_A$ imaju suprotan smer od smera prikazanog na crtežu. Reakcija zgloba B , ako je potrebno, može da se odredi projicirajući na ose x i y sile koje deluju na gredu AD i koje su jednake: $X_B = -X_A$; $Y_B = G_1 + G - Y_A = 50 \text{ kp}$.

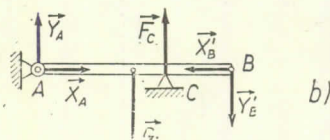
Pri rešavanju ovog sistema jednačina treba da se obrati pažnja na to, da vrednost svake od veličina treba da se smenjuje u sledeću jednačinu sa istim znakom sa kojim je ta veličina dobijena prilikom rešavanja prethodne jednačine. U datom slučaju, na primer, u poslednjoj jednačini umesto Y_A stavićemo -5 kp , a ne 5 kp . Zbog toga ne treba, kako se to ponekad pogrešno čini, odmah promeniti smer reakcije Y_A na slici čim se dobila vrednost $Y_A = -5 \text{ kp}$, i dalje smatrati da je $Y_A = 5 \text{ kp}$, jer to može da dovede do grešaka pri rešavanju sledećih jednačina ravnoteže.

Kao što vidimo, pri rešavanju zadataka statike ne treba uvek postaviti sve uslove ravnoteže za telo koje posmatramo. *Ako u zadatku nije potrebno da odredimo reakcije nekih veza, onda treba pokušati da se postave takvi uslovi ravnoteže u koje ne ulaze reakcije koje se ne traže.* Mi smo u ovom zadatku tako postupili, jer smo razmatrajući ravnotežu grede AD postavili samo momentnu jednačinu za tačku B .

Zadatak 27. Horizontalna greda AB , težine $G_1 = 20 \text{ kp}$, pričvršćena je za vertikalni zid zglobom A i oslanja se na oslonac C (sl. 70, a). Za kraj B grede zglobom je pričvršćena greda BE , težine $G = 40 \text{ kp}$, koja se oslanja na ispust D . Pri tome je $\overline{CB} = 1/3 \overline{AB}$ i $\overline{DE} = 1/3 \overline{BE}$; ugao $\alpha = 45^\circ$. Odrediti reakcije oslonaca.



Rešenje. Rastavimo ovaj sistem na dva dela i posmatrajmo odvojeno ravnotežu grede BE i grede AB . Na gredu BE , ako je smatramo za slobodno telo (sl. 70, a), deluju sile $\vec{G}$ i reakcija veza $\vec{F}_D, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$. Ako uvedemo oznaku $\overline{BE} = a$, i ako postavimo za ove sile uslove ravnoteže (33) dobićemo:



Sl. 70

Rešavanjem ovih jednačina nalazimo da je:

$$F_D = \frac{3}{4} G \cos \alpha = 21,2 \text{ kp}; \quad X_B = \frac{3}{8} G \sin 2\alpha = 15 \text{ kp};$$

$$Y_B = G \left(1 - \frac{3}{4} \cos^2 \alpha \right) = 25 \text{ kp}.$$

Na gredu AB , ako je smatramo za slobodno telo, deluje sila $\vec{G}_1$, reakcije spoljašnjih veza $\vec{F}_C, \vec{X}_A, \vec{Y}_A$ i pritisci $\vec{X}_B'$ i $\vec{Y}_B'$ grede BE , koji se prenose preko zgloba B (sl. 70, b). Tom prilikom, prema aksiomi 4., sile $\vec{X}_B'$ i $\vec{Y}_B'$ biće usmerene u suprotnom smeru od smera sila $\vec{X}_B$ i $\vec{Y}_B$; po intenzitetu ove sile su jednake: $X_B = X_B', Y_B = Y_B'$.

Uvedimo oznaku $\overline{AB} = b$ i za sile, koje deluju na gredu AB , postavimo uslove ravnoteže (34); tako dobijamo:

$$\begin{aligned}\Sigma X_i &= X_A - X'_B = 0, \\ \Sigma \vec{M}_{A'}^{F_i} &= -Y'_B b + F_C \cdot \frac{2}{3} b - G_1 \cdot \frac{b}{2} = 0, \\ \Sigma \vec{M}_C^{F_i} &= -Y_A \frac{2}{3} b + G_1 \frac{b}{6} - Y'_B \cdot \frac{b}{3} = 0.\end{aligned}$$

Ako u ove jednačine stavimo $X'_B = X_B$ i $Y'_B = Y_B$, i ako ih rešimo dobićemo:

$$X_A = X_B = 15 \text{ kp}; \quad Y_A = \frac{1}{4} G_1 - \frac{1}{2} Y_B = -7,5 \text{ kp}; \quad F_C = \frac{3}{4} G_1 + \frac{3}{2} Y_B = 52,5 \text{ kp}$$

Iz dobijenih rezultata se vidi da sve reakcije, izuzev reakcije $\vec{Y}_A$, imaju smerove prikazane na sl. 70, dok je reakcija $\vec{Y}_A$ stvarno usmerena naniže.

Pri rešavanju zadataka ovim putem treba da se ima u vidu da ako pritisak jednog tela na drugo telo prikažemo silom $\vec{F}$, ili pak njenim komponentama $\vec{X}$ i $\vec{Y}$, onda, na osnovu aksiome 4., pritisak drugog tela na prvo, moramo prikazati silom $\vec{F}'$, koja je usmerena suprotno smeru sile $\vec{F}$ (intenziteti ovih sila su jednaki $F = F'$), ili pak njenim komponentama $\vec{X}'$, $\vec{Y}'$, koje su usmerene suprotno smeru komponentata $\vec{X}$ i $\vec{Y}$ (pri čemu je po intenzitetu $X' = X$, $Y' = Y$).

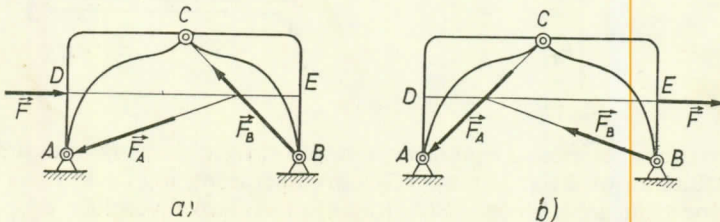
Primitimo da se prilikom rešavanja zadataka ovim redosledom vrlo često pravi jedna od sledećih grešaka:

1) sile $\vec{X}'$ i $\vec{Y}'$ ne usmere se u suprotnom smeru od smera sila $\vec{X}$ i $\vec{Y}$, tako da u tom slučaju dobijena rešenja neće biti ispravna;

2) sile $\vec{X}'$ i $\vec{Y}'$ usmere se ispravno (tj. u suprotnom smeru od smera sila $\vec{X}$ i $\vec{Y}$), ali se pri rešavanju jednačina ravnoteže smatra da je $X' = -X$, $Y' = -Y$; krajnji rezultati pri ovakvom rešavanju neće biti ispravni, jer se i na ovaj način suštinski pravi ista greška, kao i u prvom slučaju.

Da bi se izbegle nabrojane greške pri rešavanju ovakvih zadataka, preporučuje se, kao pravilo, da se koristi redosled rešavanja, koji je bio upotrebljen u zadatku 26. Rešavanjem zadataka tom metodom, obično dobijamo jednačine ravnoteže u prostijem obliku, jer u uslovima ravnoteže čitave konstrukcije (vidi rešavanje zadatka 26) ne ulaze sile unutrašnjih reakcija. Naravno, tu metodu ćemo da koristimo onda kada je to moguće, jer u nekim slučajevima, kada imamo da odredimo veliki broj nepoznatih veličina, moramo se poslužiti i metodom rešavanja koja je upotrebljena prilikom rešavanja ovog zadatka.

Zadatak 28. Na luk sa tri zgloba (sl. 71) deluje horizontalna sila $\vec{F}$. Pokazati da pri određivanju reakcija oslonaca $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ ne sme da se prenese napadna tačka sile $\vec{F}$ u tačku E duž njene napadne linije.



Sl. 71

Rešenje. Oslobođimo luk od spoljašnjih veza (tj. od oslonaca A i B). Tako dobijamo pomerljivu konstrukciju, pa se ona ne može smatrati krutim telom. Prema tome, ne smemo prenositi napadnu tačku sile, koja deluje na ovakvu konstrukciju, duž pravca DE , čak i prilikom postavljanja opštih uslova ravnoteže.

Proverimo ovu činjenicu neposrednim rešavanjem zadatka zanemarujući težinu luka. Posmatrajmo najpre desnu polovinu luka kao slobodno telo. Na nju deluju samo dve sile: reakcije $\vec{F}_B$ i $\vec{F}_C$ zglobova B i C (sila $\vec{F}_C$ na crtežu nije prikazana). Pri rešavanju zadatka ove sile biće usmerene duž jedne iste prave, tj. duž prave BC. Prema tome, reakcija $\vec{F}_B$ je usmerena duž prave BC.

Razmotrimo sada ravnotežu luka kao celine. U ovom slučaju na luk deluju tri sile: data sila $\vec{F}$ i reakcije $\vec{F}_B$ (čiji smo pravac i smer odredili) i $\vec{F}_A$. Na osnovu teoreme o tri sile, napadne linije ovih sila, u slučaju ravnoteže, moraju da se seku u jednoj tački; odavde nalazimo pravac reakcije $\vec{F}_A$. Intenziteti reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ nalaze se iz odgovarajućeg trougla sila.

Ako silu $\vec{F}$ naneseemo u tačku E, i ako ponovimo predašnja rasuđivanja i izvršimo potrebne račune, uverićemo se da su sada reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ drugojačije i po intenzitetu po pravcu (sl. 71, b).

§ 28.* Kontinualna raspodela sila

U inženjerskim proračunima vrlo često se susrećemo sa opterećenjima, koja su kontinualno raspoređena po nekoj površini po nekom zakonu. Razmotrimo nekoliko najprostijih slučajeva kontinualne raspodele sila u ravni.

Ravan sistem kontinualno raspoređenih sila karakteriše se tzv. *specifičnim opterećenjem* q , tj. veličinom sile, koja otpada na jedinicu dužine opterećenog odsečka. Intenzitet ovakvih kontinualnih opterećenja meri se u kp po metru (kp/m).

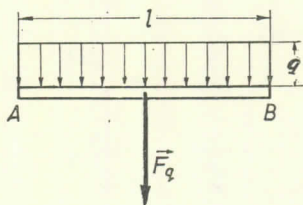
1. Sile ravnomerno raspoređene duž odsečka prave (sl. 72). U ovom slučaju specifično opterećenje je konstantna veličina. Pri statičkim proračunima takav sistem sila može da se zameni njihovom rezultantom

$$F_q = ql.$$

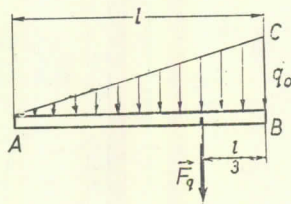
(39)

Napadna tačka ove rezultante nalazi se na sredini odsečka AB.

2. Sile kontinualno raspoređene duž odsečka prave po linearnom zakonu (sl. 73). Za primer ovakve vrste opterećenja može da posluži pritisak vode na vertikalnu površinu (branu). U ovom slučaju najveće opterećenje je na dnu, a najmanje na površini vode, gde je jednako nuli. Prema tome, u ovom



Sl. 72



Sl. 73

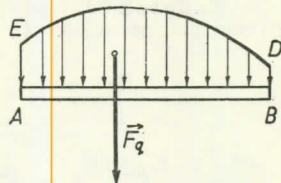
slučaju intenzitet specifičnog opterećenja raste od nule do svoje maksimalne veličine q_0 . Rezultanta ovakvog sistema sila određuje se na isti način kao i rezultanta sila teže jedne trougaone ploče ABC. Kako je težina ovakve ploče proporcionalna njenoj površini, to je intenzitet ove rezultante jednak

$$F_q = \frac{1}{2} q_0 l.$$

(40)

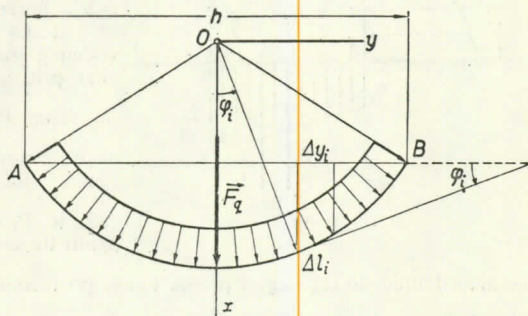
Napadna tačka rezultante $\vec{F}_q$ nalazi se na rastojanju $\frac{l}{3}$ od strane BC trougla ABC (vidi § 56, tačka 2).

3. Sile kontinualno raspoređene duž odsečka prave po proizvoljnom zakonu (sl. 74). Rezultanta ovog sistema sila, po analogiji sa silom teže, biće po intenzitetu jednaka površini figure $ABDE$, izmerene u odgovarajućoj razmeri, i prolaziće kroz težište te površine (problem određivanja težišta površina biće proučen u § 54).



Sl. 74

4. Sile kontinualno ravnomerno raspoređene po obimu kružnog luka (sl. 75). Primer za ovakav raspored sila nalazimo, npr., kod kontinualne raspodele sila pritiska na unutrašnje zidove cilindričnog suda. Iz simetrije proizlazi da će suma projekcija ovih sila na osu Oy , koja je normalna na osi simetrije Ox , biti jednaka nuli. Prema tome, rezultanta ovih sila biće usmerena duž ose Ox . Po intenzitetu ova rezultanta biće $F_q = \sum (q \Delta l_i) \cos \varphi_i$, gde je $q \Delta l_i$ sila pritiska, koja deluje na element kružnog luka Δl_i , a φ_i — ugao koji obrazuje ta sila sa pravcem Ox . Međutim, iz crteža se vidi da je $\Delta l_i \cos \varphi_i = \Delta y_i$. Tada, izvlačeći opšti umnožitelj q ispred zgrade, tj. ispred znaka sume, dobićemo $F_q = \sum q \Delta y_i = q \sum \Delta y_i = q \cdot AB$. Na taj način nalazimo da je



Sl. 75

$$F_q = qh, \quad (41)$$

gde je h dužina tetive nad lukom $\widehat{AB}$.

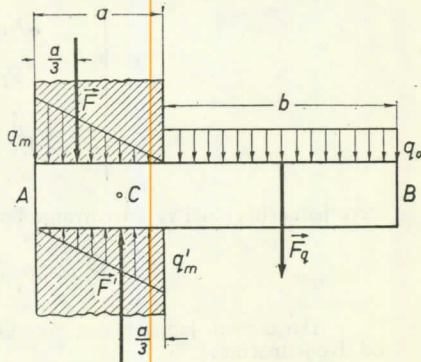
Zadatak 29. Konzola AB , čije su dimenzije naznačene na crtežu (sl. 76), opterećena je ravnomerno podeljenim teretom intenziteta q_0 kp/m. Zanemarujući težinu grede i smatrajući da su sile pritiska na mestu ukleštenja raspoređene po linearnom zakonu, odrediti maksimalne intenzitete q_m i q'_m tih sila, ako je $b = 2a$ (uporedi ovaj zadatak sa zadatkom 15, § 17).

Rešenje. Ako kontinualno raspodeljene sile zamenimo njihovim resultantama $\vec{F}_q$, $\vec{F}$ i $\vec{F}'$, gde je, prema formulama (39) i (40),

$$F_q = q_0 b, \quad F = \frac{1}{2} q_m a, \quad F' = \frac{1}{2} q'_m a;$$

i ako postavimo uslove ravnoteže (37) za paralelne sile koje deluju na konzolu, dobićemo:

$$\begin{aligned} \sum Y_i &= F_q + F - F' = 0, \\ \sum M_C^{\vec{F}_i} &= F \cdot \frac{a}{3} - F_q \left(\frac{b}{2} + \frac{a}{3} \right) = 0. \end{aligned}$$



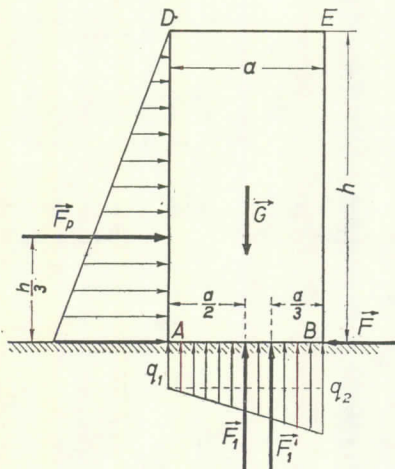
Sl. 76

Ako umesto F_q , F i F' stavimo u ove jednačine vrednosti navedene malopre, konačno ćemo dobiti:

$$q_m = \left(3 \frac{b^2}{a^2} + 2 \frac{b}{a} \right) q_0, \quad q'_m = \left(3 \frac{b^2}{a^2} + 4 \frac{b}{a} \right) q_0.$$

Kada je $b = -2a$ dobijamo da je $q_m = 16 q_0$, $q'_m = 20 q_0$.

Zadatak 30. Nasip pravougaonog poprečnog preseka visine h i širine a postavljen je na horizontalnu osnovu AB (sl. 77). Težina jedinice zapremine vode koja pritiskuje na nasip iznosi γ , dok težina jedinice zapremine zida nasipa iznosi γ_1 . Smatrajući da su sile pritiska na osnovu raspoređene po linearnom zakonu (po zakonu trapeza), odrediti najmanju (q_1) i najveću (q_2) veličinu intenziteta ovih sila.



Sl. 77

Rešenje. Razmotrimo deo nasipa jedinice dužine u pravcu upravnom na ravan crteža. Sile koje deluju na taj deo, smatraćemo da deluje u njegovom srednjem preseku, koji je prikazan na sl. 77. Te sile biće: sila pritiska vode $\vec{F}_p$, težina nasipa $\vec{G}$, vertikalna reakcija osnove, koju prikazujemo dvema silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_1'$, horizontalna reakcija $\vec{F}$.

Kako je pritisak vode na dnu određen težinom vodenog stuba tečnosti visine h , onda je najveći intenzitet pritiska vode $q_m = \gamma h$, tako da po formuli (40) dobijamo $F_p = \frac{1}{2} q_m h = \frac{1}{2} \gamma h^2$. Komponenta $\vec{F}_1$ reakcije osnove predstavlja rezultantu ravnomerno podeljenih sila intenziteta q_1 ; prema tome, po formuli (39) je $F_1 = q_1 a$. Komponenta $\vec{F}_1'$ predstavlja rezultantu linearno raspoređenih sila sa intenzitetom koji se

menja od nule do $(q_2 - q_1)$; prema tome, po formuli (40), biće $F_1' = (q_2 - q_1) \frac{a}{2}$. Težina jedinice dužine nasipa biće $G = \gamma_1 a h$. Prema tome je

$$F_p = \frac{1}{2} \gamma h^2, \quad G = \gamma_1 a h, \quad F_1 = q_1 a, \quad F_1' = (q_2 - q_1) \frac{a}{2}$$

Postavimo sada jednačine ravnoteže (33). Momentnu jednačinu postavimo za napadnu tačku sile $\vec{F}_1$. Tako dobijamo

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma X_i &\equiv F_p - F = 0, \\ \Sigma Y_i &\equiv F_1 + F_1' - G = 0, \\ \Sigma M_{O_i}^{\vec{F}_i} &\equiv -F_p \cdot \frac{h}{3} + F_1' \cdot \frac{a}{6} = 0. \end{aligned} \right.$$

Prva jednačina služi za određivanje horizontalne reakcije $\vec{F}$. Iz druge i treće jednačine nalazimo:

$$F_1' = 2F_p \frac{h}{a}, \quad F_1 + F_1' = G.$$

Ako u ovim jednačinama sve sile zamenimo odgovarajućim vrednostima, dobićemo sistem od dve jednačine:

$$q_2 - q_1 = 2\gamma \frac{h^3}{a^2}, \quad q_2 + q_1 = 2\gamma_1 h.$$

Rešavanjem ovih jednačina, nalazimo:

$$q_1 = \left(\gamma_1 - \frac{h^2}{a^2} \gamma \right) h, \quad q_2 = \left(\gamma_1 + \frac{h^2}{a^2} \gamma \right) h.$$

Zanimljivo je istaći da pri odnosu širine nasipa a prema njegovoj visini h , određenom jednačinom

$$\frac{a}{h} = \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}},$$

veličina q_1 postaje nula. Ako je a manje od $h \sqrt{\frac{\gamma}{\gamma_1}}$, onda je q_1 negativno. To znači da jedan deo nasipa na kraju A neće da pritiskuje na osnovu, tako da tu voda može da prolazi i da izazove rušenje nasipa.

Zadatak 31. Cilindrični balon visine H i unutrašnjeg prečnika d napunjen je gasom pod pritiskom p kp/m². Debljina cilindričnog zida balona iznosi a . Odrediti zatežuće napone u zidu balona u 1) podužnom i 2) poprečnom pravcu (napon je jednak količniku iz zatežuće sile i površine poprečnog preseka).

Rešenje. 1) Razdvojimo cilindar jednom ravni, koja je upravna na njegovu osu, na dva dela i razmotrimo ravnotežu jednog od tih delova (sl. 78, a). Na takav deo u smeru ose cilindra deluju dve sile:

sila pritiska na dno $F_p = \frac{\pi d^2}{4} p$ i unutrašnje sile ravnomerno rasporedene po površini poprečnog preseka čiju ćemo rezultantu označiti sa $\vec{F}$ (ova sila predstavlja uticaj odsečenog dela balona na preostali deo). Pri ravnoteži mora biti: $F = F_p =$

$\frac{\pi d^2}{4} p$. Kako je površina poprečnog preseka približno jednaka πda , dobijamo da će zatežući napon biti:

$$\sigma_1 = \frac{F}{\pi da} = \frac{1}{4} \frac{d}{a} p \text{ kp/m}^2.$$

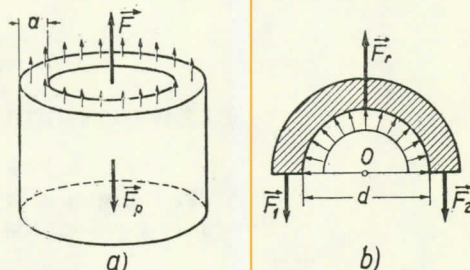
2) Presecimo sada cilindričnu površinu jednom ravni, koja prolazi kroz osu cilindra i podelimo na taj način balon na druge dve polovine. Razmotrimo ravnotežu jedne od ovih polovina, smatrajući da sve sile koje opterećuju takvu polovinu deluju u ravni srednjeg preseka (sl. 78, b). Na takvu polovinu cilindra deluju:

a) ravnomerno rasporedene sile pritiska po luku polukruga čiji je intenzitet $q = pH$; prema formuli (41) rezultanta ovih sila je $F_r = qd = pHd$;

b) ravnomerno rasporedene sile u presecima A i B (dejstvo uklonjene polovine), čije ćemo rezultante označiti sa $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$, pri čemu je zbog simetrije $F_1 = F_2 = F'$. Iz uslova ravnoteže dobijamo $F_1 + F_2 = F_r$, odakle je $F' = \frac{1}{2} p d H$. Kako površina preseka na koju deluje sila F iznosi aH (površinu preseka dna cilindra tom prilikom zanemarujemo), to za napon zatezanja dobijamo

$$\sigma_2 = \frac{F'}{aH} = \frac{1}{2} \frac{d}{a} p \text{ kp/m}^2.$$

Kao što vidimo, naponi zatezanja u poprečnom pravcu su dva puta veći od napona zatezanja u podužnom pravcu.



Sl. 78

Glava V

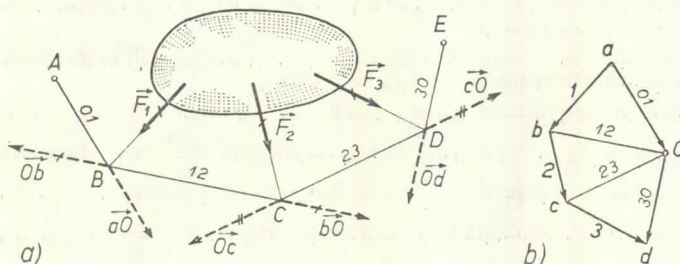
ELEMENTI GRAFIČKE STATIKE

§ 29. Poligon sila i verižni poligon. Svođenje ravnog sistema sila na dve sile

Pri inženjerskim proračunima vrlo često se koristimo grafičkim metodama, koje su manje tačne od analitičkih metoda, ali one omogućuju da se do traženih rezultata dođe lakšim i preglednijim putem.

Grafička metoda za rešavanje zadataka statike ravnog sistema sila zasnovana je na konstrukciji poligona sila i verižnog poligona.

Neka na kruto telo deluju tri sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ (sl. 79, a). Slika $abcd$, konstruisana od datih sila (sl. 79, b), naziva se, kao što je poznato, *poligon sila*.* Napominjemo,



Sl. 79

da kada se kraj poslednje sile poklapa sa početkom prve sile, onda je poligon sila *zatvoren*, a u suprotnom slučaju je *otvoren*.

Uočimo u ravni poligona sila proizvoljnu tačku O , tzv. *pol*, koji ne leži na stranama poligona, ili pak na produžetku ovih strana, i spojimo temena poligona sa tom tačkom (polom O) *zracima* Oa, Ob, Oc, Od , koje ćemo numerisati ciframa $01, 12, 23, 30$ (čitamo: nula-jedan; jedan-dva; dva-tri, itd. Ove cifre označavaju sile, koje se sučeljavaju u temenu kroz koji prolazi odgovarajući zrak).

* Sile u poligonu sila označavaćemo brojevima; umesto $\vec{F}_1$ pisaćemo 1 , umesto $\vec{F}_2$ pisaćemo 2 , itd.

Sada u ravni glavnog crteža (sl. 79, a) izaberimo bilo koju proizvoljnu tačku A i povucimo iz nje pravu, paralelnu zraku 01 , do preseka ove prave sa napadnom linijom sile $\vec{F}_1$ u tački B . Iz tačke B povucimo pravu paralelnu zraku 12 , do preseka ove prave sa napadnom linijom sile $\vec{F}_2$ u tački C , itd. Izlomljena poligonalna linija $ABCDE$ konstruisana na ovaj način naziva se *verižni poligon*. Ovaj naziv potiče odatle, što kad bismo u tačkama A i E vezali krajeve jednog konopca i ako bismo u tačkama B, C i D konopac opteretili silama $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, onda bi konopac, pri ravnoteži, imao položaj izlomljene poligonalne linije $ABCDE$. Verižni poligon je *zatvoren*, kada se njegove poslednje strane (u našem slučaju strane AB i DE) poklapaju, tj. kada budu usmerene duž iste prave. U protivnom slučaju verižni poligon je *otvoren*.

Koristeći se izvedenim konstrukcijama, može se bilo kakav ravan sistem sila zameniti dvema silama, usmerenim po krajnjim stranama (AB i DE) verižnog poligona. Naime, iz sl. 79, b se vidi da se povlačenjem zrakova Oa, Ob , itd., svaka od sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ razlaže u dve, pošto je

$$\vec{F}_1 = \vec{ab} = \vec{aO} + \vec{Ob}, \quad \vec{F}_2 = \vec{bc} = \vec{bO} + \vec{Oc}, \quad \vec{F}_3 = \vec{cd} = \vec{cO} + \vec{Od}.$$

Međutim, kako je poznato (vidi § 7 i sl. 17) sile jednake $\vec{aO}$ i $\vec{Ob}$, zamenjuju silu $\vec{F}_1$, ako ih naneseemo u bilo kojoj tački njene napadne linije. Nanesimo ove sile u tačku B , koja je dobijena pri konstrukciji verižnog poligona (sl. 79, a). Isto tako zamenimo sile $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_3$ silama $\vec{bO}$ i $\vec{Oc}$, i $\vec{cO}$ i $\vec{Od}$, nanoseći ih u tačkama C i D . Primitimo sada da se sile $\vec{Ob}, \vec{bO}$ i $\vec{Oc}, \vec{cO}$, usmerene po pravama BC i CD , uzajamno uravnotežuju, jer se iz slike 79, b vidi da je $\vec{Ob} = -\vec{bO}$; $\vec{Oc} = -\vec{cO}$; prema tome, ove sile možemo ukloniti. U krajnjem rezultatu sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$ stvarno će biti zamenjen dvema silama $\vec{aO}$ i $\vec{Od}$, koje deluju duž krajnjih strana AB i DE verižnog poligona.

Sličan rezultat bi se dobio i za proizvoljan broj sila.

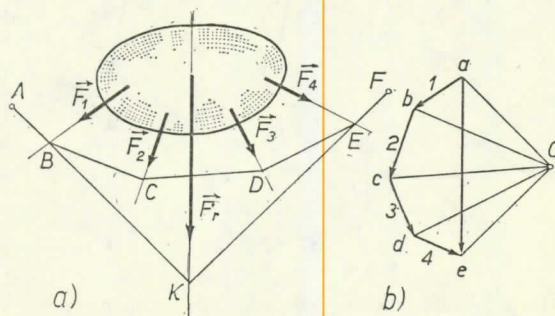
§ 30. Grafičko određivanje rezultante

Ako poligon sila, konstruisan od datog ravnog sistema sila, nije zatvoren (glavni vektor $\vec{F}_R \neq 0$), onda se takav sistem sila, prema onome što je rečeno u § 23, svodi na rezultantu.

Grafičkim putem rezultanta može da se odredi postupnom primenom pravila o slagaju sila pomoću paralelograma sila, ali je očevito da je taj put vrlo nepodesan u slučaju velikog broja sila. Daleko prostije može ovaj zadatak da se reši konstruisanjem poligona sila i verižnog poligona.

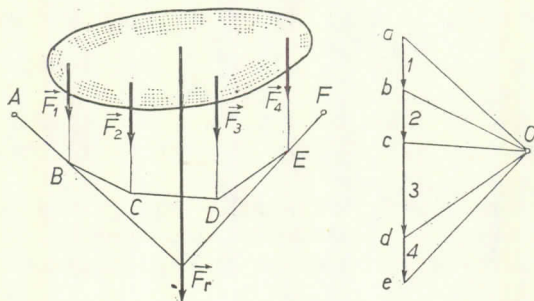
Neka na kruto telo deluje proizvoljan ravan sistem sila:

$\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$ (sl. 80, a). Konstruišimo od tih sila u izabranoj razmeri poligon sila $abcde$ (sl. 80, b). Njegova poslednja strana određuje po pravcu, smeru i veličini rezul-



Sl. 80

tantu $\vec{F}_r$. Da bismo odredili napadnu tačku rezultante spojimo temena poligona sila a, b, c, d, e sa proizvoljnim polom O i konstruišimo verižni poligon sila $ABCDEF$ povlačeći paralelne prave $AB \parallel aO, BC \parallel bO$, itd. (sl. 80, a). Prema onome što smo dokazali u prethodnom paragrafu može dati sistem sila da se zameni dvema silama, koje deluju duž pravih AB i EF . Prema tome, rezul-



Sl. 81

tanta ovih dveju sila (pa prema tome i rezultanta sistema sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$) prolazi kroz tačku u kojoj se seku pravci AB i EF . Na taj način, ako konstruišemo verižni poligon i ako produžimo prvu i poslednju stranu verižnog poligona, u preseku ovih pravaca dobićemo tačku K , kroz koju prolazi rezultanta datog sistema sila. Ako sada kroz tačku K povučemo pravu, paralelnu pravoj

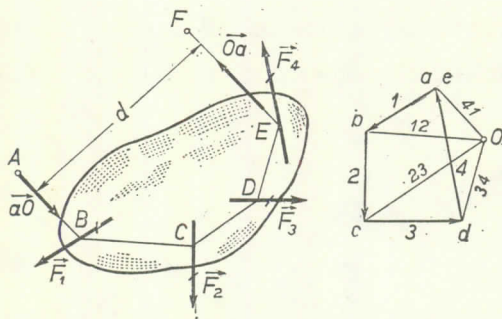
ae , i ako u bilo kojoj tački ove prave nanese silu $\vec{F}_r$, dobićemo rezultantu.

Analogna konstrukcija za slučaj paralelnih sila pokazana je na sl. 81. Poligon sila degeneriše sada u odsečak prave linije, a rezultanta je prikazana odsečkom $\vec{F}_r = a\vec{e}$.

§ 31. Grafičko određivanje rezultujućeg sprega

Ako je poligon sila, konstruisan od datog sistema sila, zatvoren, a verižni poligon otvoren, onda se takav ravan sistem sila svodi na jedan rezultujući spreg.

Naime, ako je poligon sila $abcde$, konstruisan za sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, zatvoren (sl. 82), onda se zraci aO i Oe poklapaju.* Tada su krajnje strane verižnog poligona AB i EF , ako on nije zatvoren, paralelne međusobom.



Sl. 82

Prema onome što je dokazano u § 29, dati sistem sila možemo zameniti dvema silama, koje su u datom slučaju $\vec{aO}$ i $\vec{Oa}$ (jer je $\vec{Oe} = \vec{Oa}$) i usmerene duž pravih AB i EF . Prema tome, sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{F}_4$, zaista je zamenjen spregom ($\vec{aO}, \vec{Oa}$) s krakom d . Moment tog sprega jednak je $\vec{Oa} \cdot d$, pri čemu se $\vec{Oa}$ meri u istoj razmeri u kojoj je merena sila pri konstrukciji poligona sila, dok se d meri u razmeri za dužine, koja je bila usvojena pri crtanju osnovnog crteža.

* U ovom slučaju zrake $Oa, Ob, \dots$ označavamo brojevima 12, 23, 34, 41, jer kad je poligon sila zatvoren onda se u bilo kom temenu poligona sučeljavaju (stiču) po dve sile.

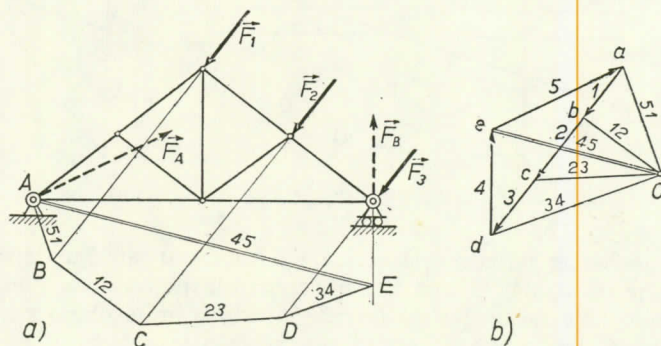
§ 32. Grafički uslovi ravnoteže ravnog sistema sila

Iz rezultata do kojih smo došli u prethodnom paragrafu, proizlazi da je za ravnotežu ravnog sistema sila, koje deluju na kruto telo, potrebno i dovoljno, da poligon sila, i verižni poligon, konstruisani za dati sistem sila, budu zatvoreni (grafički uslovi ravnoteže).

Naime, ako je bilo koji od ovih poligona otvoren, onda se u tom slučaju sistem sila svodi ili na rezultantu, ili na spreg, i tada telo nije u ravnoteži. Ako su oba ova poligona zatvorena, sistem sila koji deluje na kruto telo, očevидno, svodi se na dve sile istih intenziteta, koje deluju duž iste prave, ali su suprotno usmerene (sl. 82 pri $d = 0$), i telo se u tom slučaju nalazi u ravnoteži.

§ 33. Određivanje reakcija oslonaca

Oredimo grafičkim putem reakcije oslonaca A i B rešetke, prikazane na sl. 83, a. Najpre u izabranoj razmeri za dužine (npr., 0,4 m u stvarnosti prika-



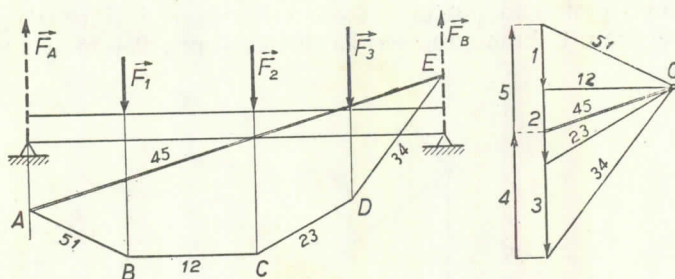
Sl. 83

žimo sa 1 cm na crtežu) nacrtajmo datu rešetku i nanesimo sile $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$, koje deluju na nju. Reakcije oslonaca označimo sa $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$; pri tome pravac reakcije $\vec{F}_A$ nije unapred poznat, dok je, nasuprot tome, pravac reakcije $\vec{F}_B$ poznat. Sada, u izabranoj razmeri za sile (npr., 0,5 Mp prikažimo na crtežu sa 1 cm) konstruišimo poligon od sila koje deluju na rešetku, počinjući konstrukciju sa silama 1, 2, 3. Konstrukcija poligona sila za trenutak se prekida nanošenjem napadne linije sile $\vec{F}_B$, jer nije poznat intenzitet sile $\vec{F}_B$, (tj. drugim rečima, nije poznata tačka e). Međutim, poznato je da kraj sile $\vec{F}_A$ pada u tačku a, jer poligon sila pri ravnoteži mora da bude zatvoren.

Dalja konstrukcija vrši se sledećim redosledom. Izaberimo pol O, i povucimo polne zrake 12, 23, 34, 51. Pravac 45 nije poznat, jer nije poznat položaj temena e poligona sila. Da bismo odredili pravac ovog zraka, konstruišimo na sl. 83, a verižni poligon, počinjući njegovu konstrukciju od tačke A u kojoj deluje sila $\vec{F}_A$ koja je nepoznata po svom pravcu (u protivnom, ako konstrukciju ne započnemo od tačke A, ne bismo bili u stanju da zatvorimo poligon sila, jer za sada nijedna druga tačka na napadnoj liniji sile $\vec{F}_A$ nije poznata). Od tačke A, pošto u njoj deluje sila

$\vec{F}_A$, povucimo zrak 51 do preseka sa napadnom linijom sile $\vec{F}_1$, tj. do tačke B. Zatim povlačimo zrak 12 do preseka sa napadnom linijom sile $\vec{F}_2$, tj. do tačke C; potom zrak 23 do preseka sa napadnom linijom sile $\vec{F}_3$ u tački D, i najzad zrak 34 do preseka sa napadnom linijom sile $\vec{F}_B$ u tački E. Zatvorimo sada, saglasno uslovima ravnoteže, verižni poligon pravcem EA. Na taj način odredili smo pravac zraka 45.

Posle toga povlačimo iz pola O (sl. 83, b) zrak 45 paralelan pravcu EA. U preseku tog pravca i napadne linije sile 4 nalazi se traženo teme e poligona sila. Prema tome, vektor $\vec{de}$, u izabranoj razmeri, predstavlja traženu silu $\vec{F}_B$, a vektor $\vec{ea}$ silu $\vec{F}_A$. Time je postavljeni zadatak rešen.



Sl. 84

Primer grafičkog određivanja reakcija oslonaca u slučaju dejstva paralelnih sila prikazan je na sl. 84. U tom slučaju konstrukciju verižnog poligona možemo započeti iz bilo koje tačke, jer su pravci napadnih linija obeju reakcija unapred poznati. Zrak 45, koji treba da odredimo, nacrtan je na crtežu duplom linijom.

§ 34.* Grafičko rešavanje ravnih rešetki

Rešetkom se naziva kruta konstrukcija sastavljena iz pravih štapova, koji su na svojim krajevima spojeni zglobovima (šarnirima). Ako svi štapovi rešetke leže u jednoj ravni, onda je rešetka *ravna*. Mesta spajanja štapova zovu se *čvorovi* rešetke. Sva spoljašnja opterećenja koja deluju na rešetku nanose se samo u čvorovima rešetke. Pri proračunu rešetke težine samih štapova rešetke (u odnosu na spoljašnja opterećenja), a takođe i trenje u čvorovima se zanemaruje. Prema tome, na svaki od štapova rešetke deluju dve sile na njegovim krajevima, koje pri ravnoteži imaju pravce duž samog štapa. To znači da možemo smatrati da štapovi rešetke rade samo na zatezanje ili na pritisak.

U krutoj ravnoj rešetki bez suvišnih štapova, koja se sastoji iz trouglova, broj štapova rešetke s i broj čvorova n vezan je odnosom

$$s = 2n - 3.$$

(42)

Naime, u krutom trouglu, koji obrazuju tri štapove rešetke, biće i tri čvora (vidi, npr., na sl. 85 trougao, koji obrazuju štapovi 1, 2 i 4). Da bismo vezali za ovaj trougao svaki sledeći čvor potrebna su po dva štapa (npr., na sl. 85 čvor III spojen je štapovima 3 i 5, itd.); prema tome, za preostala $(n - 3)$ čvora potrebno je $2(n - 3)$

štapa. U krajnjem rezultatu broj štapova biće: $s = 3 + 2(n - 3) = 2n - 3$. Rešetka sa manjim brojem štapova nije kruta, dok rešetka sa većim brojem štapova postaje statički neodređena.

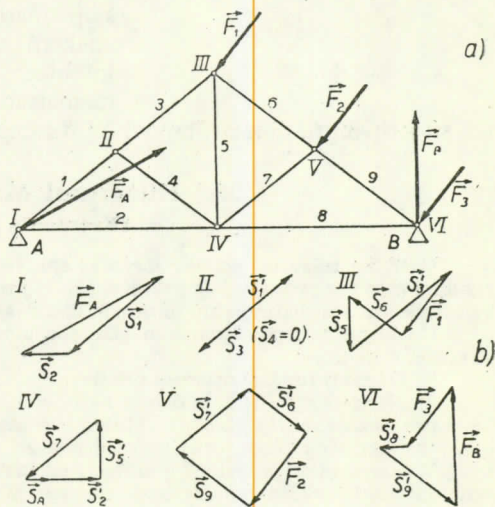
Proračun jedne rešetke svodi se na određivanje reakcija oslonaca i sila u štapovima rešetke. Najpre grafičkim putem (§ 33), ili pak analitičkim putem (§ 26) odredimo reakcije oslonaca, posmatrajući ravnotežu rešetke kao ravnotežu krutog tela. Zatim nalazimo sile u štapovima rešetke, postupno odvajajući od rešetke svaki od čvorova i posmatrajući ravnotežu štapova koji se stiču u tom čvoru. Ovo se rešavanje započinje od čvora u kome se stiču dva štapa (inače ne bi nam pošlo za rukom da odredimo nepoznate sile). Kao primer razmotrimo rešetku prikazanu na sl. 85, a. Kod te rešetke je broj čvorova $n = 6$, dok je broj štapova $s = 9$. Prema tome, uslov (42) je ispunjen i rešetka je kruta bez suvišnih štapova. Reakcije oslonaca za datu rešet-

ku $\vec{F}_A, \vec{F}_B$, određene su u § 33. Nacrtajmo te reakcije zajedno sa spoljašnjim silama $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, koje su poznate.

Razmotrimo sada ravnotežu štapova koji se stiču u čvoru I (u daljem radu čvorove ćemo numerisati rimskim brojevima, a štapove arapskim brojevima). Zamislimo sada da smo odstranili od ovih štapova (koji se stiču u čvoru I) ostali deo rešetke.* Dejstvo uklonjenog dela rešetke u mislima zamenimo silama $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$, koje moraju imati pravce štapova I

i 2. Od sila $\vec{F}_A, \vec{S}_1, \vec{S}_2$, koje se stiču u čvoru I, konstruišimo zatvoreni trougao (sl. 85, b). U tom cilju najpre, u izabranoj razmeri, nacrtajmo silu $\vec{F}_A$, a zatim kroz početak i kraj ove sile povucimo pravce koji su paralelni pravcima štapova I i 2.

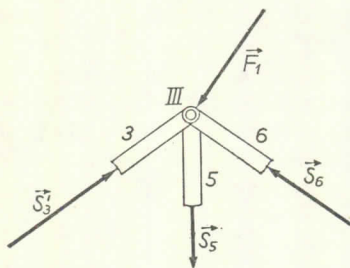
Na taj način odredićemo sile $\vec{S}_1$ i $\vec{S}_2$, koje deluju u štapovima I i 2. Zatim razmotrimo ravnotežu štapova, koji se stiču u čvoru II. Dejstvo preostalog dela rešetke, koji smo u mislima uklonili, na ove štapove, zamenimo silama $\vec{S}'_1, \vec{S}_3, \vec{S}_4$, koje imaju pravce odgovarajućih štapova; pri tome je sila $\vec{S}'_1$ poznata, jer je po zakonu akcije i reakcije (principu dejstva i protivdejstva) $\vec{S}'_1 = -\vec{S}_1$. Konstruišimo zatim od sila koje se stiču u čvoru II zatvoreni trougao sila (počinjući konstrukciju od sile $\vec{S}'_1$) i na taj način odredimo sile $\vec{S}_3$ i $\vec{S}_4$ (u datom slučaju sila u štapu 4 jednaka je nuli; $\vec{S}_4 = 0$). Na potpuno analogan način određujemo sile i u ostalim štapovima rešetke. Odgovarajući poligoni sila za sve čvorove rešetke prikazani su na sl. 85, b. Poslednji poligon sila (za čvor VI) konstruiše se samo radi provere, jer su sve sile koje se stiču u ovom čvoru već poznate.



Sl. 85

* Za čvor III na sl. 86 nacrtani su štapovi rešetke, čiju ravnotežu treba razmatrati, koji su izdvojeni od preostalog dela rešetke. U takvom obliku treba predstaviti sebi i sve ostale čvorove ove rešetke.

Karakter sila u svakom od čvorova određuje se na sledeći način. U mislima isecimo štapove koje se stiču u jednom čvoru (npr., neka to bude čvor III) i na crtežu prikažimo odgovarajuće sile u štapovima koje smo već odredili (sl. 86); sila,



Sl. 86

koja je usmerena od čvora (sila $\vec{S}_5$ na sl. 86) zateže štap, dok sile koje su usmerene ka čvoru (sile $\vec{S}_3$ i $\vec{S}_6$ na sl. 86) pritiskuju štap. Obično se sile koje zatežu štap smatraju da su pozitivne, tj. obeležavaju se znakom plus »+«, dok se sile koje pritiskuju štap smatraju da su negativne i one se obeležavaju znakom minus »-«. Npr., za navedenu rešetku biće: $S_5 = +0,2$ Mp, $S_6 = -0,3$ Mp. U razmatranom primeru (sl. 85) štapovi 1, 2, 3, 6, 7

i 9 su pritisnuti, dok su štapovi 5 i 8 zategnuti.

§ 35.* Dijagrami Maksvela i Kremone (Kremonin plan sila)

Grafičko rešavanje rešetke može se sprovesti daleko preglednije i brže, a osim toga i svi rezultati mogu se prikazati kompaktnije, ako se pri konstrukciji poligona sila za sve čvorove rešetke konstruiše (nacrta) jedan jedini dijagram, tzv. *dijagram Maksvela* i *Kremone* ili *Kremonin plan sila*.

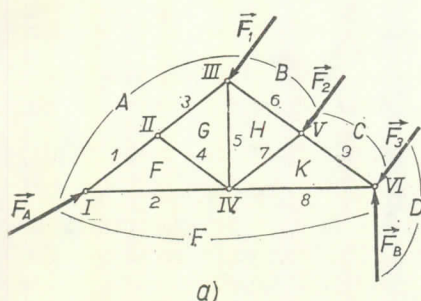
Da bismo nacrtali Kremonin plan sila potrebno je da se držimo izvesnog redosleda koji se sastoji u sledećem:

1) Odrediti reakcije oslonaca rešetke.
2) Nacrtati sve sile koje deluju na rešetku, takođe i reakcije oslonaca, ali tako da sve one budu *van konture rešetke* (sl. 87, a); oblasti koje se nalaze između tih sila i konture rešetke, a takođe i između štapova rešetke, označimo slovima A, B, C, ..., K.

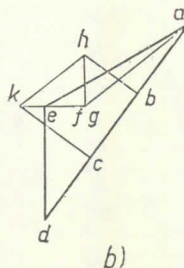
3) Konstruisati u izabranoj razmeri od svih spoljašnjih sila koje deluju na rešetku (tj. od aktivnih sila i reakcija otpora veza) zatvoreni poligon sila. Tom prilikom *sile moramo nanositi onim redom u kome se one nalaze na samoj rešetki obilazeći oko rešetke u smeru obrtanja kazaljke na časovniku* (sl. 87, b — debele linije). Pri tome se preporučuje da se početak i kraj sile označi malim slovima, koja odgovaraju oznakama oblasti, koja pri obilaženju oko rešetke leže s leve i desne strane od sile (npr., silu $\vec{F}_1$ označićemo sa $\vec{ab}$, silu $\vec{F}_2$ označićemo sa $\vec{bc}$, itd.). Na taj način poligon sila za spoljašnje sile biće prikazan poligonálnom linijom *abcdea* (strelice na krajevima sila u ovom poligonu obično se ne stavljaju).

4) Na ovom poligonu sila za spoljašnje sile treba sada postupno nacrtati poligone sila za sve čvorove rešetke, počevši od čvora u kome se stiču samo dva štapa; pri tome *konstrukciju svakog čvora treba započinjati poznatim silama i zatim nanositi sve ostale sile onim redom kojim na njih nailazimo kada oko čvora obilazimo u smeru obrtanja kazaljke na časovniku* (sile u štapovima označićemo na isti način, kao i ostale spoljašnje sile: silu u štapu 1 sa $\vec{af}$, silu u štapu 2 sa $\vec{fe}$, itd.).

Na primer, za čvor VI



Sl. 87



(sl. 87, a) date sile $\vec{F}_3$ i $\vec{F}_B$ već su predstavljene na dijagramu

vektorima $\vec{cd}$ i $\vec{de}$ (sl. 87, b). Od tačke *e* povlačimo pravu, paralelnu štapu 8, a od tačke *c* pravu paralelnu štapu 9. U preseku ovih dveju pravih nalazi se tačka *k* zatvorenog poligona sila *cdekc* za čvor VI. Na potpuno isti način konstruišu se poligoni sila i za sve ostale čvorove.

Dijagram poligona sila za sve čvorove (Kremonin plan sila) kao i za spoljašnje sile prikazan je na sl. 87, b. Da bismo na tom dijagramu pročitali kolika je na primer sila u štapu 1, izrežimo u mislima čvor I, i obilazeći u smeru kretanja kazaljke na časovniku, pročitatmo oznaku sile: *af*.

Sada na dijagramu nademo vektor $\vec{af}$ i odredimo njegov intenzitet (prema usvojenoj razmeri); ako taj vektor nanesimo na kraj štapa I (vidi sl. 86), možemo zaključiti da je ovaj štap pritisnut. Do istog rezultata došli bismo, ako izrežemo i čvor II , ali pri tome, ako obilazimo oko čvora u smeru obrtanja kazaljke na časovniku, nalazimo, da je odgovarajuća sila prikazana vektorom $\vec{fa}$. Prema tome, kao što vidimo, usvojeni način označavanja sila automatski uzima u obzir zakon (princip) dejstva i protivdejstva (zakon akcije i reakcije).

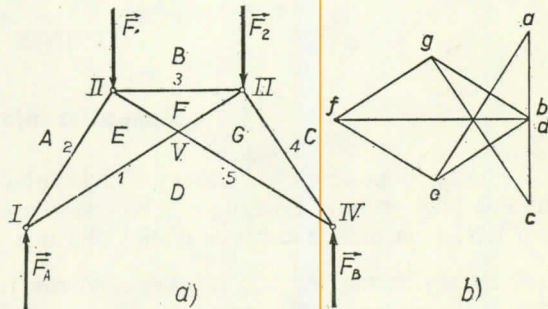
Obratimo pažnju na sledeće specijalne slučajeve.

1) Ako se u čvoru, koji nije opterećen spoljašnjim silama, stiču tri štapa, od kojih su dva usmerena duž istog pravca (npr., čvor II na sl. 87, a), onda, kao što se lako može videti konstruisanjem odgovarajućeg poligona sila, sila u trećem štapu (tj. u štapu 4 na sl. 87, a jednaka je nuli, tj. to je tzv. *nulti štap*. Zbog toga se u dijagramu (sl. 87, b) tačke g i f poklapaju ($gf = 0$).

2) Ako u rešetki postoje ukršteni štapi (sl. 88, a štapi 1 i 5), onda za njih dijagram sila možemo konstruisati običnim putem, posmatrajući tačku preseka štapih kao čvor. Pri tome, sile u delovima štapih 1 i 5, koje su jednake po apsolutnoj veličini i znaku biće na dijagramu prikazane dva puta. Odgovarajući dijagram prikazan je na sl. 88, b pri čemu odsecci iz ovog dijagrama de i fg prikazuju sile u štapu 1, a ef i gd sile u štapu 5.

3) Ukoliko pri konstrukciji dijagrama nađemo na čvor, kod koga je broj nepoznatih veći od dva, treba pokušati da se konstruiše dijagram (ako je rešetka nesimetrična) polazeći istovremeno sa oba kraja rešetke, ili pak da se odrede sile u nekim štapovima rešetke analitičkim putem (metodom preseka).

Da bismo odredili sile u bilo kojim štapovima analitičkim putem, potrebno je da presečemo rešetku takvim presekom, koji prelazi preko tri štapa (npr., preko štapih 3, 4, 2 na sl. 87, a) i da postavimo za bilo koju od polovina rešetke uslove ravnoteže (35), birajući za momentne tačke one tačke u kojima se seku pravci presečenih štapih. Ako su dva od tih štapih paralelna međusobom, pogodniji su uslovi (34), pri čemu se osa na koju projiciramo sile, bira tako, da bude normalna na pravac ta dva štapih. Na taj način vrši se i kontrolisanje rezultata dobivenih grafičkim putem.



Sl. 88

Glava VI

TRENJE

§ 36. Zakoni trenja klizanja

Iskustvo pokazuje da moramo savladati izvesnu silu da bismo prisilili neko telo da klizi po površini drugog tela. Ova sila je sila otpora protiv relativnog klizanja tela. Ona nastaje u ravni dodira oba tela i zove se *sila trenja klizanja*.

Pojava trenja je, pre svega, uslovljena hrapavošću dodirnih površina, koja prouzrokuje otpor protiv pomeranja kada je jedno telo priljubljeno uz drugo. Proučavanje svih svojstava pojave trenja predstavlja vrlo složen fizičko-matematički problem, i ovo proučavanje izlazi iz okvira kursa teorijske mehanike.

U inženjerskim proračunima ova pojava se uzima u obzir usvajanjem opštih pretpostavki, koje su na nizu opita potvrđene, i koje, sa tačnošću dovoljnom za praksu, odražavaju osnovna svojstva pojave trenja. Ove pretpostavke, koje se zovu *zakoni trenja klizanja pri mirovanju*, mogu se formulisati na sledeći način:

1. Kada prisiljavamo neko telo da se pomeri po površini drugog tela, onda u dodirnoj površini nastaje sila trenja, čija veličina može da ima proizvoljne vrednosti od nule do $\vec{F}_{gr}$, koja se zove *granična sila trenja*.

Sila trenja je uvek usmerena u suprotnom smeru od smera u kome spoljašnje aktivne sile teže da pomere telo.

2. Veličina granične sile trenja jednaka je proizvodu iz statičkog koeficijenta trenja i normalnog pritiska, odnosno normalne reakcije:

$$F_{gr} = \mu_0 F_N$$

(43)

Statički koeficijent trenja μ_0 — je neimenovan broj; on se utvrđuje eksperimentalnim putem i zavisi od materijala tela koja se dodiruju, kao i od stanja dodirnih površina (karaktera obrade, temperature, vlažnosti, podmazivanja, itd.).

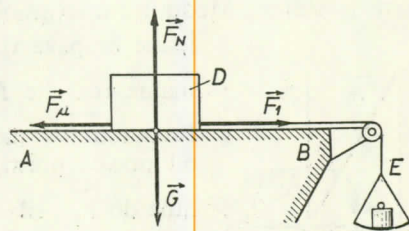
3. Veličina granične sile trenja u dovoljno širokoj oblasti ne zavisi od veličine dodirnih površina pri trenju.

Ako objedinimo prvi i drugi zakon dolazimo do zaključka, da je pri ravnoteži sila trenja mirovanja $F_\mu \leq F_{gr}$, ili

$$F_\mu \leq \mu_0 F_N. \quad (44)$$

Eksperimentalno koeficijent trenja klizanja može da se odredi prostim priborom, koji je shematski prikazan na sl. 89. Horizontalna ploča AB i greda D naprave se od materijala za koje treba odrediti koeficijent trenja. Na gredu D deluje sila teže $\vec{G}$, koja je uravnotežena normalnom reakcijom ploče $\vec{F}_N$, i smičuća sila $\vec{F}_1$, koja je pri mirovanju uravnotežena silom trenja $\vec{F}_\mu$ (sila F_1 brojčano je jednaka težini tase E sa tegovima). Postepeno opterećujući tas, odredićemo silu F_1^* pri kojoj se greda pomeri s mesta. Očividno je da je granična sila trenja jednaka $F_{gr} = F_1^*$. Sada, pošto je u datom slučaju $F_N = G$, po formuli (43) nalazimo

$$\mu_0 = \frac{F_{gr}}{F_N} = \frac{F_1^*}{G}.$$



Sl. 89

Ako izvršimo niz analognih opita, i ako tom prilikom u izvesnim granicama budemo menjali težinu štapa, možemo se uveriti da veličina koeficijenta trenja μ_0 ostaje nepromenjena, dok se veličina sile F_1^* proporcionalno povećava sa težinom G . Isto tako, možemo se uveriti, da se koeficijent trenja ne menja ni u slučaju ako se u izvesnim granicama bude menjala veličina dodirne površine grede. Time se potvrđuje ispravnost drugog i trećeg zakona trenja. Ispravnost prvog zakona trenja potvrđuje se iz činjenice da pri bilo kojim veličinama opterećenja F_1 , koja su manja od F_1^* , teret ostaje u miru, tj. greda se ne pomera. Prema tome, da bi sila trenja F_μ uravnotežila silu F_1 , ona može da ima proizvoljne veličine počev od nule (kada je $F_1 = 0$) pa do F_{gr} (kada je $F_1 \geq F_1^*$).

Treba primetiti da je sila trenja F_μ jednaka smičućoj sili F_1 , a ne veličini $F_{gr} = \mu_0 F_N$, sve dok se teret nalazi u miru. Sila trenja dostiže veličinu $\mu_0 F_N$ samo u graničnom položaju ravnoteže (tj. neposredno pre nego što teret počne da se kreće).

Predstavu o veličini trenja možemo dobiti iz podataka za veličine koeficijenta trenja za neke materijale:

drvo o drvo	$\mu_0 = 0,4$ do $0,7$;
metal o metal	$\mu_0 = 0,15$ do $0,25$;
čelik o led	$\mu_0 = 0,027$.

Potpuniji podaci mogu se naći u raznim tehničkim priručnicima.

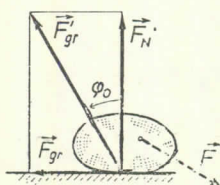
Sve što smo do sada rekli odnosi se na trenje klizanja pri mirovanju. Pri kretanju sila trenja je usmerena u suprotnom smeru od smera u kome se kreće telo i jednaka je proizvodu iz dinamičkog koeficijenta trenja klizanja i normalnog pritiska:

$$F_\mu = \mu F_N.$$

Dinamički koeficijent trenja klizanja μ takođe je neimenovan broj koji se utvrđuje eksperimentom. Veličina ovog koeficijenta zavisi ne samo od materijala i stanja dodirnih površina, već takođe, u nekom stepenu, i od brzine kretanja tela. U najvećem broju slučajeva sa povećanjem brzine najpre se veličina koeficijenta trenja nešto smanjuje, da bi zatim zadržala gotovo konstantnu veličinu.

§ 37. Reakcija hrapave veze. Ugao trenja

U svim dosadašnjim slučajevima pri rešavanju zadataka statike zanemarivali smo trenje i smatrali smo da su površine veza glatke i da su njihove reakcije upravne na te površine. Međutim, u stvarnosti reakcija jednog realnog zgloba, odnosno jedne hrapave veze, sastoji se iz dveju komponenti: iz nor-



Sl. 90

malne reakcije $\vec{F}_N$ i sile trenja $\vec{F}_\mu$ koja je upravna na nju.

Prema tome, ukupna reakcija $\vec{F}'$ odstupa za izvestan ugao od pravca normale na površinu. Pri promeni sile trenja od nule do $\vec{F}_{gr}$, sila $\vec{F}'$ menja se od $\vec{F}_N$ do $\vec{F}_{gr}$, dok ugao prema normali raste od nule do neke granične vrednosti φ_0 (sl. 90).

Najveći ugao φ_0 , koji ukupna reakcija hrapave veze zaklapa sa normalom na površinu, zove se *ugao trenja*.

Iz slike se vidi da je

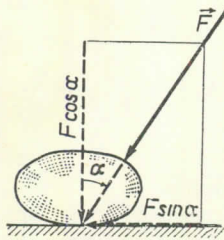
$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{F_{gr}}{F_N}.$$

Pošto je $F_{gr} = \mu_0 F_N$, to nalazimo sledeću vezu između ugla trenja i koeficijenta trenja

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_0.$$

(45)

Pri ravnoteži ukupna reakcija $\vec{F}'$, u zavisnosti od smičućih sila, može da ima bilo koji proizvoljan položaj unutar ugla trenja. U graničnom položaju ravnoteže ukupna reakcija odstupa od normale za ugao φ_0 .



Sl. 91

Ako na telo koje se nalazi na hrapavoj površini delujemo silom $\vec{F}$, koja zaklapa ugao α prema normali (sl. 91), onda će telo da se pokrene samo tada ako je sila $F \sin \alpha$ veća od $F_{gr} = \mu_0 F \cos \alpha$ (zanemarujući težinu tela smatraćemo da je $F_N = F \cos \alpha$). Međutim, nejednačina $F \sin \alpha > \mu_0 F \cos \alpha$, gde je $\mu_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, je ispunjena samo tada ako je $\operatorname{tg} \alpha > \operatorname{tg} \varphi_0$, tj. pri $\alpha > \varphi_0$. Prema tome, nikakvom silom koja prema normali zaklapa ugao α , koji

je manji od ugla trenja φ_0 , nismo u stanju da pomerimo telo duž hrapave ravni. Ovim se objašnjava pojava samokočenja tela.

§ 38. Ravnoteža pri trenju

Proučavanje ravnoteže tela kada se uzme u obzir i trenje, obično se svodi na razmatranje graničnog položaja ravnoteže, kada sila trenja dostiže svoju najveću veličinu F_{gr} . Pri analitičkom rešavanju zadataka reakciju hrapave veze prikazujemo dvema komponentama $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_{gr}$, gde je $F_{gr} = \mu_0 F_N$. Zatim postavljamo uslove ravnoteže statike, stavljajući u njih umesto F_{gr} veličinu $\mu_0 F_N$ i rešavanjem postavljenih jednačina određujemo tražene veličine.

Ako je u zadatku potrebno odrediti sve moguće položaje ravnoteže, tada za rešavanje takvih zadataka treba proučiti samo slučaj graničnog položaja ravnoteže. Ostali položaji ravnoteže biće određeni ako u rezultatima koji su dobiveni za granični slučaj smanjujemo koeficijent trenja od μ_0 do nule.*

Primerimo da u položajima ravnoteže koji nisu granični, sila trenja F_μ nije jednaka F_{gr} i njenu veličinu (ukoliko ona predstavlja neki interes) možemo odrediti iz uslova ravnoteže kao novu nepoznatu (vidi drugi deo zadatka 32).

Pri geometrijskom rešavanju zadataka preporučuje se da se reakcija hrapave veze predstavi jednom silom $\vec{F}$, koja, u graničnom položaju ravnoteže, odstupa od normale za ugao φ_0 .

Zadatak 32. Odrediti kolikom silom $\vec{F}$ usmerenom pod uglom $\alpha = 30^\circ$ prema horizontu, treba delovati na teret težine $G = 10$ kp, koji leži na horizontalnoj ravni (sl. 92) da bismo ga pomerili s mesta, ako statički koeficijent trenja tereta o ravan iznosi $\mu_0 = 0,6$.

Rešenje. Prema uslovima zadatka potrebno je da se razmotri granični položaj ravnoteže tereta. U tom položaju na teret deluju sile $\vec{G}$, $\vec{F}$, $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_{gr}$. Kada postavimo uslove ravnoteže u obliku projekcija na koordinatne ose, dobićemo:

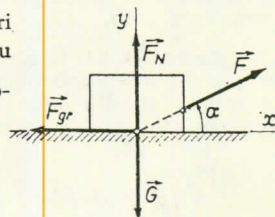
$$\sum X_i \equiv F \cos \alpha - F_{gr} = 0, \quad \sum Y_i \equiv F_N + F \sin \alpha - G = 0.$$

Iz poslednje jednačine nalazimo $F_N = G - F \sin \alpha$, te je

$$F_{gr} = \mu_0 F_N = \mu_0 (G - F \sin \alpha).$$

Smenimo ovu vrednost za silu F_{gr} u prvi uslov ravnoteže i zatim rešimo tako dobijenu jednačinu. Tada dobijamo

$$F = \frac{\mu_0 G}{\cos \alpha + \mu_0 \sin \alpha} \approx 5,2 \text{ kp}.$$



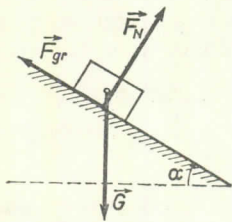
Sl. 92

Ako na teret delujemo manjom silom, na primer silom $F' = 4$ kp, onda će projekcija ove sile na horizontalnu ravan biti $F' \cos 30^\circ = 2\sqrt{3} = 3,46$ kp; maksimalna sila trenja, koja u tom slučaju može da nastane, biće $F_{gr} = \mu_0 (G - F' \sin 30^\circ) = 4,8$ kp. Prema tome, teret se neće pomeriti, tj. ostaće u miru. Tom prilikom sila trenja koja ga održava u položaju ravnoteže nalazi se iz jednačine ravnoteže u obliku projekcija na osu Ox i biće jednaka smičućoj sili $F'' = F' \cos 30^\circ = 3,46$ kp, a ne sili F_{gr} .

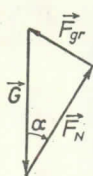
Obratimo pažnju na to da pri svim proračunima silu $\vec{F}_{gr}$ treba odrediti po formuli $F_{gr} = \mu_0 F_N$, pri čemu silu F_N nalazimo iz uslova ravnoteže. Karakteristična greška koja se često čini u sličnim zadacima, sastoji se u tome, što se pri računanju smatra da je $F_{gr} = \mu_0 G$, a u izvesnim slučajevima pritisak na površinu nije jednak težini tereta G .

* Naime, kada je ravnoteža granična, sila trenja je $F_\mu = F_{gr} = \mu_0 F_N$. U ostalim položajima ravnoteže je $F_\mu < \mu_0 F_N$. Prema tome, ti položaji mogu da se odrede, ako u jednačini $F_\mu = \mu_0 F_N$ smanjujemo veličinu μ_0 . Pri $\mu_0 = 0$, dobićemo položaj ravnoteže koji odgovara slučaju kada je veza idealna, tj. kada je glatka.

Zadatak 33. Odrediti pri kojim vrednostima ugla nagiba strme ravni α teret koji se nalazi na njoj ostaje u ravnoteži ako je koeficijent trenja klizanja o ravan jednak μ_0 .



Sl. 93



Rešenje. U zadatku treba odrediti sve položaje ravnoteže tereta. U tom cilju odredimo najpre granični položaj ravnoteže, pri kome je ugao α jednak α_{gr} . U tom položaju (sl. 93) na teret deluje sila teže $\vec{G}$, normalna reakcija $\vec{F}_N$ i granična sila trenja $\vec{F}_{gr}$. Ako konstruišemo trougao sila od pobrojanih sila, onda iz njega nalazimo da je $F_{gr} = F_N \operatorname{tg} \alpha_{gr}$. Međutim, s druge strane je $F_{gr} = \mu_0 F_N$, pa, prema tome, dobijamo

$$\operatorname{tg} \alpha_{gr} = \mu_0. \quad (a)$$

Ako u dobijenoj jednačini budemo smanjivali veličinu μ_0 , onda će se i veličina α_{gr} takođe smanjivati. Oдавде zaključujemo da je ravnoteža moguća i pri $\alpha < \alpha_{gr}$. Prema tome, sve veličine ugla α pri kojima će teret biti u ravnoteži određene su nejednačinom

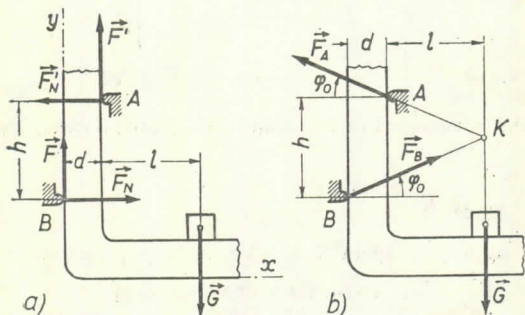
$$\operatorname{tg} \alpha \leq \mu_0. \quad (b)$$

Ako ne postoji trenje ($\mu_0 = 0$), ravnoteža je moguća samo u slučaju $\alpha = 0$. Prema tome, dok je pri postojanju trenja ravnoteža moguća pri bilo kojim veličinama ugla α , koje se kreću u granicama od nule pa do α_{gr} , dotle je, pri odsustvu trenja, ravnoteža moguća jedino u slučaju kada je ugao α jednak nuli. Po ovome se i razlikuje ravnoteža pri trenju od ravnoteže sistema sa idealnim vezama (kod kojih ne postoji trenje).

Dobijeni rezultat u ovom zadatku, koji je izražen jednačinom (a), može da se iskoristi za eksperimentalno određivanje koeficijenta trenja, ako se ugao α_{gr} odredi opitom.

Primitimo, takođe, s obzirom da je $\mu_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, gde je φ_0 — ugao trenja, da je onda i $\alpha_{gr} = \varphi_0$, tj. najveća veličina ugla pri kojoj teret koji leži na strmoj ravni ostaje u ravnoteži jednak je u isto vreme uglu trenja.

Zadatak 34. Greda savijena pod pravim uglom oslanja se u svom vertikalnom delu na ispuste A i B, između kojih rastojanje iznosi h (sl. 94, a). Zanemarujući težinu grede, odrediti pri kojoj će širini d grede biti u ravnoteži sa teretom, koji leži na njenom horizontalnom delu, a pri bilo kom položaju tereta. Koeficijent trenja grede na osloncima iznosi μ_0 .



Sl. 94

Rešenje. Označimo težinu tereta sa G , a njegovo rastojanje od vertikalnog dela grede sa l . Razmotrimo granični položaj ravnoteže grede pri kojoj je njena širina $d = d_{gr}$. U tom položaju na gredu deluju sile $\vec{G}$, $\vec{F}_N$, $\vec{F}'_N$, $\vec{F}$, $\vec{F}'$, gde su $\vec{F}$ i $\vec{F}'$ granične sile trenja. Ako postavimo jednačine ravnoteže (33) i ako uzmemo A za momentnu tačku, dobićemo:

$$\begin{aligned} \sum X_i &\equiv F_N - F'_N = 0, \\ \sum Y_i &\equiv F + F' - G = 0, \\ \sum M_A^{\vec{F}_i} &\equiv F_N h - F d_{gr} - G l = 0, \end{aligned}$$

gde je $F = \mu_0 F'$, $F' = \mu_0 F'_N$. Iz prvih dveju jednačina nalazimo

$$F_N = F'_N, \quad G = 2\mu_0 F'_N$$

Ako nadene vrednosti smenimo u treću jednačinu, i ako je skratimo sa F'_N dobićemo

$$h - \mu_0 d_{gr} - 2\mu_0 l = 0,$$

odakle je

$$d_{gr} = \frac{h}{\mu_0} - 2l.$$

Ako se u ovoj jednačini μ_0 smanjuje do nule, onda će se njena desna strana povećavati do beskonačnosti. Prema tome, ravnoteža je moguća pri bilo kojoj veličini $d > d_{gr}$. Veličina d_{gr} ima najveću vrednost kada je $l = 0$. Prema tome, greda će biti u ravnoteži pri bilo kom položaju tereta (pri $l \geq 0$), ako je ispunjen uslov

$$d \geq \frac{h}{\mu_0}.$$

Ukoliko je manje trenje, utoliko će d biti veće. Pri odsustvu trenja ($\mu_0 = 0$) ravnoteža, očividno, nije moguća, jer se u tom slučaju dobija da je $d = \infty$.

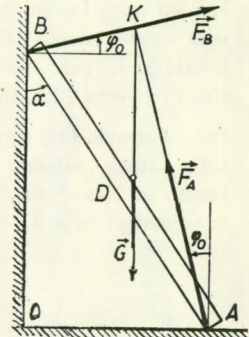
Rešimo ovaj zadatak i geometrijskom metodom. U tom slučaju umesto normalnih reakcija i sila trenja nanesimo u tačkama A i B ukupne reakcije $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$, koje u graničnom položaju odstupaju od normale za ugao trenja φ_0 (sl. 94, b). U tom slučaju na gredu deluju tri sile $\vec{F}_A$, $\vec{F}_B$, $\vec{G}$. Pri ravnoteži napadne linije tih sila moraju se seći u jednoj tački, tj. u tački K , u kojoj se seku napadne linije reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$. Odavde dobijamo (vidi sliku) jednačinu $h = (l + d_{gr}) \operatorname{tg} \varphi_0 + l \operatorname{tg} \varphi_0$, ili $h = (2l + d_{gr}) \mu_0$, jer je $\operatorname{tg} \varphi_0 = \mu_0$. U krajnjem rezultatu nalazimo odavde istu vrednost za d_{gr} kao i pri analitičkom rešenju.

Konstrukcija, čija je ravnoteža razmotrena u ovom zadatku, predstavlja uređaj za kočenje, koji se vrlo često primenjuje u praksi.

Zadatak 35. Zanemarujući težinu merdevina AB (sl. 95), odrediti pri kojim veličinama ugla α čovek može da se penje po merdevinama do njihovog vrha, tj. do tačke B , ako ugao trenja merdevina o pod i vertikalni zid iznosi φ_0 .

Rešenje. Razmotrimo granični položaj ravnoteže merdevina i upotrebimo za rešavanje ovog zadatka geometrijsku metodu. U graničnom položaju na merdevine deluju reakcije poda i zida $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$, koje odstupaju od normala na te površine za ugao trenja φ_0 . Napadne linije reakcija seku se u tački K . Prema tome, pri ravnoteži treća sila koja deluje na merdevine $\vec{G}$ (težina čoveka) mora takođe da prolazi kroz tačku K . Na taj način, u položaju prikazanom na crtežu, čovek ne može da se penje uz merdevine dalje od tačke D . Da bi čovek mogao da se penje do tačke B , napadne linije sila $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ moraju da se seku bilo gde na pravou BO , što je opet moguće samo tada kada sila $\vec{F}_A$ bude usmerena duž prave AB , tj. kada je ugao $\alpha \leq \varphi_0$.

Prema tome, čovek može da se penje sve do vrha merdevina u svim slučajevima kada merdevine obrazuju sa vertikalnim zidom ugao koji nije veći od ugla trenja merdevina o pod. Trenje merdevina o vertikalni zid tom prilikom nema nikakvog uticaja, tj. vertikalni zid može da bude i gladak.



SL. 95

§ 39.* Trenje konopca (užeta) o cilindričnu površinu

Na jednom kraju konopca prebačenog preko cilindričnog vratila (sl. 96) deluje sila $\vec{F}$. Potrebno je da se odredi kolikom najmanjom silom $\vec{F}'$ treba delovati na drugom kraju konopca da bi se održala ravnoteža.

Da bismo rešili ovaj zadatak razmotrimo ravnotežu elementa konopca DE , dužine $d_L = R d\theta$, gde je R — poluprečnik vratila. Razlika sila zatezanja konopca u tačkama D i E iznosi dF_T i uravnotežena je silom trenja $dF_\mu = \mu_0 dF_N$ (gde je dF_N normalna reakcija), jer će pri najmanjoj veličini sile F' ravnoteža biti granična. Prema tome

$$dF_T = \mu_0 dF_N.$$

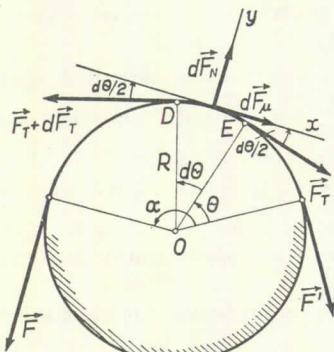
Veličinu sile dF_N odredićemo projicirajući sve sile na osu Oy . Smatrajući da je sinus malog ugla jednak samom uglu i zanemarujući veličine višeg reda, dobićemo

$$dF_N = F_T \sin \frac{d\theta}{2} + (F_T + dF_T) \sin \frac{d\theta}{2} = 2F_T \frac{d\theta}{2} = F_T d\theta.$$

Ako ovu vrednost za dF_N zamenimo u prethodnu jednačinu, dobićemo

$$dF_T = \mu_0 F_T d\theta.$$

Podelimo obe strane ove jednačine sa F_T i integrirajmo desnu stranu jednačine u granicama od 0 do α , a levu stranu u granicama od F' do F (jer je konopac u tački gde je $\theta = 0$ opterećen silom F' , a u tački gde je $\theta = \alpha$ silom F). Na taj način dobijamo



Sl. 96

$$\int_{F'}^F \frac{dF_T}{F_T} = \mu_0 \int_0^\alpha d\theta \quad \text{ili} \quad \ln \frac{F}{F'} = \mu_0 \alpha.$$

Oдавде proizlazi da je $\frac{F}{F'} = e^{\mu_0 \alpha}$,

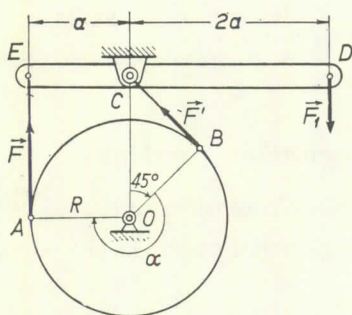
$$F' = F e^{-\mu_0 \alpha}. \quad (46)$$

Kao što vidimo, potrebna sila F' kojom treba delovati na drugom kraju konopca zavisi samo od koeficijenta trenja μ_0 i ugla α ; sila F' ne zavisi od veličine poluprečnika R . Pri odsustvu trenja ($\mu_0 = 0$), dobijamo,

kao što treba i očekivati, da je $F' = F$. Praktično vrlo važan je zaključak da se sa povećavanjem ugla α može znatno da smanji sila F' kojom treba delovati da bi se uravnotežila sila F , što se vidi iz tablice 1. Tako, na primer (vidi tablicu 1), silu od jednog megaponda možemo uravnotežiti silom od svega 2 kp, ako dva puta namotamo konopac oko drvenog stuba.

Formula (46) određuje takođe odnos između »vodeće« sile F i »vođene« sile F' na delu kaiša jednog kaišnika, koji se ravnomerno obrće, ako tom prilikom nema klizanja između kaiša i kaišnika. Tako, npr., pri uglu $\alpha = \pi$, smatrajući da je kaiš od kože, a kaišnik od livnog gvožđa tj. uzimajući da je $\mu_0 = 0,3$, dobićemo da je odnos između sila F' i F jednak

$$F'/F = e^{-0,3\pi} \approx 0,4.$$



Sl. 97

Tablica 1

Veličine F'/F pri $\mu_0 = 0,5$
(Kudeljni kanap o drvo)

Broj obavljanja	α	$F'/F = e^{-\mu_0 \alpha}$
$1/2$	π	0,208
1	2π	0,043
$3/2$	3π	0,009
2	4π	0,002

Zadatak 36. Na polugu DE kočnice sa trakom (pantljikom) (sl. 97) deluje sila F_1 . Odrediti moment kočenja M_K koji deluje na točak poluprečnika R , ako je $\overline{CD} = 2 \overline{CE}$ i ako koeficijent trenja pantljike o točak iznosi $\mu_0 = 0,5$.

Rešenje. Na točak zajedno sa delom trake AB , koja je priljubljena uz njega, deluje u tački A sila F , pri čemu je očividno $F = 2F_1$, a u tački B sila F' , koja je određena formulom (46). U

našem slučaju je $\mu_0 = 0,5$ i $\alpha = \frac{5}{4}\pi = 3,93$ radijana. Prema tome

$$F' = 2F_1 e^{-\frac{5}{8}\pi} \approx 0,28 F_1.$$

Traženi moment iznosi

$$M_K = (F - F')R = 1,72 F_1 R \text{ kpm.}$$

Moment će biti utoliko veći, ukoliko je manja sila F' , tj. ukoliko je veći koeficijent trenja μ_0 i ugao α .

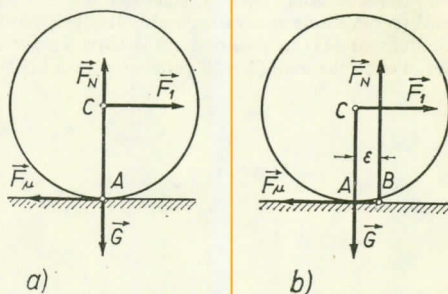
§ 40.* Trenje kotrljanja i obrtanja

Trenjem kotrljanja naziva se otpor koji nastaje pri kotrljanju jednog tela po površini drugog tela.

Neka kružni cilindar poluprečnika R i težine G leži na horizontalnoj hrapavoj ravni. Neka u visini ose cilindra deluje sila $\vec{F}_1$ (sl. 98, a), koja je manja od $\vec{F}_{gr}$. U tom slučaju u tački A nastaje sila trenja F_μ , brojčano jednaka sili F_1 , koja sprečava klizanje cilindra po površini. Ako smatramo da normalna reakcija $\vec{F}_N$ deluje takođe u tački A , onda će ona uravnotežiti silu $\vec{G}$, dok sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_\mu$ obrazuju spreg, koji izaziva kotrljanje cilindra. Pri takvoj shemi kotrljanja, kako vidimo, kotrljanje nastaje dejstvom ma kako male sile $\vec{F}_1$.

Međutim, kako pokazuju opiti, kotrljanje neće nastupiti ako je sila $\vec{F}_1$ veoma mala. Ovo se objašnjava činjenicom da se zbog deformacije tela ona dodiruju duž neke male površine AB (sl. 98, b). Pri delovanju sile $\vec{F}_1$ intenzitet pritiska se smanjuje na kraju A , dok se na kraju B povećava. Zato se normalna reakcija $\vec{F}_N$ donekle pomeri od tačke A u pravcu delovanja sile $\vec{F}_1$. Sa povećavanjem sile $\vec{F}_1$ ovo pomeranje raste do neke granične vrednosti ε . Prema tome, u graničnom slučaju na cilindar deluje spreg ($\vec{F}_{1gr}$, $\vec{F}_\mu$) čiji je moment $F_{1gr} \cdot R$ i njega uravnotežuje spreg ($\vec{F}_N$, $\vec{G}$), čiji je moment $F_N \cdot \varepsilon$. Iz momentne jednačine nalazimo tada $F_{1gr} R = F_N \varepsilon$, odnosno:

$$F_{1gr} = \frac{\varepsilon}{R} F_N. \quad (47)$$



Sl. 98

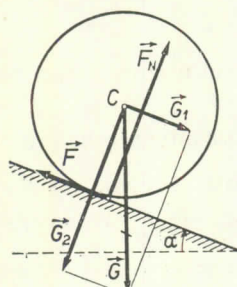
Ako je $F_1 < F_{1gr}$ cilindar miruje; međutim, ako je $F_1 > F_{1gr}$ cilindar počinje da se kotrlja.

Veličina ε , koja ulazi u formulu (47), zove se *koeficijent trenja kotrljanja* i ima dimenziju dužine. Ovaj koeficijent se obično meri u cm. Veličina ovog koeficijenta zavisi od materijala tela i određuje se opitom. Navedimo veličine ovog koeficijenta za neke materijale:

drvo po drvetu	$\varepsilon = 0,05 - 0,08 \text{ cm},$
meki čelik po čeliku (točak po šini)	$\varepsilon = 0,005 \text{ cm},$
kaljeni čelik po čeliku (kotrljni ležaj)	$\varepsilon = 0,001 \text{ cm}.$

Odnos ε/R za veći broj materijala znatno je manji od statičkog koeficijenta trenja μ_0 . Ovim se objašnjava težnja da se u tehnici, kad god je to moguće, klizanje zameni kotrljanjem (točak, valjak, kotrljni ležaj i sl.).

Zadatak 37. Odrediti, pri kojim će veličinama ugla α (sl. 99), cilindar, poluprečnika R , koji leži na strmoj ravni, oštati u miru, ako je koeficijent trenja kotrljanja jednak ε .



Sl. 99

Rešenje. Razmotrimo granični položaj ravnoteže kada je $\alpha = \alpha_1$. Razlaganjem sile $\vec{G}$ u komponente $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$ (vidi sl. 99), nalazimo da u tom slučaju sila u pravcu strme ravni iznosi $F_{gr} = G_1 = G \sin \alpha_1$, a normalna reakcija $F_N = G_2 = G \cos \alpha_1$. Tada je po formuli (47)

$$G \sin \alpha_1 = \frac{\varepsilon}{R} G \cos \alpha_1,$$

ili

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\varepsilon}{R}.$$

Kada se ε bude smanjivalo do nule, veličina ugla α_1 takođe se smanjuje do nule. Oдавде zaključujemo da se ravnoteža održava pri bilo kom uglu $\alpha < \alpha_1$. Dobijenim rezultatom možemo se koristiti za eksperimentalno određivanje koeficijenta ε , ako ugao α_1 odredimo opitom.

Pojam o trenju obrtanja. Ako na kuglu, koja leži na horizontalnoj ravni, delujemo spregom momenta $\mathcal{M}$, koji takođe deluje u horizontalnoj ravni, onda spreg teži da okrene kuglu oko vertikalne ose. Opiti pokazuju da će kugla početi da se obrće samo tada kada moment $\mathcal{M}$ bude imao veličinu koja je veća od izvesne granične vrednosti $\mathcal{M}_{gr}$. Ova vrednost je određena jednačinom

$$\mathcal{M}_{gr} = \lambda F_N. \quad (48)$$

gde je F_N sila normalnog pritiska kugle na ravan, koja je u datom slučaju jednaka težini kugle. Ova pojava se objašnjava postojanjem takozvanog trenja obrtanja, tj. otpora pri obrtanju, koji nastaje usled trenja kugle o ravan. Analogni otpor nastaje i u kotrljnim ležištima. Koeficijent λ , koji ulazi u jednačinu (48) ima dimenziju dužine i zove se *koeficijent trenja pri obrtanju*. Po veličini je ovaj koeficijent vrlo mali (5–10 puta manji od koeficijenta trenja kotrljanja ε).

Glava VII

PROIZVOLJNI PROSTORNI SISTEM SILA. SPREGOVI U PROSTORU*

§ 41. Moment sile za tačku (centar) kao vektor

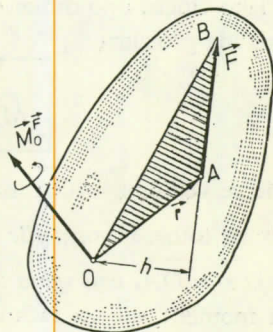
Da bismo bili u stanju da predemo na rešavanje onih zadataka statike u kojima se susrećemo sa proizvoljno raspoređenim sistemom sila u prostoru potrebno je da unekoliko izmenimo i proširimo pojmove sa kojima smo se već upoznali u prethodnim izlaganjima. Počnimo sa momentom sile za tačku.

1. Predstavljanje momenta vektorom. Moment sile $\vec{F}$ za tačku (centar) O (vidi sl. 100), kao karakteristika njenog obrtnog efekta, određen je sa sledeća tri elementa:

- intenzitetom momenta, koji je jednak proizvodu iz intenziteta sile i njenog kraka, tj. $F \cdot h$;
- ravninom (ravni) obrtanja OAB , koja prolazi kroz napadnu liniju sile $\vec{F}$ i kroz tačku O ;
- smerom obrtanja u ravni obrtanja.

Kada sve sile i tačka (centar) leže u jednoj ravni, onda otpada potreba da se svaki put određuje ravan obrtanja OAB , i, kao što smo videli, moment možemo da odredimo kao skalarnu algebarsku veličinu, jednaku $\pm Fh$; znak određuje smer obrtanja (vidi § 14).

Međutim, u slučaju kada su sile proizvoljno raspoređene u prostoru biće ravni obrtanja za različite sile različite, pa su potrebni i izvesni dopunski podaci. Položaj ravni u prostoru može se definisati usmerenim odsečkom (vektorom) upravnim na ravan. Ako je u isto vreme intenzitet tog vektora jednak intenzitetu momenta, i ako je smer tog vektora određen smerom obrtanja koji izaziva sila, onda jedan vektor može u potpunosti okarakterisati sva tri elementa, koji karakterišu moment sile za tačku O .



Sl. 100

* Čitaoci koji žele da se upoznaju samo s tim kako se rešavaju zadaci ravnoteže tela pod dejstvom prostornog sistema sila mogu u ovoj glavi da ispuste paragrafe 44–47, koji se odnose na svođenje (redukciju) spregova i sila u prostoru.

Prema tome, u opštem slučaju, moment sile $\vec{F}$ za tačku O (sl. 100) prikazivaćemo vektorom $\vec{M}_O^F$, čija je napadna tačka u tački O , koji je po intenzitetu (u izabranoj razmeri) jednak proizvodu intenziteta sile F i kraka h , i koji je normalan na ravan OAB , koja prolazi kroz tačku O i silu $\vec{F}$. Ovaj vektor biće usmeren u onu stranu iz koje se vidi da sila vrši obrtanje u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku. Na taj način, vektor $\vec{M}_O^F$ karakteriše jednovremeno intenzitet momenta, ravan obrtanja OAB , koja je različita za različite sile, i smer obrtanja u toj ravni. Napadna tačka vektora $\vec{M}_O^F$ određuje tačku za koju se moment određuje. Takav vektor zove se vektor vezan za tačku.

2.* Predstavljanje momenta sile pomoću vektorskog proizvoda. Razmotrimo vektorski proizvod $[\vec{OA}, \vec{F}]$ vektora $\vec{OA}$ i $\vec{F}$ (sl. 100). Po definiciji je*

$$|[\vec{OA}, \vec{F}]| = 2 \cdot \text{površina } \triangle OAB = M_O^F,$$

jer je intenzitet vektora $\vec{M}_O^F$ takođe jednak $2 \cdot \text{površina } \triangle OAB$. Pravac vektora $[\vec{OA}, \vec{F}]$ je normalan na ravni OAB i usmeren u onu stranu, odakle se vidi da će se vektor $\vec{OA}$ obrtanjem u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku poklopiti, najkraćim putem, sa silom $\vec{F}$ (kada ih naneseemo u jednu tačku), tj. pravac i smer ovog vektora je isti kao pravac i smer vektora $\vec{M}_O^F$. Prema tome, vektori $[\vec{OA}, \vec{F}]$ i $\vec{M}_O^F$ se poklapaju i po intenzitetu, i po pravcu, i po smeru, i, kao što je lako videti, i po dimenziji, tj. oba ova vektora predstavljaju jednu te istu veličinu. Odavde proizlazi

$$\vec{M}_O^F = [\vec{OA}, \vec{F}] \quad \text{ili} \quad \vec{M}_O^F = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (49)$$

gde se vektor $\vec{r} = \vec{OA}$ naziva vektorom položaja tačke A za tačku (centar) O . Prema tome, moment sile $\vec{F}$ za tačku O jednak je vektorskom proizvodu vektora položaja $\vec{r} = \vec{OA}$, koji spaja tačku O sa napadnom tačkom A sile, i same sile. Ovaj izraz za moment sile za tačku vrlo je pogodan za dokazivanje nekih teorema.

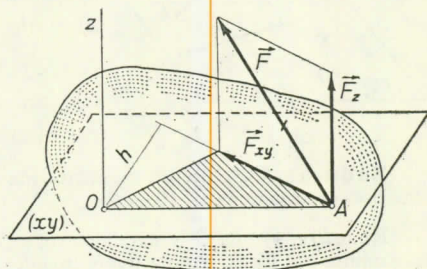
§ 42. Moment sile za osu

Da bismo prešli na rešavanje zadataka statike za slučaj proizvoljno raspoređenih sila u prostoru potrebno je još da uvedemo pojam momenta sile za osu.

* Vektorskim proizvodom $[\vec{a}, \vec{b}]$ vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ naziva se vektor $\vec{c}$ koji je po intenzitetu jednak površini paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji je upravan na ravni koju obrazuju ovi vektori, a usmeren je u onu stranu, iz koje se vidi da se poklapanje vektora $\vec{a}$ sa vektorom $\vec{b}$, najkraćim putem, postiže u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku.

Moment sile za osu karakteriše obrtni efekt, koji vrši sila kada teži da okrene telo oko date ose. Neka kruto telo može da se obrće oko ose z (sl. 101), i neka na to telo u tački A deluje sila $\vec{F}$. Povucimo kroz tačku A ravan xy , normalnu na osi z , i razložimo silu $\vec{F}$ u dve komponente: $\vec{Z}$ paralelnu osi z i $\vec{F}_{xy}$ koja leži u ravni xy ($\vec{F}_{xy}$ je u isto vreme projekcija sile $\vec{F}$ na ravan xy). Sila $\vec{Z}$, koja je paralelna osi z , očevидno, ne može da okrene dato telo oko ove ose (ona samo teži da pomeri telo duž ose z). Prema tome, celokupni obrtni efekt, koji proizvodi sila $\vec{F}$, istovetan je sa obrtnim efektom njene komponente $\vec{F}_{xy}$. Odavde zaključujemo da je

$$M_z^{\vec{F}} = M_z^{\vec{F}_{xy}}, \quad (50)$$



Sl. 101

gde simbol $M_z^{\vec{F}}$ znači moment sile $\vec{F}$ za osu z :

Međutim, obrtni efekt sile $\vec{F}_{xy}$, koja leži u ravni upravnoj na osi z biće isti za osu z ili za tačku O , u kojoj ta osa prodire kroz ravan xy . Prema tome, $M_z^{\vec{F}_{xy}} = M_O^{\vec{F}_{xy}}$ ili saglasno jednačini (50)*

$$M_z^{\vec{F}} = M_O^{\vec{F}_{xy}} = \pm F_{xy} \cdot h. \quad (51)$$

Na kraju dolazimo do sledećeg zaključka: *momentom sile za osu naziva se skalar na veličina, jednaka momentu projekcije te sile na ravan, koja je upravna na osi, računatom za tačku u kojoj osa prodire kroz ravan.*

Moment se smatra pozitivnim, ako iz pozitivnog kraja ose vidimo da sila $\vec{F}_{xy}$ teži da okrene telo u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku, i negativnim, ako ona to okretanje teži da vrši u smeru obrtanja kazaljke na časovniku.

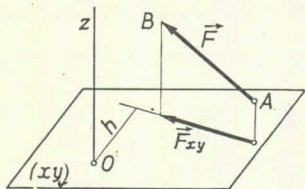
Sa slike 101 se vidi da pri izračunavanju momenta po formuli (51), ravan xy možemo da povlačimo kroz bilo koju tačku ose z . Prema tome, da bismo odredili moment sile za osu z (sl. 102) treba:

- 1) postaviti ravan xy upravno na osi z (u bilo kojoj tački ose z);
- 2) projicirati silu $\vec{F}$ na tu ravan i izračunati veličinu F_{xy} ;
- 3) spustiti iz tačke O , u kojoj osa prodire kroz ravan, normalu na pravac sile $\vec{F}_{xy}$ i odrediti dužinu kraka h ;
- 4) izračunati proizvod $F_{xy} \cdot h$;
- 5) odrediti znak momenta.

* Simbol $M_O^{\vec{F}}$ koji smo upotrebljavali za ravan sistem sila, korišćićemo i u daljim izlaganjima kao simbol za brojčanu (algebarsku) veličinu momenta.

Pri izračunavanju momenta treba imati u vidu sledeće specijalne slučajeve:

- 1) Ako je sila paralelna osi, onda je njen moment za tu osu jednak nuli (jer je $F_{xy} = 0$).
- 2) Ako napadna linija sile seče osu, onda je njen moment za tu osu jednak nuli (jer je tada $h = 0$).



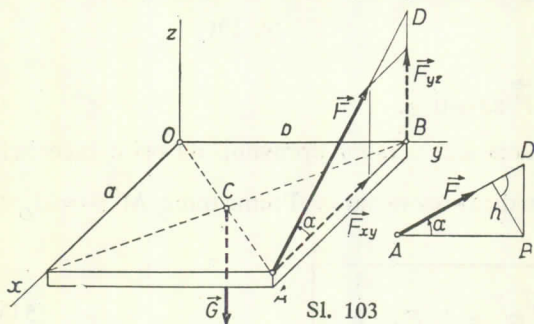
Sl. 102

U zaključku, povodom oba navedena slučaja, možemo reći da je *moment sile za osu jednak nuli ako sila i osa leže u istoj ravni*.

- 3) Ako je sila normalna na osi, onda je moment sile za osu jednak proizvodu iz intenziteta sile i rastojanja između sile i ose.

Zadatak 38. Odrediti momente sile $\vec{G}$ i $\vec{F}$, koje deluju na horizontalnu ploču, za koordinatne ose, prikazane na sl. 103.

Rešenje. 1) Sila $\vec{G}$ je paralelna osi z ; ona je normalna na ose x i y , i prolazi pored njih na rastojanjima $b/2$ i $a/2$. Prema tome, imajući u vidu konvenciju za smer obrtanja, biće;



Sl. 103

$$\begin{aligned} \vec{M}_x^G &= -G \frac{b}{2}, & \vec{M}_y^G &= G \frac{a}{2}, \\ \vec{M}_z^G &= 0. \end{aligned}$$

2) Da bismo odredili $\vec{M}_x^F$ projicirajmo najpre silu $\vec{F}$ na ravan yz ; tom prilikom dobijamo:

$$F_{yz} = F \sin \alpha.$$

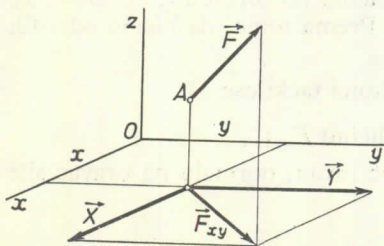
Krak sile $\vec{F}_{yz}$ za tačku O iznosi b , a iz pozitivnog kraja ose se vidi da je obrtanje koje ona teži da izvede suprotno obrtanju kazaljke na časovniku; prema tome, biće:

$$\vec{M}_x^F = Fb \sin \alpha.$$

Izračunajmo sada $\vec{M}_y^F$. Sila $\vec{F}$ leži u ravni ABD normalnoj na osi y , koja je seče u tački B .

Prema tome, biće $\vec{F}_{xz} = \vec{F}$. Ako iz tačke B spustimo normalu na napadnu liniju sile $\vec{F}$ (vidi pomoćni crtež sa desne strane), dobićemo da njena dužina iznosi $h = a \sin \alpha$. Konačno, imajući u vidu konvenciju za smer obrtanja, dobijamo:

$$\vec{M}_y^F = -Fa \sin \alpha.$$



Sl. 104

Najzad, da bismo odredili $\vec{M}_z^F$ projicirajmo silu $\vec{F}$ na ravan xy ; tada dobijamo $F_{xy} = F \cos \alpha$. Krak ove projekcije za tačku O iznosi b . Prema tome, imajući u vidu konvenciju za smer obrtanja, dobijamo:

$$\vec{M}_z^F = Fb \cos \alpha.$$

✓ **Analitički izraz za moment sile za osu.** U bilo kojoj tački O prostora postavimo pravougli koordinatni sistem desne dispozicije (sl. 104) i uočimo silu $\vec{F}$ čija je napadna tačka u tački A sa koordinatama x, y, z . Potrebno je da analitičkim

putem definišemo moment sile $\vec{F}$ za osu z . U tom cilju projicirajmo silu $\vec{F}$ na ravan xy i zatim projekciju $\vec{F}_{xy}$ razložimo u dve komponente $\vec{X}$ i $\vec{Y}$; brojčane veličine ovih komponenta biće, očevидno, jednake projekcijama sile $\vec{F}$ na ose x i y . Prema tome, tada je

$$\vec{M}_z^F = \vec{M}_O^{F_{xy}} = \vec{M}_O^X + \vec{M}_O^Y.$$

Ova poslednja jednačina proističe na osnovu Varinjonove teoreme. Međutim, kako se vidi sa crteža, $\vec{M}_O^X = -yX$, $\vec{M}_O^Y = xY$. Prema tome, na kraju dobivamo

$$\vec{M}_z^F = M_z = xY - yX.$$

Analognim putem mogu se odrediti i momenti sile $\vec{F}$ za ostale dve ose. U krajnjem rezultatu dobićemo da je

$$\begin{aligned} \vec{M}_x^F &= M_x = yZ - zY. \\ \vec{M}_y^F &= M_y = zX - xZ \\ \vec{M}_z^F &= M_z = xY - yX. \end{aligned} \quad (52)$$

Formule (52) predstavljaju *analitičke izraze* za momente sile $\vec{F}$ za koordinatne ose. Pomoću ovih obrazaca možemo izračunati odgovarajuće momente za ose, ako znamo projekcije sile na ose, kao i napadnu tačku sile.

Zadatak 39. Izračunati moment sile $\vec{F}$, prikazane na sl. 103, za koordinatne ose.

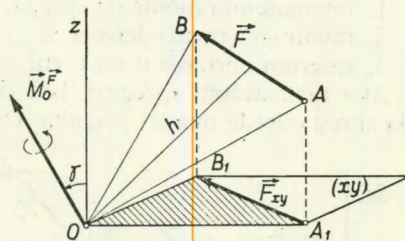
Rešenje. Sila $\vec{F}$ deluje u tački A čije su koordinate $x = a$, $y = b$, $z = 0$. Njene projekcije na koordinatne ose su:

$$X = -F \cos \alpha, \quad Y = 0, \quad Z = F \sin \alpha.$$

Ako ove vrednosti smenimo u formule (52), dobićemo:

$$\vec{M}_x^F = Fb \sin \alpha, \quad \vec{M}_y^F = -Fa \sin \alpha,$$

$$\vec{M}_z^F = Fb \cos \alpha.$$



Sl. 105

§ 43. Zavisnost između momenta sile za tačku i momenta sile za osu

Neka na telo u tački A deluje sila $\vec{F}$ (sl. 105). Povucimo bilo koju osu z i uočimo na njoj proizvoljnu tačku O . Moment sile $\vec{F}$ za tačku O biće predstavljen vektorom $\vec{M}_O^F$, upravnim na ravan OAB , čiji je intenzitet jednak

$$\vec{M}_O^F = Fh = 2 \cdot \text{površina } \triangle OAB.$$

Povucimo sada kroz tačku O ravan xy , upravnu na osi z , i projiciramo na nju silu $\vec{F}$. Korišćenjem formula (51) dobićemo

$$M_z^{\vec{F}} = M_z = M_{O_{xy}}^{\vec{F}} = 2 \cdot \text{površina } \triangle OA_1B_1.$$

Međutim, trougao OA_1B_1 predstavlja projekciju trougla OAB na ravan xy . Ugao između ravni u kojima leže ovi trouglovi, jednak je uglu između normala na te ravni, tj. jednak je uglu γ . Tada, na osnovi poznatog obrasca iz geometrije, dobijamo da je površina $\triangle OA_1B_1 = \text{površina } \triangle OAB \cos \gamma$.

Ako pomnožimo obe strane ove jednačine sa 2, i ako primetimo da je dvostruka površina trouglova OA_1B_1 i OAB jednaka $M_z^{\vec{F}}$ i $M_O^{\vec{F}}$, dobićemo, na kraju

$$M_z^{\vec{F}} = M_O^{\vec{F}} \cos \gamma. \quad (53)$$

Kako proizvod $M_O^{\vec{F}} \cos \gamma$ određuje projekciju vektora $\vec{M}_O^{\vec{F}}$ na osu z , to jednačinu (53) možemo da predstavimo i u obliku

$$M_z^{\vec{F}} = M_z = (\vec{M}_O^{\vec{F}})_z. \quad (54)$$

Na taj način smo dokazali da između momenta sile za osu i momenta te sile za bilo koju tačku, koja leži na toj osi, postoji sledeća zavisnost: *moment sile $\vec{F}$ za osu jednak je projekciji na tu osu vektora, koji predstavlja moment te sile za bilo koju tačku koja leži na toj osi.*

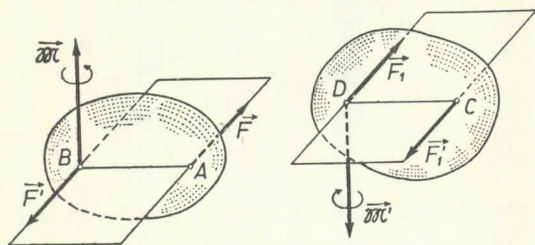
§ 44. Spreg sila kao vektor

Dejstvo sprega sila na telo okarakterisano je sa sledeća tri podatka:

1. intenzitetom momenta sprega,
2. ravniom (ravni) dejstva, i
3. smerom obrtanja u toj ravni.

Ako razmatramo spregove koji ne deluju u istoj ravni potrebno je da se za svaki spreg odrede ova tri podatka. Ovo može da se učini ako, po analogiji sa momentom sile za tačku, moment sprega predstavimo vektorom.

U tom cilju dogovorimo se o sledećem: *moment sprega predstavljamo vektorom $\vec{M}$, čiji je intenzitet jednak (u izabranoj razmeri) momentu sprega, tj. proizvodu iz jedne sile i njenog kraka, i koji je usmeren normalno na ravan dejstva sprega u onu*



Sl. 106

stranu, iz koje se vidi da se obrtanje izazvano spregom vrši u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku (sl. 106).

Kako spreg možemo slobodno pomerati u ravni njegovog dejstva, ili pak u ravni koja je paralelna toj ravni (§ 19), to vektor $\vec{M}$ može da se nanese u bilo kojoj tački krutog tela (takav vektor zove se *slobodan vektor*).

Lako je videti da vektor $\vec{M}$ stvarno određuje dati spreg, jer ako znamo $\vec{M}$, i ako povučemo bilo koju ravan upravu na vektor $\vec{M}$, time ćemo odrediti ravan sprega; ako izmerimo dužinu vektora $\vec{M}$ odredićemo intenzitet momenta sprega; po smeru vektora $\vec{M}$ odredićemo i smer obrtanja koje izaziva spreg.

Očevидno je da je po intenzitetu moment sprega jednak momentu jedne od sila za tačku u kojoj deluje druga sila, tj. $M = M_B^F$; po pravcu i smeru ti se vektori takođe poklapaju (vidi sl. 106 i 100). Prema tome,

$$\vec{M} = \vec{M}_B^F = \vec{M}_A^{F'}.$$

§ 45.* Slaganje spregova u prostoru. Uslovi ravnoteže spregova

Pravilo o slaganju spregova koji ne leže u jednoj ravni glasi: *bilo koji sistem spregova, koji deluje na kruto telo, može biti zamenjen jednim spregom čiji je moment jednak geometrijskoj sumi momenata komponentnih spregova.*

Dokažimo najpre ovu teoremu za slučaj kada na telo deluju dva sprega koji leže u ravnima (I) i (II) i

čiji su momenti $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$, (sl. 107). Uočimo duž linije preseka tih ravni odsečak $AB = d$. Koristeći osobine spregova, koje su dokazane u § 19, prikažimo spreg

čiji je moment $\vec{M}_1$ silama $\vec{F}_1$

i $\vec{F}_1'$, a spreg čiji je moment

$\vec{M}_2$ silama $\vec{F}_2$ i $\vec{F}_2'$, koje deluju u tačkama A i B. Pri tome, očevидno, biće: $F_1 d = M_1$, $F_2 d = M_2$.

Slaganjem sila, koje deluju u tačkama A i B, zamenićemo spregove ($\vec{F}_1, \vec{F}_1'$) i ($\vec{F}_2, \vec{F}_2'$) samo jednim spregom ($\vec{F}_r, \vec{F}_r'$). Odredimo moment $\vec{M}$ tog sprega. Pošto je $\vec{F}_r = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, i kako je moment sprega jednak momentu jedne od sila za napadnu tačku druge sile, to ćemo prema formuli (49) dobiti:

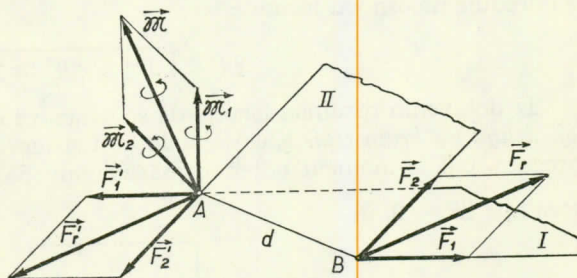
$$\vec{M} = [\vec{AB}, \vec{F}_r] = [\vec{AB}, \vec{F}_1 + \vec{F}_2] = [\vec{AB}, \vec{F}_1] + [\vec{AB}, \vec{F}_2].$$

Znamo da je $[\vec{AB}, \vec{F}_1] = \vec{M}_1$, a $[\vec{AB}, \vec{F}_2] = \vec{M}_2$. Prema tome je

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

(55)

tj. vektor $\vec{M}$ može se prikazati dijagonalom paralelograma konstruisanog nad vektorima $\vec{M}_1$ i $\vec{M}_2$. Na ovaj način je ova teorema za dva sprega dokazana.



Sl. 107

Ako na telo deluje n spregova, čiji su momenti $\vec{M}_1, \vec{M}_2, \vec{M}_3, \dots, \vec{M}_n$, onda postupno primenjujući formulu (55), dobijamo da se dejstvo n spregova može zameniti dejstvom jednog jedinog sprega, čiji je moment

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \dots + \vec{M}_n = \sum \vec{M}_i. \quad (56)$$

Vektor $\vec{M}$ može da se odredi kao završna strana poligona konstruisanog od komponentnih vektora $\vec{M}_i$.

Ako komponentni vektori ne leže u jednoj ravni, onda je korisno da se račun sprovede analitički. Postavljajući koordinatni sistem, na osnovu teoreme o projekciji sume vektora na osu, iz jednačine (56) dobijamo da je

$$M_x = \sum M_{ix}, \quad M_y = \sum M_{iy}, \quad M_z = \sum M_{iz}. \quad (57)$$

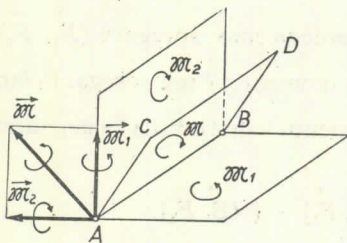
Pomoću ovih projekcija možemo konstruisati vektor $\vec{M}$. Njegov intenzitet se određuje na osnovu formule

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Iz dobivenih rezultata lako je da se ustanove *uslovi ravnoteže sistema spregova, koji deluju na kruto telo*. Kako se bilo koji sistem spregova može zameniti jednim spregom, čiji je moment određen jednačinom (56), onda pri ravnoteži, očividno, mora biti $\vec{M} = 0$, ili

$$\sum \vec{M}_i = 0,$$

tj. poligon konstruisan od vektora koji predstavljaju momente spregova, koji deluju na kruto telo, mora da bude zatvoren.



Sl. 108

Uslove ravnoteže u analitičkom obliku možemo odrediti imajući u vidu da će biti $M = 0$, tada i samo tada, ako je jednovremeno

$$M_x = 0, \quad M_y = 0, \quad M_z = 0.$$

To će, prema obrascu (57), biti ako je

$$\sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0. \quad (58)$$

Na kraju, primetimo da ako svi spregovi leže u jednoj ravni (ili pak u paralelnim ravnima), onda su vektori koji predstavljaju momente tih spregova usmereni duž jedne prave, i njih, u tom slučaju, možemo sabirati i algebarski. Takav rezultat dobili smo već u § 20.

Zadatak 40. Na kruto telo deluju dva sprega, u dvema međusobno upravnim ravnima (sl. 108). Momenti svakog od spregova iznose 3 kpm. Odrediti rezultujući spreg.

Rešenje. Predstavimo ove spregove vektorima $\vec{\mathcal{M}}_1$ i $\vec{\mathcal{M}}_2$ čije se napadne tačke nalaze u tački A ; rezultujući spreg prikazaćemo vektorom $\vec{\mathcal{M}}$. Prema tome, rezultujući spreg deluje u ravni $ABCD$, koja je upravna na $\vec{\mathcal{M}}$; intenzitet rezultujućeg sprega brojčano je jednak $3\sqrt{2}$ kpm.

Ako se smer obrtanja jednog od datih spregova promeni, tako da bude suprotan prvobitnom, onda će rezultujući spreg ležati u ravni, upravnoj na ravni $ABCD$.

Zadatak 41. Kocka, prikazana na sl. 109, obešena je o dva vertikalna štapa AA_1 i BB_1 , tako da je dijagonala AB horizontalna. Na kocku deluju spregovi sila $(\vec{F}, \vec{F}')$ i $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$. Zanimajući težinu kocke, odrediti pri kome će odnosu sila F i F_1 kocka biti u ravnoteži i kolike će u tom slučaju biti reakcije u štapovima.

Rešenje. Sistem spregova $(\vec{F}, \vec{F}')$ i $(\vec{F}_1, \vec{F}_1')$ ekvivalentan je jednom spregu, koji može da bude uravnotežen opet samo spregom. Prema tome, tražene reakcije $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_N'$ moraju obrazovati spreg. Ovaj spreg prikazaćemo vektorom $\vec{\mathcal{M}}$, koji je upravan na dijagonalu AB , kao što je na crtežu prikazano. Moment ovog sprega je $\mathcal{M} = F_N a/\sqrt{2}$, gde je a — dužina ivice kocke. Momente datih spregova označimo vektorima $\vec{\mathcal{M}}_1$ i $\vec{\mathcal{M}}_2$, pri čemu je $\mathcal{M}_1 = Fa$, $\mathcal{M}_2 = F_1 a$. Smerovi vektora $\vec{\mathcal{M}}_1$ i $\vec{\mathcal{M}}_2$ pokazani su na crtežu.

Povucimo koordinatne ose, i postavimo uslove ravnoteže (58):

$$\begin{cases} \Sigma \mathcal{M}_{ix} \equiv \mathcal{M}_2 - \mathcal{M} \cos 45^\circ = 0, \\ \Sigma \mathcal{M}_{iy} \equiv \mathcal{M}_1 - \mathcal{M} \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Treći od ovih uslova zadovoljen je identično.

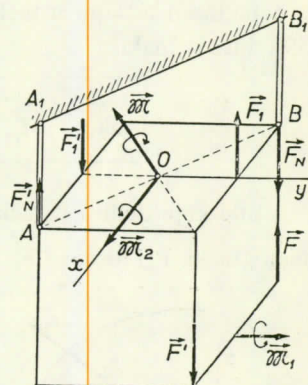
Iz dobivenih jednačina proizlazi da mora biti $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_2$, tj. $F = F_1$. Dalje nalazimo da je

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}_1}{\cos 45^\circ} = \mathcal{M}_1 \sqrt{2} = Fa \sqrt{2}.$$

Kako je $\mathcal{M} = F_N a/\sqrt{2}$, onda sleduje da je $F_N = F$.

Prema tome, ravnoteža je moguća kada je $F = F_1$.

Reakcije u štapovima tom prilikom brojčano su jednake F i usmerene tako, kako je prikazano na crtežu.



Sl. 109

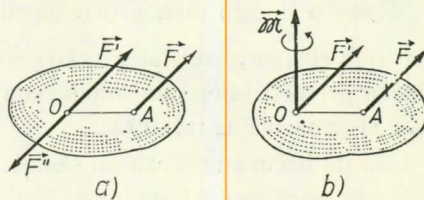
§ 46. Svođenje (redukcija) prostornog sistema sila na datu tačku

Do sada dobiveni rezultati omogućuju da rešimo zadatak svođenja (redukcije) proizvoljnog prostornog sistema sila na tačku. Ovaj zadatak je analogan zadatku koji smo već rešili u § 22, i može se rešiti korišćenjem teoreme o paralelnom prenošenju sile. Da bismo preneli silu

$\vec{F}$ koja u tački A (sl. 110, a) deluje na telo, tako da ona deluje u tački O , nanesimo u tački O sile $\vec{F}' = \vec{F}$ i $\vec{F}'' = -\vec{F}$.

Tada će u tački O delovati sila $\vec{F}' = \vec{F}$,

i njoj će biti pridodat spreg $(\vec{F}, \vec{F}'')$, čiji je moment $\vec{\mathcal{M}}$, što se može prikazati slikom 110, b. Pri tome je



Sl. 110

$$\vec{\mathcal{M}} = \vec{M}_O^{\vec{F}}.$$

(59)

Neka sada na telo deluje proizvoljan sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$ (sl. 111, a). Izaberimo proizvoljnu tačku O za redukcionu tačku i prenesimo u nju sve sile datog sistema sila, priključujući im tom prilikom i odgovarajuće spregove. Tada će na telo delovati sistem sila

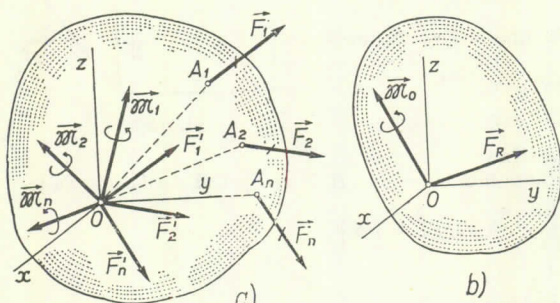
$$\vec{F}'_1 = \vec{F}_1, \quad \vec{F}'_2 = \vec{F}_2, \dots, \quad \vec{F}'_n = \vec{F}_n, \quad (60)$$

sa napadnom tačkom u tački O , i sistem spregova, čiji će momenti, prema formuli (59), biti jednaki

$$\vec{M}_1 = \vec{M}_O^{F_1}, \quad \vec{M}_2 = \vec{M}_O^{F_2}, \dots, \quad \vec{M}_n = \vec{M}_O^{F_n} \quad (61)$$

Sile-koje deluju u tački O zamenimo jednom silom $\vec{F}_R$, čija je napadna tačka u istoj tački. Pri tome je $\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}'_i$, ili prema jednačini (60)

$$\vec{F}_R = \Sigma \vec{F}_i \quad (62)$$



SL. 111

Da bismo složili sve dobivene spregove, treba geometrijskim putem sabrati sve vektore koji predstavljaju momente tih spregova. U krajnjem rezultatu sistem spregova biće zamenjen jednim spregom, čiji je moment $\vec{M}_O = \Sigma \vec{M}_i$, ili prema jednačini (61)

$$\vec{M}_O = \Sigma \vec{M}_O^{F_i}. \quad (63)$$

Kao i u slučaju ravnog sistema sila, veličina $\vec{F}_R$, koja je jednaka geometrijskoj sumi svih sila, zove se *glavni vektor* sistema sila; slično tome, veličina $\vec{M}_O$, koja je jednaka geometrijskoj sumi momenata svih sila za tačku O zove se *glavni moment* datog sistema sila za tačku O .

Na taj način smo dokazali sledeću teoremu: *bilo koji sistem sila, koji deluje na kruto telo, prilikom svođenja (redukcije) na proizvoljno uzetu tačku O , može se zameniti jednom silom $\vec{F}_R$, koja je jednaka glavnom vektoru sistema, nanetom u redukcionoj tački O , i jednim spregom, čiji je moment $\vec{M}_O$ jednak glavnom momentu sistema sila za tačku O (sl. 111, b).*

Vektori $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_O$ obično se određuju analitički, tj. njihovim projekcijama na koordinatne ose.

Izrazi za X_R , Y_R , Z_R su poznati (§ 10). Projekcije vektora $\vec{M}_O$ na koordinatne ose označimo sa M_x , M_y , M_z . Na osnovu teoreme o projekciji sume vektora na osu biće $M_x = \Sigma (\vec{M}_O^i)_x$, ili, prema jednačini (54), $M_x = \Sigma M_x^i = \Sigma M_x$. Analognim putem možemo odrediti i veličine M_y i M_z .

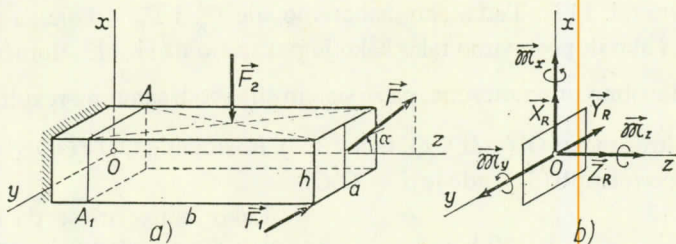
Prema tome, za određivanje projekcija glavnog vektora $\vec{F}_R$ i glavnog momenta $\vec{M}_O$ dobijamo formule

$$X_R = \Sigma X_i, \quad Y_R = \Sigma Y_i, \quad Z_R = \Sigma Z_i, \quad (64)$$

$$M_x = \Sigma M_x, \quad M_y = \Sigma M_y, \quad M_z = \Sigma M_z. \quad (65)$$

Iz dokazane teoreme proizlazi da su dva sistema sila međusobom ekvivalentna ako im se poklapaju glavni vektori $\vec{F}_R$ i glavni momenti $\vec{M}_O$. Prema tome, za proizvoljni sistem sila, koji deluje na kruto telo, dovoljno je dati samo njegov glavni vektor i glavni moment za datu tačku, tj. drugim rečima, dovoljno je dati samo šest veličina, koje su određene jednačinama (64) i (65).

Zadatak 42. Odrediti opterećenja u preseku AA_1 složeno opterećene grede, prikazane na sl. 112, a. Sila $\vec{F}_2$ prolazi kroz težište desnog dela grede; sila $\vec{F}$ leži u ravni Oxz ; sila $\vec{F}_1$ je paralelna osi Oy .



Sl. 112

Rešenje. Tražena opterećenja odredićemo na sličan način kako je to bilo pokazano u zadatku 18 (§ 22). Iz tog razloga redukujmo sve sile na tačku O — težište preseka. Povucimo kroz tačku O koordinatne ose x , y , z i odredimo glavni vektor i glavni moment datog sistema sila po formulama (64) i (65). Tako dobijamo:

$$\left| \begin{array}{lll} X_R = F \sin \alpha - F_2, & Y_R = -F_1, & Z_R = F \cos \alpha; \\ M_x = F_1 b, & M_y = Fb \sin \alpha - F_2 \frac{b}{2}, & M_z = F_1 \frac{h}{2}. \end{array} \right.$$

Prema tome, u preseku AA_1 delovaće (sl. 112, b): dve poprečne (transverzalne) sile jednake X_R i Y_R , aksijalna (zatežuća) sila jednaka Z_R , i tri sprega čiji su momenti M_x , M_y i M_z ; prva dva od ovih spregova savijaju gredu oko osa Ox i Oy , dok treći uvija gredu oko ose Oz .

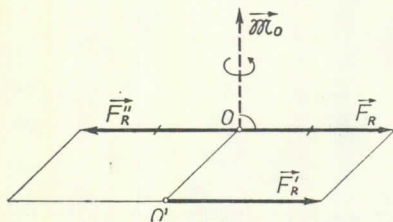
§ 47*. Svođenje prostornog sistema sila na prostiji oblik

Teorema koja je dokazana u § 46 omogućuje da se ustanovi na kakav se najprostiji oblik može svesti dati prostorni sistem sila. U tom cilju dovoljno je da se samo odredi glavni vektor i glavni moment za proizvoljnu tačku datog sistema sila i da se onda ispituju dobiveni rezultati.

Mogu da nastupe sledeći slučajevi:

1) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R = 0$ i $\vec{M}_O = 0$, onda se dati sistem sila nalazi u ravnoteži. Taj slučaj biće razmotren u sledećem § 48.

2) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R = 0$, a $\vec{M}_O \neq 0$, onda se dati sistem sila svodi na spreg sila, čiji je moment određen jednačinom (65). Slobodno kruto telo može pod dejstvom takvog sistema sila da vrši (ali ne uvek) čisto obrtno kretanje.



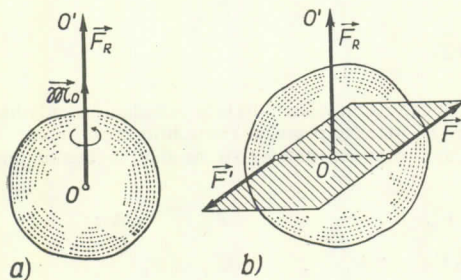
Sl. 113

3) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R \neq 0$, a $\vec{M}_O = 0$, onda se on svodi na rezultantu $\vec{F}_r = \vec{F}_R$, koja prolazi kroz tačku O. Veličina rezultante izračunava se pomoću formule (64).

Slobodno telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši čisto translatorno kretanje (ako se tačka O poklapa sa težištem tela).

4) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, ali je pri tome $\vec{M}_O \perp \vec{F}_R$, onda se takođe dati sistem sila svodi na rezultantu, koja je jednaka $\vec{F}_r = \vec{F}_R$, ali koja ne prolazi kroz tačku O.

Naime, ako je $\vec{M}_O \perp \vec{F}_R$, spreg, koji je prikazan vektorom $\vec{M}_O$, i sila $\vec{F}_R$ leže u jednoj ravni (sl. 113). Tada, ako izaberemo sile $\vec{F}_R'$ i $\vec{F}_R''$, koje su po intenzitetu jednake F_R , i ako ih postavimo tako kako je pokazano na sl. 113, dobićemo da su sile $\vec{F}_R$ i $\vec{F}_R''$ međusobno uravnotežene, pa se sistem sila svodi samo na rezultantu $\vec{F}_r = \vec{F}_R'$, koja prolazi kroz tačku O' (vidi § 23, tačka 3, b). Rastojanje $\overline{OO'}$ ($\overline{OO'} \perp \vec{F}_R$) određuje se pri tome po formuli (31), gde je $d = \overline{O'O}$.



Sl. 114

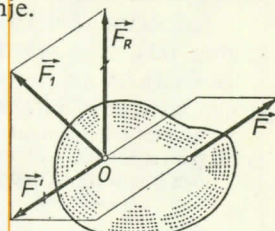
Lako je uveriti se da će razmatrani slučaj u stvarnosti uvek nastati kod proizvoljnog sistema paralelnih sila, ili pak kod sila koje leže u jednoj ravni, ako je glavni vektor tog sistema $\vec{F}_R \neq 0$.

5) Ako je za dati sistem $\vec{F}_R \neq 0$, $\vec{M}_O \neq 0$, i ako je pri tome vektor $\vec{M}_O$ paralelan vektoru $\vec{F}_R$ (sl. 114, a), onda se dati sistem sile svodi na silu $\vec{F}_R$ i spreg $(\vec{F}, \vec{F}')$, koji leži u ravni upravnoj

na sili (sl. 114, b). Takav jedan skup iz sile i sprega zove se *dinamički zavrtanj* ili *dinama*, a prava duž koje je usmeren vektor $\vec{F}_R$ zove se *osa diname*. Dalje uprošćenje takvog sistema sila nije moguće, jer se pri prenosu spregova sistem ne menja, dok se pri prenosu sile $\vec{F}_R$ iz tačke O u bilo koju drugu tačku C, momentu $\vec{M}_O$ uvek pridodaje njemu *upravni* moment $\vec{M}_C' = \vec{M}_C^{\vec{F}_R}$ zbog čega će rezultujući moment

$\vec{M}_C = \vec{M}_O + \vec{M}_C$ nešto da poraste. Prema tome, ovakav jedan sistem sila ne može se svesti na jednu rezultantu, ili pak na jedan spreg. Slobodno kruto telo pod dejstvom takvog sistema sila može da vrši samo složeno (zavojno) kretanje.

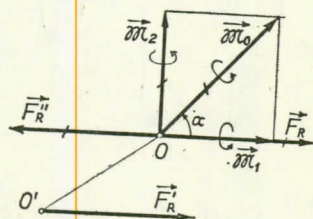
Ako jednu od sila sprega, na primer $\vec{F}'$, složimo sa silom $\vec{F}_R$, onda se dati sistem sila zamenjuje dvema ukrštenim silama $\vec{F}_1$ i $\vec{F}$, koje ne leže u jednoj ravni (sl. 115). Pošto je dobiveni sistem sila takođe ekvivalentan dinami, onda se on takođe ne može zameniti rezultantom.



Sl. 115

6) Ako je za dati sistem sila $\vec{F}_R \neq 0$ i $\vec{M}_O \neq 0$, i ako pri tome vektori $\vec{M}_O$ i $\vec{F}_R$ nisu normalni jedan na drugi, niti su međusobom paralelni, onda se dati sistem sila svodi takođe na dinamiku, ali u tom slučaju osa te dinamike neće prolaziti kroz tačku O.

Da bismo ovo dokazali razložimo vektor $\vec{M}_O$ u njegove komponente: $\vec{M}_1$, koja je usmerena duž pravca $\vec{F}_R$, i $\vec{M}_2$, koja je normalna na $\vec{F}_R$ (sl. 116). Tada je $M_1 = M_O \cos \alpha$, $M_2 = M_O \sin \alpha$, gde je α ugao između vektora $\vec{M}_O$ i $\vec{F}_R$. Spreg, predstavljen vektorom $\vec{M}_2$ ($\vec{M}_2 \perp \vec{F}_R$) i silu $\vec{F}_R$, možemo, kako je pokazano na sl. 113, zameniti jednom silom $\vec{F}'_R$, koja deluje u tački O'. Kao što vidimo u krajnjem rezultatu dati sistem sila stvarno je zamenjen silom $\vec{F}'_R = \vec{F}_R$



Sl. 116.

i spregom čiji je moment $\vec{M}_1$, a koji je paralelan sa $\vec{F}_R$, tj. sa osom dinamike koja prolazi kroz tačku O'

§ 48. Uslovi ravnoteže proizvoljnog prostornog sistema sila.

Slučaj paralelnih sila

Proizvoljan prostorni sistem sila, slično kao i sistem sila u ravni, može se redukovati na proizvoljnu tačku O i zameniti glavnim vektorom $\vec{F}_R$ i glavnim momentom $\vec{M}_O$ [vrednosti za $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_O$ određuju se jednačinama (62) i (63)]. Rasuđivanja su ovom prilikom ista kao i u § 24, tj. i ovom prilikom zaključujemo da, da bi proizvoljni prostorni sistem sila bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno, da jednovremeno bude $\vec{F}_R = 0$ i $\vec{M}_O = 0$. Vektori $\vec{F}_R$ i $\vec{M}_O$ mogu da budu jednaki nuli, tada i samo tada, kada su jednovremeno jednake nuli sve njihove projekcije na koordinatne ose, tj. kada je $X_R = Y_R = Z_R = 0$, i $M_x = M_y = M_z = 0$, ili, kada, prema jednačinama (64) i (65), dati sistem sila zadovoljava uslove

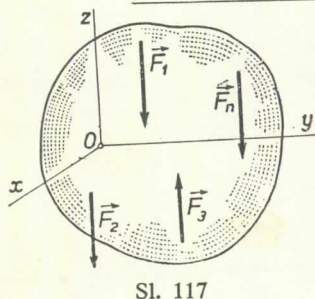
$$\begin{aligned} \Sigma X_i &= 0, & \Sigma Y_i &= 0, & \Sigma Z_i &= 0; \\ \Sigma M_x &= 0, & \Sigma M_y &= 0, & \Sigma M_z &= 0. \end{aligned} \quad (66)$$

Prema tome, možemo reći: da bi proizvoljan prostorni sistem sila bio u ravnoteži, potrebno je i dovoljno, da suma projekcija svih sila na svaku od triju koordinatnih osa i suma momenata za te ose bude jednaka nuli.*

Jednačine (66) izražavaju istovremeno neophodne uslove ravnoteže slobodnog krutog tela, na koje deluje proizvoljan prostorni sistem sila. Pri tome, prva tri uslova izražavaju potrebne uslove da se telo ne pomera duž koordinatnih osa, a druga tri uslova izražavaju potrebne uslove da se telo ne obrće oko tih osa.

Ako na telo osim sila deluje takođe i spreg, koji je određen svojim momentom, onda se oblik prvih triju uslova (66) ne menja (suma projekcija sila na bilo koje ose jednaka je nuli), dok poslednja tri uslova imaju nešto drugojačiji oblik i glase

$$\Sigma M_x + \mathfrak{M}_x = 0, \quad \Sigma M_y + \mathfrak{M}_y = 0, \quad \Sigma M_z + \mathfrak{M}_z = 0. \quad (67)$$



Sl. 117

Slučaj paralelnih sila. U slučaju kada su sve sile, koje deluju na kruto telo, paralelne međusobom, mogu se koordinatne ose izabrati tako, da osa z bude paralelna silama (sl. 117). U tom slučaju će projekcija svake od sila na ose x i y biti jednaka nuli, a isto tako i moment svake sile za osu z , pa će se uslovi (66) redukovati samo na tri uslova:

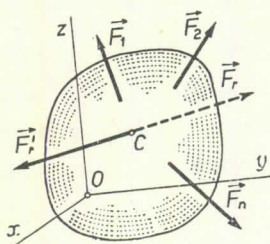
$$\Sigma Z_i = 0, \quad \Sigma M_x = 0, \quad \Sigma M_y = 0. \quad (68)$$

Ostali uslovi ravnoteže imaju tom prilikom oblik $0 = 0$.

Prema tome, za ravnotežu prostornog sistema paralelnih sila potrebno je i dovoljno da suma projekcija svih sila na osu paralelnu silama, i suma momenata sila za druge dve koordinatne ose, bude jednaka nuli.

§ 49. Varinjonova teorema o momentu rezultante za osu

Neka na kruto telo deluje sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n$, koji se svodi na rezultantu $\vec{F}_r$, čija napadna linija prolazi kroz neku tačku C (sl. 118). Nanesimo u toj



Sl. 118

tački silu $\vec{F}'_r = -\vec{F}_r$. Tada će sistem sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \dots, \vec{F}_n, \vec{F}'_r$ biti u ravnoteži, pa će za taj sistem biti ispunjeni uslovi (66). Za bilo koju osu Ox tom prilikom biće

$$\Sigma M_x^{F_i} + M_x^{F'_r} = 0.$$

Međutim, kako je sila $\vec{F}'_r = -\vec{F}_r$ i kako su ove sile usmerene duž iste prave, to je $M_x^{F'_r} = -M_x^{F_r}$

Ako ovu vrednost za $M_x^{F'_r}$ smenimo u prethodnu jednačinu, dobićemo iz nje

$$M_x^{F_r} = \Sigma M_x^{F_i}. \quad (69)$$

* Pri postavljanju uslova ravnoteže (66) može, ako je to korisno, da se izabere za izračunavanje projekcija jedan koordinatni sistem, a za izračunavanje momenata drugi koordinatni sistem.

Prema tome, ako se dati sistem sila svodi samo na rezultantu, onda je moment te rezultante za bilo koju osu jednak algebarskoj sumi momenata komponentnih sila za istu osu (Varinjonova teorema).

§ 50. Zadaci o ravnoteži tela pod dejstvom prostornog sistema sila

Princip rešavanja zadataka iz ovog poglavlja ostaje isti kao i za ravan sistem sila. Kada ustanovimo telo čiju ravnotežu treba proučiti, onda dejstvo veza na telo zamenjujemo njihovim reakcijama i postavljamo uslove ravnoteže tela, smatrajući da je telo slobodno. Iz dobijenih jednačina određujemo tada tražene veličine.

Da bi se dobile što prostije jednačine ravnoteže preporučuje se da se ose koordinatnog sistema postave tako, da seku što je moguće veći broj nepoznatih sila, ili da budu upravne na što je moguće većem broju sila (naravno ukoliko to ne otežava određivanje projekcija sila na ose ili izračunavanje momenata drugih sila).

Novi element koji se pojavljuje sada pri postavljanju uslova ravnoteže je izračunavanje momenata sila za ose.

U slučaju ako je sa crteža teško da se vidi čemu je jednak moment neke sile za neku osu, preporučuje se da se na pomoćnom crtežu nacrtaju projekcija posmatranog tela (zajedno sa silom) na ravan koja je upravna na toj osi.

U slučajevima kada se pri izračunavanju momenata pojave teškoće oko određivanja projekcija sila na odgovarajuću ravan, ili pak, krakova tih projekcija za odgovarajuće ose, preporučuje se da se data sila razloži u svoje komponente, međusobno upravne (od kojih jedna treba da je paralelna bilo kojoj koordinatnoj osi), a zatim treba iskoristiti Varinjonovu teoremu. Osim toga, momenti mogu, kada je to potrebno, da se izračunaju i analitičkim putem preko formula (52).

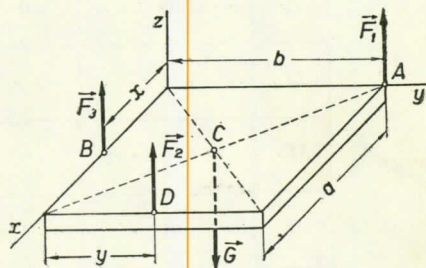
Zadatak 43. Pri podizanju homogene pravougaone ploče, dimenzija a i b (sl. 119), jedan od radnika drži je za teme A . U kojim tačkama B i D treba da drže ploču druga dva radnika da bi sile kojima svaki od radnika pridržava ploču bile jednake.

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu ploče, koja se, kao slobodno telo, nalazi u ravnoteži pod dejstvom četiri paralelne sile $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3, \vec{G}$, gde je $\vec{G}$ težina ploče. Za ove sile postavimo uslove ravnoteže (68), smatrajući da je ploča horizontalna i povucimo koordinatne ose tako kako je pokazano na sl. 119. Tako dobijamo:

$$\Sigma Z \equiv F_1 + F_2 + F_3 - G = 0,$$

$$\Sigma M_x \equiv F_1 b + F_2 y - G \frac{b}{2} = 0,$$

$$\Sigma M_y \equiv -F_2 a - F_3 x + G \frac{a}{2} = 0.$$



Sl. 119

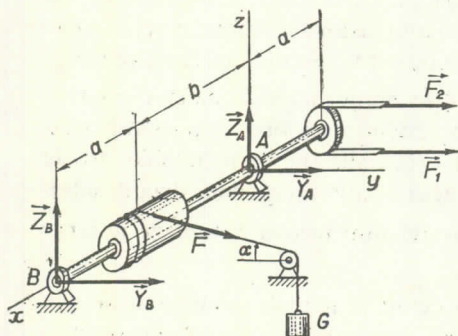
Prema uslovima zadatka mora da bude $F_1 = F_2 = F_3 = F$. Tada iz prve od ovih jednačina dobijamo $G = 3F$. Ako ovu vrednost smenimo u druge dve jednačine, kada ih skratimo sa F , dobićemo

$$b + y = \frac{3}{2} b, \quad a + x = \frac{3}{2} a.$$

odakle nalazimo:

$$x = \frac{a}{2}, \quad y = \frac{b}{2}.$$

Zadatak 44. Na horizontalno vratilo, koje se oslanja na ležišta A i B (sl. 120), nasadena su upravno na osu vratila kotur poluprečnika $r_1 = 20$ cm i doboš poluprečnika $r_2 = 15$ cm. Vratilo se dovodi u kretanje kaišem, koji je prebačen preko kotura; tom prilikom se ravnomerno podiže teret težine $G = 180$ kp obešen o konopac koji je namotan na doboš. Zanemarujući težinu konstrukcije, odrediti reakcije u ležištima A i B , kao i silu F_1 u vodećem delu kaiša, ako je poznato da je ona dva puta veća od sile F_2 u vođenom delu kaiša. Dato je: $a = 40$ cm, $b = 60$ cm, $\alpha = 30^\circ$.



Sl. 120

Rešenje. Pri ravnomernom obrtanju vratila na njega deluju sile koje se nalaze u ravnoteži. Postavimo uslove ravnoteže ovih sila. Povucimo koordinatne ose (vidi crtež) i, smatrajući vratilo slobodnim telom, nanesimo sile koje na njega deluju: sila u konopcu $\vec{F}$, koja je po intenzitetu jednaka G , sile u kaišu $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, reakcije u ležištima $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$, $\vec{Y}_B$, $\vec{Z}_B$ (svaka od reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ može da ima bilo koji pravac u ravni koja je upravna na

osi x i svaku od ovih reakcija predstavili smo sa dve komponente).

Da bismo postavili uslove ravnoteže (66) izračunajmo projekcije svih sila na koordinatne ose i njihove momente za te ose (vidi tablicu); kako su projekcije svih sila za osu x jednake nuli, to je odgovarajuća kolona ispuštena iz tablice.*

$\vec{F}_i$	$\vec{F}$	$\vec{F}_1$	$\vec{F}_2$	$\vec{F}_A$	$\vec{F}_B$
Y_i	$F \cos \alpha$	F_1	F_2	Y_A	Y_B
Z_i	$-F \sin \alpha$	0	0	Z_A	Z_B
M_x	$-Fr_2$	F_1r_1	$-F_2r_1$	0	0
M_y	$F \sin \alpha \cdot b$	0	0	0	$-Z_B(a+b)$
M_z	$F \cos \alpha \cdot b$	$-F_1a$	$-F_2a$	0	$Y_B(a+b)$

* Prethodno sastavljanje tablice pri rešavanju zadataka ovog odeljka je naročito korisno. Tablicu popunjavamo po stupcima, tj. najpre izračunamo sve projekcije i momente sile $\vec{F}$, zatim sile $\vec{F}_1$, itd. Na taj način najpre koncentrišimo svu pažnju na prvu silu, zatim na drugu, itd. Ako pak odjednom postavljamo uslove ravnoteže (66), onda je potrebno da svaku od sila uzmemo u razmatranje po šest puta; tom prilikom postoji mogućnost da se pojave greške, a naročito česta greška koja se čini je izostavljanje ove ili one sile u nekoj od jednačina ravnoteže.

Postavljanjem uslova ravnoteže (ako tom prilikom stavimo da je $F = G$) dobijamo:

$$\Sigma Y_i \equiv F \cos \alpha + F_1 + F_2 + Y_A + Y_B = 0, \quad (I)$$

$$\Sigma Z_i \equiv -F \sin \alpha + Z_A + Z_B = 0, \quad (II)$$

$$\Sigma M_x \equiv -F r_2 + F_1 r_1 - F_2 r_1 = 0, \quad (III)$$

$$\Sigma M_y \equiv F b \sin \alpha - Z_B (a + b) = 0, \quad (IV)$$

$$\Sigma M_z \equiv F b \cos \alpha - F_1 a - F_2 a + Y_B (a + b) = 0. \quad (V)$$

Iz jednačina (III) i (IV) dobijamo odmah, uzimajući u obzir da je $F_1 = 2F_2$:

$$F_2 = \frac{r_2}{r_1} G = 135 \text{ kp}, \quad Z_B = \frac{b}{a + b} G \sin \alpha = 54 \text{ kp}.$$

Dalje, iz jednačine (V) izlazi da je:

$$Y_B = \frac{3F_2 a - G b \cos \alpha}{a + b} = 69 \text{ kp}.$$

Ako dobijene vrednosti smenimo u ostale jednačine, dobićemo:

$$Y_A = -G \cos \alpha - 3F_2 - Y_B \approx -630 \text{ kp},$$

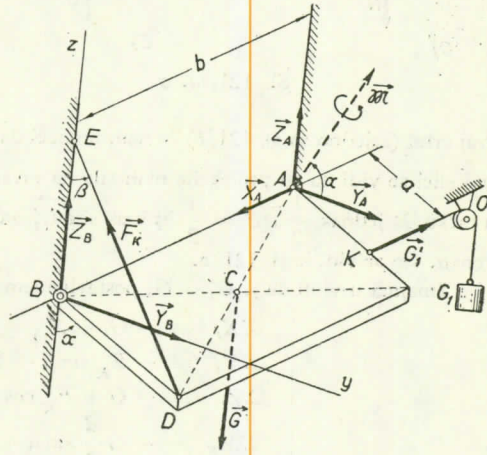
$$Z_A = G \sin \alpha - Z_B = 36 \text{ kp}.$$

Prema tome, konačno je:

$$F_1 = 270 \text{ kp}, \quad Y_A \approx -630 \text{ kp},$$

$$Z_A = 36 \text{ kp}, \quad Y_B \approx 69 \text{ kp}, \quad Z_B = 54 \text{ kp}.$$

Zadatak 45. Pravougaoni poklopac, težine $G = 12 \text{ kp}$, koji sa vertikalom zaklapa ugao $\alpha = 60^\circ$, pričvršćen je za osu AB u tački B cilindričnim ležištem, a u tački A sfernim ležištem (sl. 121, a). Poklopac se održava u ravnoteži pomoću zatege DE i drugog konopca, koji je u tački O prebačen preko kotura i na svom kraju nosi teret težine $G_1 = 20 \text{ kp}$ (pravac KO paralelan je pravcu AB). Dato je: $\overline{BD} = \overline{BE}$, $\overline{AK} = a = 0,4 \text{ m}$, $\overline{AB} = b = 1 \text{ m}$. Odrediti silu u zategi DE i reakcije u ležištima A i B .

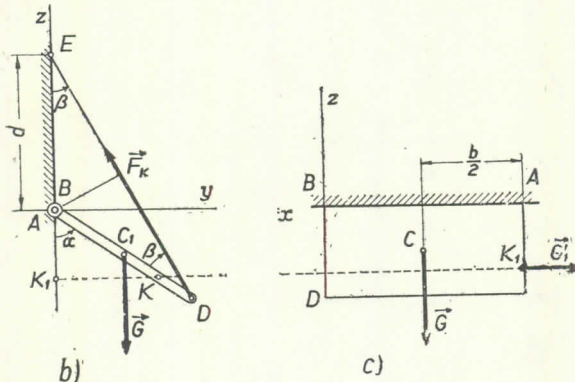


Sl. 121, a

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu poklopca uklanjajući veze, i, smatrajući poklopac slobodnim telom, povucimo koordinatne ose i uzмимо tom prilikom tačku B za koordinatni početak

$\vec{F}_i$	$\vec{G}$	$\vec{G}'_1$	$\vec{F}_K$	$\vec{F}_A$	$\vec{F}_B$
X_i	0	$-G'_1$	0	X_A	0
Y_i	0	0	$-F_K \sin \beta$	Y_A	Y_B
Z_i	$-G$	0	$F_K \cos \beta$	Z_A	Z_B
M_x	$-G \frac{d}{2} \sin \alpha$	0	$F_K d \sin \beta$	0	0
M_y	$-G \frac{b}{2}$	$G'_1 a \cos \alpha$	0	$Z_A b$	0
M_z	0	$G'_1 a \sin \alpha$	0	$-Y_A b$	0

(u tom slučaju sila $\vec{F}_K$ seče ose y i z , što će znatno uprostiti momentne jednačine) i predstavimo sve sile koje deluju na poklopac, kao i reakcije veza (vidi sliku; vektor $\vec{M}$ koji je prikazan iscrtkano ne odnosi se na ovaj zadatak). Da bismo postavili jednačine ravnoteže izračunajmo veličine projekcija svih sila, a takođe i momente svih sila; uvedimo u račun ugao β i označimo $\overline{BD} = \overline{BE} = d$ (vidi tablicu). Da bismo izračunali momente nekih sila poslužićemo se pomoćnim crtežima (sl. 121, b, c).



Sl. 121, a, c

Na sl. 121, b prikazana je projekcija poklopca na ravan Byz kada se gleda iz pozitivne strane ose x . Ovaj crtež će nam pomoći da izračunamo momente sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_K$ za osu x . Na ovom crtežu se vidi da su projekcije svih sila na ravan yz jednake samim silama, dok je krak sile $\vec{G}$ za tačku B jednak $\overline{BC_1} \sin \alpha = \frac{d}{2} \sin \alpha$; krak sile $\vec{F}_K$ za istu tačku jednak je $\overline{BE} \sin \beta = d \sin \beta$.

Na sl. 121, c prikazana je projekcija poklopca na ravan Bxz kada se gleda iz pozitivne strane ose y .

Ovaj crtež (zajedno sa sl. 121, b) će nam pomoći da izračunamo momente sila $\vec{G}$ i $\vec{G}'_1$ za osu y . Na ovoj slici se vidi da su projekcije ovih sila na ravan xz jednake samim silama, dok je krak sile $\vec{G}$ za tačku B jednak $\frac{1}{2} \overline{AB} = \frac{1}{2} b$; krak sile $\vec{G}'_1$ za istu tačku je jednak $\overline{AK_1}$, tj. $\overline{AK} \cos \alpha$, ili $a \cos \alpha$, što se vidi iz sl. 121, b.

Imajući u vidu da je $G'_1 = G_1$ postavljanjem uslova ravnoteže dobijamo:

$$\Sigma X_i = -G_1 + X_A = 0, \quad (I)$$

$$\Sigma Y_i = -F_K \sin \beta + Y_A + Y_B = 0, \quad (II)$$

$$\Sigma Z_i = -G + F_K \cos \beta + Z_A + Z_B = 0, \quad (III)$$

$$\Sigma M_x = -G \frac{d}{2} \sin \alpha + F_K d \sin \beta = 0, \quad (IV)$$

$$\Sigma M_y = -G \frac{d}{2} + G_1 a \cos \alpha + Z_A b = 0, \quad (V)$$

$$\Sigma M_z = G_1 a \sin \alpha - Y_A b = 0. \quad (VI)$$

Imajući u vidu da je $\beta = \frac{\alpha}{2} = 30^\circ$, iz jednačine (I), (IV), (V) i (VI), izlazi:

$$X_A = G_1 = 20 \text{ kp}, \quad F_K = G \frac{\sin \alpha}{2 \sin \beta} \approx 10,4 \text{ kp},$$

$$Z_A = \frac{1}{2} G - \frac{a}{b} G_1 \cos \alpha = 2 \text{ kp}, \quad Y_A = \frac{a}{b} G_1 \sin \alpha \approx 6,9 \text{ kp}.$$

Ako dobijene vrednosti smenimo u jednačini (II) i (III), dobićemo:

$$Y_B = F_K \sin \beta - Y_A = -1,7 \text{ kp}, \quad Z_B = G_1 - F_K \cos \beta - Z_A = 1 \text{ kp}.$$

Definitivno je:

$$F_K \approx 10,4 \text{ kp}, \quad X_A = 20 \text{ kp}, \quad Y_A \approx 6,9 \text{ kp}, \quad Z_A = 2 \text{ kp},$$

$$Y_B = -1,7 \text{ kp}, \quad Z_B = 1 \text{ kp}.$$

Zadatak 46. Rešiti zadatak 45 za slučaj kada na poklopac deluje u njegovoj ravni i spreg čiji je moment $M = 12 \text{ kpm}$; smer obrtanja sprega (ako se odozgo gleda na poklopac) je suprotan smeru obrtanja kazaljke na časovniku.

Rešenje. Dopunsko dejstvo na poklopac (vidi sl. 121, a) prikažimo vektorom $\vec{M}$, koji predstavlja moment sprega, i koji je upravan na ravan poklopca, a napadna tačka mu je u bilo kojoj tački, na primer u tački A. Njegove projekcije na koordinatne ose biće: $M_x = 0$, $M_y = M \cos \alpha$, $M_z = M \sin \alpha$. Tada, postavljajući uslove ravnoteže (67), nalazimo da jednačine od (I) do (IV) ostaju iste kao i u prethodnom zadatku, dok poslednje dve jednačine postaju:

$$\Sigma M_y \equiv -G \frac{b}{2} + Z_A b + G_1 a \cos \alpha + M \cos \alpha = 0, \quad (V')$$

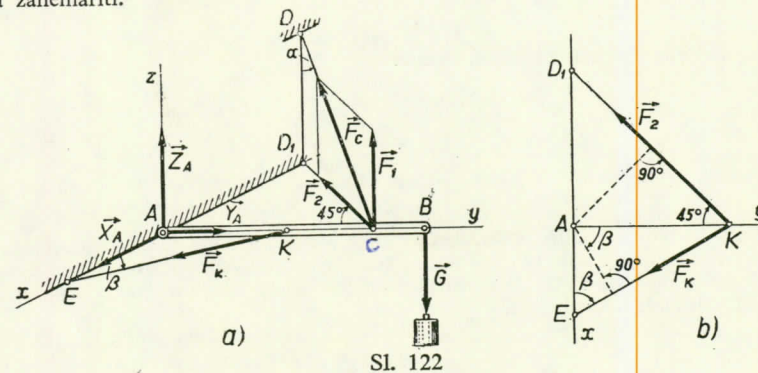
$$\Sigma M_z \equiv -Y_A b + G_1 a \sin \alpha + M \sin \alpha = 0. \quad (VI')$$

Primitimo, da isti rezultat možemo dobiti i ne postavljajući jednačine u obliku (67), ako spreg zamenimo dvema silama, koje su usmerene, na primer, duž pravaca AB i KO (tom prilikom intenziteti ovih sila biće očividno jednaki M/a) i zatim možemo uobičajenim postupkom da postavimo uslove ravnoteže.

Rešavanjem jednačina od (I) do (IV), i jednačina (V'), (VI'), dobijamo analogne rezultate kao i u zadatku 45, s tom razlikom, što u svim formulama umesto veličine $G_1 a$ figuriše sada veličina $G_1 a + M$. Definitivno dobijamo:

$$\begin{aligned} F_K &\approx 10,4 \text{ kp}, & X_A &= 20 \text{ kp}, & Y_A &\approx 17,3 \text{ kp}, & Z_A &= -4 \text{ kp}, \\ & & Y_B &= -12,1 \text{ kp}, & Z_B &= 7 \text{ kp}. \end{aligned}$$

Zadatak 47. Horizontalni štap AB pričvršćen je za zid sfernim zglobovom A i održava se u položaju, koji je upravan na zid, pomoću zatega KE i CD, koje su prikazane na sl. 122, a. O kraj B štapa obešen je teret težine $G = 36 \text{ kp}$. Odrediti reakciju zgloba A i zatežuće sile u zategama, ako je dato: $\overline{AB} = a = 0,8 \text{ m}$; $\overline{AC} = \overline{AD_1} = b = 0,6 \text{ m}$; $\overline{AK} = \frac{1}{2} a$, $\alpha = 30^\circ$; $\beta = 60^\circ$. Težinu štapa zanemariti.



Sl. 122

Rešenje. Razmotrimo ravnotežu štapa uklanjajući veze i smatrajući ga slobodnim telom. Na štap deluje sila $\vec{G}$ i reakcije $\vec{F}_K$, $\vec{F}_C$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, $\vec{Z}_A$. Povucimo koordinatne ose i izračunajmo projekcije i momente svih sila. Kako sve sile seku osu y, to su njihovi momenti za ovu osu jednaki nuli. Da bismo izračunali moment sile $\vec{F}_C$ za koordinatne ose razložimo ovu silu u njene komponente $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_C \cos \alpha$, $F_2 = F_C \sin \alpha$), a zatim primenimo Varinjonovu teoremu.* Tada je $M_x^{F_C} = M_x^{F_1}$ jer je $M_x^{F_2} = 0$; $M_z^{F_C} = M_z^{F_2}$, jer je $M_z^{F_1} = 0$.

* Obratimo pažnju na to da ugao između sile $\vec{F}_C$ i ravni Ayz nije jednak 45° kako se vrlo često pogrešno misli u analognim slučajevima. Iz tog razloga, na primer, kada izračunavamo $M_x^{F_C}$ običnim putem, treba najpre odrediti taj ugao, a to usložava račune. Međutim korišćenjem Varinjonove teoreme odmah nalazimo da je $M_x^{F_C} = M_x^{F_1} = F_1 \cdot \overline{AC}$.

Na sl. 122, b data je projekcija sistema na ravan Axy . Korišćenjem ovog crteža lakše izračunavamo momente sila za osu z . Rezultati svih računa dati su u tablici.

$\vec{F}_i$	$\vec{G}$	$\vec{F}_K$	$\vec{F}_C$	$\vec{F}_A$
X_i	0	$F_K \cos \beta$	$-F_2 \sin 45^\circ$	X_A
Y_i	0	$-F_K \sin \beta$	$-F_2 \cos 45^\circ$	Y_A
Z_i	$-G$	0	F_1	Z_A
M_x	$-Ga$	0	$F_1 b$	0
M_z	0	$-F_K \frac{a}{2} \cos \beta$	$F_2 b \cos 45^\circ$	0

Ako za sile F_1 i F_2 smenimo odgovarajuće vrednosti dobićemo sledeće jednačine:

$$\Sigma X_i = F_K \cos \beta - F_C \sin a \sin 45^\circ + X_A = 0, \quad (\text{I})$$

$$\Sigma Y_i = -F_K \sin \beta - F_C \sin a \cos 45^\circ + Y_A = 0, \quad (\text{II})$$

$$\Sigma Z_i = -G + F_C \cos a + Z_A = 0, \quad (\text{III})$$

$$\Sigma M_x = -Ga + F_C b \cos a = 0, \quad (\text{IV})$$

$$\Sigma M_y = -F_K \frac{a}{2} \cos \beta + F_C b \sin 45^\circ = 0. \quad (\text{V})$$

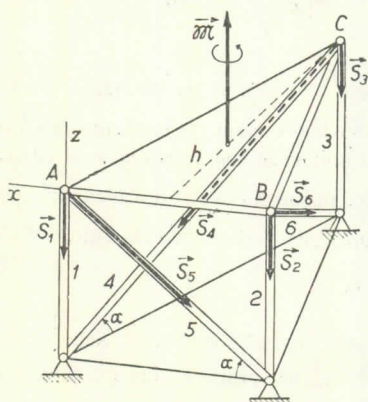
Rešavanjem ovog sistema jednačina, nalazimo:

$$F_C \approx 55,4 \text{ kp}, \quad F_K \approx 58,8 \text{ kp},$$

$$X_A \approx -9,8 \text{ kp}, \quad Y_A \approx 70,5 \text{ kp}, \quad Z_A = -12 \text{ kp}.$$

Prema tome, komponente $\vec{X}_A$ i $\vec{Y}_A$ imaju smerove suprotne od onih koji su naznačeni na crtežu.

Zadatak 48. Horizontalna ploča ABC , oblika jednakostranog trougla, stranice a , oslanja se na šest štapova, kako je na sl. 123 pokazano; tom prilikom svaki od kosih štapova zaklapa sa horizontalnom ravni ugao $\alpha = 30^\circ$. U ravni ploče deluje spreg čiji je moment $\mathfrak{M}$. Zanemarujući težinu ploče, odrediti sile u štapovima.



Sl. 123

Rešenje. Posmatrajmo ploču kao slobodno telo, a spreg koji deluje na ploču prikazimo vektorom $\vec{\mathfrak{M}}$; reakcije u štapovima označimo sa $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \dots, \vec{S}_6$; reakcije su kao što vidimo usmerene tako, kao da su svi štapovi zategnuti (smatramo da je ploča odvojena od štapova, tj. da su štapovi presečeni). Pri ravnoteži suma momenata svih sila koje deluju na telo, a takođe i spregova [vidi jednačine (67)] za bilo koju osu mora da bude jednaka nuli.

Usmerimo osu z duž štapa 1 i postavimo momentnu jednačinu za tu osu, stavljajući da je $\mathfrak{M}_z = \mathfrak{M}$; tako dobijamo:

$$(S_6 \cos \alpha) h + \mathfrak{M} = 0,$$

gde je $h = a\sqrt{3}/2$ — visina trougla. Odavde nalazimo

$$S_6 = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{\mathfrak{M}}{a \cos \alpha}.$$

Postavimo sada momentne jednačine za ose, koje su usmerene duž štapa 2 i 3. Iz njih ćemo dobiti isti rezultat i za sile S_4 i S_5 .

Postavimo sada momentnu jednačinu za osu x , usmerenu duž strane BA trougla. Imajući u vidu da je $M_x = 0$, dobijamo:

$$S_3 h + (S_4 \sin \alpha) h = 0.$$

Oдавде, s obzirom da je $S_4 = S_6$, nalazimo:

$$S_3 = -S_4 \sin \alpha = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \frac{M}{a} \operatorname{tg} \alpha.$$

Iste rezultate dobićemo i za veličine sila S_1 i S_2 , postavljanjem momentnih jednačina za ose AC i CB .

Najzad za $\alpha = 30^\circ$ dobijamo:

$$S_1 = S_2 = S_3 = \frac{2}{3} \frac{M}{a}; \quad S_4 = S_5 = S_6 = -\frac{4}{3} \frac{M}{a}.$$

Dobijeni rezultati pokazuju da su dejstvom datog sprega vertikalni štapovi zategnuti, dok su kosi pritisnuti.

Iz razmatranog primera se vidi da pri rešavanju zadataka ne moramo uvek da se koristimo uslovima ravnoteže (66). Za prostorni sistem sila, kao i za ravan sistem sila, postoje, kao što znamo, nekoliko oblika uslova ravnoteže, od kojih je oblik (66) osnovni.

U posebnom slučaju, može se dokazati, da je za ravnotežu prostornog sistema sila potrebno i dovoljno, da bude jednaka nuli suma momenata svih sila za šest osa, usmerenih ili po ivicama bilo koje trostrane piramide, ili po bočnim ivicama i ivicama osnove trostrane prizme.

Ovi poslednji uslovi su i bili iskorišćeni pri rešavanju datog zadatka.

§ 51*. Uslovi ravnoteže neslobodnog krutog tela.

Pojam o stabilnosti ravnoteže

U §§ 11, 24, 48 i drugim određeni su uslovi za ravnotežu slobodnog krutog tela. Za vezana (neslobodna) kruta tela ti uslovi se primenjuju na taj način što se koristi aksioma o vezama. Tom prilikom dobivaju se jednačine koje služe za određivanje reakcija veza.

Problem o određivanju uslova ravnoteže vezanog krutog tela nastaje onda kada su veze datog tela takve da ga ne pričvršćuju kruto (vidi zadatke 6, 7 u § 13 i druge). U tom slučaju samo izvestan broj jednačina, koje smo dobili na osnovu aksiome o vezama, sadrži u sebi nepoznate reakcije i služi za određivanje tih reakcija. Ostale jednačine samo pokazuju pri kakvom odnosu između sila je mogućna ravnoteža (zadatak 6), ili, pak, u kom je položaju (zadatak 7) mogućna ravnoteža, tj. one daju samo uslove ravnoteže vezanog krutog tela. Prema tome, *uslovi ravnoteže vezanog krutog tela određuju se na osnovu jednačina, dobivenih korišćenjem aksiome o vezama, koje ne sadrže u sebi reakcije veza.*

Tako, npr., za telo, koje ima nepomičnu obrtnu osu (vidi sl. 124), korišćenjem aksiome o vezama postavimo jednačine (66) i tada možemo zaključiti da reakcije ležišta A i B ulaze u sve jednačine ravnoteže, izuzev poslednje (vidi zadatak 44).

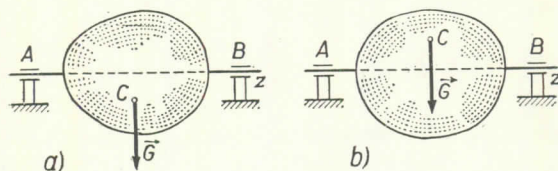
U jednačinu $\sum \vec{M}_z^{F_i} = 0$ reakcije ležišta A i B ne ulaze, jer one seku osu z .

Prema tome, *uslovi ravnoteže tela, koja imaju nepomičnu obrtnu osu, sastoje se u tome da je suma momenata svih aktivnih sila, koje deluju na tela, za obrtnu osu jednaka nuli:*

$$\sum \vec{M}_z^{F_i} = 0.$$

(70)

Za tela, koja datim vezama nisu pričvršćena kruto (kao što je to bio navedeni primer), pojavljuje se jedan poseban problem — *problem o stabilnosti ravnoteže*. Ako sile koje deluju na telo teže da vrte telo u položaj ravnoteže (kada je ono iz tog položaja izvedeno), onda



Sl. 124

je razmatrani položaj ravnoteže *stabilan*; u protivnom slučaju je *labilan*. Praktično telo može biti u ravnoteži samo tada ako je položaj ravnoteže stabilan.

Razmotrimo, na primer, telo, koje je pričvršćeno za horizontalnu osu. Ono će se nalaziti

u ravnoteži pod dejstvom sile teže $\vec{G}$, kada je saglasno jednačini (70), $M_z^{\vec{G}} = 0$, tj. kada težište zauzima najniži mogući položaj (sl. 124, a), ili pak najviši položaj (sl. 124, b). Ako se telo izvede za mali ugao iz svog položaja ravnoteže, onda u prvom slučaju sila $\vec{G}$ teži da taj ugao smanji i da vrati telo u položaj ravnoteže, dok u drugom slučaju moment sile $\vec{G}$ teži da ovaj ugao poveća. Prema tome, *telo se nalazi u stabilnoj ravnoteži ako njegovo težište zauzima najniži položaj, i u labilnoj ravnoteži — kada je taj položaj najviši*. Ovaj zaključak važi u svim slučajevima kada se telo koje posmatramo nalazi pod dejstvom sile teže. U slučaju da se težište tela nalazi na obrtnoj osi, ravnoteža je *indiferentna (astatička)*.

Ispitajmo, npr., karakter ravnoteže štapa, koja je ispitana u zadatku 7 (ili 12). Uslov ravnoteže štapa iskazan je jednačinom $\Sigma M_A^{\vec{F}_i} = 0$. Pri tome je (vidi sl. 38).

$$M_A^{\vec{F}_K} = G_1 a \cos \frac{\alpha}{2}, \quad |M_A^{\vec{G}}| = G a \sin \alpha.$$

Ako se ugao α povećava, onda i $|M_A^{\vec{G}}|$ raste, dok se $M_A^{\vec{F}_K}$ smanjuje, tako da će pod dejstvom sile $\vec{G}$ ugao α produžiti da se povećava. Ako se ugao α smanjuje, onda se $M_A^{\vec{F}_K}$ povećava, dok se $M_A^{\vec{G}}$ smanjuje, i pod dejstvom sile $F_K = G_1$ ugao α će nastaviti da se smanjuje. Prema tome, položaj ravnoteže štapa, određen jednačinom $\sin \frac{\alpha}{2} = G_1/2G$, je *labilan*. Kada je $\alpha = 180^\circ$, ravnoteža će biti *stabilna*, ako je $G_1 < 2G$, i *labilna*, ako je $G_1 > 2G$, u šta se možemo uveriti ako uvedemo $\beta = 180^\circ - \alpha$.

Razmotrena metoda ispitivanja stabilnosti ravnoteže se primenjuje samo u prostijim slučajevima. Složeniji slučajevi se ispituju dinamičkim metodama.

Glava VIII

TEŽIŠTE

§ 52. Centar (središte) paralelnih sila

Pojam o centru (središtu) paralelnih sila pojavljuje se pri slaganju takvih paralelnih sila, koje deluju na kruto telo, čije napadne linije mogu da promene pravac u odnosu na kruto telo. Sa ovim pojmom se susrećemo pri rešavanju izvesnih problema u mehanici, a posebno, pri određivanju položaja težišta tela.

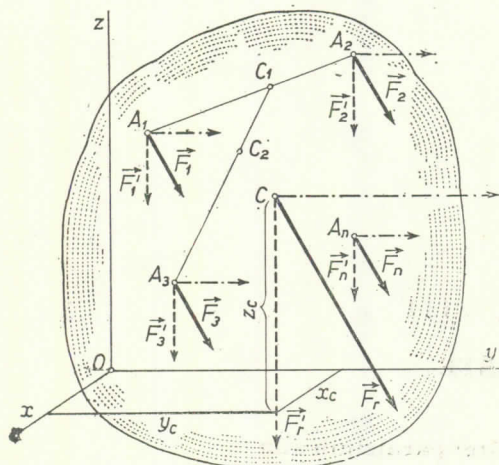
Razmotrimo sistem paralelnih i jednako usmerenih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, koje deluju na kruto telo u tačkama $A_1, A_2, \dots, A_n$ (sl. 125). Očividno da ovaj sistem sila ima rezultantu $\vec{F}_r$ usmerenu u istu stranu u koju su usmerene i njene komponente, pri čemu je intenzitet te rezultante

$$F_r = \Sigma F_i.$$

(71)

Ako sada svaku od sila ovog sistema okrenemo oko njene napadne tačke u jednu istu stranu i za jedan isti ugao, onda ćemo na taj način dobiti nove sisteme jednako usmerenih paralelnih sila, koji će imati iste napadne tačke i iste intenzitete kao i sile u prethodnom sistemu paralelnih sila, ali će sada njihove napadne linije biti drugog pravca (vidi, npr., iscrtkane linije na sl. 125). Rezultanta svakog od takvih sistema paralelnih sila imaće, očividno, isti intenzitet F_r , ali svaki put drugu napadnu liniju. Da bismo odredili tu napadnu liniju, potrebno je svaki put odrediti po jednu, bilo koju tačku, kroz koju ona prolazi. Pokažimo da prilikom svih tih obrtanja *napadna linija rezultante prolazi uvek kroz jednu te istu tačku C*. Naime, ako najpre složimo sile $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ naćićemo (vidi § 17), da njihova rezultanta $\vec{F}_{r1}$ (koja nije prikazana na crtežu), pri bilo kakvom okretanju ovih sila, uvek prolazi kroz tačku C_1 , koja leži na pravoj A_1A_2 . Tom prilikom je zadovoljen i uslov $\vec{F}_1 \cdot \vec{A_1C_1} = \vec{F}_2 \cdot \vec{A_2C_1}$, jer se pri okretanju sila položaj prave A_1A_2 ne menja, a isto tako ne menja se ni prethodni uslov. Ako sada složimo rezultantu $\vec{F}_{r1}$ sa silom $\vec{F}_3$, dobićemo da je njihova rezultanta u isto vreme i rezultanta sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$, koja će prolaziti kroz određenu tačku C_2 , koja leži na pravoj C_1A_3 , itd. Ako ovaj postupak

sprovedemo do kraja možemo doći do zaključka da rezultanta $\vec{F}_r$ svih sila koje deluju na kruto telo uvek prolazi kroz jednu te istu tačku C , čiji se položaj u odnosu na tačke $A_1, A_2, \dots, A_n$, tj. drugim rečima u odnosu na telo, ne menja.



Sl. 125

Tačka C , kroz koju prolazi napadna linija rezultante sistema paralelnih sila, pri bilo kakvom okretanju tih sila oko njihovih napadnih tačaka, u istu stranu, i za isti ugao, zove se centar (središte) paralelnih sila.

Odredimo koordinate centra paralelnih sila. Pošto se položaj tačke C prema telu ne menja, onda on ne zavisi od izbora koordinatnog sistema. Uzmimo zato proizvoljni dekartov koordinatni sistem $Oxyz$ i u odnosu na taj sistem označimo koordinate tačaka na sledeći način: $A_1 (x_1, y_1, z_1)$; $A_2 (x_2, y_2, z_2)$; $\dots$; $C (x_C, y_C, z_C)$. Koristeći se činjenicom da položaj tačke C ne zavisi od napadnih linija sila okrenimo najpre dati sistem paralelnih sila oko njihovih napadnih tačaka tako da budu paralelne osi Oz , i zatim primenimo na ove zaokrenute sile $\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n$ Varinjonovu teoremu (§ 49). Kako je $\vec{F}_r$ rezultanta datog sistema sila, onda, prema formuli (69), postavljanjem momentne jednačine za osu Oy , dobijamo

$$M_{y_r}^{\vec{F}_r} = \Sigma M_{y_i}^{\vec{F}'_i}.$$

Međutim, sa crteža [ili pak iz jednačine (52)] se vidi, da je $M_{y_r}^{\vec{F}_r} = F_r \cdot x_C$, je $F'_r = F_r$, a $M_{y_i}^{\vec{F}'_i} = F_1 x_1$, pošto je $F'_1 = F_1$, itd. Prema tome, $F_r x_C = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3 + \dots + F_n x_n$. Odatle nalazimo

$$x_C = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots + F_n x_n}{F_r} = \frac{\Sigma F_i x_i}{F_r}$$

Analognu formulu dobićemo za koordinatu y_C postavljanjem momentne jednačine za osu Ox . Da bismo odredili z_C , okrenimo opet sve sile tako da budu paralelne osi Oy i primenimo na takav sistem zaokrenutih sila (koje su prikazane na crtežu iscrtkanim linijama) Varinjonovu teoremu, postavljujući momentnu jednačinu za osu Ox . Odatle dobijamo

$$-F_r z_C = (-F_1 z_1) + (-F_2 z_2) + \dots + (-F_n z_n),$$

i tako nalazimo z_C .

Prema tome, dobili smo sledeće formule za određivanje centra (središta) paralelnih sila

$$x_C = \frac{\Sigma F_i x_i}{F_r}, \quad y_C = \frac{\Sigma F_i y_i}{F_r}, \quad z_C = \frac{\Sigma F_i z_i}{F_r}, \quad (72)$$

gde je F_r određeno jednačinom (71).

Prisetimo da formule (71) i (72) važe i za paralelne sile usmerene u različite strane, ako u tim formulama F_i smatramo za algebarske veličine (za jedan smer da su pozitivne i za drugi smer da su negativne). Tom prilikom mora biti i $F_r \neq 0$.

§ 53. Težište krutog tela

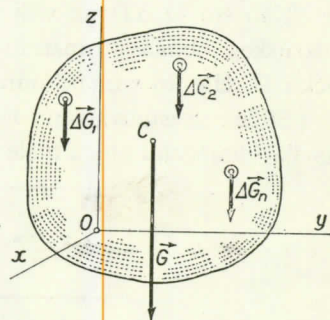
Na svaki delić krutog tela, koje se nalazi u blizini Zemljine površine, deluje sila, usmerena vertikalno naniže, koja se zove sila teže. Ova sila je rezultanta sile privlačenja Zemlje i centrifugalne sile, koja nastaje usled obrtanja tela zajedno sa Zemljom (ovaj problem biće detaljnije proučen u § 121).

Za tela, čije su dimenzije zanemarljivo male prema poluprečniku Zemlje, može se smatrati da su sile teže, koje deluju na pojedine deliće tela paralelne međusobno i da prilikom bilo kakvog okretanja tela, za svaki delić krutog tela zadržavaju konstantnu veličinu. Polje teže, kod koga su ispunjena ova dva uslova, zove se *homogeno polje teže*.

Rezultantu sila teže $\vec{\Delta G}_1, \vec{\Delta G}_2, \dots, \vec{\Delta G}_n$, koje deluju na deliće posmatranog krutog tela, označimo sa $\vec{G}$ (sl. 126). Intenzitet ove sile jednak je težini tela i određuje se iz jednačine*

$$G = \sum \Delta G_i. \quad (73)$$

Pri bilo kakvom okretanju tela, sile $\vec{\Delta G}_i$ napadaju telo u istim napadnim tačkama u telu i ostaju uvek paralelne međusobno; tom prilikom se menjaju samo pravci njihovih napadnih linija u odnosu na telo. Prema onom što smo dokazali u § 52, rezultanta $\vec{G}$ sila $\vec{\Delta G}_i$, pri bilo kojim položajima tela, prolazi kroz jednu te istu tačku C tela, čiji se položaj prema telu ne menja. Ta



Sl. 126

tačka je središte paralelnih sila $\vec{\Delta G}_i$. Ova tačka se zove *težište tela*. Prema tome, *težištem tela naziva se tačka čiji se položaj ne menja prema krutom telu, a kroz koju prolazi napadna linija rezultante sila teže delića datog tela pri bilo kakvom položaju tela u prostoru*. Da takva tačka zaista postoji proizlazi iz zaključka koji smo izveli u § 52.

Koordinate težišta, kao središta paralelnih sila teže, određuju se prema formulama (72), tj. one su određene izrazima:

$$x_C = \frac{\sum \Delta G_i x_i}{G}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta G_i y_i}{G}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta G_i z_i}{G}, \quad (74)$$

gde su x_i, y_i, z_i — koordinate napadnih tačaka sila teže $\vec{\Delta G}_i$ pojedinih delića tela.

* Težinom tela naziva se brojčana veličina sile kojom telo koje miruje, a koje se nalazi u polju sile teže, pritiskuje na podlogu koja sprečava njegovo vertikalno padanje (na primer, na tas vage). Prisetimo da čovek (ili životinja) na Zemlji «osećaju težinu» kao rezultat uzajamnih pritisaka delova tela koji nastaju jednovremenim dejstvom sila teže i reakcija veza, koje sprečavaju vertikalno padanje čoveka. Pri slobodnom vertikalnom padanju (na primer u liftu, kada se prekine užje) ti međusobni pritisci nestaju i čovek «oseća beztežinsko stanje» iako sila teže pri padanju deluje na njega. Analogan osećaj čovek ima i pri kosmičkom letu u vasioni.

Primetimo na kraju da je težište prema načinu na koji se određuje, u stvari jedna geometrijska tačka; ona može da se nalazi i izvan konture datog tela (npr. kod prstena).

§ 54. Težište homogenih tela

Kod homogenog tela je težina bilo kog delića ΔG_i proporcionalna zapremini ΔV_i tog delića $\Delta G_i = \gamma \Delta V_i$ — gde je γ — specifična težina. Isto tako težina celog tela G proporcionalna je zapremini V celog tela: $G = \gamma V$.

Ako smenimo ove vrednosti za G i ΔG_i u formule (74), i ako primetimo da se γ može izvući ispred znaka sume kao opšti množitelj, onda pošto izvršimo skraćivanja sa γ , formule (74) prelaze u

$$\boxed{x_C = \frac{\sum \Delta V_i x_i}{V}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta V_i y_i}{V}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta V_i z_i}{V}} \quad (75)$$

Kao što se odavde vidi položaj težišta homogenog tela zavisi samo od geometrijskog oblika posmatranog tela, dok od veličine γ ne zavisi. Iz ovog razloga, tačku C , čije koordinate određuju formule (75), nazivamo *težištem zapremine V* .

Sličnim rasuđivanjem, lako je zaključiti da je položaj težišta, kada telo predstavlja homogenu ploču male debljine, određen formulama:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum \Delta A_i x_i}{A}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta A_i y_i}{A}}, \quad (76)$$

gde je A — površina cele ploče, a ΔA_i — površina pojedinog delića ploče.

Tačku, čije koordinate određuju formule (76), nazivamo *težištem površine A* .

Na isti način dobijaju se formule za *koordinatne težišta linije*:

$$\boxed{x_C = \frac{\sum \Delta L_i x_i}{L}, \quad y_C = \frac{\sum \Delta L_i y_i}{L}, \quad z_C = \frac{\sum \Delta L_i z_i}{L}}, \quad (77)$$

gde je L — dužina cele linije, a ΔL_i — dužina pojedinog delića linije.

Prema tome, težišta homogenih tela se određuju kao težišta odgovarajućih zapremina, površina i linija.

§ 55. Načini određivanja težišta tela

Polazeći od formula izvedenih u prethodnom paragrafu mogu se preporučiti sledeći načini za određivanje koordinata težišta tela:

1) Simetrija. Dokážimo najpre da ako telo ima ravan, osu ili pak tačku (centar) simetrije, da onda težište leži u ravni, odnosno na osi, ili u tački (centru) simetrije.

Neka, npr., telo ima ravan simetrije. U tom slučaju ta ravan deli telo na dva dela čije su težine G_1 i G_2 jednake međusobom, a težišta tih delova nalaze se na jednakim rastojanjima od ravni simetrije. Prema tome, težište tela kao tačka kroz koju prolazi rezultanta jednakih paralelnih sila $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$, ležće zaista u ravni simetrije. Na sličan način može se izvesti dokaz i za ostala dva slučaja kada telo ima osu ili tačku simetrije.

Iz osobina simetrije proizlazi da se težište homogenog kružnog prstena, kružne ili pravougaone pločice, pravouglog paralelepipeda, kugle i drugih homogenih tela, koja imaju centar simetrije, nalazi u geometrijskom centru simetrije tih tela.

2) Rastavljanje. Ako možemo telo rastaviti na konačan broj takvih delova za koje znamo položaj težišta svakog od njih, onda, u tom slučaju, položaj težišta možemo neposredno izračunati po formulama (74) do (77). Pri tome će broj komponenta u svakom zbiru biti jednak broju delova na koje je rastavljeno telo.

Zadatak 49. Odrediti koordinate težišta homogene ploče prikazane na sl. 127. Sve dimenzije date su u cm.

Rešenje: Povucimo koordinatne ose i podelimo ploču na tri pravougaonika (linije preseka izvučene su iscrtkano). Izračunajmo koordinate težišta svakog od ovih pravougaonika a takođe i njihove površine (vidi tablicu).

Nº	Nº	1	2	3
x_i		-1	1	5
y_i		1	5	9
A_i		4	20	12

Ukupna površina cele pločice je

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 36 \text{ cm}^2.$$

Smenjujući nađene veličine u formule (67) dobijamo:

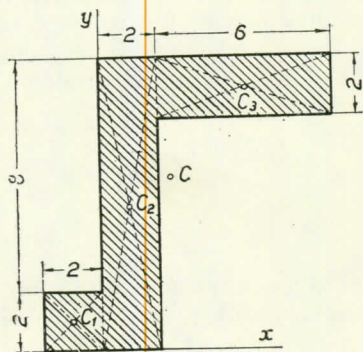
$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{-4 + 20 + 60}{36} = 2 \frac{1}{9} \text{ cm};$$

$$y_C = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{4 + 100 + 108}{36} = 5 \frac{8}{9} \text{ cm}.$$

Položaj nadenog težišta C pokazan je na crtežu. Tačka C nalazi se van pločice. Na ovom primeru smo se, dakle, uverili, da težište tela — ta geometrijska tačka, može da leži i izvan granica datog tela.

3) Dopunjavanje. Ovaj način je u stvari poseban slučaj rastavljanja. On se primenjuje kod tela koja imaju izreze, ako je poznat položaj težišta tela bez izreza, a takođe i položaj težišta izrezanih delova.

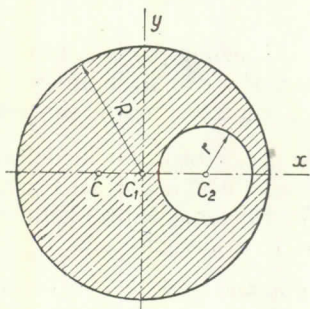
Zadatak 50. Odrediti položaj težišta kružne ploče poluprečnika R , iz koje je izrezan krug poluprečnika r (sl. 128). Rastojanje $C_1 C_2 = a$.



Sl. 127

Rešenje. Težište ploče leži na pravoj C_1C_2 , jer je ta prava osa simetrije. Povucimo koordinatne ose. Da bismo odredili koordinatu x_C dopunimo površinu ploče do punog kruga (deo I), a zatim oduzmimo iz tako dobijene površine izrezani krug (deo II). Tom prilikom površinu dela II s obzirom da se ona oduzima uzećemo sa znakom minus. Tada je $A_1 = R^2\pi$, $x_1 = 0$; $A_2 = -r^2\pi$, $x_2 = a$; $A = A_1 + A_2 = \pi(R^2 - r^2)$.

Ako dobijene vrednosti smenimo u formule (76), dobićemo;



Sl. 128

$$x_C = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} = -\frac{a r^2}{R^2 - r^2}, \quad y_C = 0.$$

Nađeno težište, kao što vidimo, leži levo od tačke C_1 .

4) Integriranje. U slučaju da telo ne može da se rastavi na konačan broj delića, čija su težišta poznata, onda se u tom slučaju telo najpre razdeli na veliki broj vrlo malih zapremina Δv_i i u tom slučaju formule (75) prelaze u

$$x_C = \frac{\sum \Delta v_i x_i}{V}, \text{ itd.}, \quad (78)$$

gde su: x_i, y_i, z_i — koordinate neke tačke koja leži unutar zapremine Δv_i . Zatim u jednačinama (78) prelazimo na granični slučaj kada sve zapremine Δv_i teže nuli, tj. kada se odgovarajuće zapremine pretvaraju u tačke. U tom slučaju sume u izrazima (78) prelaze u integrale po celoj zapremini datog tela, pa formule (78) prelaze onda u:

$$x_C = \frac{1}{V} \int_V x dV, \quad y_C = \frac{1}{V} \int_V y dV, \quad z_C = \frac{1}{V} \int_V z dV. \quad (79)$$

Sličnim postupkom, koordinate težišta površina ili pak linija prelaženjem formula (76) i (77) na granični slučaj postaju:

$$x_C = \frac{1}{A} \int_A x dA, \quad y_C = \frac{1}{A} \int_A y dA, \quad (80)$$

i

$$x_C = \frac{1}{L} \int_L x dL, \quad y_C = \frac{1}{L} \int_L y dL, \quad z_C = \frac{1}{L} \int_L z dL. \quad (81)$$

Primer primene načina integriranja za određivanje položaja težišta primenjen je u sledećem paragrafu.

5) Eksperimentalni način. Položaj težišta nehomogenih tela vrlo složene konfiguracije (avion, lokomotiva, itd.) može se odrediti eksperimentalnim putem. Jedan od mogućih načina za određivanje položaja težišta je način vešanja, koji se sastoji u tome da se telo za koje položaj težišta treba odrediti obesi o konopce ili čeličnu užad za različite njegove tačke. Pravac konopca, za koji je obešeno telo, određivaće svakog puta pravac sile teže. Tačka u kojoj se seku ovi pravci određuje položaj težišta datog tela.

Drugi mogućni način određivanja položaja težišta tela je način merenja vagon. Ideja te metode pokazana je na sledećem primeru.

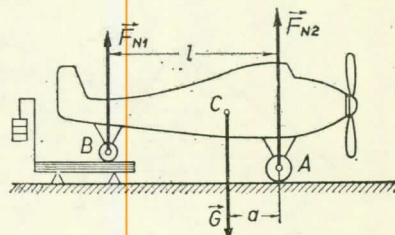
Primer. Pokažimo kako se eksperimentalnim putem može odrediti položaj težišta aviona (rastojanje a), ako je rastojanje $\overline{AB} = l$ (sl. 129) poznato. Ako točak B stavimo na platformu vage možemo merenjem odrediti pritisak točka na platformu; time smo u isto vreme odredili i brojčanu veličinu reakcije F_{N1} . Na isti način merenjem možemo odrediti i drugu reakciju F_{N2} . Ako zatim izjednačimo sa nulom momente sila za težište C aviona, dobićemo

$$F_{N2} a - F_{N1} (l - a) = 0,$$

odakle je

$$a = \frac{F_{N1}}{F_{N1} + F_{N2}} l.$$

Očevidno je da je: $F_{N1} + F_{N2} = G$, gde je G težina aviona. Ako je težina G unapred poznata, onda veličinu a , odnosno položaj težišta, možemo odrediti samo jednim merenjem.



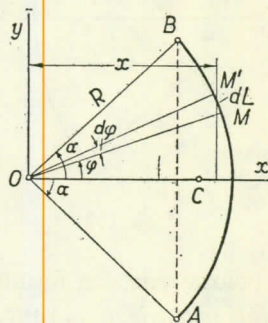
Sl. 129

§ 56. Položaj težišta nekih homogenih tela

1) Težište kružnog luka. Uočimo luk AB , poluprečnika R , sa centralnim uglom $\angle AOB = 2\alpha$. Zbog simetrije težište ovog luka leži na osi Ox (sl. 130). Odredimo koordinatu x_C metodom integriranja (primeri kod kojih se ne upotrebljava metoda integriranja navedeni su malo dalje). Na luk $\widehat{AB}$ uočimo element $\widehat{MM'}$ čija je dužina $dL = R d\varphi$, a čiji je položaj određen uglom φ . Koordinata x elementa $\widehat{MM'}$ biće $x = R \cos \varphi$. Ako ove izraze za x i dL smenimo u prvu od formula (81), i imajući u vidu da se integral rasprostire po dužini luka, dobićemo;

$$x_C = \frac{1}{L} \int_A^B x dL = \frac{R^2}{L} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos \varphi d\varphi = 2 \frac{R^2}{L} \sin \alpha,$$

gde je L — dužina luka AB , jednaka $R \cdot 2\alpha$. Odavde definitivno proizlazi da se težište kružnog luka nalazi na osi simetrije, a na rastojanju od centra



Sl. 130

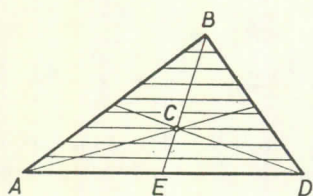
$$x_C = R \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (82)$$

pri čemu se ugao α meri u radijanima.

Do istog rezultata možemo doći i ne koristeći pojam integrala. Prema formuli (77), ako označimo dužinu elementa luka sa ΔL_i , biće

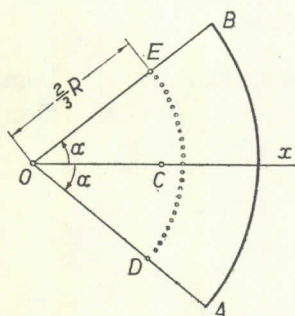
$$x_C = \frac{1}{L} \sum \Delta L_i \cdot x_i,$$

gde je x_i — koordinata elementa ΔL_i , pri čemu je sa tačnošću do malih veličina višeg reda $x_i = R \cos \varphi_i$ (umesto φ pišemo φ_i). Tada je (vidi § 28, slika 75) $x_i \Delta L_i = R \Delta L_i \cos \varphi_i = R \Delta y_i$, odakle je $\sum x_i \Delta L_i = R \sum \Delta y_i = R \cdot \overline{AB}$. Na kraju, imajući u vidu da je $\overline{AB} = 2R \sin \alpha$ i $L = R \cdot 2\alpha$ dolazimo do istog izraza kao i u formuli (82).



Sl. 131

možemo zaključiti da se *težište trougla nalazi u preseku njegovih medijana*. Pri tome je, kao što je poznato



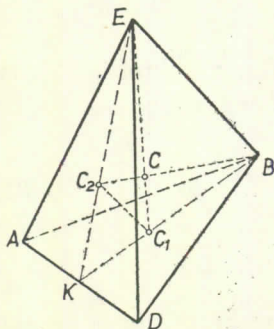
Sl. 132

je položaj određen formulom (82). Prema tome, *težište površine kružnog iseka leži na osi simetrije, a na rastojanju od centra*

$$\overline{CE} = \frac{1}{3} \overline{BE}.$$

3) *Težište površine kružnog iseka.* Uočimo kružni isekak OAB , poluprečnika R , sa centralnim uglom 2α (sl. 132). Rastavimo u mislima površinu iseka OAB na n delova poluprečnicima koji prolaze kroz tačku O . U graničnom slučaju kada je broj n vrlo velik ove male isecke možemo smatrati za trouglove čija težišta leže na luku $\widehat{DE}$ poluprečnika $2/3 R$. Na taj način, težište kružnog iseka OAB poklapa se sa težištem luka $\widehat{DE}$, čiji

$$x_C = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha} \quad (83)$$



Sl. 133

4) *Težište zapremine piramide.* Uočimo trostranu piramidu (tetraedar) $ABDE$ (sl. 133). Da bismo odredili položaj težišta ove piramide podelimo njenu zapreminu ravnima koje su paralelne osnovi ABD . Na taj način podelićemo piramidu na veći broj zarubljenih piramida. U graničnom slučaju kada je broj ovih zarubljenih piramida n vrlo velik, one postaju ploče male debljine oblika trougla. Težišta tih trouglova leže na pravoj EC_1 , koju dobivamo kada spojimo vrh E piramide sa težištem C_1 njene osnove. Na taj način, na pravoj EC_1 leži i težište ovog tetraedra. Sličnim rasuđivanjem zaključujemo da težište tetraedra leži i na pravoj BC_2 , koju smo dobili kada smo spojili teme piramide B sa težištem bočne strane ADE . Prema tome, traženo težište leži u tački C , u kojoj se seku prave EC_1 i BC_2 .

Odredimo položaj tačke C . Pošto prave C_1C_2 i BE dele strane ugla BKE na proporcionalne delove, to su one paralelne, pa je i $\triangle C_1CC_2$ sličan $\triangle ECB$; osim toga je $\overline{C_1C_2} = \frac{1}{3} \overline{BE}$, jer je $\overline{KC_1} = \frac{1}{3} \overline{KB}$. Odatle nalazimo:

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{C_1C_2}}{\overline{BE}} = \frac{1}{3}.$$

Prema tome je

$$\overline{CC_1} = \frac{1}{3} \overline{CE} = \frac{1}{4} \overline{C_1E}. \quad (84)$$

Ovaj isti rezultat važi takođe i za bilo koju drugu n -to stranu piramidu, a u graničnom slučaju i za konus.

Prema tome, težište zapremine piramide (ili konusa) leži na duži koja spaja vrh piramide (konusa) sa težištem osnove piramide (konusa), a na rastojanju od jedne četvrtine te dužine od osnove piramide (konusa).

Formule za određivanje koordinata težišta niza drugih homogenih tela mogu se naći u različitim tehničkim, odnosno matematičkim priručnicima.

DRUGI DEO

KINEMATIKA
TAČKE I KRUTOG TELA

Glava IX

PRAVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE

§ 57. Uvod u kinematiku

Kinematikom se naziva deo mehanike u kome se proučavaju geometrijska svojstva kretanja tela ne uzimajući u obzir njihovu inerciju (masu) i sile koje deluju na tela.

Kinematika predstavlja, s jedne strane, uvod u dinamiku, jer definiše osnovne kinematičke pojmove i zavisnosti, koji su neophodni za proučavanje kretanja tela pod dejstvom sila. S druge strane, kinematičke metode imaju i samostalan praktični značaj; npr., pri proučavanju kretanja zupčanika u raznim mehanizmima. Iz tog razloga pod uticajem raznih problema, koji su se pojavili u mašinskoj tehnici, kinematika se tokom vremena izdvojila u samostalni deo mehanike (u prvoj polovini XIX veka).

Pod kretanjem u mehanici podrazumevamo promenu položaja jednog tela, koja se vrši tokom vremena, u odnosu na drugo telo u prostoru.

Za definisanje položaja pokretnog tela (ili tačke) u odnosu na telo prema kome proučavamo kretanje, poslužićemo se tzv. *koordinatnim sistemom referencije*, koji je čvrsto vezan za ovo drugo telo u odnosu na koje proučavamo kretanje. Ako koordinate svih tačaka u izabranom koordinatnom sistemu ostaju za sve vreme kretanja konstantne, onda se telo u odnosu na taj koordinatni sistem nalazi u miru. Nasuprot tome, ako se koordinate bar nekih tačaka tela menjaju tokom vremena, onda se to telo u odnosu na koordinatni sistem referencije (pa prema tome i u odnosu na telo prema kome proučavamo kretanje) kreće. U daljim izlaganjima govorićemo o kretanju tela u odnosu na koordinatni sistem referencije, a pod tim ćemo podrazumevati u stvari kretanje tela u odnosu na telo za koje je čvrsto vezan koordinatni sistem referencije.

Kretanje tela vrši se u prostoru tokom vremena. U mehanici ćemo prostor smatrati za trodimenzijski Euklidov prostor. Sva razmatranja u njemu vršićemo na osnovu metoda Euklidove geometrije. Za jedinicu dužine pri merenju rastojanja usvojićemo jedan *metar* [m]*. Vreme se u mehanici smatra univerzalnim, tj. da teče (prolazi) na isti način u svim koordinatnim sistemima referencije. Za jedinicu vremena uzima se jedna *sekunda* [s], koja je jednaka $1/31.556\,925,9747$ tropske godine u 12 sati efemeridnog vremena 0. januara 1900. godine.**

* Vidi fusnotu na strani 9.

** Množine sekunada su:

— minuta [min]	1 min = 60 s
— sat ili čas [h]	1 h = 60 min
— dan [d]	1 d = 24 h

Euklidov prostor i univerzalno vreme izražavaju samo približno realne osobine prostora. Međutim, kako pokazuju razni opiti, za kretanja koja se proučavaju u mehanici (a koja se vrše brzinama, koje su mnogo manje od brzine prostiranja svetlosti), takvo približenje sasvim je opravdano, jer s praktične tačke gledišta daje zadovoljavajuću tačnost.

Vreme je skalarna veličina koja se neprekidno menja. U problemima kinematike vreme t uzima se za nezavisno promenljivu veličinu (argument). Sve ostale promenljive veličine posmatraju se u kinematici kao funkcije vremena, tj. i one se menjaju tokom vremena. Vreme merimo (računamo) od nekog početnog trenutka vremena ($t = 0$), a taj se početni trenutak vremena utvrdi u svakom konkretnom problemu. Svaki određeni trenutak vremena t definiše se brojem sekundi, koje su protekle od početnog trenutka vremena; razlika između bilo koja dva uzastopna trenutka vremena, pri nekom kretanju, zove se *vremenski interval* (razmak).

Sva proučavanja u kinematici počivaju na geometrijskim aksiomama. Sva razmatranja se potvrđuju praktičnim iskustvom i do raznih zaključaka se dolazi na osnovu raznih opita, tako da nikakvi dopunski zakoni, ili pak aksiome, za kinematičko proučavanje kretanja nisu potrebne.

Za rešavanje zadataka kinematike potrebno je da kretanje koje se proučava bude bilo kako definisano (zadato).

Kinematički definisati kretanje ili zakon kretanja tela (tačke) znači definisati položaj tog tela (tačke) u odnosu na dati koordinatni sistem referencije u bilo kom trenutku vremena. Utvrđivanje matematičkih metoda za definisanje kretanja tačaka ili tela predstavlja jedan od najvažnijih zadataka kinematike.

Osnovni zadatak kinematike sastoji se u tome da se, znajući zakon kretanja datog tela (ili tačke), odrede sve kinematičke veličine, koje karakterišu kako kretanje tela kao celine, tako i kretanje svake njegove tačke posebno (putanje, brzine, ubrzanja, itd.).

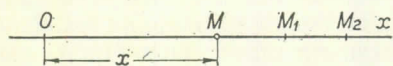
Za rešavanje ovog zadatka potrebno je da je neposredno dat zakon kretanja datog tela, ili pak, da je definisano kretanje nekog drugog tela, koje je kinematički vezano za dato telo.

Započecemo proučavanja u kinematici sa razmatranjem najprostijeg elementa, tj. sa tačkom (kinematičkom tačkom), a zatim ćemo preći i na kinematiku krutog tela.

Neprekidna linija, koju opisuje tačka pri kretanju, u odnosu na dati koordinatni sistem referencije, zove se *putanja* (*trajektorija*) tačke. Ako je putanja prava linija, kretanje tačke zove se — *pravolinijsko*, a ako je kriva linija, onda se zove — *krivolinijsko*. U ovoj glavi proučićemo pravolinijsko kretanje tačke.

§ 58. Zakon pravolinijskog kretanja

Uočimo na pravoj, duž koje se kreće tačka M , koordinatni početak (početak sistema referencije) O i povucimo duž te prave koordinatnu osu Ox (sl. 134). Položaj tačke na osi biće u tom slučaju određen



Sl. 134

koordinatom x , koja je jednaka rastojanju OM , koje se uzima sa odgovarajućim znakom. Pri kretanju tačka M zauzima različite položaje M_1 , M_2 , itd.; prema tome, veličina x menja se tokom vremena. Da bismo poz-

navali položaj tačke na njenoj putanji u svakom trenutku vremena potrebno je da znamo zavisnost

$$x = f(t).$$

(1)

Jednačina (1) izražava zakon pravolinijskog kretanja tačke.

Npr., ako se tačka iz koordinatnog početka kreće tako da je njeno rastojanje od tog početka proporcionalno kvadratu vremena, onda će zakon kretanja tačke biti određen sa

$$x = bt^2,$$

gdé je b — koeficijent, brojčano jednak rastojanju koje tačka pređe u toku prve sekunde. U trenutku $t_2 = 2$ s rastojanje tačke od koordinatnog početka biće brojčano jednako $4b$, itd. Prema tome, znajući jednačinu (1) možemo stvarno u svakom trenutku vremena odrediti položaj tačke na osi Ox .

Primetimo da veličina x u jednačini (1) određuje položaj tačke, a ne i pređeni put. Npr., ako tačka počinjući kretanje dođe iz položaja O u položaj M_1 (vidi sl. 134), i ako zatim krećući se u obrnutom smeru dođe u položaj M , onda je njen položaj određen koordinatom $x = OM$, dok pređeni put za posmatrani vremenski interval iznosi $OM_1 + M_1M$, tj. pređeni put nije jednak x .

§ 59. Brzina i ubrzanje tačke pri pravolinijskom kretanju

Brzina je jedna od osnovnih kinematičkih karakteristika kretanja tačke. Uvedimo najpre pojam srednje brzine.

Ako se u trenutku t tačka nalazi u položaju M , a ako se u trenutku t_1 nalazi u položaju M_1 , tj. ako je za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ prešla put $\Delta x = x_1 - x$ (sl. 135), onda se srednjom brzinom tačke za taj vremenski interval naziva vektorska veličina, koja je brojčano jednaka*

$$v_{sr} = \frac{x_1 - x}{t_1 - t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (2)$$

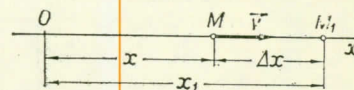
Vektor srednje brzine v_{sr} ima pravac ose x i usmeren je u smeru kretanja, tj. od tačke M ka tački M_1 .

Ukoliko je manji vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$, za koji se određuje srednja brzina, utoliko će veličina v_{sr} tačnije da karakteriše kretanje tačke. Da bismo dobili karakteristiku kretanja nezavisnu od vremenskog intervala Δt , potrebno je da se uvede pojam brzine tačke u datom (određenom) trenutku vremena.

Brzinom tačke u trenutku vremena t naziva se veličina $\vec{v}$ kojoj teži srednja brzina $\vec{v}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli; brojčana vrednost brzine biće određena sa

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad \text{odnosno} \quad v = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \quad (3)$$

* Brojčana (ili algebarska) veličina bilo kog vektora $\vec{u}$ može se razlikovati od njegovog modula (intenziteta) samo znakom. Iz tog razloga brojčanu veličinu kao i intenzitet označavaćemo jednim te istim simbolom u . S praktične tačke gledišta takva jedna konvencija (dogovor) ne može da dovede do nekog nesporazuma. U svim onim slučajevima kada je potrebno podvući da se radi o intenzitetu vektora $\vec{u}$, intenzitet vektora $\vec{u}$ označićemo simbolom $|\vec{u}|$.



Sl. 135

Prema tome, pri pravolinijskom kretanju tačke brojčana vrednost brzine tačke u datom trenutku vremena jednaka je prvom izvodu koordinate x po vremenu t .

Veličina v može da ima znak plus ili minus. Iz jednačine (3) se vidi da se znak za v poklapa sa znakom za Δx , i prema tome, ako je $v > 0$, onda se kretanje tačke vrši u smeru raščćenja koordinate x (vektor $\vec{v}$ je usmeren u pozitivnom smeru ose Ox); ako je pak $v < 0$, onda se kretanje vrši u smeru smanjivanja koordinate x (vektor $\vec{v}$ usmeren je tada u negativnom smeru ose Ox). Dimenzija brzine je — dužina/vreme; npr., m/s.

Brzina tačke pri kretanju može da se menja. Veličina koja karakteriše promenu brzine tačke u toku vremena zove se *ubrzanje tačke*.

Uvedimo najpre pojam o srednjem ubrzanju tačke. Ako je u trenutku t brzina tačke jednaka v , a u trenutku t_1 jednaka v_1 , i ako se promena brzine izvrši za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$, tako da priraštaj brzine iznosi $\Delta v = v_1 - v$, onda se srednjim ubrzanjem tačke za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$, naziva vektorska veličina $\vec{a}_{sr}$, čija je brojčana veličina određena jednačinom

$$a_{sr} = \frac{v_1 - v}{t_1 - t} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (4)$$

Vektor $\vec{a}_{sr}$ usmeren je u smeru pozitivne ose Ox , ako je $a_{sr} > 0$, i obrnuto, biće usmeren u smeru negativne ose Ox , ako je $a_{sr} < 0$.

Ubrzanje tačke u određenom trenutku t dobiva se kao granična vrednost kojoj teži srednje ubrzanje $\vec{a}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli; brojčana vrednost ovog ubrzanja iznosi

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt},$$

ili, ako imamo u vidu jednačinu (3) biće,

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} \quad (5)$$

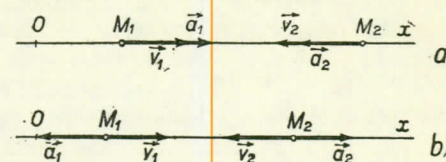
Prema tome, pri pravolinijskom kretanju, brojčana veličina ubrzanja u datom trenutku vremena jednaka je prvom izvodu brzine, ili drugom izvodu koordinate x po vremenu t .

Vektor $\vec{a}$ usmeren je u smeru pozitivne ose Ox , kada je $a > 0$, i u negativnom smeru ose Ox , kada je $a < 0$. Dimenzija ubrzanja je dužina/(vreme)², npr., m/s².

Ako pri kretanju tačke intenzitet njene brzine raste, onda se kretanje zove *ubrzano*; nasuprot tome, ako intenzitet brzine opada kretanje se zove *usporeno*.

Očevidno, pravolinijsko kretanje tačke biće ubrzano, kada su vektor brzine i ubrzanja usmereni u istu stranu, tj. kada v i a imaju isti znak (sl. 136, a), i usporeno, kada vektori $\vec{v}$ i $\vec{a}$ imaju suprotan smer, tj. kada v i a imaju različiti znak (sl. 136, b).

Dobivene formule pokazuju da ako znamo zakon kretanja tačke, izražen jednačinom (1), onda možemo u svakom trenutku vremena odrediti ne samo položaj te tačke, već i osnovne karakteristike njenog kretanja — brzinu i ubrzanje.



Sl. 136

§ 60. Neki primeri pravolinijskog kretanja tačke

Duž date putanje, u specijalnom slučaju duž prave linije, tačka može da se kreće po raznim zakonima. Razmotrimo neke od tih zakona.

1) Ravnomerno (jednoliko) kretanje. Pravolinijsko kretanje tačke naziva se ravnomernim, ako je brzina tog kretanja konstantna ($v = \text{const}$). Zakon tog kretanja ima oblik*

$$x = x_0 + vt, \quad (6)$$

gde je x_0 koordinata tačke u trenutku $t = 0$.

Lako je videti da put s , koji pređe tačka za vreme t , iznosi $x - x_0$. Prema tome, pri ravnomernom kretanju put koji prelazi tačka proporcionalan je vremenu, dok je brzina jednaka količniku iz puta i vremena

$$s = vt; \quad v = \frac{s}{t}. \quad (7)$$

Pošto je brzina v konstantna, to je ubrzanje pri ovom kretanju jednako nuli ($a = 0$).

2) Ravnomerno (jednoliko) promenljivo kretanje. Pravolinijsko kretanje naziva se ravnomerno promenljivim, ako je ubrzanje tog kretanja konstantno ($a = \text{const}$). Zakon ovakvog kretanja ima oblik

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2, \quad (8)$$

gde je v_0 — početna brzina tačke (tj. brzina u trenutku $t = 0$).

Diferencirajući jednačinu (8) po vremenu nalazimo da je brzina pri ravnomerno promenljivom kretanju u bilo kom trenutku vremena određena izrazom

$$v = v_0 + at. \quad (9)$$

* Jednačine (6) i (8) možemo dobiti takođe na isti način kako je učinjeno za slučaj krivolinijskog kretanja u § 70.

Prema tome, brzina pri ovom kretanju raste proporcionalno sa vremenom (tj. ravnomerno), dok put (ako je $x_0 = v_0 = 0$) raste sa kvadratom vremena.

Ako veličine v i a imaju pri kretanju iste znake, kretanje će biti *jednako ubrzano*; ako pak te veličine imaju različite znake kretanje će biti *jednako usporeno*.

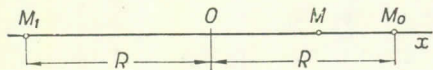
Kao primer za ravnomerno promenljivo kretanje može da posluži, npr., kretanje tereta koji je bačen vertikalno naviše ili pak naniže (ako se otpor vazduha zanemari).

3) Harmonijsko kretanje. Razmotrimo pravolinijsko kretanje tačke, čije se rastojanje x od koordinatnog početka O , tokom vremena menja po zakonu

$$x = R \cos \omega t, \quad (10)$$

gde su R i ω — konstantne veličine.

Tačka M (sl. 137) vrši pri tome oscilatorno kretanje između položaja $M_0 (+R)$ i $M_1 (-R)$. Oscilovanje koje se vrši po zakonu (10) igra vrlo važnu ulogu u tehnici.



Sl. 137

Ono se zove *prosto harmonijsko oscilovanje*. Veličina R , koja je jednaka najvećem udaljenju tačke od centra oscilovanja O , zove se *amplituda oscilovanja*.

Lako je videti da tačka počinjući kretanje u trenutku $t = 0$ iz položaja M_0 , ponovo dolazi u taj položaj u tre-

nutku t_1 , za koji je $\cos \omega t_1 = 1$, tj. $\omega t_1 = 2\pi$.

Vremenski interval $T = t_1 = 2\pi/\omega$, u kome tačka izvrši jednu punu oscilaciju, zove se *period oscilovanja (oscilacije)*.

Ako nađemo izvode od x po t odredićemo brojčane vrednosti brzine i ubrzanja pri ovom kretanju u obliku

$$v = -R\omega \sin \omega t, \quad a = -R\omega^2 \cos \omega t.$$

Prema tome, pri ovom kretanju i brzina i ubrzanje tačke, tokom vremena, menjaju se po harmonijskom zakonu. Kada se tačka nalazi u centru oscilovanja ($x = 0$ i $\cos \omega t = 0$), onda je njeno ubrzanje $a = 0$, dok intenzitet brzine ima najveću veličinu $v_{\max} = R\omega$ (pri $\cos \omega t = 0$ veličina $\sin \omega t = \pm 1$); u položajima M_0 i M_1 u kojima je $x = \pm R$ i $\cos \omega t = \pm 1$, brzina tačke jednaka je nuli, dok intenzitet ubrzanja ima najveću veličinu $a_{\max} = R\omega^2$.

Po znacima za a i v lako je videti da je kretanje ubrzano kad se tačka kreće ka centru oscilovanja, i da je usporeno kad se kreće od centra oscilovanja.

Analogne oscilacije tačka vrši i pri zakonu $x = R \sin \omega t$, samo što u tom slučaju kretanje tačke počinje iz tačke (centra) O .

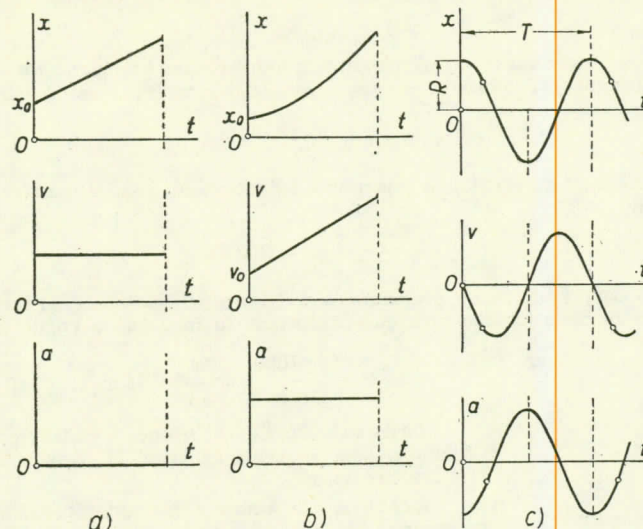
§ 61. Dijagrami kretanja, brzine i ubrzanja tačke

Ako u odgovarajućoj razmeri duž apscisne ose nanosimo vreme t , a duž ordinatne ose rastojanje x , onda kriva $x = f(t)$ u datom koordinatnom sistemu predstavlja *dijagram rastojanja* ili *dijagram kretanja* (jednačinu kretanja) date tačke. Prema tom dijagramu lako je videti kako se menja položaj tačke (tj. njena koordinata x) tokom vremena.

Analogno, u odgovarajućoj razmeri mogu biti konstruisane i krive koje daju zavisnost $v(t)$ — *dijagram brzine* i $a(t)$ — *dijagram ubrzanja*.

Na sl. 138, a , b , c , dati su dijagrami koji odgovaraju kretanjima definisanim jednačinama (6), (8) i (10). Ispod tih dijagrama dati su dijagrami brzine i dijagrami ubrzanja za ista kretanja.

Dijagram ravnomernog (jednolikog) kretanja (sl. 138, a) prikazan je pravom linijom koja zaklapa izvestan ugao prema apscisnoj osi; dijagram brzine prikazan je pravom paralelnom apscisnoj osi ($v = \text{const.}$), a dijagram ubrzanja pravom koja se poklapa s apscisnom osom ($a = 0$). Za ravnomerno (jednoliko) promenljivo kretanje (prikazano na sl. 138, b — slučaj ubrzanog kretanja) dijagram kretanja



Sl. 138

predstavlja parabolu, dijagram brzine — pravu, pod izvesnim uglom prema apscisnoj osi, a dijagram ubrzanja — pravu, paralelnu apscisnoj osi ($a = \text{const.}$). Najzad, za harmonijsko oscilovanje (sl. 138, c), odgovarajući dijagrami prikazani su kosinusoidama i sinusoidama.

Ovde treba istaći da dijagram kretanja treba razlikovati od putanje koja je u svim navedenim slučajevimabila prava linija.

§ 62. Rešavanje zadataka

Zadaci, koji se rešavaju metodom kinematike tačke, sastoje se u određivanju brzine i ubrzanja (a pri krivolinijskom kretanju i putanje) tačke, kao i vremenskih intervala u kojima tačka prelazi ovaj put, odnosno u iznalaženju dužine puta za izvestan interval vremena, i tome slično.

Pre nego što se počne sa rešavanjem nekog zadatka ove vrste treba, pre svega, da se ustanovi po kakvom se zakonu kreće tačka. Pri tome može da nastupi jedan od sledeća dva slučaja:

1) Zakon kretanja tačke je dat neposredno u uslovima zadatka ili jednačinom kretanja, ili pak karakteristikama koje bliže određuju dato kretanje (»tačka se kreće ravnomerno«, »tačka se kreće ravnomerno usporeno«, i slično). U ovom slučaju rešavanje zadataka se svodi na korišćenje navedenih formula.

2) Zakon kretanja tačke nije dat, ali pri tome njeno kretanje zavisi na određeni način od kretanja neke druge tačke (ili pak drugog tela). U tom slučaju rešavanje zadataka treba započeti iznalaženjem jednačine kretanja koja određuje kretanje posmatrane tačke.

Zadatak 51. Voz, koji se kretao brzinom $v_0 = 54 \text{ km/h}$, zaustavio se u toku vremena $t_1 = 2 \text{ min}$ posle početka kočenja. Smatrajući da se voz za vreme kočenja kretao ravnomerno usporeno odrediti pređeni put za vreme kočenja.

Rešenje. Prema uslovima zadatka kretanje voza smatra se ravnomerno usporenim. Prema tome, zakon kretanja biće određen jednačinom (8)

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2, \quad (a)$$

gde se x meri od onog mesta, odakle je voz počeo da se koči (prema tome $x_0 = 0$); brzina kretanja jednaka je

$$v = v_0 + at. \quad (b)$$

Kako se voz u trenutku $t = t_1$ ukočio, to je u tom trenutku brzina $v_1 = 0$. Ako ovu vrednost smenimo u jednačinu (b), dobićemo $0 = v_0 + at_1$, odakle možemo odrediti ubrzanje kretanja:

$$a = -\frac{v_0}{t_1}.$$

Ako ovu vrednost za ubrzanje a smenimo u jednačinu (a), i ako u nju stavimo $t = t_1$, dobićemo traženi put

$$x_1 = \frac{1}{2} v_0 t_1 = 900 \text{ m}.$$

Primitimo da pri brojčanim proračunima treba sve veličine *obavezno* izraziti u jednim te istim jedinicama merenja (obično rastojanja izražavamo u metrima, a vreme u sekundama). U našem slučaju je

$$v_0 = \frac{54 \cdot 1000}{3600} = \frac{54}{3,6} = 15 \text{ m/s}; \quad t_1 = 120 \text{ s}.$$

Zadatak 52. Čovek visine h udaljuje se brzinom v_1 od lampe, koja se nalazi na visini H . Kojom brzinom se kreće kraj čovečije senke?

Rešenje. Da bismo rešili zadatak nađimo najpre zakon po kome se kreće čovečija senka. Uzmimo za koordinatni početak tačku O , koja se nalazi na istoj vertikali gde i lampica, i usmerimo udesno koordinatnu osu Ox (sl. 139). Neka se čovek nalazi u proizvoljnom položaju na rastojanju x_1 od tačke O . U tom slučaju kraj njegove senke biće udaljen od tačke O za x_2 .

Iz sličnosti trouglova OAM i DAB nalazimo:

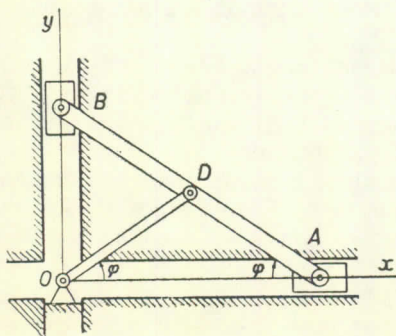
$$x_2 = \frac{H}{H-h} x_1.$$

Ova jednačina izražava zakon kretanja kraja M senke, ako je poznat zakon kretanja čoveka, tj. $x_1 = f(t)$.

Ako odredimo izvod po vremenu od obe strane ove jednačine i uzmemo u obzir da je $\frac{dx_1}{dt} = v_1$, a $\frac{dx_2}{dt} = v_2$, gde je v_2 tražena brzina, dobićemo:

$$v_2 = \frac{H}{H-h} v_1.$$

Ako se čovek kreće konstantnom brzinom ($v_1 = \text{const}$), onda će i brzina v_2 biti takođe konstantna, ali u odnosu $\frac{H}{H-h}$ veća od brzine čoveka.



Sl. 140

Obratimo pažnju na to da jednačine kretanja treba postavljati za telo (ili mehanizam, vidi zadatak 53) koje se nalazi u proizvoljnom položaju. Samo u tom slučaju dobićemo jednačine koje određuju položaj pokretne tačke (ili tela) u proizvoljnom trenutku vremena.

Zadatak 53. Klizači A i B mehanizma prikazanog na sl. 140, koji su spojeni polugom AB dužine $l = 30 \text{ cm}$, kreću se pri obrtanju krivajae OD , po međusobno upravnim pravama. Krivaja OD dužine $\frac{1}{2} l$

vezana je zglobovom za sredinu poluge AB . Odrediti zakone kretanja klizača A i B ako se krivaja obrće tako da se ugao φ povećava proporcionalno vremenu (takvo obrtanje naziva se jednoliko — ravnomerno), čineći dva obrtaja u minutu. Čemu su jednake brzine i ubrzanja klizača u trenutku kada je ugao $\varphi = 30^\circ$?

Rešenje. Zakon kretanja tačaka A i B možemo naći ako znamo kretanje krivaje OD . Prema uslovima zadatka $\varphi = \omega t$, gde je ω konstantni koeficijent. Poznato je da je u trenutku $t = 60$ s ugao $\varphi = 4\pi$ (dva obrtaja); prema tome, $4\pi = 60\omega$, odakle je $\omega = \pi/15$ s⁻¹.

Povucimo sada koordinatne ose Ox i Oy i odredimo zakone kretanja klizača. Kako je $\overline{OD} = \overline{AD}$, to je $\sphericalangle OAB = \varphi$. Tada je $x_A = l \cos \varphi$, $y_B = l \sin \varphi$, odnosno

$$x_A = l \cos \omega t, \quad y_B = l \sin \omega t. \quad (a)$$

Dobijene jednačine određuju zakone kretanja svakog od klizača. Kao što vidimo klizači vrše harmonijske oscilacije. Ako diferenciramo izraze za x_A i y_B po vremenu, odredićemo brzine i ubrzanje klizača:

$$\begin{aligned} v_A = \dot{x}_A &= -l\omega \sin \omega t; & a_A = \ddot{x}_A &= -l\omega^2 \cos \omega t; \\ v_B = \dot{y}_B &= l\omega \cos \omega t; & a_B = \ddot{y}_B &= -l\omega^2 \sin \omega t. \end{aligned}$$

Kada je ugao $\varphi = 30^\circ$, veličina $\omega t = \pi/6$. U tom trenutku vremena biće

$$\begin{aligned} v_A = \dot{x}_A &= -\frac{1}{2}l\omega = -3,14 \text{ cm/s}; & a_A = \ddot{x}_A &= -\frac{1}{2}l\omega^2 \sqrt{3} = -1,14 \text{ cm/s}^2; \\ v_B = \dot{y}_B &= \frac{1}{2}l\omega \sqrt{3} = 5,44 \text{ cm/s}; & a_B = \ddot{y}_B &= -\frac{1}{2}l\omega^2 = -0,66 \text{ cm/s}^2. \end{aligned}$$

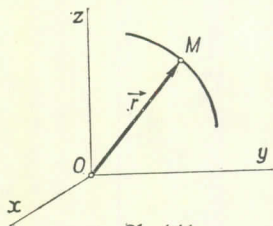
Znaci pokazuju smerove vektora brzine i ubrzanja. Klizač A iz razmatranog položaja kreće se ubrzano, a klizač B — usporeno.

Glava X

KRIVOLINIJSKO KRETANJE TAČKE

§ 63. Vektorski način definisanja kretanja tačke

Da bismo definisali kretanje tačke potrebno je da se odredi njen položaj prema utvrđenom koordinatnom sistemu referencije u svakom trenutku vremena. Za definisanje krivolinijskog kretanja tačke može se primeniti jedna od sledeće tri metode: 1) *vektorska*, 2) *analitička (koordinatna)* i 3) *prirodna*.



Sl. 141

Počnimo sa razmatranjem *vektorskog načina* definisanja kretanja tačke. Neka se tačka M kreće u odnosu na neki koordinatni sistem referencije $Oxyz$. Položaj te tačke u bilo kom trenutku vremena može se odrediti ako se dâ vektor $\vec{r}$ koji spaja koordinatni početak O sa tačkom M (sl. 141). Vektor $\vec{r}$ zove se *vektor položaja* tačke M .

Pri kretanju tačke M menja se vektor $\vec{r}$ i po pravcu i po intenzitetu. Prema tome, $\vec{r}$ je promenljivi vektor (vektor-funkcija) koji zavisi od vremena t :

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (11)$$

Jednačina (11) određuje zakon krivolinijskog kretanja tačke u vektorskom obliku, jer ona omogućuje da se u svakom trenutku vremena t konstruiše odgovarajući vektor $\vec{r}$ i da se na taj način odredi položaj pokretne tačke.*

Geometrijsko mesto krajeva vektora $\vec{r}$ određuje putanju pokretne tačke.

* Vektor $\vec{r}$ može biti određen svojim intenzitetom i uglovima sa koordinatnim osama ili pak projekcijama na te ose. Na taj način jednačina (11) simbolički zamenjuje sistem jednačina, koje daju zavisnosti za r , α , β i γ od vremena t , ili pak zavisnosti za $r_x = x$, $r_y = y$ i $r_z = z$ od vremena t .

§ 64. Vektor brzine tačke

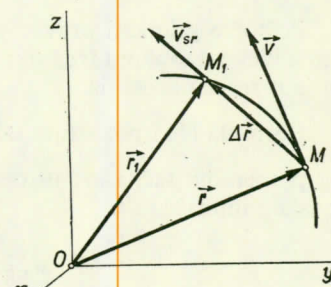
Neka se pokretna tačka nalazi u trenutku t u položaju M , koji je određen vektorom položaja $\vec{r}$, a u trenutku t_1 u položaju M_1 , koji je određen vektorom položaja $\vec{r}_1$ (sl. 142). Tada je pomeranje tačke za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ određeno vektorom $\overrightarrow{MM_1}$, koji ćemo nazvati *vektor pomeranja tačke*.

Iz trougla OMM_1 proizlazi da je $\vec{r} + \overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1$, pa je, prema tome:

$$\overrightarrow{MM_1} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \Delta \vec{r}.$$

Odnos vektora pomeranja tačke prema odgovarajućem vremenskom intervalu određuje po intenzitetu, pravcu i smeru vektor srednje brzine tačke za odgovarajući vremenski interval:

$$\vec{v}_{sr} = \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (12)$$



Sl. 142

Intenzitet srednje brzine, određene formulom (12), jednak je

$$v_{sr} = \frac{MM_1}{\Delta t} \quad (12')$$

Pravac vektora $\vec{v}_{sr}$ je isti kao pravac vektora $\overrightarrow{MM_1}$, tj. duž sečice MM_1 , a u smeru kretanja tačke (deljenjem sa Δt pravac vektora $\vec{v}_{sr}$ se ne menja, dok se menja samo intenzitet u poređenju sa intenzitetom vektora $\overrightarrow{MM_1}$).

Brzinom tačke M u datom trenutku vremena t naziva se vektorska veličina $\vec{v}$ kojoj teži srednja brzina $\vec{v}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} (\vec{v}_{sr}) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}.$$

Granična vrednost odnosa $\Delta \vec{r} / \Delta t$ kada $\Delta t \rightarrow 0$ predstavlja prvi izvod vektora $\vec{r}$ po argumentu t i označava se, kao i izvod skalarne funkcije, simbolom*

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}.$$

* Uopšte, za bilo koji promenljivi vektor $\vec{u}$, koji zavisi od vremena t , biće

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{u}}{\Delta t} = \frac{d\vec{u}}{dt}.$$

Na taj način konačno dobijamo

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}. \quad (13)$$

Prema tome, vektor brzine tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Pošto se granični pravac sečice MM_1 poklapa sa pravcem tangente, to vektor brzine tačke u svakom trenutku vremena pada u pravac tangente na putanju i usmeren je u smeru kretanja.

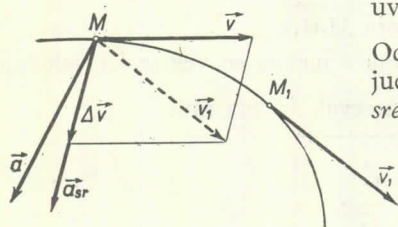
Formula (13) pokazuje, takođe, da je vektor brzine jednak odnosu elementarnog pomeranja tačke $d\vec{r}$, usmerenog po tangenti na putanju, i odgovarajućeg vremenskog intervala dt .

§ 65. Vektor ubrzanja tačke

Ubrzanje pri krivolinijskom kretanju karakteriše promenu intenziteta i pravca vektora brzine u toku vremena.

Neka se u nekom trenutku vremena t pokretna tačka nalazi u položaju M i neka je njena brzina $\vec{v}$, a u trenutku t_1 , u položaju M_1 , i neka je tada njena brzina $\vec{v}_1$ (sl. 143). Tada će za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ brzina tačke dobiti priraštaj $\Delta\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$. Da bismo konstruisali vektor $\Delta\vec{v}$ nanesimo od tačke M vektor $\vec{v}_1$ i konstruišimo paralelogram kod koga će dijagonala biti $\vec{v}_1$, a jedna strana $\vec{v}$. Tada će očividno druga strana predstavljati vektor $\Delta\vec{v}$. Primetimo da je vektor $\Delta\vec{v}$ usmeren uvek u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje.

Odnos priraštaja vektora brzine $\Delta\vec{v}$ i odgovarajućeg vremenskog intervala Δt određuje vektor srednjeg ubrzanja tačke za dati vremenski interval:



Sl. 143

$$\vec{a}_{sr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

Vektor srednjeg ubrzanja očividno ima isti pravac kao i vektor $\Delta\vec{v}$ i usmeren je u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje.

Ubrzanjem tačke u datom trenutku vremena t naziva se vektorska veličina $\vec{a}$ kojoj teži vektor srednjeg ubrzanja $\vec{a}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt},$$

ili, imajući u vidu jednačinu (13),

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}. \quad (14)$$

Prema tome, vektor ubrzanja tačke u datom trenutku vremena jednak je prvom izvodu vektora brzine ili drugom izvodu vektora položaja tačke po vremenu.

Iz formule (14) proizlazi takođe da je vektor ubrzanja $\vec{a}$ tačke jednak odnosu elementarnog priraštaja vektora brzine $d\vec{v}$ i odgovarajućeg vremenskog intervala dt .

Odredimo kakav položaj zauzima vektor $\vec{a}$ u odnosu na putanju tačke. Ako je putanja tačke ravna kriva (kriva koja stalno leži u istoj ravni), onda vektor ubrzanja $\vec{a}$, a takođe i vektor srednjeg ubrzanja $\vec{a}_{sr}$, leži u ravni krive i usmeren je u konkavnu stranu te krive.

Ako je pak putanja prostorna kriva, dakle ako ona ne leži u istoj ravni, onda će vektor $\vec{a}_{sr}$ biti usmeren u konkavnu stranu putanje i ležati u ravni, koja prolazi kroz tangentu u tački M i pravu, koja je paralelna tangenti u susednoj tački M_1 (vidi sl. 143). U graničnom slučaju kada tačka M_1 teži tački M ta ravan će zauzeti položaj tzv. oskulatorne ravni*.

Prema tome, u opštem slučaju vektor ubrzanja $\vec{a}$ leži u oskulatornoj ravni i usmeren je u konkavnu stranu putanje.

Dobivene formule (13) i (14) u § 64 i § 65 određuju opšte vektorske izraze za osnovne kinematičke veličine, koje karakterišu kretanje tačke i one predstavljaju osnovne (polazne) formule za dobijanje svih ostalih formula i izraza u kinematici tačke.

§ 66. Teorema o projekcijama izvoda vektora

U vektorskim jednačinama koje sadrže u sebi izvode prelaz od zavisnosti između vektora na zavisnost između njihovih projekcija može se izvesti korišćenjem sledeće teoreme: projekcija izvoda vektora na bilo koju nepomičnu osu jednaka je izvodu projekcije vektora na istu osu.

Neka je, npr., vektor $\vec{p}$ promenljiv i neka zavisi od argumenta t . Izvod od $\vec{p}$ po t određuje neki drugi vektor $\vec{q}$. Po definiciji je

$$\vec{q} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{p}_1 - \vec{p}}{\Delta t},$$

* Oskulatorna ravan u tački M krive može takođe da se definiše i kao granični položaj ravni, koja prolazi kroz tačke M , M_1 i M_2 te krive, kada tačke M_1 i M_2 teže tački M . Od svih ravni koje prolaze kroz tačku M oskulatorna ravan ima sa krivom dodir najvišeg reda (»intimnije«, »tešnje«, »bliže« nego bilo koja druga ravan se priljubljuje uz krivu). Kod prostornih krivih (npr., kod zavojnice) u svakoj tački krive imaćemo drugu oskulatornu ravan. Kod krivih u ravni oskulatorna ravan se poklapa sa ravni same krive i postoji samo jedna jedina takva ravan za sve tačke na krivoj liniji.

gde su $\vec{p}$ i $\vec{p}_1$ vrednosti vektora, koji se diferencira, u trenucima t i t_1 . Odavde, korišćenjem teoreme o projekciji zbira (ili razlike) vektora na osu, dobijamo:

$$q_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{p_{1x} - p_x}{\Delta t},$$

gde su: p_x i q_x — projekcije vektora $\vec{p}$ i $\vec{q}$ na osu Ox . Kako je $p_{1x} - p_x = \Delta p_x$, proizlazi da će biti

$$q_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{dp_x}{dt}.$$

Na taj način dokazali smo teoremu o kojoj je reč, jer smo pokazali da

$$\text{ako je } \vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dt} \text{ onda je i } q_x = \frac{dp_x}{dt}. \quad (15)$$

Primitimo da za intenzitet vektora ne važi zavisnost oblika (15), tj. ako je

$$\vec{q} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$

onda u opštem slučaju

$$|q| \neq \frac{d|p|}{dt}.$$

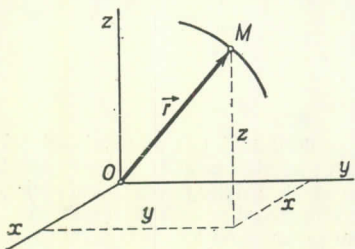
Tako, na primer, dokazali smo da je $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ i $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, ali u opštem slučaju $|v| \neq \frac{d|r|}{dt}$ i $|a| \neq \frac{d|v|}{dt}$.

Naime, ako se, na primer, tačka kreće po krugu čiji se centar nalazi u koordinatnom početku, onda je brzina $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ (r se u toku vremena menja samo po pravcu), jer je po intenzitetu $|r| = \text{const}$, i prema tome $\frac{d|r|}{dt} = 0$; odavde je jasno da $|v| \neq \frac{d|r|}{dt}$. Pri tome i $a \neq \frac{d|v|}{dt}$, kao što će biti pokazano u § 69.

Problem o tome kako se određuju intenziteti brzine i ubrzanja tačaka razmatra se u sledećem paragrafu.

§ 67. Analitički (koordinatni) način definisanja kretanja tačke. Određivanje putanje, brzine i ubrzanja tačke

Položaj tačke u odnosu na dati koordinatni sistem referencije $Oxyz$ može se odrediti dekartovim pravouglim koordinatama x, y, z (sl. 144). Pri kretanju tačke sve ove tri koordinate se menjaju tokom vremena.



Sl. 144

Da bismo poznavali zakon kretanja tačke, tj. da bismo bili u stanju da u svakom trenutku vremena odredimo položaj tačke u prostoru, potrebno je da znamo njene koordinate u svakom trenutku vremena, tj. drugim rečima treba da su poznate zavisnosti

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t). \quad (16)$$

Jednačine (16) predstavljaju *jednačine kretanja tačke (konačne jednačine kretanja) u dekartovim pravouglim koordinatama*. One određuju zakon krivolinijskog kretanja tačke pri analitičkom (koordinatnom) načinu definisanja kretanja*.

Ako se kretanje tačke vrši u jednoj ravni za sve vreme kretanja, onda se ta ravan može uzeti za ravan Oxy i kretanje tačke biće određeno sa samo dve jednačine kretanja:

$$\boxed{x = f_1(t), \quad y = f_2(t).} \quad (17)$$

Pokažimo kako se pri analitičkom načinu definisanja kretanja tačke određuju osnovne kinematičke karakteristike kretanja — brzina, ubrzanje i putanja.

1) Određivanje putanje tačke. Ako u jednačinama (16) i (17) vreme t smatramo za parametar, onda će jednačine (16) i (17) u isto vreme biti i parametarske jednačine putanje. Da bismo odredili jednačine putanje tačke u običnom obliku, tj. kao zavisnost samo između koordinata tačke M , potrebno je da se iz jednačina kretanja eliminiše parametar t^{**} .

2) Određivanje brzine tačke. Vektor brzine tačke određen je sa: $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Odatle na osnovu jednačina (15) dobijamo

$$v_x = \frac{dr_x}{dt}, \quad v_y = \frac{dr_y}{dt}, \quad v_z = \frac{dr_z}{dt}.$$

Međutim, sa crteža (sl. 144) se vidi da su projekcije vektora položaja $\vec{r}$ na koordinatne ose jednake koordinatama posmatrane tačke, tj. $r_x = x$, $r_y = y$ i $r_z = z$. Prema tome, izlazi da je:

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z},} \quad (18)$$

tj. *projekcije brzine na koordinatne ose jednake su prvim izvodima odgovarajućih koordinata tačke po vremenu*.

Kada znamo projekcije brzine možemo lako odrediti intenzitet brzine, a takođe i njen pravac (tj., uglove α , β , γ , koje vektor $\vec{v}$ zaklapa sa koordinatnim osama) po sledećim obrascima:

$$\boxed{v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2};}$$

$$\boxed{\cos \alpha = \frac{v_x}{v}, \quad \cos \beta = \frac{v_y}{v}, \quad \cos \gamma = \frac{v_z}{v}}$$

(19)

* Kretanje tačke može se definisati i u drugim koordinatnim sistemima, npr., cilindričnom, sfernom, i slično. Pri tome formule za određivanje brzine i ubrzanja biće različite od formula (18) do (21). Pogledaj te formule malo kasnije u § 71.

** Primedba prevodioca. Eliminisanjem vremena t iz parametarskih jednačina putanje (17) dobija se zavisnost u obliku $F(x, y) = 0$, koja predstavlja tzv. *liniju putanje*. Postoji razlika između jednačina putanje u parametarskom obliku i linije putanje. Jednačine (17) određuju putanju u pravom smislu, jer daju niz uzastopnih položaja pokretne tačke. Međutim, linija putanje može da sadrži i tačke do kojih nikad ne dospe pokretna tačka. Na primer, pri pravolinijskom oscilatornom kretanju putanja tačke je odsečak prave između $+R$ i $-R$, dok je *linija putanje* cela osa x .

3) Određivanje ubrzanja tačke. Vektor ubrzanja tačke je $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Na osnovu teoreme o projekciji izvoda vektora i formula (18) dobijamo:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \ddot{z}, \quad (20)$$

tj. projekcije ubrzanja na koordinatne ose jednake su prvim izvodima po vremenu projekcija brzina, ili pak drugim izvodima odgovarajućih koordinata tačke. Intenzitet i pravac vektora ubrzanja mogu se odrediti po sledećim obrascima:

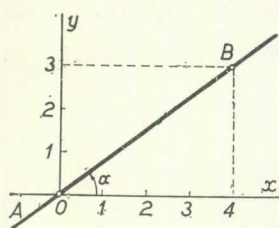
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2};$$

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a}, \quad \cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a}, \quad (21)$$

gde su: $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ — uglovi koje zaklapa vektor ubrzanja sa koordinatnim osama.

Prema tome, ako je kretanje tačke definisano u dekartovom pravouglom sistemu jednačinama (16) ili (17), onda se brzina tačke određuje po obrascima (18) i (19), a ubrzanje tačke po obrascima (20) i (21). Kada se kretanje tačke vrši u ravni u svim ovim obrascima otpadaju treće projekcije, koje se odnose na osu z .

Rešavanje zadataka. Pri rešavanju zadataka, kao i u slučaju pravolinijskog kretanja, za određivanje bilo koje od kinematičkih veličina potrebno je znati (konačne) jednačine kretanja. Ukoliko ove jednačine nisu date, onda rešavanje zadatka treba započeti nalaženjem ovih jednačina kretanja.



Sl. 145

Zadatak 54. Kretanje tačke određeno je jednačinama (x, y — u metrima, t — u sekundama):

$$x = 8t - 4t^2, \quad y = 6t - 3t^2.$$

Određiti putanju, brzinu i ubrzanje tačke.

Rešenje. Da bismo odredili putanju potrebno je da eliminišemo vreme t iz ovih jednačina. Ako pomnožimo obe strane prve jednačine sa 3, a druge sa 4, i ako oduzmemo drugu jednačinu od prve, dobićemo: $3x - 4y = 0$, ili

$$y = \frac{3}{4}x.$$

Prema tome, putanja je prava linija, koja sa osom Ox zaklapa ugao α , pri čemu je $\operatorname{tg} \alpha = 3/4$ (slika 145).

Određimo brzinu tačke. Po formulama (18) i (19) dobijamo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 8(1-t), \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = 6(1-t);$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 10(1-t).$$

Odredimo sada ubrzanje tačke. Formule (20) i (21) daju:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -8; \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2} = \ddot{y} = -6; \quad a = 10 \text{ m/s}^2.$$

Vektori v i a očividno su usmereni niz putanju, tj. niz pravu AB . Kako je $a = \text{const}$, to će kretanje biti ravnomerno promenljivo. Projekcije ubrzanja na koordinatne ose za sve vreme kretanja su negativne, pa, prema tome, ubrzanje ima konstantan smer od B ka A . Projekcije brzine su u vremenskom intervalu $0 < t < 1$ pozitivne, pa je, prema tome, u tom vremenskom intervalu brzina usmerena od O ka B . Pri tome je u trenutku $t = 0$ $v = 10 \text{ m/s}$, a u trenutku $t = 1 \text{ s}$ $v = 0$. Pri daljem kretanju, kada je $t > 1 \text{ s}$, obe projekcije brzine su negativne, pa je, prema tome, brzina usmerena od B ka A , tj. isto onako, kao i ubrzanje.

Primetimo, na kraju, da je u trenutku $t = 0$ $x = 0$ i $y = 0$; u trenutku $t = 1 \text{ s}$ $x = 4$, $y = 3$ (tačka B); u trenutku $t = 2 \text{ s}$ $x = 0$, $y = 0$; za $t > 2 \text{ s}$ veličine x i y se povećavaju po apsolutnoj vrednosti ostajući za sve vreme kretanja negativne.

Prema tome, jednačine date u uslovima zadatka pokazuju čitavu »istoriju« kretanja tačke. Kretanje počinje iz tačke O početnom brzinom $v_0 = 10 \text{ m/s}$ i vrši se duž prave AB , koja zaklapa sa osom Ox ugao α , pri čemu je $\text{tg } \alpha = 3/4$. Na delu puta OB tačka se kreće jednoliko usporeno i za jednu sekundu stigne u položaj $B(4,3)$, u kom položaju je brzina tačke jednaka nuli. Od ovog trenutka tačka se kreće ravnomerno ubrzano u suprotnu stranu. U trenutku $t = 2 \text{ s}$ tačka se ponovo nalazi u koordinatnom početku i nastavlja da se kreće duž prave OA . Njeno ubrzanje za sve vreme kretanja je jednako 10 m/s^2 .

Zadatak 55. Kretanje tačke određeno je jednačinama $x = R \sin \omega t$, $y = R \cos \omega t$, $z = ut$, gde su R , ω i u — konstantne veličine. Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje tačke.

Rešenje. Ako najpre prve dve jednačine dignemo na kvadrat i ako ih zatim saberemo, s obzirom da je $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$, dobićemo:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Prema tome, putanja leži na kružnom cilindru poluprečnika R , čija se osa poklapa sa osom Oz (sl. 146). Ako vreme t odredimo iz poslednje jednačine, i ako ga zamenimo u prvu, dobićemo:

$$x = R \sin \left(\frac{\omega}{u} z \right).$$

Na taj način, putanja će biti linija koja se nalazi u preseku cilindra poluprečnika R i sinusoidalne površine, čija je izvodnica paralelna osi Oy (sinusna zavojnica). Ova linija se zove *zavojnica*. Iz jednačina kretanja se vidi da jedan zavojak zavojnice tačka pređe za vreme t_1 , koje se određuje iz jednačine $\omega t_1 = 2\pi$. Tom

prilikom duž ose z tačka će se pomeriti za veličinu $h = ut_1 = \frac{2\pi u}{\omega}$,

koja se naziva *hodom* (korakom) zavojnice.

Odredimo brzinu i ubrzanje tačke. Ako diferenciramo jednačine kretanja po vremenu, dobićemo:

$$v_x = \dot{x} = R\omega \cos \omega t, \quad v_y = \dot{y} = -R\omega \sin \omega t, \quad v_z = \dot{z} = u,$$

odakle je

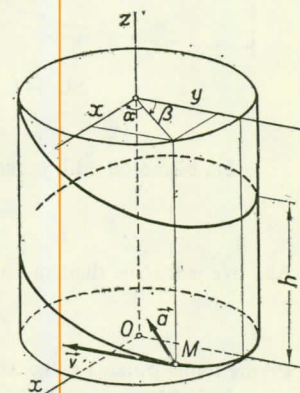
$$v = \sqrt{R^2\omega^2(\cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t) + u^2} = \sqrt{R^2\omega^2 + u^2}.$$

Veličine koje stoje pod kvadratnim korenom su konstantne. Prema tome, tačka se kreće brzinom konstantnog intenziteta, koja je usmerena po tangenti na putanju. Sada po formulama (20) izračunajmo projekcije ubrzanja:

$$a_x = \ddot{x} = -R\omega^2 \sin \omega t, \quad a_y = \ddot{y} = -R\omega^2 \cos \omega t, \quad a_z = \ddot{z} = 0,$$

odakle je:

$$a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = R\omega^2.$$



Sl. 146

Prema tome, kretanje se vrši sa ubrzanjem konstantnog intenziteta. Za određivanje pravca smeru ubrzanja iskoristićemo formule:

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a} = -\sin \omega t = -\frac{x}{R}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a} = -\cos \omega t = -\frac{y}{R},$$

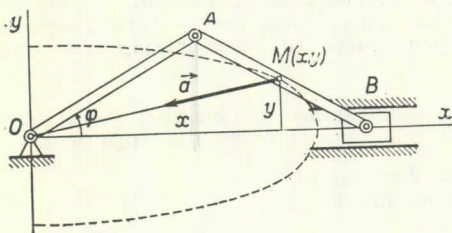
$$\cos \gamma_1 = \frac{a_z}{a} = \frac{\ddot{z}}{a} = 0.$$

Međutim, očividno je da je

$$\frac{x}{R} = \cos \alpha, \quad \frac{y}{R} = \cos \beta,$$

gde su α i β — uglovi koje sa osama Ox i Oy zaklapa poluprečnik R povučen iz ose cilindra ka pokretnoj tački. Kako se kosinusi uglova α_1 i β_1 razlikuju od kosinusa uglova α i β samo po znaku, to odavde zaključujemo da je ubrzanje tačke usmereno za sve vreme kretanja po poluprečniku cilindra ka njegovoj osi.

Primitimo da u datom primeru ubrzanje tačke nije jednako nuli, mada se ona kreće brzinom konstantnog intenziteta, jer se pravac brzine menja.



Sl. 147

Zadatak 56. Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje sredine M klipne poluge klipnog mehanizma (sl. 147), ako je $\overline{OA} = \overline{AB} = 2a$, i ako pri okretanju krivaje ugao φ u toku vremena raste proporcionalno vremenu: $\varphi = \omega t$.

Rešenje. Počnimo sa određivanjem jednačina kretanja tačke M . Povucimo koordinatne ose i označimo koordinate tačke M sa x i y . Tada dobijamo:

$$x = 2a \cos \varphi + a \cos \varphi, \quad y = a \sin \varphi.$$

Ako zamenimo ugao φ sa njegovom vrednošću dobićemo jednačine kretanja tačke M :

$$x = 3a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t.$$

Da bismo odredili putanju tačke M predstavimo jednačine kretanja u obliku

$$\frac{x}{3a} = \cos \omega t, \quad \frac{y}{a} = \sin \omega t.$$

Ako ove jednačine dignemo na kvadrat i ako ih zatim saberemo, dobićemo:

$$\frac{x^2}{9a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Prema tome, putanja tačke M je elipsa sa poluosama $3a$ i a .

Sada prema formulama (18) i (19) nadimo brzinu tačke M :

$$v_x = \dot{x} = -3a\omega \sin \omega t, \quad v_y = \dot{y} = a\omega \cos \omega t,$$

$$v = a\omega \sqrt{9 \sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t}$$

Brzina je promenljiva veličina koja se u toku vremena menja u granicama od $v_{\min} = a\omega$ do $v_{\max} = 3a\omega$.

Dalje po formulama (20) odredimo projekcije ubrzanja tačke B :

$$a_x = \ddot{x} = -3a\omega^2 \cos \omega t = -x\omega^2, \quad a_y = \ddot{y} = -a\omega^2 \sin \omega t = -y\omega^2,$$

odakle je:

$$a = \sqrt{\omega^4 (x^2 + y^2)} = r\omega^2,$$

gde je r — dužina vektora položaja povučenog iz tačke O ka tački M . Prema tome, veličina ubrzanja tačke menja se proporcionalno njenom rastojanju od središta elipse.

Za određivanje smeru ubrzanja $\vec{a}$ koristićemo se formulama (21):

$$\cos \alpha_1 = \frac{a_x}{a} = \frac{\ddot{x}}{a} = -\frac{x}{r}, \quad \cos \beta_1 = \frac{a_y}{a} = \frac{\ddot{y}}{a} = -\frac{y}{r}.$$

Prema tome, slično kao i u zadatku 55, nalazimo da je ubrzanje tačke M za sve vreme kretanja usmereno duž prave MO ka centru elipse.

§ 68. Prirodni način definisanja kretanja. Određivanje brzine tačke

Prirodni način definisanja kretanja tačke korisno je upotrebiti u onim slučajevima, kada je putanja tačke unapred poznata. Neka se tačka M kreće u odnosu na koordinatni sisem $O_1x_1y_1z_1$ duž neke putanje AB (sl. 148). Izaberimo na toj putanji neku nepomičnu tačku O , koju usvajamo kao koordinatni početak; zatim, posmatrajući putanju kao krivolinijsku koordinatnu osu, odredimo na njoj pozitivan i negativan smer, kao i kod »običnih« koordinatnih osa. U tom slučaju će položaj tačke M na putanji biti određen krivolinijskom koordinatom s , koja je jednaka rastojanju tačke O od tačke M , izmerenom duž putanje i uzetom sa odgovarajućim znakom. Pri kretanju tačke M menja se rastojanje s tokom vremena. Da bismo poznavali položaj tačke M u svakom trenutku na putanji potrebno je da znamo zavisnost

$$s = f(t).$$

(22)

Jednačina (22) izražava zakon kretanja (zakon puta) tačke M po putanji.

Na taj način, da bismo odredili kretanje tačke prirodnim putem, potrebno je da znamo: 1) putanju tačke, 2) početak koordinatnog sistema referencije na putanji sa utvrđenim pozitivnim i negativnim smerom računanja, 3) zakon kretanja tačke duž putanje (zakon puta) u obliku $s = f(t)$, gde rastojanje $s = \widehat{OM}$ određuje krivolinijsku koordinatu tačke.

Radi preglednosti može se funkcionalna zavisnost s do t prikazati i grafičkim putem, kao u slučaju pravolinijskog kretanja (§ 61). U tom slučaju se na ordinatnu osu umesto x nanosi rastojanje s .

Razmotrimo kako se pri prirodnom načinu posmatranja kretanja može odrediti brzina tačke. Ako za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ tačka pređe na putanji put od M do M_1 , onda se ona na putanji pomeri za $\Delta s = s_1 - s$ (sl. 149), pa će brojčana veličina njene srednje brzine biti:

$$v_{sr} = \frac{s_1 - s}{t_1 - t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

(23)

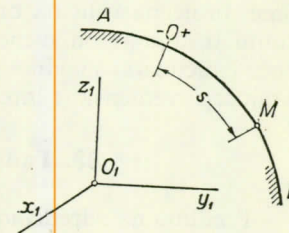
Kada pređemo na granični slučaj, brojčana vrednost brzine u trenutku t biće jednaka*

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}.$$

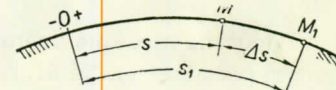
(24)

Prema tome, brojčana vrednost brzine tačke u datom trenutku jednaka je prvom izvodu predenog puta (krivolinijske koordinate) tačke po vremenu.

* Vrednosti za srednje brzine v_{sr} određene obrascima (23) i (12'), kao što vidimo, nisu iste (prvi obrazac određuje srednju brzinu pri kretanju po luku, a drugi pri najkraćem pomeranju od tačke M do tačke M_1). Međutim, pri prelazu na granični slučaj (kada $\Delta t \rightarrow 0$) obe formule daju jednu te istu vrednost za brzinu v u određenom trenutku t , jer je odnos luka Δs prema tetivi MM_1 u graničnom slučaju jednak jedinici. O pojmu »brojčane veličine« brzine vidi takođe fusnotu na strani 121.



Sl. 148

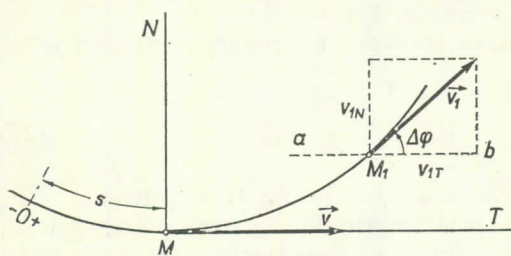


Sl. 149

Vektor brzine usmeren je po tangenti na putanju tačke koja je unapred poznata. Pri tome, kao i u slučaju pravolinijskog kretanja, ako je $v > 0$, onda je vektor brzine $\vec{v}$ usmeren u pozitivnom smeru puta (krivolinijska koordinata raste), a ako je $v < 0$, onda je usmeren u negativnom smeru puta (krivolinijska koordinata opada). Prema tome, brojčana veličina brzine određuje u isto vreme i intenzitet vektora brzine i stranu u koju je on usmeren. Jednačina (24) pokazuje isto tako da se veličina v može izračunati kao odnos elementarnog pomeranja ds tačke duž luka putanje i odgovarajućeg vremenskog intervala dt .

§ 69. Tangencijalno i normalno ubrzanje tačke

Predimo na određivanje ubrzanja tačke. Kako vektor ubrzanja tačke $\vec{a}$ leži uvek u oskulatornoj ravni (vidi § 65), za određivanje ovog ubrzanja dovoljno je da se



Sl. 150

odrede projekcije ovog vektora na bilo koje dve ose, koje leže u toj ravni. Neka jedna od osa bude usmerena po tangenti MT na putanju u pozitivnu stranu puta s (sl. 150), a drugu po normali MN u konkavnu stranu putanje. Normala MN koja leži u oskulatornoj ravni (u ravni same krive, ako kriva leži u ravni) naziva se *glavna normala*.

Povučene ose, koje imaju pravac tangente i glavne normale, seku se u koordinatnom početku — tački M , koja se kreće zajedno sa njima u prostoru.

Neka se u trenutku t tačka nalazi u položaju M i neka ima brzinu $\vec{v}$, a u trenutku $t_1 = t + \Delta t$ u položaju M_1 i neka ima brzinu $\vec{v}_1$. Tada je po definiciji

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{v}_1 - \vec{v}}{\Delta t}.$$

Predimo u ovoj jednačini od vektora (vidi sl. 150) na njihove projekcije na ose MT i MN povučene u tački M . Tada na osnovu teoreme o projekciji zbira (ili razlike) vektora na osu dobijamo:

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1T} - v_T}{\Delta t}, \quad a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_{1N} - v_N}{\Delta t}.$$

Povucimo kroz tačku M_1 pravu ab , paralelnu osi MT , i označimo ugao između pravca vektora $\vec{v}_1$ i tangente MT sa $\Delta\varphi$. Ovaj ugao između tangenti na krivu u tačkama M i M_1 zove se *kontingentni ugao*.

Napomenimo da granična vrednost odnosa kontingentnog ugla i luka $\widehat{MM_1} = \Delta s$ određuje krivinu K krive u tački M . Recipročna vrednost krivine je poluprečnik krivine R_k . Prema tome, imamo da je

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = K = \frac{1}{R_k}.$$

Vraćajući se na sliku (sl. 150) vidimo da su projekcije vektora $\vec{v}$ i $\vec{v}_1$ na ose MT i MN jednake:

$$\begin{aligned} v_T &= v, & v_N &= 0, \\ v_{1T} &= v_1 \cos \Delta\varphi, & v_{1N} &= v_1 \sin \Delta\varphi, \end{aligned}$$

gde su: v i v_1 — brojčane vrednosti brzina tačke u trenucima t i t_1 . Prema tome

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 \cos \Delta\varphi - v}{\Delta t}, \quad a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta t} \right).$$

Primitimo da kada $\Delta t \rightarrow 0$ onda se tačka M_1 približuje tački M i da tada jednovremeno $\Delta\varphi \rightarrow 0$, $\Delta s \rightarrow 0$, $v_1 \rightarrow v$.

Uzimajući u obzir da je $\lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} (\cos \Delta\varphi) = 1$, dobijamo za a_T sledeći izraz

$$a_T = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_1 - v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt}.$$

Dalje, ako pomnožimo sa $\Delta\varphi \Delta s$ i brojitelj i imenitelj razlomka koji se nalazi na desnoj strani izraza za a_N , nalazimo da je

$$a_N = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left(v_1 \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} \cdot \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta t} \right) = \frac{v^2}{R_k},$$

jer granična vrednost svakog od članova u zagradi kada $\Delta t \rightarrow 0$ iznosi

$$\lim v_1 = v, \quad \lim \frac{\sin \Delta\varphi}{\Delta\varphi} = 1, \quad \lim \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R_k}, \quad \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = v.$$

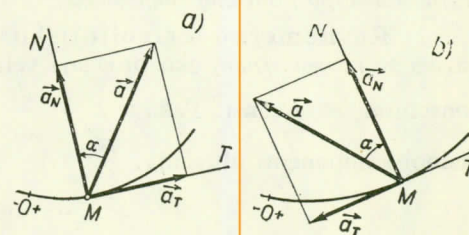
Prema tome, na kraju smo dobili

$$\boxed{a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}}, \quad \boxed{a_N = \frac{v^2}{R_k}}. \quad (25)$$

Na taj način smo dokazali da je projekcija ubrzanja tačke na tangentu jednaka prvom izvodu brojčane (algebarske) veličine brzine ili pak drugom izvodu rastojanja (krivolinijske koordinate) s po vremenu t , dok je projekcija ubrzanja na glavnu normalu jednaka količniku iz kvadrata brzine i poluprečnika krivine putanje u datoj tački krive. Ovaj rezultat izražava jednu od najvažnijih teorema u kinematici tačke.

Nanesimo duž tangente MT i duž glavne normale MN vektore $\vec{a}_T$ i $\vec{a}_N$, koji su brojčano jednaki a_T i a_N (sl. 151). Ovi vektori predstavljaju tangencijalnu i normalnu komponentu ubrzanja tačke.

Pri tome će komponenta $\vec{a}_N$ uvek biti usmerena u izdubljenu (konkavnu) stranu krive (veličina a_N je uvek pozitivna), dok komponenta $\vec{a}_T$ može biti usmerena



Sl. 151

kako u pozitivnom, tako i u negativnom smeru ose MT u zavisnosti od znaka projekcije a_T (vidi sl. 151, a i b).

Vektor ubrzanja $\vec{a}$ tačke predstavlja dijagonalu paralelograma konstruisanog nad komponentama $\vec{a}_T$ i $\vec{a}_N$. Kako su ove komponente međusobom normalne, to je intenzitet ubrzanja

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R_k}\right)^2}. \quad (26)$$

Odstupanje vektora $\vec{a}$ od normale MN karakteriše se uglom α , koji je određen izrazom

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_T|}{a_N}. \quad (27)$$

Na taj način, ako je kretanje tačke definisano prirodnim načinom, onda, znajući putanju (pa, prema tome, i njen poluprečnik krivine u bilo kojoj tački) i zakon kretanja (22), možemo, korišćenjem formula (24) i (25) do (27), odrediti intenzitet pravac vektora brzine i ubrzanja tačke u bilo kom trenutku vremena*.

§ 70. Neki posebni slučajevi kretanja tačke

Koristeći se dobijenim rezultatima, razmotrimo neke posebne slučajeve kretanja tačke.

1) Pravolinijsko kretanje tačke. Ako je putanja tačke prava linija, onda je poluprečnik krivine $R_k = \infty$. Tada je $a_N = \frac{v^2}{R_k} = 0$, pa je totalno ubrzanje tačke jednako tangencijalnoj komponenti ubrzanja:

$$a = a_{\text{tang}} = \frac{dv}{dt}.$$

Kako se u datom slučaju brzina menja samo broјčano (po intenzitetu, a ne i po pravcu), to možemo zaključiti da tangencijalno ubrzanje karakteriše promenu brzine tačke po broјčanoj (algebarskoj) veličini.

2) Ravnomerno krivolinijsko kretanje. Krivolinijsko kretanje tačke naziva se ravnomernim, ako broјčana veličina brzine za sve vreme kretanja ostaje konstantna: $v = \text{const}$. Tada je $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$, pa je totalno ubrzanje jednako normalnoj komponenti ubrzanja:

$$a = a_N = \frac{v^2}{R_k}.$$

Vektor ubrzanja $\vec{a}$ usmeren je u tom slučaju za sve vreme kretanja po glavnoj normalni na putanju.

* Iz formule (26) se vidi da je u opštem slučaju $a \neq \frac{dv}{dt}$, na što je bila skrenuta pažnja na kraju § 66.

Kako u datom slučaju ubrzanje služi samo za promenu pravca brzine možemo zaključiti da *normalno ubrzanje karakteriše promenu pravca brzine*.

Nađimo zakon ravnomernog krivolinijskog kretanja. Iz formula (24) imamo $\frac{ds}{dt} = v$ ili $ds = v dt$.

Neka se u početnom trenutku vremena ($t = 0$) tačka nalazila od koordinatnog početka na udaljenju s_0 . Tada integrirajući levu i desnu stranu prethodne jednačine u odgovarajućim granicama, dobijamo

$$\int_{s_0}^s ds = \int_0^t v dt \quad \text{ili} \quad s - s_0 = vt,$$

jer je $v = \text{const}$. Na taj način zakon ravnomernog krivolinijskog kretanja ima oblik

$$s = s_0 + vt. \quad (28)$$

3) Ravnomerno pravolinijsko kretanje. U ovom slučaju je: $a_N = a_T = 0$, a to znači i $a = 0$. Primećimo da je samo kod ravnomernog pravolinijskog kretanja totalno ubrzanje za sve vreme kretanja jednako nuli.

4) Ravnomerno promenljivo krivolinijsko kretanje. Krivolinijsko kretanje tačke naziva se *ravnomerno promenljivim*, ako je za sve vreme kretanja tangencijalno ubrzanje konstantno: $a_T = \text{const}$. Odredimo zakon ovog kretanja, smatrajući da je za $t = 0$, put $s = s_0$, a brzina $v = v_0$, gde je v_0 početna brzina tačke. Prema formuli (25) je $\frac{dv}{dt} = a_T$ ili $dv = a_T dt$.

Kako je $a_T = \text{const}$, to integriranjem i leve i desne strane poslednje jednačine u odgovarajućim granicama, dobijamo:

$$v = v_0 + a_T t. \quad (29)$$

Formulu (29) prikažimo u obliku

$$\frac{ds}{dt} = v_0 + a_T t \quad \text{ili} \quad ds = v_0 dt + a_T t dt.$$

Drugom integracijom nalazimo zakon ravnomerno promenljivog kretanja tačke u obliku:

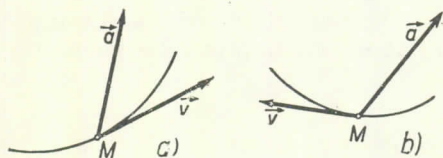
$$s = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a_T t^2. \quad (30)$$

Brzina ovog kretanja određena je formulom (29).

Formule (29) i (30) razlikuju se od odgovarajućih formula (9) i (8) za pravolinijsko kretanje po tome, što u njima umesto totalnog ubrzanja a stoji tangencijalno ubrzanje a_T i umesto pravolinijske koordinate x — stoji krivolinijska koordinata s .

Ako se pri krivolinijskom kretanju tačke intenzitet brzine povećava, onda se takvo kretanje naziva — *ubrzano*; nasuprot tome, ako se intenzitet brzine smanjuje onda se takvo kretanje naziva — *usporeno*. Kako promenu intenziteta brzine karak-

teriše tangencijalno ubrzanje, to odavde proizlazi da će kretanje biti ubrzano ako su veličine v i a_T istog znaka (u tom slučaju je ugao između vektora $\vec{v}$ i $\vec{a}$ oštar, vidi sl. 152, a), odnosno usporeno ako su veličine v i a_T različitog znaka (u tom slučaju je



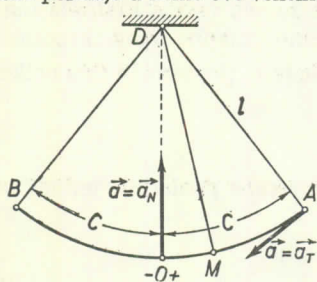
Sl. 152

ugao između vektora $\vec{v}$ i $\vec{a}$ tup, vidi sl. 152, b).

Rešavanje zadataka. Već je jednom bila skrenuta pažnja na to da je za rešavanje zadataka iz kinematike tačke potrebno poznavati zakon kretanja tačke. Ako je kretanje tačke definisano prirodnim načinom (tj. ako je unapred data putanja i zakon kretanja duž putanje), onda se sve kinematičke karakteristike kretanja

mogu dobiti po formulama datim u §§ 68 do 70. Ako je pak kretanje definisano analitičkim (koordinatnim) načinom, onda se sve karakteristike kretanja (podrazumevajući pri tome i tangencijalno i normalno ubrzanje, a takođe i poluprečnik krivine putanje) mogu odrediti kako je pokazano u zadatku 59.

Zadatak 57. Kada konac klatna odstupa od vertikale za male uglove teret klatna (sl. 153) kreće se po krugu poluprečnika l po zakonu $s = C \sin \omega t$ (koordinatni početak je u tački O , dok su C i ω — konstantne veličine). Odrediti brzinu, tangencijalno i normalno ubrzanje tereta i one položaje u kome ove veličine postaju nula.



Sl. 153

Rešenje. Korišćenjem odgovarajućih formula nalazimo:

$$v = \frac{ds}{dt} = C\omega \cos \omega t, \quad a_T = \frac{dv}{dt} = -C\omega^2 \sin \omega t,$$

$$a_N = \frac{v^2}{l} = \frac{C^2\omega^2}{l} \cos^2 \omega t.$$

Iz zakona kretanja proizlazi da teret vrši duž putanje harmonijsku oscilaciju sa lučnom amplitudom C . U krajnjim položajima A i B je $\sin \omega t = \pm 1$, pa je zato $\cos \omega t = 0$. Prema tome, u tačkama A i B brzina i normalno ubrzanje postaju nula; međutim, u ovim položajima tangencijalno ubrzanje ima najveću veličinu $(a_T)_{\max} = C\omega^2$.

Nasuprot tome, kada teret prolazi kroz koordinatni početak O , biće $s = 0$, pa je, prema tome, $\sin \omega t = 0$, a $\cos \omega t = 1$. U tom položaju je $a_T = 0$, a v i a_N imaju maksimalne vrednosti:

$$v_{\max} = C\omega, \quad (a_N)_{\max} = \frac{C^2\omega^2}{l}.$$

Iz datog primera se vidi da pri krivolinijskom neravnomernom kretanju u pojedinim tačkama putanje ubrzanja a_T i a_N mogu da budu jednaka nuli. Tangencijalno ubrzanje $a_T = 0$ u onim tačkama u kojima je

$$\frac{dv}{dt} = 0,$$

tj. tamo, na primer, gde v ima maksimum ili minimum, dok je normalno ubrzanje $a_N = 0$ u onim tačkama gde je $v = 0$ (kao u našem slučaju) ili pak gde je $R_k = \infty$ (prevojna tačka putanje).

Zadatak 58. Voz počinje da se kreće ravnomerno ubrzano po krivini poluprečnika $R = 800$ m, i kad pređe put $s_1 = 600$ m, dostigne brzinu od $v_1 = 36$ km/h. Odrediti brzinu i ubrzanje voza na sredini tog puta.

Rešenje. Kako se voz kreće ravnomerno ubrzano i kako je $v_0 = 0$, to je zakon njegovog kretanja (ako smatramo da je $s_0 = 0$):

$$s = \frac{1}{2} a_T t^2,$$

a brzina kretanja:

$$v = a_T t.$$

Ako iz ovih jednačina eliminišemo vreme t dobićemo:

$$v^2 = 2a_T s.$$

Prema uslovima zadatka kada je $s = s_1$, tada je $v = v_1$.

Oдавде nalazimo:

$$a_T = \frac{v_1^2}{2s_1}.$$

Na sredini puta, pri $s_2 = \frac{1}{2} s_1$, brzina v_2 je jednaka

$$v_2 = \sqrt{2a_T s_2} = \sqrt{a_T s_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} v_1.$$

Normalno ubrzanje na tom mestu putanje je:

$$a_{N2} = \frac{v_2^2}{R} = \frac{v_1^2}{2R}.$$

Kada znamo a_T i a_{N2} možemo odrediti i totalno ubrzanje voza na sredini puta:

$$a_2 = \sqrt{a_T^2 + a_{N2}^2} = \frac{1}{2} v_1^2 \sqrt{\frac{1}{s_1^2} + \frac{1}{R^2}}.$$

Ako smenimo brojčane vrednosti, dobićemo:

$$v_2 \approx 7,1 \text{ m/s}, \quad a_2 = \frac{5}{48} \approx 0,1 \text{ m/s}^2.$$

Zadatak 59. Tačka izbačena horizontalnom brzinom kreće se po zakonu, koji je određen jednačinama:

$$x = v_0 t, \quad y = -\frac{1}{2} g t^2,$$

gde su v_0 i g — neke konstante.

Odrediti putanju, brzinu i ubrzanje tačke, a takođe i tangencijalno i normalno ubrzanje i poluprečnik krivine putanje u proizvoljnom položaju, s tim da se sve ove veličine izraze preko brzine tačke u tom položaju.

Rešenje. Ako iz prve jednačine odredimo vreme t i ako ga zatim smenimo u drugu jednačinu, dobićemo:

$$y = \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Putanja tačke je parabola (sl. 154).

Diferenciranjem jednačina kretanja po vremenu, dobićemo:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_0, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} = gt,$$

odakle je

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2} \quad (a)$$

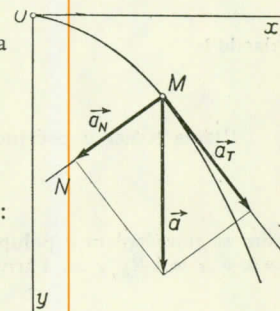
Na taj način, u početnom trenutku vremena ($t = 0$) brzina tačke je $v = v_0$, a zatim se u toku vremena brzina tačke neprekidno povećava.

Odredimo ubrzanje tačke. Po odgovarajućim formulama nalazimo

$$a_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x} = 0, \quad a_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y} = g.$$

Prema tome, ubrzanje tačke je

$$a = g.$$



Sl. 154

Dakle, tačka se kreće ubrzanjem koje je konstantno po intenzitetu i koje je usmereno duž ose Oy . Obratimo pažnju na to da u ovom slučaju, mada je $a = \text{const}$, kretanje tačke nije ravnomerno (jednoliko) promenljivo, jer za ravnomerno promenljivo kretanje mora da bude ispunjen uslov $a_T = \text{const}$, a ne $a = \text{const}$. Međutim, pri ovom kretanju, kao što ćemo sada videti, a_T nije konstantno.

Znajući zavisnost v od t [formula (a)], nadimo sada a_T :

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{g^2 t}{\sqrt{v_0^2 + g^2 t^2}} = \frac{g^2 t}{v}.$$

Međutim, iz jednačine (a) sleduje $v^2 = v_0^2 + g^2 t^2$, pa je, prema tome

$$t = \frac{1}{g} \sqrt{v^2 - v_0^2}.$$

Ako ovu vrednost za t smenimo u izraz za a_T izrazićemo a_T u funkciji od v :

$$a_T = g \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{v^2}}.$$

Odavde proizlazi da je u početnom trenutku vremena kada je $v = v_0$, $a_T = 0$. Zatim sa povećavanjem v vrednost a_T raste i pri $v \rightarrow \infty$, $a_T \rightarrow g$; tj. prema tome, u graničnom slučaju tangencijalno ubrzanje teži totalnom ubrzanju g .

Za nalaženje a_N iskoristićemo zavisnost:

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2.$$

Odavde je

$$a_N^2 = a^2 - a_T^2 = g^2 - g^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{v^2}\right) = g^2 \frac{v_0^2}{v^2},$$

odnosno

$$a_N = \frac{v_0 g}{v}.$$

Na taj način, u početnom trenutku vremena ($v = v_0$) $a_N = g$, a zatim se sa povećanjem v vrednost a_N smanjuje i u graničnom slučaju teži nuli.

Za nalaženje poluprečnika krivine iskoristimo formulu

$$a_N = \frac{v^2}{R_k}.$$

Odavde je

$$R_k = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{v_0 g}.$$

Prema tome, u početnom trenutku vremena poluprečnik krivine ima najmanju vrednost

$$(R_k)_{\min} = \frac{v_0^3}{g};$$

zatim sa povećanjem v poluprečnik krivine raste, pa se, prema tome, krivina putanje smanjuje. Kada $v \rightarrow \infty$ i $R_k \rightarrow \infty$, a krivina teži nuli.

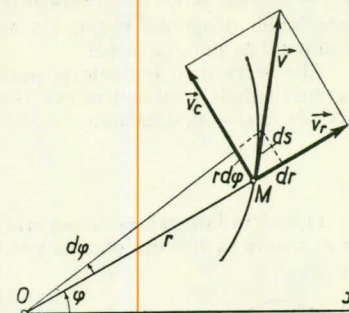
§ 71*. Brzina u polarnim koordinatama

Ako se tačka za sve vreme kreće u jednoj istoj ravni, onda se njen položaj može odrediti polarnim koordinatama r i φ (sl. 155). Pri kretanju tačke polarne koordinate menjaju se u toku vremena. Prema tome, zakon kretanja tačke u polarnim koordinatama biće određen jednačinama:

$$\boxed{r = f_1(t), \quad \varphi = f_2(t).} \quad (31)$$

Brzina tačke brojčano je jednaka ds/dt , tj. odnosu elementarnog pomeranja ds i odgovarajućeg vremenskog intervala dt . U datom slučaju se ds geometrijski sastoji iz dveju komponentata — radijalnog pomeranja, koje je brojčano jednako dr , i tzv. cirkularnog pomeranja, koje je upravno na poluprečnik pomeranja, a koje je brojčano jednako $r d\varphi$. Prema tome, totalna brzina $\vec{v}$ biće jednaka vektorskom zbiru iz radijalne brzine $\vec{v}_r$ i cirkularne brzine $\vec{v}_c$, koje su brojčano jednake

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}, \quad v_c = r \frac{d\varphi}{dt} = r\dot{\varphi}. \quad (32)$$



Sl. 155

Kako su vektori $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_c$ međusobno upravni to je intenzitet totalne brzine jednak

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_c^2} = \sqrt{\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(r \frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2}. \quad (33)$$

Formule (32) i (33) određuju brzinu tačke u polarnim koordinatama pri kretanju u ravni.

§ 72*. Grafičko ispitivanje kretanja tačke

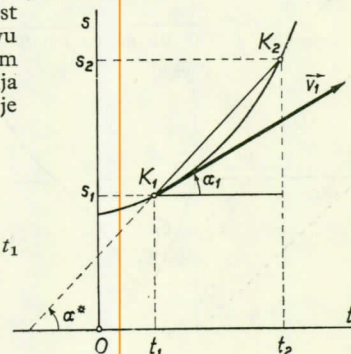
Grafički način rešavanja zadataka iz kinematike tačke primenjuje se u onim slučajevima kada je analitička zavisnost $s = f(t)$ [ili $x = f(t)$ pri pravolinijskom kretanju] vrlo komplikovana, ili kad je zakon kretanja koje ispitujemo dat neposredno dijagramom, koji je dobijen eksperimentalnim putem pomoću pribora za registrovanje ovakvih pomeranja.

Ako je poznat dijagram kretanja, koji daje zavisnost između rastojanja s i vremena t (sl. 156), onda se na osnovu ovog dijagrama može konstruisati dijagram brzine korišćenjem metode grafičkog diferenciranja. Kako se vidi sa crteža srednja brzina tačke za vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$ određena je tangensom ugla sečice $K_1 K_2$, pa je

$$v_{sr} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \operatorname{tg} \alpha^*.$$

Međutim, brzina tačke u datom trenutku vremena t_1 biće određena tangensom ugla tangente u tački K_1 , pa je

$$v_1 = \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=t_1} = \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (34)$$



Sl. 156

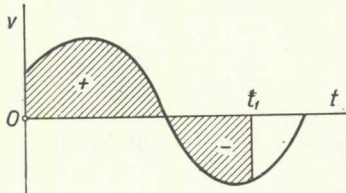
Na taj način, povlačenjem tangenti u tačkama $K_1, K_2, \dots$ na krivu koja predstavlja dijagram (s, t) , možemo prema vrednostima tangensa odgovarajućih uglova odrediti veličine brzina u trenucima: $t_1, t_2, \dots$ i na osnovu tih vrednosti konstruisati dijagram brzine. Na potpuno isti način na osnovu dijagrama brzine može da se konstruiše i dijagram tangencijalnog ubrzanja $a_T = \frac{dv}{dt}$. Redosled odgovarajućih konstrukcija (sa uzetim u obzir razmerama za t i s) dat je pri rešavanju zadatka 60.

Za konstrukciju dijagrama normalnog i totalnog ubrzanja (u slučaju krivolinijskog kretanja) vrednosti veličina a_N i a određuju se u raznim trenucima vremena brojčanim (numeričkim) načinom prema odgovarajućim formulama. Tom prilikom veličine v i a_T se očitavaju iz odgovarajućih konstruisanih dijagrama brzine i tangencijalnog ubrzanja, dok se poluprečnik krivine određuje na osnovu date putanje tačke.

Ako je za dato kretanje poznat dijagram brzine, onda je pomoću njega lako konstruisati dijagram kretanja korišćenjem metode grafičkog integriranja. Kako je $ds = v dt$, to odavde, smatrajući da je $s_0 = 0$, dobijamo

$$s = \int_0^t v dt.$$

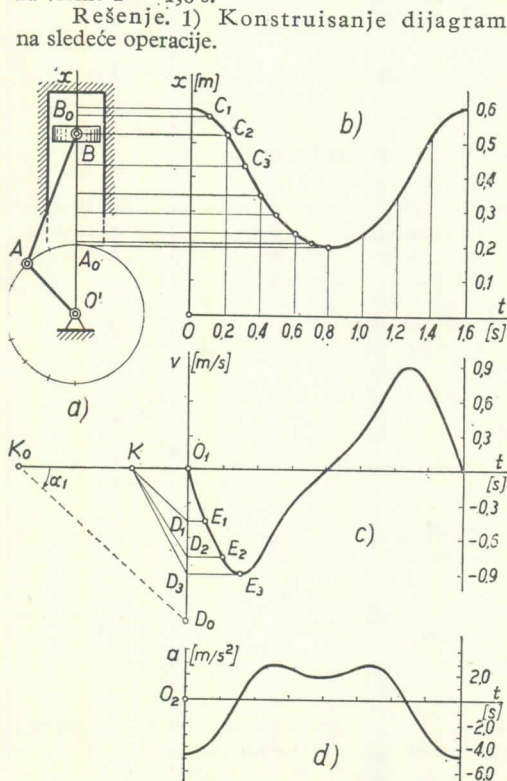
Određeni integral na desnoj strani gornje jednačine izračunava se kao odgovarajuća površina koja se uzima sa znakom plus za pozitivne vrednosti brzine v i sa znakom minus za njene negativne vrednosti. Površinu je lako izračunati ako se dijagram nacrtat na milimetarskom papiru. U slučaju prikazanom na sl. 157, rastojanje s_1 u trenutku t_1 biće jednako razlici površina iznad i ispod apscisne ose pomnožene sa odgovarajućim koeficijentom razmere.* Ako na taj način odredimo vrednosti za s u različitim trenucima vremena t , onda lako možemo konstruisati i dijagram kretanja. Analognim putem, na osnovu dijagrama za tangencijalno ubrzanje, može se konstruisati i dijagram brzine.



Sl. 157

Zadatak 60. Ispitati grafičkim putem kretanje klipa klipnog mehanizma (sl. 158), ako je dužina krivaje $\overline{O'A} = 0,2$ m, a dužina klipne poluge $\overline{AB} = 0,4$ m. Krivaja se obrće ravnomerno i učini 1 obrtaj za vreme $T = 1,6$ s.

Rešenje. 1) Konstruisanje dijagrama kretanja klipa. Ova konstrukcija se svodi na sledeće operacije.



Sl. 158

a) U izabranoj razmeri predstavimo rastojanje x i vreme t . Ako se konstrukcija vrši na milimetarskom papiru, onda treba imati u vidu da na njemu greška usled merenja rastojanja može da dostigne veličinu $\pm (0,25 \text{ do } 0,5 \text{ mm})$ (u zavisnosti od kvaliteta papira i crteža). Od ovog se polazi pri izboru razmera. Usvajimo u našem slučaju razmeru za $x: 0,1 \text{ m}$ u stvarnosti predstavimo sa 1 cm na crtežu; dok ćemo za vreme usvojiti sledeću razmeru: $0,2 \text{ s}$ predstavljamo sa 1 cm .

b) Nacrtajmo shemu u razmeri koja je izabrana za x (sl. 158, a); tom prilikom je $\overline{O'A_0} = 2 \text{ cm}$, $\overline{A_0B_0} = 4 \text{ cm}$. Povucimo duž putanje klipa koordinatnu osu $O'x$. Podelimo polukružnicu po kome se kreće tačka A na 8 jednakih delova (ukoliko je broj ovih podeoka veći, utoliko je konstrukcija tačnija). Svaki od ovih podeoka tačka A pređe za $0,1 \text{ s}$. Iz podeonih tačaka otvorom šestar $\overline{AB} = 4 \text{ cm}$ opišimo kratke luke koji će seći osu $O'x$. Ovi, tako dobijeni, odsečki na osi $O'x$ određuju veličine x u trenucima vremena t , koji su jednaki $0; 0,1 \text{ s}; 0,2 \text{ s}; \text{ itd.}$

c) Na osnovu nađenih veličina za x u funkciji od vremena t konstruišimo dijagram kretanja klipa za jedan obrtaj krivaje spajanjem odgovarajućih tačaka kontinualne krive (sl. 158, b); desni deo krive u ovom slučaju simetričan je levom delu.

2) Konstrukcija dijagrama brzine. Ova konstrukcija se svodi na sledeće operacije:

* Suma ovih površina određuje put koji pređe tačka za vreme t_1 , ako je $s_0 = 0$.

a) Povucimo ose v ; t (sl. 158, c) zadržavajući istu razmeru za vreme t kao i na sl. 158, b. Duž ose t nanesimo odsečak $\overline{O_1K_0}$, prikazujući u izabranoj razmeri jednu sekundu (u našem slučaju je dužina $\overline{O_1K_0} = 5$ cm).

b) Odredimo pravac tangente na krivu $x = f(t)$ u tački C_1 , koja odgovara trenutku vremena $t_1 = 0,1$ s*. Zatim povucimo kroz tačku K_0 pravu K_0D_0 paralelnu toj tangenti (iscrtkana linija). Tada odsečak $\overline{O_1D_0}$ predstavlja brzinu u trenutku $t_1 = 0,1$ s, jer je $\overline{O_1K_0} = 1$ s, a po formuli (34)

$$(v)_{t=0,1\text{ s}} = \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\overline{O_1D_0}}{\overline{O_1K_0}} = \overline{O_1D_0}.$$

Ako je pri tome rastojanje x predstavljeno u razmeri $1 \text{ cm} \triangleq 0,1 \text{ m}$ onda će brzina v biti izražena u razmeri $1 \text{ cm} \triangleq 0,1 \text{ m/s}$. Ako je dobijena razmera nepogodna za prikazivanje (ili je suviše velika, ili je suviše mala), onda se ona može promeniti na način koji je pokazan malo dalje.

c) U našem slučaju razmera za brzinu pokazala se vrlo velikom. Iz tog razloga umanjicemo ovu razmeru tri puta. U tom cilju iz tačke O_1 nanećemo odsečak $\overline{O_1K} = \frac{1}{3} \overline{O_1K_0}$. Kroz tačku K povucimo zatim pravu KD_1 , paralelnu tangenti u tački C_1 (ili liniji K_0D_0). Tada odsečak $\overline{O_1D_1}$ određuje brzinu u trenutku $t_1 = 0,1$ s u razmeri $1 \text{ cm} \triangleq 0,3 \text{ m/s}$.

Povucimo zatim pravu D_1E_1 , paralelno osi O_1t i tada ćemo dobiti tačku E_1 na dijagramu brzine.

Na analogan način povucimo kroz tačku K prave $KD_2, KD_3, \dots$, koje su paralelne tangentama u tačkama $C_2, C_3, \dots$ i na taj način odredimo tačke $E_2, E_3, \dots$ dijagrama brzine. Ako spojimo sve ove tačke neprekidnom krivom dobićemo dijagram brzine klipa (sl. 158, c).

3) Konstrukcija dijagrama ubrzanja na osnovu dijagrama brzine (ili dijagrama tangencijalnog ubrzanja, ako je kretanje krivolinijsko) vrši se na analogan način kao i konstruisanje dijagrama brzine na osnovu dijagrama kretanja. Na sl. 158, d dat je dijagram ubrzanja klipa u razmeri $1 \text{ cm} \triangleq 2,5 \text{ m/s}^2$.

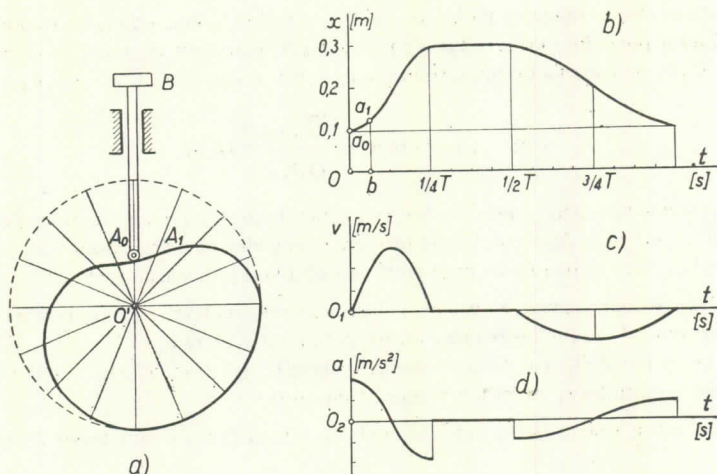
Zadatak 61. Odrediti grafičkom konstrukcijom profil bregaste ploče (sl. 159, a) koja se ravnomerno obrće oko ose O' da bi se vertikalni štap (podizač) AB kretao po zakonu koji je prikazan na sl. 159, b. Na dijagramu T predstavlja vreme jednog obrtaja bregaste ploče; u toku prve četvrtine obrtaja podizač treba da se podigne za $0,2 \text{ m}$, dok u toku druge četvrtine obrtaja on stoji u mestu, (tj. niti se podiže niti se spušta), da bi se u drugoj polovini obrtaja spuštao i ponovo došao u svoj početni položaj. Konstruisati takođe dijagrame brzine i ubrzanja podizača pri ovom kretanju. Dijagram kretanja dat je u razmeri: 1 cm na crtežu odgovara $0,1 \text{ m}$ u stvarnosti.

Rešenje. Konturu profila bregaste ploče konstruisaćemo u istoj razmeri u kojoj je dat dijagram kretanja. U tom cilju iz centra O' opišimo kružnicu poluprečnika 3 cm i njegov obim podelimo na 16 jednakih delova. Odsečak $\overline{OT}$ na osi t dijagrama (x, t) podelimo takođe na 16 jednakih delova. Veličinu x za svaki od odgovarajućih trenutaka vremena nanesimo duž odgovarajućeg poluprečnika povučenog iz centra O' . Tako je na primer $\overline{O'A_0} = Oa_0$, $\overline{O'A_1} = \overline{ba_{12}}$, itd. Spajanjem tako dobijenih tačaka A_0, A_1 , itd. neprekidnom krivom dobićemo konturu profila bregaste ploče (sl. 159, a).

Analognim putem, ako je dat oblik konture bregaste ploče, može da se konstruiše dijagram kretanja podizača AB .

* Da bi se povukla tangenta u datoj tački krive korisno je da se upotrebi lenjir na čijoj se bočnoj površini, normalnoj na ravan lenjira, nalazi ogledalo (takav pribor može se vrlo lako dobiti ako se na bočnu površinu logaritmara zalepi parče staniola). Lenjir zatim postavimo u datu tačku krive (poprečno na krivu) i potom ga obrćemo dotle dok se produžetak krive u ogledalu ne bude video bez primetnog preloma. Tada pravac lenjira određuje pravac normale, a pravac upravan na njoj — određuje pravac tangente u datoj tački krive. Ukoliko umesto ogledala upotrebljavamo staniol preporučljivo je da se prethodno kriva izvuče tušem.

Dajući bilo koju veličinu jednom obrtaju bregaste ploče T , konstruišimo zatim (na isti način kao i u prethodnom zadatku) dijagrame brzine i ubrzanja podizača AB .



Sl. 159

Oblik ovih dijagrama prikazan je na sl. 159, *c* i 159, *d*. Kao što se vidi u toku druge četvrtine obrtaja bregaste ploče brzina i ubrzanje podizača jednaki su nuli, što i treba da bude prema uslovima zadatka. Tom prilikom brzina podizača menja se neprekidno za sve vreme kretanja, dok ubrzanje ima skok u trenucima $t_1 = \frac{1}{4} T$ i $t_2 = \frac{1}{2} T$.

Glava XI

TRANSLATORNO I OBRITNO KRETANJE KRUTOG TELA

§ 73. Translatorno kretanje

U kinematici, kao i u statici, smatraćemo da su sva tela apsolutno kruta, tj da rastojanje između dve bilo koje tačke tela ostaje za sve vreme kretanja nepromenljivo.

Zadaci kinematike krutog tela dele se u dve grupe:

1. određivanje kretanja i proučavanje kinematičkih karakteristika kretanja tela kao celine, i
2. proučavanje kretanja svake od tačaka tela posebno.

Naša razmatranja započecemo sa proučavanjem translatornog kretanja krutog tela.

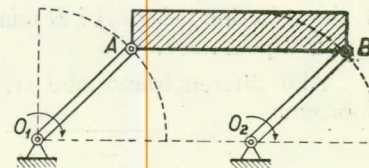
Kretanje krutog tela naziva se translatornim, ako se svaka prava ili (ravan) povučena u tom telu pomeća zajedno s njim tako, da uvek ostaje samo sebi paralelna.

Translatorno kretanje ne treba mešati sa pravolinijskim kretanjem. Pri translatornom kretanju putanje tačaka tela mogu da budu ma kakve krive linije, tj. translacija može da bude kako pravolinijska tako i krivolinijska.

Navedimo izvesne primere za translatorno kretanje.

1. Karoserija automobila na pravom horizontalnom delu puta kreće se pravolinijski. Tom prilikom putanje njegovih tačaka biće prave linije.

2. Poluga AB (sl. 160) pri obrtnom kretanju krivaja O_1A i O_2B ($\overline{O_1A} = \overline{O_2B}$) takođe se kreće translatorno (jer bilo koja prava povučena kroz polugu AB pri ovom kretanju ostaje sama sebi paralelna). Tom prilikom tačke poluge AB opisuju kružne putanje.



Sl. 160

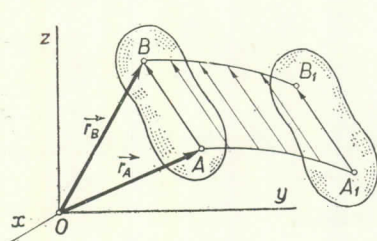
U prvom primeru imali smo slučaj pravolinijske translacije, a u drugom krivolinijske translacije.

Svojstva translatornog kretanja sadržana su u sledećoj teoremi: *Pri translatornom kretanju sve tačke tela opisuju istovetne putanje (koje se poklapaju kada se stave jedna na drugu) i imaju u svakom trenutku vremena jednake brzine i ubrzanja, i po intenzitetu, i po pravcu i po smeru.*

Da bismo dokazali ovu teoremu razmotrimo kruto telo koje se kreće translatorno u odnosu na koordinatni sistem $Oxyz$. Uočimo na telu dve bilo koje proizvoljne tačke A i B , čiji je položaj u trenutku t određen vektorima položaja $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ (sl. 161); povucimo vektor $\vec{AB}$ koji spaja ove tačke. Lako je videti da je tada

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{AB}. \quad (35)$$

Tom prilikom dužina AB ostaje konstantna, jer su rastojanja između tačaka krutog tela konstantna — nepromenljiva, a isto tako ne menja se ni pravac AB , jer se telo kreće translatorno. Na taj način



Sl. 161

vektor $\vec{AB}$ za sve vreme kretanja ostaje konstantan ($\vec{AB} = \text{const.}$), tj. ne menja se ni po pravcu, ni po smeru, ni po intenzitetu. Usled toga, kako se vidi iz jednačine (35) (a takođe i neposredno sa crteža) putanja tačke B dobija se iz putanje tačke A paralelnim pomeranjem svih tačaka koje se nalaze na putanji tačke A za konstantni vektor. Prema tome, putanje tačaka A i B biće zaista iste, tj. biće prikazane istovetnim

krivim linijama (koje se poklapaju kada se stave jedna na drugu).

Da bismo odredili brzine tačaka A i B diferencirajmo obe strane jednačine (35) po vremenu. Tada dobijamo:

$$\frac{d(\vec{r}_B)}{dt} = \frac{d(\vec{r}_A)}{dt} + \frac{d(\vec{AB})}{dt}.$$

Međutim, izvod konstantnog vektora $\vec{AB}$ jednak je nuli. Izvodi vektora $\vec{r}_A$ i $\vec{r}_B$ po vremenu određuju brzine tačaka A i B . Zato u krajnjem rezultatu izlazi da je

$$\vec{v}_A = \vec{v}_B,$$

tj. da su brzine tačaka A i B tela u bilo kom trenutku jednake i po intenzitetu, i po pravcu i po smeru.

Ako diferenciramo obe strane dobijene jednačine još jednom po vremenu dobićemo

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \frac{d\vec{v}_B}{dt}$$

ili

$$\vec{a}_A = \vec{a}_B.$$

Prema tome, i ubrzanja tačaka A i B tela u bilo kom trenutku vremena takođe su jednaka i po intenzitetu, i po pravcu, i po smeru.

S obzirom da su tačke A i B tela bile izabrane sasvim proizvoljno to iz dobijenih rezultata proizlazi, da će putanje svih tačaka tela, a takođe i njihove brzine i ubrzanja u bilo kom trenutku vremena biti iste — jednake. Na taj način teorema je dokazana.

Iz dokazane teoreme proizlazi da je translatorno kretanje krutog tela potpuno određeno kretanjem samo jedne njegove tačke. Prema tome, proučavanje translatornog kretanja krutog tela pripada kinematici tačke, koju smo već proučili.

Pri translatornom kretanju zajedničku brzinu svih tačaka tela $\vec{v}$ nazivamo *brzinom translatornog kretanja tela*, a zajedničko ubrzanje $\vec{a}$ svih tačaka tela nazivamo *ubrzanjem translatornog kretanja*. Očigledno je da se na slici vektori $\vec{v}$ i $\vec{a}$ mogu ucrtati sa napadnom tačkom u ma kojoj tački tela koje se kreće translatorno.

Primetimo da pojam o brzini i ubrzanju tela ima smisla *samo pri translatornom kretanju*. U svim ostalim slučajevima, kao što ćemo videti, pojedine tačke tela kreću se različitim brzinama i različitim ubrzanjima, tako da kod tih kretanja termini »brzina tela« i »ubrzanje tela« gube smisao.

§ 74. Obrtno kretanje krutog tela. Ugaona brzina i ugaono ubrzanje

Obrtnim kretanjem naziva se takvo kretanje krutog tela pri kome bilo koje dve tačke, koje pripadaju telu (ili su sa njim čvrsto vezane) ostaju za sve vreme nepomične (sl. 162). Prava AB, koja prolazi kroz nepomične tačke A i B, naziva se obrtna osa.

Pošto rastojanja između tačaka krutog tela ostaju nepromenjena, očevidno je, da će pri obrtnom kretanju sve tačke, koje pripadaju obrtnoj osi, biti nepomične; sve ostale tačke tela opisivaće kružne putanje, čije će ravni biti upravne na obrtnoj osi i čiji će centri ležati na toj osi (ovaj rezultat može takođe da posluži za definiciju obrtnog kretanja)*.

Radi određivanja položaja tela, koje se obrće oko nepomične ose, povucimo kroz osu dve ravni: ravan I — koja je nepomična, i ravan II, koja je čvrsto vezana za kruto telo, tako da se obrće zajedno sa njim (sl. 162). U tom slučaju položaj tela, koje se obrće oko nepomične ose, biće u svakom trenutku određen uglom φ (sa odgovarajućim znakom), koji zaklapaju ove dve ravni. Ovaj ugao zove se *obrotni ugao (ugao obrtanja tela)*. Smatraćemo da je ugao pozitivan ako on raste od nepomične ravni u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku (za posmatrača koji gleda iz pozitivnog smera ose Az) i da je negativan ako on raste u smeru kretanja kazaljke na časovniku. Ugao φ meri se uvek u radijanima.

Da bi položaj tela u svakom trenutku vremena bio određen potrebno je da znamo zavisnost ugla φ od vremena t , tj.

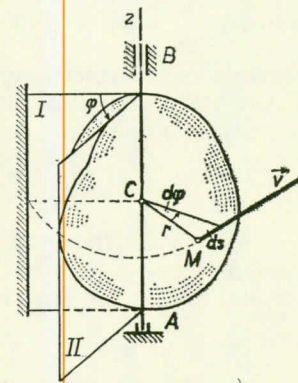
$$\varphi = f(t).$$

(36)

Jednačina (36) iskazuje zakon *obrotnog kretanja krutog tela*.

Osnovne kinematičke karakteristike obrtnog kretanja krutog tela su ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje $\dot{\omega}$.

* Obrtnje tela oko ose može da se vrši i tako da tom prilikom nijedna od tačaka, koje pripadaju samom telu, ne leži na obrtnoj osi (na primer, obrtnje točka, koji je nasaden na osu, ili obrtnje čoveka na sedištu ringšpila).



Sl. 162

Ako se za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ telo okrene za ugao $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi$, onda će srednja ugaona brzina obrtanja tela za taj vremenski interval brojčano biti jednaka

$$\omega_{sr} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}.$$

Ugaonom brzinom tela u trenutku t naziva se veličina kojoj teži srednja ugaona brzina ω_{sr} kada vremenski interval Δt teži nuli:

$$\boxed{\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}}, \quad \text{ili} \quad \boxed{\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}}. \quad (37)$$

Na taj način, ugaona brzina tela u datom trenutku vremena brojčano je jednaka prvom izvodu obrtnog ugla po vremenu. Jednačina (37) pokazuje takođe da je veličina ω jednaka odnosu elementarnog obrtnog ugla $d\varphi$ prema odgovarajućem vremenskom intervalu dt . Znak za ω određuje smer obrtanja. Lako je videti da je u slučaju obrtanja

u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku $\omega > 0$, odnosno, da je u slučaju kretanja u smeru kazaljke na časovniku $\omega < 0$. Dimenzija ugaone brzine, u slučaju kada se vreme meri u sekundama, biće

$$[\omega] = \frac{\text{radian}}{\text{s}} = \frac{1}{\text{s}} = \text{s}^{-1},$$

jer je radian — veličina bez dimenzije.

Ugaonu brzinu tela možemo prikazati

vektorom $\vec{\omega}$, čija je brojčana veličina ω

jednaka $\frac{d\varphi}{dt}$ i koji je usmeren duž obrtne ose tela u onu stranu iz koje se njegovo obrtanje vidi u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku (vidi sl. 163). Takav vektor određuje u isto vreme intenzitet ugaone brzine, obrtnu osu i smer obrtanja oko te ose.

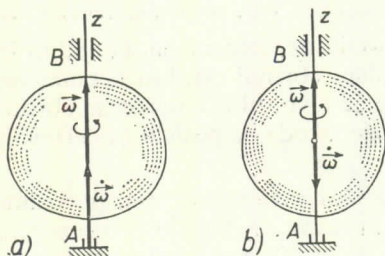
Ugaono ubrzanje karakteriše promenu ugaone brzine obrtanja tela tokom vremena.

Ako se za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ ugaona brzina tela promeni za veličinu $\Delta\omega = \omega_1 - \omega$, onda će srednje ugaono ubrzanje tela, za isti vremenski interval, brojčano biti jednako:

$$\dot{\omega}_{sr} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

Ugaonim ubrzanjem tela u trenutku t naziva se veličina kojoj teži vrednost $\dot{\omega}_{sr}$ kada vremenski interval Δt teži nuli. Prema tome je

$$\boxed{\dot{\omega} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}},$$



Sl. 163

ili uzimajući u obzir jednačinu (37)

$$\boxed{\ddot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}} \quad (38)$$

Na taj način, ugaono ubrzanje tela u datom trenutku vremena brojčano je jednako prvom izvodu ugaone brzine ili pak drugom izvodu obrtnog ugla tela po vremenu. Dimenzija ugaonog ubrzanja je $[\omega] = 1/s^2 = s^{-2}$.

Ako se intenzitet ugaone brzine tokom vremena povećava, obrtanje tela naziva se — ubrzanim, a ako se smanjuje — usporenim. Lako je videti da će obrtanje biti ubrzano kada su veličine ω i $\ddot{\omega}$ istog znaka, i usporeno kada su ove veličine različitog znaka.

Ugaono ubrzanje tela (po analogiji sa ugaonom brzinom) može se prikazati vektorom $\vec{\ddot{\omega}}$, koji je usmeren duž obrtne ose. Tom prilikom smer vektora $\vec{\ddot{\omega}}$ poklapaće se sa smerom vektora $\vec{\omega}$, ako je obrtanje tela ubrzano (sl. 163, a), odnosno biće suprotnog smera od smera vektora $\vec{\omega}$ ako je obrtanje usporeno (sl. 163, b)

§ 75. Ravnomerno i ravnomerno promenljivo obrtanje

Obrtanje tela naziva se *ravnomernim* (*jednolikim*) ako je ugaona brzina tela za sve vreme obrtanja konstantna veličina ($\omega = \text{const}$). Odredimo zakon ravnomernog obrtanja. Iz formule (37) vidi se da je $d\varphi = \omega dt$. Iz ove jednačine, smatrajući da je u trenutku $t = 0$, ugao $\varphi = 0$, integriranjem leve strane jednačine u granicama od 0 do φ , a desne strane od 0 do t , dobijamo:

$$\boxed{\varphi = \omega t} \quad (39)$$

Iz jednačine (39) proizlazi, takođe, da je pri ravnomernom obrtanju

$$\boxed{\omega = \frac{\varphi}{t}} \quad (40)$$

U tehnici se brzina ravnomernog obrtanja obično određuje brojem obrtaja u minutu. Označimo tu veličinu sa n obrtaja/min. Treba primetiti da n po dimenziji nije ugao, već ugaona brzina. Odredimo zavisnost između n obrtaja/min i ω 1/s. Pri jednom obrtaju telo se okrene za ugao 2π , a pri n obrtaja za ugao $2n\pi$; ako se to obrtanje izvrši za vreme $t = 1 \text{ min} = 60 \text{ s}$, onda iz jednačine (30) proizlazi da je

$$\boxed{\omega = \frac{\pi n}{30} \approx 0,1 n} \quad (41)$$

Obrtanje tela naziva se *ravnomerno promenljivim* (*jednoliko promenljivim*) ako je ugaono ubrzanje tela za sve vreme kretanja konstantna veličina ($\dot{\omega} = \text{const}$). Odredimo zakon ravnomerno promenljivog obrtanja smatrajući da je u trenutku $t = 0$ ugao $\varphi = 0$, a ugaona brzina $\omega = \omega_0$ (gde je ω_0 početna ugaona brzina).

Iz formule (38) imamo da je $d\omega = \dot{\omega} dt$. Integriranjem leve strane ove jednačine u granicama od ω_0 do ω , a desne strane u granicama od 0 do t , nalazimo:

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} t. \quad (42)$$

Predstavimo izraz (42) u obliku

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega_0 + \dot{\omega} t \quad \text{ili} \quad d\varphi = \omega_0 dt + \dot{\omega} t dt.$$

Drugim integriranjem (ako je $\varphi_0 = 0$) odredimo zakon ravnomerno promenljivog obrtanja u obliku

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2. \quad (43)$$

Ugaona brzina ovog obrtanja određena je formulom (42). Ako veličine ω i $\dot{\omega}$ imaju iste znake obrtanje će biti ravnomerno ubrzano, a ako su suprotnog znaka obrtanje će biti ravnomerno usporeno.

U zaključku ukažimo na analogiju koja postoji između zakona pravolinijskog kretanja tačke i obrtnog kretanja krutog tela. Lako je videti da sve formule, koje smo dobili u glavi IX, prelaze u formule koje smo dobili u ovom paragrafu, ako u njih umesto x , v i a stavimo φ , ω i $\dot{\omega}$.

§ 76. Brzine i ubrzanja tačaka tela koje se obrće

Pošto smo u prethodnom paragrafu odredili karakteristike obrtanja tela kao celine, pređimo sada na određivanje tih karakteristika za pojedine tačke tela.

Uočimo neku tačku M krutog tela koja se nalazi na rastojanju r od obrtne ose Az (vidi sl. 162). Pri obrtanju tela tačka M opisuje kružnu putanju poluprečnika r ; ravan kruga je upravna na osi obrtanja, i centar C kruga leži na samoj osi. Ako se za vremenski interval dt telo okrene za ugao $d\varphi$, onda će se tačka M pomeriti duž svoje putanje za $ds = r d\varphi$. Brzina tačke biće jednaka odnosu ds prema dt ; tj.

$$v = \frac{ds}{dt} = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi},$$

ili

$$v = r \omega. \quad (44)$$

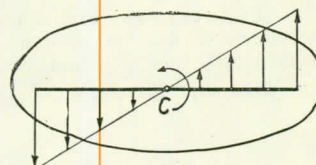
Brzina v za razliku od ugaone brzine tela zove se *linearna* ili *obimna* brzina tačke M .

Na taj način, obimna brzina neke tačke na telu koje se obrće oko nepomične ose brojčano je jednaka proizvodu iz ugaone brzine obrtanja tela i rastojanja posmatrane tačke tela od obrtne ose. Obimna brzina pada u pravac tangente na kružnu putanju koju opisuje tačka M . Ova kružna putanja leži u ravni koja je upravna na obrtnoj osi. Prema tome, obimna brzina tačke M je upravna na ravan koja prolazi kroz tačku M i obrtnu osu.

Kako za sve tačke tela ω ima u datom trenutku vremena jednu te istu vrednost to iz formule (44) proizlazi, da su obimne brzine pojedinih tačaka tela pri obrtanju oko nepomične ose proporcionalne rastojanjima tačaka od obrtne ose (sl. 164).

Radi određivanja ubrzanja tačke M iskoristimo formule

$$a_T = \frac{dv}{dt}, \quad a_N = \frac{v^2}{R_k}.$$



Sl. 164

U našem slučaju je $R_k = r$. Ako sada smenimo izraz za brzinu iz jednačine (44) u gornje izraze dobićemo

$$a_T = r \frac{d\omega}{dt}, \quad a_N = \frac{r^2 \omega^2}{r},$$

ili konačno

$$\boxed{a_T = r \dot{\omega}}, \quad \boxed{a_N = r \omega^2}. \quad (45)$$

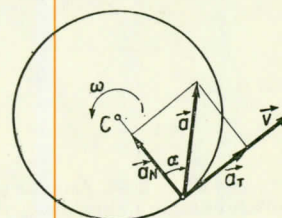
Tangencijalno ubrzanje a_T usmereno je po tangenti na putanju (u smeru kretanja, ako se telo obrće ubrzano, ili u suprotnom smeru, ako je obrtanje usporeno); normalno ubrzanje a_N uvek je usmereno duž poluprečnika r ka obrtnoj osi (sl. 165).

Totalno ubrzanje tačke M biće jednako

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_N^2} = \sqrt{r^2 \dot{\omega}^2 + r^2 \omega^4},$$

odnosno

$$\boxed{a = r \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}}. \quad (46)$$



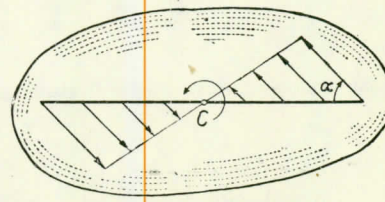
Sl. 165

Odstupanje pravca vektora totalnog ubrzanja od poluprečnika koji određuje položaj tačke tela na kružnoj putanji određeno je uglom α , koji se izračunava po formuli

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_T|}{a_N}.$$

Ako u gornji izraz smenimo vrednosti za a_T i a_N iz jednačine (45), dobićemo

$$\boxed{\operatorname{tg} \alpha = \frac{|\dot{\omega}|}{\omega^2}}. \quad (47)$$



Sl. 166

S obzirom da $\dot{\omega}$ i ω u datom trenutku vremena za sve tačke tela imaju jednu te istu vrednost, to iz formula (46) i (47) proizlazi da će totalna ubrzanja svih tačaka

tela, koje vrši obrtanje oko nepomične ose, biti proporcionalna njihovim rastojanjima od obrtne ose i da će u datom trenutku vremena zaklapati jedan isti ugao α sa poluprečnicima kružnih putanja koje opisuju pojedine tačke tela (sl. 166).

Formule (44) do (47) omogućavaju da se odredi brzina i ubrzanje bilo koje tačke krutog tela koje vrši obrtanje oko nepomične ose, ako je poznat zakon obrtanja tela i rastojanje date tačke od obrtne ose. Po ovim formulama možemo, takođe, znajući kretanje bilo koje tačke tela obrediti kretanje bilo koje druge tačke tela, a takođe i karakteristike kretanja tela kao celine.

Zadatak 62. Vratilo koje se obrće se sa $n = 90$ obrtaja/min posle isključenja motora počinje da se obrće ravnomerno usporeno i zaustavi se posle $t_1 = 40$ s. Odrediti koliko je obrtaja izvršilo vratilo za to vreme.

Rešenje. Kako se vratilo obrće ravnomerno usporeno to je u ovom slučaju

$$\varphi = \omega_0 t + \frac{1}{2} \dot{\omega} t^2, \quad (a)$$

$$\omega = \omega_0 + \dot{\omega} t. \quad (b)$$

Početna ugaona brzina vratila pri usporenom obrtanju biće ona koju je vratilo imalo do isključivanja motora. Prema tome:

$$\omega_0 = \frac{\pi n}{30}.$$

U trenutku zaustavljanja $t = t_1$ ugaona brzina obrtanja vratila je $\omega_1 = 0$. Ako ovu vrednost smenimo u jednačini (b), dobićemo:

$$0 = \frac{\pi n}{30} + \dot{\omega} t_1, \quad \text{ i } \quad \dot{\omega} = -\frac{\pi n}{30 t_1}.$$

Ako označimo broj obrtaja koji je izvršilo vratilo za vreme t_1 sa N (ne pomešati sa n ; n — ugaona brzina!) onda će ugao obrtanja koji će učiniti vratilo za ovo vreme biti $\varphi_1 = 2\pi N$. Kada nađene vrednosti za ω i φ_1 smenimo u jednačinu (a), dobićemo:

$$2\pi N = \frac{\pi n}{30} t_1 - \frac{\pi n}{60} t_1 = \frac{\pi n}{60} t_1,$$

odakle je

$$N = \frac{n t_1}{120} = 30 \text{ obrtaja.}$$

Zadatak 63. Zamajac poluprečnika $R = 1,2$ m obrće se ravnomerno sa $n = 90$ obrtaja/min. Odrediti brzinu i ubrzanje tačke, koja se nalazi na obimu zamajca.

Rešenje. Brzina tačke je $v = R\omega$, gde je ω ugaona brzina koju obavezno treba izraziti u radijanima u sekundi. U našem slučaju je:

$$\omega = \frac{\pi n}{30} = 3\pi \text{ s}^{-1}.$$

Tada je

$$v = \frac{\pi n}{30} R \approx 11,3 \text{ m/s.}$$

Kako je $\omega = \text{const}$, to je $\dot{\omega} = 0$, pa je, prema tome,

$$a = a_N = R\omega^2 = \frac{\pi^2 n^2}{900} R \approx 106,6 \text{ m/s}^2.$$

Ubrzanje tačke usmereno je u datom slučaju ka obrtnoj osi.

Zadatak 64. U početku kretanja zamajac se obrće po zakonu

$$\varphi = \frac{9}{32} t^2.$$

Odrediti brzinu i ubrzanje tačke koja se nalazi na rastojanju $r = 0,8$ m od obrtne ose, u onom trenutku, kada tangencijalno ubrzanje te tačke bude jednako normalnom ubrzanju.

Rešenje. Odredimo ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje zamačaja:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{27}{32} t^2, \quad \dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \frac{27}{16} t.$$

Za tangencijalno i normalno ubrzanje imamo formule: $a_T = r\dot{\omega}$, $a_N = r\omega^2$.

Označimo trenutak kada je $a_T = a_N$ sa t_1 . Očevidno, u tom trenutku je $\dot{\omega}_1 = \omega_1^2$ ili

$$\frac{27}{16} t_1 = \left(\frac{27}{32}\right) t_1^2,$$

odakle je

$$t_1^2 = \frac{64}{27}, \quad \text{odnosno} \quad t_1 = \frac{4}{3} \text{ s.}$$

Smenjujući ovu vrednost za t_1 u izraz za ω i $\dot{\omega}$ nalazimo da je u trenutku t_1

$$\omega_1 = \frac{3}{2} \text{ s}^{-1}, \quad \dot{\omega}_1 = \frac{9}{4} \text{ s}^{-2}.$$

Odavde su tražene veličine jednake:

$$v_1 = r\omega_1 = 1,2 \text{ m/s}, \quad a_1 = r\sqrt{\dot{\omega}_1^2 + \omega_1^4} = 1,8\sqrt{2} \approx 2,54 \text{ m/s}^2.$$

→

Vektor a_1 usmeren je pod uglom od 45° prema poluprečniku r .

Zadatak 65. Teret B (sl. 167) dovodi u obrtanje vratilo poluprečnika r i zupčanik 1 poluprečnika r_1 , koji je čvrsto vezan za vratilo. Kretanje tereta počinje iz stanja mira i vrši se sa konstantnim ubrzanjem a . Odrediti po kom će se zakonu obrtati u tom slučaju zupčanik 2, poluprečnika r_2 , koji je ozubljen sa zupčanicom 1.

Rešenje. Kako teret B počinje da se kreće bez početne brzine, to će njegova brzina v_B u proizvoljnom trenutku vremena t biti jednaka at ($v_B = at$). Tu istu brzinu imaće takođe i tačka na obimu vratila. Međutim, s druge strane, brzina te tačke jednaka je $r\omega_1$, gde je ω_1 zajednička ugaona brzina obrtanja vratila i zupčanika 1. Prema tome,

$$r\omega_1 = at, \quad \omega_1 = \frac{at}{r}.$$

Odredimo sada ω_2 . Kako se u tački C dodiruju zupčanici, to obimna brzina na obimu oba zupčanika u toj tački mora biti ista, pa je $v_C = r_1\omega_1 = r_2\omega_2$, odakle je

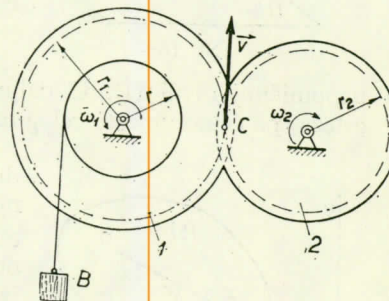
$$\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega_1 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t.$$

Prema tome, ugaona brzina obrtanja zupčanika 2 se povećava proporcionalno sa vremenom. Imajući u vidu da je $\omega_2 = \frac{d\varphi_2}{dt}$, gde je φ_2 — obrtni ugao zupčanika 2, dobićemo:

$$d\varphi_2 = \frac{r_1 a}{r_2 r} t dt.$$

Odavde, posle integriranja obe strane ove jednačine, smatrajući da je u trenutku $t = 0$ obrtni ugao $\varphi_2 = 0$, nalazimo zakon ravnomernog ubrzanog obrtanja zupčanika 2 u obliku

$$\varphi_2 = \frac{r_1 a}{2r_2 r} t^2.$$



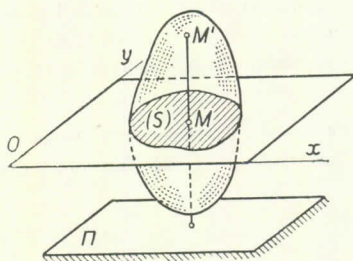
Sl. 167

G l a v a X I I

RAVNO KRETANJE KRUTOG TELA

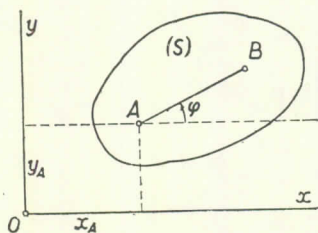
§ 77. Jednačine ravnog kretanja. Razlaganje kretanja na translatorno i obrtno

Kretanje krutog tela naziva se *ravnim* ako se sve njegove tačke kreću (pomeraju) paralelno prema nekoj nepomičnoj ravni Π , odnosno drugim rečima, ako su brzine svih tačaka tela paralelne nekoj nepomičnoj ravni (sl. 168). Ravno kretanje vrše mnogi delovi mehanizama i mašina, npr. kotur koji se kotrlja po pravolinijskom delu puta, klipna poluga kod klipnog mehanizma, i slično. Obrtno kretanje, koje smo proučili u prethodnom paragrafu, je takođe poseban slučaj ravnog kretanja.



Sl. 168

Pri ravnom kretanju sve tačke tela, koje leže na pravoj MM' , upravnoj na ravan Π (vidi sl. 168), kreću se na isti način. Prema tome, da bismo proučili kretanje tela kao celine, dovoljno je da se prouči kretanje preseka S tela sa ravni Oxy u toj ravni (ravan Oxy je bilo koja ravan paralelna nepomičnoj ravni Π). U daljim izlaganjima podudaraće se ravan Oxy sa ravni crteža, pa ćemo umesto celog tela crtati samo njegov presek S .



Sl. 169

Položaj preseka S u ravni Oxy može se odrediti ako znamo položaj neke tačke A preseka S , tj. njene koordinate x_A i y_A (sl. 169) i ugao φ , koji odsečak AB , proizvoljno povučen u ravni preseka S , obrazuje sa osom x . Tačku A , koju smo proizvoljno izabrali radi određivanja položaja preseka S , zvaćemo ubuduće *pol*.

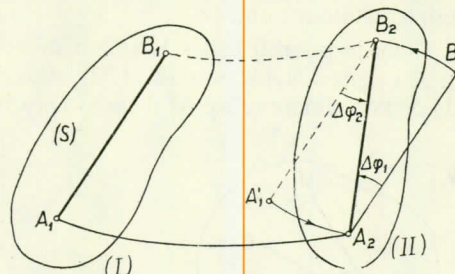
Pri kretanju tela menjaju se tokom vremena veličine x_A , y_A i φ . Da bi zakon kretanja tela bio poznat, tj. da bismo bili u stanju da odredimo položaj tela u prostoru u bilo kom trenutku vremena, potrebno je da znamo zavisnosti

$$x_A = f_1(t), \quad y_A = f_2(t), \quad \varphi = f_3(t).$$

(48)

Jednačine (48), koje određuju zakon kretanja tela u ovom slučaju, zovu se *jednačine ravnog kretanja krutog tela*.

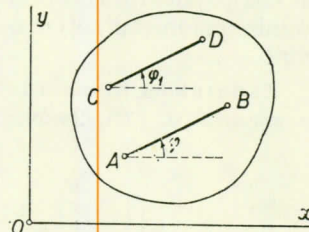
Razmotrimo dva uzastopna položaja *I* i *II*, koje zauzima presek *S* pokretnog tela u trenucima vremena t_1 i $t_2 = t_1 + \Delta t$ (sl. 170). Lako je videti da presek *S*, a sa njim i celo telo, može da se dovede iz položaja *I* u položaj *II* na sledeći način. Pomerimo najpre telo translatorno, tako da pol *A*, pomerajući se duž svoje putanje, dođe u položaj A_2 (pri tome će odsečak A_1B_1 zauzeti položaj $A_2B'_1$), a zatim okrenimo presek *S* oko pola A_2 za ugao $\Delta\varphi_1$. Na isti način može se telo premestiti iz položaja *II* u neki sledeći položaj *III*, itd. Odavde zaključujemo da se *ravno kretanje krutog tela sastoji iz dva komponentna kretanja* — translatornog kretanja, pri kome se sve tačke tela kreću isto tako kao i pol *A*, i obrtnog kretanja oko pola A^* .



Sl. 170

Translatorsni deo ravnog kretanja određen je očevino prvim dvema jednačinama (48), dok je obrtanje oko pola određeno trećom od ovih jednačina.

Osnovne kinematičke karakteristike ovog kretanja su brzina i ubrzanje translatorsnog kretanja, koje su jednake brzini i ubrzanju pola ($\vec{v}_{tr} = \vec{v}_A$; $\vec{a}_{tr} = \vec{a}_A$), a takođe i ugaona brzina i ugaono ubrzanje (ω i $\dot{\omega}$) obrtnog kretanja oko pola. Veličine ovih karakteristika u bilo kom trenutku vremena *t* mogu se odrediti iz jednačina (48)



Sl. 171

Pri proučavanju ovog kretanja može se za pol izabrati bilo koja tačka tela. Ako umesto tačke *A* za pol izaberemo neku drugu tačku *C* tela (sl. 171), onda će se u tom slučaju promeniti karakteristike translatorsnog dela kretanja, jer u opštem slučaju $\vec{v}_C \neq \vec{v}_A$ i $\vec{a}_C \neq \vec{a}_A$ (pošto bi u protivnom slučaju kretanje tela bilo translatorsno, a ne ravno). Karakteristike obrtnog dela kretanja, tj. ω i $\dot{\omega}$ se tom prilikom ne menjaju. Naime, radi određivanja obrtnog oko pola *C* povucimo odsečak *CD* paralelno *AB* (ovo uvek može da se učini, jer se prava *AB*, pa samim tim i *CD* povlači potpuno proizvoljno). U bilo kom trenutku vremena ugao $\varphi_1 = \varphi$, tj. zakoni obrtnja oko polova *A* i *C* biće jednaki. Odatle je:

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{d^2\varphi_1}{dt^2} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad \text{ili} \quad \omega_1 = \omega, \quad \dot{\omega}_1 = \dot{\omega}.$$

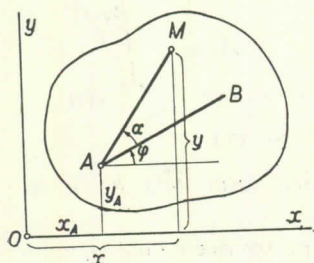
Ovaj rezultat može se objasniti i na sledeći način. Razmotrimo opet pomeranje tela iz položaja *I* u položaj *II* (vidi sl. 170), ali pri tome smatrajmo da je tačka *B* pol. Tada, pomerajući telo translatorsno zajedno sa polom pomerićemo tačku B_1 u položaj B_2 (tom prilikom će odsečak B_1A_1 zauzeti položaj $B_2A'_1$). Zatim, ako obrnemo presek *S* oko pola B_2 za ugao $\Delta\varphi_2$, premestićemo telo u položaj *II*. Lako je videti da se u tom slučaju translatorsno pomeranje B_1B_2 razlikuje od pomeranja A_1A_2 , koje se vrši zajedno sa polom *A*, dok je $\Delta\varphi_2 = \Delta\varphi_1$ (jer je $B_2A'_1 \parallel A_2B'_1$). Prema tome, obrtni deo kretanja ostaje isti i ne menja se kada za polove budemo birali bilo koje tačke.

* Obrtno kretanje se vrši oko ose koja je upravna na ravan *II* i koja prolazi kroz tačku *A*. Radi kratkoće u daljim izlaganjima ovo kretanje zvaćemo obrtanje oko pola *A*.

§ 78. Određivanje putanja tačaka tela

Pređimo sada na proučavanje kretanja pojedinih tačaka tela, tj. na određivanje njihovih putanja, brzina i ubrzanja. Za ovo je, kako je već bilo rečeno u prethodnom paragrafu, dovoljno da proučimo kretanje tačaka tela koje leže u preseku S . Počnimo sa određivanjem putanja.

Neka je položaj tačke M tela u preseku S određen rastojanjem $b = \overline{AM}$ od pola A i uglom $BAM = \alpha$ (sl. 172). Ako je kretanje tela odeđeno jednačinama (48), onda će koordinate tačke M u ravni Oxy biti određene sa:



Sl. 172

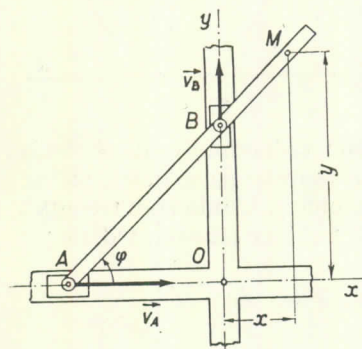
$$\begin{aligned} x &= x_A + b \cos(\varphi + \alpha), \\ y &= y_A + b \sin(\varphi + \alpha), \end{aligned} \quad (49)$$

gde su: x_A, y_A i φ — poznate funkcije vremena određene jednačinama (48).

Jednačine (49) definišu zakon kretanja tačke M u ravni Oxy , a predstavljaju u isto vreme i jednačine putanje te tačke u parametarskom obliku. Jednačinu putanje možemo dobiti i u drugom obliku, ako iz jednačina (49) eliminišemo vreme t .

Ako je posmatrano telo element bilo kog mehanizma, onda je za određivanje putanje neke njegove tačke M dovoljno da se izraze njene koordinate u funkciji bilo kog parametra koji definiše položaj mehanizma, i zatim da se iz tih jednačina eliminiše parametar koji je uveden. U tom slučaju jednačine kretanja (48) nisu potrebne.

Zadatak 66. Klizači A i B , pričvršćeni za polugu elipsografa, kreću se po uzajamno upravnim pravama (sl. 173). Rastojanje $\overline{AB} = l$. Odrediti putanju tačke M poluge.



Sl. 173

Rešenje. Ako za pol uzmemo tačku A odredimo položaj tačke M na poluzi odsečkom $\overline{AM} = b$. Položaj same poluge odredimo uglom φ . U tom slučaju će koordinate x i y tačke M biti:

$$x = (b - l) \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

Kada iz ovih jednačina eliminišemo parametar φ , dobićemo da je putanja tačke (nezavisno od zakona kretanja poluge) elipsa

$$\frac{x^2}{(b-l)^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

sa poluosama $a = |b - l|$ i b i sa centrom u tački O .

Ako pomoću odgovarajućih zavrtnjeva budemo menjali rastojanja l i b , moći ćemo olovkom u tački M da nacrtamo elipsu sa bilo kojim osama, koje nisu duže od poluge. Iz tog razloga ovaj se mehanizam naziva — elipsograf.

§ 79. Određivanje brzina tačaka tela

Ravno kretanje krutog tela sastoji se iz translatornog dela kretanja, pri čemu se sve tačke tela kreću brzinama pola $\vec{v}_A$, i iz obrtnog dela kretanja oko tog pola. Pokažimo da se brzina bilo koje tačke tela M pri ravnom kretanju dobija kao geometrijski zbir brzina ovih dvaju komponentnih kretanja.

Naime, položaj bilo koje tačke M tela, koja leži u preseku S , određen je prema koordinatnom sistemu Oxy vektorom položaja $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$ (sl. 174), gde je vektor $\vec{r}' = \vec{AM}$. Tada je

$$\vec{v}_M = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}'}{dt}$$

U dobivenoj jednačini je veličina $\frac{d\vec{r}_A}{dt} = \vec{v}_A$,

tj. jednaka je brzini pola A ; veličina $\frac{d\vec{r}'}{dt}$

jednaka je brzini $\vec{v}_M^A$, koju ima tačka M kada je $\vec{r}_A = \text{const}$, tj. kada je tačka A nepomična, ili, drukčije rečeno, jednaka je brzini tačke M pri obrtanju tela oko pola A . Na taj način, iz prethodne jednačine proizlazi

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A \quad (50)$$

Pri tome će brzina $\vec{v}_M^A$ tačke M pri obrtnom kretanju oko pola A biti jednaka (§ 76):

$$\vec{v}_M^A = \vec{MA} \cdot \omega; \quad (\vec{v}_M^A \perp \vec{MA}), \quad (51)$$

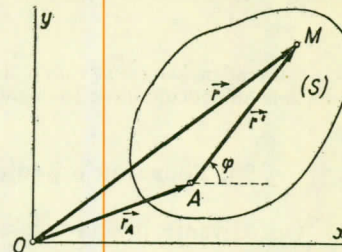
gde je ω — ugaona brzina obrtanja tela.

Na taj način, brzina bilo koje tačke M tela jednaka je geometrijskom zbiru iz brzine neke druge tačke A tela, koja je uzeta za pol, i brzine tačke M pri njenom obrtnom kretanju zajedno sa telom oko tog pola. Intenzitet i pravac brzine $\vec{v}_M$ nalazimo konstruisanjem odgovarajućeg paralelograma (sl. 175).

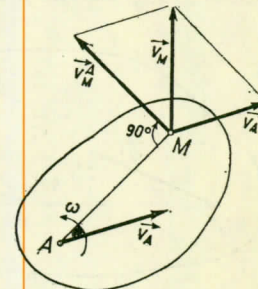
Zadatak 67. Odrediti brzinu tačke M na obimu točka, koji se kotrlja bez klizanja po šini (sl. 176), ako je brzina središta C točka $\vec{v}_C$, a ugao $DKM = \alpha$.

Rešenje. Ako tačku C , čija je brzina poznata, izaberemo za pol, dobićemo da je $\vec{v}_M = \vec{v}_C + \vec{v}_M^C$, gde je $\vec{v}_M^C \perp \vec{CM}$, a po intenzitetu je $v_M^C = \vec{MC} \cdot \omega = R\omega$ (R — poluprečnik točka). Veličinu ugaone brzine ω odredićemo iz uslova da tačka K točka ne klizi po šini, pa je, prema tome, u datom trenutku $v_K = 0$. S druge strane, takođe je, kao i za tačku M : $\vec{v}_K = \vec{v}_C + \vec{v}_K^C$, — gde je $\vec{v}_K^C = \vec{KC} \cdot \omega = R\omega$. Kako su za tačku K brzine $\vec{v}_K^C$ i $\vec{v}_C$ usmerene duž iste prave, to će pri $v_K = 0$ biti $v_K^C = v_C$, odakle je $\omega = \frac{v_C}{R}$. U krajnjem rezultatu nalazimo da je $v_M^C = R\omega = v_C$.

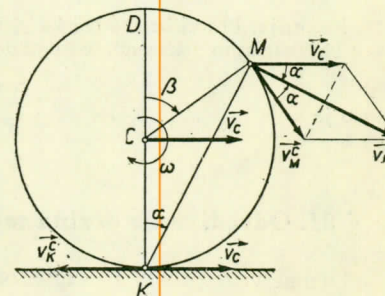
Paralelogram konstruisan nad vektorima $\vec{v}_M^C$ i $\vec{v}_C$ biće pri tome romb. Ugao između pravaca brzina $\vec{v}_C$ i $\vec{v}_M$ jednak je β , jer su kraci koji obrazuju jedan i drugi ugao uzajamno upravni. Međutim,



Sl. 174



Sl. 175



Sl. 176

ugao $\beta = 2\alpha$, kao centralni ugao opisan nad istim lukom kao i periferijski ugao α . Tada, na osnovu osobina romba, uglovi između brzina $\vec{v}_C$ i $\vec{v}_M$, i između brzina $\vec{v}_M$ i $\vec{v}_M$ biće, takođe, jednaki α . Nožad, s obzirom da su dijagonale romba uzajamno upravne, dobijamo

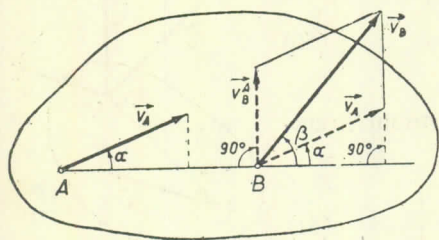
$$v_M = 2v_C \cos \alpha \quad \text{i} \quad \vec{v}_M \perp \overline{KM}.$$

Sam račun, kao što se vidi, je dosta glomazan. U toku daljih izlaganja upoznaćemo se sa metodom koja omogućuju da se analogni zadaci reše daleko jednostavnije (vidi zadatak 69.).

§ 80. Teorema o projekcijama brzina dveju tačaka tela

Određivanje brzina tačaka tela korišćenjem formule (50) obično je skopčano sa dosta složenim računima (vidi zadatak 67.). Međutim, polazeći od ovog osnovnog rezultata, može se dobiti čitav niz drugih metoda, koje su pogodnije i prostije za određivanje brzina tačaka tela.

Jedna od tih metoda sadržana je u sledećoj teoremi: *projekcije brzina dveju tačaka krutog tela na pravu, koja spaja te tačke, jednake su jedna drugoj.*



Sl. 177

Posmatrajmo bilo koje dve tačke A i B tela. Ako uzmemo tačku A za pol (sl. 177) dobićemo korišćenjem formule (50) da je $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A$. Odavde, projicirajući obe strane ove jednačine na pravu AB , i imajući u vidu da je vektor $\vec{v}_B^A$ upravan na AB , nalazimo da je

$$v_B \cos \beta = v_A \cos \alpha, \quad (52)$$

pa je time gornja teorema dokazana. Ovaj zaključak omogućuje da se vrlo lako odredi brzina neke tačke tela, ako je poznat pravac kretanja te tačke i brzina bilo koje druge tačke tog tela.

Zadatak 68. Odrediti zavisnost između brzina tačaka A i B poluge elipsografa (vidi sl. 173) pri datom uglu φ .

Rešenje. Pravci brzina tačaka A i B su poznati. Tada, ako projiciramo vektore $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ na pravu AB , saglasno dokazanoj teoremi dobićemo:

$$v_A \cos \varphi = v_B \cos (90^\circ - \varphi),$$

odakle je

$$v_A = v_B \operatorname{tg} \varphi.$$

§ 81. Određivanje brzina tačaka tela pomoću trenutnog pola brzina

Druga vrlo prosta i očigledna metoda za određivanje brzina tačaka tela pri ravnom kretanju zasniva se na pojmu trenutnog pola brzina.

Trenutnim polom brzina naziva se tačka u preseku S tela čija je brzina u datom trenutku vremena jednaka nuli.

Lako je uveriti se da takva tačka u svakom trenutku vremena t postoji i to samo jedna, pod uslovom da kretanje tela nije translatorno. Neka u trenutku t tačke A i B tela leže u preseku S , i neka njihove brzine $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ nisu paralelne međusobom (sl. 178). Tada će tačka P , koja leži u preseku normale Aa na vektor $\vec{v}_A$ i normale Bb

na vektor $\vec{v}_B$ biti trenutni pol brzina, jer je $\vec{v}_P = 0$. Naime, ako pretpostavimo da je $\vec{v}_P \neq 0$, onda na osnovu teoreme o projekcijama brzina tačaka tela vektor $\vec{v}_P$ treba istovremeno da bude upravan i na AP (jer je $\vec{v}_A \perp AP$) i na BP (jer je $\vec{v}_B \perp BP$), što je nemoguće. Iz ove teoreme se takođe vidi da nijedna druga tačka preseka S u datom trenutku vremena ne može da ima brzinu jednaku nuli (na primer za tačku a projekcija $\vec{v}_B$ na pravu Ba nije jednaka nuli, pa, prema tome, ni $\vec{v}_a \neq 0$, itd.).

Ako sada u datom trenutku vremena t tačku P uzmemo za pol, onda po formuli (50), brzina tačke A biće jednaka

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}_A^P = \vec{v}_A^P,$$

jer je $\vec{v}_P = 0$. Analogni rezultat se dobija i za bilo koju drugu tačku tela. Prema tome, brzina bilo koje tačke tela, koja leži u preseku S , jednaka je njenoj obimnoj brzini pri obrtanju oko trenutnog pola brzina P . Pri tome, saglasno odnosima (51), biće

$$\begin{aligned} v_A &= \overline{PA} \cdot \omega & (\vec{v}_A \perp \overline{PA}), \\ v_B &= \overline{PB} \cdot \omega & (\vec{v}_B \perp \overline{PB}), \text{ itd.} \end{aligned} \quad (53)$$

Iz jednačine (53) proizlazi takođe, da je

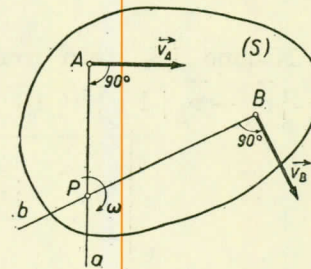
$$\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}, \quad (54)$$

tj. brzine pojedinih tačaka tela proporcionalne su njihovim rastojanjima od trenutnog pola brzina.

Dobijeni rezultati dovode do sledećih zaključaka.

1) Za određivanje trenutnog pola brzina potrebno je da se znaju pravci brzina $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ bilo kojih dveju tačaka A i B tela koje se nalaze u preseku S tela (ili pak putanje tih tačaka); trenutni pol brzina nalazi se u tački u kojoj se seku normale povučene u tačkama A i B na brzine tih tačaka (okrenute brzine) (ili pak na tangente na putanje tih tačaka).

2) Za određivanje brzine bilo koje tačke M tela potrebno je da se zna intenzitet i pravac brzine neke tačke A tela i pravac brzine druge tačke B tela. Tada, povlačeći normale iz tačaka A i B na brzine $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$, može da se odredi trenutni pol brzina P , a po smeru brzine $\vec{v}_A$, može da se odredi i smer obrtanja tela. Posle toga, znajući v_A , po formuli (54), može da se odredi i brzina v_M bilo koje druge tačke M tale. Vektor $\vec{v}_M$ upravan je na pravac PM i usmeren u stranu obrtanja tela.



Sl. 178

3) Ugaona brzina tela, kako se vidi iz formule (53), jednaka je u svakom trenutku vremena odnosu iz brzine bilo koje tačke preseka S tela i rastojanja te tačke od trenutnog pola brzina P :

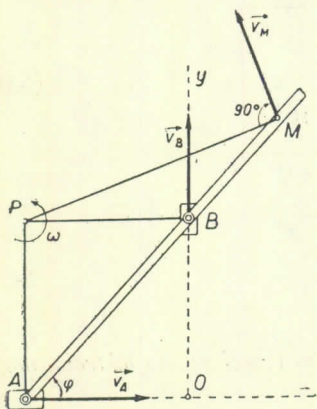
$$\omega = \frac{v_A}{PA} \quad (55)$$

Nađimo još jedan izraz za ω . Iz jednačina (50) i (51) sleduje da je $\vec{v}_A^B = |\vec{v}_A - \vec{v}_B|$ i $v_A^B = \overline{AB} \cdot \omega$, odakle proizlazi

$$\omega = \frac{|\vec{v}_A - \vec{v}_B|}{AB} = \frac{|\vec{v}_A + (-\vec{v}_B)|}{AB} \quad (56)$$

Jednačine (55) i (56) određuju jednu te istu veličinu, jer kako je dokazano (§ 77) obrtanje preseka S oko tačke A , ili pak oko tačke P , vrši se jednom te istom ugaonom brzinom ω .

Primer. Za polugu elipsografa AM (sl. 179) pravci brzina tačaka A i B su poznati. Ako na ove pravce povučemo normale odredićemo položaj trenutnog pola brzina P poluge.



Sl. 179

Znajući P , iz proporcije $\frac{v_A}{PA} = \frac{v_B}{PB}$ dobićemo da je $v_A = v_B \frac{PB}{PA} = v_B \operatorname{tg} \varphi$, tj. isti rezultat kao i u zadatku 68. Za tačku M analognim putem naćićemo da je $v_M = v_B \frac{PM}{PB}$. Dužinu PM možemo izračunati ako znamo $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ ugaon φ . Pravac i smer vektora $\vec{v}_M$ pokazan je na crtežu ($\vec{v}_M \perp \overline{PM}$).

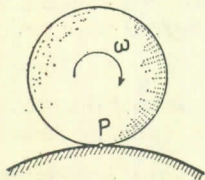
Za ugaonu brzinu poluge, po formulama (55) ili (56) nalazimo

$$\omega = \frac{v_B}{PB} \quad \text{ili} \quad \omega = \frac{|\vec{v}_B - \vec{v}_A|}{AB}$$

Lako je proveriti da obe formule daju jedan te isti rezultat.

Razmotrimo neke posebne slučajeve određivanja trenutnog pola brzina P .

a) Ako se ravno kretanje ostvaruje kotrljanjem jednog cilindričnog tela po površini drugog tela, pri čemu je drugo telo nepomično, onda tačka dodira P (sl. 180) oba tela ima u datom trenutku vremena brzinu jednaku nuli, pa je, prema tome, ona trenutni pol brzina ($v_P = 0$, jer tačke dodira oba tela pri odsustvu klizanja moraju da imaju iste brzine, a u ovom slučaju je drugo telo nepomično). Kao primer možemo da navedemo kotrljanje točka po šini.



Sl. 180

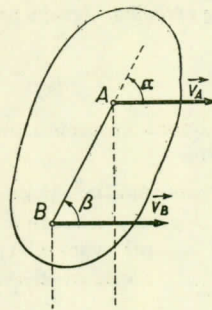
b) Ako su brzine tačaka A i B tela paralelne međusobom, i ako pri tome prava AB nije upravna na $\vec{v}_A$ (sl. 181), onda

trenutni pol leži u beskonačnosti, pa su brzine svih tačaka tela $\vec{v}_A$.

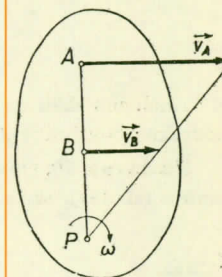
Pri tome, iz teoreme o projekcijama brzina proizlazi, da je $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$, tj. $v_A = v_B$; analogni rezultat dobija se i za sve druge tačke tela. Prema tome, u posma-

trinom trenutku vremena brzine svih tačaka tela jednake su međusobom, i po intenzitetu, i po pravcu, i po smeru, tj. telo ima *trenutno translatorni raspored brzina* pa se i takvo stanje kretanja naziva *trenutno translatorno*. Ugaona brzina tela u datom trenutku vremena, kako se vidi iz formule (56), jednaka je nuli.

c) Ako su brzine tačaka A i B tela paralelne međusobom i ako je pri tome prava AB upravna na $\vec{v}_A$, onda se položaj trenutnog pola P određuje konstrukcijom koja je pokazana na sl. 182. Opravdanost ove konstrukcije proizlazi iz proporcije (54). U ovom slučaju, za razliku od prethodnih slučajeva, za nalaženje pola P , treba, osim pravaca, takođe da se znaju i intenziteti brzina v_A i v_B .



Sl. 181



Sl. 182

Iz dobivenih rezultata se vidi da su brzine tačaka tela pri ravnom kretanju u svakom trenutku vremena rasporedene tako, kao da se telo obrće oko ose Pz , koja prolazi kroz tačku P upravno na presek S tela. Ova osa zove se *trenutna obrtna osa tela*. Od nepomične obrtne ose trenutna osa razlikuje se po tome što ona za vreme kretanja menja svoj položaj. Ravno kretanje se sastoji, dakle, iz niza uzastopnih elementarnih okretanja oko ovih trenutnih obrtnih osa.

§ 82. Rešavanje zadataka*

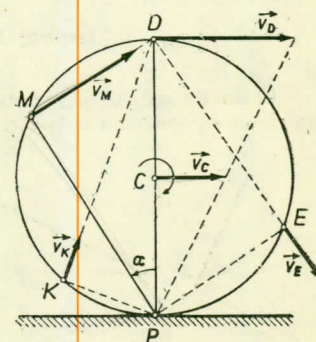
Za određivanje kinematičkih karakteristika kretanja (ugaona brzina tela ili brzine njegovih tačaka) potrebno je da se znaju intenzitet i pravac brzine bilo koje tačke tela (jedne tačke) i pravac brzine druge tačke tela [osim u slučajevima a) i b) navedenih na kraju prethodnog § 81]. Sa određivanjem ovih veličina, na osnovu poznatih podataka, treba započeti rešavanje svakog zadatka.

Mehanizam, čije se kretanje proučava, treba na crtežu prikazati u onom položaju, u kome treba da se odrede odgovarajuće karakteristike. Pri ovim računima treba imati u vidu da pojam trenutnog pola brzina ima mesta samo za jedno kruto telo. U mehanizmu koji se sastoji od nekoliko tela, svako telo koje ne vrši translatorno kretanje ima u datom trenutku svoj trenutni pol brzina i svoju ugaonu brzinu.

Zadatak 68. Odrediti brzinu tačke M na obimu točka, koji se kotrlja (vidi zadatak 67), preko trenutnog pola brzina.

Rešenje. Tačka dodira P točka (sl. 183) je trenutni pol brzina, jer je $v_P = 0$. Prema tome, $\vec{v}_M \perp \overline{PM}$. Kako je ugao PMD periferni ugao u polukrugu, on je prav, pa će vektor brzine $\vec{v}_M$ bilo koje tačke na obimu točka prolaziti kroz tačku D . Ako postavimo proporciju

$$\frac{v_M}{PM} = \frac{v_C}{PC},$$



Sl. 183

* Primer za primenu metoda iznetih u ovom paragrafu dat je takođe u § 96 (zadatak 90)

i ako primetimo da je $\overline{PC} = R$, $\overline{PM} = 2R \cos \alpha$, naći ćemo da je

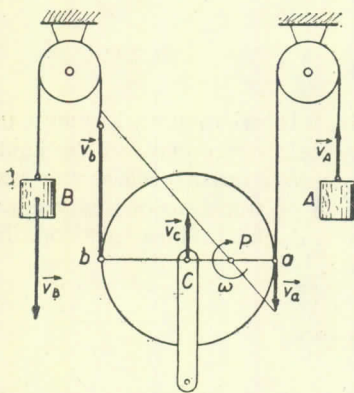
$$v_M = 2v_C \cos \alpha.$$

Ukoliko je tačka M dalja od tačke P , utoliko će njena brzina biti veća; najveću brzinu $v_D = 2v_C$ imaće krajnja tačka D vertikalnog prečnika. Ugaona brzina tačka saglasno formuli (55) biće jednaka:

$$\omega = \frac{v_C}{\overline{PC}} = \frac{v_C}{R}.$$

Analognu sliku rasporeda brzina imaćemo i pri kotrljanju točka ili zupčanika po blo kojoj cilindričnoj površini (vidi sl. 180).

Zadatak 70. Odrediti brzinu središta C pokretnog kotura poluprečnika r i njegovu ugaonu brzinu ω (sl. 184), ako se teret A podiže brzinom v_A , a teret B spušta brzinom v_B . Konopac se pri svom kretanju ne kliza po obimu pokretnog kotura, a njegovi delovi su vertikalni, kako je na slici prikazano.



Sl. 184

Rešenje. Kako se konopac ne kliza po obimu pokretnog kotura to su brzine tačaka a i b kotura jednake po intenzitetu brzinama tereta, tj. $v_a = v_A$ i $v_b = v_B$. Znajući brzine tačaka a i b , i pretpostavljajući radi određenosti zadatka da je $v_B > v_A$, naći ćemo položaj trenutnog pola brzina P pokretnog kotura na isti način kao i u slučaju pokazanom na sl. 182. Brzina središta C kotura prikazana je vektorom $\vec{v}_C$. Da bismo odredili intenzitet brzine v_C i ugaonu brzinu ω pokretnog kotura postavimo, koristeći se formulom (56), jednačine

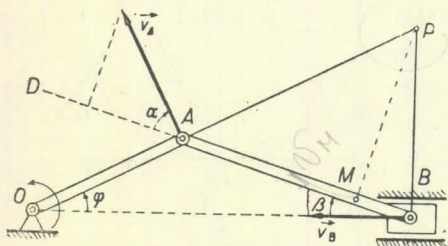
$$\omega = \frac{|\vec{v}_b + (-\vec{v}_a)|}{\overline{ab}}; \quad \omega = \frac{|\vec{v}_b - \vec{v}_C|}{\overline{bC}}.$$

Oдавде, s obzirom da je $\overline{ab} = 2r$, $\overline{bC} = r$, nalazimo:

$$\omega = \frac{v_B + v_A}{2r}, \quad v_C = \frac{v_B - v_A}{2}.$$

Kada je $v_B > v_A$ središte C kotura se podiže; ako je $v_B < v_A$ — ono će se spuštati. Kada je $v_B = v_A$, $v_C = 0$.

U slučaju kada se oba tereta A i B spuštaju vrednosti za ω i v_C naći ćemo ako u dobivenim formulama v_A smenimo sa $-v_A$.



Sl. 185

Zadatak 71. Krivaja OA klipnog mehanizma (sl. 185), dužine r , obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω_{OA} . Dužina klipne poluge je $\overline{AB} = l$. Pri datom uglu φ odrediti: 1) brzinu klizača (ukrsne glave); 2) položaj tačke M klipne poluge AB , koja ima najmanju brzinu; 3) ugaonu brzinu ω_{AB} klipne poluge. Posebno proučiti položaje mehanizma kada je $\varphi = 0$ i $\varphi = 90^\circ$.

Rešenje. Iz datih podataka u ovom zadatku proizilazi da tačka A ima brzinu $v_A = r\omega_{OA}$ normalnu na OA , dok je brzina tačke B usmerena duž prave BO . Ovi podaci su dovoljni za određivanje svih kinematičkih karakteristika poluge AB .

1) Na osnovu teoreme o projekcijama brzina imamo $v_A \cos \alpha = v_B \cos \beta$. Ugao $\angle OAD$, kao spoljašnji ugao trougla OAB , jednak je $\varphi + \beta$. Oдавде je $\alpha = 90^\circ - (\varphi + \beta)$ i

$$v_B = r\omega_{OA} \frac{\sin(\varphi + \beta)}{\cos \beta} = r\omega_{OA} (\sin \varphi + \cos \varphi \operatorname{tg} \beta).$$

Eliminišimo iz ove jednačine ugao β . Iz trougla AOB je

$$\frac{\sin \beta}{r} = \frac{\sin \varphi}{l}.$$

Osim toga imamo:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sin \beta}{\sqrt{1 - \sin^2 \beta}}.$$

U krajnjem rezultatu dobijamo:

$$v_B = r\omega_{OA} \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

2) Ako povučemo normale na brzine u tačkama A i B , odredićemo trenutni pol brzina P za klipnu polugu AB (prava AP je produžetak pravca krivaje OA). Najmanju brzinu imaće tačka M koja je najbliža trenutnom polu P , tj. tačka koja se nalazi na pravoj PM upravnoj na AB . Brzina te tačke je

$$v_M = v_A \cos \alpha = r\omega_{OA} \sin(\varphi + \beta).$$

3) Ugaona brzina poluge AB saglasno formuli (55) biće jednaka

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{PA}, \quad \text{odnosno} \quad \omega_{AB} = \frac{v_B}{PB}.$$

Dužina PB ili PA može da se izračuna na osnovu podataka koji su dati u ovom zadatku.

4) Kada je ugao $\varphi = 0$ (sl. 186, a), normala $\vec{v}_A$ na brzinu $\vec{v}_A$ i normala Bb na pravac brzine $\vec{v}_B$ seku se u tački B . Prema tome, tačka B je u datom položaju trenutni pol brzina, pa je $v_B = 0$ (»mrtvi« položaj mehanizma). U ovom položaju je

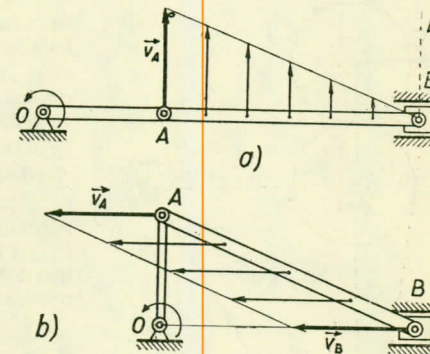
$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AB} = \frac{r}{l} \omega_{OA}.$$

Raspored brzina tačaka klipne poluge AB je pokazan na crtežu.

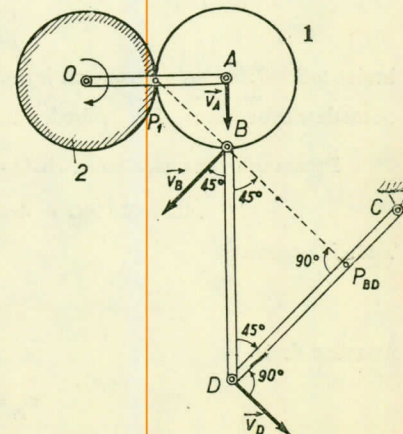
5) Pri uglu $\varphi = 90^\circ$ (sl. 186, b) brzine $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ su paralelne međusobno tako da se njihove normale seku u beskonačnosti. Prema tome, u tom trenutku sve tačke klipne poluge AB imaju iste brzine, koje su jednake $\vec{v}_A$; $\omega_{AB} = 0$.

Zadatak 72. Krivaja OA (sl. 187), koja se obrće oko ose O ugaonom brzinom ω_{OA} nosi na svom kraju osovinu pokretnog zupčanika 1, koji se kotrlja bez klizanja po nepomičnom zupčaniku 2. Poluprečnici zupčanika su jednaki međusobno i iznose r . Za zupčanik 1 zglobov je vezana poluga BD , dužine l , koja je spojena za balansijer DC . Odrediti ugaonu brzinu ω_{BD} poluge u trenutku kada je ona upravna na krivaji OA , ako je u tom trenutku $\angle BDC = 45^\circ$.

Rešenje. Za određivanje ω_{BD} potrebno je da se zna brzina bilo koje tačke poluge BD i položaj njenog trenutnog pola brzina. Odredimo brzinu tačke B , koristeći se time što ona istovremeno pripada i zupčaniku 1. Za zupčanik 1 poznata je brzina $v_A = 2r\omega_{OA}$ ($\vec{v}_A \perp \overline{OA}$) i trenutni pol brzina P_1 . Prema tome, $\vec{v}_B \perp \overline{PB}$, pa na osnovu teoreme o projekcijama brzina biće $v_B \cos 45^\circ = v_A$, odakle je $v_B = v_A \sqrt{2} = 2r\omega_{OA} \sqrt{2}$.



Sl. 186



Sl. 187

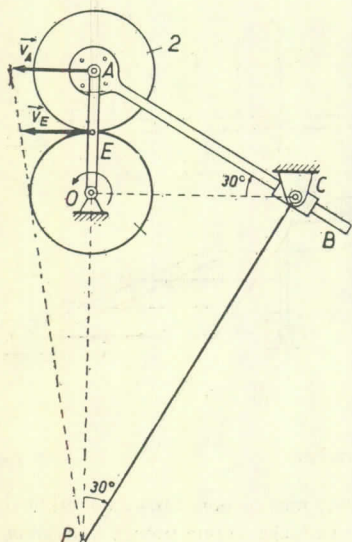
Sada je za polugu BD poznata brzina $\vec{v}_B$ i pravac brzine $\vec{v}_D$ ($\vec{v}_D \perp \overline{DC}$). Ako spustimo normale na brzine $\vec{v}_B$ i $\vec{v}_D$, odredićemo položaj trenutnog pola brzina P_{BD} poluge. Tom prilikom lako je videti da je odsečak

$$\overline{BP}_{BD} = \frac{1}{2} l \sqrt{2}.$$

Tada je

$$\omega_{BD} = \frac{v_B}{BP_{BD}} = 4 \frac{r}{l} \omega_{OA}.$$

Primitimo da ne treba određivati položaj trenutnog pola brzina povlačenjem normala na vektore $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_D$ (karakteristična greška). Tačke A i D pripadaju različitim telima i presek pomenutih normala ne određuje nikakav trenutni pol brzina (sравни sa zadatkom 73.).



Sl. 188

Zadatak 73. Na osovinu O (sl. 188) nasadena su nezavisno jedan od drugog zupčanik 1 i krivaja OA , koja se obrće ugaonom brzinom ω_{OA} . Krivaja nosi osovinu A zupčanika 2, čvrsto vezanu za polugu AB , koja prolazi kroz obrtni zglob C . Poluprečnici zupčanika 1 i 2 su jednaki. Odrediti ugaonu brzinu ω_1 zupčanika 1 u trenutku kada je $\overline{OA} \perp \overline{OC}$, ako je u tom položaju $\angle ACO = 30^\circ$.

Rešenje. Da bismo odredili ugaonu brzinu ω_1 zupčanika 1 potrebno je da se odredi brzina njegove tačke E . Tu brzinu ćemo naći koristeći se time da istu tu brzinu ima i tačka E na zupčaniku 2. Za zupčanik 2 poznat je pravac i intenzitet brzine tačke A :

$$\vec{v}_A \perp \overline{OA}, \quad v_A = 2r\omega_{OA},$$

(r — poluprečnik zupčanika);

Osim toga, poznat je i pravac brzine $\vec{v}_E$; međutim, u datim slučaju to je nedovoljno, jer je $\vec{v}_E \parallel \vec{v}_A$. Po teoremi o projekcijama brzina veličina v_E ne može takođe da se odredi, jer su brzine $\vec{v}_E$ i $\vec{v}_A$ upravne na AE .

Prema tome, za dalje rešavanje ovog zadatka iskoristićemo činjenicu da zupčanik 2 i poluga AB obrazuju jedno telo (oni su čvrsto spojeni). Za to telo poznat je pravac

brzine tačke C : vektor $\vec{v}_C$ usmeren je duž CA , jer u tački C poluga prolazi kroz zglob. Ako spustimo normale na brzine $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_C$ odredićemo položaj trenutnog pola brzina P tela BAE .

Prema uslovima zadatka $\angle ACO = 30^\circ$; prema tome, i $\angle CPA = 30^\circ$. Izlazi da je

$$\overline{AC} = 2 \cdot \overline{AO} = 4r, \quad \overline{PA} = 2 \overline{AC} = 8r, \quad \overline{PE} = 7r.$$

Tada iz proporcije

$$\frac{v_E}{PE} = \frac{v_A}{PA},$$

nalazimo da je

$$v_E = \frac{7}{8} v_A = \frac{7}{4} r \omega_{OA}$$

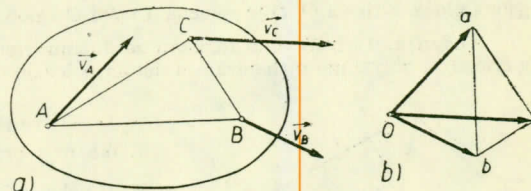
Odatle je

$$\omega_1 = \frac{v_E}{OE} = \frac{7}{4} \omega_{OA}.$$

§ 83.* Plan brzina

Brzine tačaka tela mogu se odrediti i grafičkim putem konstruisanjem plana brzina. *Planom brzina* naziva se dijagram na kome su od neke tačke naneti vektori brzina pojedinih tačaka tela.

Neka su $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$ — brzine tačaka A, B, C datog tela (sl. 189, a). Tada odgovarajući plan brzina dobijamo ako iz neke tačke O (sl. 189, b) u izabranoj razmeri nanesemo vektore



Sl. 189

$$\vec{Oa} = \vec{v}_A, \quad \vec{Ob} = \vec{v}_B, \quad \vec{Oc} = \vec{v}_C.$$

Ustanovimo svojstva i pravila konstruisanja plana brzina. Prema formulama (50) i (51) (vidi § 79) imamo da je:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A \quad (57)$$

gde je

$$\vec{v}_B^A \perp \overline{AB} \quad \text{i} \quad v_B^A = \overline{AB} \cdot \omega. \quad (57')$$

Međutim, iz trougla Oab se vidi da je $\vec{Ob} = \vec{Oa} + \vec{ab}$, ili $\vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{ab}$. Ako uporedimo ovaj rezultat sa jednačinom (57), dobijamo $\vec{ab} = \vec{v}_B^A$. Analognim putem nalazimo da je $\vec{ac} = \vec{v}_C^A$, itd. Tada prema formulama (57') imamo

$$\overline{ab} \perp \overline{AB}, \quad \overline{ac} \perp \overline{AC}, \text{ itd.} \quad (58)$$

Osim toga, po tim istim formulama je $\overline{ab} = \overline{AB} \cdot \omega$, zatim $\overline{ac} = \overline{AC} \cdot \omega$, itd., odakle proizlazi

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{ac}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{bc}}{\overline{BC}} = \dots = \omega. \quad (58')$$

Prema tome, *odsečki koji spajaju krajeve vektora brzina u planu brzina upravni su na odsečke, koji spajaju odgovarajuće tačke tela, i po intenzitetu proporcionalni su tim odsečcima*; figure, označene u planu brzina i u preseku (S) tela istim slovima, biće tom prilikom slične i okrenute jedna u odnosu na drugu za 90° .

Odnosi (58) i (58') omogućuju da se konstruiše plan brzina i da se odredi brzina bilo koje tačke tela ako je poznat intenzitet i pravac brzine jedne tačke tela i pravac brzine druge tačke tog tela.

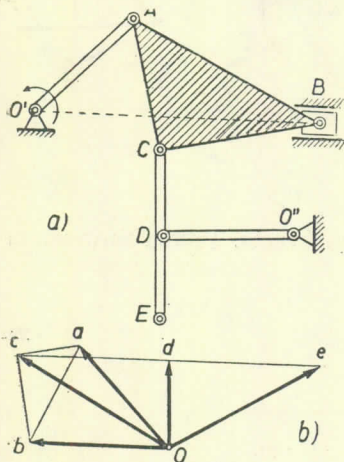
Ugaona brzina tela ako je poznat plan brzina nalazi se po formuli (58').

Plan brzina jednog mehanizma konstruiše se tako da predstavlja skup planova brzina svih pojedinih njegovih delova (pojedinih tela iz kojih se sastoji mehanizam).

Tom prilikom se svi vektori brzina nanose iz jedne iste tačke O . Primer ovakve konstrukcije dat je u zadatku 74.

Zadatak 74. Konstruisati plan brzina mehanizma (sl. 190, a) za položaj koji je prikazan na crtežu, ako je brzina $\vec{v}_A$ kraja krivaje $O'A$ poznata. Poluga ABC napravljena je kao kruta trougaona ploča. Krivaja $O'D$ je spojena u tački D zglobovom za sredinu štapa CE ($\overline{CD} = \overline{DE}$).

Rešenje. 1) Izaberimo razmeru za dužinu (npr., 0,1 m u stvarnosti prikazaćemo sa 1 cm na crtežu), i nacrtajmo mehanizam u datom položaju u datoj razmeri (sl. 190, a).



SL. 190

2) Određivanje $\vec{v}_B$. Usvojimo razmeru za brzinu (npr. 0,5 m/s prikazaćemo sa 1 cm) i nanesimo u toj razmeri od neke tačke O vektor $\vec{Oa} = \vec{v}_A$, usmeren normalno na $O'A$ (sl. 190, b). Iz istog centra povucimo takođe pravu Ob , paralelnu brzini $\vec{v}_B$, koja je usmerena duž prave BO' , a iz tačke a — pravu $ab \perp AB$ do preseka sa pravom Ob . Tada, saglasno (58), tačka b određuje kraj vektora $\vec{Ob} = \vec{v}_B$.

3) Određivanje $\vec{v}_C$. Iz tačke a povucimo pravu upravnu na AC , a iz tačke b — pravu upravnu na BC . Presek tih normala određuje, saglasno (58), tačku c . Ako spojimo tačke O i c odredićemo vektor $\vec{Oc} = \vec{v}_C$.

4) Određivanje $\vec{v}_D$. Pravac brzine $\vec{v}_D$ je poznat ($\vec{v}_D \perp O'D$). Povucimo iz centra O pravu Od paralelnu vektoru $\vec{v}_D$, a iz tačke c — pravu upravnu na CD . U preseku ovih pravih nalazi se tačka d . Ako spojimo tačke O i d nacićemo vektor $\vec{Od} = \vec{v}_D$.

5) Određivanje $\vec{v}_E$. Tačka E mehanizma leži na pravoj CDE ; prema tome, na osnovu sličnosti, tačka e u planu brzina treba takođe da leži na pravoj cde . Tom prilikom, saglasno (58') mora biti $\overline{cd} : \overline{de} = \overline{CD} : \overline{DE}$. Kako je $\overline{DE} = \overline{CD}$ to ćemo tačku e odrediti ako na produžetku prave cd naneseemo odsečak $\overline{de} = \overline{cd}$. Kada spojimo tačke O i e dobićemo $\vec{Oe} = \vec{v}_E$.

Primedba. Odnos (58) važi samo za jedno isto kruto telo. Prema tome, npr., odsečak $\overline{be}$ u planu brzina neće biti upravan na BE , jer tačke B i E mehanizma pripadaju raznim krutini telima.

Ugaone brzine poluga ABC i CE u datom trenutku vremena izračunavaju se saglasno jednačini (58') po formulama:

$$\omega_{ABC} = \frac{\overline{ab}}{\overline{BA}}, \quad \omega_{CE} = \frac{\overline{cd}}{\overline{CD}},$$

(pri izračunavanju svih tih veličina treba voditi računa o razmerama).

§ 84. Određivanje ubrzanja tačaka tela

Pokažimo da se ubrzanje bilo koje tačke tela M pri ravnom kretanju (slično kao i brzina) sastoji iz ubrzanja, koje ta tačka ima pri translatornom i pri obrtnom kretanju posmatranog tela. Položaj tačke M prema koordinatnom sistemu Oxy (sl. 174) određen je vektorom položaja $\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{r}'$, gde je $\vec{r}' = \vec{AM}$. Tada je

$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} + \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2}$$

U dobijenoj jednačini veličina $\frac{d^2 \vec{r}_A}{dt^2} = \vec{a}_A$ jednaka je ubrzanju pola A , dok veličina $\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{a}_M^A$ određuje ubrzanje tačke M pri obrtanju zajedno sa telom oko pola A (vidi § 79). Prema tome je

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A. \quad (59)$$

Pri tome će ubrzanje $\vec{a}_M^A$ tačke M pri obrtnom kretanju oko pola A po formuli (46) i (47) (vidi § 76) biti:

$$a_M^A = \overline{AM} \sqrt{\dot{\omega}^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{|\dot{\omega}|}{\omega^2}, \quad (60)$$

gde je ω i $\dot{\omega}$ — ugaona brzina i ubrzanje tela*, a α — je ugao između pravaca ubrzanja $\vec{a}_M^A$ i odsečka $\overline{AM}$.

Na taj način, ubrzanje bilo koje tačke M tela jednako je geometrijskom zbiru iz ubrzanje neke druge tačke tela, koja je uzeta za pol, i ubrzanja tačke M pri njenom obrtanju zajedno sa telom oko tog pola.

Intenzitet i pravac ubrzanja $\vec{a}_M$ nalazimo konstrukcijom odgovarajućeg paralelograma (sl. 191).

Treba napomenuti da izračunavanje veličine $\vec{a}_M$ konstruisanjem paralelograma prikazanog na sl. 191 unekoliko usložava čitav račun, jer je potrebno prethodno odrediti ugao α , a zatim ugao

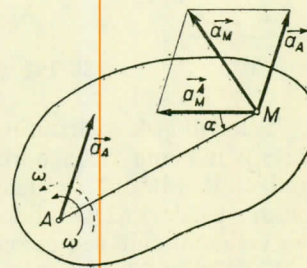
između vektora $\vec{a}_M^A$ i $\vec{a}_A$. Iz tog razloga pri rešavanju zadataka korisno je da se vektor $\vec{a}_M^A$ zameni njegovom tangencijalnom $(\vec{a}_M^A)_T$ i normalnom komponentom $(\vec{a}_M^A)_N$, tako da je

$$(\vec{a}_M^A)_T = \overline{AM} \cdot \dot{\omega}, \quad (\vec{a}_M^A)_N = \overline{AM} \cdot \omega^2. \quad (61)$$

Vektor $(\vec{a}_M^A)_T$ upravan je na AM i ima smer obrtanja, ako je obrtanje ubrzano, odnosno ima smer suprotan obrtanju, ako je obrtanje usporeno; vektor $(\vec{a}_M^A)_N$ usmeren je uvek od tačke M ka polu A (sl. 192).

Tada umesto jednačine (59) dobijamo:

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + (\vec{a}_M^A)_T + (\vec{a}_M^A)_N. \quad (62)$$



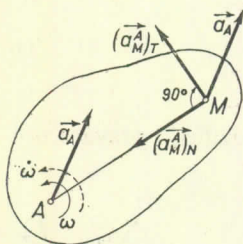
Sl. 191

* Na crtežu puni luk pokazuje smer ugaone brzine ω (smer obrtanja), a iscrtkani luk — smer (znak) ugaonog ubrzanja $\dot{\omega}$. Pri ubrzanom obrtanju obe strelice biće usmerene u istu stranu, dok će pri usporenim obrtanju biti usmerene u suprotne strane.

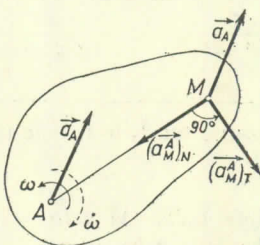
Ako pol A ne vrši pravolinijsko kretanje, već se kreće krivolinijski, onda će se i njegovo ubrzanje sastojati iz dve komponente: tangencijalne i normalne, tako da je tada

$$\vec{a}_M = (\vec{a}_A)_T + (\vec{a}_A)_N + (\vec{a}_M^A)_T + (\vec{a}_M^A)_N. \quad (62')$$

Pri tome će se intenziteti dveju poslednjih komponentata odrediti prema formulama (61). Formule (61) i (62) koriste se pri rešavanju zadataka na taj način što se prvo odrede vektori koji stoje na desnim stranama tih jednačina, pa se posle odredi njihov geometrijski zbir, ili pak na taj način što se izvrši odgovarajuća grafička konstrukcija.



Sl. 192

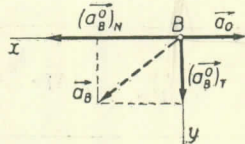
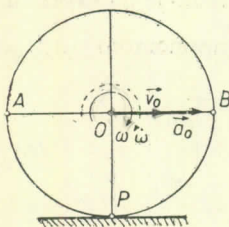


Rešavanje zadataka. Ubrzanje bilo koje tačke tela u datom trenutku vremena može da se odredi ako su poznati: 1) vektori brzine i ubrzanja $\vec{v}_A$ i $\vec{a}_A$ neke tačke A tela u tom trenutku; 2) putanja neke druge tačke B tela. U mnogim slučajevima umesto putanje druge tačke tela dovoljno je da se zna položaj trenutnog pola brzina.

Telo (ili pak mehanizam) pri rešavanju zadatka treba da se nacrtu u onom položaju u kome treba odrediti ubrzanje odgovarajuće tačke. Račun započinjemo određivanjem brzine i ubrzanja tačke koju uzimamo za pol. Tok proračuna u posebnim slučajevima detaljno je izveden pri rešavanju dole navedenih zadataka. Tom prilikom daju se i razna objašnjenja.

U zadatku 77. pokazana je grafička metoda računanja.

Zadatak 75. Središte O točka, koji se kotrlja po pravolinijskom putu (šini) (sl. 193), ima u datom trenutku vremena brzinu $v_O = 1$ m/s i ubrzanje $a_O = 2$ m/s². Poluprečnik točka jednak je $R = 0,2$ m. Odrediti ubrzanje tačke B — kraja prečnika AB , koji je upravan na OP , i ubrzanje tačke P , koja se poklapa sa trenutnim polom brzina.



Sl. 193

Rešenje. 1) Kako su $\vec{v}_O$ i $\vec{a}_O$ poznati usvojimo tačku O za pol.

2) Određivanje ω . Tačka dodira P je trenutni pol brzina; prema tome, ugaona brzina točka je

$$\omega = \frac{v_O}{PO} = \frac{v_O}{R}. \quad (a)$$

Pravac i smer za ω određuje se na osnovu pravca i smera brzine $\vec{v}$; oni su pokazani na crtežu punim lukom sa strelicom.

3) Određivanje $\dot{\omega}$. Kako u jednačini (a) veličina $\overline{PO} = R$ ostaje konstantna pri bilo kom položaju točka, to diferencirajući ovu jednačinu po vremenu dobijamo

$$\frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{1}{R} \frac{dv_O}{dt}, \quad \text{odnosno} \quad \dot{\omega} = \frac{a_O}{R}. \quad (b)$$

Znaci za $\dot{\omega}$ i ω se poklapaju, pa je, prema tome, obrtanje točka ubrzano. Važno je zapamtiti da veličina $\dot{\omega}$ može da se odredi preko jednačine (b) samo u tom slučaju kada je rastojanje $\overline{PO}$ u formuli (a) konstantno.

Primedbe. a) Ne treba misliti da je veličina v_O konstantna, ako je po uslovima zadatka $v_O = 1$ m/s. Veličina v_O u zadatku data je za određeni trenutak vremena; u toku vremena veličina v_O se menja, jer je $a_O \neq 0$.

b) U datom slučaju je $\frac{dv_O}{dt} = \dot{v}_O = a_O$, jer se tačka O kreće pravolinijski. U opštem slučaju je $\frac{dv_O}{dt} = (a_O)_T$.

4) Određivanje $(a_B)_T$ i $(a_B)_N$. Kako se pol nalazi u tački O , to je po formuli (62)

$$\vec{a}_B = \vec{a}_O + (\vec{a}_B)_T + (\vec{a}_B)_N. \quad (c)$$

U našem slučaju je $\overline{BO} = R$ i

$$(a_B)_T = \overline{BO} \cdot \dot{\omega} = a_O = 2 \text{ m/s}^2; \quad (a_B)_N = \overline{BO} \cdot \omega^2 = \frac{v_O^2}{R} = 5 \text{ m/s}^2. \quad (d)$$

Prikažimo na crtežu tačku B odvojeno i povucimo (ne vodeći računa o razmeri) vektore iz kojih se sastoji vektor $\vec{a}_B$, tj. vektor $\vec{a}_O$ (povlačimo iz tačke O), vektor $(\vec{a}_B)_T$ (povlačimo u stranu obrtanja, jer je ono ubrzano) i vektor $(\vec{a}_B)_N$ (povlačimo uvek od tačke B ka polu O).

5) Izračunavanje $\vec{a}_B$. Ako povučemo ose Bx i By , naćićemo da je

$$a_{Bx} = (a_B)_N - a_O = 3 \text{ m/s}^2, \quad a_{By} = (a_B)_T = 2 \text{ m/s}^2,$$

odakle je

$$a_B = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = \sqrt{13} \approx 3,6 \text{ m/s}^2.$$

Analognim putem lako je naći da je ubrzanje tačke P jednako $a_P = (a_P)_N = 5 \text{ m/s}^2$ i da je usmereno duž PO . Na taj način, ubrzanje tačke P , čija je brzina u datom trenutku jednaka nuli, nije jednako nuli.

Zadatak 76. Po nepomičnom zupčaniku 1, poluprečnika $r_1 = 0,3$ m, kotrlja se zupčanik 2, poluprečnika $r_2 = 0,2$ m, koji je nasaden na krivaju OA (sl. 194, a). Krivaja, koja se obrće oko ose O ima u datom trenutku ugaonu brzinu $\omega = 1 \text{ s}^{-1}$ i ugaono ubrzanje $\dot{\omega} = -4 \text{ s}^{-2}$. Odrediti u tom trenutku vremena ubrzanje tačke D koja se nalazi na obimu pokretnog zupčanika (poluprečnik AD upravan je na krivaju).

Rešenje. 1) Za rešenje zadatka potrebno je da se razmotri kretanje zupčanika 2. Na osnovu datih podataka lako je naći brzinu $\vec{v}_A$ i ubrzanje $\vec{a}_A$ tačke A ovog zupčanika, koju ćemo uzeti za pol.

2) Određivanje $\vec{v}_A$ i $\vec{a}_A$. Znajući ω i $\dot{\omega}$ krivaje nalazimo

$$v_A = \overline{OA} \cdot \omega = 0,5 \text{ m/s},$$

$$(a_A)_T = \overline{OA} \cdot \dot{\omega} = -2 \text{ m/s}^2,$$

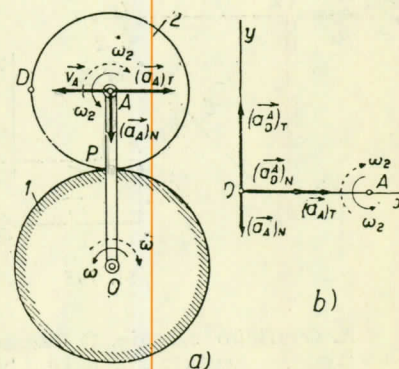
$$(a_A)_N = \overline{OA} \cdot \omega^2 = 0,5 \text{ m/s}^2.$$

Kako su znaci za v_A i $(a_A)_T$ različiti, to je kretanje tačke A iz datog položaja usporeno. Vektori $(a_A)_T$ i $(a_A)_N$ imaju pravce, koji su pokazani na crtežu.

3) Određivanje ω_2 . Tačka dodira P je trenutni pol brzina za zupčanik 2; prema tome ugaona brzina zupčanika 2 je jednaka

$$\omega_2 = \frac{v_A}{PA} = \frac{v_A}{r_2}, \quad \omega_2 = 2,5 \text{ s}^{-1}.$$

Smer za ω_2 (smer obrtanja zupčanika) određuje se na osnovu smera brzine $\vec{v}_A$ i na crtežu je prikazan punom strelicom.



Sl. 194

4) Određivanje $\dot{\omega}_2$. Kao i u prethodnom zadatku veličina $\overline{PA} = r_2$ za sve vreme kretanja je konstantna. Prema tome

$$\dot{\omega}_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \frac{dv_A}{dt} = \frac{(\dot{a}_A)_T}{r_2}, \quad \dot{\omega}_2 = -10 \text{ s}^{-2}. \quad (c)$$

Kako su znaci za ω_2 i $\dot{\omega}_2$ različiti, to je obrtanje zupčanika 2 usporeno.

5) Određivanje $(\vec{a}_D)_T$ i $(\vec{a}_D)_N$. Ubrzanje tačke D određujemo po formuli (62')

$$\vec{a}_D = (\vec{a}_A)_T + (\vec{a}_A)_N + (\vec{a}_D)_T + (\vec{a}_D)_N.$$

U našem slučaju je $\overline{DA} = r_2$, i

$$(\vec{a}_D)_T = \overline{DA} \cdot \dot{\omega}_2 = -2 \text{ m/s}^2; \quad (\vec{a}_D)_N = \overline{DA} \cdot \omega_2^2 = 1,25 \text{ m/s}^2.$$

Prikažimo na crtežu (sl. 194, b) vektore iz kojih se sastoji ubrzanje $\vec{a}_D$, tj.: $(\vec{a}_A)_T$, $(\vec{a}_A)_N$ (prenosimo iz tačke D); $(\vec{a}_D)_T$ (uzimamo u smeru suprotnom smeru obrtanja, jer je obrtanje usporeno); $(\vec{a}_D)_N$ (uzimamo od D ka polu A).

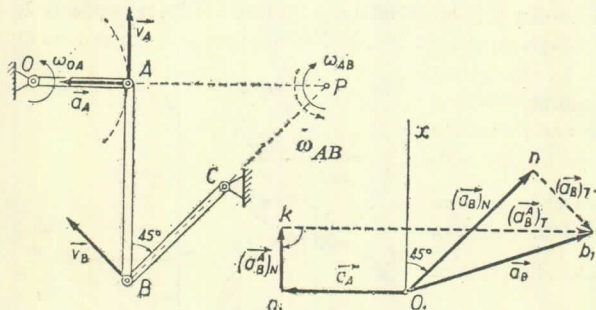
6) Izračunavanje $\vec{a}_D$. Ako povučemo ose Dx i Dy , naćićemo da je

$$a_{Dx} = |(\vec{a}_A)_T| + (\vec{a}_D)_N = 3,25 \text{ m/s}^2, \quad a_{Dy} = |(\vec{a}_D)_T| - (\vec{a}_A)_N = 1,5 \text{ m/s}^2,$$

odakle je

$$a_D = \sqrt{a_{Dx}^2 + a_{Dy}^2} \approx 3,58 \text{ m/s}^2.$$

Veličinu $\vec{a}_D$ možemo takođe odrediti i grafičkim putem ako u izabranoj razmeri konstruišemo vektorski poligon od vektora $(\vec{a}_A)_T$, $(\vec{a}_A)_N$, $(\vec{a}_D)_T$, $(\vec{a}_D)_N$.



Sl. 195

Zadatak 77. Za krivaju OA , koja se ravnomerno obrće oko ose O ugaonom brzinom $\omega_{OA} = 4 \text{ s}^{-1}$ (sl. 195), pričvršćena je poluga AB , koja je vezana za balansijer BC . Date su dimenzije: $\overline{OA} = r = 0,5 \text{ m}$, $\overline{AB} = 2r$, $\overline{BC} = r\sqrt{2}$. U položaju prikazanom na crtežu, $\sphericalangle OAB = 90^\circ$, $\sphericalangle ABC = 45^\circ$. Odrediti za ovaj položaj ubrzanje tačke B poluge, a takođe i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje balansijera BC .

Rešenje. Zadatak se može rešiti grafičkim ili analitičkim putem.

A. Grafičko rešenje. 1) Razmatrajući kretanje poluge AB izaberimo tačku A za pol. Kako je $\omega_{OA} = \text{const.}$, to će za tačku A biti

$$v_A = r\omega_{OA} = 2 \text{ m/s}, \quad a_A = (\vec{a}_A)_N = r\omega_{OA}^2 = 8 \text{ m/s}^2.$$

Prikažimo vektore $\vec{v}_A$ i $\vec{a}_A$ na crtežu.

2) Određivanje ω_{AB} . Putanja tačke B poluge je poznata (krug poluprečnika) $\overline{BC}$. Kako onda znamo pravac brzine $\vec{v}_B$ ($\vec{v}_B \perp BC$), odredimo položaj trenutnog pola brzina poluge AB . Lako je videti da je $\overline{AP} = \overline{AB} = 2r$.

Tada je

$$\omega_{AB} = \frac{v_A}{AP}, \quad \text{odnosno} \quad \omega_{AB} = \frac{1}{2} \omega_{AO} = 2 \text{ s}^{-1}. \quad (b)$$

Smer okretanja prikazan je na crtežu.

U ovom slučaju rastojanje $\overline{PA}$ pri kretanju mehanizma ne ostaje konstantno i za određivanje ω_{AB} ne može da se upotrebi isti način kao u prethodna dva zadatka. Iz tog razloga u ovom zadatku bolje je da se primeni grafička metoda rešavanja. U tom cilju odredimo prethodno veličine $(a_B^A)_N$ i $(a_B)_N$.

3) Određivanje $(a_B^A)_N$. Znajući ω_{BA} po formuli (61) nalazimo

$$(a_B^A)_N = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}^2 = 4 \text{ m/s}^2. \quad (c)$$

4) Određivanje $(a_B)_N$. Kako je poznata putanja tačke B možemo odrediti normalno ubrzanje $(a_B)_N$ te tačke. U tom cilju najpre na osnovu teoreme o projekcijama brzina (ili pomoću trenutnog pola brzina P) odredimo brzinu v_B . Na taj način dobijamo $v_B \cos 45^\circ = v_A$, odakle je $v_B = v_A \sqrt{2}$. Tada je

$$(a_B)_N = \frac{v_B^2}{\overline{BC}} = \frac{2v_A^2}{r\sqrt{2}} = 8\sqrt{2} \text{ m/s}^2. \quad (d)$$

Primerba. Ako je za mehanizam konstruisan plan brzina, onda:

a) veličinu ω_{AB} možemo odrediti po formuli (58): $\omega_{AB} = \frac{\overline{ab}}{\overline{AB}}$. U tom slučaju proračune u tačkama pod 2 i 3 možemo izostaviti i odrediti nepoznatu $(a_B^A)_N$ iz jednačine

$$(a_B^A)_N = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}^2 = \frac{(\overline{ab})^2}{\overline{AB}};$$

b) veličinu v_B koja je potrebna radi određivanja $(a_B)_N$ možemo takođe odrediti iz plana brzina.

5) Određivanje $\vec{a}_B$. Primetimo da je, s jedne strane, $\vec{a}_B = (\vec{a}_B)_T + (\vec{a}_B)_N$; s druge strane, veličina $\vec{a}_B$ određena je formulom (62). Odavde sleduje da je

$$\vec{a}_A + (\vec{a}_B)_N + (\vec{a}_B)_T = (\vec{a}_B)_N + (\vec{a}_B)_T. \quad (e)$$

Izrazimo ovu jednačinu grafičkim putem. Iz proizvoljnog centra O_1 u izabranoj razmeri povucimo vektor $\vec{O_1a_1} = \vec{a}_A$; zatim od tačke a_1 povucimo vektor $\vec{a_1k} = (\vec{a}_B)_N \parallel [(\vec{a}_B)_N \parallel \overline{AB}]$ i kroz tačku k povucimo pravu kb_1 upravnu na a_1k . Ova prava određuje pravac $(\vec{a}_B)_T$ i negde na njoj leži kraj traženog vektora $\vec{a}_B$.

Sada, iz tačke O_1 povucimo vektor $\vec{O_1n} = (\vec{a}_B)_N \parallel [(\vec{a}_B)_N \parallel \overline{BC}]$, a zatim upravno na njega pravu nb_1 , koja određuje pravac $(\vec{a}_B)_T$. Kraj vektora $\vec{a}$ treba, takođe, da leži na toj pravoj. Prema tome, tačka b_1 , u kojoj se seku prave kb_1 i nb_1 , određuje kraj vektora $\vec{a}_B^*$. Na taj način je $\vec{a}_B = \vec{O_1b_1}$. Ako izmerimo dužinu $\overline{O_1b_1}$ i ako uzmemo u obzir razmere naći ćemo da je u našem slučaju $a_B \approx 13 \text{ m/s}^2$.

Istovremeno sleduje iz konstrukcije da je $\vec{kb_1} = (\vec{a}_B)_T$ i $\vec{nb_1} = (\vec{a}_B)_T$.

Ako na isti način (iz istog centra O povučemo ubrzanja i drugih tačaka mehanizma, dobićemo dijagram, koji se zove *plan ubrzanja*.

* Kad bi u zadatku bio od ranije poznat pravac vektora $\vec{a}_B$, onda bismo vektor $\vec{a}_B = \vec{O_1b_1}$ našli odmah kao presek prave kb_1 i prave $O_1b_1 \parallel \vec{a}_B$.

6) Određivanje $\dot{\omega}_{AB}$. Ako izmerimo dužinu $\overline{kb_1}$ naći ćemo po formuli (61)

$$|\dot{\omega}_{AB}| = \frac{|(a_B^A)_T|}{\overline{BA}} = \frac{\overline{kb_1}}{AB}.$$

Račun, uzimajući u obzir razmere, daje $|\dot{\omega}_{AB}| = 20 \text{ s}^{-2}$. Iz crteža se vidi da će vektor $\vec{v}_B^A = \vec{v}_B - \vec{v}_A$ biti usmeren suprotno od smera vektora $(a_B^A)_T$; prema tome, obrtanje štapa AB je usporeno, a $\dot{\omega}_{AB} = -20 \text{ s}^{-2}$.

B. Analitičko određivanje a_B . Kada izvršimo sve račune, koji su izvršeni u tačkama pod 1 do 4, konstruišimo kao i pri grafičkom rešavanju vektorski poligon, koji izražava jednačinu (e).

Zatim povucimo koordinatnu osu O_1x upravno na nepoznati vektor $(a_B^A)_T$ i projiciramo obe strane vektorske jednačine (e) na tu osu. Tada izlazi da je:

$$(a_B^A)_N = (a_B)_N \cos 45^\circ - |(a_B)_T| \cos 45^\circ.$$

Oдавде nalazimo:

$$|(a_B)_T| = (a_B)_N - (a_B^A)_N \sqrt{2} = 8 \sqrt{2} - 4 \sqrt{2} = 4 \sqrt{2}.$$

Konačno dobijamo:

$$a_B = \sqrt{[(a_B)_T]^2 + [(a_B)_N]^2} = 4 \sqrt{10} \approx 12,65 \text{ m/s}^2.$$

Ako je potrebno da se bročanim računom odredi $\dot{\omega}_{AB}$ onda, projiciranjem obe strane jednačine (e) na osu O_1n , upravnu na $(a_B^A)_T$, nalazimo

$$-a_A \cos 45^\circ + (a_B^A)_N \cos 45^\circ + |(a_B^A)_T| \cos 45^\circ = (a_B)_N.$$

Oдавде proizlazi da je:

$$|(a_B^A)_T| = a_A - (a_B^A)_N + (a_B)_N \sqrt{2} = 20 \text{ m/s}^2,$$

$$|\dot{\omega}_{AB}| = \frac{|(a_B^A)_T|}{AB} = 20 \text{ s}^{-2}.$$

Posle određivanja, bilo grafičkim, bilo analitičkim putem, veličina v_B i $(a_B)_T$, mogu da se nađu ugaona brzina i ugaono ubrzanje balansirajera BC iz formula:

$$\omega_{BC} = \frac{v_B}{BC}, \quad |\dot{\omega}_{BC}| = \frac{|(a_B)_T|}{BC}.$$

Konačni račun daje: $\omega_{BC} = 4 \text{ s}^{-1}$, $\dot{\omega}_{BC} = -8 \text{ s}^{-2}$ (znak minus dolazi iz razloga što je smer ubrzanja $(a_B)_T$ suprotan smeru brzine $\vec{v}_B$).

§ 85*. Trenutni pol ubrzanja

Kada telo vrši ravno kretanje onda u svakom trenutku postoji tačka P_a njegovog preseka čije je ubrzanje jednako nuli. Ta tačka zove se *trenutni pol ubrzanja*. Određivanje položaja trenutnog pola ubrzanja P_a , ako je poznato ubrzanje $\vec{a}_A$ neke tačke A tela i veličine ω i $\dot{\omega}$, vrši se na sledeći način:

1) Najpre treba odrediti ugao α po formuli $\text{tg } \alpha = \frac{|\dot{\omega}|}{\omega^2}$

2) Zatim, iz tačke A pod uglom α prema vektoru $\vec{a}_A$, povlačimo pravu AE (sl. 196); pri tome se ugao α računa od vektora $\vec{a}_A$ u smeru obrtanja, ako je obrtanje ubrzano, odnosno u smeru suprotnom obrtanju, ako je obrtanje usporeno.

3) Zatim se duž prave AE nanese odsečak $\overline{P_a A}$ jednak

$$\overline{P_a A} = \frac{a_A}{\sqrt{\omega^2 + \omega^4}} \quad (63)$$

Tačka P_a , određena na ovaj način, biće trenutni pol ubrzanja. Naime, prema formulama (59) i (60), biće

$$\vec{a}_{P_a} = \vec{a}_A + \vec{a}_{P_a A}$$

gde je $a_{P_a A} = \overline{P_a A} \sqrt{\omega^2 + \omega^4}$. Stavljajući vrednost za $\overline{P_a A}$ iz jednačine (63) nalazimo da je $a_{P_a A} = a_A$. Osim toga vektor $\vec{a}_{P_a A}$ treba da obrazuje sa pravom $P_a A$ ugao α , pa je, prema tome, vektor $\vec{a}_{P_a A}$ kolinearan sa vektorom $\vec{a}_A$, ali je samo usmeren u suprotnu stranu. Prema tome je $\vec{a}_{P_a A} = -\vec{a}_A$ i $\vec{a}_{P_a} = 0$.

Ako tačku P_a usvojimo za pol, onda, s obzirom da je $\vec{a}_{P_a} = 0$, ubrzanje bilo koje tačke tela M , prema formulama (59) i (60) biće jednako

$$\vec{a}_M = \vec{a}_{P_a} + \vec{a}_{M P_a} = \vec{a}_{M P_a}, \quad a_M = \overline{P_a M} \sqrt{\omega^2 + \omega^4}. \quad (64)$$

Prema tome, ubrzanje neke tačke tela jednako je ubrzanju koje ima ta tačka pri obrtnom kretanju tela oko trenutnog pola ubrzanja P_a . Pri tome, kako proizlazi iz (64) biće

$$\frac{a_M}{\overline{P_a M}} = \frac{a_A}{\overline{P_a A}} = \dots \text{itd.}, \quad (65)$$

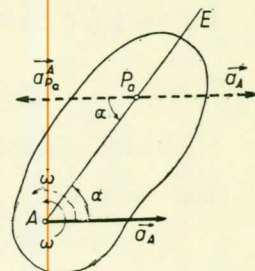
tj. ubrzanja pojedinih tačaka tela proporcionalna su njihovim rastojanjima od trenutnog pola ubrzanja. Slika rasporeda ubrzanja prikazana je na sl. 197.

Treba imati u vidu da se položaj trenutnog pola brzina P i položaj trenutnog pola ubrzanja P_a u datom trenutku vremena ne poklapaju. Na primer, ako se točak kotrlja po pravolinijskom putu (sl. 198), pri čemu je brzina njegovog središta konstantna ($\vec{v}_C = \text{const}$), trenutni pol brzina nalaziće se u tački P ($v_P = 0$), ali pri tome, kako je bilo pokazano u zadatku 75., $a_P \neq 0$; prema tome, tačka P neće istovremeno biti i trenutni pol ubrzanja. Trenutni pol ubrzanja u ovom slučaju se očividno nalazi u tački C , jer se ona kreće ravnomerno pravolinijski, pa je njeno ubrzanje $a_C = 0$. Trenutni pol brzina i trenutni pol ubrzanja poklapaju se onda kada se telo obrće oko nepomične ose.

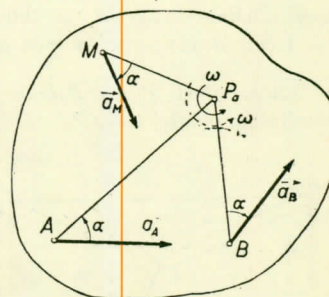
Pojam trenutnog pola ubrzanja omogućuje da se izvesni problemi reše na vrlo lak način.

Zadatak 78. Točak se kotrlja po pravolinijskom putu tako da je brzina $\vec{v}_C$ njegovog središta C konstanta. Odrediti ubrzanje tačke M na obimu točka (sl. 198).

Rešenje. Kako je $\vec{v}_C = \text{const}$, to je, kako smo već pomenuli, tačka C trenutni pol ubrzanja. Trenutni pol brzina nalazi se u tački P . Prema tome, za točak je



Sl. 196



Sl. 197

Glava XIII

OBRTANJE KRUTOG TELA OKO NEPOMIČNE TAČKE. SLOBODNO KRETANJE KRUTOG TELA.

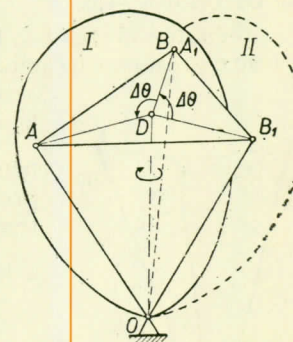
86. Obrtanje krutog tela oko nepomične tačke

Razmotrimo kretanje krutog tela koje je vezano tako da jedna njegova tačka O ostaje za sve vreme kretanja nepomična. Takvo kretanje vrši, na primer, čigra, koja se nepomičnom tačkom oslanja o nepomičnu ravan, ili pak bilo koje drugo telo koje je u jednoj od svojih tačaka vezano sfernim zglobovima. Položaj tela, koje ima nepomičnu tačku O , određuje se položajem bilo kojih drugih dveju njegovih tačaka A i B , koje ne leže na istoj pravoj sa tačkom O , jer ako bi tačke A i B bile fiksirane telo bi moglo samo da se okreće oko ose AB , što je nemoguće kada je tačka O , koja ne leži na AB , nepomična.

Da bismo predstavili sebi sliku o kretanju tela, dokažimo najpre *teoremu Ojlera — Dalamberta*: *svako pomeranje krutog tela oko nepomične tačke može da se izvrši samo jednim okretanjem krutog tela oko jedne određene ose koja prolazi kroz nepomičnu tačku O .*

Neka u nekom trenutku t_1 telo zauzima u prostoru položaj I , i neka u trenutku t_2 pređe u položaj II , koji je na crtežu prikazan iscrtkanom linijom (sl. 200). Tačke A i B tela, koje određuju položaj tela u prostoru, bismo na sledeći način: tačku A uzimamo proizvoljno, dok ćemo za tačku B izabrati onu tačku tela, koja u trenutku t_1 zauzima u prostoru isti onaj položaj u koji će u trenutku t_2 doći tačka A .

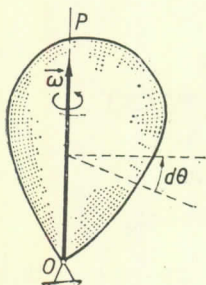
Posle pomeranja tela u položaj II tačka A zauzeće u prostoru položaj A_1 , koji je ranije zauzimala tačka B , dok će se tačka B premestiti u neki novi položaj B_1 . Da bismo dokazali navedenu teoremu povucimo kroz tačke A , A_1 i B_1 ravan i spustimo na tu ravan normalu OD iz tačke O . Primetimo da je $OA = OA_1 = OB_1$, jer je telo kruto; iz istih razloga je $AB = A_1B_1$. Međutim, tada je i $AD = A_1D = B_1D$, kao projekcije podjednako nagnutih duži prema istoj ravni.



Sl. 200

Prema tome, $\angle ADA_1 = \angle A_1DB_1$, odakle proizlazi da je $\sphericalangle ADA_1 = \sphericalangle A_1DB_1 = \sphericalangle \Delta\theta$. Ako sada okrenemo telo oko ose OD za ugao $\Delta\theta$, onda će se trougao ΔADA_1 pomeriti u svojoj ravni i poklopiće se sa trouglom ΔA_1DB_1 , pri čemu će tačka A preći u položaj A_1 , a tačka B u položaj B_1 . Prema tome, telo će iz položaja I preći u položaj II okretanjem oko ose OD za ugao $\Delta\theta$.

Dokazana teorema pokazuje samo da se pomeranje tela iz položaja I u položaj II može izvršiti obrtanjem oko ose OD ; međutim, odavde ne sleduje da je kretanje tela u toku vremenskog intervala $\Delta t = t_2 - t_1$ zaista takvo prosto okretanje. Telo u stvarnosti može da pređe iz položaja I u položaj II na bilo kakav proizvoljan način. Ukoliko je manji vremenski interval Δt , tj. ukoliko su bliži jedan drugom položaji I i II utoliko će pomeranje koje se vrši obrtanjem oko ose OD za ugao $\Delta\theta$ biti bliže stvarnom pomeranju tela.



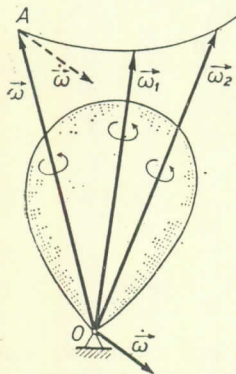
Sl. 201

Ako vremenski interval Δt teži nuli, onda se pravac OD približava nekom graničnom položaju OP . Osa OP , koja predstavlja granični položaj ose OD , kada vremenski interval Δt teži nuli, zove se — trenutna obrtna osa tela. Obrtanjem oko te ose za elementarni ugao $d\theta$ (koji teži nuli), telo se pomera iz datog položaja u susedni položaj, koji je beskonačno blizak datom (sl. 201). Ugaona brzina

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t},$$

kojom se vrši ovo obrtanje, predstavlja ugaonu brzinu obrtanja tela u datom trenutku vremena t . Ovu ugaonu brzinu možemo prikazati vektorom $\vec{\omega}$ usmerenim duž ose OP (vidi § 74):

Trenutna obrtna osa tela razlikuje se od nepomične ose po tome što se njen pravac u prostoru i u samom telu menja za sve vreme kretanja. Prema tome, obrtanje krutog tela oko nepomične tačke, može da se predstavi kao niz uzastopnih elementarnih obrtanja, ugaonim brzinama ω , oko čitavog niza trenutnih obrtnih osa koje sve prolaze kroz nepomičnu tačku (sl. 202). Uzastopni položaji trenutnih obrtnih osa obrazuju pri tome konusnu površinu, a kraj A vektora $\vec{\omega}$ opisuje na toj površini neku krivu.



Sl. 202

Ugaono ubrzanje tela $\vec{\alpha}$ određuje u datom slučaju promenu ugaone brzine $\vec{\omega}$ i po intenzitetu i po pravcu, tj. biće jednako

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Po analogiji sa formulama (13) (vidi § 64), zaključujemo da vektor $\vec{\omega}$ ima pravac paralelan tangenti na putanju kraja vektora $\vec{\omega}$ u tački A (vidi sl. 202). Prema tome u datom slučaju, za razliku od slučaja obrtanja tela oko nepomične ose, pravac vektora $\vec{\omega}$ ne poklapa se sa pravcem vektora $\vec{\alpha}$.

§ 87*. Brzine i ubrzanja tačaka tela

Kako pri obrtanju tela oko nepomične tačke u svakom trenutku vremena telo ima trenutnu obrtnu osu OP , to je intenzitet brzine bilo koje tačke M tela (sl. 203), po analogiji sa § 76, u određenom trenutku vremena jednak

$$v = h\omega, \quad (66)$$

gde je ω — ugaona brzina obrtanja tela, h — rastojanje tačke M od trenutne obrtne ose tela.* Vektor brzine $\vec{v}$ ima pravac upravan na ravan MOP , koja prolazi kroz trenutnu osu i tačku M , i usmeren je u smeru okretanja tela.

Formula (66) nije uvek pogodna za određivanje brzine v , jer se veličina h (za razliku od slučaja u § 76) koja ulazi u izraz za brzinu menja u toku vremena. Zbog te činjenice ne možemo iz formule (66) izraz za ubrzanje tačke M dobiti na isti način kao u § 76 kada je veličina $h = r$ bila konstantna.

Iz tog razloga potražimo prikladniji izraz za određivanje vektora brzine $\vec{v}$ tačke M .

Primerimo da je vektorski proizvod $[\vec{\omega}, \vec{r}]$, gde je $\vec{r}$ — vektor položaja tačke M za tačku O , po intenzitetu jednak

$$|[\vec{\omega}, \vec{r}]| = r\omega \sin \alpha = h\omega.$$

Po pravcu, smeru i dimenziji (o pravcu vektorskog proizvoda bilo je reči u § 41), što je lako videti, vektori $[\vec{\omega}, \vec{r}]$ i $\vec{v}$ takođe se poklapaju. Prema tome je

$$\vec{v} = [\vec{\omega}, \vec{r}], \quad (67)$$

tj. vektor brzine bilo koje tačke M tela jednak je vektorskom proizvodu iz ugaone brzine tela i vektora položaja te tačke.

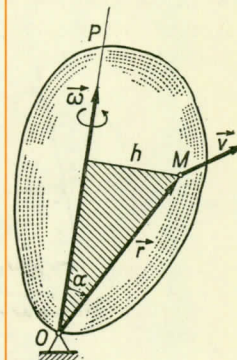
Korišćenjem formule (67), možemo dobiti ubrzanje tačke M u obliku

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r} \right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt} \right]$$

Kako je $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}$, $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$, to, konačno, dobijamo

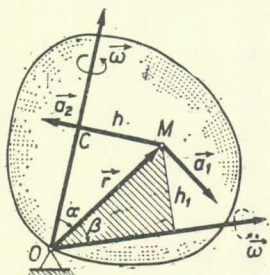
$$\vec{a} = [\dot{\vec{\omega}}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]. \quad (68)$$

* Primedba prevodioca: U § 76 proučavajući obrtanje tela oko nepomične ose rastojanje tačke M od obrtne ose obeležili smo sa r . Tom prilikom, to rastojanje je za sve vreme kretanja bile konstantno. Ovde, kod obrtanja tela oko nepomične tačke, rastojanje tačke M od trenutne obrtne ose obeležili smo sa h , i to se rastojanje pri kretanju tela menja.

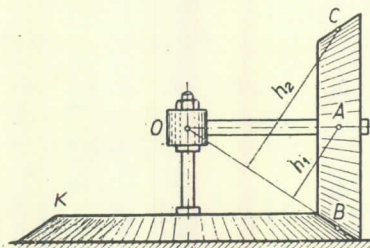


Sl. 203

Ubrzanje $\vec{a}_1 = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ naziva se *obrotno*, dok se ubrzanje $\vec{a}_2 = [\vec{\omega}, \vec{v}]$ naziva *centripetalno* (usmereno ka osi) ubrzanje tačke M . Vektor $\vec{a}_1$ usmeren je upravno na ravan koja prolazi kroz tačku M i kroz vektor $\vec{\omega}$ (sl. 204), dok je po intenzitetu jednak $a_1 = r\dot{\omega} \sin \beta = h_1\dot{\omega}$, gde je h_1 — rastojanje tačke M od vektora $\vec{\omega}$. Vektor $\vec{a}_2$ je jednovremeno upravan na vektore $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ i zato je usmeren u pravcu $\vec{MC}$ (vidi sl. 203 i 204), dok je po intenzitetu jednak $a_2 = v\omega \sin 90^\circ = h\omega^2$, jer je $v = h\omega$.



Sl. 204



Sl. 205

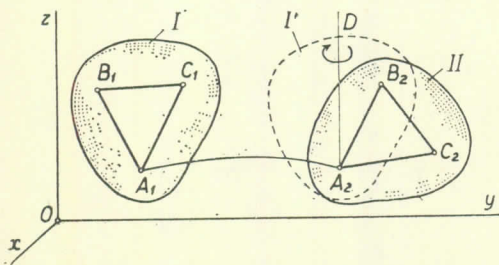
Zadatak 80. Odrediti brzine tačaka B i C konusnog zupčaničnika (sl. 205), ako je brzina obrtanja središta A zupčaničnika po njegovoj putanji poznata. Konusni zupčaničnik se pri kretanju kotrlja bez klizanja po nepomičnoj konusnoj površini K .

Rešenje. Konusni zupčaničnik se obrće oko nepomične tačke O . Tačke zupčaničnika, koje leže na pravoj OB , moraju imati iste brzine, kao i tačke površine K , jer se zupčaničnik kotrlja po njoj bez klizanja; prema tome, brzine tih tačaka jednake su nuli i prava OB je trenutna obrtna osa konusnog zupčaničnika. Tada je $v_A = h_1\omega$, gde je ω — ugaona brzina zupčaničnika pri njegovom obrtanju oko ose OB , h_1 — rastojanje tačke A od te ose. Odatavde je $\omega = v_A/h_1$.

Brzina v_C tačke C biće jednaka $h_2\omega$, gde je h_2 — rastojanje tačke C od ose OB . Kako je u datom slučaju $h_2 = 2h_1$, to je $v_C = 2v_A$. Za tačku B , koja leži na trenutnoj obrtnoj osi, biće $v_B = 0$.

§ 88. Opšti slučaj kretanja slobodnog krutog tela

Razmotrimo najopštiji slučaj kretanja krutog tela kada je ono slobodno i kada se kreće sasvim proizvoljno u prostoru. U tom slučaju položaj tela prema koordinatnom sistemu referencije $Oxyz$ određen je očevidno položajem triju bilo kojih tačaka A , B i C koje ne leže na jednoj pravoj. Neka se u trenutku t_1 telo nalazi



Sl. 206

u položaju I , a u trenutku t_2 neka pređe u položaj II (sl. 206). Tada se pomeranje tela za vremenski interval $\Delta t = t_2 - t_1$ može ostvariti na sledeći način. Najpre pomerimo telo translatorno tako da jedna proizvoljno izabrana tačka tela A_1 (pol) pređe u novi položaj A_2 ; pri tome će telo zauzeti položaj I' . Sada da bi telo prešlo u položaj II potrebno je da se ono okrene oko pola A_2 , kao oko nepomične tačke, a to je, prema onome što smo dokazali u § 86, moguće ostvariti

obrtanjem oko neke ose A_2D . Na taj način, pomeranje tela iz položaja I u položaj II sastoji se iz translatornog pomeranja zajedno sa polom A i obrtanja oko ose AD .

koja prolazi kroz pol A . Razumljivo je da stvarno kretanje u toku vremenskog intervala Δt ne odgovara kretanju koje smo opisali. Pravu sliku o tom kretanju dobili bismo onda, ako bismo vremenski interval Δt podelili na vrlo veliki broj malih podintervala, u kojima bi osa AD zauzimala svoje granične položaje, tj. položaje trenutnih obrtnih osa.

Na osnovu svega što smo izneli možemo zaključiti: slobodno kretanje krutog tela u najopštijem slučaju može se rastaviti na dva komponentna kretanja — translatorno, pri kome se sve tačke tela kreću istom brzinom $\vec{v}_A$ kao i proizvoljno izabrani pol A , i niza elementarnih obrtnih kretanja ugaoncm brzinom $\vec{\omega}$ oko trenutnih obrtnih osa, koje prolaze kroz pol A (sl. 207).

Takva će, na primer, biti slika kretanja svakog tela koje se kreće translatorno u vazduhu: bačen kamen, avion koji pravi viraže, artiljerijsko zrno, itd.

U specijalnom slučaju opšte kretanje slobodnog krutog tela može da pređe u ravno kretanje (glava XII); u tom slučaju je vektor $\vec{\omega}$ uvek upravan na ravan kretanja. Primetimo da i u opštem slučaju kretanja krutog tela, slično kao i u slučaju ravnog kretanja, obrtni deo kretanja (pa i vektor $\vec{\omega}$) ne zavisi od izbora pola.

Brzina $\vec{v}_M$ bilo koje tačke M tela u opštem slučaju kretanja, slično kao i u slučaju ravnog kretanja (vidi § 79) (sl. 175), sastoji se iz brzine $\vec{v}_A$ pola A i brzine $\vec{v}_M^A$, koju ima tačka M pri obrtanju oko pola A zajedno sa telom, tj.

$$\vec{v}_M = \vec{v}_A + \vec{v}_M^A.$$

(69)

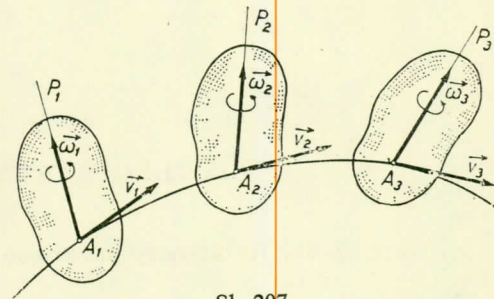
Opravdanost takvog zaključka dokazuje se na isti način, kao i u § 79. Pri tom je saglasno formuli (67) $\vec{v}_M^A = [\vec{\omega}, \vec{AM}]$.

Analogno za ubrzanje bilo koje tačke M tela nalazimo (vidi § 84)

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_M^A.$$

(70)

Pri tom se veličina $\vec{a}_M^A$ određuje jednačinom (68), u kojoj je $\vec{r} = \vec{AM}$ i $\vec{v} = \vec{v}_M^A = [\vec{\omega}, \vec{AM}]$.



Sl. 207

Glava XIV

SLOŽENO KRETANJE TAČKE*

§ 89. Relativno, prenosno i apsolutno kretanje

U svim do sada proučenim problemima proučavali smo kretanje tačke ili tela u odnosu na jedan dati koordinatni sistem referencije. Međutim, u čitavom nizu problema mehanike korisno je (a nekada je to i neophodno) da se kretanje tačke (ili pak tela) jednovremeno posmatra u odnosu na dva koordinatna sistema, od kojih se jedan uslovno smatra nepokretnim, dok se drugi kreće po određenom zakonu u odnosu na prvi. Kretanje, koje tom prilikom vrši tačka ili pak telo, sastoji se iz dva kretanja i zove se složeno kretanje.

Tako, npr., ako se kugla kotrlja po palubi broda, koji se kreće, može se smatrati da ona vrši složeno kretanje u odnosu na obalu, tj. to složeno kretanje sastoji se iz kotrljanja kugle u odnosu na palubu (pokretni sistem referencije) i kretanja zajedno sa palubom u odnosu na obalu (nepokretni sistem referencije). Na taj način kretanje kugle rastavljamo na dva jednostavnija i prostija kretanja, tako da je u ovakvom obliku daleko lakše proučavati kretanje kugle. Mogućnost razlaganja složenog kretanja, uvođenjem dopunskog (pokretnog) koordinatnog sistema, na jednostavnija komponentna kretanja široko se koristi u kinematici tačke i krutog tela. Zato teorija složenog kretanja tačke i krutog tela, koja će biti predmet proučavanja u ovoj i sledećoj glavi ima veliku praktičnu vrednost. Osim toga, rezultati ove teorije korišćiće se mnogo i u dinamici pri proučavanju relativne ravnoteže i relativnog kretanja tela pod dejstvom sila.

Neka se tačka M kreće u odnosu na pokretni koordinatni sistem $Oxyz$, koji se opet kreće u odnosu na koordinatni sistem $O_1x_1y_1z_1$, koji se uslovno smatra nepokretnim (sl. 208). Svaki od navedenih sistema referencije vezan je za neko određeno telo koje na crtežu nije prikazano. Uvedimo sledeće nazive:

1) Kretanje koje vrši tačka M u odnosu na pokretni koordinatni sistem, zvaćemo *relativno kretanje* (takvo kretanje može da vidi samo posmatrač koji je vezan za pokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i koji se kreće zajedno sa ovim sistemom). Putanja AB , koju opisuje tačka pri svom relativnom kretanju, zove se *relativna putanja*. Brzina tačke duž ove krive AB zove se *relativna brzina* (nju ćemo označiti

* Primedba prevodioca. Kod nas je za složeno kretanje odomaćen naziv *relativno kretanje*.

sa $\vec{v}_r$). Veličina koja karakteriše promenu relativne brzine $\vec{v}_r$ pri kretanju tačke duž relativne putanje AB , tj. *samo* pri njenom relativnom kretanju, zove se *relativno ubrzanje*, koje ćemo označiti sa $\vec{a}_r$.

2) Kretanje koje vrši pokretni koordinatni sistem $Oxyz$, i zajedno s njim čvrsto vezane pojedine tačke prostora, u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $O_1x_1y_1z_1$ za tačku M je *prenosno kretanje*.

Brzina tačke koja je čvrsto vezana za pokretni koordinatni sistem $Oxyz$ i sa kojom se u datom trenutku poklapa tačka M zove se *prenosna brzina* tačke M u tom trenutku (nju ćemo označiti sa $\vec{v}_p$), dok se ubrzanje te tačke naziva *prenosno ubrzanje* tačke M (ovo ubrzanje označićemo sa $\vec{a}_p$). Drugim rečima, ako zamislamo da se relativno kretanje tačke M vrši po površini (ili pak u unutrašnjosti) krutog tela, sa kojim je čvrsto vezan pokretni koordinatni sistem $Oxyz$, onda će prenosna brzina (ili prenosno ubrzanje) tačke M u datom trenutku biti u stvari brzina (odnosno ubrzanje) one tačke tela, koja se u datom trenutku poklapa sa tačkom M .

Očividno je da prenosno ubrzanje karakteriše promenu prenosne brzine $\vec{v}_p$, koja nastaje *samo* pri prenosnom kretanju pokretnog koordinatnog sistema.

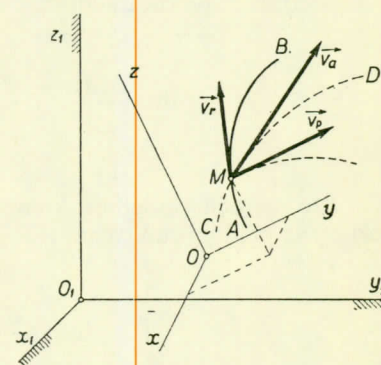
3) Kretanje koje vrši tačka u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $O_1x_1y_1z_1$ zove se *apsolutno* ili pak *složeno kretanje*. Putanja CD tog kretanja zove se *apsolutna putanja*; brzina — *apsolutna brzina* (koju ćemo označiti sa $\vec{v}_a$) i ubrzanje — *apsolutno ubrzanje* (koje ćemo označiti sa $\vec{a}_a$).

U navedenom primeru, kretanje kugle u odnosu na palubu broda je relativno; kretanje i brzina tog kretanja je relativna brzina kugle; kretanje broda u odnosu na obalu predstavlja prenosno kretanje kugle, a brzina one tačke palube broda, koja se u datom trenutku poklapa sa položajem kugle, biće u tom trenutku prenosna brzina kugle; najzad, kretanje kugle u odnosu na obalu predstavlja apsolutno kretanje, a brzina tog kretanja predstavlja apsolutnu brzinu kugle.

Za rešavanje odgovarajućih zadataka kinematike potrebno je da se ustanove zavisnosti između brzina i ubrzanja relativnog, prenosnog i apsolutnog kretanja.

§ 90. Slaganje brzina

Neka tačka M vrši složeno kretanje i neka se ta tačka kreće duž svoje relativne putanje AB , i neka za vremenski interval $\Delta t = t_1 - t$ na toj putanji izvrši relativno pomeranje određeno vektorom $\overrightarrow{MM'}$ (sl. 209, a). Putanja AB u tom vremenskom intervalu kreće se zajedno sa pokretnim koordinatnim sistemom i na kraju tog vremenskog intervala zauzeće položaj A_1B_1 , a ona tačka krive AB , koja se u trenutku



Sl. 208

t poklapa sa tačkom M izvršiće prenosno pomeranje $\overrightarrow{MM''}$. Kao rezultat ovih dvaju kretanja tačka M preći će u položaj M_1 i za vremenski interval Δt izvršiće apsolutno pomeranje $\overrightarrow{MM_1}$.

Iz vektorskog trougla $MM''M_1$ imamo:

$$\overrightarrow{MM_1} = \overrightarrow{MM''} + \overrightarrow{M''M_1}.$$

Ako obe strane ove jednačine podelimo sa Δt i ako zatim pustimo da Δt teži nuli, dobićemo:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM''}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M''M_1}}{\Delta t}. \quad (71)$$

Međutim, po definiciji je

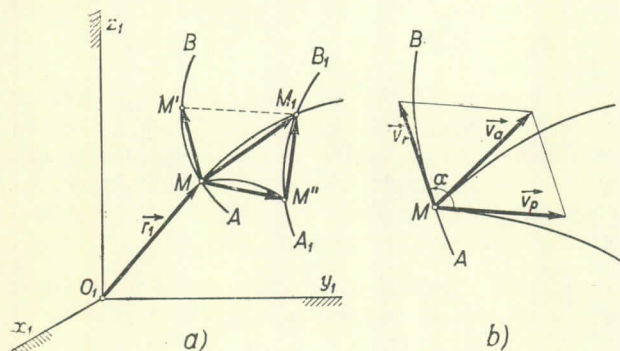
$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM_1}}{\Delta t} = \vec{v}_a,$$

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM''}}{\Delta t} = \vec{v}_p.$$

Što se tiče poslednje komponente, s obzirom da kada $\Delta t \rightarrow 0$ kriva A_1B_1 teži da se poklopi sa krivom AB , to će u graničnom položaju biti

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{M''M_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \vec{v}_r.$$

Pravci odgovarajućih brzina se poklapaju sa pravcima tangenata na odgovarajuće putanje (sl. 209, b).



Sl. 209

Figura konstruisana na sl. 209, b zove se *paralelogram brzina*.

Ako je ugao između pravaca brzina $\vec{v}_p$ i $\vec{v}_r$ jednak α , onda je intenzitet apsolutne brzine

$$v_a = \sqrt{v_r^2 + v_p^2 + 2v_p v_r \cos \alpha}. \quad (73)$$

Ako dobivene izraze smenimo u jednačinu (71) dobićemo:

$$\vec{v}_a = \vec{v}_p + \vec{v}_r. \quad (72)$$

Prema tome, pri složenom kretanju apsolutna brzina tačke jednaka je geometrijskom zbiru relativne i prenosne brzine (teorema o slaganju brzina).

Pokažimo i nešto drugačiji put koji takođe dovodi do jednačine (72). Neka je položaj po kretne tačke u odnosu na nepokretni koordinatni sistem $Ox_1y_1z_1$ određen vektorom položaja $\vec{r}_1$ (vidi sl. 209, a). Vektore $\vec{MM'}$, $\vec{MM''}$ i $\vec{MM_1}$ na tom crtežu možemo da smatramo za elementarna pomeranja koja izvrši tačka za vremenski interval dt . Ova pomeranja imaju pravac tangenata na odgovarajuće putanje u tački M . Prema tome, vektor $\vec{MM_1}$ biće jednak ukupnom priraštaju $\vec{dr}_1$, koji dobije vektor $\vec{r}_1$ za vreme dt . Slično tome, vektor $\vec{MM}$ predstavlja priraštaj $(\vec{dr}_1)_r$, koji vektor $\vec{r}_1$ dobije za vreme dt pri relativnom pomeranju tačke duž krive AB , dok $\vec{MM''}$ predstavlja priraštaj $(\vec{dr}_1)_p$, koji dobije vektor $\vec{r}_1$ samo usled prenosnog kretanja krive AB . Pri tome je

$$\vec{dr}_1 = (\vec{dr}_1)_r + (\vec{dr}_1)_p, \quad (74)$$

tj. ukupni priraštaj vektora $\vec{r}_1$ za elementarni interval vremena dt jednak je geometrijskom zbiru priraštaja pri relativnom i prenosnom kretanju. Ako obe strane jednačine (74) podelimo sa dt , dobićemo

$$\frac{\vec{dr}_1}{dt} = \frac{(\vec{dr}_1)_r}{dt} + \frac{(\vec{dr}_1)_p}{dt}, \quad (74')$$

ili $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p$, jer po definiciji količnici koji ulaze u jednačinu (74') predstavljaju brzine $\vec{v}_a$, $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$.

Paralelogram brzina omogućuje da se reši niz zadataka kinematike tačke, kao na primer:

- ako znamo brzine $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$, možemo odrediti apsolutnu brzinu tačke $\vec{v}_a$;
- ako znamo brzinu tačke $\vec{v}_a$, i ako znamo pravce brzina $\vec{v}_p$ i $\vec{v}_r$, možemo odrediti intenzitete ovih brzina;
- ako znamo brzine $\vec{v}_a$ i $\vec{v}_p$, možemo odrediti relativnu brzinu tačke $\vec{v}_r$ iz jednačine:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_a + (-\vec{v}_p).$$

Zadatak 81. Tačka M kreće se duž prave OA brzinom v (sl. 210), a sama prava se obrće u ravni Ox_1y_1 oko tačke O ugaonom brzinom ω . Odrediti brzinu tačke M prema koordinatnom sistemu Ox_1y_1 u zavisnosti od rastojanja $r = \overline{OM}$.

Rešenje. Razmotrimo kretanje tačke M kao složeno kretanje, koje se sastoji iz relativnog kretanja duž prave OA i kretanja zajedno sa tom pravom. U ovom slučaju će brzina

$\vec{v} = \vec{v}_r$, usmerena duž OA , biti relativna brzina tačke. Obrtno

kretanje prave OA oko tačke O za tačku M je prenosno kretanje, a brzina one tačke prave OA

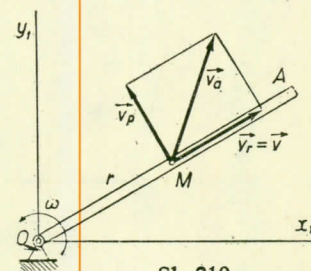
sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa tačka M biće njena prenosna brzina $\vec{v}_p$. Kako se ta tačka prave kreće po krugu poluprečnika $r = \overline{OM}$, to je ova brzina po intenzitetu jednaka $v_p =$

$= r\omega$, upravna je na pravac OM i ima smer obrtanja. Ako nad vektorima $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ konstruišemo

paralelogram brzina, odredićemo apsolutnu brzinu $\vec{v}_a$ kretanja tačke M prema sistemu Ox_1y_1 . Kako

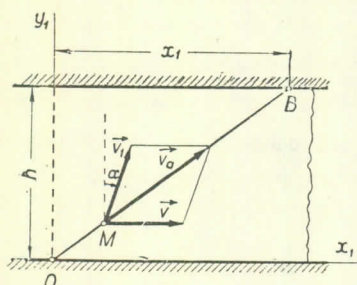
su brzine $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ međusobno upravne, to je apsolutna brzina po intenzitetu jednaka

$$v_a = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}.$$



Sl. 210

Zadatak 82. Reka širine h teče konstantnom brzinom v . Veslač može da saopšti čamcu prema nepomičnoj vodi brzinu koja je jednaka v_1 . Odrediti pod kojim uglom treba prelaziti reku da bi se na suprotnu obalu stiglo u najkraćem vremenu. Gde će u tom slučaju pristati čamac?



Sl. 211

Rešenje. Neka čamac počne da se kreće iz tačke O (sl. 211).

Povucimo ose koordinatnog sistema Ox_1y_1 i neka se čamac u proizvoljnom trenutku vremena nalazi u položaju M . Pretpostavimo da veslač saopštava čamcu kretanje pod konstantnim uglom α prema osi Oy_1 . Tada je apsolutna brzina čamca $\vec{v}_a$ jednaka vektorskom zbiru iz relativne brzine $\vec{v}_r$, koja je jednaka brzini koju čamcu saopštava veslač ($\vec{v}_r = \vec{v}_1$), i prenosne brzine $\vec{v}_p$, koja je jednaka brzini toka reke ($\vec{v}_p = \vec{v}$):

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p = \vec{v}_1 + \vec{v}.$$

Projekcije apsolutne brzine na koordinatne ose (po teoremi o projekcijama zbira vektora) jednake su:

$$(\vec{v}_a)_{x_1} = v_1 \sin \alpha + v, \quad (\vec{v}_a)_{y_1} = v_1 \cos \alpha.$$

Kako su obe projekcije konstante, to će pomeranje čamca duž koordinatnih osa biti jednako:

$$x_1 = (v_1 \sin \alpha + v) t, \quad y_1 = (v_1 \cos \alpha) t.$$

Kada čamac bude stigao na suprotnu obalu biće $y_1 = h$. Odatle nalazimo potrebno vreme da bi čamac sa jedne obale prešao na drugu.

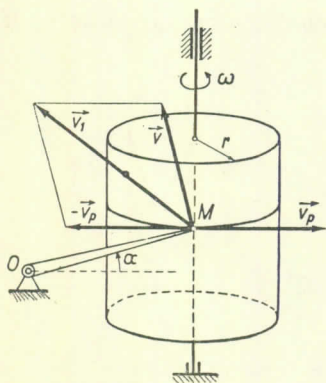
$$t_1 = \frac{h}{v_1 \cos \alpha}$$

Očevidno, vreme t_1 biće najmanje kada je $\cos \alpha = 1$, tj. ako je $\alpha = 0$. Na taj način veslaće u najkraćem vremenu preći reku ako bude usmerio čamac upravno na obalu. Tom prilikom je

$$t_{\min} = \frac{h}{v_1}.$$

Stavljajući u izraz za x_1 da je $\alpha = 0$, i da je $t = t_{\min}$ dobićemo

$$x = \frac{v}{v_1} h.$$



Sl. 212

Prema tome, čamac će dospeti u tačku B koja je udaljena od ose Oy_1 za rastojanje x_1 nizvodno. Ovo pomeranje biće utoliko manje, ukoliko je manja brzina v i širina h reke i ukoliko je veća brzina v_1 .

Zadatak 83. Pero OM pribora za registrovanje obrazuje u datom trenutku vremena ugao α sa horizontom i ima brzinu v usmerenu normalno na pravac OM (sl. 212). Doboš sa hartijom obrće se oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω . Odrediti brzinu v_1 pomeranja pera po hartiji, ako je poluprečnik doboša jednak r .

Rešenje. Apsolutna brzina pera je poznata $\vec{v}_a = \vec{v}$. Brzina $\vec{v}$ jednaka je geometrijskom zbiru iz brzine kretanja pera u odnosu na hartiju (to je tražena brzina $\vec{v}_1$) i prenosne brzine $\vec{v}_p$, koja je po intenzitetu jednaka brzini one tačke hartije koju u datom trenutku vremena dodiruje pero; po intenzitetu ova brzina je jednaka $v = r\omega$.

Na osnovu teoreme o slaganju brzina biće $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_p$, odakle je $\vec{v}_1 = \vec{v} + (-\vec{v}_p)$. Ako nad vektorima $\vec{v}$ i $(-\vec{v}_p)$ konstruišemo paralelogram brzina odredićemo traženu brzinu $\vec{v}_1$. Kako je ugao između $\vec{v}$ i $(-\vec{v}_p)$ jednak $90^\circ - \alpha$, to je po intenzitetu

$$v_1 = \sqrt{v^2 + v_p^2 + 2 v v_p \sin \alpha}.$$

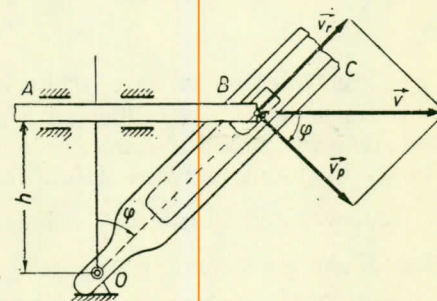
Ugao koji zaklapa brzina $\vec{v}_1$ sa pravcem brzine $\vec{v}_p$ možemo odrediti korišćenjem sinusne teoreme.

Zadatak 84. Kraj B horizontalnog štapa AB vezan je zglobov sa klizačem koji klizi duž proreza kulise OC i prisiljava je da se obrće oko ose O (sl. 213); rastojanje ose O od štapa AB jednako je h . Odrediti ugaonu brzinu kulise u zavisnosti od brzine štapa v i ugla φ .

Rešenje. Apsolutna brzina klizača, koja je jednaka brzini štapa v , je poznata. Ovu brzinu klizača možemo posmatrati kao vektorski zbir iz relativne brzine $\vec{v}_r$ klizača duž proreza kulise i prenosne brzine $\vec{v}_p$, koja je jednaka brzini one tačke kulise, koja se u datom trenutku vremena poklapa sa klizačem. Smerovi ovih brzina su poznati: brzina $\vec{v}_r$ usmerena je duž prave OB , dok je brzina $\vec{v}_p$ upravna na OB . Tada, ako razložimo datu brzinu $\vec{v}$ u pravce brzina $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ možemo odrediti te brzine. Iz paralelograma brzina se vidi da je po intenzitetu brzina $v_p = v \cos \varphi$.

Međutim, s druge strane, prenosna brzina je jednaka $v_p = \overline{OB} \omega = \frac{h}{\cos \varphi} \omega$, gde je ω — ugaona brzina kulise. Ako izjednačimo ova dva izraza za prenosnu brzinu v_p dobićemo da je ugaona brzina obrtanja kulise:

$$\omega = \frac{v}{h} \cos^2 \varphi.$$



Sl. 213

§ 91. Slaganje ubrzanja. Koriolisova teorema

Protumačimo najpre pojam o prenosnom i relativnom ubrzanju tačke. Pri složenom kretanju relativna brzina tačke $\vec{v}_r$ dobija priraštaj i pri relativnom i pri prenosnom kretanju, tj. analogno jednačini (74) (vidi § 90) $\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_r + \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_p$. Međutim, po definiciji, relativnim ubrzanjem tačke naziva se veličina $\vec{a}_r$, koja karakteriše promenu relativne brzine $\vec{v}_r$ samo pri relativnom kretanju. Prema tome:

$$\vec{a}_r = \frac{d\left(\vec{v}_r\right)_r}{dt} \quad (75)$$

Promenu koju vektor $\vec{v}_r$ trpi usled prenosnog kretanja veličina $\vec{a}_r$ ne obuhvata

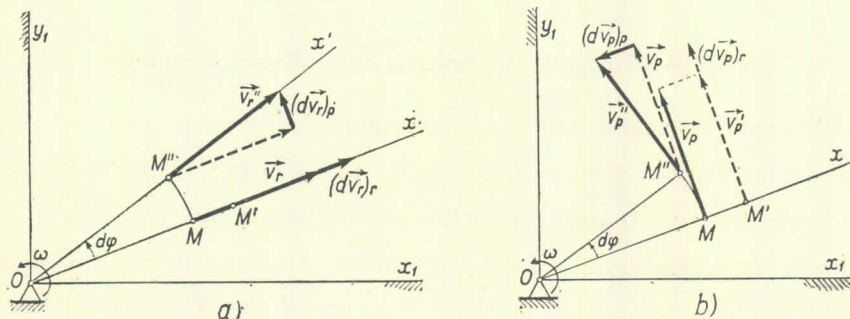
Slično tome i prenosna brzina $\vec{v}_p$ dobija priraštaj i pri relativnom i pri prenosnom kretanju, usled čega je $\vec{d}v_p = (\vec{d}v_p)_r + (\vec{d}v_p)_p$. Međutim, po definiciji, prenosnim ubrzanjem tačke naziva se veličina $\vec{a}_p$, koja karakteriše promenu prenosne brzine *samo pri prenosnom kretanju* ($\vec{a}_p$ — ubrzanje tačke, koja je čvrsto vezana za pokretni koordinatni sistem, tj. tačke koja ne vrši relativno kretanje). Prema tome:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_p}{dt} \quad (76)$$

Promenu koju vektor $\vec{v}_p$ trpi usled relativnog kretanja veličina $\vec{a}_p$ ne obuhvata.

Na taj način, za razliku od brzina, veličine, koje u kinematici smatramo za relativno i prenosno ubrzanje, neće u svom zbiru dati apsolutno (totalno) ubrzanje tačke. Međutim, uvedene definicije pogodno su zato što omogućuju jednostavno izračunavanje veličina $\vec{a}_r$ i $\vec{a}_p$. Naime, kako pri izračunavanju $\vec{a}_r$ kretanje pokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ ne treba da se uzme u obzir, to veličina $\vec{a}_r$ može da se izračunava običnim metodama kinematike tačke (vidi §§ 67, 69). Dalje, kako pri izračunavanju $\vec{a}_p$ relativno pomeranje tačke ne treba da se uzme u obzir, to se $\vec{a}_p$ izračunava kao ubrzanje tačke nekog krutog tela, koje je čvrsto vezano za koordinatni sistem $Oxyz$, tj. ono se određuje metodama kinematike krutog tela (vidi §§ 86, 84 i druge). Prema tome, pri izračunavanju veličina $\vec{a}_r$ i $\vec{a}_p$, koje su određene jednačinama (75) i (76), upotrebićemo samo formule sa kojima smo već do sada upoznati u kinematici.

Da bismo razjasnili tu činjenicu da svaki od vektora $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$ stvarno dobija priraštaj i pri relativnom i pri prenosnom kretanju, razmotrimo jedan poseban slučaj. Neka se tačka kreće ubrza-



Sl. 214

no duž prave Ox , koja se obrće u ravni Ox_1y_1 , oko tačke O (vidi zadatak 81.). Tada pri relativnom pomeranju tačke duž ose Ox iz položaja M u položaj M' (sl. 214, a) vektor $\vec{v}_r$ postaje vektor $\vec{v}_r'$ (vektor $\vec{v}_r'$ na crtežu nije prikazan) i dobiće za vreme dt priraštaj $(\vec{d}v_r)_r$, čiji količnik sa vremenom

dt određuje relativno ubrzanje tačke $\vec{a}_r$. Međutim, pri jednovremenom obrtanju prave Ox vektor $\vec{v}_r$ prećiće u položaj $\vec{v}_r''$ i dobiće pri prenosnom kretanju priraštaj $(\vec{dv}_r)_p$, čiji količnik sa vremenskim intervalom dt daje neko dopunsko ubrzanje, koje ubrzanje $\vec{a}_r$ ne obuhvata.

Slično tome, pri prenosnom kretanju (pri obrtanju prave Ox) tačka M doćiće za vremenski interval dt u položaj M'' (sl. 214, b), dok će vektor $\vec{v}_p$ preći u vektor $\vec{v}_p''$ i dobiće priraštaj $(\vec{dv}_p)_p$, čiji količnik sa vremenskim intervalom dt daje prenosno ubrzanje tačke $\vec{a}_p$. Međutim, jednovremeno pri relativnom pomeranju tačke iz položaja M u položaj M' vektor $\vec{v}_p$ dobiće dopunski priraštaj $(\vec{dv}_p)_p$, jer će u tački M prenosna brzina po intenzitetu biti jednaka $v_p = \overline{OM} \cdot \omega$, dok će u tački M' biti jednaka $v_p' = \overline{OM'} \cdot \omega$. Količnik ovog priraštaja i vremena dt određuje neko dopunsko ubrzanje koje ubrzanje $\vec{a}_p$ ne obuhvata.

Predimo sada na dokaz teoreme o slaganju ubrzanja. Apsolutno ubrzanje tačke je $\vec{a}_a = d\vec{v}_a/dt$. Kako je pri složenom kretanju $\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p$, to onda odayde sleduje:

$$\vec{a}_a = \frac{d\vec{v}_r}{dt} + \frac{d\vec{v}_p}{dt}.$$

Ukupni priraštaji $d\vec{v}_r$ i $d\vec{v}_p$ vektora $\vec{v}_r$ i $\vec{v}_p$, koji stoje na desnoj strani gornje jednačine, sastoje se, kao što smo videli iz prethodnog primera, iz komponentnih priraštaja pri relativnom i prenosnom kretanju. Iz tog razloga gornju jednačinu možemo napisati i u drugojacijem obliku:

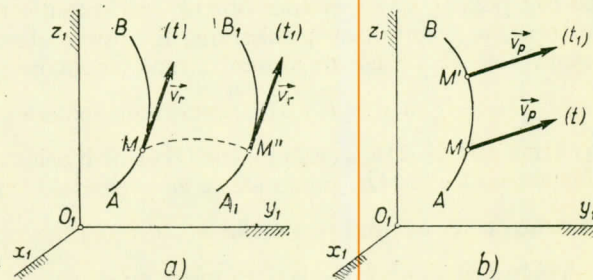
$$\vec{a}_a = \frac{(\vec{dv}_r)_r}{dt} + \frac{(\vec{dv}_r)_p}{dt} + \frac{(\vec{dv}_p)_r}{dt} + \frac{(\vec{dv}_p)_p}{dt},$$

odnosno, uzimajući u obzir formule (75) i (76), u obliku

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \frac{(\vec{dv}_r)_p}{dt} + \frac{(\vec{dv}_p)_r}{dt}. \quad (77)$$

1) Slučaj translatorsnog prenosnog kretanja. Poslednje dve komponente u jednačini (77) uzimaju u obzir promenu relativne brzine $\vec{v}_r$ pri prenosnom kretanju, i promenu prenosne

brzine $\vec{v}_p$ pri relativnom kretanju. Odredimo najpre čemu će biti jednake ove komponente u slučaju kada se pokretni koordinatni sistem $Oxyz$, a zajedno sa njim i kriva AB (sl. 208), kreće translatorsno. U tom slučaju pri prenosnom pomeranju kriva AB preći će



Sl. 215

u položaj A_1B_1 i vektor $\vec{v}_r$ ostaće paralelan sam sebi, tj. on neće dobiti nikakav priraštaj (sl. 215, a; ose pokretnog koordinatnog sistema na njoj nisu prikazane). Prema tome, u datom slučaju je $(\vec{dv}_r)_p = 0$.

Dalje, pošto se kriva AB kreće translatorno, prenosna brzina (brzina svih tačaka koje pripadaju krivoj) je u položaju M i u položaju M' jedna ista (sl. 215, b). Prema tome, u datom slučaju pri relativnom pomeranju tačke iz položaja M u položaj M' vektor $\vec{v}_p$ se ne menja, pa je, prema tome, i $(d\vec{v}_p)_r = 0$. Jednačina (77) u ovom slučaju postaje

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p \quad (78)$$

Prema tome, pri translatorsnom prenosnom kretanju, apsolutno ubrzanje tačke jednako je geometrijskom zbiru relativnog i prenosnog ubrzanja.

2) Slučaj kada prenosno kretanje nije translatorno. U ovom slučaju veličine $(d\vec{v}_r)_p$ i $(d\vec{v}_p)_r$ biće različite od nule. Uvedimo oznaku

$$\vec{a}_c = \frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} + \frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt} \quad (79)$$

Veličina $\vec{a}_c$ koja karakteriše promenu vektora relativne brzine $\vec{v}_r$ pri prenosnom kretanju i vektora prenosne brzine $\vec{v}_p$ pri relativnom kretanju, zove se *obrotno* ili pak *koriolisovo ubrzanje* tačke. Tada iz jednačine (77) dobijamo

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c \quad (80)$$

Formula (80) izražava sledeću tzv. Koriolisovu* teoremu: ako prenosno kretanje nije translatorno, onda je apsolutno ubrzanje tačke jednako geometrijskom zbiru triju ubrzanja: relativnog, koje karakteriše promenu relativne brzine pri relativnom kretanju; prenosnog, koje karakteriše promenu prenosne brzine pri prenosnom kretanju, i koriolisovog, koje karakteriše promenu relativne brzine pri prenosnom kretanju i prenosne brzine pri relativnom kretanju.

§ 92*. Izračunavanje koriolisovog ubrzanja

U opštem slučaju prenosno kretanje, tj. kretanje koordinatnog sistema $Oxyz$, sastoji se iz translatorsnog kretanja zajedno sa nekim polom i obrtnog kretanja oko tog pola (§ 88); pri tom obrtni deo kretanja ne zavisi od izbora pola. Radi izračunavanja koriolisovog ubrzanja u opštem slučaju odredimo veličine komponenta koje se nalaze na desnoj strani jednačine (79).

a) Određivanje $(d\vec{v}_r)_p$. Pri prenosnom pomeranju sistema $Oxyz$, a s njima zajedno i krive AB (sl. 216, a; na njoj ose $Oxyz$ nisu prikazane), vektor $\vec{v}$ koji ima pravac tangente na krivu AB , pomeriće se za vremenski interval dt translatorno, i jedno vreme će se okrenuti oko tačke M'' do položaja $\vec{v}'$. U krajnjem rezultatu vektor $\vec{v}$ dobiće priraštaj $(d\vec{v})_p$, koji se može izračunati iz formule $(d\vec{v})_p = \vec{v}_b dt$, gde je $\vec{v}_b$ — brzina pomeranja tačke b , tj. kraja vektora $M''b = \vec{v}$ pri njegovom obrtanju

* Gustav Koriolis (1792 — 1843) — francuski naučnik, poznat po svojim radovima iz teorijske i primenjene mehanike.

oko tačke M'' . Međutim, ovo se obrtanje vrši prenosnom ugaonom brzinom $\vec{\omega}_p$, tj. ugaonom brzinom obrtanja osa pokretnog koordinatnog sistema $Oxyz$ (sl. 216, b). Prema tome, po formuli (67) biće:

$$\vec{v}_b = [\vec{\omega}_p, \vec{M''b}] = [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] \quad \text{i} \quad (d\vec{v}_r)_p = \vec{v}_b dt = [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] dt,$$

odakle nalazimo:

$$\frac{(d\vec{v}_r)_p}{dt} = [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r] \quad (81)$$

b) Određivanje $(d\vec{v}_p)_r$. Prenosna brzina $\vec{v}_p$ jednaka je brzini one tačke krive AB , koja je čvrsto vezana za pokretni koordinatni sistem $Oxyz$, a koja se u datom trenutku vremena poklapa sa tačkom M (sl. 216, b). Ako usvojimo tačku O za pol, onda će ta brzina biti jednaka zbiru brzina pola $\vec{v}_O$ i brzine, koja se dobija pri obrtanju sistema $Oxyz$ oko pola.

Prema tome, po formulama (69) i (67) $\vec{v}_p = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_p, \vec{r}]$, gde je $\vec{r} = \vec{OM}$, a $\vec{\omega}_p$ — prenosna ugaona brzina obrtanja. Kada za vremenski interval dt tačka izvrši relativno pomeranje $\vec{MM'} = \vec{v}_r dt$, onda ona prelazi u nov položaj M' , za koji je $\vec{v}_p' = \vec{v}_O + [\vec{\omega}_p, \vec{r'}]$, gde je $\vec{r'} = \vec{r} + \vec{MM'}$. Prema tome, usled relativnog pomeranja tačke iz položaja M u položaj M' , vektor $\vec{v}_p$ dobija priraštaj

$$(d\vec{v}_p)_r = \vec{v}_p' - \vec{v}_p = [\vec{\omega}_p, \vec{r'} - \vec{r}] = [\vec{\omega}_p, \vec{MM'}] = [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r dt],$$

odakle je

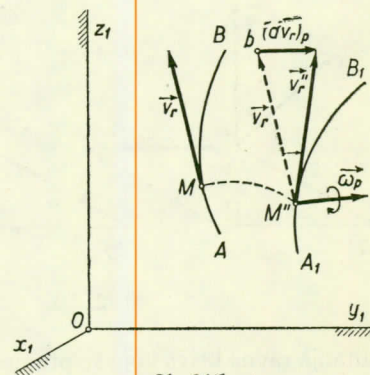
$$\frac{(d\vec{v}_p)_r}{dt} = [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r]. \quad (82)$$

Smenjujući nađene veličine (81) i (82) u jednačinu (79), dobićemo

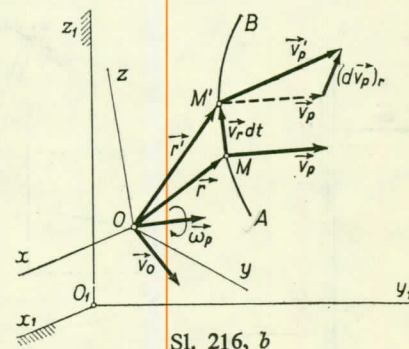
$$\vec{a}_c = 2 [\vec{\omega}_p, \vec{v}_r]. \quad (83)$$

Na taj način koriolisovo ubrzanje tačke jednako je dvostrukom vektorskom proizvodu iz ugaone brzine prenosnog kretanja i relativne brzine tačke. Ako ugao između vektora $\vec{v}_r$ i $\vec{\omega}_p$ označimo sa α , onda je intenzitet koriolisovog ubrzanja jednak:

$$a_c = 2 |\omega_p v_r| \sin \alpha. \quad (84)$$

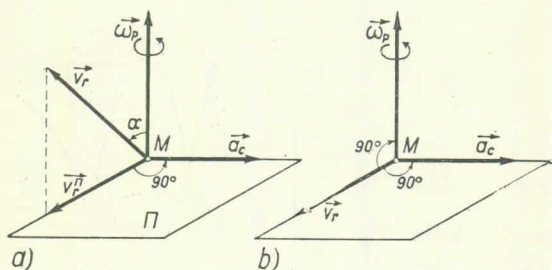


Sl. 216, a



Sl. 216, b

Vektor $\vec{a}_c$ ima isti pravac i smer kao i vektor $[\vec{\omega}_p, \vec{v}_r]$, tj. on je upravran na ravan koja prolazi kroz vektore $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, a usmeren je u onu stranu, odakle se vidi da se najkraće obrtanje, koje dovodi do poklapanja vektora $\vec{\omega}_p$ i $\vec{v}_r$, vrši u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku (sl. 217, a).



Sl. 217

Iz sl. 217, a vidi se, takođe, da se pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ može dobiti, ako prvo projiciramo vektor $\vec{v}_r$ na ravan Π , upravnu na $\vec{\omega}_p$ i ako zatim tu projekciju $\vec{v}_r^{\Pi}$ okrenemo za 90° u smeru prenosnog obrtanja.

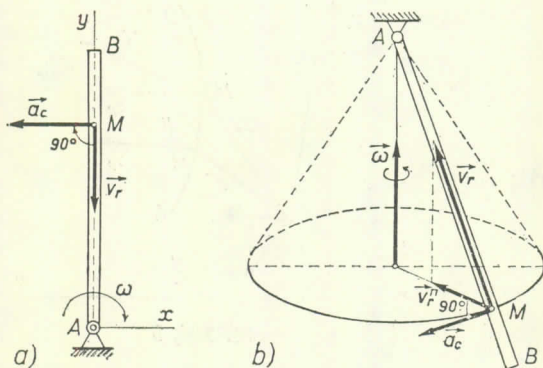
Ako je složeno kretanje *ravno kretanje* (tj. ako je relativna

putanja ravna kriva koja se premešta u svojoj ravni) onda je ugao $\alpha = 90^\circ$ (sl. 217, b), pa je u tom slučaju intenzitet koriolisovog ubrzanja

$$\boxed{\vec{a}_c = 2 |\vec{\omega}_p \vec{v}_r|} \quad (85)$$

Kao što se vidi sa sl. 217, b pri *ravnom kretanju* pravac i smer koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_c$ može se dobiti ako okrenemo vektor relativne brzine $\vec{v}_r$ za 90° u stranu prenosnog obrtanja (tj. u smeru obrtanja, ili pak u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku u zavisnosti od smera obrtanja).

Na sl. 218 kao prikaz navedenih pravila određen je pravac i smer koriolisovog ubrzanja kuglice M, koja se kreće duž cevi AB, u slučaju kad se cev obrće u ravni crteža (sl. 218, a), i kada se ona obrće tako da obrazuje konus (sl. 218, b).



Sl. 218

Iz formule (84) se vidi da koriolisovo ubrzanje može da bude jednako nuli u sledećim slučajevima:

1. Kada je $\omega_p = 0$, tj. kada je *prenosno kretanje translatorno kretanje* (formula 78), ili pak ako je u datom trenutku vremena prenosna ugaona brzina jednaka nuli.

2. Kada je $v_r = 0$, tj. kada relativno kretanje uopšte ne postoji,

ili pak ako je u datom trenutku vremena relativna brzina jednaka nuli.

3. Kada je ugao $\alpha = 0$, ili $\alpha = 180^\circ$, tj. kada se relativno kretanje vrši u pravcu paralelnom osi prenosnog obrtanja, ili pak, ako je u datom trenutku vremena vektor $\vec{v}_r$ paralelan toj osi.

§ 93. Rešavanje zadataka

A. Prenosno kretanje je translatorno. U slučaju kada je prenosno kretanje translatorno, karakter zadataka i metode njihovih rešavanja analogne su zadacima iz slaganja brzina (§ 90).

Zadatak 85. Klin, koji se kreće u horizontalnom pravcu sa ubrzanjem $\vec{a}_1$, pomera između vertikalnih vodica štap AB (sl. 219). Odrediti ubrzanje štapa, ako je ugao nagiba klina jednak α .

Rešenje. Apsolutno ubrzanje $\vec{a}_A$ tačke A štapa usmereno je vertikalno naviše. Ono je jednako vektorskom zbiru iz relativnog ubrzanja $\vec{a}_r$, koje je usmereno duž ivice klina, kao i prenosnog ubrzanja $\vec{a}_p$, koje je jednako ubrzanju klina $\vec{a}_1$. Kako je prenosno kretanje klina translatorno, na osnovu jednačine (78) konstruišimo odgovarajući paralelogram, i imajući u vidu da je $a_p = a_1$, dobijamo:

$$a_A = a_1 \operatorname{tg} \alpha.$$

Veličina a_A određuje ubrzanje štapa.

B. Prenosno kretanje je obrtno. Razmotrimo u opštem obliku, kako se određuje veličina a_a , ako prenosno kretanje predstavlja obrtno kretanje oko nepomične ose.

Neka se tačka M kreće po relativnoj putanji AMB po površini nekog tela (npr., lopte koja se obrće usporeno oko ose BA (sl. 220). Da bi se našlo apsolutno ubrzanje tačke u nekom trenutku vremena t_1 potrebno je da se u tom trenutku zna: 1) položaj pokretne tačke na krivoj AB ;

2) relativna brzina tačke $\vec{v}_r$; 3) ugaona brzina ω i ugaono ubrzanje $\dot{\omega}$ tela (tj. ω i $\dot{\omega}$ prenosnog kretanja). Ako ove veličine nisu date, onda je potrebno da se one prethodno odrede iz uslova zadatka.

Posle toga potrebno je da se označi položaj pokretne tačke u trenutku t_1 i da se na crtežu prikažu vektori $\vec{v}_r$ i ω . Dalji račun se vrši prema sledećem:

1) Određivanje $\vec{a}_r$. U mislima zaustavimo obrtanje tela i izračunajmo ubrzanje tačke pri njenom kretanju duž krive AB po formulama kinematike tačke. Ako je kriva AB data onda će biti (69):

$$a_{rT} = \frac{dv_r}{dt}, \quad a_{rN} = \frac{v_r^2}{R_k},$$

gde je R_k — poluprečnik krivine krive AB u tački M . Ako je relativno kretanje definisano u analitičkom obliku, onda se v_r i a_r izračunavaju po formulama § 67.

2) Određivanje $\vec{a}_p$. Izračunavanjem ubrzanja one tačke tela sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa tačka M odredićemo prenosno ubrzanje po formulama kinematike krutog tela (§ 76):

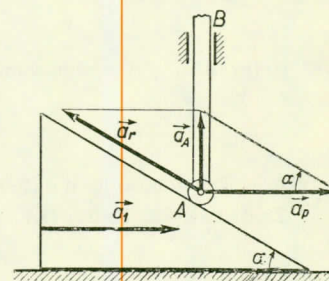
$$a_{pT} = r\dot{\omega}, \quad a_{pN} = r\omega^2,$$

gde je $r = \overline{MD}$ — rastojanje tačke M od obrtne ose u trenutku t_1 .

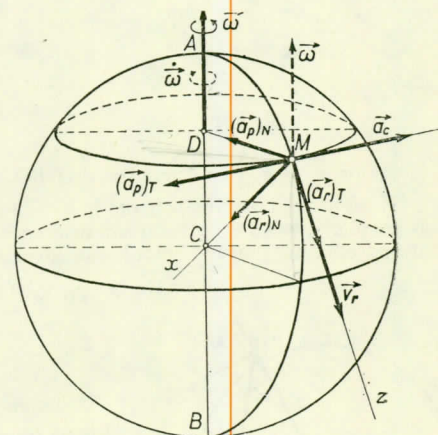
3) Određivanje $\vec{a}_c$. Ovi računi se izvode po pravilima koja su navedena u § 92.

4) Određivanje $\vec{a}_a$. Prikazivanjem svih određenih vektora na crtežu, uzimajući u obzir njihov pravac i smer prema Koriolisovoj teoremi dobijamo:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_{rT} + \vec{a}_{rN} + \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN} + \vec{a}_c.$$



Sl. 219



Sl. 220

Ako je zbir vektora, koji stoji na desnoj strani ove jednačine, teško odrediti geometrijskim putem, onda uvodimo neki koordinatni sistem $Mxyz$ (vidi sl. 220) i izračunavamo najpre projekcije svih komponentnih vektora na te ose. Tada po teoremi o projekciji zbira vektora na ose biće

$$a_{ax} = \Sigma a_{ix}, \quad a_{ay} = \Sigma a_{iy}, \quad a_{az} = \Sigma a_{iz}.$$

Posle toga nalazimo:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}.$$

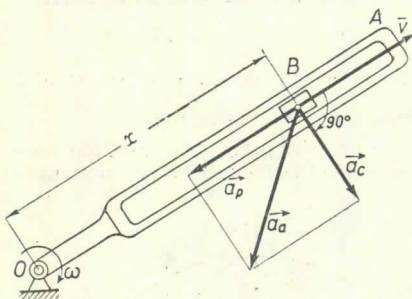
Primerba. Pri izračunavanju a_a ne treba smatrati da je

$$a_a = \sqrt{a_r^2 + a_p^2 + a_c^2}$$

(karakteristična greška) jer u opštem slučaju vektori $\vec{a}_r, \vec{a}_p, \vec{a}_c$ nisu međusobno upravni.

Zadatak 86. Kulisa OA obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose O (sl. 221).

U prerezu kulise klizi klizač B konstantnom relativnom brzinom v . Odrediti apsolutno ubrzanje klizača u zavisnosti od njegovog rastojanja x od ose O .



Sl. 221

Rešenje. Ako u trenutku t_1 zaustavimo kulisu nalazimo da je relativno kretanje klizača duž kulise ravnomerno (jednoliko) i pravolinijsko; prema tome je $a_r = 0$.

Kretanje kulise OA za klizač B je prenosno kretanje. Prema tome, prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ klizača jednako je ubrzanju one tačke kulise sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa klizač. Kako se ta tačka kulise kreće po krugu poluprečnika $x = OB$, i kako je $\omega = \text{const}$,

to je vektor $\vec{a}_p = \vec{a}_{pN}$ i usmeren je duž BO , a po intenzitetu je jednak $a_p = a_{pN} = x\omega^2$.

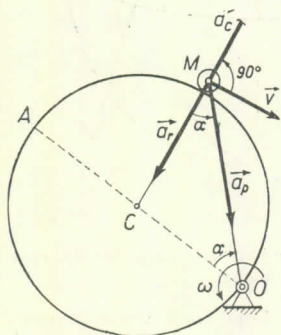
→ Koriolisovo ubrzanje jednako je $a_c = 2v\omega$, jer je kretanje ravno. Ako vektor relativne brzine v obrnemo oko tačke B za 90° u smeru prenosnog obrtanja (tj. u smeru kretanja kazaljke na časovniku), odredićemo pravac i smer koriolisovog ubrzanja.

Po Koriolisovoj teoremi je

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c$$

→ U datom slučaju je $a_r = 0$, a vektor $\vec{a}_c$ je upravan na vektor $\vec{a}_p$. Prema tome,

$$a_a = \sqrt{a_p^2 + a_c^2} = \omega \sqrt{x^2\omega^2 + v^2}.$$



Sl. 222.

Zadatak 87. Ekscentar, koji predstavlja kružni disk poluprečnika R , obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω oko ose O , koja se nalazi na obimu diska (sl. 222). Po obimu diska konstantnom relativnom brzinom v klizi klin M , koji počinje svoje kretanje iz tačke A . Odrediti apsolutno ubrzanje klina u proizvoljnom trenutku vremena t . Smer kretanja prikazan je na crtežu.

Rešenje. U trenutku vremena t klin se nalazi od tačke A na rastojanju $s = \widehat{AM} = vt$. Prema tome, u tom trenutku vremena ugao $\sphericalangle AOM = \alpha$ biće jednak

$$\alpha = \frac{s}{2R} = \frac{v}{2R} t, \quad (a)$$

jer je ugao α jednak polovini centralnog ugla ACM .

Ako u trenutku t zaustavimo disk dobićemo da se relativno kretanje klina M vrši po krugu poluprečnika R . Kako je $v_r = v = \text{const}$, to je

$$a_{rT} = \frac{dv}{dt} = 0, \quad a_{rN} = \frac{v^2}{R} \quad (b)$$

Vektor $\vec{a}_r = \vec{a}_{rN}$ usmeren je duž poluprečnika MC .

Kretanje diska za klin M je prenosno kretanje. Prema tome, prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ klina jednako je ubrzanju one tačke diska s kojom se u datom trenutku vremena poklapa klin. Ta tačka diska kreće se po krugu poluprečnika $\overline{OM} = 2R \cos \alpha$. Kako je za disk $\omega = \text{const}$, to je $\dot{\omega} = 0$, i

$$a_{pT} = \overline{OM} \cdot \dot{\omega} = 0, \quad a_{pN} = \overline{OM} \cdot \omega^2 = 2R\omega^2 \cos \alpha. \quad (c)$$

Vektor $\vec{a}_p = \vec{a}_{pN}$ usmeren je duž prave MO .

Kako se kretanje vrši u ravni, to je u ovom slučaju

$$a_c = 2v\omega. \quad (d)$$

Pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ odredićemo ako okrenemo vektor $\vec{v}_r = \vec{v}$ oko tačke M za 90° u smeru prenosnog kretanja (tj. u smeru suprotnom kretanju kazaljke na časovniku).

Apsolutno ubrzanje klina M jednako je

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c.$$

U datom slučaju vektori $\vec{a}_r$ i $\vec{a}_c$ usmereni su duž iste prave i mogu se zameniti jednim vektorom $\vec{a}_1$, koji je usmeren duž iste prave, pri čemu je njegov intenzitet $a_1 = a_r - a_c$.

Ako zatim saberemo vektore $\vec{a}_1$ i $\vec{a}_p$ po pravilu paralelograma, dobićemo najzad da je:

$$a_a = \sqrt{a_p^2 + (a_r - a_c)^2 + 2a_p(a_r - a_c) \cos \alpha}.$$

gde su a , a_r , a_p , a_c određeni jednačinama (a), (b), (c), (d).

Zadatak 88. Telo se kreće translatorno na severnoj polulopti duž meridijana sa severa na jug (sl. 223) brzinom $v_r = v$ m/s. Odrediti veličinu, pravac i smer koriolisovog ubrzanja tela kada se telo nalazi na širini λ .

Rešenje. Zanemarujući dimenzije tela posmatrajmo ga kao tačku. Relativna brzina $\vec{v}_r$ tela obrazuje sa Zemljinom osom ugao λ . Prema tome,

$$a_c = 2\omega v_r \sin \lambda,$$

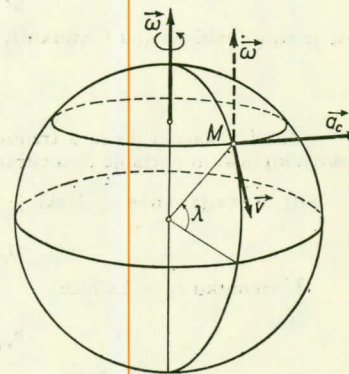
gde je ω — ugaona brzina obrtanja Zemlje.

Na taj način, telo će imati najveće koriolisovo ubrzanje na polu, gde je $\lambda = 90^\circ$. Ukoliko se telo bude približavalo ekvatoru veličina a_c će se smanjivati i na ekvatoru, kada je $\lambda = 0$, biće jednako nuli (na ekvatoru vektor $\vec{v}_r = \vec{v}$ paralelan je obrtnoj osi Zemlje).

Pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ nalazimo po pravilu vektorskog proizvoda. Kako je $\vec{a}_c = 2[\vec{\omega}, \vec{v}_r]$ vidimo da

je vektor $\vec{a}_c$ upravan na ravan, koja prolazi kroz vektore

$\vec{v}$ i $\vec{\omega}$, tj. upravan je na ravan meridijanskog preseka. Vektor $\vec{a}_c$ usmeren je na istok, odakle se vidi da je smer najkraćeg pomeranja, kojim se postiže poklapanje vektora $\vec{\omega}$ i vektora $\vec{v}_c$, suprotan kretanju kazaljke na časovniku.



Sl. 223

Problem o tome kako se menja kretanje tela na Zemljinoj površini usled postojanja korio-
lisovog ubrzanja biće razmotren u dinamici. Iz dobijene formule se takođe vidi da je veličina
 a_c obično mala, jer je ugaona brzina obrtanja Zemlje mala:

$$\omega \approx \frac{2\pi}{24 \cdot 3600} \text{ s}^{-1}.$$

Prema tome, očividno je da se kod kretanja koja se ne vrše vrlo velikim brzinama v , korio-
lisovo ubrzanje praktično može zanemariti.

Zadatak 89. Pravougli trougao ABC , čija je hipotenuza $\overline{AB} = 2a = 20 \text{ cm}$, a $\sphericalangle CBA = \alpha = 60^\circ$, obrće se oko ose Cz_1 (sl. 224) po zakonu $\varphi = 10t - 2t^2$. Duž hipotenuze AB , oko njene sredine O , osciluje tačka M po zakonu $\xi = a \cos \frac{\pi}{3} t$ (osa $O\xi$ usmerena je duž prave OA).
Odrediti apsolutno ubrzanje tačke M u trenutku $t_1 = 2 \text{ s}$.

Rešenje. 1) Odredimo najpre položaj tačke M na njenoj relativnoj putanji AB u trenutku t_1 . Iz jednačine kretanja nalazimo

$$\xi_1 = a \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} a.$$

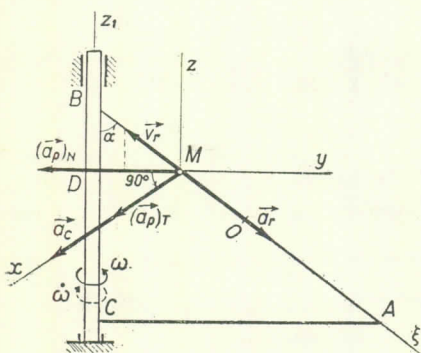
Prema tome, tačka M nalazi se u trenutku t_1 na sredini odsečka OB . Prikažimo taj položaj na crtežu.

2) Određivanje $\vec{v}_r$. Kako je relativno kretanje pravolinijsko to je:

$$v_r = \frac{d\xi}{dt} = -\frac{\pi}{3} a \sin \frac{\pi}{3} t.$$

U trenutku $t_1 = 2 \text{ s}$ biće

$$v_{r1} = -\frac{\pi}{6} a \sqrt{3}, \quad |v_{r1}| = \frac{5}{3} \pi \sqrt{3} \text{ cm/s}.$$



Sl. 224

Znak minus pokazuje da je vektor $\vec{v}_r$ u trenutku t_1 usmeren od M ka B .

3) Određivanje ω i $\dot{\omega}$. Ako nađemo prvi izvod po vremenu dobićemo:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = 10 - 4t, \quad \omega_1 = 2 \text{ s}^{-1},$$

gde je ω_1 — veličina ω u trenutku $t_1 = 2 \text{ s}$;

$$\dot{\omega} = \frac{d\omega}{dt} = -4 \text{ s}^{-2}.$$

Znaci pokazuju da se u trenutku t_1 obrtanje vrši u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku (ako to obrtanje posmatramo iz kraja ose Cz_1) i da je ono usporeno.

4) Određivanje $\vec{a}_r$. Kako je relativno kretanje pravolinijsko, to je

$$a_r = \frac{dv_r}{dt} = -\frac{\pi^2}{9} a \cos \frac{\pi}{3} t.$$

U trenutku $t_1 = 2 \text{ s}$ biće

$$a_{r1} = \frac{\pi^2}{18} a = \frac{5}{9} \pi^2 \text{ cm/s}^2.$$

5) Određivanje $\vec{a}_p$. Obrtanje trougaone pločice za tačku M je prenosno kretanje. Prema tome, prenosno ubrzanje $\vec{a}_p$ tačke M jednako je ubrzanju one tačke trougla sa kojom se u datom trenutku vremena poklapa tačka M . Ta tačka trougla kreće se po krugu poluprečnika $h = \overline{MD}$, pri čemu je u trenutku $t_1 = 2 \text{ s}$

$$h = \frac{1}{2} a \sin \alpha = \frac{5}{2} \sqrt{3} \text{ cm}.$$

Na taj način, u tom trenutku biće

$$a_{pT} = h\dot{\omega} = -10\sqrt{3} \text{ cm/s}^2, \quad a_{pN} = h\omega^2 = 10\sqrt{3} \text{ cm/s}^2.$$

Vektor $\vec{a}_{pT}$ je normalan na ravan ABC i usmeren je u smeru suprotnom od smera obrtanja trougla. Vektor $\vec{a}_{pN}$ usmeren je duž prave MD ka obrtnoj osi Cz_1 .

6) Određivanje $\vec{a}_c$. Po intenzitetu koriolisovo ubrzanje a_c u trenutku $t_1 = 2$ s jednako je

$$a_c = 2|\omega v_r| \sin \alpha = 10\pi \text{ cm/s}^2,$$

jer je ugao između relativne brzine $\vec{v}_r$ i ose Cz_1 u datom slučaju jednak α .

Projiciranjem vektora $\vec{v}_r$ na ravan upravu na osu Cz_1 (projekcija je usmerena duž prave MD) i obrtanjem ove projekcije za 90° u smeru prenosnog obrtanja, tj. u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku, odredićemo pravac i smer vektora $\vec{a}_c$ (koriolisovo ubrzanje u datom slučaju poklapa se po pravcu i smeru sa ubrzanjem $\vec{a}_{pT}$).

7) Određivanje $\vec{a}_a$. Apsolutno ubrzanje tačke M u datom trenutku vremena t_1 jednako je:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_{pT} + \vec{a}_{pN} + \vec{a}_c.$$

Da bismo odredili intenzitet ubrzanja a_a povucimo ose koordinatnog sistema $Oxyz$ (vidi sl. 224) i odredimo projekcije svih komponentnih vektora na ove ose. Na taj način dobijamo:

$$a_{ax} = a_c + |a_{pT}| = 10\pi + 10\sqrt{3} \approx 48,7 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_{ay} = a_r \sin \alpha - a_{pN} = \frac{5\pi^2}{18}\sqrt{3} - 10\sqrt{3} \approx -12,6 \text{ cm/s}^2,$$

$$a_{az} = -a_r \cos \alpha = -\frac{5}{18}\pi^2 \approx -2,7 \text{ cm/s}^2.$$

Posle toga nalazimo:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} \approx 50,4 \text{ cm/s}^2.$$

Vektor $\vec{a}_a$ možemo konstruisati pomoću njegovih komponenta duž osa koordinatnog sistema $Oxyz$.

Glava XV

SLOŽENO KRETANJE KRUTOG TELA

§ 94. Slaganje translatornih kretanja

Ako se telo kreće u odnosu na pokretni koordinatni sistem referencije $Oxyz$ (vidi sl. 208), i ako ovaj sistem jednovremeno vrši prenosno kretanje u odnosu na nepokretni koordinatni sistem referencije $O_1x_1y_1z_1$, onda se rezultujuće (apsolutno) kretanje tela zove složeno (vidi § 89).

Zadaci kinematike se u tom slučaju svode na iznalaženje zavisnosti između karakteristika relativnog, prenosnog i apsolutnog kretanja. Osnovne kinematičke karakteristike kretanja krutog tela su: translatorna brzina, ugaona brzina i ugaono ubrzanje. U daljim izlaganjima ograničićemo se samo na iznalaženje zavisnosti između translatornih i ugaonih brzina.

Razmotrimo najpre slučaj kada je relativno kretanje tela translatorno i vrši se brzinom $\vec{v}_1$, i kada je prenosno kretanje takođe translatorno sa brzinom $\vec{v}_2$. Tada će sve tačke tela pri relativnom kretanju imati brzine $\vec{v}_1$, a u prenosnom kretanju sve tačke tela imaće brzine $\vec{v}_2$. Na taj način, na osnovu teoreme o slaganju brzina sve tačke tela pri apsolutnom kretanju imaće jednu te istu brzinu $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$, tj. apsolutno kretanje tela biće takođe translatorno.

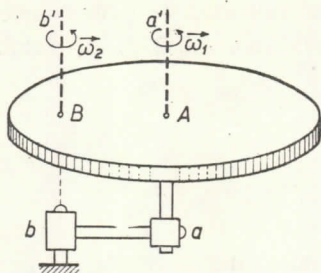
Prema tome, pri slaganju dvaju translatornih kretanja sa brzinama $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, rezultujuće kretanje tela biće takođe translatorno i vršiće se brzinom $\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$. Zadatak slaganja brzina u tom slučaju svodi se na zadatak kinematike tačke (§ 90).

§ 95. Slaganje obrtanja oko dveju paralelnih osa

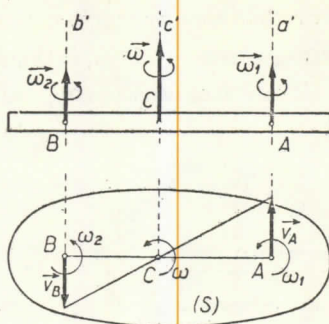
Razmotrimo slučaj kada je relativno kretanje obrtno kretanje, koje se vrši ugaonom brzinom ω_1 oko ose aa' , koja je pričvršćena za krivaju ba (sl. 225), dok je prenosno kretanje takođe obrtno kretanje krivaje ba oko ose bb' ugaonom brzinom ω_2 .

Ako su ose aa' i bb' paralelne međusobom, onda će kretanje tela biti ravno u odnosu na ravan upravnu na ove dve ose. Ispitajmo posebno slučaj kada su oba

obrtanja usmerena u istom smeru, i posebno kada su obrtanja usmerena u suprotnom smeru.



Sl. 225



Sl. 226

1) Obrtanja su usmerena u istom smeru. Nacrtajmo presek (S) tela kao ravan koja je upravna na ose (sl. 226). Prodore osa kroz ovaj presek označićemo tačkama A i B. Lako je videti da tačka A, koja leži na obrtnoj osi Aa' dobija brzinu samo od obrtanja oko ose Bb', pa je, prema tome, $v_A = \overline{AB} \cdot \omega_2$. Isto tako je $v_B = \overline{AB} \cdot \omega_1$. Pri tom su vektori $\vec{v}_A$ i $\vec{v}_B$ paralelni međusobom (oba su upravna na AB) i usmereni u suprotne strane. U tom slučaju je tačka C (vidi § 81, sl. 182) trenutni pol brzina ($v_C = 0$), pa je, prema tome, osa Cc', koja je paralelna osama Aa' i Bb', trenutna obrtna osa tela.

Radi određivanja ugaone brzine ω apsolutnog obrtanja tela oko ose Cc' i položaja same ose, tj. tačke C, iskoristimo jednačinu dobijenu u § 81 (formula 55), prema kojoj je:

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC}.$$

Iz svojstava proporcija dobijamo:

$$\omega = \frac{v_A + v_B}{AC + BC} = \frac{v_A + v_B}{AB}.$$

Ako u prethodnu jednačinu stavimo $v_A = \overline{AB} \cdot \omega_2$, $v_B = \overline{AB} \cdot \omega_1$, dobićemo, najzad:

$$\omega = \omega_1 + \omega_2,$$

(86)

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB},$$

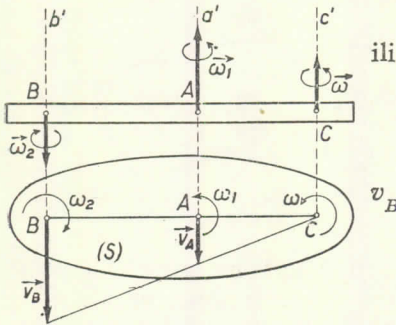
(87)

Prema tome, ako telo jednovremeno učestvuje u dva obrtanja istoga smera, i ako se ta obrtanja vrše oko paralelnih osa, onda će rezultujuće kretanje biti takođe trenutno obrtanje, koje se vrši oko trenutne obrtne ose apsolutnom ugaonom brzinom $\omega = \omega_1 + \omega_2$; trenutna obrtna osa paralelna je datim osama i njen položaj je određen proporcijom (87).

U toku vremena trenutna obrtna osa opisuje cilindričnu površinu, tj. ona menja svoj položaj u prostoru.

2) Obrtanja su usmerena u suprotnom smeru. Prikažimo opet presek (S) tela (sl. 227) i pretpostavimo da je $\omega_1 > \omega_2$. Tada, sličnim rasuđivanjem kao i u prethodnom primeru, nalazimo da su brzine tačaka A i B brojčano jednake:

$v_A = \overline{AB} \cdot \omega_2$, $v_B = \overline{AB} \cdot \omega_1$ i da su paralelne međusobno i usmerene u iste strane. U tom slučaju trenutna obrtna osa prolazi kroz tačku C (sl. 227), pri čemu je



Sl. 227

$$\omega = \frac{v_B}{BC} = \frac{v_A}{AC} = \frac{v_B - v_A}{BC - AC},$$

$$\text{ili}$$

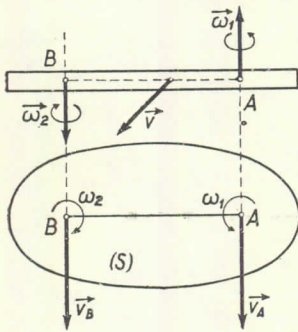
$$\omega = \frac{v_B - v_A}{AB}.$$

Ako u gornje jednačine smenimo vrednosti v_A i v_B , dobićemo najzad

$$\omega = \omega_1 - \omega_2, \quad (88)$$

$$\frac{\omega_1}{BC} = \frac{\omega_2}{AC} = \frac{\omega}{AB} \quad (89)$$

Prema tome, i u ovom slučaju rezultujuće kretanje je takođe trenutno obrtanje, koje se vrši apsolutnom ugaonom brzinom $\omega = \omega_1 - \omega_2$ oko trenutne ose Cc', čiji je položaj određen proporcijom (89).



Sl. 228

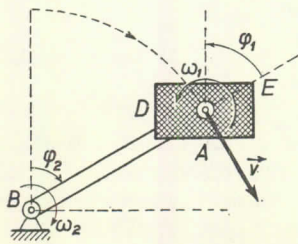
Napomenimo da dobijeni rezultati pokazuju da se vektori ugaonih brzina pri obrtanju oko paralelnih osa slažu slično kao i vektori paralelnih sila (§ 17).

3) Spreg obrtanja. Razmotrimo poseban slučaj kada se obrtanja vrše oko paralelnih osa (sl. 228) ugaonim brzinama koje su jednake po intenzitetu $\omega_1 = \omega_2$, ali kada obrtanja imaju suprotne smerove. Oba obrtanja zajedno nazivaju se tada *spregom*

obrtanja, dok ugaone brzine $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ čine u ovom slučaju spreg ugaonih brzina ili kraće rečeno *kinematički spreg*. U ovom slučaju dobijamo da je:

$v_A = v_B = \overline{AB} \cdot \omega_1$. Tada se (vidi § 81, sl. 181)

trenutni pol brzina nalazi u beskonačnosti i sve tačke tela u datom trenutku vremena imaju iste brzine $v = \overline{AB} \cdot \omega_1$.



Sl. 229

Prema tome, rezultujuće kretanje tela je *translatorno* (ili pak *trenutno translatorno*) i vrši se brzinom $\vec{v}$, koja je brojčano jednaka $\overline{AB} \cdot \omega_1$, a upravna je na

ravan u kojoj leže vektori ugaonih brzina $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$; smer vektora $\vec{v}$ određuje se na isti način kao što se

u statici određuje smer momenta $\vec{M}$ sprega sila (§ 44). Prema tome, možemo reći da je *spreg obrtanja ekvivalentan translatornom* (ili pak *trenutno translatornom*

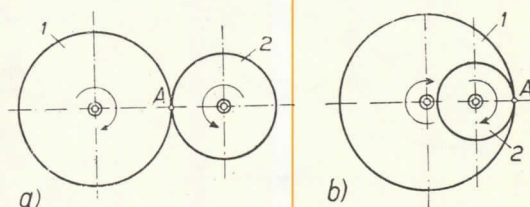
kretanju), koje se vrši brzinom $\vec{v}$, jednakom momentu ugaonih brzina *sprega obrtanja*.

Primer za takvo kretanje je. translatorno kretanje pedale $\overline{DE}$ na biciklu u odnosu na ram bicikla (sl. 229); ovo kretanje nastaje kao rezultat relativnog obrtanja pedale oko ose koja je pričvršćena za krivaju BA , i prenosnog obrtanja krivaje BA oko ose B . Ugaone brzine ovih obrtanja ω_1 i ω_2 jednake su po intenzitetu, jer je u bilo kom trenutku vremena obrtni ugao φ_1 pedale prema krivaji BA jednak obrtnom uglu φ_2 krivaje. Brzina translatornog kretanja pedale je u tom slučaju $v = \overline{AB} \cdot \omega_2$.

§ 96. Cilindrični zupčasti prenosnici

Rezultati dobijeni u prethodnom paragrafu mogu se upotrebiti za kinematički proračun zupčastih prenosnika koje obrazuju cilindrični zupčanici. Razmotrimo osnovne oblike tih prenosnika.

1) *Običnim prenosnikom* naziva se prenosnik kod koga su ose svih međusobom ozubljenih zupčanika nepomične. Tom prilikom jedan od zupčanika je vodeći (npr., zupčanik 1 na sl. 230, 231), dok su ostali vođeni. Bilo kod spoljašnjeg (sl. 230, a), bilo kod unutrašnjeg ozubljenja (sl. 230, b) dvaju zupčanika, biće $r_1|\omega_1| = r_2|\omega_2|$, jer je brzina tačke dodira A za oba zupčanika ista. Imajući u vidu da je broj zubaca z ozubljenih zupčanika proporcionalan njihovim poluprečnicima i da se obrtanje zupčanika, pri unutrašnjem ozubljenju, vrši u istom smeru, a pri spoljašnjem ozubljenju u suprotnom smeru, dobićemo:*



Sl. 230

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{spolj.}} = -\frac{r_2}{r_1} = -\frac{z_2}{z_1}; \quad \left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right)_{\text{unut.}} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Pri spoljašnjem ozubljenju triju zupčanika (sl. 231) nalazimo da je

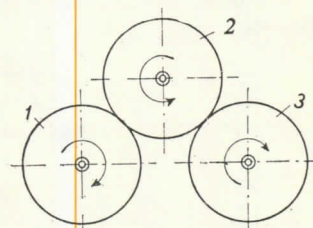
$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = -\frac{r_2}{r_1}; \quad \frac{\omega_2}{\omega_3} = -\frac{r_3}{r_2},$$

odakle je

$$\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{r_3}{r_1} = \frac{z_3}{z_1}.$$

Prema tome, odnos ugaonih brzina krajnjih zupčanika kod običnih prenosnika obrnuto je proporcionalan njihovim poluprečnicima (broju zubaca) i ne zavisi od poluprečnika umetnutih (parazitnih) zupčanika.

Iz dobijenih rezultata proizlazi da će pri običnom ozubljenju n zupčanika biti



Sl. 231

$$\left(\frac{\omega_1}{\omega_n}\right) = (-1)^k \frac{r_n}{r_1} = (-1)^k \frac{z_n}{z_1} \quad (90)$$

gde je k — broj *spoljašnjih* ozubljenja (u slučaju, koji je prikazan na sl. 230, a postoji jedno spoljašnje ozubljenje; na sl. 231 dva spoljašnja ozubljenja; na sl. 230, b — spoljašnjih ozubljenja nema).

Prenosnim brojem datog zupčastog prenosnika naziva se veličina i_{1n} , koja određuje odnos ugaonih brzina vodećeg zupčanika prema ugaonoj brzini vođenog zupčanika:

$$i_{1n} = \frac{\omega_1}{\omega_n} \quad (91)$$

* U svim formulama ovog paragrafa — algebarska (brojčana) veličina ugaone brzine ima znak plus pri obrtanju u smeru suprotnom obrtanju kazaljke na časovniku i znak minus kada se to obrtanje vrši u smeru obrtanja kazaljke na časovniku.

Kod običnih prenosnika prenosni broj i_m određen je desnom stranom formule (90).

2) *Planetarnim prenosnikom* (vidi sl. 232) naziva se prenosnik kod koga je zupčanik 1 nepokretan, dok su ose ostalih zupčanika, koji su međusobom ozubljeni, pričvršćene za krivaju AB , koja se obrće oko nepomičnog zupčanika.

3) *Diferencijalnim prenosnikom* se naziva prenosnik prikazan na sl. 232, u slučaju kada zupčanik 1 može takođe da se obrće oko svoje ose nezavisno od krivaje AB .

Proračun planetarnih i diferencijalnih zupčanika može da se izvrši ako u mislima saopštimo nepomičnoj ravni Ax_1y_1 obrtanje ugaonom brzinom $-\omega_{AB}$, koja je jednaka po intenzitetu, suprotna po smeru, ugaonoj brzini obrtanja krivaje AB (metoda zaustavljanja ili metoda Vilisa).

Tada, na osnovu rezultata dobijenih u paragrafu 95, krivaja će pri tom složenom kretanju biti nepokretna, a bilo koji zupčanik poluprečnika r_k imaće ugaonu brzinu $\widehat{\omega}_k = \omega_k - \omega_{AB}$,

gde je ω_k — apsolutna ugaona brzina tog zupčanika u odnosu na ose koordinatnog sistema Ax_1y_1 . Pri tom će ose svih zupčanika biti nepomične i zavisnosti između $\widehat{\omega}_k$ mogu da budu određene ili izjednačavanjem brzina tačaka dodira zupčanika, ili neposredno po formuli (90).

Proračun planetarnih i diferencijalnih zupčanika može da se izvrši i pomoću trenutnog pola brzina (§ 81).

Zadatak 90. U planetarnom mehanizmu (sl. 232) zupčanik 1, poluprečnika r_1 , je nepokretan, dok se krivaja AB obrće konstantnom ugaonom brzinom ω_{AB} . Odrediti ugaonu brzinu zupčanika 3, poluprečnika r_3 .

Rešenje. Apsolutne ugaone brzine obrtanja zupčanika u odnosu na ose koordinatnog sistema Ax_1y_1 označimo sa ω_1 ($\omega_1 = 0$), ω_2 i ω_3 . Ako celoj ravni Ax_1y_1 saopštimo obrtanje ugaonom brzinom $-\omega_{AB}$ dobićemo obrtanja koja se vrše ugaonim brzinama:

$$\widehat{\omega}_1 = 0 - \omega_{AB}, \quad \widehat{\omega}_2 = \omega_2 - \omega_{AB}, \quad \widehat{\omega}_3 = \omega_3 - \omega_{AB}, \quad \widehat{\omega}_{AB} = 0.$$

U dobivenom običnom prenosniku broj spoljašnjih ozubljenja je $k = 2$. Tada po formuli (90) proizlazi:

$$\frac{\widehat{\omega}_1}{\widehat{\omega}_3} = \frac{r_3}{r_1} \quad \text{ili} \quad \frac{-\omega_{AB}}{\omega_3 - \omega_{AB}} = \frac{r_3}{r_1}.$$

Oдавде nalazimo apsolutnu ugaonu brzinu zupčanika 3:

$$\omega_3 = \left(1 - \frac{r_1}{r_3}\right) \omega_{AB}.$$

Ako je $r_3 > r_1$, onda se smer obrtanja zupčanika 3 poklapa sa smerom obrtanja krivaje, a ako je $r_3 < r_1$ — onda se ne poklapa. U slučaju kada je $r_1 = r_3$ dobijamo da je $\omega_3 = 0$. Zupčanik 3 u tom slučaju kreće se translatorno.

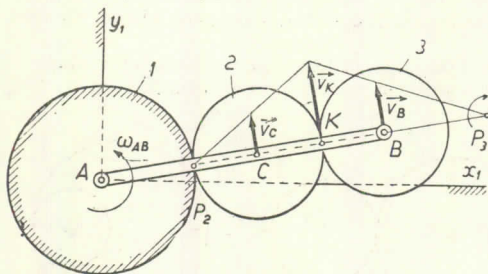
Relativnu (u odnosu na krivaju AB) ugaonu brzinu zupčanika 3 odredićemo po formuli (86). Kako je apsolutna ugaona brzina $\omega_3 = \omega_{3r} + \omega_{AB}$ (ugaona brzina ω_{AB} krivaje je za zupčanik 3 prenosna ugaona brzina), to je

$$\omega_{3r} = \omega_3 - \omega_{AB} = -\frac{r_3}{r_1} \omega_{AB}.$$

Kada je $r_3 = r_1$ dobijamo da je $\omega_{3r} = -\omega_{AB}$. Relativna ω_{3r} i prenosna ugaona brzina ω_{AB} obrazuju u ovom slučaju spreg i na taj način drugim putem dolazimo do zaključka da će rezultujuće kretanje zupčanika 3 u ovom slučaju biti translatorno kretanje koje će se vršiti brzinom $v = \overline{AB} \cdot \omega_{AB}$.

Drugo rešenje.* Brzina tačke B zupčanika 3 biće jednaka $v_B = (r_1 + 2r_2 + r_3) \omega_{AB}$. Odredimo, takođe, brzinu tačke K ovog zupčanika, kao tačke dodira zupčanika 2 i 3. Za zupčanik

* Drugo rešenje dajemo da bismo ovde pokazali mogućnost primene metoda koje su iznete u paragrafu 81. Istim putem mogu da se reše i zadaci 91, 92. Ta rešenja biće obično nešto složenija (osobito u zadatku 92).



Sl. 232

2 brzina središta je $v_C = (r_1 + r_2)\omega_{AB}$. Trenutni pol brzina ovog zupčanika nalazi se u tački P_2 , tački dodira sa zupčanicom 1. Prema tome, $v_K = 2v_C = 2(r_1 + r_2)\omega_{AB}$.

Tada po formuli (56) (vidi paragraf 81) dobijamo

$$\omega_3 = \frac{\left| \vec{v}_B - \vec{v}_K \right|}{BK} = \frac{r_3 - r_1}{r_3} \omega_{AB}.$$

Isti rezultat može da se dobije ako odredimo trenutni pol brzina P_3 zupčanika 3.

Zadatak 91. Reduktor brzina (sl. 233) sastoji se iz:

- nepomičnog zupčanika 1;
- dva spregnuta zupčanika 2 i 3, nasadenih na krivaju koja je spojena s vodećim vratilom AC (ozubljenje zupčanika 2 i 1 je unutrašnje);
- zupčanika 4, koji se nalazi na vođenom vratilu B.

Broj zubaca pojedinih zupčanika iznosi: $z_1 = 120$, $z_2 = 40$, $z_3 = 30$, $z_4 = 50$. Vodeće vratilo vrši $n_A = 1500$ obrtaja/min. Odrediti broj obrtaja u minutu vođenog vratila B.

Rešenje. Označimo apsolutne ugaone brzine: vratila AC zajedno sa krivajom sa ω_A ; zupčanika 4 zajedno sa vratilom B sa ω_B ; zupčanika 2 i 3 sa ω_{23} (ovi zupčanici obrću se kao jedno telo). Zupčanik 1 ima ugaonu brzinu $\omega_1 = 0$. Ako ravni Ax_1y_1 , prema kojoj se paralelno kreće mehanizam, saopštimo obrtanje ugaonom brzinom $-\omega_A$, dobićemo da je krivaja pri ovom kretanju nepomična ($\hat{\omega}_A = 0$), dok zupčanici imaju ugaone brzine:

$$\hat{\omega}_1 = 0 - \omega_A, \quad \hat{\omega}_{23} = \omega_{23} - \omega_A, \quad \hat{\omega}_4 = \omega_B - \omega_A.$$

Postavimo sada za zupčanike 1 i 2 i za zupčanike 3 i 4 zavisnosti (90). Tada dobijamo

$$\frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_{23}} = \frac{z_2}{z_1}; \quad \frac{\hat{\omega}_{23}}{\hat{\omega}_4} = -\frac{z_4}{z_3}.$$

Iz ovih jednačina proizlazi:

$$\frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_4} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3} \quad \text{ili} \quad \frac{-\omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Odavde, imajući u vidu da je veličina n obrtaja/min proporcionalna ω , nalazimo

$$n_B = \left(1 + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4}\right) n_A = 4200 \text{ obrtaja/min.}$$

Zadatak 92. Rešiti prethodni zadatak pod uslovom da se zupčanik 1 obrće takođe u istom smeru, kao i vodeće vratilo AC sa $n_1 = 1100$ obrtaja/min (reduktor sa diferencijalnim prenosnikom).

Rešenje. Tok rešavanja ostaje isti kao i u zadatku 91, s tom razlikom što je sada $\omega_1 \neq 0$ (pri čemu se prema uslovima zadatka znaci za ω_1 i ω_2 poklapaju), tako, da je $\hat{\omega}_1 = \omega_1 - \omega_A$.

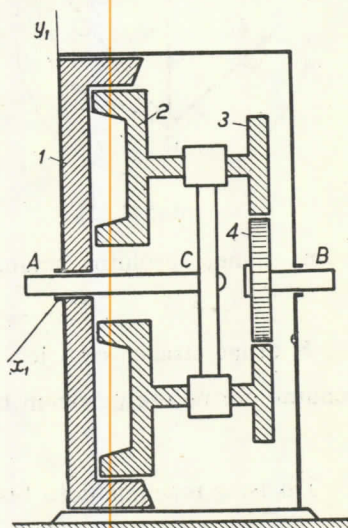
Proporcija dobivena u zadatku 91 daje

$$\frac{\hat{\omega}_1}{\hat{\omega}_4} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}, \quad \text{odnosno} \quad \frac{\omega_1 - \omega_A}{\omega_B - \omega_A} = -\frac{z_2 z_4}{z_1 z_3}.$$

Odavde prelazeći na broj obrtaja u minutu, nalazimo

$$n_B = n_A + \frac{z_1 z_3}{z_2 z_4} (n_A - n_1) = 2220 \text{ obrtaja/min.}$$

Ako se zupčanik 1 obrće u suprotnom smeru od smera obrtanja vratila AC, onda u dobijenom rezultatu treba promeniti znak kod n_1 .

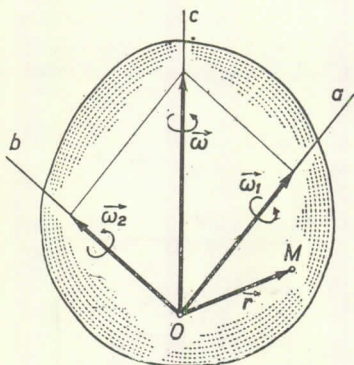


Sl. 233

§ 97*. Slaganje obrtanja oko osa koje se seku

Posmatrano kretanje može da bude predstavljeno slikom 225; ako se zamisli da u njoj ose aa' i bb' leže u jednoj ravni, ali nisu paralelne.

Ako je apsolutno kretanje tela rezultat relativnog i prenosnog obrtanja, koja se vrše ugaonim brzinama ω_1 i ω_2 oko osa Oa i Ob , koje se seku u tački O (sl. 234), onda je brzina tačke M , koja jednovremeno leži na obe ose, jedna ka nuli.



Sl. 234.

Prema tome, apsolutna brzina tačke M biće jednaka,

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_p = [\vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2, \vec{r}]$$

S druge strane, kako je rezultujuće kretanje u stvari trenutno obrtanje oko trenutne obrtne ose ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ to, očividno, mora biti

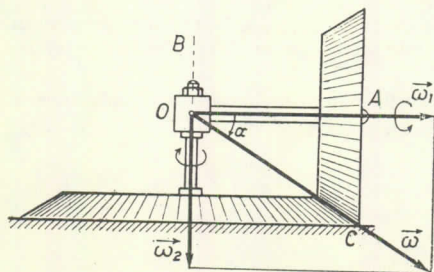
$$\vec{v}_a = [\vec{\omega}, \vec{r}].$$

Do istog rezultata došli bismo posmatrajući bilo koju tačku tela (tj. pri bilo kakvom $\vec{r}$). Odatle zaključujemo da je:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2.$$

(92)

Prema tome, pri slaganju obrtanja oko dveju osa koje se seku u tački O , rezultujuće kretanje tela biće trenutno obrtanje oko ose Oc , koja prolazi kroz tačku O , pri



Sl. 235

čemu je ugaona brzina obrtanja $\vec{\omega}$ ovog obrtnog kretanja jednaka geometrijskom zbiru relativne i prenosne ugaone brzine. Trenutna obrtna osa Oc usmerena je duž vektora $\vec{\omega}$, tj. duž dijagonale paralelograma konstruisanog nad vektorima ugaonih brzina $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$.

Tokom vremena osa Oc menja svoj položaj u prostoru, tj. opisuje konusnu površinu sa vrhom u tački O .

Zadatak 93. Odrediti apsolutnu ugaonu brzinu ω konusnog zupčanika (vidi zadatak 80, § 87), ako su poznati poluprečnik zupčanika $AC = R$, rastojanje $OA = l$ i brzina v_A tačke A (slika 235).

Rešenje. Apsolutno kretanje zupčanika sastoji se iz njegovog relativnog obrtanja oko ose OA ugaonom brzinom $\vec{\omega}_1$ i prenosnog obrtanja krivaje OA oko ose OB ugaonom brzinom $\vec{\omega}_2$, pri čemu je

$$\omega_2 = \frac{v_A}{l}.$$

Trenutna obrtna osa, pa prema tome i vektor apsolutne ugaone brzine $\vec{\omega}$, usmerena je duž prave OC , jer je brzina tačke C jednaka nuli (vidi zadatak 80). Konstruišući odgovarajući paralelogram nalazimo da je $\omega = \frac{\omega_2}{\sin \alpha}$.

Kako je $\sin \alpha = \frac{R}{\sqrt{l^2 + R^2}}$, to najzad dobijamo

$$\omega = \frac{v_A}{R} \sqrt{1 + \frac{R^2}{l^2}}.$$

Drugim putem može se taj rezultat dobiti (imajući u vidu da je OC — trenutna obrtna osa) iz jednačine $v_A = h\omega$, gde je $h = l \sin \alpha$.

Obrtanje zupčanika sastoji se iz niza elementarnih obrtanja koja se vrše ugaonom brzinom ω oko ose OC , koja neprestano menja svoj položaj opisujući kružni konus, čiji se vrh nalazi u tački O .

§ 98*. Slaganje translatornog i obrtnog kretanja. Zavojno kretanje

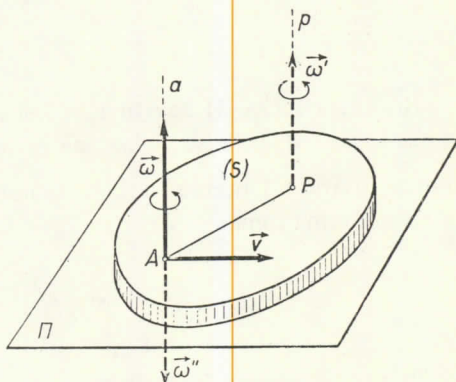
Razmotrimo složeno kretanje krutog tela koje se sastoji iz translatornog i obrtnog kretanja krutog tela. Pri tome mogu da nastupe sledeća tri slučaja:

1) Brzina translatornog kretanja upravna je na osi obrtanja ($\vec{v} \perp \vec{\omega}$). Neka se složeno kretanje tela sastoji iz obrtnog kretanja oko ose Aa , koje se vrši ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, i translatornog kretanja, koje se vrši brzinom $\vec{v}$ upravnom na $\vec{\omega}$ (sl. 236). Lako je videti da to kretanje predstavlja (u odnosu na ravan Π koja je upravna na osi Aa) ravno kretanje, koje je detaljno proučeno u glavi XII. Ako smatramo tačku A za pol, onda se razmatrano kretanje, kao i svako drugo ravno kretanje, može da razloži na dva komponentna kretanja: jedno translatorno, koje će se vršiti brzinom $\vec{v}_A = \vec{v}$, tj. brzinom pola, i drugo obrtno kretanje oko ose Aa , koja prolazi kroz pol.

Vektor $\vec{v}$ možemo zameniti spregom ugaonih brzina $(\vec{\omega}', \vec{\omega}'')$ (§ 95), birajući ih tako da bude $\vec{\omega}' = \vec{\omega}$, $\vec{\omega}'' = -\vec{\omega}$. Tada se rastojanje AP nalazi iz jednačine $\vec{v} = \overline{AP} \cdot \vec{\omega}'$, odakle, (smatrajući da je $\omega' = \omega$), dobijamo

$$\overline{AP} = \frac{v}{\omega}.$$

(93)

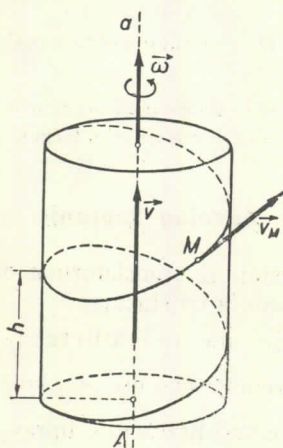


Sl. 236

Vektori $\vec{\omega}$ i $\vec{\omega}'$, kada se slože, daju u rezultatu nulu i tako dobijamo da se kretanje tela u tom slučaju može posmatrati i kao trenutno obrtanje oko ose Pp , koje se vrši ugaonom brzinom $\vec{\omega}' = -\vec{\omega}$. Do tog rezultata ranije smo došli i drugim putem (§ 81). Sravnjujući jednačine (53) i (93), lako je videti da tačka P predstavlja trenutni pol brzina za presek (S), pa je brzina tačke P jednaka nuli ($v_P = 0$). Ovde smo se još jednom uverili da se obrtanje tela oko osa Aa i Pp vrši jednom te istom ugaonom brzinom $\vec{\omega}$, tj. da obrtni deo kretanja ne zavisi od izbora pola (§ 77).

2) Zavojno kretanje ($\vec{v} \parallel \vec{\omega}$). Ako se složeno kretanje tela sastoji iz obrtnog kretanja, koje se vrši ugaonom brzinom $\vec{\omega}$ oko ose Aa , i translatorsnog kretanja, koje se vrši brzinom $\vec{v}$ paralelnom osi Aa (sl. 237), onda se takvo kretanje tela zove

zavojno kretanje. Osa Aa zove se u tom slučaju *osa zavrtnja*. Kada su vektori $\vec{v}$ i $\vec{\omega}$ usmereni u iste strane, onda će po našim usvojenim konvencijama zavrtnj biti desni, a ako su usmereni u suprotne strane on će biti levi.



Sl. 237

Rastojanje koje pređe bilo koja tačka na osi zavrtnja za vreme jednog punog obrtaja, zove se *hod zavrtnja* h . Ako su veličine v i ω konstantne, onda će i hod zavrtnja takođe biti konstantan. Ako vreme jednog punog obrtaja označimo sa T dobićemo u tom slučaju $vT = h$ i $\omega T = 2\pi$, odakle je

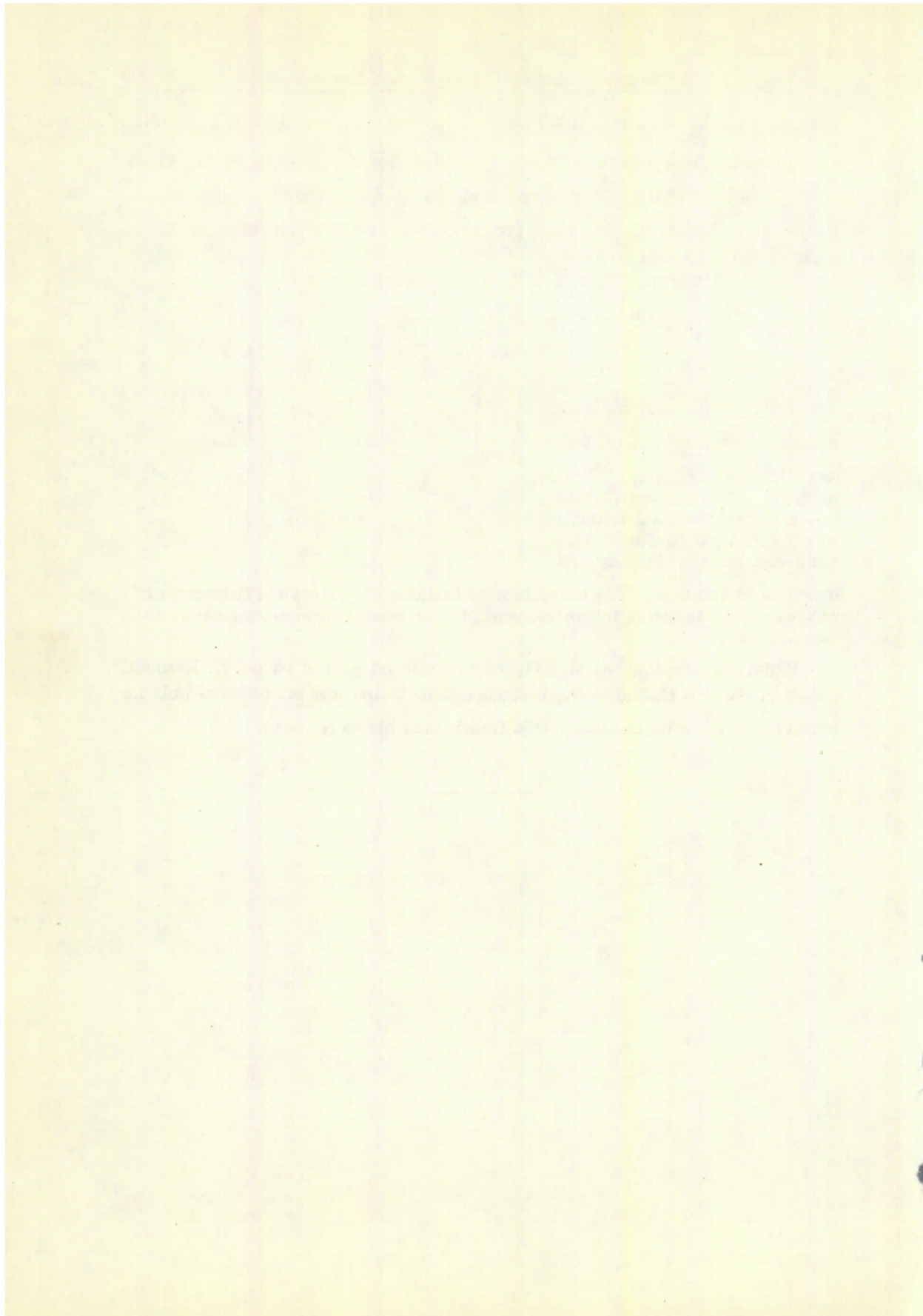
$$h = 2\pi \frac{v}{\omega}.$$

Bilo koja tačka M zavrtnja sa konstantnim hodom opisuje zavojnu liniju. Brzina tačke M koja se nalazi na rastojanju r od ose zavrtnja, sastoji se iz translatorsne brzine $\vec{v}$ i brzine $r\omega$ koja je upravna na njoj, a koja nastaje pri obrtnom kretanju. Prema tome

$$v_M = \sqrt{v^2 + r^2\omega^2}$$

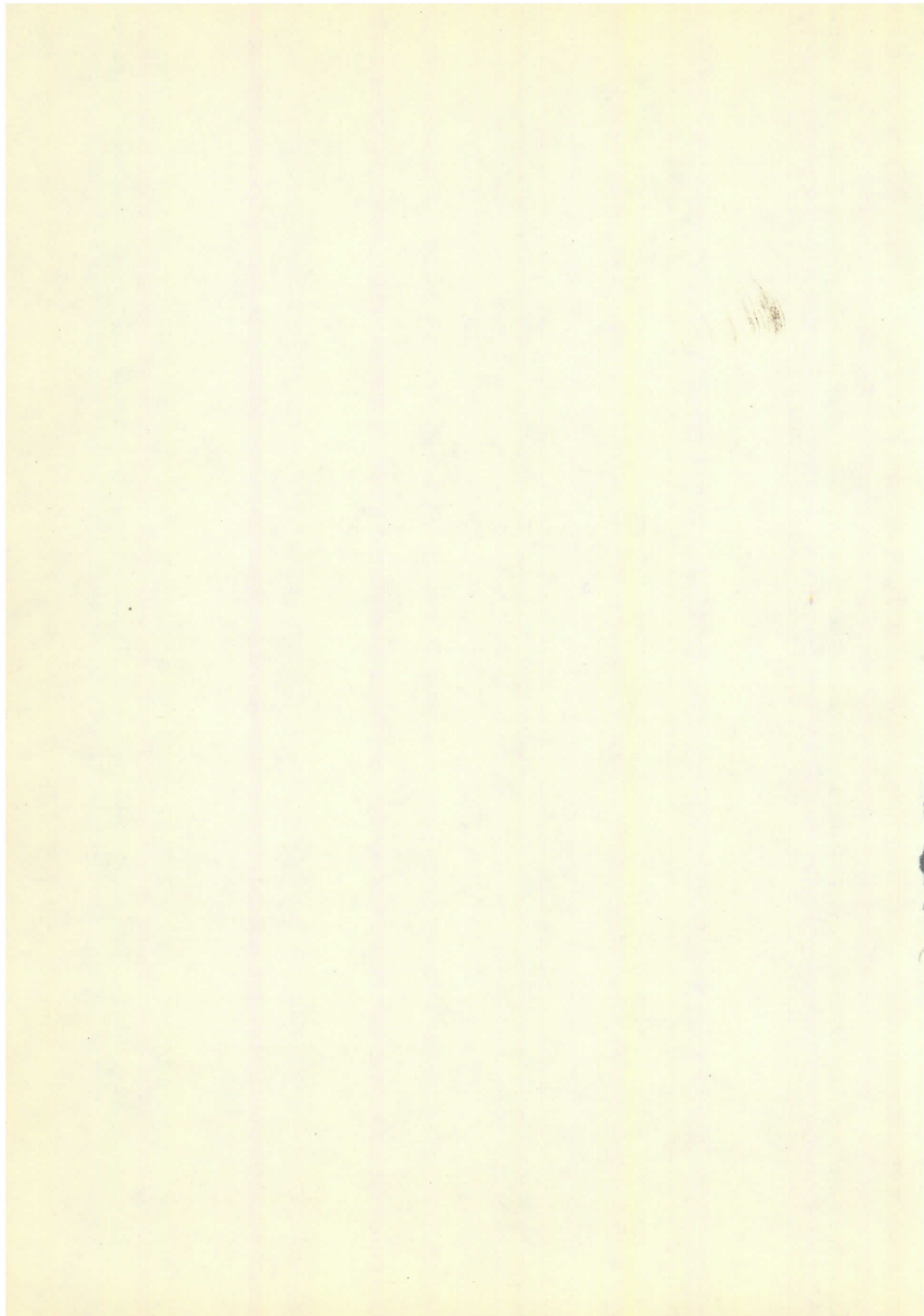
Pravac brzine $\vec{v}_M$ je pravac tangente na zavojnu liniju. Ako cilindričnu površinu po kojoj se kreće tačka M presečemo po jednoj izvodnici, koja je paralelna sa uzdužnom vertikalnom osom, i ako zatim tu površinu razvijemo, onda će zavojne linije postati, očevидno, paralelne prave, koje sa osom cilindra zaklapaju ugao α ($\text{tg } \alpha = h/2\pi r$).

3) Brzina translatorsnog kretanja obrazuje proizvoljan ugao sa obrtnom osom. Složeno kretanje koje vrši telo u tom slučaju (sl. 238, a) predstavlja, u stvari, kretanje tela koje je razmotreno u § 88 (opšti slučaj kretanja



TRÉČI DEO

DINAMIKA TAČKE



Glava XVI

UVOD U DINAMIKU. ZAKONI DINAMIKE

§ 99. Osnovni pojmovi i definicije

Dinamikom se naziva deo mehanike u kome se proučavaju zakoni kretanja materijalnih tela pod dejtvom sila.

Kretanje tela sa čisto geometrijske tačke gledišta bilo je proučeno u kinematici. U dinamici, za razliku od kinematike, pri proučavanju kretanja tela uzimaju se u obzir i sile koje deluju na telo, odnosno na tačku, i uzima se takođe u obzir i inercija (masa) samog tela, odnosno tačke, koja se kreće.

Pojam o sili, kao o veličini koja karakteriše meru mehaničkog uzajamnog dejstva materijalnih tela, bio je uveden još u statici. Međutim, u statici smo smatrali da su sile konstantne i nismo se bavili problemima u kojima se sile menjaju tokom vremena. Međutim, na pokretna tela, pored konstantnih sila (konstantnom se, npr., može smatrati sila teže), deluje takođe i veliki broj sila, čiji se intenziteti i pravci menjaju tokom vremena. Pri tome promenljive sile mogu da budu, kako date (aktivne sile), tako isto i reakcije veza.

Kako pokazuju opiti promenljive sile mogu uglavnom da zavise od:

a) *vremena*, npr., vučna sila električnog voza koja se menja postepenim uključivanjem ili pak isključivanjem reostata, ili pak sila koja izaziva oscilacije fundamente pri radu nekog motora, koji na obrtnom vratilu ima neku neuravnoteženu (ekscentričnu) masu;

b) *položaja tela*, npr., Njutnova sila opšte gravitacije, ili pak elastična (restituciona) sila u deformisanoj opruzi;

c) *brzine kretanja*, npr., sila otpora neke sredine, a u posebnom slučaju sila otpora vazduha, ili pak vode, i slično. Sile ove vrste, osim konstantnih sila, biće predmet proučavanja u raznim problemima u dinamici.

Zakoni slaganja ili svođenja (redukovanja) promenljivih sila ostaju isti kao i za konstantne sile.

Do pojma inercije (inercije) nekog tela dolazimo kada uporedimo rezultate dejstva jedne te iste sile na razna materijalna tela. Opiti pokazuju da jedna te ista sila deluje različito na dva razna tela, koja su oslobođena od dejstva drugih tela.

U opštem slučaju, po isteku istog vremenskog intervala, ova će tela dobiti različite brzine i pomeriće se za različita rastojanja.

Inertnost je svojstvo materijalnih tela da brže ili sporije menjaju brzinu svog kretanja pod dejstvom datih sila. Ako je, npr., pri dejstvu jednakih sila promena brzine jednog tela manja nego li kod drugog tela, onda se kaže da prvo telo ima veću inertnost od drugog tela, i obrnuto. Veći ili manji stepen inertnosti jednog tela zavisi od količine materije koja je obuhvaćena zapreminom posmatranog tela.

Veličina koja zavisi od količine materije jednog tela i koja određuje njegovu inertnost zove se masa tela. U mehanici se masa m tela razmatra kao skalarna veličina, pozitivna i konstantna za svako dato telo. Problem merenja mase jednog tela biće razmatran u sledećem paragrafu.

U opštem slučaju kretanje tela ne zavisi samo od njegove sumarne mase i sila koje deluju na telo; karakter kretanja jednog tela može da zavisi i od geometrijskih dimenzija jednog tela, a takođe i od rasporeda masa u jednom posmatranom telu.

Da bi se u najprostijim problemima dinamike isključio iz razmatranja uticaj dimenzija tela i rasporeda masa u samom telu, uvodi se u dinamici pojam materijalne tačke.

Materijalnom tačkom naziva se materijalno telo (tj. telo koje ima svoju masu), čije dimenzije, pri proučavanju njegovog kretanja, mogu da se zanemare.

Praktično, dato telo može se smatrati materijalnom tačkom u svim onim problemima kod kojih su pređena rastojanja, koja izvrše tačke tela, daleko veća od dimenzija samog tela.* Osim toga, kao što će kasnije biti pokazano u dinamici sistema, *translatorno kretanje* jednog tela može se uvek proučavati kao kretanje materijalne tačke, čija je masa jednaka masi tela.

Najzad, materijalnom tačkom možemo smatrati sve deliće, na koje možemo u mislima rastaviti jedno telo, pri određivanju ovih ili onih dinamičkih karakteristika.

S obzirom da proučavanje kretanja materijalne tačke prethodi proučavanju kretanja sistema materijalnih tačaka, a u posebnom slučaju kretanja krutog tela, kurs dinamike se obično deli na dva dela, i to na:

- a) *dinamiku tačke, i*
- b) *dinamiku sistema materijalnih tačaka.*

§ 100. Zakoni dinamike

Dinamika počiva na zakonima do kojih se došlo putem uopštavanja čitavog niza opita i opažanja, koji su provereni društveno-istorijskim iskustvom čovečanstva. Sistematičku tih zakona prvi je izložio Isak Njutn u svom istorijskom delu: „Matematički osnovi prirodne filozofije”, koje je izdao 1687. godine.**

Prvi zakon (*zakon inercije*), koga je otkrio Galilej (1638 god.), glasi: *materijalna tačka, izolovana od dejstva spoljašnjih tela, zadržava svoje stanje mirovanja ili ravnomernog pravolinijskog kretanja sve dotle, dok je sile (koje deluju na nju) ne prinude da to stanje promeni.* Kretanje koje vrši tačka pri odsustvu sila naziva se *kretanje po inerciji*.

*) Tako, na primer, materijalnom tačkom možemo smatrati svaku planetu pri njenom obilaženju oko Sunca, ili, npr., artiljerijsko zrno pri određivanju njegovog kretanja kroz vazduh, i slično.

**) Postoji divan ruski prevod A. N. Krilova. Vidi sabrana dela akademika A. N. Krilova, tom VII, 1936. god.

Zakon inercije iskazuje jedno od osnovnih svojstava materije — da se ne menja pri kretanju i konstatuje za materijalna tela ekvivalentnost stanja mirovanja i kretanja po inerciji. Iz njega proizlazi da ako je $\vec{F} = 0$, onda se tačka kreće brzinom konstantnog intenziteta i konstantnog pravca ($\vec{v} = \text{const}$), dok je ubrzanje tačke tom prilikom jednako nuli ($a = 0$).

Koordinatni sistem referencije za koji je ispunjen zakon inercije zove se *inercijalni koordinatni sistem referencije* (ponekad se dogovorno naziva nepokretnim). Na osnovu današnjeg stanja opita, za naš Sunčev sistem, inercijalni koordinatni sistem je koordinatni sistem čiji se koordinatni početak nalazi u središtu Sunca, a čije su koordinatne ose usmerene ka tzv. zvezdama nekretnicama. Pri rešavanju većine zadataka u tehnici, sa praktično zadovoljavajućom tačnošću, može se smatrati da je i svaki koordinatni sistem koji je čvrsto vezan za Zemlju, takođe inercijalni sistem. Opravdanost ovakvog jednog zaključka biće obrazložena u XX glavi.

Drugi zakon (*osnovni zakon dinamike*) utvrđuje kako se menja brzina tačke kada na nju deluje bilo kakva sila. Ovaj zakon glasi: *proizvod mase i ubrzanja jedne tačke, koje ona dobiva kada na nju deluje data sila, jednak je po intenzitetu toj sili, a pravac i smer ubrzanja se poklapa sa pravcem i smerom te sile.*

Osnovni zakon dinamike u matematičkom obliku izražava se vektorskom jednačinom:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}}, \quad (1)$$

pri čemu između intenziteta sile i intenziteta ubrzanja postoji zavisnost:

$$\boxed{ma = F}. \quad (2)$$

Drugi osnovni zakon dinamike takođe važi samo za inercijalne koordinatne sisteme. Iz ovog zakona odmah se vidi da je mera inernosti materijalne tačke njena masa, jer će dve različite tačke pod dejstvom jedne te iste sile dobiti ista ubrzanja samo tada ako su njihove mase iste; ako su pak mase različite, onda će tačka čija je masa veća (tj. koja je »više inertna«) dobiti manje ubrzanje, i obrnuto.

Ako na tačku deluje istovremeno nekoliko sila, onda one, kao što je poznato, mogu da budu zamenjene njihovom rezultantom, koja je jednaka geometrijskoj sumi tih sila. Jednačina koja iskazuje osnovni zakon dinamike, u tom slučaju, ima oblik:

$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}_r}, \quad \text{odnosno} \quad \boxed{m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_i}. \quad (3)$$

Merenje mase. Jednačina (2) omogućuje da se odredi masa tela ako je poznato njegovo ubrzanje pri translatornom kretanju, a takođe i sila koja deluje na telo.

Opitima je utvrđeno da sva tela pod dejstvom sile teže $\vec{G}$ pri padanju na Zemlju (u bezvazдушnom prostoru i sa male visine) imaju jedno te isto ubrzanje g , koje se zove *ubrzanje (sile) teže*, ili pak *ubrzanje slobodnog padanja**.

*) Zakon slobodnog padanja prvi je utvrdio Galilej. Veličina g na raznim mestima Zemljine površine je različita; ona zavisi od geografske širine mesta, a takođe i od njegove nadmorske visine. Na geografskoj širini Moskve (na nivou mora) $g = 9,8157 \text{ m/s}^2$.

Za slobodno padanje na osnovu jednačine (2) biće $mg = G$, odakle je

$$m = \frac{G}{g}. \quad (4)$$

Na taj način, masa jednog tela jednaka je količniku iz njegove težine i ubrzanja zemljine teže g .

Treći zakon (*zakon o jednakosti dejstva i protivdejstva; zakon akcije i reakcije*) utvrđuje karakter mehaničkog međudejstva između materijalnih tela. Za dve materijalne tačke ovaj zakon glasi: *dve materijalne tačke deluju jedna na drugu silama istih intenziteta i usmerenih duž prave koja spaja te dve tačke u suprotne strane.*

Primetimo da sile međusobnog uzajamnog dejstva slobodnih materijalnih tačaka ili tela, pošto deluju na razne objekte, ne obrazuju uravnoteženi sistem sila. Tako, npr., ako na glatku horizontalnu ravan stavimo na izvesnom međusobnom rastojanju komad gvožđa i magnet, onda će se ta tela pri uzajamnom dejstvu približavati (i neće mirovati). Tom prilikom, s obzirom da će sile koje deluju na svako od tela biti jednake po intenzitetu, ubrzanja tela, saglasno drugom zakonu dinamike, biće obrnuto proporcionalna njihovim masama.

Treći zakon dinamike, koji utvrđuje karakter uzajamnog dejstva između materijalnih tačaka, igra vrlo važnu ulogu u dinamici sistema materijalnih tačaka.

§ 101. Sistemi jedinica

Jedinice za merenje dužine i vremena bile su uvedene u kinematici. Za merenje dinamičkih veličina potrebno je da se izabere jedinica za merenje mase m i sile F . Ove dve jedinice ne mogu se izabrati proizvoljno, jer one moraju da budu saglasne jednačini (2). Iz tog razloga proističe mogućnost da se u dinamici uvedu dva principijelno različita sistema jedinica.

Prvi (*apsolutni-fizički*) sistem jedinica. U ovom sistemu kao osnovne jedinice usvajaju se:

- 1) jedinica za dužinu;
- 2) jedinica za vreme, t
- 3) jedinica za masu.

U takvom jednom sistemu sila se meri izvedenom jedinicom.

Drugi (*tehnički*) sistem jedinica. U ovom sistemu kao osnovne jedinice se usvajaju:

- 1) jedinica za dužinu;
- 2) jedinica za vreme, t
- 3) jedinica za silu.

Masa se u ovom sistemu izražava izvedenom jedinicom.

Principijelna razlika između navedenih sistema sastoji se u tome što je u jednom sistemu osnovna dinamična jedinica — jedinica za masu, dok je u drugom sistemu osnovna dinamična jedinica — jedinica za silu.

U tehnici se više upotrebljava drugi, tzv. *tehnički sistem jedinica*.*

Zakonom o mernim jedinicama i merilima** dopušteno je da se u našoj zemlji u javnom saobraćaju mogu upotrebljavati samo merne jedinice međunarodnog sistema jedinica, koji je definitivno prihvatila XI. Generalna konferencija za mere i merila održana 1960. godine u Parizu. Deo ovog sistema, koji se odnosi na mehaniku, ponekad se naziva MKS (metar, kilogram, sekunda) sistem.

Osnovne mehaničke veličine tog sistema su: *dužina, vreme i masa*, a sila je izvedena veličina. To je, dakle, apsolutni sistem jedinica.

U ovom sistemu jedinica za masu je *kilogram* [kg]. Kilogram je masa međunarodne pramere kilograma, koju je sankcionisala Generalna konferencija za težine i mere održana u Parizu 1889. godine. To je valjak visine 39 mm, prečnika 39 mm, izrađen od legure platine i iridijuma, koji se čuva u podzemnoj betonskoj čeliji paviljona Bretej u Ševru kod Pariza.

Izvedene množine i delovi kilograma su:

— tona [t]	1 t = 1000 kg
— gram [g]	1 g = 0,001 kg
— miligram [mg]	1 mg = 0,000 001 kg.

Jedinica za silu, koja je u ovom sistemu izvedena jedinica, je *njutn* (newton) [N]. To je sila koja masi od 1 kilograma povećava brzinu za 1 metar na sekundu.

Zakonom o mernim jedinicama i merilima dopušteno je da se u javnom saobraćaju može za silu takođe upotrebljavati i tehnička jedinica *kilopond* [kp]. Kilopond je težina jednog kubnog decimetra čiste vode na +4° C, pri geografskoj širini 45° i nultoj nadmorskoj visini.

Između njutna i kiloponda postoji odnos:

$$1 \text{ kp} = 9,80665 \text{ N},$$

odnosno

$$1 \text{ N} \approx 0,102 \text{ kp}.$$

Izvedene množine i delovi kiloponda su:

— megapond [Mp]	1 Mp = 1000 kp
— pond [p]	1 p = 0,001 kp
— milipond [mp]	1 mp = 0,000 001 kp.

Sila sa kojom se najčešće susrećemo je *težina* tela. Težina tela u miru ma na kom mestu Zemlje je sila koja u praznom prostoru deluje na njegovu podlogu. *Normalna težina* tela jednaka je njegovoj težini pomnoženoj količnikom normalne vrednosti ubrzanja zemljine teže od 9,80665 m/s² i ubrzanja zemljine teže na mestu gde se telo nalazi (veličina težine zavisi, dakle, od mesta gde se telo nalazi). Prema tome, proizlazi da je *normalna težina koju ima masa od 1 kilograma jednaka 1 kilopondu*.

Težina i normalna težina mogu se izjednačiti na teritoriji Jugoslavije kad nepouzdanost podataka o težini sme da iznosi 1 ‰ ili više.

U ovom kursu upotrebljavaćemo tehničku jedinicu za silu kilopond i njegove množine i delove.

* Tekst koji sledi do kraja ovog paragrafa ubacio je prevodilac zbog novih zakonskih propisa koji su na snazi u našoj zemlji.

** Službeni list FNRJ, br. 45. str. 941—948, Beograd, 1961.

§ 102. Zadaci dinamike za slobodnu i neslobodnu materijalnu tačku

Za slobodnu materijalnu tačku zadaci dinamike svode se na sledeća dva zadatka:

1) poznat je zakon kretanja materijalne tačke, a treba odrediti silu koja deluje na materijalnu tačku (*prvi — direktni — zadatak dinamike*);

2) poznate su sile koje deluju na materijalnu tačku, a treba odrediti zakon kretanja materijalne tačke [*drugi — inverzni (obrnuti) — ili osnovni zadatak dinamike*].

Oba ova zadatka se rešavaju korišćenjem jednačina (1) i (3), koje izražavaju osnovni zakon dinamike, jer te jednačine povezuju ubrzanje $\vec{a}$, tj. veličinu koja karakteriše kretanje tačke i sile koje deluju na tačku.

U tehnici je vrlo često potrebno da se prouči kretanje *neslobodne* ili *vezane materijalne tačke*, tj. takve tačke čije je kretanje izvesnim vezama ograničeno (propisano), i tačka je, npr., prinuđena da se kreće po liniji ili pak po površini.

Za rešavanje ovakvih zadataka, slično kao i u statici, koristićemo se aksiomom o vezama, prema kojoj svaku vezanu materijalnu tačku možemo posmatrati kao slobodnu, ako uklonimo vezu i njeno dejstvo na tačku zamenimo reakcijom veze $\vec{F}_N$. U tom slučaju osnovni zakon dinamike za vezanu materijalnu tačku ima oblik

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N, \quad (5)$$

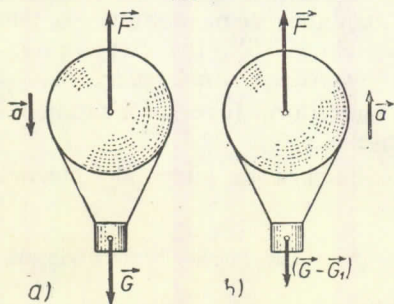
gde je $\vec{F}_i^a$ — aktivna sila koja deluje na materijalnu tačku.

Prvi zadatak dinamike za vezanu materijalnu tačku obično se svodi na to da se odredi reakcija veze, ako je poznato kretanje tačke i ako su poznate sile koje deluju na vezanu tačku. Drugi (osnovni) zadatak dinamike pri prinudnom (neslobodnom) kretanju materijalne tačke raspada se na dva zadatka i sastoji se u tome da se poznajući date (aktivne) sile koje deluju na tačku odredi:

- zakon kretanja tačke, i
- reakcija veze.

§ 103. Rešavanje prvog zadatka dinamike (određivanje sile kada je poznato kretanje)

Ako je poznato ubrzanje pokretne tačke, onda se aktivna sila, ili pak reakcija veze, nalazi na osnovu jednačina (1) ili (5). Tom prilikom za određivanje reakcije veze treba imati dopunske podatke o aktivnim silama. Kada ubrzanje tačke nije neposredno dato, ako je poznat zakon kretanja tačke, onda je za određivanje sile (ili pak reakcije) potrebno da se prethodno odredi ubrzanje po izvedenim formulama u kinematici (§§ 59, 67, 69).



Sl. 239

Zadatak 94. Vazdušni balon težine G spušta se ubrzanjem a . Koliki teret G_1 (balast) treba da se ukloni da bi balon počeo da se podiže istim ubrzanjem.

Rešenje. Na balon koji se spušta deluje sila teže $\vec{G}$ i sila uzgona $\vec{F}$ (sl. 239, a). Prema tome, na osnovu jednačine (3), biće $\frac{G}{g} a = G - F$.

Kada uklonimo balast (sl. 239, b) težina balona biće $G - G_1$, dok će uzgon ostati isti. Tada, imajući u vidu da se balon tom prilikom kreće naviše, imaćemo:

$$\frac{G - G_1}{g} a = F - (G - G_1).$$

Ako iz ovih jednačina eliminišemo nepoznatu silu F dobićemo

$$G_1 = \frac{2G}{1 + \frac{g}{a}}.$$

Zadatak 95. Lift težine G (sl. 240) počinje da se podiže ubrzanjem a . Odrediti silu u konopcu.

Rešenje. Ako posmatramo lift kao slobodno telo i ako dejstvo veze (konopca) zamenimo reakcijom $\vec{F}_K$, postavljanjem jednačine (5), biće

$$\frac{G}{g} a = F_K - G.$$

Odatve nalazimo da je:

$$F_K = G \left(1 + \frac{a}{g} \right).$$

Ako bi lift počeo da se spušta istim usporanjem, onda će sila u konopcu biti jednaka

$$F_{K1} = G \left(1 - \frac{a}{g} \right).$$

Zadatak 96. Poluprečnik krivine u tački A mosta jednak je R_k (sl. 241). Odrediti kolikom silom pritiskuje na most u tački A automobil težine G , koji se kreće brzinom v .

Rešenje. U tački A automobil ima normalno ubrzanje $a_N = v^2/R_k$. U tom trenutku na njega deluje sila teže $\vec{G}$ i reakcija $\vec{F}_N$. Tada je prema jednačini (5)

$$\frac{G}{g} \frac{v^2}{R_k} = G - F_N.$$

Odatve nalazimo da je:

$$F_N = G \left(1 - \frac{v^2}{gR_k} \right).$$

Pritisak na most po intenzitetu jednak je F_N , ali je usmeren vertikalno naniže.

Zadatak 97. Krivaja OA , dužine l , obrće se jednoliko ugaonom brzinom ω i dovodi u kretanje kulisu K , koja se kreće translatorsno duž vodica I, I (sl. 242). Odrediti, zanemarujući trenje, koliki je tom prilikom pritisak klizača A na kulisu, ako je težina kulise G .

Rešenje. Položaj kulise određen je koordinatom $x = l \cos \varphi$. Kako je $\varphi = \omega t$, to će zakon kretanja kulise biti

$$x = l \cos \omega t.$$

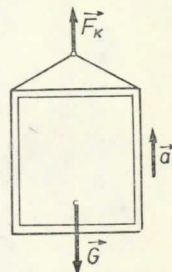
Postavimo za kulisu jednačinu (5) u obliku projekcija na osu.

Ox ; tako dobijamo $ma_x = X$. Međutim, biće $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -l\omega^2 \cos \omega t = -x\omega^2$. Odatve, imajući u vidu da je $X = -F$, dobijamo da je:

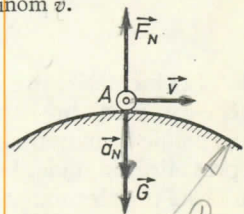
$$-\frac{G}{g} \omega^2 x = -F, \quad F = \frac{G}{g} \omega^2 x.$$

Prema tome, pritisak klizača na kulisu proporcionalan je njegovom rastojanju x od centra O .

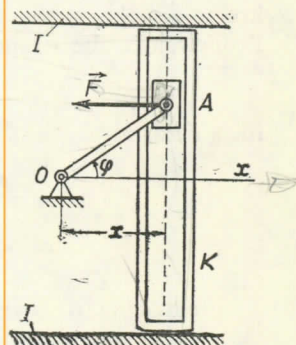
Iz razmatranih primera se vidi da se prvi (direktni) zadatak dinamike rešava vrlo prosto, pri čemu, ako ubrzanje pokretne tačke nije dato neposredno, onda ono treba prethodno da se izračuna čisto kinematičkim računima. Prema tome, a takođe imajući u vidu praktičan značaj, glavno mesto u dinamici zauzima rešavanje drugog (inverznog) zadatka, koji se i smatra osnovnim zadatkom dinamike.



Sl. 240



Sl. 241



Sl. 242

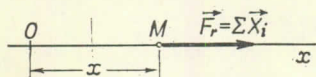
Glava XVII

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE KRETANJA TAČKE I NJIHOVO INTEGRIRANJE

§ 104. Pravolinijsko kretanje tačke

Iz kinematike je poznato da su pri pravolinijskom kretanju tačke brzina i ubrzanje tačke usmereni duž jedne iste prave. Kako se pravac ubrzanja poklapa sa pravcem sile koja deluje na materijalnu tačku, to proizlazi da će se slobodna materijalna tačka kretati pravolinijski, tada, kada sila koja na nju deluje ima konstantan pravac, i kada je brzina tačke u početnom trenutku vremena jednaka nuli ili pak ima isti pravac kao i sila.

Razmotrimo kretanje materijalne tačke, koja se



Sl. 243

kreće pravolinijski pod dejstvom datih sila $\vec{F}_r = \Sigma \vec{X}_i$. Položaj tačke na putanji određuje se njenom koordinatom x (sl. 243). Osnovni zadatak dinamike

sastoji se u tome da se, znajući $\vec{F}_r$, odredi zakon kretanja tačke, tj. da se odredi $x = f(t)$. Vezu između x i F_r daje jednačina (3). Projicirajući obe strane ove jednačine na pravac Ox dobićemo:

$$ma_x = X_r = \Sigma X_i,$$

ili, s obzirom da je $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$,

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = \Sigma X_i.} \quad (6)$$

Jednačina (6) zove se *diferencijalna jednačina pravolinijskog kretanja materijalne tačke**. Često se jednačina (6) zamenjuje drugim dvema diferencijalnim jednačinama, koje sadrže u sebi prve izvode:

$$\boxed{m \frac{dv}{dt} = m\dot{v} = \Sigma X_i,} \quad (7)$$

$$\boxed{v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}.} \quad (7')$$

* Ova jednačina je diferencijalna jednačina, jer je u njoj veličina x koja treba da se odredi pod znakom izvoda. Jednačina (6) omogućuje takođe da se reši prvi zadatak dinamike, tj. da se odredi sila X , koja deluje na tačku, ako je poznat zakon kretanja tačke $x = f(t)$.

U onim slučajevima, kada pri rešavanju zadataka treba da se odredi zavisnost brzine od koordinate x , a ne od vremena t (ili pak kada sama sila zavisi od x), jednačina (7) se transformiše tako da u njoj promenljiva bude x . Kako je

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{dv_x}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{dv_x}{dx} v_x = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x},$$

to umesto jednačine (7) dobijamo:

$$mv_x \frac{dv_x}{dx} = m\dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = \Sigma X_i. \quad (8)$$

Osnovni zadatak dinamike svodi se na to da se na osnovu navedenih jednačina, znajući silu ΣX_i , odredi zakon kretanja tačke, tj. da se odredi zavisnost $x = f(t)$. Za to je potrebno da se integriira diferencijalna jednačina kretanja. Da bi bilo jasnije na šta se svodi jedan takav zadatak napomenimo da sila, ili pak sile, koje stoje na desnoj strani jednačine (6) mogu da zavise od vremena t , zatim od položaja tačke, tj. od x , a takođe i od njene brzine, tj. od $v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ (vidi § 99). Prema tome, u opštem slučaju jednačina (6), sa matematičke tačke gledišta, predstavlja diferencijalnu jednačinu drugog reda oblika

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = F(t, x, \dot{x}). \quad (9)$$

Ovakva jednačina može da se reši u svakom konkretnom slučaju kada se ustanovi kakav oblik ima njena desna strana, u zavisnosti od sila koje deluju na materijalnu tačku. Kada se utvrdi oblik desne strane jednačine (9), onda se raznim matematičkim postupcima, posle dvostruke integracije, može dobiti zavisnost koja ima oblik

$$x = f(t, C_1, C_2), \quad (10)$$

u kojoj su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante. Da bi se rešenje zadatka dovelo do kraja potrebno je da se odrede vrednosti proizvoljnih integracionih konstanta C_1 i C_2 . Da bismo njih odredili potrebno je da znamo *početne uslove kretanja*.

Proučavanje svakog kretanja počinjemo od nekog određenog trenutka vremena, koji se zove *početni trenutak vremena*. Od tog trenutka počemo da merimo vreme smatrajući da je $t = 0$ u početnom trenutku vremena. Obično se za početni trenutak vremena uzima trenutak kada telo, odnosno tačka, počinje da se kreće. Položaj koji zauzima tačka u početnom trenutku vremena zove se *početni položaj*, a njegova brzina u tom trenutku zove se *početna brzina* (početnu brzinu tačka može da ima ili zbog toga što se do trenutka $t = 0$ kretala po inerciji, ili je pak u tom početnom trenutku dobila neku brzinu usled dejstva drugih tela ili sila). Da bismo rešili osnovni zadatak dinamike potrebno je da osim datih sila znamo i *početne uslove kretanja*, tj.

da znamo tzv. *početno kinematičko stanje*, a to znači da u početnom trenutku vremena poznajemo početni položaj i početnu brzinu materijalne tačke.

U slučaju pravolinijskog kretanja tačke početni uslovi kretanja daju se u sledećem obliku:

$$\text{za } t = 0 \quad x = x_0, \quad v_x = \dot{x} = v_0 = \dot{x}_0. \quad (11)$$

Na osnovu ovih početnih uslova mogu, u svakom konkretnom zadatku, da se odrede proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2 , tako da kretanje tačke može najzad da se odredi u obliku

$$x = F(t, x_0, v_0) = F(t, x_0, \dot{x}_0). \quad (12)$$

Pokažimo ovo o čemu smo govorili na jednom jednostavnom primeru.

Neka na materijalnu tačku deluje sila $\vec{F}$ koja je *konstantna po intenzitetu*, a takođe i *po pravcu*. Tada jednačina (7) ima oblik

$$m \frac{dv_x}{dt} = m \frac{d\dot{x}}{dt} = X.$$

Kako je $X = \text{const}$, to posle množenja obe strane jednačine sa dt i posle integriranja dobijamo:*

$$v_x = \dot{x} = \frac{X}{m} t + C_1. \quad (13)$$

Nađenu vrednost za $v_x = \dot{x}$ smenimo u jednačinu (7'); tada izlazi da je

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = \frac{X}{m} t + C_1.$$

Ako potom obe strane ove jednačine pomnožimo sa dt i ako obe strane ove jednačine ponovo integriramo, dobićemo najzad:

$$x = \frac{1}{2} \frac{X}{m} t^2 + C_1 t + C_2. \quad (14)$$

Dobijeni rezultat predstavlja za dati problem *opšte rešenje (opšti integral)* jednačine (9) u obliku koji odgovara jednačini (10).

Sada je potrebno da se odrede proizvoljne integracione konstante C_1 i C_2 , smatrajući da u datom zadatku važe početni uslovi kretanja (11). Rešenja (13) i (14) važe za bilo koji trenutak vremena pa i za trenutak $t = 0$. Prema tome, ako u jednačini (13) i (14) stavimo umesto t nulu, onda ćemo umesto v_x i x dobiti v_0 i x_0 , tj. tada će biti:

$$C_1 = \dot{x}_0, \quad C_2 = x_0.$$

* Integracionu konstantu sa leve strane jednačine ne pišemo smatrajući da je ona prebačena na desnu stranu i uključena u C_1 .

Dobijene jednačine određuju vrednost integracionih konstanti C_1 i C_2 , koje zadovoljavaju početne uslove kretanja. Ako ove vrednosti smenimo u jednačinu (14), dobićemo, najzad, zakon kretanja tačke u posmatranom problemu, koji odgovara jednačini (12):

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \frac{X}{m} t^2. \quad (15)$$

Kao što se vidi iz jednačine (15), tačka pod dejstvom konstantne sile vrši ravnomerno promenljivo kretanje, što je moglo i ranije da se zaključi jer ako je: $\vec{F} = \text{const}$, onda je i $\vec{a} = \text{const}$. U posebnom slučaju takvo je, npr., kretanje pod uticajem sile teže. Tom prilikom u jednačini (15) biće $\frac{X}{m} = g$, dok osa Ox treba da bude usmerena vertikalno naniže.

§ 105. Rešavanje zadataka

Metodom integriranja diferencijalne jednačine kretanja možemo se poslužiti za rešavanje zadataka dinamike u svim slučajevima kada na tačku deluje bilo koja promenljiva sila (vidi § 99).

Rešavanje zadataka se tom prilikom svodi na sledeće operacije:

1) Postavljanje diferencijalne jednačine kretanja. Za postavljanje diferencijalne jednačine kretanja potrebno je:

a) da se izabere početak koordinatnog sistema referencije (po pravilu obično se za koordinatni početak uzima početni položaj tačke), i zatim da se kroz početak povuče koordinatna osa duž putanje tačke, koja se opet obično po pravilu usmerava u smeru kretanja tačke; ako se pod dejstvom datih sila tačka u bilo kom položaju može da nalazi u ravnoteži, onda je vrlo korisno da se taj položaj ravnoteže usvoji za koordinatni početak, pa se onda kaže da se kretanje posmatra u odnosu na položaj »statičke ravnoteže«;

b) da se na slici prikaže pokretna tačka, u proizvoljnom položaju (ali tako da pri $x > 0$ bude i $v_x = \dot{x} > 0$; ovo je naročito bitno kada sila koja deluje na tačku zavisi od brzine) i zatim da se prikažu sve sile koje deluju na tačku;

c) da se projiciraju sve sile koje deluju na tačku na koordinatnu osu i da se ta suma izračuna i stavi na desnu stranu diferencijalne jednačine kretanja. Tom prilikom treba obavezno *sve promenljive sile izraziti preko onih veličina (t , x ili v) od kojih one zavise.*

2) Integriranje diferencijalne jednačine kretanja. Integriranje diferencijalne jednačine kretanja tačke vrši se metodama koje se izlažu u matematici. Te metode zavise od oblika dobivene diferencijalne jednačine kretanja, tj. od oblika desne strane jednačine (9). U onim slučajevima kada na materijalnu tačku deluje sila koja zavisi samo od jedne promenljive (ili od v , ili od x , ili od t ; pored sila koje su konstantne), jednačina pavo linijskog kretanja tačke može uvek da se integriira korišćenjem metode razdvajanja promenljivih (vidi zadatke 98 do 100). Ako je, tom prilikom, potrebno da se u zadatku odredi samo brzina kretanja, onda se vrlo često pri rešavanju zadataka možemo ograničiti na integriranje samo jedne od jednačina (7) ili pak (8) (tj. samo na tzv. prvi integral).

3) Određivanje proizvoljnih integracionih konstanti. Za određivanje proizvoljnih integracionih konstanti potrebno je da se utvrde početni uslovi kretanja u obliku (11). Određivanje integracionih konstanti na osnovu početnih uslova kretanja vrši se na način koji je pokazan u § 104. Tom prilikom se konstante mogu odrediti i neposredno posle svakog integriranja.

4) Nalaženje traženih veličina u zadatku i analiziranje dobijenih rezultata. Da bismo bili u stanju da izvršimo analizu dobivenog rešenja, a takođe da bismo lakše mogli da proverimo da li negde slučajno pri rešavanju zadatka nismo pogrešili (ta kontrola se najlakše vrši kontrolisanjem dimenzija), potrebno je da se sva rešenja do kraja izvedu u opštim brojevima, i da se brojčane vrednosti stave u opšte rešenje tek na kraju rešenog zadatka.

Ova uputstva za rešavanje zadataka odnose se ne samo na pravolinijsko, već takođe, i na krivolinijsko kretanje tačke.

Proučimo tri konkretna zadatka u kojima sila zavisi od vremena, od rastojanja i od brzine kretanja tačke.

1. Sila zavisi od vremena.

Zadatak 98. Teret težine G počinje da se kreće iz stanja mira duž glatke horizontalne ravni pod dejstvom sile $\vec{F}$, čija se veličina povećava proporcionalno vremenu po zakonu $F = kt$. Odrediti zakon kretanja tereta.

Rešenje. Izaberimo početak koordinatnog sistema referencije O u početnom položaju tereta i usmerimo osu Ox u smeru kretanja (vidi sl. 243). Tada će početni uslovi kretanja biti: za $t = 0$, $x = 0$, $v_x = \dot{x} = 0$. Prikažimo teret u proizvoljnom položaju, a takođe i sile koje deluju na teret. U datom slučaju je $X = F = kt$, tako da jednačina (7) ima oblik

$$\frac{G}{g} \frac{dv_x}{dt} = \frac{G}{g} \frac{dx}{dt} = kt.$$

$$\frac{G}{g} v_x = \frac{G}{g} x = kt^2$$

Ako obe strane jednačine pomnožimo sa dt , odmah ćemo razdvojiti promenljive, tako da integriranjem dobijamo

$$v_x = \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{kg}{G} t^2 + C_1.$$

$$v_x = \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{kg}{G} t^2$$

Iz početnih uslova kretanja nalazimo da je $C_1 = 0$. Tada, ako u dobijenom rezultatu smenimo $v_x = \dot{x}$ sa $\frac{dx}{dt}$, dobićemo:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} \frac{kg}{G} t^2.$$

Kada obe strane ove jednačine pomnožimo sa dt , opet ćemo razdvojiti promenljive, tako da integriranjem dolazimo do

$$x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \frac{kg}{G} t^3 + C_2.$$

Korišćenjem početnih uslova kretanja dobijamo da je $C_2 = 0$, tako da konačno zakon kretanja tereta postaje

$$x = \frac{1}{6} \frac{kg}{G} t^3.$$

Na taj način, kao što vidimo, put koji prelazi teret raste proporcionalno kubu vremena.

2. Sila zavisi od rastojanja

Zadatak 99. Zanemarujući trenje i otpor vazduha odrediti za koje vreme bi telo prošlo kroz jedan kanal izbušen kroz Zemlju od njegovog početka A do kraja B duž tetive AB (sl. 244). Pri proračunima treba imati u vidu da je poluprečnik Zemlje $R = 6370$ km.

Uputstvo. U teoriji koja se bavi proučavanjem sile teže dokazuje se da na telo, koje se nalazi u unutrašnjosti Zemlje, deluje sila privlačenja Zemlje F , koja je direktno proporcionalna njegovom rastojanju r od središta Zemlje. Imajući u vidu da je pri $r = R$ (tj. na površini Zemlje) sila F jednaka težini tela ($F = mg$), dobijamo da je u unutrašnjosti Zemlje,

$$F = -\frac{mg}{R} r,$$

gde je $r = \overline{MC}$ rastojanje tačke M od središta Zemlje.

Rešenje. Za početak koordinatnog sistema referencije uzmimo tačku O na sredini tetive AB (u toj tački telo koje bi se nalazilo u kanalu bilo bi u ravnoteži) i usmerimo osu Ox duž prave OA . Ako dužinu tetive AB označimo sa $2a$ početni uslovi kretanja biće: za $t = 0$, $x = x_0 = a$, $v_x = \dot{x}_0 = 0$.

U proizvoljnom položaju na telo deluju sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_N$. Prema tome,

$$\Sigma X_i = -F \cos \alpha = -\frac{mg}{R} r \cos \alpha = -\frac{mg}{R} x,$$

jer se sa crteža vidi da je $x = r \cos \alpha$. Sila koja deluje na telo zavisi od koordinate x tačke M . Da bismo u ovom slučaju u diferencijalnoj jednačini kretanja razdvojili promenljive, predstavimo je u obliku (8). Tada, ako skratimo jednačinu sa m i ako uvedemo oznaku

$$\omega^2 = \frac{g}{R},$$

dobijamo

$$v_x \frac{dv_x}{dx} = -\omega^2 x.$$

Ako pomnožimo obe strane ove jednačine sa dx , odmah ćemo razdvojiti promenljive, tako da integriranjem dobijamo:

$$\frac{1}{2} v_x^2 = -\frac{1}{2} \omega^2 x^2 + C_1.$$

Prema početnim uslovima kretanja je za $x_0 = a$, $v_x = \dot{x}_0 = 0$, pa je, prema tome, $C_1 = \frac{1}{2} \omega^2 a^2$.

Ako smenimo ovu vrednost za C_1 dobićemo:

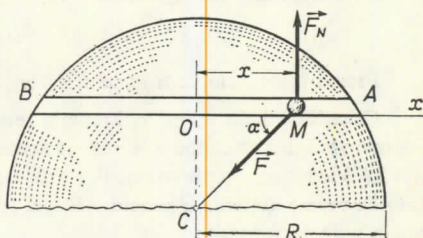
$$v_x = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Kako je u posmatranom položaju brzina usmerena od M ka O , to je $v_x < 0$, tako da pred korenom treba uzeti znak minus. Tada, ako zamenimo v_x sa $\frac{dx}{dt}$, dobijamo:

$$\frac{dx}{dt} = -\omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Razdvajanjem promenljivih dovodimo ovu jednačinu na oblik

$$\omega dt = -\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$$



Sl. 244

što posle integriranja daje:

$$\omega t = \arccos \frac{x}{a} + C_2.$$

Korišćenjem početnih uslova kretanja (za $t = 0$, $x = a$) nalazimo da je $C_2 = 0$. Na taj način, zakon kretanja tela u kanalu imaće oblik

$$x = a \cos \omega t.$$

Prema tome, telo će u kanalu AB vršiti harmonijsku oscilaciju čija je amplituda a .

Odredimo sada vreme t_1 kretanja tela do kraja kanala B . U tački B koordinata $x = -a$. Ako ovu vrednost smenimo u jednačinu kretanja dobićemo da je $\cos \omega t_1 = -1$, pa je $\omega t_1 = \pi$ i $t_1 = \pi/\omega$. Međutim, prema usvojenim oznakama je $\omega = \sqrt{g/R}$. Odavde, ako izračunamo t_1 , nalazimo da vreme kretanja u kanalu AB , pri postavljenim uslovima u zadatku, ne zavisi od dužine kanala i da je jednako:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{R}{g}} \approx 42 \text{ min } 11 \text{ s}.$$

Ovaj vrlo interesantan rezultat izazvao je čitav niz (još vrlo fantastičnih) projekata za prokopavanje takvog kanala.

Odredimo kolika će pri tome biti maksimalna brzina kretanja tela. Iz izraza za v_x se vidi da je $v = v_{\max}$ pri $x = 0$, tj. u tački O . Po intenzitetu ova brzina biće.

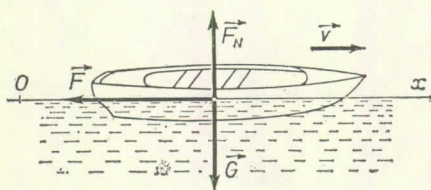
$$v_{\max} = a\omega = a\sqrt{g/R}.$$

Ako je, npr. $2a = 0,1 R = 637 \text{ km}$ (približno rastojanje od Moskve do Lenjingrada), onda će biti $v_{\max} \approx 395 \text{ m/s} = 1422 \text{ km/h}$.

Oscilacije koje vrši materijalna tačka pod dejstvom sile koja je proporcionalna rastojanju biće detaljno proučene u glavi XXI. Tamo će biti razmotren drugi način integriranja diferencijalne jednačine kretanja koja se u ovom slučaju dobiva.

3. Sila zavisi od brzine

Zadatak 100. Čamac težine $G = 40 \text{ kp}$ počne da se kreće kada se njemu saopšti početna brzina $v_0 = 0,5 \text{ m/s}$. Smatrajući da je sila otpora vode pri malim brzinama kretanja čamca srazmerna prvom stepenu brzine i da se menja po zakonu $F = bv = bx$, gde je koeficijent $b = 0,93 \text{ kps/m}$, odrediti posle koliko vremena će se brzina čamca smanjiti na pola i koliki će put za to vreme preći čamac. Odrediti takođe koliki će put preći čamac dok se ne zaustavi.



Sl. 245

Rešenje. Uzmimo početni položaj čamca za početak O koordinatnog sistema referencije i usmerimo osu Ox u pravcu kretanja (sl. 245). Tada će početni uslovi kretanja biti: za $t = 0$, $x = 0$, $v_x = x = v_0$.

Prikažimo čamac u proizvoljnom položaju i sile

$\vec{G}$, $\vec{F}_N$ i $\vec{F}$ koje na njega deluju.

Primedba. Nikakve druge sile na čamac ne deluju. Sila koja je izazvala kretanje čamca delovala je na čamac do trenutka $t = 0$. Dejstvo ove sile uzima se u obzir početnom brzinom v_0 , koju je sila u početnom trenutku vremena saopštila čamcu (vidi § 104). Da bismo pravilno odredili sile koje deluju na telo pri njegovom kretanju treba imati u vidu da sila nastaje kao posledica uzajamnog dejstva datog tela prema drugim telima. U datom slučaju sila $\vec{G}$ nastaje usled delovanja Zemlje na čamac, a sile $\vec{F}$ i $\vec{F}_N$ — kao rezultat delovanja vode na čamac. Nikakva druga materijalna tela na čamac, pri njegovom kretanju, ne deluju, a to znači da neće delovati na njega ni bilo kakve druge sile. Skrećemo naročito pažnju na ovaj problem, jer je on čest izvor grešaka koje se čine pri rešavanju zadataka.

Ako izračunamo projekcije svih sila koje deluju nalazimo da je

$$\Sigma X_i = -F = -b\dot{x}.$$

Da bismo odredili vreme kretanja postavimo diferencijalnu jednačinu (7). Primitimo da je u ovom slučaju $v_x = \dot{x} = v$, tako da je:

$$\frac{G}{g} \frac{dv}{dt} = -bv = -b\dot{x}.$$

Ako razdvojimo promenljive u ovoj jednačini dobićemo:

$$\frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} = -\frac{bg}{G} dt.$$

Odavde integriranjem dobijamo:

$$\ln v = \ln \dot{x} = -\frac{bg}{G} t + C_1.$$

Zamenom početnih uslova kretanja izlazi da je $C_1 = \ln v_0$, tako da je najzad:

$$t = \frac{G}{bg} \ln \frac{v_0}{v}. \quad (a)$$

Traženo vreme t_1 odredićemo ako stavimo da je $v = 0,5 v_0$. Ovo vreme, kao što vidimo, ne zavisi u datom slučaju od veličine v_0 . Kako je $\ln 2 = 0,69$, to je

$$t_1 = \frac{G}{bg} \ln 2 \approx 3 \text{ s}.$$

Da bismo odredili predeni put potrebno je ponovo postaviti diferencijalnu jednačinu kretanja u obliku (8), jer takva jednačina omogućuje da se odjednom odredi zavisnost između x i v^* . Tako dobijamo:

$$\frac{G}{g} v \frac{dv}{dx} = \frac{G}{g} \dot{x} \frac{d\dot{x}}{dx} = -bv = -b\dot{x}.$$

Odavde, skraćivanjem sa v i razdvajanjem promenljivih proizlazi

$$dv = d\dot{x} = -\frac{bg}{G} dx.$$

Prema tome je

$$v = \dot{x} = -\frac{bg}{G} x + C_1.$$

Kako je za $x = 0$ brzina $v = v_0$, to je $C_1 = v_0$, tako da najzad dobijamo

$$x = \frac{G}{bg} (v_0 - v). \quad (b)$$

Stavljajući da je $v = 0,5 v_0$, nalazimo da traženi put iznosi:

$$x_1 = \frac{Gv_0}{2bg} \approx 1,1 \text{ m}.$$

Da bismo odredili put koji će preći čamac dok se ne zaustavi, potrebno je da se u jednačini (b) stavi $v = 0$. Tako dobijamo da je $x_2 = \frac{Gv_0}{bg} = 2,2 \text{ m}$.

* Predeni put možemo takođe odrediti ako iz jednačine (a) brzinu v izrazimo u funkciji od t , i zatim, pošto zamenimo v sa $\frac{dx}{dt}$, izvršimo integriranje dobijene jednačine; međutim, ovakvo rešenje je dosta složeno.

Ako želimo da odredimo vreme kretanja do zaustavljanja, iz jednačine (a), nalazimo da je pri $v = 0$ vreme $t_2 = \infty$. To znači da se pri pretpostavljenom zakonu otpora ($F = bx \pm bv$) čamac asimptotski približuje svom konačnom položaju (koji je određen koordinatom x_2). U stvarnosti vreme kretanja čamca do zaustavljanja biće konačno, jer se sa smanjivanjem brzine zakon otpora menja, tj. postaće drugojačiji, pa će se prema tome promeniti i oblik zavisnosti v od t .

Drugi važan primer kretanja pod dejstvom sile koja zavisi od brzine, razmotren je u sledećem paragrafu.

§ 106*. Padanje tela u otpornoj sredini (u vazduhu)

Pri kretanju tela u bilo kakvoj sredini ono trpi otpor, koji zavisi od oblika i dimenzija samog tela, zatim od brzine kretanja, a takođe i od svojstva same sredine kroz koju se telo kreće.

Za brzine koje nisu male, ali koje, s druge strane, nisu bliske brzini zvuka, sila otpora, kako pokazuju opiti, proporcionalna je kvadratu brzine v i može se prikazati u obliku*

$$F_w = \frac{1}{2} c_x \rho A v^2, \quad (16)$$

gde je: ρ — gustina sredine (za vazduh pri temperaturi od 15°C i pri pritisku od 760 mm gustina iznosi: $\rho = 1/8 \text{ kps}^2/\text{m}^4$); $A \text{ m}^2$ — površina projekcije tela u ravni upravnoj na pravac kretanja tela; c_x — bezdimenzij-ski koeficijent otpora, koji zavisi od oblika tela. Tako, npr., za padobran taj koeficijent iznosi $c_x = 1,4$; za kuglu $c_x = 0,5$; za tela vretenastog oblika c_x je manje od 0,03.

Proučimo problem padanja tela u vazduh sa visine koja nije velika u poređenju sa prečnikom Zemlje (ova visina se smatra malom, ako se težina G tela i gustina ρ vazduha mogu smatrati konstantnim).

Usmerimo koordinatnu osu Ox vertikalno naniže (sl. 246) i potražimo kako se menja brzina padanja tela u zavisnosti od pređenog puta smatrajući da je $v_0 = 0$.

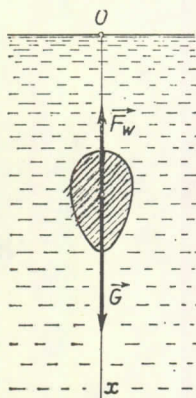
Na telo koje pada deluje sile G i F_w ; prema tome, biće

$$\Sigma X_i = G - F_w = G - \frac{1}{2} c_x \rho A v^2$$

Da bismo dobili zavisnost v od x , postavimo diferencijalnu jednačinu kretanja u obliku (8). Tada, smatrajući da je $v_x = \dot{x} = v$, dobijamo

$$\frac{G}{g} v \frac{dv}{dx} = G - \frac{1}{2} c_x \rho A v^2$$

* Pri padanju u vazduhu može se smatrati da formula (16) važi do brzine 300 m/s.



Sl. 246

Ako uvedemo oznaku

$$a^2 = \frac{2G}{c_x \varrho A}, \quad (17)$$

prethodna jednačina prelazi u

$$v \frac{dv}{dx} = g \left(1 - \frac{v^2}{a^2} \right),$$

ili, posle razdvajanja promenljivih u

$$-\frac{v dv}{a^2 - v^2} = -\frac{g}{a^2} dx.$$

Integriranjem obe strane gornje jednačine dolazimo do formule

$$\ln(a^2 - v^2) = -2 \frac{g}{a^2} x + C_1.$$

Prema početnim uslovima kretanja brzina $v = 0$ kada je $x = 0$, pa je, prema tome

$$C_1 = \ln a^2.$$

Smenjujući ovu vrednost za C_1 dobijamo:

$$\ln \frac{a^2 - v^2}{a^2} = -2 \frac{g}{a^2} x,$$

ili

$$\frac{a^2 - v^2}{a^2} = e^{-2 \frac{g}{a^2} x},$$

odakle konačno nalazimo

$$v = a \sqrt{1 - e^{-2 \frac{g}{a^2} x}}. \quad (18)$$

Formula (18) daje zakon po kome se menja brzina padanja tela u vazduhu u zavisnosti od pređenog puta.

Sa povećavanjem x vrednost $e^{-2 \frac{g}{a^2} x}$ se smanjuje i kad $x \rightarrow \infty$ ona teži nuli. Odavde proizlazi da se brzina padanja v sa porastom x povećava i u graničnom slučaju teži konstantnoj veličini a . Ta veličina se zove *granična brzina padanja* v_{gr} . Iz jednačine (17) nalazimo da je

$$v_{gr} = \sqrt{\frac{2G}{c_x \varrho A}}. \quad (19)$$

Tablica 1

$\frac{g}{v_{gr}^2} x$	$\frac{v}{v_{gr}}$
0	0
0,5	0,80
1,0	0,93
1,2	0,95
1,5	0,97
2,0	0,99

Prema tome, pri $v_0 = 0$ telo pri padanju u vazduhu ne može dostići brzinu veću od brzine v_{gr} . Granična brzina se povećava kad se povećava težina tela i kada se smanjuju veličine c_x , ϱ i A .

Odredimo kako se brzo približuje brzina padanja tela graničnoj brzini. U tablici 1 data je zavisnost odnosa $\frac{v}{v_{gr}}$ od $\frac{g}{v_{gr}^2} x$, koja je izračunata po formuli (18).

Iz ove tablice proizlazi, da je

$v = 0,95 v_{gr}$	za $\frac{g}{v_{gr}^2} x = 1,2,$
$v = 0,99 v_{gr}$	za $\frac{g}{v_{gr}^2} x = 2,0.$

(20)

Prema tome, brzina padanja se približuje graničnoj brzini relativno brzo u slučaju kada veličine c_x i A nisu vrlo male (vidi zadatak 101).

Postojanje granične brzine padanja proizlazi iz sledećeg prostog rasuđivanja. Pri padanju tela u vazduhu brzina njegova raste; prema tome, raste i sila F_w . Ako smatramo za očevidno da sila F_w ne može da bude veća od težine tela (vidi sl. 246), onda je $(F_w)_{gr} = G$. Ako sada smenimo vrednost za $(F_w)_{gr}$ iz formule (16), dobićemo $\frac{1}{2} c_x \rho A v_{gr}^2 = G$, odakle nalazimo za v_{gr} vrednost koju smo već pre dobili — formula (19). Međutim, sličnim rasuđivanjem ne može se utvrditi kojom brzinom se brzina padanja v približuje brzini v_{gr} . Do tog zaključka, koji je za praksu vrlo važan, možemo doći jedino pomoću formule (18).

Zadatak 101. Odrediti graničnu brzinu padanja padobranca, ako njegova težina zajedno sa padobranom iznosi $G = 75$ kp.: a) pri zatvorenom padobranu smatrati da je $A = 0,4$ m², $c_x = 1,0$; b) pri otvorenom padobranu biće $A = 36$ m²; $c_x = 1,4$.

Odrediti u oba slučaja rastojanje H_1 koje pređe padobranac smatrajući da je postigao brzinu kretanja $v_1 = 0,95 v_{gr}$ (tj. brzinu koja se razlikuje od granične za 5%) i rastojanje H_2 koje odgovara brzini padanja $v_2 = 0,99 v_{gr}$.

Rešenje. Graničnu brzinu padanja odredićemo po formuli (19) smatrajući da je za vazduh $\rho = \frac{1}{8}$ kps²/m⁴. Rastojanja H_1 i H_2 nalazimo iz jednačine (20). Kako je $v = 0,95 v_{gr}$ pri $gx/v_{gr}^2 = 1,2$, to traženo rastojanje iznosi $H_1 = 1,2 v_{gr}^2/g$. Analognim putem nalazimo da je $H_2 = 2 v_{gr}^2/g$.

Kada izvršimo potrebne račune dobijamo:

a) pri zatvorenom padobranu $v_{gr} \approx 55$ m/s; $H_1 \approx 370$ m; $H_2 \approx 610$ m;

b) pri otvorenom padobranu $v_{gr} = 5$ m/s; $H_1 = 3$ m; $H_2 = 5$ m.

Kao što vidimo pri većim otporima granična brzina se dostiže vrlo brzo.

§ 107. Krivolinijsko kretanje tačke.

Razmotrimo kretanje slobodne materijalne tačke pod dejstvom sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$. Izaberimo nepomični (inercijalni) koordinatni sistem (sl. 247). Ako projiciramo obe strane jednačine $m\vec{a} = \sum \vec{F}_i$ na ose izabranog koordinatnog sistema, imajući u vidu da je $a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x}$, itd. dobijamo diferencijalne jednačine krivolinijskog

kretanja tačke izražene preko projekcija na ose dekartovog pravouglog koordinatnog sistema:

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} &= m\ddot{x} = \Sigma X_i, \\ m \frac{d^2y}{dt^2} &= m\ddot{y} = \Sigma Y_i, \\ m \frac{d^2z}{dt^2} &= m\ddot{z} = \Sigma Z_i. \end{aligned} \quad (21)$$

Kako sile, koje deluju na tačku, mogu da zavise od vremena, od položaja tačke i od njene brzine, to, po analogiji sa jednačinom (9) u § 104, desne strane jednačine (21) mogu da sadrže vreme t , ko-

ordinate tačke x, y, z i projekcije njene brzine $\frac{dx}{dt} =$

$= \dot{x}$, $\frac{dy}{dt} = \dot{y}$ i $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$. Tom prilikom u desnu stranu jednačine (21) mogu da ulaze u najopštijem slučaju sve ove promenjive, tj. sistem diferencijalnih jednačina (21) je simultan (spregnut).

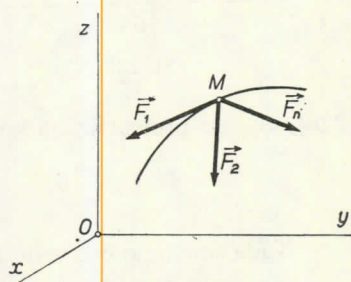
Jednačine (21) omogućuju da se reši kako prvi, tako i drugi (osnovni) zadatak dinamike. Da bismo pomoću ovih jednačina rešili osnovni zadatak dinamike, potrebno je da osim sila koje deluju na tačku poznamo takođe i početne uslove kretanja, tj. da poznamo početni položaj i početnu brzinu tačke. Za koordinatni sistem $Oxyz$ početni uslovi kretanja daju se u obliku:

za $t = 0$

$$\begin{aligned} x &= x_0, & v_x &= (v_x)_0 = \dot{x}_0, \\ y &= y_0, & v_y &= (v_y)_0 = \dot{y}_0, \\ z &= z_0, & v_z &= (v_z)_0 = \dot{z}_0. \end{aligned} \quad (22)$$

Kada znamo sile koje deluju, onda integriranjem jednačina (21) nalazimo koordinate x, y, z pokretne tačke kao funkcije vremena t , tj. nalazimo zakon kretanja tačke. Prilikom ove integracije u dobijenim rešenjima imaćemo 6 integracionih konstanti $C_1, C_2, C_3, \dots, C_6$, čije ćemo vrednosti odrediti na osnovu početnih uslova kretanja (22). Konkretno primer za integriranje jednačina (21) daćemo u sledećem § 108.

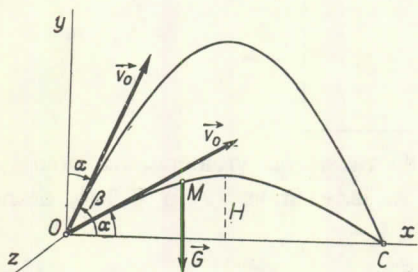
Diferencijalne jednačine kretanja možemo izraziti i preko projekcija na ose drugih koordinatnih sistema, kako je to, na primer, učinjeno u § 117.



Sl. 247

§ 108. Kretanje tačke izbačene pod izvesnim uglom prema horizontu u homogenom polju teže

Proučimo kretanje tela koje je izbačeno početnom brzinom v_0 pod uglom α prema horizontu smatrajući to telo za materijalnu tačku mase m . Tom prilikom zanemarujemo otpor vazduha, a polje sile teže smatraćemo homogenim, tj. smatraćemo da je $G = \text{const}$. To možemo pretpostaviti ako je visina penjanja izbačenog tela mala u poređenju sa poluprečnikom Zemlje.



Sl. 248

Koordinatni početak uzećemo u tački O, tj. u početnom položaju tačke. Usmerimo osu Oy vertikalno naviše; horizontalna osa Ox nalaziće se u ravni koja prolazi kroz osu Oy i vektor $\vec{v}_0$, a osu Oz postavimo upravno na prve dve ose (sl. 248). Tada će ugao između vektora $\vec{v}_0$ i ose Ox biti jednak α .

Neka se pokretna tačka M nalazi bilo gde u proizvoljnom položaju na svojoj putanji. Na tačku deluje samo sila teže (vidi primedbu učinjenu kod zadatka 100 na str.

226), čije su projekcije na koordinatne ose jednake:

$$G_x = 0, \quad G_y = -G = -mg, \quad G_z = 0.$$

Kada smenimo ove veličine u jednačine (21), imajući u vidu da je $\frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}$, itd., onda posle skraćivanja sa m dolazimo do jednačina

$$\frac{dv_x}{dt} = \ddot{x} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = \ddot{y} = -g, \quad \frac{dv_z}{dt} = \ddot{z} = 0.$$

Ako pomnožimo obe strane ovih jednačina sa dt i ako izvršimo integriranje, dobićemo:

$$v_x = \dot{x} = C_1, \quad v_y = \dot{y} = -gt + C_2, \quad v_z = \dot{z} = C_3.$$

Početni uslovi kretanja u ovom zadatku imaju oblik:

$$\text{za } t = 0 \quad x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad z_0 = 0.$$

$$(v_x)_0 = \dot{x}_0 = v_0 \cos \alpha, \quad (v_y)_0 = \dot{y}_0 = v_0 \sin \alpha, \quad (v_z)_0 = \dot{z}_0 = 0.$$

Zadovoljavajući početne uslove kretanja dobićemo da je:

$$C_1 = v_0 \cos \alpha, \quad C_2 = v_0 \sin \alpha, \quad C_3 = 0.$$

Ako smenimo ove vrednosti za C_1, C_2, C_3 u gore nađena rešenja i zamenimo v_x, v_y, v_z sa $\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \frac{dy}{dt} = \dot{y}$, i $\frac{dz}{dt} = \dot{z}$ dobićemo sledeće jednačine:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = v_0 \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y} = v_0 \sin \alpha - gt, \quad \frac{dz}{dt} = \dot{z} = 0.$$

Integriranjem ovih jednačina dolazimo do rešenja

$$x = v_0 t \cos \alpha + C_4, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2 + C_5, \quad z = C_6.$$

Početni uslovi kretanja daju sada da su: $C_4 = C_5 = C_6 = 0$, i jednačine kretanja tačke M dobijamo konačno u obliku

$$x = v_0 t \cos \alpha, \quad y = v_0 t \sin \alpha - \frac{1}{2} g t^2, \quad z = 0. \quad (23)$$

Iz ovih jednačina se vidi da se kretanje tačke vrši u vertikalnoj ravni Oxy

Kada su poznate jednačine kretanja tačke možemo korišćenjem metoda kinematike odrediti sve karakteristike datog kretanja tačke.

1. Putanja tačke. Ako iz prvih dveju jednačina (23) elimišemo parametar t , dobićemo jednačinu putanje tačke u obliku:

$$y = x \operatorname{tg} \alpha - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \quad (24)$$

Ova jednačina predstavlja parabolu sa osom koja je paralelna osi Oy . Na taj način tačka *izbačena pod izvesnim uglom prema horizontu u bezvazdušnom prostoru kreće se po paraboli* (Galilej).

2. Domet. Odredimo domet, tj. rastojanje $\overline{OC} = D$ na osi Ox , koji će postići teška tačka pri ovom kretanju. Ako u jednačinu (24) stavimo $y = 0$, dobićemo tačke u kojima parabola seče osu Ox . Iz jednačine:

$$\left(\operatorname{tg} \alpha - \frac{g x}{2 v_0^2 \cos^2 \alpha} \right) = 0,$$

proizlazi

$$x_1 = 0, \quad x_2 = \frac{2 v_0^2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \alpha}{g}.$$

Prvo od ovih rešenja određuje tačku O , a drugo tačku C . Prema tome $D = x_2$, pa je

$$D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}. \quad (25)$$

Iz formule (25) se vidi da se isti domet može postići i u slučaju ako je ugao $\beta = 90^\circ - \alpha$. Prema tome, sa datom početnom brzinom v_0 u jednu istu tačku C možemo doći preko dve putanje: donje, za koju je ($\alpha < 45^\circ$) i gornje, za koju je ($\beta = 90^\circ - \alpha > 45^\circ$).

Pri datoj početnoj brzini v_0 najveći domet postićićemo u bezvazdušnom prostoru kada je $\sin 2\alpha = 1$, tj. pri uglu $\alpha = 45^\circ$.

3. Visina penjanja. Ako u jednačinu (24) stavimo $x = \frac{1}{2} D = \frac{v_0^2}{g} \sin \alpha \cos \alpha$ dobićemo visinu penjanja H :

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}. \quad (26)$$

4. Vreme letenja. Iz jednačine (23) proizlazi da ukupno vreme letenja možemo odrediti iz jednačine $D = v_0 T \cos \alpha$. Ako ovu jednačinu smenimo u izraz za domet dobićemo da je vreme letenja T određeno izrazom:

$$T = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}. \quad (27)$$

Pri uglu $\alpha^* = 45^\circ$, kada je domet najveći, sve navedene veličine biće:

$$D^* = \frac{v_0^2}{g}, \quad H^* = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{1}{4} D^*, \quad T^* = \frac{v_0 \sqrt{2}}{g}. \quad (28)$$

Dobijeni rezultati praktično mogu da posluže za orijentaciono određivanje karakteristika leta zrna (raketa), čiji se domet kreće u granicama od 200 do 600 km, jer pri takvim dometima i pri uglovima $\alpha \approx 45^\circ$ glavni deo putanje prolazi kroz stratosferu u kojoj se otpor vazduha može zanemariti. Međutim, pri manjim dometima veliki uticaj ima otpor vazduha, a pri dometima većim od 600 km ne možemo smatrati da je sila teže konstantna.

Primer. Poznato* je da je nemačka raketa V-2 posle vertikalnog uzletanja imala na visini od 20 km brzinu od $v_0 \approx 1700$ m/s i ugao od $\alpha \approx 45^\circ$ (okretanje rakete izvodilo se pomoću specijalnih uređaja i krma). Dalji let rakete praktično je bio let tela koje je izbačeno u bezvazдушnom prostoru. Tada, prema formuli (28), biće

$$D^* = 300 \text{ km}, \quad H^* = 75 \text{ km}, \quad T^* = 245 \text{ s}.$$

Ovi rezultati su vrlo bliski onim koje su stvarno ove rakete postizale.

* I. Koi i I. Jutenbogart, *Dinamika raketa*, Oborongiz, 1950, str. 305.

Glava XVIII

OPŠTI ZAKONI DINAMIKE TAČKE

Pri rešavanju mnogih problema u dinamici, često je, umesto metoda integriranja diferencijalnih jednačina kretanja, daleko pogodnije da se poslužimo *opštim zakonima dinamike*, koji su u stvari posledice osnovnog zakona dinamike.

Značaj opštih zakona sastoji se u tome što oni daju zavisnosti između osnovnih dinamičkih karakteristika kretanja materijalnih tela i samim tim daju nove mogućnosti za proučavanje mehaničkih kretanja, koje se široko primenjuju u inženjerskoj praksi. Osim toga, opšti zakoni dinamike omogućuju da se prouče samo pojedine strane jednog problema, koje su od praktičnog interesa, a da se tom prilikom ne izučava problem u njegovoj celini. Najzad, primetimo da primenjujući opšte zakone dinamike izbegavamo proces integriranja, koji se upotrebljava samo pri izvođenju ovih zakona; samim tim se znatno uprošćava proces rešavanja jednog problema.

§ 109. Količina kretanja i kinetička energija tačke

Osnovne dinamičke karakteristike kretanja tačke su *količina kretanja* i *kinetička energija*.

Količinom kretanja tačke naziva se vektorska veličina $\vec{K} = m\vec{v}$, koja je jednaka proizvodu iz mase materijalne tačke i vektora njene brzine. Vektor $\vec{K} = m\vec{v}$ ima isti pravac kao i vektor brzine, tj. pravac tangente na putanju pokretne tačke.

Kinetičkom energijom (ili živom silom) tačke naziva se skalarna veličina $E_k = \frac{1}{2}mv^2$, koja je jednaka polovini proizvoda mase materijalne tačke i kvadrata njene brzine.

Dimenzije ovih veličina u tehničkom sistemu mera biće:

$$[\vec{K}] = [m\vec{v}] = \frac{\text{kps}^2}{\text{m}} \frac{\text{m}}{\text{s}} = \text{kps}; \quad [E_k] = \left[\frac{1}{2}mv^2 \right] = \frac{\text{kps}^2}{\text{m}} \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{kpm}.$$

Neophodnost uvođenja dveju dinamičkih karakteristika objašnjava se time što je nemoguće da se jednom karakteristikom obuhvate sva svojstva kretanja tačke.

Tako, npr., ako znamo količinu kretanja jednog automobila (tj. ukupnu veličinu $K = mv$, a ne veličine m i v pojedinačno) i ako znamo silu njegovog kočenja, možemo odrediti posle koliko sekundi će se zaustaviti automobil, ali nismo u stanju da odredimo pređeni put za to vreme. Međutim, ako znamo početnu kinetičku energiju automobila i silu kočenja, možemo odrediti pređeni put pri kočenju, ali nismo u stanju da odredimo i vreme kočenja.*

§ 110. Impuls sile

Kao karakteristika dejstva jedne sile na neko telo u toku nekog vremenskog intervala uvodi se pojam o impulsu sile. Uvedimo najpre pojam o elementarnom impulsu, tj. o impulsu za beskonačno kratki vremenski interval dt . *Elementarnim impulsom sile naziva se vektorska veličina $d\vec{I}$ jednaka proizvodu iz vektora sile i elementarnog vremenskog intervala dt :*

$$d\vec{I} = \vec{F} dt. \quad (29)$$

Elementarni impuls ima pravac dejstva sile.

Impuls $\vec{I}$ bilo koje sile $\vec{F}$ za konačni vremenski interval t_1 izračunava se kao suma odgovarajućih elementarnih impulsa:

$$\vec{I} = \int_0^{t_1} \vec{F} dt. \quad (30)$$

Prema tome, *impuls sile za bilo koji vremenski interval jednak je određenom integralu elementarnog impulsa, koji se uzima (računa) u granicama od nule do t_1 .*

U posebnom slučaju, ako je sila $\vec{F}$ i po intenzitetu i po pravcu konstantna ($\vec{F} = \text{const}$) biće $\vec{I} = \vec{F}t_1$. Primetimo da je u tom slučaju i intenzitet $I = Ft_1$. U opštem slučaju intenzitet impulsa može da bude izražen preko njegovih projekcija.

Projekcije impulsa na koordinatne ose možemo odrediti imajući u vidu da integral predstavlja graničnu vrednost sume, dok je, s druge strane, projekcija zbir vektora na osu jednaka zbiru projekcija komponenata na tu osu. Prema tome, biće:

$$I_x = \int_0^{t_1} X dt, \quad I_y = \int_0^{t_1} Y dt, \quad I_z = \int_0^{t_1} Z dt. \quad (31)$$

Na osnovu ovih projekcija možemo odrediti sam vektor $\vec{I}$, a takođe možemo odrediti i njegov intenzitet i uglove koje on zaklapa sa koordinatnim osama. Dimenzija impulsa u tehničkom sistemu mera biće $[I] = \text{kps}$.

Za rešavanje osnovnog zadatka dinamike važno je da se izdvoje one sile čiji impulsi mogu da se odrede unapred, ne znajući zakon kretanja tačke pod dejstvom

* Vidi zadatak 103 (§ 115).

tih sila. Iz jednačine (31) se vidi da u takve sile spadaju jedino *sile konstantnog intenziteta i sile koje zavise od vremena*.

Za određivanje pak impulsa sila koje zavise od rastojanja ili brzine kretanja tačke, potrebno je još znati i zakon kretanja tačke, tj. jednačine: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$, $z = f_3(t)$. U tom slučaju ako izrazimo x , y , z , ili pak $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$, $v_z = \dot{z}$ u funkciji od t , možemo izračunati integral (31), tj. možemo odrediti odgovarajući impuls. Ako ne poznajemo kretanje tačke, tj. ako nismo unapred već rešili osnovni zadatak dinamike, onda nismo u stanju da odredimo impuls takvih sila.

§ 111. Zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja tačke

Kako je masa konstantna veličina i kako je njeno ubrzanje $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, to se jednačina (3), koja izražava osnovni zakon dinamike, može takođe napisati i u obliku:

$$\frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{K}}{dt} = \Sigma \vec{F}_i. \quad (32)$$

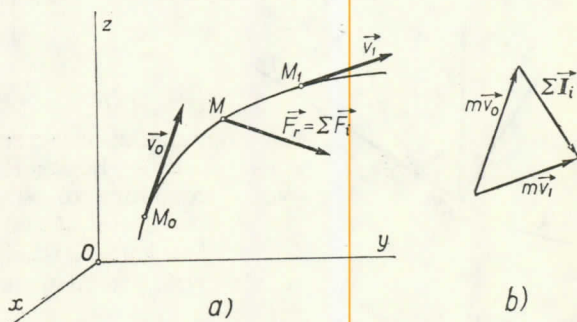
Neka se tačka mase m kreće pod dejstvom sile $\vec{F}_r = \Sigma \vec{F}_i$ (sl. 249, a) i neka u trenutku $t = 0$ ima brzinu $\vec{v}_0$, a u trenutku t_1 — brzinu $\vec{v}_1$. Ako obe strane jednačine (32) pomnožimo sa dt , i ako od njih izračunamo određeni integral, onda ćemo desnu stranu tako dobijene jednačine integrirati po vremenu t u granicama od nule do t_1 , dok ćemo levu stranu integrirati po brzinama, imajući u vidu da su brzine u odgovarajućim trenucima vremena $\vec{v}_0$ i $\vec{v}_1$. Kako je integral od $d\vec{K}$ jednak $\vec{K} = m\vec{v}$, to ćemo u krajnjem rezultatu dobiti:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \sum_{-0}^{t_1} \int \vec{F}_i dt.$$

Integrali koji stoje s desne strane ove jednačine, kako se vidi iz formula (30), predstavljaju impuls sila koje deluju na tačku. Prema tome, najzad imamo:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0 = \Sigma \vec{I}_i. \quad (33)$$

Jednačina (33) izražava zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja tačke: *promena količine kretanja tačke za neki vremenski interval jednaka je geometrijskoj sumi impulsa svih sila koje deluju na tu tačku za taj isti vremenski interval* (sl. 249, b).



Sl. 249

Pri rešavanju zadataka često se umesto vektorske jednačine (33) upotrebljavaju i jednačine izražene preko njenih projekcija. Projicirajući obe strane jednačine (33) na koordinatne ose, dobićemo:

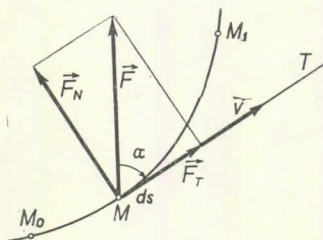
$$\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= mv_{1x} - mv_{0x} = m\dot{x}_1 - m\dot{x}_0 = \Sigma I_{ix}, \\ K_{1y} - K_{0y} &= mv_{1y} - mv_{0y} = m\dot{y}_1 - m\dot{y}_0 = \Sigma I_{iy}, \\ K_{1z} - K_{0z} &= mv_{1z} - mv_{0z} = m\dot{z}_1 - m\dot{z}_0 = \Sigma I_{iz}. \end{aligned} \quad (34)$$

U slučaju pravolinijskog kretanja, koje se vrši duž ose Ox , ova teorema se izražava prvom od ovih jednačina.

§ 112. Rad sile. Snaga

Da bi se okarakterisalo dejstvo koje vrši jedna sila na neko telo pri njegovom pomeranju, uvodi se pojam o radu sile. Tom prilikom rad karakteriše takvo dejstvo sile, koje izaziva samo promenu *intenziteta* (a ne i pravca) brzine kretanja tačke.

Uvedimo najpre pojam o elementarnom radu sile na beskonačno malom pomeranju ds . Elementarnim radom sile $\vec{F}$ (sl. 250) naziva se skalarna veličina



Sl. 250

$$dA = F_T ds, \quad (35)$$

gde je F_T — projekcija sile $\vec{F}$ na tangentu na putanju usmerena u stranu pomeranja tačke, a ds — beskonačno malo pomeranje tačke usmereno duž te tangente.

Data definicija odgovara pojmu o radu kao karakteristici takvog dejstva sile, koje vrši promenu intenziteta brzine tačke. Naime, ako silu $\vec{F}$ razložimo u komponente $\vec{F}_T$ i $\vec{F}_N$, onda će promenu intenziteta brzine izazvati samo komponenta $\vec{F}_T$, koja izaziva tangencijalno ubrzanje tačke. Komponenta $\vec{F}_N$ ili menja pravac vektora brzine $\vec{v}$ (ona izaziva samo normalno ubrzanje tačke), ili pak, pri prinudnom kretanju, menja reakciju veze. Komponenta $\vec{F}_N$ ne utiče na intenzitet brzine, tj. drugim rečima, sila $\vec{F}_N$ »ne vrši rad«.

Imajući u vidu, da je $F_T = F \cos \alpha$, iz jednačine (35) dobijamo obrazac

$$dA = F \cos \alpha ds. \quad (36)$$

Prema tome, *elementaran rad sile jednak je proizvodu iz projekcije sile na pravac pomeranja tačke i elementarnog pomeranja ds* (formula 35), ili, *rad sile jednak je proizvodu iz intenziteta sile, elementarnog pomeranja ds i kosinusa ugla između pravca sile i pravca pomeranja* (formula 36).

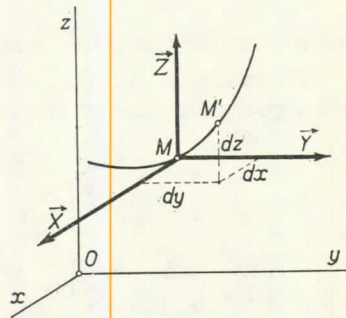
Ako je ugao α oštar, onda je rad pozitivan, a ako je tup, on je negativan. U posebnom slučaju, kada je $\alpha = 0$, elementaran rad je jednak $dA = F ds$. Ako je ugao $\alpha = 180^\circ$ elementaran rad je jednak $dA = -F ds$.

Ako je ugao $\alpha = 90^\circ$, tj. ako je sila upravna na pravac pomeranja, onda je elementaran rad jednak nuli.

Znak za rad ima sledeći fizički smisao: rad je pozitivan, kada je tangencijalna komponenta sile usmerena u smeru kretanja, tj. kada sila ubrzava kretanje; rad je negativan, kada je tangencijalna komponenta sile usmerena nasuprot kretanju, tj. kada sila usporava kretanje.

Odredimo analitički izraz za elementaran rad.

U tom cilju razložimo silu $\vec{F}$ u njene komponente $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$ u pravce koordinatnih osa; (sl. 251 samu silu $\vec{F}$ na crtežu nismo prikazali). Elementarno pomeranje $\overline{MM'} = ds$ sastoji se od pomeranja dx , dy , dz duž koordinatnih osa, gde su x , y , z — koordinate tačke M . U tom slučaju rad sile $\vec{F}$ na pomeranju ds možemo izračunati kao



Sl. 251

zbir radova njenih komponenta $\vec{X}$, $\vec{Y}$, $\vec{Z}$, na pomeranjima dx , dy , dz . Međutim, na pome-

ranju dx rad vrši samo komponenta $\vec{X}$, pri čemu je njen rad jednak $X dx$. Rad na pomeranjima dy i dz izračunava se na analogan način. Prema tome, konačno nalazimo:

$$dA = X dx + Y dy + Z dz. \quad (37)$$

Formula (37) daje analitički izraz za elementaran rad sile.

Rad sile na bilo kom konačnom pomeranju M_0M_1 (vidi sl. 250) izračunava se kao suma, odnosno integral, odgovarajućih elementarnih radova, tako da je:

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_T ds, \quad (38)$$

odnosno

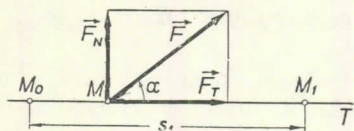
$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (X dx + Y dy + Z dz) \quad (38')$$

Prema tome, rad sile na bilo kom pomeranju M_0M_1 jednak je integralu elementarnih radova uzetom duž odgovarajućeg pomeranja. Granice integrala odgovaraju veličinama promenljivih pod znakom integrala u tačkama M_0 i M_1 (tačnije govoreći integral treba uzeti duž krive M_0M_1 , tj., on je krivolinijski).

Ako je veličina F_T konstantna ($F_T = \text{const}$), onda iz formule (38), kada pomeranje $\overline{M_0M_1}$ označimo sa s_1 , dobijamo:

$$A_{(M_0M_1)} = F_T s_1. \quad (38'')$$

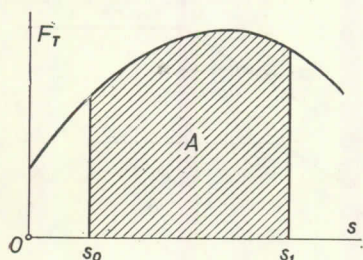
Ovo važi, npr., za slučaj kada je sila, koja deluje na tačku, konstantna i po intenzitetu i po pravcu ($\vec{F} = \text{const}$), i kada se tačka, na koju deluje sila, kreće pravolinijski (sl. 252). U tom slučaju je $F_T = F \cos \alpha = \text{const}$ i rad sile $A_{(M_0 M_1)} = F \cos \alpha \cdot s_1$.



Sl. 252

Za rešavanje osnovnog zadatka dinamike važno je da se izdvoje one sile čiji se rad može unapred izračunati *ne znajući* zakon kretanja tačke na koju deluje sila (vidi § 110). Iz formule (38') se vidi da u takve sile spadaju *sile konstantnog intenziteta i sile koje zavise od položaja (koordinata) pokretne tačke*.

Za izračunavanje rada sile koja zavisi od vremena ili pak od brzine kretanja tačke, potrebno je da se zna zakon kretanja tačke, odnosno zakon promene njenih koordinata x, y, z u funkciji od vremena t .



Sl. 253

U tom slučaju sve promenljive mogu da se izraze u funkciji od vremena t , pa onda lako može da se izračuna i integral (38'). Ako ne znamo zakon kretanja tačke, tj. ako unapred nismo rešili osnovni zadatak dinamike, onda se ne može odrediti rad sile ove vrste.

Grafički način određivanja rada. Ako sila zavisi od rastojanja i ako je poznat dijagram promene sile F_T u funkciji od s

(sl. 253), onda se rad sile F može izračunati grafičkim putem. Neka u položaju M_0 tačka bude na rastojanju s_0 od koordinatnog početka, a u položaju M_1 — na rastojanju s_1 . Tada po formuli (38), imajući u vidu geometrijski smisao integrala, dobijamo:

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{s_0}^{s_1} F_T ds = A,$$

gde je A — veličina šrafirane površine na sl. 253, koju treba pomnožiti koeficijentom razmere crtanja.*

Jedinica za mehanički rad (energiju) je džul (joule) [J]. Džul je rad koji izvrši sila od 1 njutna kad se njena napadna tačka pomeri za 1 metar u smeru dejstva sile. Džul je jednak njutnmetru [Nm], odnosno vatssekundi [Ws]:

$$1 \text{ Nm} = 1 \text{ Ws} = 1 \text{ J}.$$

Prema tome, u MKSA sistemu *brojčana vrednost neke veličine energije, zbog koherentnosti svih jedinica, se ne menja, tj. jedinica energije u mehanici (Nm), elektrotehnici (Ws) i termodinamici (J) imaju sve jednako »merilo«*.

Množina od džula je vatačas [Wh] jednak 3600 J.

Tehnička jedinica za mehanički rad je kilopondmetar [kpm]. Kilopondmetar je rad koji izvrši sila od 1 kiloponda kad se njena napadna tačka pomeri za 1 metar u smeru dejstva sile. Kilopondmetar je jednak 9,80665 J.

* Tekst koji sledi, a koji govori o jedinicama za mehanički rad ubacio je prevodilac.

Snaga. Snagom se naziva veličina koja određuje rad, koji vrši sila u jedinici vremena. Ako se rad vrši ravnomerno (jednoliko) onda je snaga

$$P = \frac{A}{t_1},$$

gde je t_1 — vreme u toku koga sila vrši rad. U opštem slučaju je

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F_T ds}{dt} = F_T v.$$

Prema tome, snaga je jednaka proizvodu iz tangencijalne komponente sile i brzine kretanja.*

Jedinica za snagu je *vat* (watt) [W]. Vat je snaga jednaka snazi od 1 džula na sekundu

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s.}$$

Tehnička jedinica za snagu je *konjska snaga* [KS], koja je jednaka radu od 75 kilopondmetra na 1 sekundu. U praksi se može uzeti da je 1 konjska snaga jednaka 735,5 vata.

Rad koji vrše mašine može da se izrazi proizvodom iz njene snage i vremena rada mašine. Na taj način se došlo do jedinice za rad koja se veoma često upotrebljava u tehnici, a to je kilovat-čas ($1 \text{ kWh} = 3,6 \cdot 10^6 \text{ J}$).

Iz jednačine $P = F_T v$ se vidi da će kod motora, koji imaju datu snagu P , vučna sila F_T biti utoliko veća, ukoliko je manja brzina kretanja v . Tako, npr., pri usponu, ili pak na rđavom delu puta, kod automobila se uključuju zupčanici sa najmanjim brojem zubaca, kako bi se, pri punoj snazi, automobil kretao manjom brzinom, odnosno kako bi imao što veću vučnu silu.

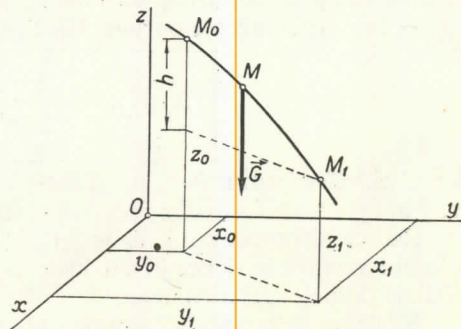
§ 113. Primeri za izračunavanje rada

Razni primeri, koje ćemo sada proučiti, omogućuju da se rezultati tih razmatranja neposredno iskoriste pri rešavanju zadataka.

1) Rad sile teže. Neka se tačka M na koju deluje sila teže $\vec{G}$ pomeri iz položaja $M_0(x_0, y_0, z_0)$ u položaj $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Izaberimo koordinatni sistem tako da osa Oz bude usmerena vertikalno naviše (sl. 254). U ovom slučaju je $G_x = 0$, $G_y = 0$ i $G_z = -G$. Ako ove vrednosti smenimo u formulu (38'), imajući u vidu da funkcija iza znaka integrala zavisi samo od z , dobićemo da je

$$\begin{aligned} A_{(M_0, M_1)} &= \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-G dz) = -G \int_{z_0}^{z_1} dz = \\ &= G(z_0 - z_1). \end{aligned}$$

Ako se tačka M_0 nalazi iznad tačke M_1 , onda je $z_0 - z_1 = h$, gde je h — veličina vertikalnog pomeranja tačke; ako je pak tačka M_0 ispod tačke M_1 , onda je $z_0 - z_1 = -(z_1 - z_0) = -h$.



Sl. 254

* Tekst o jedinicama za snagu ubacio je prevodilac.

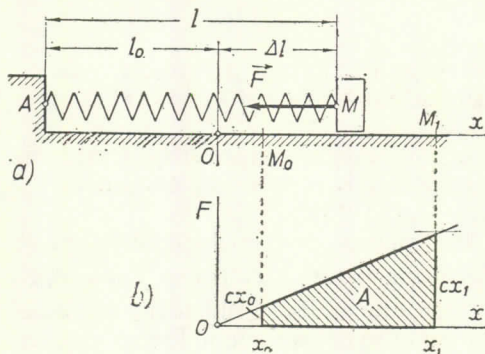
Na kraju dobijamo:

$$\mathbf{A}_{(M_0 M_1)} = \pm Gh. \quad (39)$$

Prema tome, rad sile teže jednak je proizvodu iz intenziteta sile i odgovarajućeg vertikalnog pomeranja tačke uzetog sa znakom plus ili minus. Rad je pozitivan ako se početni položaj tačke nalazi na nivou iznad krajnjeg položaja tačke. Rad je negativan ako se početni položaj tačke nalazi na nivou ispod krajnjeg položaja tačke.

Iz dobijenih rezultata proizlazi da rad sile teže ne zavisi od oblika putanje po kojoj se kreće tačka. Sile koje imaju takvo svojstvo nazivaju se *konzervativne* (potencijalne) sile.

2) Rad elastične sile. Neka teret leži na horizontalnoj ravni i neka je za nepomičnu tačku A vezan nekom oprugom (sl. 255, a). Označimo sa O položaj koji bi u ravni zauzimala krajnja tačka opruge kada bi ova bila nenapregnuta ($AO = l_0$ — dužina nenapregnute opruge) i uzmimo tu tačku za koordinatni početak. Ako sada izvedemo teret iz položaja ravnoteže, tako da se opruga istegne i



Sl. 255

njena dužina postane l , onda će na teret delovati elastična sila $\vec{F}$ usmerena ka tački O . Po Hukovom zakonu veličina elastične sile u opruzi proporcionalna je izduženju opruge: $\Delta l = l - l_0$. Kako je u našem slučaju $\Delta l = x$, to je intenzitet elastične sile

$$F = c |\Delta l| = c |x|.$$

Koeficijent c naziva se *krutost opruge*. Njegova dimenzija je $[c] = \text{kp/cm}$. Ovaj koeficijent je brojčano jednak sili kojom treba delovati na oprugu da bi se ona izdužila za 1 cm.

Odredimo rad koji izvrši elastična sila pri pomeranju tereta iz položaja $M_0(x_0)$ u položaj $M_1(x_1)$. Kako je u datom slučaju $X = -F = -cx$, $Y = Z = 0$, to iz formule (38') izlazi da je

$$\mathbf{A}_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} (-cx) dx = -c \int_{x_0}^{x_1} x dx = -\frac{1}{2} c (x_0^2 - x_1^2).$$

(Taj isti rezultat može se dobiti i iz dijagrama zavisnosti sile F od x (sl. 255, b), ako izračunamo površinu A šrafiranog trapeza i ako tom prilikom uzmemo u obzir znak za rad.) U dobijenoj formuli x_0 predstavlja početno izduženje opruge Δl_p , a x_1 — krajnje izduženje opruge Δl_k . Prema tome je

$$\mathbf{A}_{(M_0 M_1)} = -\frac{1}{2} c [(\Delta l_p)^2 - (\Delta l_k)^2], \quad (40)$$

tj. rad elastične (restitucione) sile jednak je polovini proizvoda krutosti opruge i razlike kvadrata početnog i krajnjeg izduženja (skraćanja) opruge.

Rad će biti pozitivan kada je $|\Delta l_p| > |\Delta l_k|$, tj. kada se kraj opruge približuje položaju ravnoteže, i negativan kada je $|\Delta l_p| < |\Delta l_k|$, tj. kada se kraj opruge udaljuje od položaja ravnoteže.

Može se dokazati da formula (40) važi i u slučaju kada pomeranje tačke M nije pravolinijsko. Na taj način, rad sile $\vec{F}$ zavisi samo od veličina Δl_p i Δl_k , a ne

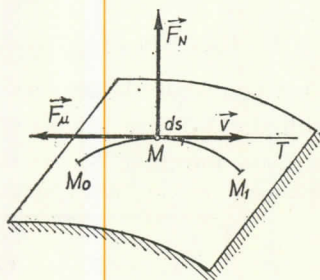
zavisu od oblika putanje tačke M . Prema tome, elastična (restituciona) sila je takođe konzervativna (potencijalna) sila.

3) Rad sile trenja. Proučimo kretanje tačke po bilo kakvoj hrapavoj površini ili po hrapavoj krivoj (sl. 256). Sila trenja koja deluje na tačku po intenzitetu je jednaka μF_N , gde je μ koeficijent trenja klizanja, a F_N normalna reakcija površine (krive). Smer sile trenja je suprotan smeru pomeranja tačke. Prema tome, $F_{\mu T} = -\mu F_N$, i po formuli (38) biće

$$A_{(M_0 M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} F_{\mu T} ds = - \int_{(M_0)}^{(M_1)} \mu F_N ds.$$

Ako je veličina sile trenja konstantna onda je $A_{(M_0 M_1)} = -F_{\mu T} s$, gde je s — dužina luka krive $M_0 M_1$ po kojoj se pomera tačka.

Prema tome, rad sile trenja pri klizanju je uvek negativan. Veličina tog rada zavisi od dužine luka $M_0 M_1$. Sila trenja, dakle, nije konzervativna (potencijalna) sila.



Sl. 256

§ 114. Zakon o promeni (priraštaju) kinetičke energije tačke

Neka se tačka mase m , pod dejstvom datih sila pomerila iz položaja M_0 , u kome je imala brzinu v_0 , u položaj M_1 , u kome joj je brzina v_1 .

Da bismo došli do tražene zavisnosti vratimo se na jednačinu $\vec{ma} = \vec{\Sigma F_i}$, koja izražava osnovni zakon dinamike. Ako projiciramo obe strane ove jednačine na pravac tangente MT na putanju tačke u tački M , koja je usmerena u smeru kretanja tačke, dobićemo:

$$ma_T = \Sigma F_{iT}.$$

Veličinu tangencijalnog ubrzanja, koje stoji na levoj strani ove jednačine, možemo predstaviti u obliku

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v.$$

Na taj način izlazi da je

$$mv \frac{dv}{ds} = \Sigma F_{iT}.$$

Pomnožimo obe strane ove jednačine sa ds i stavimo miza znaka diferencijala. Tada, imajući u vidu da je $F_{iT} ds = dA_i$, gde je dA_i — elementaran rad sile $\vec{F_i}$, dobijamo izraz koji iskazuje zakon o promeni (priraštaju) kinetičke energije tačke u diferencijalnom obliku

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_k = \Sigma dA_i. \quad (41)$$

Ako integriramo obe strane ove jednačine u granicama koje odgovaraju veličinama promenljivih u tačkama M_0 i M_1 dobićemo

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum A_{i(M_0M_1)}. \quad (42)$$

Jednačina (42) izražava zakon o promeni (priraštaju) kinetičke energije tačke u konačnom obliku: *priraštaj kinetičke energije tačke, pri nekom njenom pomeranju, jednak je algebarskoj sumi radova svih sila, koje deluju na tačku, na tom pomeranju.*

Slučaj prinudnog kretanja. Pri prinudnom kretanju tačke, kako proizlazi iz jednačine (5), u desnu stranu jednačine (42) ulazi kako rad datih (aktivnih)

sila $\vec{E}_i^a$, tako isto i rad reakcija veza. Ograničimo se na razmatranje kretanja tačke po nepomičnoj glatkoj (bez trenja) površini ili liniji. U tom slučaju reakcija $\vec{F}_N$ (vidi sl. 256) biće usmerena po normali na putanju tačke, dok je $F_{T_N} = 0$. Tada, saglasno formuli (38), — *rad reakcije veze (u obliku nepokretne glatke površine ili linije), pri bilo kom pomeranju tačke, biće jednak nuli*, pa iz jednačine (42) dobijamo:

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \sum A_{(M_0M_1)}^a. \quad (42')$$

Prema tome, — *pri pomeranju po nepomičnoj glatkoj površini (ili liniji) promena (priraštaj) kinetičke energije tačke jednak je sumi radova na tom pomeranju svih aktivnih sila koje deluju na tačku.*

Ako površina (odnosno kriva) nije glatka, onda radu spoljašnjih aktivnih sila treba pridodati i rad sile trenja (vidi § 113). Ako se površina (kriva) kreće, onda apsolutno pomeranje tačke M može i da ne bude upravno na $\vec{F}_N$ i tada rad reakcije $\vec{F}_N$ neće biti jednak nuli (npr., rad reakcije platforme lifta).

§ 115. Rešavanje zadataka

Pristupajući rešavanju zadataka, treba, pre svega, da se ustanovi da li se za rešavanja nekog problema može neposredno iskoristiti jedan od napred navedenih zakona i koji. Tom prilikom treba imati u vidu sledeće.

Korišćenjem zakona o priraštaju količine kretanja tačke lako se rešavaju zadaci u kojima

- a) deluje sila *konstantnog* intenziteta ili koja zavisi od *vremena*;
- b) u broj datih i traženih veličina ulaze: sile koje deluju, *vreme kretanja*, početna i krajnja vrednost brzine tačke (tj. veličine F , t , v_0 , v_1).

Pomoću zakona o priraštaju kinetičke energije tačke lako se rešavaju zadaci u kojima:

- a) deluje sila *konstantnog* intenziteta ili koja zavisi samo od *rastojanja*;
- b) u broj datih i traženih veličina ulaze: sile koje deluju, *pomeranje tačke*, brzina na početku i na kraju pomeranja (tj. veličine F , s , v_0 , v_1).

Ako pak koristimo pri rešavanju i jedan i drugi zakon, onda možemo rešiti i izvesne mešovite zadatke, tj. takve u kojima kao date (odnosno tražene veličine) figurišu jednovremeno i vreme kretanja i pomeranje (put) tačke.

Ako u broj sila koje deluju ulazi i neka sila koja zavisi od brzine kretanja, onda se korišćenjem bilo kog navedenog zakona ne može rešiti osnovni zadatak dinamike (jer je nemoguće da se unapred izračuna rad ili pak impuls sile). U tom slučaju mora se upotrebiti metoda integriranja diferencijalnih jednačina kretanja (glava XVII).

Rešavanje zadatka može se izvršiti sledećim redosledom:

1) Prema postavljenom problemu u zadatku treba da se utvrdi koji od zakona može da se primeni pri rešavanju zadatka.

2) Pokretna tačka prikaže se na crtežu u proizvoljnom položaju i utvrdi se koje sve aktivne sile deluju na tačku, a takođe i reakcije veze (ako je kretanje prinudno).

3) Po odgovarajućim formulama izračunavaju se impulsi ili rad svih sila za vreme kretanja.

4) Korišćenjem jednačina (34) ili (42), postave se odgovarajuće jednačine i iz njih se odrede tražene veličine. Pri svim brojčanim računima naročita pažnja treba da se obrati na to da se sve veličine izražavaju u jednom te istom sistemu jedinica.

Dokazani zakoni omogućuju takođe da se na osnovu priraštaja količine kretanja ili kinetičke energije tačke odredi impuls ili rad sila koje deluju na tačku.

Zadatak 102. Teret težine $G = 0,1$ kp kreće se jednoliko po krugu brzinom $v = 2$ m/s. Odrediti impuls i rad sila koje deluju na teret za vreme u kome teret pređe četvrtinu kruga.

Rešenje. Po zakonu o promeni količine kretanja, biće

$$\vec{I} = m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0.$$

Konstruisanjem geometrijske razlike tih količina kretanja (sl. 257), iz dobijenog pravouglog trougla nalazimo:

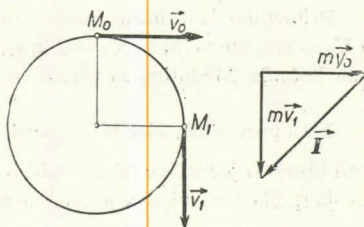
$$I = m \sqrt{v_1^2 + v_0^2}.$$

Međutim, prema uslovima zadatka je $v_1 = v_0 = v$, pa je, prema tome:

$$I = \frac{G}{g} v \sqrt{2} = 0,029 \text{ kps}.$$

Za rad, iz jednačine (42), nalazimo:

$$A_{(M_0 M_1)} = \frac{1}{2} m (v_1^2 - v_0^2) = 0.$$



Sl. 257

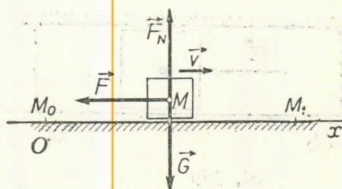
Zadatak 103. Teretu mase m , koji leži na horizontalnoj ravni, saopšti se (udarcem) početna brzina $\vec{v}_0$. Nastalo kretanje tereta koči se konstantnom silom $\vec{F}$. Odrediti posle koliko vremena će se teret zaustaviti i koliki će put preći do zaustavljanja.

Rešenje. Iz uslova zadatka se vidi da se za određivanje vremena kretanja može iskoristiti prvi, a za određivanje predenog puta drugi od dokazanih zakona.

Prikažimo teret (sl. 258) u proizvoljnom položaju M (M_0 i M_1 — početni i krajnji položaj tereta). Na teret deluju sile

$\vec{G}$ — težina tereta, $\vec{F}_N$ — reakcija ravni i $\vec{F}$ sila kočenja. Usmerimo osu Ox u smeru kretanja i postavimo jednačinu (34):

$$K_{1x} - K_{0x} = mv_{1x} - mv_{0x} = mx_1 - mx_0 = \Sigma I.$$



Sl. 258

U datom slučaju je $v_{1x} = \dot{x}_1 = 0$ (v_1 — brzina u trenutku zaustavljanja), a $\dot{v}_{0x} = \dot{x}_0 = v_0$. Od sila koje deluju projekciju na osu Ox ima samo sila $\vec{F}$. Kako je ona konstantna, to je $I_x = X t_1 = -F t_1$, gde je t_1 — vreme kočenja. Ako sve ove podatke smenimo u gornju jednačinu, dobićemo $-mv_0 = -F t_1$, odakle je traženo vreme

$$t_1 = \frac{mv_0}{F}. \quad (a)$$

Da bismo odredili put kočenja iskoristićemo zakon o priraštaju kinetičke energije

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma A_{(M_0 M_1)}.$$

Ovde je opet $v_1 = 0$, a rad vrši samo sila $\vec{F}$, pri čemu je $A(\vec{F}) = -Fs$, gde je s — put kočenja. Radovi sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_N$ jednaki su nuli, jer su te sile upravne na pomeranju. U krajnjem rezultatu dobijamo: $-\frac{1}{2} m v_0^2 = -F s_1$, tako da je traženi put

$$s_1 = \frac{1}{2} \frac{m v_0^2}{F}. \quad (b)$$

Iz formula (a) i (b) se vidi da pri datoj sili F vreme kočenja raste proporcionalno sa početnom brzinom v_0 , a put kočenja — proporcionalno sa kvadratom početne brzine.

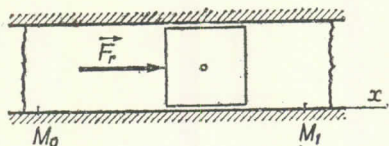
Ako je sila kočenja sila trenja, pri čemu je koeficijent trenja μ poznat, onda je $F = \mu G = \mu mg$ i jednačine (a) i (b) daju:

$$t_1 = \frac{v_0}{\mu g}, \quad s_1 = \frac{v_0^2}{2\mu g}.$$

Primitimo da u slučaju kada ne bi bila data masa m tela i njegova brzina v_0 , već količina kretanja $K_0 = mv_0$ tereta (npr., $K_0 = 2$ kps), onda bismo iz jednačine (a) mogli, znajući F , da odredimo vreme kočenja. Međutim, za određivanje puta kočenja s_1 ovi podaci ne bi bili dovoljni.

Nasuprot tome, ako bismo znali početnu kinetičku energiju tereta $E_{k0} = \frac{1}{2} m v_0^2$ i silu F mogli bismo iz jednačine (b) odrediti put kočenja s_1 , ali ne bismo bili u stanju da odredimo vreme kočenja t_1 . Na ove činjenice je već bilo ukazano u § 109.

Zadatak 104. Smatrajući da se veličina rezultante $\vec{F}_r$ svih sila, koje deluju na klip (sl. 259), menja u toku nekog vremenskog intervala po zakonu $F = 0,4 G (1 - kt)$, gde je G težina klipa, t vreme u sekundama, a k koeficijent koji je jednak $1,6 s^{-1}$, odrediti brzinu klipa u trenutku $t_1 = 0,5$ s, ako je u trenutku $t_0 = 0$ njegova brzina $v_0 = 0,2$ m/s.



Sl. 259

Rešenje. Kako sila koja deluje na klip zavisi od vremena, a među datim i traženim veličinama ulaze t_1 , v_0 i v_1 iskoristićemo za rešenje ovog zadatka jednačinu (34):

$$K_{1x} - K_{0x} = \Delta K = m v_{1x} - m v_{0x} = m \dot{x}_1 - m \dot{x}_0 = I_x.$$

U datom slučaju je

$$I_x = \int_0^{t_1} X dt = 0,4 G \int_0^{t_1} (1 - kt) dt = 0,4 G t_1 \left(1 - \frac{1}{2} k t_1 \right).$$

Osim toga $v_{0x} = v_0$, $v_{1x} = v_1$, $G = mg$. Ako sve ove vrednosti smenimo u jednačinu (33) ako uzmemo u obzir da je $k = 1,6 \text{ s}^{-1}$, a $t_1 = 0,5 \text{ s}$, dobićemo:

$$v_1 = v_0 + 0,4 g t_1 \left(1 - \frac{1}{2} k t_1 \right) = 1,4 \text{ m/s}.$$

Zadatak 105. Konopac dužine l , o koji je obešen teret, postavi se u početnom trenutku vremena u takav položaj da sa vertikalom zaklapa ugao φ_0 (sl. 260), i zatim se teret pusti bez početne brzine. Odrediti brzinu tereta u trenutku kada konopac zaklapa sa vertikalom ugao φ .

Rešenje. Kako u uslove zadatka ulaze: pomeranje tereta određeno uglom φ koji konopac zaklapa sa vertikalom i brzine v_0 i v_1 , za rešenje ovog zadatka iskoristićemo zakon o priraštaju kinetičke energije

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \Sigma A_{(M_0 M_1)}.$$

Na teret deluje sila teže $\vec{G}$ i reakcija konca $\vec{F}_K$. Rad sile $\vec{F}_K$ jednak je nuli, jer je $F_{KT} = 0$. Za silu G po formuli (39) nalazimo $A(\vec{G}) = Gh = mgh$. U krajnjem rezultatu, s obzirom da je $v_0 = 0$, dobijamo $\frac{1}{2} m v_1^2 = mgh$, odakle je

$$v = \sqrt{2gh}.$$

Ovo je poznata formula Galileja. Očevidno da se isti rezultat dobija i za brzinu v tela koje slobodno pada (sl. 260, b).

U razmatranom zadatku je $h = l \cos \varphi - l \cos \varphi_0$, tako da najzad dobijamo

$$v = \sqrt{2gl(\cos \varphi - \cos \varphi_0)}.$$

Zadatak 106. Opruga ventila u nenapregnutom stanju ima dužinu $l_0 = 6 \text{ cm}$. Kada je ventil potpuno otvoren dužina opruge iznosi $l = 4 \text{ cm}$, a visina podizanja ventila $s = 0,6 \text{ cm}$ (sl. 261). Krutost opruge je $c = 0,1 \text{ kp/cm}$, a težina ventila $G = 0,4 \text{ kp}$. Zanemarujući dejstvo sile teže i sile otpora, odrediti brzinu ventila u trenutku njegovog zatvaranja.

Rešenje. Elastična sila $\vec{F}$ koja deluje na ventil zavisi od rastojanja; osim toga dato je i pomeranje s ventila. Iz tog razloga za rešenje ovog zadatka iskoristićemo jednačinu (42):

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} m v_1^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = A_{(M_0 M_1)}.$$

Prema uslovima zadatka rad vrši samo elastična sila opruge. Tada će po formuli (40) biti:

$$A_{(M_0 M_1)} = \frac{1}{2} c [(Al_p)^2 - (Al_k)^2].$$

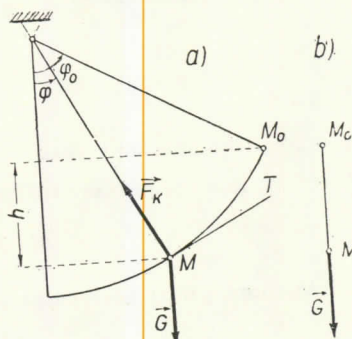
U datom slučaju je

$$Al_p = l_0 - l = 2 \text{ cm}, \quad Al_k = l_0 - l - s = 1,4 \text{ cm}.$$

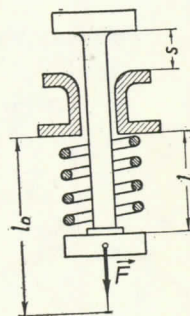
Osim toga, $v_0 = 0$ i $m = G/g$. Ako sve ove veličine zamenimo u jednačinu (42), dobićemo:

$$v_1 = \sqrt{\frac{cg}{G} [(Al_p)^2 - (Al_k)^2]} \approx 0,22 \text{ m/s}.$$

Pri računima treba obratiti pažnju na pojedine dimenzije (jer je Al izračunato u centimetrima, pa zato ubrzanje teže treba uzeti da je $g = 980 \text{ cm/s}^2$).

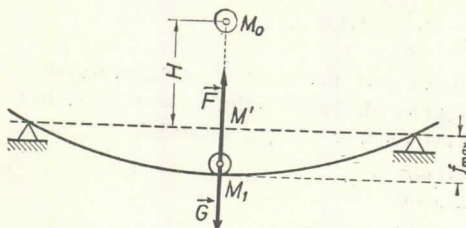


Sl. 260



Sl. 261

Zadatak 10. Teret koji leži na sredini elastične grede (sl. 262) ugne je za veličinu f_{st} (statički ugib grede). Zanimajući težinu grede odrediti koliki će biti njen maksimalni ugib f_{max} , ako teret pada na gredu sa visine H .



Sl. 262

Rešenje. Kao i u prethodnom zadatku za rešenje postavljenog zadatka iskoristićemo jednačinu (42). U datom slučaju početna brzina tereta v_0 , i njegova krajnja brzina v_1 (u trenutku maksimalnog ubiga grede), jednake su nuli i jednačina (42) ima oblik

$$\Sigma \mathbf{A}_i = 0. \quad (a)$$

Rad sada vrši samo sila teže $\vec{G}$ na pomeraњу $\overline{M_0 M_1}$ i elastična sila grede $\vec{F}$ na pomeraњу $\overline{M_0 M_1}$. Tom prilikom je $\mathbf{A}(\vec{G}) = G(H + f_{max})$, $\mathbf{A}(\vec{F}) = -\frac{1}{2} c f_{max}^2$, jer je za gredu $\Delta l_p = 0$, $\Delta l_k = f_{max}$. Ako smenimo ove veličine u jednačini (a), dobićemo:

$$G(H + f_{max}) - \frac{1}{2} c f_{max}^2 = 0.$$

Međutim, pri ravnoteži tereta na gredi sila teže biće uravnotežena elastičnom silom; prema tome

$$G = c f_{st},$$

pa se prethodna jednačina može napisati u obliku:

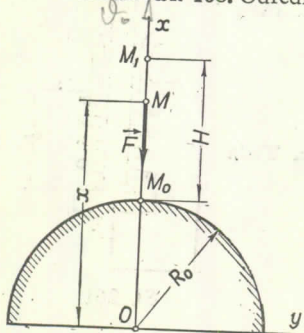
$$f_{max}^2 - 2 f_{st} f_{max} - 2 f_{st} H = 0.$$

Ako rešimo ovu kvadratnu jednačinu i ako uzmemo u obzir da prema uslovima zadatka mora biti $f_{max} > 0$, nalazimo:

$$f_{max} = f_{st} + \sqrt{f_{st}^2 + 2 H f_{st}}.$$

Interesantno je primetiti da se pri $H = 0$ dobija $f_{max} = 2 f_{st}$. Prema tome, ako teret stavimo na sredinu horizontalne grede, onda će njegov maksimalni ugib pri spuštanju tereta biti jednak dvostrukom statičkom ugibu. Posle toga greda će zajedno sa teretom početi da vrši oscilacije oko položaja ravnoteže. Pod uticajem otpora te će se oscilacije prigušiti i sistem će se uravnotežiti u položaju kada je ugib grede jednak f_{st} .

Zadatak 108. Odrediti koliku početnu brzinu v_0 usmerenu vertikalno naviše treba saopštiti telu da bi se ono sa Zemljine površine popelo na visinu H . Pri računima smatrati da se sila privlačenja menja obrnuto proporcijalno kvadratu rastojanja od središta Zemlje. Otpor vazduha zanemariti.



Sl. 263

Rešenje. Za rešenje ovog zadatka iskoristićemo zakon o priraštaju kinetičke energije; telo ćemo smatrati za materijalnu tačku. Početak koordinatnog sistema referencije stavićemo u središte Zemlje (centar privlačenja), a osu Ox usmerićemo u smeru kretanja (sl. 263). Prikažimo sile koje u proizvoljnom položaju deluju na pokretnu tačku M . Prema uslovima zadatka sila privlačenja F biće jednaka

$$F = \frac{km}{x^2},$$

gde je m — masa tačke, k — neki brojčani koeficijent.

Da bismo odredili k primetimo da kada se tačka nalazi na površini Zemlje ($x = R_0$, gde je R_0 — poluprečnik Zemlje) onda je sila privlačenja jednaka mg_0 , gde je g_0 ubrzanje teže na površini Zemlje. Odavde proizlazi.

$$mg_0 = \frac{km}{R_0^2} \quad \text{i} \quad k = R_0^2 g_0.$$

Po zakonu o priraštaju kinetičke energije biće:

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = A_{(M_0M_1)}. \quad (a)$$

U trenutku kada tačka dospe do svog najvišeg položaja, biće $v_1 = 0$. Da bismo izračunali rad iskoristimo formulu (38'). U našem slučaju je

$$X = -F = -\frac{mk}{x^2}, \quad Y = Z = 0,$$

tada je

$$A_{(M_0M_1)} = \int_{(M_0)}^{(M_1)} \left(-\frac{km}{x^2} \right) dx = -km \int_{R_0}^{R_0+H} \frac{dx}{x^2}.$$

Kada izračunamo integral, dobićemo:

$$A_{(M_0M_1)} = km \left(\frac{1}{R_0 + H} - \frac{1}{R_0} \right) = -\frac{kmH}{R_0(R_0 + H)}.$$

Ako nađenu veličinu za rad unesemo u jednačinu (a) i ako k zamenimo njegovom vrednošću konačno ćemo dobiti:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2g_0 R_0 H}{R_0 + H}}.$$

Razmotrimo posebne slučajeve.

a) Neka je H vrlo malo prema R_0 . Tada je H/R_0 — veličina koja je bliska nuli. Ako podelimo brojitelj i imenitelj sa R_0 dobićemo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\frac{2g_0 H}{R_0}}{1 + \frac{H}{R_0}}} \approx \sqrt{2g_0 H}.$$

Na taj način, za male visine H ova formula prelazi u Galilejevu formulu.

b) Odredimo kojom početnom brzinom treba izbaciti telo da bi ono otišlo u beskonačnos t. Ako podelimo brojitelj i imenitelj sa H dobićemo:

$$v_0 = \sqrt{\frac{\frac{2g_0 R_0}{H}}{1 + \frac{R_0}{H}}}.$$

Kad $H \rightarrow \infty$, ako smatramo da je srednji poluprečnik Zemlje jednak $R_0 \approx 6370$ km, dobićemo:

$$v_0 = \sqrt{2g_0 R_0} \approx 11,2 \text{ km/s.}$$

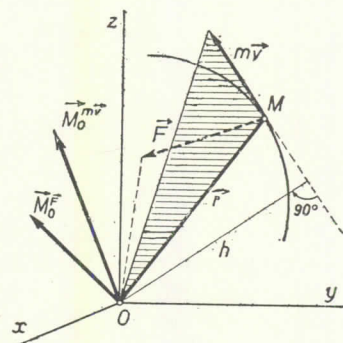
Prema tome, telo koje se izbacila sa površine Zemlje brzinom 11,2 km/s, napustiće polje sile Zemljinog privlačenja.

Može se izračunati da se pri početnim brzinama koje približno leže u granicama $8 \text{ km/s} \leq v_0 \leq 11 \text{ km/s}$, telo izbačeno u pravcu tangente na Zemljinu površinu, neće vratiti na Zemlju, već će postati Zemljin satelit. Kada se telo izbacila brzinom koja je manja od 8 km/s ili pod nekim uglom prema horizontu, telo će opisivati eliptičnu putanju i ponovo će se vratiti na Zemlju. Svi ovi rezultati odnose se na kretanje u bezvazдушnom prostoru (vidi Glavu XXII).

§ 116. Zakon o promeni momenta količine kretanja tačke (zakon o zamahu — zakon momenata)

Od dveju osnovnih dinamičkih karakteristika, koje smo uveli u § 109, veličina $\vec{K} = m\vec{v}$ je vektorska veličina. Pri proučavanju kretanja jedne tačke ponekad je korisno da se umesto priraštaja samog vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ posmatra priraštaj momenta ovog vektora. Moment vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ za tačku O , ili pak za osu z , označićemo

sa: $\vec{M}_O^{\vec{K}} = \vec{L}_O$ ili $M_z^{\vec{K}} = L_z$ i nazvaćemo ga odgovarajućim *momentom količine kretanja, kinetičkim momentom*, odnosno *zamahom*. Moment vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ se određuje na isti način kao i moment sile. Tom prilikom se smatra da se napadna tačka vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ nalazi u samoj pokretnoj tački. Intenzitet momenta količine kretanja jednak je $|\vec{M}_O^{\vec{K}}| = mvh$, gde je h — dužina normale spuštene iz tačke O na pravac vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ (sl. 264).



Sl. 264

1) Zakon o momentu količine kretanja (zamahu) za osu.* Posmatranje kretanja materijalne tačke mase m pod dejstvom sile $\vec{F}$. Odredimo za nju zavisnost koja postoji između momenata vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ i $\vec{F}$ za bilo koju nepomičnu osu z . Po formuli § 42 biće

$$M_z^{\vec{F}} = xY - yX. \quad (43)$$

Analogno za veličinu $M_z^{\vec{K}}$, ako m izvučemo pred zagradu, biće:

$$M_z^{\vec{K}} = m(xv_y - yv_x) = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = L_z \quad (43')$$

Kada od obe strane ove jednačine izračunamo izvod po vremenu, dobićemo

$$\frac{d}{dt} \left(M_z^{\vec{K}} \right) = \frac{dL_z}{dt} = m(\dot{x}v_y - y\dot{v}_x) + m(x\dot{v}_y - y\dot{v}_x).$$

Na desnoj strani jednačine izraz u prvoj zagradi jednak je nuli, jer je $v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$. Druga pak zagrada, saglasno formuli (43), biće jednaka $M_z^{\vec{F}}$, jer je prema osnovnom zakonu dinamike

$$mv_y = m\ddot{y} = Y, \quad mv_x = m\ddot{x} = X.$$

* Ovaj rezultat može, takođe, da se dobije i kao poseban slučaj zakona koju ćemo izvesti pod 2).

Na taj način izlazi da je

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{M}_z^K \right) = \frac{dL_z}{dt} = M_z^F. \quad (44)$$

Dobijena jednačina izražava zakon o momentu količine kretanja (zamahu) za osu: *izvod po vremenu od momenta količine kretanja tačke za bilo koju osu jednak je momentu sile (koja deluje na tačku) za istu osu*. Analogni zakon može da se izvede, takođe, i za bilo koju proizvoljno izabranu tačku (centar) O . Matematički izraz za ovaj zakon dat je malo niže formulom (45')

2*) Zakon o momentu količine kretanja (zamahu) za tačku (centar). Odredimo za materijalnu tačku, koja se kreće pod dejstvom sile $\vec{F}$ (sl. 264), zavisnost koja postoji između momenata vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ i $\vec{F}$ za bilo koju nepomičnu tačku O . Na kraju § 41 pokazali smo da je $\vec{M}_O^F = [\vec{r}, \vec{F}]$. Analogno je i

$$\vec{M}_O^K = [\vec{r}, m\vec{v}] = [\vec{r}, \vec{K}] = \vec{L}_O.$$

Tom prilikom je vektor $\vec{M}_O^F$ usmeren upravno na ravan koja prolazi kroz tačku O i vektor $\vec{F}$, dok je vektor $\vec{M}_O^K = \vec{L}_O$ je upravan na ravan koja prolazi kroz tačku O i vektor $\vec{K} = m\vec{v}$. Diferencirajući izraz $\vec{M}_O^K = \vec{L}_O$ po vremenu, dobićemo:

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{M}_O^K \right) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \left[\dot{\vec{r}}, m\vec{v} \right] + \left[\vec{r}, m\dot{\vec{v}} \right] = \left[\dot{\vec{r}}, m\vec{v} \right] + \left[\vec{r}, m\vec{a} \right]$$

Međutim, $[\dot{\vec{r}}, m\vec{v}] = 0$, kao vektorski proizvod dvaju paralelnih vektora, dok je $m\vec{a} = \vec{F}$. Prema tome,

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}, m\vec{v}] = \frac{d}{dt} [\vec{r}, \vec{K}] = [\vec{r}, \vec{F}], \quad (45)$$

ili

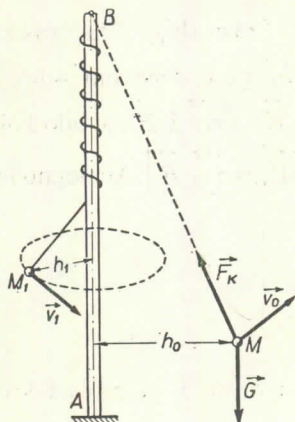
$$\frac{d}{dt} \left(\vec{M}_O^K \right) = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M}_O^F. \quad (45')$$

Na ovaj način dokazali smo zakon o momentu količine kretanja (zamahu) za tačku (centar): *izvod po vremenu od momenta količine kretanja (zamaha) za bilo koji proizvoljno izabran centar, jednak je momentu sile koja deluje*

na tačku, a za isti centar. Jedna analogna teorema važi i za momente vektora količine kretanja $\vec{K} = m\vec{v}$ i sile $\vec{F}$ za bilo koju osu z , u šta se možemo uveriti, ako projiciramo obe strane jednačine (45') na tu osu. Neposrednim putem dokazali smo to pod tačkom 1. Matematički izraz zakona o momentu količine kretanja za osu iskazan je u formuli (44).

Ako uporedimo jednačine (45') i (32), vidimo da su momenti vektora $\vec{K} = m\vec{v}$ i $\vec{F}$ vezani istim zavisnostima, kao i sami vektori $\vec{K} = m\vec{v}$ i $\vec{F}$.

Zadatak 109. Kuglica M privezana za konac BM (sl. 265) kreće se tako da se konac namotava na tanki vertikalni štup. Početno rastojanje kuglice od štapa jednako je h_0 , a početna brzina je $\vec{v}_0$ ($\vec{v}_0 \perp$ na ravan ABM). Odrediti, zanemarujući debljinu štapa, brzinu v_1 kuglice u trenutku kada njeno rastojanje od štapa bude jednako h_1 .



Sl. 265

Rešenje. Na kuglicu deluje sila teže $\vec{G}$ i reakcija konca $\vec{F}_K$. Momenti ovih sila za osu z , usmerenu duž štapa, jednaki su nuli. Tada, prema jednačini (44), biće

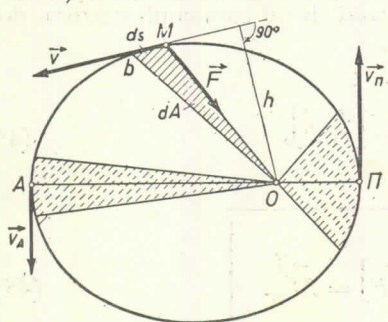
$$\frac{d}{dt} (M_z^K) = 0,$$

odakle proizlazi da je $M_z^K = mvh = \text{const.}$ Kako je masa konstantna, odavde proizlazi da će pri kretanju kuglice biti $v_0 h_0 = v_1 h_1$. Prema tome je

$$v_1 = \frac{h_0}{h_1} v_0.$$

3*) Kretanje pod dejstvom centralne sile. Centralnom silom naziva se takva sila čija napadna linija za sve vreme kretanja prolazi kroz dati centar (tačku) O . Takva je, npr., sila kojom Sunce privlači planete.

Razmotrimo, koristeći se jednačinom (45'), kako će se kretati tačka M (sl. 266) pod dejstvom centralne sile $\vec{F}$. Kako je u datom slučaju $\vec{M}_O^F = 0$, to je $\vec{M}_O^K =$



Sl. 266

$= [\vec{r}, m\vec{v}] = \text{const.}$, tj. vektor $\vec{M}_O^K$ je konstantan i po intenzitetu i po pravcu. Odayde, kao prvo, proizlazi da će vektori $\vec{r}$ i $\vec{v}$ ležati za sve vreme kretanja u istoj ravni (da bi pravac vektora $[\vec{r}, m\vec{v}]$ bio konstantan); prema tome, putanja tačke biće ravna kriva. Osim toga, kako je i po intenzitetu $|\vec{M}_O^K| = \text{const.}$, a masa m je

konstantna, to će biti i $M_O^K = mvh = \text{const.}$

Na taj način, pri kretanju pod dejstvom centralne sile, tačka će se kretati po ravnoj krivoj, a njena brzina $\vec{v}$ će se menjati tako da moment vektora $\vec{v}$ za tačku O ostaje uvek konstantan ($vh = \text{const.}$).

Poslednji rezultat ima i svoje geometrijsko tumačenje. Kako je $vh = \frac{ds}{dt} h$, a $ds \cdot h = 2 dA$, gde je dA element površine trougla OMb , onda je, ako je $vh = 2 \frac{dA}{dt} = \text{const}$, u isto vreme i $\frac{dA}{dt} = \text{const}$.

Veličina $\frac{dA}{dt}$ koja određuje brzinu kojom se menja površina omeđena vektorom položaja $\overrightarrow{OM}$, pri kretanju tačke M , zove se *sektorska brzina*. U datom slučaju je ta brzina konstantna. Prema tome, *pri kretanju tačke pod dejstvom centralne sile vektor položaja tačke u bilo kojim jednakim intervalima vremena prebrisava jednake površine* (zakon površina). Ovaj zakon igra važnu ulogu pri kretanju planeta i predstavlja jedan od Keplerovih zakona.

Ako krivu predstavljenu na sl. 266 smatramo putanjom planete (elipsa) i ako se Sunce nalazi u žiži O te elipse, onda će u tački II , koja se zove perihel, planeta imati najveću brzinu, a u tački A , koja se zove afel, najmanju brzinu. Ovaj rezultat proističe iz činjenice što površine šrafirane na crtežu isprekidanim linijama, a koje su prebrisane za isto vreme, moraju biti jednake. Odnos između brzina v_{II} i v_A može se dobiti i iz jednačine njihovih momenata: $v_{II} \cdot \overline{OII} = v_A \cdot \overline{OA}$.

Glava XIX

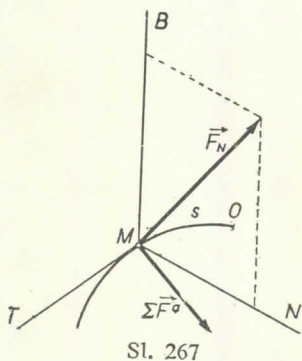
PRINUDNO KRETANJE TAČKE I DALAMBEROV PRINCIP

§ 117. Jednačine kretanja tačke po datoj nepomičnoj krivoj

Neki zadaci prinudnog kretanja tačke, mogu, kao što smo videli, da se reše korišćenjem opštih zakona dinamike. Proučimo sada drugu metodu rešavanja zadatka ove vrste, koja može da se upotrebi kada na tačku deluju bilo kakve sile, i koja omogućuje da se jednovremeno odredi zakon kretanja tačke, a takođe i reakcije veza.

Neka se tačka kreće po datoj glatkoj krivoj pod dejstvom aktivnih sila $\vec{F}_1^a, \vec{F}_2^a, \dots, \vec{F}_n^a$. Izaberimo na krivoj koordinatni početak O (sl. 267), tj. tačku prema kojoj ćemo određivati položaj pokretne tačke krivolinijskom koordinatom $s = \widehat{OM}$ (vidi § 68). Ako uklonimo vezu i ako njenò dejstvo na tačku zamenimo silom $\vec{F}_N$, onda osnovni zakon dinamike ima oblik (vidi § 102):

$$\vec{ma} = \sum \vec{F}_i^a + \vec{F}_N. \quad (46)$$



Povucimo u tački M tangentu MT (u stranu pozitivnog računanja koordinate s) i glavnu normalu MN (usmerenu u izdubljenu — konkavnu stranu krive) i zatim normalu na njih MB , koju zavemo binormala, pa zatim projicirajmo obe strane jednačine (46) na te ose. Kako je kriva glatka, to je reakcija $\vec{F}_N$ upravna na krivu, tj. ona se nalazi u ravni MBN , pa je, prema tome, $\vec{F}_{NT} = 0$. Na taj način, biće:

$$ma_T = \sum F_{iT}^a, \quad ma_N = \sum F_{iN}^a + F_{NN}, \quad ma_B = \sum F_{iB}^a + F_{NB} = 0.$$

$$\text{Kako je: } a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_N = \frac{v^2}{R_k} \quad \text{i} \quad a_B = 0.$$

jer vektor ubrzanja leži u oskulatornoj ravni MTN , to posle projiciranja gornje jednačine na ose uvedenog koordinatnog sistema, dobijamo jednačine:

$$m \frac{dv}{dt} = m \frac{d^2s}{dt^2} = \Sigma F_{iT}^a, \quad (47)$$

$$m \frac{v^2}{R_k} = \Sigma F_{iN}^a + F_{NN}, \quad 0 = \Sigma F_{iB}^a + F_{NB} \quad (48)$$

Dobivene jednačine omogućuju da se reše oba zadatka prinudnog kretanja tačke, koja su navedena u § 102.

Jednačina (47) ne sadrži nepoznatu reakciju $\vec{F}_N$ i omogućuje da se odredi zakon kretanja duž krive, tj. da se nađe zavisnost $s = f(t)$. Jednačina (48) služi, međutim, za određivanje reakcije (vidi § 118).

Dobivene jednačine mogu takođe da se iskoriste i u slučaju kada kriva nije glatka; tada aktivnim silama $\vec{F}_i^a$ treba pridodati silu trenja.

Jednačine (47) i (48) mogu se takođe upotrebiti i za slučaj kretanja slobodne tačke, ako u njih stavimo $F_N = 0$.

Zadatak 110. Prsten M navučen je na žicu savijenu u horizontalan krug poluprečnika $R = 0,3$ m. Prsten dobiva početnu brzinu $v_0 = 2$ m/s u smeru tangente na krug. Koeficijent trenja prstena o krug iznosi $\mu = 0,3$. Odrediti koliki će put preći prsten na žici do trenutku kada se zaustavi.

Rešenje. Postavimo početak O koordinatnog sistema referencije u početni položaj prstena (sl. 268). Prikažimo prsten u proizvoljnom položaju i povucimo ose MT , MN i MB . Na prsten deluje sila teže $\vec{G}$, reakcija $\vec{F}_N$ i sila trenja $\vec{F}_\mu$. Postavimo jednačinu (47), (48); tako dobijamo

$$m \frac{dv}{dt} = -F_\mu, \quad m \frac{v^2}{R} = F_{NN}, \quad F_{NB} - G = 0.$$

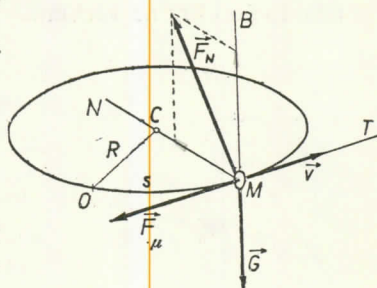
Po intenzitetu biće $F_\mu = \mu F_N = \mu \sqrt{F_{NB}^2 + F_{NN}^2}$ (učinili bismo grešku ako bismo silu trenja, izračunavali kao aritmetički zbir sila μF_{NB} i μF_{NN}). Primetimo da je $F_{NB} = G = mg$; tako dobijamo:

$$F_\mu = \mu m \sqrt{g^2 + \frac{v^4}{R^2}}.$$

Kao što vidimo, sila trenja, preko reakcije F_N , zavisi od brzine kretanja prstena. Prema tome, dati zadatak ne bismo mogli da rešimo korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije.

Da bismo odredili zavisnost s od v primetimo da je $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{ds} v$. Tada, posle skraćivanja sa m , jednačina kretanja prstena postaje

$$v \frac{dv}{ds} = -\frac{\mu}{R} \sqrt{g^2 R^2 + v^4}.$$



Sl. 268

Ako razdvojimo promenljive dobićemo:

$$\frac{d(v^2)}{\sqrt{g^2 R^2 + v^4}} = -\frac{2\mu}{R} ds,$$

odakle je

$$\frac{2\mu}{R} s = -\ln(v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}) + C_1.$$

Prema početnim uslovima kretanja je $v = v_0$ kada je $s = 0$. Prema tome je $C_1 = \ln(v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4})$ i konačno dobijamo

$$s = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v_0^4}}{v^2 + \sqrt{g^2 R^2 + v^4}}.$$

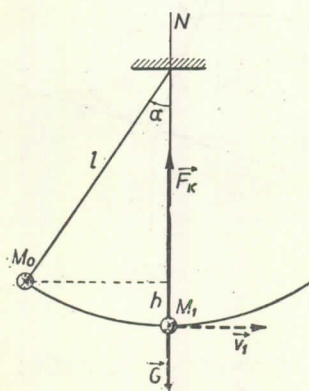
U trenutku zaustavljanja biće $v = 0$. Prema tome, traženi put, ako približno uzmemo da je $g \approx 10 \text{ m/s}^2$, biće

$$s_1 = \frac{R}{2\mu} \ln \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 + g^2 R^2}}{g R} \approx \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0,55 \text{ m}.$$

§ 118. Određivanje reakcija veza

Pri kretanju tačke po datoj krivoj liniji reakcija veze se određuje preko jednačina (48). Tom prilikom tačka treba da se prikaže u onom položaju u kome treba odrediti reakciju veze. Ako brzina, koja ulazi u jednačinu (48) nije unapred poznata, onda ona u mnogim slučajevima može da se odredi korišćenjem zakona o promeni kinetičke energije (§ 114).

Iz jednačina (48) se vidi da pri krivolinijskom kretanju dinamička reakcija $\vec{F}_N$, za razliku od statičke reakcije, zavisi ne samo od aktivnih sila i oblika veze, već takođe i od brzine kretanja.



Sl. 269

Zadatak 111. Teret težine G , obešen o konac dužine l , pomenen od vertikale za ugao α u položaju M_0 , pusti se bez početne brzine. Odrediti veličinu sile u koncu u trenutku kada teret prolazi kroz svoj najniži položaj M_1 .

Rešenje. Prikažimo teret u položaju u kome treba odrediti silu u koncu, tj. u položaju M_1 (sl. 269). Na teret deluje sila teže $\vec{G}$ i reakcija konca $\vec{F}_K$. Povucimo normalu $M_1 N$ usmerenu u konkavnu (izdubljenu) stranu putanje i postavimo jednačine (48), imajući u vidu da je u našem slučaju $R_k = l$. Tako dobijamo:

$$\frac{mv_1^2}{l} = F_K - G, \quad \text{odnosno} \quad F_K = G + \frac{mv_1^2}{l},$$

gde je v_1 brzina tereta u položaju M_1 . Da bismo odredili v_1 iskoristićemo jednačinu (42')

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} mv_1^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 = A_{(M_0 M_1)}^a \quad (a)$$

Rad na pomeranju $M_0 M_1$ vrši samo sila G . Prema tome je $A^a = Gh = Gl(1 - \cos \alpha)$.

Kako je $v_0 = 0$, to posle zamene nađene vrednosti za rad u jednačini (a) dobijamo $mv_1^2 = 2Gl(1 - \cos \alpha)$, tako da konačno nalazimo:

$$F_K = G(3 - 2 \cos \alpha).$$

U posebnom slučaju, kada je ugao početnog otklona $\alpha = 90^\circ$, sila u koncu kada teret bude u najnižem položaju biće $3G$, tj. biće tri puta veća od tereta. Dobijeni rezultat pokazuje da se dinamičke reakcije mogu mnogo razlikovati od statičkih.

Zadatak 112. Žljeb koji se sastoji iz dva luka AB i BD , poluprečnika R , postavljen je u vertikalnoj ravni tako da je tangenta BE u prevojnoj tački horizontalna (sl. 270).

Zanemarujući trenje odrediti na koju visinu h iznad prave BE treba staviti u žljeb tešku kuglicu, da bi ona napustila žljeb u tački M_1 koja se nalazi na istom rastojanju ispod prave BE .

Rešenje. Kuglica će napustiti žljeb u onoj tački M_1 u kojoj je njen pritisak na žljeb (ili reakcija F_N žljeba) jednaka nuli. Prema tome, zadatak se svodi na određivanje reakcije F_N . Prikažimo kuglicu u tački M_1 . Na nju deluje sila teže $\vec{G}$ i reakcija žljeba $\vec{F}_N$. Postavimo jednačinu (48) u obliku projekcija na unutrašnju normalu M_1N ; tako dobijamo:

$$\frac{mv_1^2}{R} = G \cos \varphi - F_N.$$

Kako je u tački u kojoj kuglica napušta žljeb $F_N = 0$, to, imajući u vidu da je $R \cos \varphi = \overline{KC} = R - h$, za određivanje visine h dobijamo sledeću jednačinu

$$mv_1^2 = G(R - h). \quad (a)$$

Veličina mv_1^2 može se odrediti ako se upotrebi zakon o priraštaju kinetičke energije. Kako je u ovom slučaju $v_0 = 0$, to iz jednačine (42) proizlazi

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} mv_1^2 = \mathbf{A}_{(M_0 M_1)}^a.$$

U ovom zadatku rad vrši samo sila $\vec{G}$, pri čemu je $\mathbf{A}(\vec{G}) = G \cdot 2h$. Prema tome, biće $mv_1^2 = 4Gh$. Kad ovu vrednost za mv_1^2 smenimo u jednačinu (a), dobićemo $4h = R - h$, odakle je

$$h = 0,2 R.$$

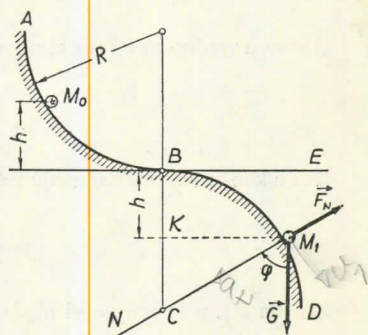
Zadatak 113. Teret M obešen je o konac dužine l (sl. 271). Kolika najmanja početna brzina v_0 , upravna na konac, treba da se da teretu, da bi on opisao ceo krug?

Rešenje. Teret će opisati ceo krug, ako duž celog puta sila u koncu (izuzev možda u tački M') ne bude bila jednaka nuli, tj. ako tokom celog puta konac bude bio zategnut. Ako u bilo kojoj tački M_1 , u kojoj je $v_1 \neq 0$, sila u koncu postane jednaka nuli, onda će konac prestati da zadržava teret, tj. da ga prinuđuje da se kreće po krugu, i on će nastaviti da se kreće kao slobodna tačka (po paraboli).

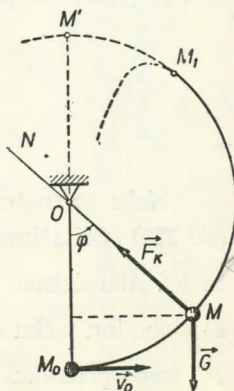
Da bismo rešili ovaj zadatak odredimo silu u koncu u proizvoljnom položaju M , koji je određen uglom φ , a zatim potražimo uslov da bi pri bilo kom uglu $\varphi \neq 180^\circ$ bilo $F_K > 0$.

U položaju M na teret deluju sila $\vec{G}$ i sila u koncu $\vec{F}_K$. Postavimo jednačinu (48) u obliku projekcija na unutrašnju normalu MN ; tako dobijamo

$$m \frac{v^2}{l} = F_K - G \cos \varphi. \quad (a)$$



Sl. 270



Sl. 271

gde je v — brzina tereta u položaju M . Da bismo odredili v upotrebimo zakon o priraštaju kinetičke energije:

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = A_{(M_0M_1)}^a.$$

U datom slučaju $A_{(M_0M_1)}^a = -Gh = -Gl(1 - \cos \varphi)$,

pa je, prema tome,

$$mv^2 = mv_0^2 - 2Gl(1 - \cos \varphi).$$

Ako ovu vrednost mv^2 smenimo u jednačini (a) i ako izračunamo F_K , dobićemo da je:

$$F_K = G \left(\frac{v_0^2}{gl} - 2 + 3 \cos \varphi \right)$$

Sila u koncu F_K ima najmanju veličinu pri uglu $\varphi = 180^\circ$:

$$(F_K)_{\min} = G \left(\frac{v_0^2}{gl} - 5 \right)$$

Da sila F_K u koncu ne bi nigde (izuzev u tački M') postala jednaka nuli, potrebno je da bude $(F_K)_{\min} \geq 0$. Odavde zaključujemo da mora biti

$$\frac{v_0^2}{gl} \geq 5 \quad \text{ili} \quad v_0 \geq \sqrt{5gl}.$$

Prema tome, najmanja početna brzina pri kojoj će teret opisati ceo krug određena je jednačinom

$$(v_0)_{\min} = \sqrt{5gl}.$$

Neka, umesto o konac, teret bude obešen o kruti štap, dužine l , čija težina može da se zanemari. U tom slučaju (s obzirom da kruti štap, za razliku od konca, može da radi i na zatezanje i na pritisak) teret će opisati ceo krug, ako pri kretanju njegova brzina, nigde, osim možda u tački M' ne bude bila jednaka nuli. Primenimo jednačinu (42') na pomeranju M_0M' i smatrajmo da je u tački M' brzina $v = 0$; tako dobijamo:

$$-\frac{1}{2}mv_0^2 = -mg \cdot 2l.$$

Odavde proizilazi da je u datom slučaju

$$(v_0)_{\min} = \sqrt{4gl}.$$

§ 119. Dalamberov princip

Neka se materijalna tačka M kreće po datoj nepomičnoj krivoj ili površini (sl. 272). Označimo rezultantu svih aktivnih sila koje deluju na materijalnu tačku sa $\vec{F}^a$. Ako dejstvo veze zamenimo reakcijom $\vec{F}_N$, onda tačku M možemo smatrati za slobodnu tačku koja se kreće pod dejstvom sila $\vec{F}^a$ i $\vec{F}_N$. Odredimo kakvu silu $\vec{F}^{\text{in}}$ treba pridodati silama $\vec{F}^a$ i $\vec{F}_N$ da bi ih ona uravnotežila. Ako rezultantu sila $\vec{F}^a$ i $\vec{F}_N$ označimo sa $\vec{F}_r$, onda će, očividno, biti $\vec{F}^{\text{in}} = -\vec{F}_r$.

Izrazimo silu $\vec{F}^{\text{in}}$ preko ubrzanja pokretne tačke. Kako je prema osnovnom zakonu dinamike $\vec{F}_r = m\vec{a}$, to će biti

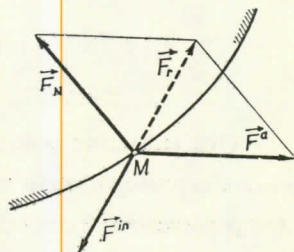
$$\vec{F}^{\text{in}} = -m\vec{a}.$$

Sila $\vec{F}^{\text{in}}$ koja je po intenzitetu jednaka proizvodu iz mase tačke i njenog ubrzanja, i koja je usmerena u suprotnom smeru od smera ubrzanja, zove se *sila inercije* tačke M .

Prema tome, ako silama $\vec{F}^a$ i $\vec{F}_N$ pridodamo silu inercije $\vec{F}^{\text{in}}$, onda će one biti u ravnoteži, tako da je:

$$\vec{F}^a + \vec{F}_N + \vec{F}^{\text{in}} = 0.$$

(49)



Sl. 272

Dobijena jednačina iskazuje *D'alambertov princip* (d'Alembert) za tačku, koji glasi: *ako u svakom datom trenutku, aktivnim silama, koje deluju na pokretnu tačku, i reakcijama veza, pridodamo silu inercije, onda će takav sistem sila biti u ravnoteži i na njega možemo primeniti sve zakone statike.*

Značaj D'alambertovog principa sastoji se u tome što on omogućuje da se pri rešavanju dinamičkih zadataka postave jednačine kretanja u obliku statičkih jednačina ravnoteže. Značaj ovog principa naročito se ispoljava u dinamici sistema materijalnih tačaka.

Primenjujući D'alambertov princip treba uvek imati u vidu da na pokretnu tačku, deluju stvarno samo sile $\vec{F}^a$ i $\vec{F}_N$ i da se tačka nalazi u stanju kretanja. Sila inercije *ne deluje* na pokretnu tačku, i pojam o njoj u datom slučaju je uveden samo radi toga da bismo bili u stanju da postavimo jednačine kretanja korišćenjem prostijih metoda statike.

Sila koja je jednaka $-m\vec{a}$ u mehanici nazivamo «sila inercije» iz sledećih razloga. Ako, npr., rukom pokrećemo neki teret i ako se on tom prilikom kreće pravolinijski i ako ruka bude ubrzavala njegovo kretanje, onda, u tom slučaju, ruka deluje na teret silom $\vec{F} = m\vec{a}$. Međutim, s druge strane, po zakonu akcije i reakcije (dejstva i protivdejstva), teret, takode, deluje na ruku silom $\vec{F}' = -m\vec{a}$, usled protivdejstva promeni njegove brzine. Kako je sila $\vec{F}' = -m\vec{a}$ uslovljena inercijom tereta, onda se ona, zbog toga, i zove «sila inercije». Navedeni primer objašnjava samo zašto je veličini $-m\vec{a}$ dat naziv «sila inercije». Sila $\vec{F}'$, kao što smo videli u navedenom primeru ne deluje na teret, već na ruku. Na sam teret, kako smo već naveli, nikakva sila inercije ne deluje.

Pri rešavanju zadataka, radi prikazivanja sile inercije potrebno je da znamo pravac i smer ubrzanja tačke. Kada je kretanje pravolinijsko, pravac i smer vektora $\vec{a}$ je poznat. U tom slučaju je sila $\vec{F}^{\text{in}}$ usmerena suprotno ubrzanju $\vec{a}$, a po intenzitetu je jednaka $F^{\text{in}} = ma$.

Pri krivolinijskom kretanju silu inercije možemo prikazati preko njene tangencijalne i normalne komponente. Ako projiciramo obe strane jednačine $\vec{F}^{\text{in}} = -m\vec{a}$ na pravac tangente i na pravac normale na putanju, dobićemo:

$$F_T^{\text{in}} = -ma_T = -m \frac{dv}{dt}, \quad F_N^{\text{in}} = -ma_N = -m \frac{v^2}{R_k}.$$

Ove jednačine pokazuju da je *tangencijalna komponenta sile inercije* F_T^{in} usmerena u suprotnom smeru od tangencijalnog ubrzanja (tj. u stranu smanjivanja brzine), dok je *normalna ili centrifugalna komponenta sile inercije* F_N^{in} usmerena pravcem glavne normale od centra krivine (jer je vektor $\vec{a}_N$ uvek usmeren prema centru krivine). Po intenzitetu ove sile iznose:

$$\left| F_T^{\text{in}} \right| = m \left| \frac{dv}{dt} \right|, \quad \left| F_N^{\text{in}} \right| = m \frac{v^2}{R_k}.$$

Dalamberovim principom možemo se koristiti uvek ako je potrebno da odredimo dinamičke reakcije veza ili pak ubrzanje pokretne tačke. Posebno, ovom metodom mogu lako da se reše zadaci, analogni zadacima koje smo razmatrali u §§ 103, 118.

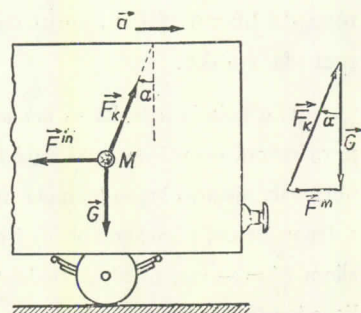
Zadatak 114. Za vreme ubrzanja željezničke kompozicije pri polasku iz stanice obesi se o konac teret, pri čemu se drugi kraj konca pričvrsti za tavanicu nekog vagona. Tom prilikom konac, kada se ubrzanje ustali, skrene od vertikalnog položaja za ugao α (sl. 273). Odrediti ubrzanje vagona.

Rešenje. Na teret u posmatranom položaju deluju sila težę $\vec{G}$ i reakcija konca $\vec{F}_K$. Koristeći se Dalamberovim principom pridodajmo ovim silama silu inercije $\vec{F}^{\text{in}}$, usmerenu u suprotnom smeru od smera ubrzanja vagona $\vec{a}$. Po intenzitetu sila inercije je jednaka $F^{\text{in}} = ma = \frac{G}{g} a$. U tom slučaju će sile $\vec{G}$, $\vec{F}_K$ i $\vec{F}^{\text{in}}$ biti uzajamno uravnotežene. Ako od ovih sila konstruišemo zatvoreni trougao sila nalazimo da je

$$F^{\text{in}} = G \operatorname{tg} \alpha, \quad \text{odnosno} \quad \frac{G}{g} a = G \operatorname{tg} \alpha.$$

Prema tome, ubrzanje vagona iznosi $a = g \operatorname{tg} \alpha$.

Zadatak 115. Rešiti zadatak 111. pomoću Dalamberovog principa.



Sl. 273

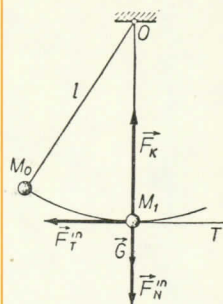
Rešenje. Ucrtaimo teret u onom položaju za koji treba da se odredi sila u koncu (sl. 274). Na teret deluje sila teže $\vec{G}$ i sila u koncu $\vec{F}_K$. Pridodajmo ovim silama tangencijalnu

i normalnu komponentu sile inercije $\vec{F}_N^{\text{in}}$ i $\vec{F}_T^{\text{in}}$. Dobiveni sistem sila, prema D'alambertovom principu, biće u ravnoteži. Ako izjednačimo sa nulom sumu projekcija svih ovih sila na pravac normale M_1O , dobićemo:

$$F_K - G - F_N^{\text{in}} = 0.$$

Kako je $F_N^{\text{in}} = m \frac{v_1^2}{l}$, gde je v_1 — brzina tereta u položaju M_1 , to je

$$F_K = G + F_N^{\text{in}} = G + m \frac{v_1^2}{l}.$$



Sl. 274

Na taj način smo za silu u koncu F_K dobili isti izraz kao i u zadatku 111. Ako sada odredimo, kao i u zadatku 111., veličinu brzine v korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije, dobićemo isti rezultat kao i ranije.

Kada projiciramo sve sile na pravac tangente, dobićemo $F_{T_1}^{\text{in}} = 0$. Ovakav rezultat dobija se zbog toga što je u tački M_1 izvod $\frac{dv}{dt} = 0$, pošto u toj tački brzina ima svoju maksimalnu veličinu.

Glava XX

RELATIVNO KRETANJE TAČKE

§ 120. Jednačine relativnog kretanja i relativnog mirovanja tačke

Zakoni dinamike i zaključci do kojih smo došli njihovim korišćenjem u prethodnim glavama, mogu se iskoristiti samo za proučavanje apsolutnog kretanje tačke, tj. samo za proučavanje kretanja u odnosu na inercijalni (nepomični) koordinatni sistem.

Ova glava je posvećena proučavanju relativnog kretanja tačke, tj. kretanju tačke u odnosu na neinercijalne koordinatne sisteme, koji mogu proizvoljno da se kreću.

Neka se materijalna tačka M kreće pod dejstvom datih sila $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$, koje nastaju kao rezultat uzajamnog dejstva tačke i drugih materijalnih tela. Proučimo kretanje ove tačke u odnosu na pokretni koordinatni sistem $Oxyz$ (sl. 275), koji sa svoje strane izvodi bilo kakvo poznato kretanje prema nepomičnom koordinatnom sistemu $O_1x_1y_1z_1$.

Odredimo zavisnost između relativnog ubrzanja tačke $\vec{a}_r$ i aktivnih sila koje deluju na tačku. Za apsolutno kretanje osnovni zakon dinamike glasi:

$$\boxed{m\vec{a}_a = \Sigma \vec{F}_i.} \quad (50)$$

Međutim, iz [kinematike je poznato da je $\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_p + \vec{a}_c$, gde je $\vec{a}_r$, $\vec{a}_p$, $\vec{a}_c$ — relativno, prenosno i koriolisovo ubrzanje. Unesimo ovaj izraz za $\vec{a}_a$ u jednačinu (50) i smatrajmo u daljim izlaganjima da je $\vec{a}_r = \vec{a}$, jer ta veličina predstavlja ubrzanje relativnog kretanja koje proučavamo. Na taj način dobijamo:

$$m\vec{a} = \Sigma \vec{F}_i + (-m\vec{a}_p) + (-m\vec{a}_c).$$

Ako označimo sa:

$$\boxed{\vec{F}_p^{\text{in}} = -m\vec{a}_p,}$$

$$\boxed{\vec{F}_c^{\text{in}} = -m\vec{a}_c,}$$

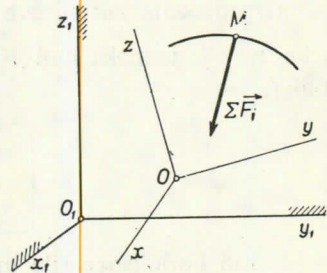
dobićemo:

$$\vec{ma} = \Sigma \vec{F}_i + \vec{F}_p^{\text{in}} + \vec{F}_c^{\text{in}}. \quad (51)$$

Veličine $\vec{F}_p^{\text{in}}$ i $\vec{F}_c^{\text{in}}$ po dimenziji su sile. Nazovimo ih *prenosna i koriolisova sila inercije*.

Jednačina (51) izražava osnovni zakon dinamike relativnog kretanja tačke. Ako uporedimo jednačine (50) i (51) doći ćemo do sledećeg zaključka: sve jednačine i zakoni mehanike za relativno kretanje tačke dobijaju se na isti način kao i jednačine za apsolutno kretanje, ako aktivnim silama, koje deluju na tačku (kao rezultat uzajamnog dejstva između tačke i drugih materijalnih tela), pridodamo još i prenosnu

i koriolisovu silu inercije. Dodavanjem sila $\vec{F}_c^{\text{in}}$ i $\vec{F}_p^{\text{in}}$ uzima se u obzir uticaj kretanja pokretnog koordinatnog sistema na relativno kretanje.



Sl. 275

Razmotrimo neke posebne slučajeve:

1. Ako se *pokretni koordinatni sistem kreće translatorno*, onda je $\omega_p = 0$, pa je i $\vec{F}_c^{\text{in}} = 0$ i zakon relativnog kretanja dobija tada sledeći oblik:

$$\vec{ma} = \Sigma \vec{F}_i + \vec{F}_p^{\text{in}}$$

2. Ako se *pokretni koordinatni sistem kreće translatorno, ravnomerno i pravolinijski*, onda je $\vec{F}_c^{\text{in}} = \vec{F}_p^{\text{in}} = 0$ i zakon relativnog kretanja imaće isti oblik, kao i zakon kretanja u odnosu na nepomični koordinatni sistem. Prema tome, takav koordinatni sistem referencije biće *inercijalni*.

Iz dobijenog rezultata možemo zaključiti da nikakvim mehaničkim eksperimentom ne možemo ustanoviti da li se dati sistem referencije nalazi u stanju mirovanja ili vrši translatorno, ravnomerno i pravolinijsko kretanje. U ovome se sastoji otkriće do koga je došao još Galilej, koji je postavio ovaj tzv. *princip relativnosti klasične mehanike*.

3. Ako se *tačka nalazi u miru u odnosu na pokretni koordinatni sistem*, onda je za nju $\vec{a} = 0$ i $\vec{v}_r = \vec{v} = 0$, pa je, prema tome i $\vec{F}_c^{\text{in}} = 0$, jer je koriolisovo ubrzanje $a_c = 2\vec{v}_r \omega_p \sin \alpha$. U ovom slučaju jednačina (51) ima oblik

$$\Sigma \vec{F}_i + \vec{F}_p^{\text{in}} = 0. \quad (52)$$

Jednačina (52) predstavlja jednačinu relativnog mirovanja (relativne ravnoteže) tačke. Iz nje proizlazi da jednačinu relativne ravnoteže možemo postaviti na isti način kao i jednačinu ravnoteže za nepokretni koordinatni sistem, ako osim aktivnih sila koje deluju na tačku (a koje su rezultat uzajamnog dejstva između tačke i drugih materijalnih tela) uzmemo u obzir i prenosnu silu inercije.

Zadatak 117. Žica savijena u obliku polukruga BCD , poluprečnika R (sl. 227), obrće se oko vertikalne ose konstantnom ugaonom brzinom ω . Po njoj iz tačke B , koja se nalazi vrlo blizu obrtnoj osi, klizi bez trenja prsten M . Odrediti relativnu brzinu v_1 prstena u tački C , ako je njegova početna brzina $v_0 = 0$.

Rešenje. Radi određivanja brzine v_1 iskoristićemo zakon o pri-
raštaju kinetičke energije. Da bismo bili u stanju da upotrebimo jednačinu
(54) potrebno je prethodno da izračunamo rad sila $\vec{G}$ i $\vec{F}_p^{\text{in}}$, gde je
 $F_p^{\text{in}} = m\omega^2 x$, (rad reakcije $\vec{F}_N$ jednak je nuli). Smatrajući da je približno
 $x_B = 0$, nalazimo:

$$A_{(BC)}(\vec{F}_p^{\text{in}}) = \int_{(B)}^{(C)} F_p^{\text{in}} dx = m\omega^2 \int_0^R x dx = \frac{1}{2} mR^2\omega^2.$$

Osim toga, $A_{(BC)}(\vec{G}) = GR$. Ako ove izraze unesemo u jednačinu
(54) i ako imamo u vidu da je $v_0 = 0$, dobićemo:

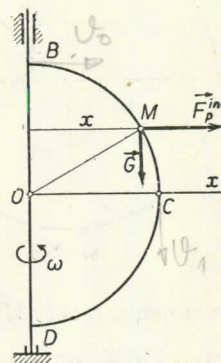
$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \frac{1}{2} mv_1^2 = mR \left(g + \frac{1}{2} R\omega^2 \right).$$

Oдавде nalazimo da je:

$$v_1 = \sqrt{2gR \left(1 + \frac{R\omega^2}{2g} \right)}.$$

Ovaj zadatak može isto tako da se reši ako se postavi jednačina (53) u obliku projekcija na
tangentu MT , i ako se zatim leva strana ove jednačine transformiše na isti način kao i u zadatku 110.

Primer za integriranje jednačine relativnog kretanja dat je u § 123.



Sl. 277

§ 121. Uticaj obrtanja Zemlje na ravnotežu i kretanje tela

Pri rešavanju najvećeg broja tehničkih zadataka smatra se da je koordinatni sistem referencije vezan za Zemlju nepokretan, tj. smatra se da je to inercijalni koordinatni sistem. Samim tim zanemaruje se obrtanje Zemlje i njeno kretanje po putanji oko Sunca. Kako su vremenski intervali u zadacima u kojima se posmatra neko kretanje, obično mnogo manji od jedne godine, to se kretanje Zemlje po njenoj putanji, u tom vremenskom intervalu, zaista može smatrati ravnomernim i pravolinijskim. Zato se pretpostavka da je koordinatni sistem referencije koji je vezan za Zemlju, inercijalni, — odnosi u prvom redu na to da se obrtanje tog sistema zajedno sa Zemljom može zanemariti. Ovo obrtanje se vrši brzinom: 1 obrtaj za 23 časa 56 minuta i 4 sekunde, tj. sa ugaonom brzinom

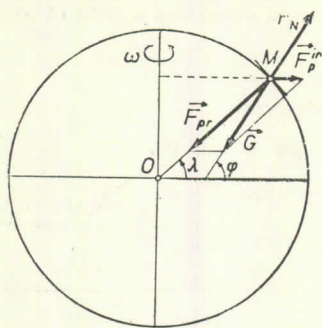
$$\omega = \frac{2\pi}{86\,164} \approx 0,000\,0729 \text{ s}^{-1}$$

Proučimo kako se odražava ovo po svom intenzitetu relativno malo obrtanje na ravnotežu i kretanje tela.

1. Relativna ravnoteža na površini Zemlje. Sila teže. Neka se materijalna tačka nalazi na glatkoj »horizontalnoj« ravni koja je nepokretna u odnosu na Zemlju (sl. 278). Uslov ravnoteže tačke u odnosu na Zemlju, saglasno jednačini (52), u ovom slučaju glasi $\vec{F}_{\text{pr}} + \vec{F}_N + \vec{F}_p^{\text{in}} = 0$, gde je $\vec{F}_{\text{pr}}$ — sila privlačenja Zemlje, $\vec{F}_N$ — reakcija ravni, $\vec{F}_p^{\text{in}}$ — prenosna sila inercije. Kako je

$\omega = \text{const}$, to sila $\vec{F}_p^{\text{in}}$ ima samo normalnu komponentu usmerenu normalno na obrtnu osu Zemlje. Složimo sile $\vec{F}_{pr}$ i $\vec{F}_p^{\text{in}}$ i uvedimo oznaku:

$$\vec{F}_{pr} + \vec{F}_p^{\text{in}} = \vec{G}.$$



Sl. 278

U tom slučaju na tačku M deluju samo dve sile $\vec{G}$ i $\vec{F}_N$, koje uravnotežuju jedna drugu. Sila $\vec{G}$ naziva se *sila teže (težina)* tačke M . Pravac sile $\vec{G}$ biće pravac vertikale u datoj tački na Zemljinoj površinu, a ravan koja je upravna na $\vec{G}$ biće horizontalna ravan. Po intenzitetu je $F_p^{\text{in}} = mr\omega^2$ (r – rastojanje tačke M od Zemljine ose), tako da je prenosna sila inercije vrlo mala prema F_{pr} , jer je veličina ω^2 vrlo mala. Iz tog razloga pravac sile $\vec{G}$ vrlo malo se razlikuje od pravca sile $\vec{F}_{pr}^*$.

Pri merenju tela određuje se sila $\vec{G}$, jer baš tom silom telo pritiskuje na tas kantara. Prema tome, uvođenjem sile teže $\vec{G}$ u jednačine ravnoteže, uvodi se u njih stvarno i sila $\vec{F}_p^{\text{in}}$, tj. stvarno se uzima u obzir uticaj obrtanja Zemlje.

2. Relativno kretanje u blizini Zemljine površine. Da bi se uzeo u obzir uticaj obrtanja koordinatnog sistema referencije koji je vezan za Zemlju, potrebno je da se silama koje deluju na tačku pridodaju i sile $\vec{F}_p^{\text{in}}$ i $\vec{F}_c^{\text{in}}$. Međutim, prenosna inercijalna sila $\vec{F}_p^{\text{in}}$ ulazi u silu teže $\vec{G}$ i uzima se u obzir uvođenjem sile teže u jednačinu kretanja. Prema tome, *kada se smatra da je koordinatni sistem referencije vezan za Zemlju nepokretan, tada se stvarno zanemaruje samo koriolisova inercijalna sila*

$$F_c^{\text{in}} = 2m\omega v \sin \alpha,$$

gde je ω – ugaona brzina obrtanja Zemlje, α – ugao između relativne brzine tačke v i Zemljine ose.

Kako je veličina ugaone brzine obrtanja Zemlje ω vrlo mala, to se za brzine malog intenziteta može koriolisova inercijalna sila F_c^{in} zanemariti prema veličini sile teže. Na primer, kada je $v = 700 \text{ m/s}$ (brzina običnog arterijskog zrna) i $\alpha = 90^\circ$, sila F_c^{in} iznosi samo oko 1% sile teže G . Prema tome, u najvećem broju inženjerskih proračuna pri proučavanju kretanja tela, sistem referencije vezan za Zemlju, može se smatrati inercijalnim (nepokretnim).

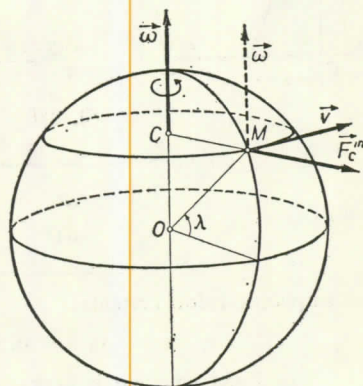
* Veličina prenosne inercijalne sile $\vec{F}_p^{\text{in}}$ najveća je na ekvatoru, gde je $r = R$. Tu njena veličina iznosi oko 0,34% sile privlačenja. Najveća razlika između uglova prikazanih na sl. 278, tj. između ugla λ (geocentrična širina) i ugla φ (astronomska širina) ima mesto za koje je $\lambda = 45^\circ$ i iznosi približno $11'$.

Uticaj obrtanja Zemlje ima praktičan značaj i treba da se uzme u obzir ili pri vrlo velikim brzinama kretanja tela (npr., let raketa velikog dometa), ili pak za vrlo duga kretanja (npr., tok reka, vazdušnih i morskih struja).

Proučimo kako se kvalitativno odražava uticaj obrtanja Zemlje na kretanje tela.

a) Kretanje po Zemljinoj površini. Pri kretanju tela po Zemljinom meridijanu na severnoj Zemljinoj polulopti od severa na jug koriolisovo ubrzanje $\vec{a}_c$ usmereno je na istok (§ 93, zadatak 88.), a koriolisova sila inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$ — na zapad. Pri kretanju tela od juga na sever, koriolisova sila inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$, biće, očevидno, usmerena na istok. U oba ova slučaja, kao što vidimo, ova sila skreće tačku udesno od pravca njenog kretanja.

Ako se tačka bude kretala po uporedniku na istok, onda će koriolisovo ubrzanje $\vec{a}_c$ biti usmereno duž poluprečnika MC uporednika (sl. 279), a koriolisova sila inercije u suprotnom smeru. Vertikalna komponenta ove sile (duž OM) unekoliko menja težinu tela, dok horizontalna komponenta usmerena na jug skreće tačku takođe udesno od pravca njenog kretanja. Do analognih rezultata dolazi se takođe i pri kretanju po uporedniku na zapad.



Sl. 279

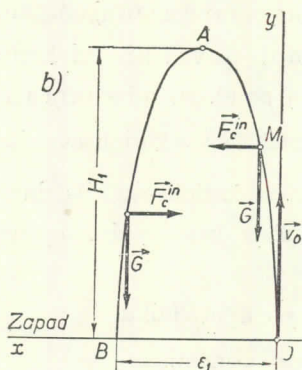
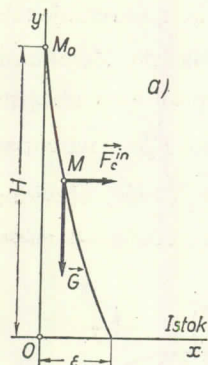
Odayde zaključujemo da će na severnoj Zemljinoj polulopti telo, koje se kreće u bilo kom smeru, usled Zemljinog obrtanja, skrenuti udesno od pravca svog kretanja. Na južnoj Zemljinoj polulopti telo će skrenuti ulevo.

Ovim se objašnjava činjenica da reke koje teku na severnoj Zemljinoj polulopti potkopavaju desnu obalu (zakon Bera). Iz ovog razloga nastaje i skretanje vetrova konstantnog pravca (pasati) i morskih struja.

b) Vertikalno padanje. Da bismo bili u stanju da odredimo pravac koriolisove sile inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$, koja deluje na slobodnu tačku koja pada, potrebno je da se zna pravac relativne brzine tačke $\vec{v}$. Kako je sila $\vec{F}_c^{\text{in}}$ vrlo mala prema sili teže, to se u prvom približenju može smatrati da vektor brzine ima pravac vertikale, tj. pravac duž prave MO (vidi sl. 279). Tada će vektor koriolisovog ubrzanja $\vec{a}_c$, kako se lako može videti, biti usmeren na zapad, a koriolisova sila inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$ na istok (tj. isto kao što je na sl. 279 usmeren vektor brzine $\vec{v}$). Prema tome, u prvom približenju može se smatrati da tačka (odnosno telo) koje slobodno pada skreće usled obrtanja Zemlje ka istoku. Telo izbačeno vertikalno u vis skreće, očevидno, pri svom dizanju ka zapadu. Veličine ovih skretanja su, međutim, vrlo male i treba ih uzeti u obzir samo pri vrlo velikim visinama padanja ili dizanja, što se vidi iz računa koje smo sprovedi u § 122.

§ 122*. Skretanje tačke koja pada usled obrtanja Zemlje

Neka materijalna tačka pada na Zemljinu površinu sa visine koja nije vrlo velika (u poređenju sa Zemljinim poluprečnikom). Smatraćemo da je sila teže $\vec{G}$ pri padanju konstantna, a



Sl. 280

otpor vazduha ćemo zanemariti. Usmerimo osu Oy vertikalno na više, a osu Ox ka istoku (sl. 280, a).^{*} Da bismo uzeli u obzir i obrtanje Zemlje, potrebno je osim sile $\vec{G}$ u kojoj je već uključena prenosna sila inercije $\vec{F}_p^{\text{in}}$, da se uzme u obzir i koriolisova sila inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$, koja je, kao što smo videli, u prvom približenju usmerena ka istoku. U tom slučaju diferencijalne jednačine relativnog kretanja imaju oblik:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_c^{\text{in}}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -G = -mg, \quad (55)$$

dok su početni uslovi kretanja:

$$\text{za } t = 0, x = 0, y = H; \quad v_x = \dot{x} = 0, v_y = \dot{y} = 0.$$

Kada izvršimo integriranje druge od jednačina (55) i kada odredimo integracione konstante prema početnim uslovima kretanja dobićemo:

$$v_y = \dot{y} = \frac{dy}{dt} = -gt; \quad y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

Pri izračunavanju intenziteta sile F_c^{in} zanemarićemo, kako smo već ranije i učinili, komponentu brzine v_x prema komponenti v_y (jer je koriolisova sila inercije F_c^{in} mnogo manja od težine G), i dajući približno rešenje, smatraćemo da je $v = |v_y| = gt$. Tada će brzina $\vec{v}$ biti usmerena po vertikali naniže (po pravoj MO na sl. 279) i zaklapaće sa obrtnom osom Zemlje ugao $\alpha = 90^\circ - \lambda$, gde je λ — geografska širina. Prema tome, $F_c^{\text{in}} = 2m\omega gt \cos \lambda$, tako da prva od jednačina (55) ima oblik:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 2(\omega g \cos \lambda)t.$$

Kako je veličina koja stoji u zagradi konstantna, to posle integriranja obe strane ove jednačine dolazimo do

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = (\omega g \cos \lambda)t^2 + C_1; \quad x = \frac{1}{3}(\omega g \cos \lambda)t^3 + C_1t + C_2.$$

Korišćenjem početnih uslova kretanja dobijamo da je $C_1 = C_2 = 0$. Prema tome, zakon relativnog kretanja tačke u prvom približenju ima oblik

$$x = \frac{1}{3}(\omega g \cos \lambda)t^3; \quad y = H - \frac{1}{2}gt^2.$$

^{*} Razmera na crtežu u pravcu ose Ox na sl. 280 mnogo je povećana.

Kao što se vidi, padanje tačke nije pravolinijsko, već tačka stvarno skreće ka istoku. Ako iz gornjih jednačina eliminišemo vreme t , dobićemo u prvom približenju putanju tačke (semikubnu parabolu)

$$x^2 = \frac{8}{9} \frac{\omega^2}{g} \cos^2 \lambda (H - y)^3.$$

Ako u ovu jednačinu stavimo $y = 0$, odredićemo skretanje ε prema istoku koje izvrši tačka u trenutku kada bude pala na Zemljinu površinu:*

$$\varepsilon = \frac{2}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2H^3}{g}}. \quad (56)$$

Kao što se vidi, skretanje ε proporcionalno je ugaonoj brzini obrtanja Zemlje ω , pa je, prema tome, to mala veličina. Na primer, na geografskoj širini Moskve ($\lambda = 55^\circ 47'$, $g = 9,816 \text{ m/s}^2$) pri padanju sa visine $H = 100 \text{ m}$, to skretanje iznosi $\varepsilon = 1,2 \text{ cm}$.

Čitav niz eksperimenata, koje su na različitim tačkama na Zemlji izvršili mnogi istraživači, potvrdili su tačnost rezultata, koje daje formula (56).

Razmotrimo kretanje tačke koja je iz tačke O izbačena vertikalno u vis početnom brzinom $\vec{v}_0$. Koriolisova sila inercije $\vec{F}_c^{\text{in}}$ u prvom približenju je usmerena na zapad. Tada će, ako osu Ox usmerimo takode na zapad (sl. 280, b), diferencijalne jednačine kretanja zadržati oblik (55), dok će početni uslovi kretanja biti za $t = 0$, $\dot{x} = \dot{y} = 0$; $x = y = 0$.

Pri ovim uslovima druga od jednačina (55) daje

$$v_y = \dot{y} = v_0 - gt; \quad y = v_0 t - \frac{1}{2} gt^2. \quad (57)$$

Tada, smatrajući kao i u prethodnom zadatku da je približno $v = v_y = \dot{y}$ dobijamo $F_c^{\text{in}} = 2m\omega(v_0 - gt) \cos \lambda$, tako da prva od jednačina (55) ima sada oblik

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = 2(\omega \cos \lambda)(v_0 - gt).$$

Ova jednačina definiše kretanje tačke i pri njenom padanju vertikalno naniže, pošto se promena pravca vektora $\vec{F}_c^{\text{in}}$, koja tom prilikom nastaje, poništava promenom znaka množitelja $(v_0 - gt) = \dot{y}$.

Posle integriranja dobijene jednačine pri datim početnim uslovima kretanja, dolazimo do

$$x = \omega \cos \lambda \left(v_0 t^2 - \frac{1}{3} gt^3 \right). \quad (58)$$

* Pri određivanju intenziteta i pravca sile $\vec{F}_c^{\text{in}}$ u prvom približenju zanemarili smo komponentu brzine usmerenu na istok $v_x = \dot{x}$. Usled postojanja ove brzine sila $\vec{F}_c^{\text{in}}$ ima dopunsku komponentu, koja izaziva skretanje tačke ka jugu. Kako je $x = \frac{1}{3} (\omega g \cos \lambda) t^3$, to je brzina $v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt}$ proporcionalna ugaonoj brzini obrtanja Zemlje ω , dok je skretanje prema jugu proporcionalno ω^2 , tj. ono je mala veličina drugog reda.

Ako u jednačinu (57) stavimo $y = 0$, odredićemo vreme kretanja tačke do trenutka kada ona padne na Zemlju: $t_1 = 2 \frac{v_0}{g}$. Uzimajući u obzir istovremeno da je $v_0 = \sqrt{2gH_1}$, gde je H_1 — visina sa koje tačka pada, odredićemo, iz jednačine (58), skretanje tačke ka zapadu u trenutku padanja na Zemlju

$$\overline{OB} = \varepsilon_1 = \frac{4}{3} \omega \cos \lambda \frac{v_0^3}{g^2} = \frac{8}{3} \omega \cos \lambda \sqrt{\frac{2H_1^3}{g}}. \quad (59)$$

Iz formula (56) i (59) se vidi, da je pri $H_1 = H$ skretanje $\varepsilon_1 = 4\varepsilon$.

Kad bi kretanje tačke moglo da se produži dalje (tj. ako tačka O iz koje se tačka izbacuje, ne bi bila na površini Zemlje), u tom slučaju bi putanja tačke, počev od tačke B , skretala celo vreme ka istoku.

Svi ovi računi odnose se, kao što je već bilo napomenuto, na kretanje u bezvazдушnom prostoru i uzimaju u obzir uticaj obrtanja Zemlje samo u prvom približenju.

Glava XXI

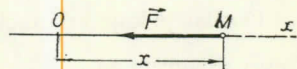
OSCILATORNO KRETANJE TAČKE

§ 123. Slobodne harmonijske oscilacije

Teorija oscilacija predstavlja osnovu čitavog niza oblasti u fizici i tehnici. Iako su oscilacije koje se proučavaju u različitim oblastima (npr. u mehanici, radiotehnici, akustici i dr.), različite fizičke prirode, ipak osnovni zakoni kojima se one pokoravaju ostaju svuda isti. Iz tog razloga, proučavanje mehaničkih oscilacija važno je ne samo zbog toga što te oscilacije zauzimaju vrlo važno mesto u tehnici, već i zbog toga što rezultati koji se na taj način dobijaju mogu vrlo korisno da se upotrebe pri proučavanju svih drugih oscilatornih pojava u drugim oblastima.

Započnimo naša razmatranja sa proučavanjem slobodnih harmonijskih oscilacija materijalne tačke. Neka se tačka M kreće pravolinijski pod uticajem *restitucione sile* (*sile uspostavljanja — elastične sile*) $\vec{F}$ usmerene ka nepomičnom centru O , koja je srazmerna rastojanju tačke od tog centra. Projekcija ove sile na osu Ox (sl. 281) biće:

$$\boxed{X = -cx.} \quad (60)$$



Sl. 281

Sila $\vec{F}$, kao što vidimo, teži da vrati tačku u položaj ravnoteže O , u kome je $F = 0$; iz tog razloga se ova sila i zove sila uspostavljanja — restituciona sila. Ovakva je, npr., elastična sila u opruzi (§ 113, sl. 255) ili pak sila privlačenja u zadatku 99. (str. 225).

Odredimo zakon kretanja tačke M . Postavljajući diferencijalnu jednačinu kretanja (6), dobićemo

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = m\ddot{x} = -cx.$$

Ako obe strane ove jednačine podelimo sa m i ako uvedemo oznaku

$$\boxed{\omega^2 = \frac{c}{m}} \quad (61)$$

diferencijalna jednačina kretanja biće

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0. \quad (62)$$

Jednačina (62) zove se *diferencijalna jednačina slobodnih harmonijskih oscilacija*. Iz teorije diferencijalnih jednačina poznato je da rešenje ove jednačine ima oblik

$$x = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t, \quad (63)$$

gde su C_1 i C_2 proizvoljne integracione konstante.

Ako umesto konstanti C_1 i C_2 uvedemo nove konstante R i α , ali takve, da su sa starim konstantama vezane odnosima

$$C_1 = R \cos \alpha, \quad C_2 = R \sin \alpha,$$

dobićemo $x = R(\sin \omega t \cos \alpha + \cos \omega t \sin \alpha)$ odnosno

$$x = R \sin(\omega t + \alpha). \quad (64)$$

Ovo je drugi oblik rešenja jednačine (62), u kome se kao integracione konstante pojavljuju veličine R i α . Ove su konstante daleko pogodnije za opšta razmatranja i razne analize. Da jednačina (64) zaista predstavlja rešenje jednačine (62), možemo se neposredno uveriti kada smerimo izraz (64) u jednačinu (62).

Brzina tačke pri posmatranom kretanju je:

$$v_x = \dot{x} = \frac{dx}{dt} = R\omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (65)$$

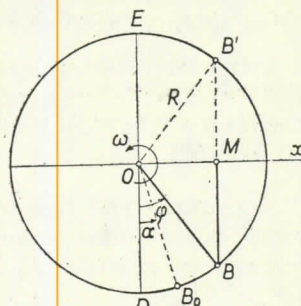
Oscilacije koje vrši tačka po zakonu (64) zovu se *slobodne harmonijske oscilacije*.

Njihov dijagram za $\alpha = \frac{\pi}{2}$ pokazan je na sl. 138, c.

Svim karakteristikama ovog kretanja možemo da damo i preglednu kinematičku interpretaciju. Razmotrimo kretanje tačke B , koja se kreće ravnomerno po krugu poluprečnika R polazeći iz položaja B_0 , pri čemu je njen položaj određen tada uglom $DOB_0 = \alpha$ (sl. 282). Neka konstantna ugaona brzina obrtanja prečnika OB bude ω . Tada će u proizvoljnom trenutku vremena t biti $\varphi = \sphericalangle DOB = \alpha + \omega t$ i lako je videti da se projekcija M tačke B na prečnik, upravnom na DE , kreće po zakonu $x = R \sin(\omega t + \alpha)$, gde je $x = \overline{OM}$, tj. ova projekcija vrši slobodnu harmonijsku oscilaciju.

Veličina R , koja je jednaka najvećem udaljenju tačke M od centra oscilovanja, zove se *amplituda oscilacija*. Veličina $\varphi = \omega t + \alpha$ zove se *faza oscilacija*. Faza φ , za razliku od koordinate x , određuje ne samo položaj tačke u datom trenutku, već

i smer kretanja pri oscilovanju; npr., iz položaja M pri fazi jednakoj φ , tačka se kreće udesno; a pri fazi jednakoj $(\pi - \varphi)$, ona se kreće ulevo. Faze, koje se razlikuju sa 2π , smatraju se jednakim (na sl. 138, c, kružnicima su prikazane tačke koje su u fazi, tj. koje imaju istu fazu). Veličina α određuje fazu početka oscilovanja (*početna faza*). Npr., kada je $\alpha = 0$, oscilacije se vrše po zakonu sinusa (počinju iz centra O brzinom koja je usmerena udesno), a pri fazi $\alpha = \frac{\pi}{2}$ — po zakonu kosinusa (počinjući kretanje iz položaja $x = R$ brzinom $v_0 = 0$). Veličina ω , koja određuje brzinu raščćenja ugla φ , zove se *ugaona* ili *kružna frekvencija oscilacija*.



Sl. 282

Vremenski interval T (ili τ), za koji tačka izvrši jednu punu oscilaciju, tj. za koji ponovo dođe u istu fazu, naziva se *period oscilacija* (*oscilovanja*). Po isteku jednog perioda faza se promeni za 2π . Prema tome, mora biti $\omega T = 2\pi$, pa je period

$$T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (66)$$

Veličina f jednaka recipročnoj vrednosti perioda, koja predstavlja broj oscilacija koji se izvrši u jednoj sekundi, zove se *frekvencija oscilacija*

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \quad (67)$$

Oдавде se vidi da se veličina ω razlikuje od veličine f samo za konstantni množitelj 2π . U daljim izlaganjima, radi kratkoće, pod frekvencijom oscilacija podrazumevaćemo veličinu ω .

Veličine R i α određuju se prema početnim uslovima kretanja. Smatrajući da je za $t = 0$, $x = x_0$ i $v_x = \dot{x} = \dot{x}_0$, iz (64) i (65) dobićemo da je $x_0 = R \sin \alpha$ i $\frac{\dot{x}_0}{\omega} = R \cos \alpha$. Oдавде, ako ove dve jednačine dignemo na kvadrat, i ako ih zatim saberemo, dobićemo

$$R = \sqrt{x_0^2 + \frac{\dot{x}_0^2}{\omega^2}}. \quad (68)$$

Međutim, deljenjem prve jednačine drugom dolazimo do izraza koji određuje početnu fazu

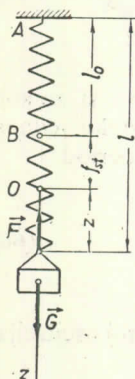
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega x_0}{\dot{x}_0}. \quad (68')$$

Primitimo da slobodne harmonijske oscilacije imaju sledeća svojstva: 1) amplituda i početna faza oscilacija *zavise* od početnih uslova kretanja;

2) frekvencija ω i period oscilacija T ne zavise od početnih uslova kretanja [vidi jednačine (61) i (66)] i predstavljaju nepromenljive karakteristike (fizičke konstante) datog sistema koji osciluje.

Oдавде proizlazi: ako u nekom zadatku treba odrediti samo period (odnosno frekvenciju) oscilacija, onda u tom slučaju treba postaviti diferencijalnu jednačinu u obliku (62). Posle toga period T može se naći po formuli (66) bez ikakvog integriranja.

Zadatak 118. Teret težine G obešen o kraj B vertikalne opruge AB pusti se bez početne brzine. Odrediti zakon oscilovanja tereta, ako se u položaju ravnoteže pod njegovim dejstvom opruga izduži za veličinu f_{st} (tzv. »statičko izduženje opruge«). Masu opruge zanemariti.



Sl. 283

Rešenje. Postavimo koordinatni početak O u položaj statičke ravnoteže tereta i usmerimo osu Oz vertikalno naniže (sl. 283). Elastična sila u opruzi je $F = c|Al|$. U našem slučaju biće $Al = f_{st} + z$. Prema tome,

$$Z = -c(f_{st} + z).$$

Postavljanjem diferencijalne jednačine kretanja dobijamo:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = m\ddot{z} = -c(f_{st} + z) + G.$$

Međutim, prema uslovima zadatka je $G = mg = cf_{st}$ (u položaju ravnoteže sila teže G uravnotežena je elastičnom silom cf_{st}). Ako uvedemo

oznaku $\frac{c}{m} = \frac{g}{f_{st}} = \omega^2$ svešćemo gornju jednačinu na oblik

$$\ddot{z} + \omega^2 z = 0.$$

Oдавде nalazimo da je period oscilacija tereta

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}}. \quad (a)$$

Prema tome, period oscilacija proporcionalan je kvadratnom korenu iz statičkog izduženja opruge (ovaj rezultat važi i u slučaju kada teret osciluje na elastičnoj gredi ako je f_{st} — statički ugib grede).

Rešenje dobijene diferencijalne jednačine ima oblik

$$z = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t.$$

Prema početnim uslovima kretanja: za $t = 0$, $z = -f_{st}$, $v_z = \dot{z} = 0$. Kako je

$$v_z = \dot{z} = \frac{dz}{dt} = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t,$$

to, kada smenimo početne uslove kretanja, dobićemo da je: $C_2 = -f_{st}$, $C_1 = 0$. Prema tome, oscilacije se vrše sa amplitudom f_{st} , po zakonu

$$z = -f_{st} \cos \omega t.$$

Oдавде se vidi da najveće izduženje opruge pri oscilovanju iznosi $2f_{st}$. Ovaj isti rezultat dobijen je takođe drugim putem u zadatku 107., gde je ulogu opruge igrala greda.

Dobijeno rešenje pokazuje da konstantna sila $\vec{G}$ ne menja karakter oscilacija, koje nastaju dejstvom elastične sile $\vec{F}$, već samo pomera centar ovih oscilacija u smeru dejstva sile za veličinu f_{st} (kad ne bi delovala sila $\vec{G}$ oscilovanje bi se očigledno vršilo oko centra B).

Zadatak 119. Odrediti period oscilacija tereta G obešenog o dve opruge čije su krutosti c_1 i c_2 , a za slučajeve koji su prikazani na sl. 284, a i b.

Rešenje. a) U prvom slučaju svaka od opruga u položaju statičke ravnoteže rasteže se silom G . Prema tome, statička izduženja opruge biće $f_{1st} = \frac{G}{c_1}$, $f_{2st} = \frac{G}{c_2}$. Tada je izduženje opruge koja je po elastičnim svojstvima ekvivalentna ovim oprugama

$$f_{st} = f_{1st} + f_{2st} = \frac{G(c_1 + c_2)}{c_1 c_2},$$

tako da je

$$c_{ekv} = \frac{c_1 c_2}{c_1 + c_2},$$

gde je c_{ekv} — krutost ekvivalentne opruge, koja može da zameni date dve opruge. U posebnom slučaju, kada je $c_1 = c_2 = c$ dobićemo $c_{ekv} = \frac{1}{2} c$.

Period oscilacija, prema formuli (a) iz zadatka 118, biće

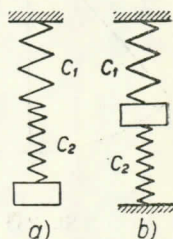
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{G}{g} \frac{c_1 + c_2}{c_1 c_2}}.$$

b) U drugom slučaju gornja opruga se rasteže nekom silom G_1 , dok se donja sabija silom G_2 , pri čemu je $G_1 + G_2 = G$. U ovom slučaju za ove dve opruge je $f_{1st} = G_1/c_1$, $f_{2st} = G_2/c_2$. Međutim, $f_{1st} = f_{2st} = f_{st}$, tako da će, uzimajući u obzir svojstva proporcija, biti

$$f_{st} = \frac{G_1}{c_1} = \frac{G_2}{c_2} = \frac{G_1 + G_2}{c_1 + c_2}, \text{ odnosno } f_{st} = \frac{G}{c_1 + c_2}.$$

Zato je ovde $c_{ekv} = c_1 + c_2$, a period oscilacija

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}} = \sqrt{\frac{G}{g(c_1 + c_2)}}.$$



Sl. 284

§ 124. Matematičko klatno

Matematičkim klatnom naziva se teret malih dimenzija obešen o neistegljiv konac, čija se težina može zanemariti, koji vrši oscilovanje u vertikalnoj ravni. Sam teret, ako zanemarimo njegove dimenzije u poređenju sa dužinom l konca, možemo posmatrati kao materijalnu tačku. Ova tačka vrši prinudno kretanje po luku kruga poluprečnika l . Ako usvojimo tačku O za početak prema kome ćemo određivati položaj tačke (tereta) i luk $s = \widehat{OM}$ za krivolinijsku koordinatu (ili pak ugao φ), onda se teret u proizvoljnom trenutku vremena može prikazati tačkom M (sl. 285); osu MT usmerimo u smeru pozitivnog računanja koordinate s .

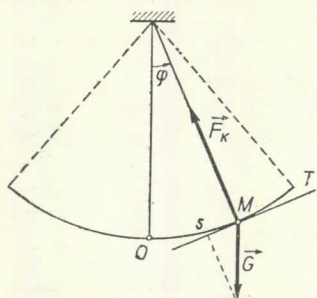
Kada postavimo diferencijalnu jednačinu kretanja (47) (vidi § 117), dobićemo

$$m \frac{d^2 s}{dt^2} = -G \sin \varphi.$$

Uvedimo dalje umesto s ugao φ kao koordinatu preko koje ćemo određivati položaj tačke M . Tada je $s = l\varphi$ i ako skratimo prethodnu jednačinu sa m biće

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0. \quad (69)$$

Dobijena diferencijalna jednačina ne može se integrirati pomoću elementarnih funkcija. Međutim, ako se ograničimo samo na *male oscilacije*, onda se može



Sl. 285

staviti da je $\sin \varphi \approx \varphi$ (ovo se može uvek pretpostaviti ako je ugao φ mnogo manji od jednog radijana). Tada jednačina (69) postaje

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0, \quad (70)$$

pri čemu je sa ω^2 označen odnos g/l .

Oдавде zaključujemo da pri malim skretanjima od vertikale matematičko klatno vrši harmonijske oscilacije. Rešenje jednačine (70) može se predstaviti i u obliku (63), ako umesto x , stavimo ugao φ . Pretpostavljajući da je $\varphi = \varphi_0$ i $\dot{\varphi}_0 = 0$, za $t = 0$, pošto odredimo integracione konstante, doćićemo do zakona kretanja matematičkog klatna u obliku

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega t.$$

Period malih oscilacija klatna je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (71)$$

Kao što vidimo, veličina T ne zavisi od početnog ugla skretanja.

Ovakav zaključak ima mesta samo u slučaju ako je mali početni ugao φ_0 . Međutim, ako pri integriranju jednačine (69) ne budemo smatrali da je ugao φ mali, onda bi se ispostavilo da period T zavisi od φ_0 .

Približan izraz za period oscilacija u tom slučaju glasi

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{16} \varphi_0^2 \right) \quad (72)$$

Oдавде se vidi da pri $\varphi_0 = 0,4$ radijana (oko 23°) formula (71) određuje period oscilacija sa tačnošću do 1%.

§ 125*. Prigušene oscilacije

Proučimo kako utiče na oscilacije otpor sredine, pretpostavljajući da je sila otpora proporcionalna prvom stepenu brzine: $\vec{F}_w = -b\vec{v}$ (znak $-$ pokazuje da je otpor usmeren nasuprot brzini). Neka na tačku deluje restituciona sila $\vec{F}$ i sila otpora $\vec{F}_w$ (sl. 286). Tada je $X = -cx$; $F_{wx} = -b\dot{x} = -b \frac{dx}{dt}$ i diferen

cijalna jednačina kretanja glasi

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - b \frac{dx}{dt}.$$

Ako podelimo obe strane ove jednačine sa m dobićemo:

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (73)$$

gde smo označili

$$\omega^2 = \frac{c}{m}, \quad 2\delta = \frac{b}{m}. \quad (74)$$

Lako se možemo uveriti da veličine ω i δ imaju istu dimenziju (1/s) što omogućuje da ove dve veličine mogu da se upoređuju jedna prema drugoj.

Jednačina (73) zove se *diferencijalna jednačina prigušenih oscilacija*. Rešenje jednačine (73) može

se odrediti ako pređemo na novu promenljivu z , prema formuli $x = ze^{-\delta t}$. Tada je

$$\frac{dx}{dt} = e^{-\delta t} \left(\frac{dz}{dt} - \delta z \right); \quad \frac{d^2 x}{dt^2} = e^{-\delta t} \left(\frac{d^2 z}{dt^2} - 2\delta \frac{dz}{dt} + \delta^2 z \right).$$

Kada smenimo ove izraze i veličinu x u jednačinu (73), posle skraćivanja, dobijamo:

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + (\omega^2 - \delta^2) z = 0. \quad (75)$$

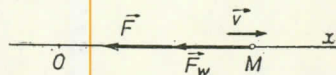
Proučimo slučaj kada je $\omega > \delta$, tj. kada je otpor mali u poređenju sa restitucionom silom. Uvedimo oznaku

$$\tilde{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \delta^2}. \quad (76)$$

Sada vidimo da se jednačina (75) poklapa sa jednačinom (62). Prema tome, biće $z = R_1 \sin(\tilde{\omega} t + \alpha_1)$, ili, prelazeći na x

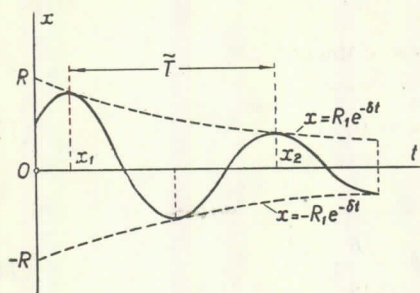
$$x = R_1 e^{-\delta t} \sin(\tilde{\omega} t + \alpha_1). \quad (77)$$

Izraz (77) predstavlja rešenje diferencijalne jednačine (73). Veličine R_1 i α_1 koje ulaze u prethodni izraz, predstavljaju integracione konstante i određuju se na osnovu početnih uslova kretanja.



Sl. 286

Oscilacije koje se vrše po zakonu (77), zovu se *prigušene oscilacije*, jer se blagodareći koeficijentu prigušenja $e^{-\delta t}$ veličina x brzo smanjuje i teži nuli. Dijagram ovih oscilacija prikazan je na sl. 287



Sl. 287

(dijagram je nacrtan između krivih $x = R_1 e^{-\delta t}$ i $x = -R_1 e^{-\delta t}$, jer $\sin(\tilde{\omega}t + \alpha)$ po intenzitetu ne može da bude veće od jedinice). Iz dijagrama se vidi da ove oscilacije nisu periodične. Međutim, one imaju svojstvo izvesnog ponavljanja. Npr., trenutak kada tačka, krećući se udesno (ili ulevo), prolazi kroz centar oscilovanja ($x = 0$), periodički se ponavlja posle vremenskog

intervala $\tilde{T}$ koji je jednak periodu funkcije $\sin(\tilde{\omega}t + \alpha)$. Iz tog razloga veličina

$$\tilde{T} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - \delta^2}}, \quad (78)$$

uslovno se zove *period prigušenih oscilacija*. Ako uporedimo formule (78) i (66), vidimo da je $\tilde{T} > T$, tj. vidimo da otpor unekoliko povećava period oscilovanja. Međutim, kad je otpor vrlo mali ($\delta \ll \omega$), onda veličina δ^2 može da se zanemari prema veličini ω^2 , tako da se može smatrati da je $\tilde{T} \approx T$. Prema tome, mali otpor praktično ne utiče na period.

Vremenski interval između dvaju uzastopnih ponavljanja najvećih amplituda, pri kretanju udesno, ili ulevo, takođe je jednak $\tilde{T}$.* Prema tome, ako se prvo maksimalno udaljenje pri kretanju udesno dešava u trenutku t_1 , onda će drugo maksimalno udaljenje x_2 , pri kretanju udesno, biti u trenutku $t_2 = t_1 + \tilde{T}$, itd. Tada, po formuli (77), imajući u vidu da je $\omega\tilde{T} = 2\pi$, dobijamo

$$x_1 = R_1 e^{-\delta t_1} \sin(\tilde{\omega}t_1 + \alpha_1),$$

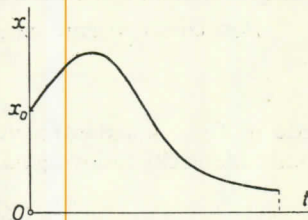
$$x_2 = R_1 e^{-\delta(t_1 + \tilde{T})} \sin(\tilde{\omega}t_1 + \tilde{\omega}\tilde{T} + \alpha_1) = x_1 e^{-\delta\tilde{T}}$$

* Trenutke vremena kada x dostiže svoj maksimum, odnosno minimum, nalazimo iz jednačine $\frac{dx}{dt} = R_1 e^{-\delta t} [\tilde{\omega} \cos(\tilde{\omega}t + \alpha) - \delta \sin(\tilde{\omega}t + \alpha)] = 0$. Ako izraz u zagradi postaje nula pri nekom $t = t_1$, onda će on, očevидno, biti nula i u trenucima $t_1 + \tilde{T}$, $t_1 + 2\tilde{T}$, itd.

Analogno za bilo koje udaljenje x_{n+1} , biće $x_{n+1} = x_n e^{-\delta T}$. Na taj način, kao što vidimo, amplitude oscilacija smanjuju se u geometrijskoj progresiji. Količnik ove geometrijske progresije $e^{-\delta T}$ zove se *dekrement oscilacija*, a njegov logaritam tj. veličina δT — *logaritamski dekrement*.

Iz svih dobijenih rezultata proizlazi da mali otpor skoro ne utiče na period oscilovanja; međutim, otpor utiče na amplitude oscilacija i smanjuje ih u geometrijskoj progresiji.

U slučaju vrlo velikog otpora, kada je $\delta > \omega$, rešenje jednačine (75) ne sadrži trigonometrijske funkcije. Kretanje tačke u tom slučaju neće biti oscilatorno i ona će se pod uticajem restitucione sile postepeno približavati položaju ravnoteže. Dijagram kretanja u tom slučaju (ako je za $t = 0$; $x = x_0$; $v_0 = x_0 > 0$) ima oblik koji je pokazan na sl. 288.



Sl. 288

§ 126. Prinudne oscilacije. Rezonanca

Proučimo vrlo važan slučaj oscilacija, koje nastaju kada na tačku osim restitucione sile $\vec{F}$ deluje, takođe, i periodična sila $\vec{F}_\Omega$, koja zavisi od vremena, a čija je projekcija na osu Ox

$$F_\Omega = F_0 \sin \Omega t. \quad (79)$$

Ovakva sila se zove *poremećajna* ili *perturbaciona sila*, a oscilacije koje nastaju pod dejstvom ovakve sile zovu se *prinudne oscilacije*. Veličina Ω u jednačini (79) zove se *frekvencija poremećajne sile*.

Poremećajna sila može da bude i sila koja se u toku vremena menja po drugom nekom zakonu. Ograničićemo se samo na slučaj kada poremećajna sila ima oblik dat obrascem (79). Takva poremećajna sila zove se *harmonijska poremećajna sila*. Konkretna primer za ovu silu imamo u zadatku 120.

1. Prinudne oscilacije bez otporne sile.* Proučimo kretanje tačke, na koju, osim restitucione sile $\vec{F}$ (vidi sl. 281) deluje, takođe, i poremećajna sila $\vec{F}_\Omega$. Diferencijalna jednačina kretanja u ovom slučaju je

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx + F_0 \sin \Omega t.$$

Kada obe strane ove jednačine podelimo sa m , i ako uvedemo oznaku $h = F_0/m$, a takođe usvojimo i oznake (61), onda ova jednačina postaje

$$\ddot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t. \quad (80)$$

* Rezultati do kojih se dolazi u ovom N° mogu se dobiti kao poseban slučaj oscilacija koje se razmatraju u N° 2.

Jednačina (80) zove se *diferencijalna jednačina prinudnih oscilacija bez otporne sile*. Rešenje ove jednačine, kao što je poznato iz teorije diferencijalnih jednačina, biće $x = x_1 + x_2$, gde je x_1 — opšti integral homogene jednačine, tj. rešenje diferencijalne jednačine (62), koje je dato u obliku (64), dok je x_2 — partikularni integral nehomogene diferencijalne jednačine (80).

Potražimo rešenje za x_2 , uz pretpostavku da je $\Omega \neq \omega$, u obliku

$$x_2 = C \sin \Omega t,$$

gde je C — konstantna veličina, koja treba da se izabere tako da jednačina (80) bude identički zadovoljena. Ako izraz za x_2 unesemo u jednačinu (80), dobićemo:

$$-C\Omega^2 \sin \Omega t + C\omega^2 \sin \Omega t = h \sin \Omega t.$$

Ova jednačina biće zadovoljena za svako t , ako je $C(\omega^2 - \Omega^2) = h$, ili

$$C = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2}.$$

Prema tome, partikularni integral nehomogene jednačine je:

$$x_2 = \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t. \quad (81)$$

S obzirom da je $x = x_1 + x_2$, i kako je rešenje za x_1 dato izrazom (64), to opšte rešenje jednačine (80) ima oblik

$$x = R \sin(\omega t + \alpha) + \frac{h}{\omega^2 - \Omega^2} \sin \Omega t, \quad (82)$$

gde su R i α — integracione konstante, koje se određuju na osnovu početnih uslova kretanja.

Rešenje (82) pokazuje da se oscilacije tačke sastoje iz dva dela:

- 1) iz oscilacija koje se vrše sa amplitudom R (koja zavisi od početnih uslova kretanja) i frekvencijom ω ; ove se oscilacije zovu *sopstvene oscilacije*, i
- 2) iz oscilacija koje se vrše sa amplitudom C (koja ne zavisi od početnih uslova kretanja) i frekvencijom Ω ; ove se oscilacije zovu *prinudne oscilacije*.

Praktično, blagodareći tome što se uvek u većoj ili manjoj meri pojavljuju izvesni otpori, sopstvene oscilacije se vrlo brzo amortizuju. Iz tog razloga, primarni značaj pri proučavanju ovih oscilacija imaju prinudne oscilacije koje su određene izrazom (81).

Frekvencija Ω prinudnih oscilacija, kako se vidi, ista je kao i frekvencija poremećajne sile. Amplituda ovih oscilacija je

$$C = \frac{h}{|\omega^2 - \Omega^2|} = \frac{f_{st}}{\left|1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2\right|} \quad (83)$$

gde je $f_{st} = \frac{h}{\omega^2} = \frac{F_0}{c}$ — veličina statičkog pomeranja tačke pod dejstvom sile F_0 .

Kao što se vidi, amplituda C zavisi od odnosa frekvencije prinudnih oscilacija Ω i frekvencije sopstvenih oscilacija ω . Dijagram ove zavisnosti pokazan je na sl. 290, a krivom označenom sa $\psi = 0$, dok ostale krive važe za slučaj kada postoji otpor. (One daju zavisnost amplitude C od odnosa Ω/ω kada postoji otpor).

I dijagrama [ili pak iz formule (83)] se vidi da biranjem različitih odnosa između veličina Ω i ω možemo dobiti prinudne oscilacije sa različitim amplitudama. Kada je $\Omega = 0$ (ili $\Omega \ll \omega$) amplituda je jednaka f_{st} (ili pak bliska toj veličini). Kada je $\Omega = \omega$ (kada je frekvencija prinudnih oscilacija jednaka frekvenciji sopstvenih oscilacija), nastaje pojava koja se zove *rezonanca*. Amplituda prinudnih oscilacija pri rezonanci neograničeno raste; proces tog rašćenja pokazan je na sl. 291. Najzad, kada je $\Omega \gg \omega$ amplituda C je bliska nuli ($C \rightarrow 0$) (oscilacije u ovom slučaju praktično ne postoje).

Primitimo, takođe, da se faze prinudnih oscilacija i poremećajne sile poklapaju za sve vreme kada je $\Omega < \omega$ (obe su jednake Ωt), što se vidi iz formula (79) i (81). Ako je pak $\Omega > \omega$ onda, unoseći minus iza znaka sinusa, možemo jednačinu (81) predstaviti u obliku

$$x_2 = \frac{h}{\Omega^2 - \omega^2} \sin(\Omega t - \pi).$$

Prema tome, kada je $\Omega > \omega$ postoji fazna razlika između prinudnih oscilacija i poremećajne sile za π . Ovo znači, da kada prinudna sila F_0 ima svoju maksimalnu veličinu i kada je usmerena udesno, tačka koja osciluje nalazi se na svom maksimalnom udaljenju ulevo, itd.

Podrobnija opšta svojstva prinudnih oscilacija (a naročito slučaj rezonance) razmotrena su na kraju ovog paragrafa (№ 4).

2.* Prinudne oscilacije sa otpornom silom Proučimo kretanje tačke na koju deluju: restitucionalna sila $\vec{F}$, sila otpora $\vec{F}_w$, proporcionalna prvom stepenu brzine (vidi § 125) i poremećajna sila $\vec{F}_0$. Diferencijalna jednačina kretanja u ovom slučaju biće

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -cx - b \frac{dx}{dt} + F_0 \sin \Omega t.$$

Kada obe strane ove jednačine podelimo sa m i kada stavimo $h = F_0/m$ i usvojimo oznake (74), dobićemo:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega^2 x = h \sin \Omega t. \quad (84)$$

Diferencijalna jednačina (84) predstavlja *diferencijalnu jednačinu prinudnih oscilacija sa otpornom silom*. Opšte rešenje ove jednačine, kao što je poznato, ima oblik $x = x_1 + x_2$, gde je x_1 — opšti integral homogene jednačine [koja ima oblik (73)], a njeno rešenje, za slučaj $\omega > \delta$ oblik (77); x_2 je partikularni integral nehomogene jednačine (84). Rešenje za x_2 potražimo u obliku

$$x_2 = C_1 \sin(\Omega t - \beta),$$

gde su C_1 i β konstante, koje treba izabrati tako da jednačina (84) bude identički zadovoljena. Diferenciranjem gornjeg izraza dobijamo

$$\frac{dx_2}{dt} = C_1 \Omega \cos(\Omega t - \beta); \quad \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -C_1 \Omega^2 \sin(\Omega t - \beta).$$

Kada ove vrednosti za izvode i veličinu x_2 smenimo u levu stranu jednačine (84) i kada radi kratkoće označimo sa $\psi = \Omega t - \beta$ (ili $\Omega t = \psi + \beta$) dobijamo

$$C_1(-\Omega^2 + \omega^2) \sin \psi + 2\delta\Omega C_1 \cos \psi = h(\cos \beta \sin \psi + \sin \beta \cos \psi).$$

Da bi ova jednačina bila zadovoljena pri bilo kom ψ , tj. za bilo koji trenutak vremena, koeficijenti uz $\sin \psi$ i $\cos \psi$ na levoj i na desnoj strani ove jednačine, moraju da budu jednaki jedan drugom; prema tome, biće.

$$C_1(\omega^2 - \Omega^2) = h \cos \beta; \quad 2\delta\Omega C_1 = h \sin \beta.$$

Ako ove jednačine dignemo na kvadrat i ako ih zatim saberemo, dobićemo

$$C_1 = \frac{h}{\sqrt{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} \quad (85, a)$$

Slično tome, ako ove jednačine podelimo (i to drugu prvom) biće

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2\delta\Omega}{\omega^2 - \Omega^2}. \quad (85, b)$$

Kako je $x = x_1 + x_2$, i s obzirom da je x_1 određeno izrazom (77), to ćemo rešenje jednačine (84) dobiti u obliku

$$x = R_1 e^{-\delta t} \sin(\tilde{\omega} t + \alpha_1) + C_1 \sin(\Omega t - \beta). \quad (86)$$

Ovde su R_1 i α_1 integracione konstante, koje određujemo na osnovu početnih uslova kretanja, dok su veličine C_1 i β određene formulama (85,a) i (85,b) i one ne zavise od početnih uslova kretanja.

Dobivene oscilacije su složene i sastoje se iz *sopstvenih oscilacija* [prvi član u jednačini (86); sl. 289,a] i *prinudnih oscilacija* [drugi član u jednačini (86); sl. 289,b]. Sopstvene oscilacije za ovaj slučaj bile su iscrpno proučene u § 125. Kako smo tom prilikom utvrdili, ove se oscilacije vrlo brzo gube — gase i po isteku nekog vremenskog intervala t_u , koji ćemo nazvati *vreme ustaljivanja*, ove oscilacije mogu se zanemariti.*

* Tako, npr., ako se smatra da se sopstvene oscilacije mogu zanemariti u onom trenutku kada njihova amplituda bude bila manja od $0,01 C_1$, onda se taj trenutak vremena može odrediti iz jednačine $R_1 e^{-\delta t} = 0,01 C_1$ odakle je $t_u = \frac{1}{\delta} \ln \frac{100 R_1}{C_1}$. Kao što vidimo ukoliko je manji otpor, (tj. ukoliko je manje δ), utoliko je vreme ustaljivanja veće.

Slika 289, c pokazuje kako se odvija proces ustaljivanja prinudnih oscilacija. Na taj način, praktično se može smatrati da će po isteku vremena ustaljivanja tačka vršiti oscilacije po zakonu

$$x \approx C_1 \sin(\Omega t - \beta). \quad (87)$$

Ove se oscilacije nazivaju *prinudne oscilacije u užem smislu*. One predstavljaju, kao što vidimo, neprigušene oscilacije koje se vrše sa amplitudom određenom jednačinom (85); frekvencija ovih oscilacija Ω jednaka je frekvenciji poremećajne sile. Veličina β predstavlja faznu razliku između prinudnih oscilacija i poremećajne sile.

Proučimo dobivene rezultate. Uvedimo sledeće oznake:

$$A = \frac{\Omega}{\omega}, \quad \psi = \frac{\delta}{\omega}, \quad \frac{h}{\omega^2} = \frac{F_0}{c} = f_{st}, \quad (88)$$

gde je A — odnos frekvencija, ψ — veličina koja karakteriše otpor, f_{st} — veličina statičkog pomeranja tačke pod dejstvom sile F_0 (npr., pri oscilovanju tereta koji je obešen o oprugu, f_{st} predstavlja statičko izduženje opruge, koje je izazvano silom F_0).

Tada, ako i brojitelj i imenitelj izraza (85,a) i (85,b) podelimo sa ω^2 , dobićemo

$$C_1 = \frac{f_{st}}{\sqrt{(1 - A^2)^2 + 4A^2\psi^2}}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{2A\psi}{1 - A^2}. \quad (89)$$

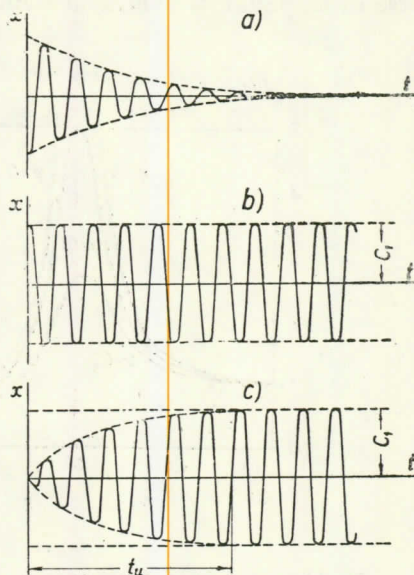
Iz formule (89) se vidi da veličine C_1 i β zavise od dva bezdimenzijska koeficijenta A i ψ . Radi bolje preglednosti ovih zavisnosti dati su dijagrami na sl. 290 za neke vrednosti ψ . U svakom konkretnom slučaju mogu se izračunati veličine f_{st} , A , ψ i da se odrede vrednosti za C_1 i β koristeći se dijagramima na sl. 290, ili pak formulama (89). Iz ovih dijagrama, ili iz navedenih formula se vidi da se različitim odnosima između veličina Ω i ω mogu dobiti prinudne oscilacije sa različitim amplitudama.

Kada je otpor vrlo mali (to je obično slučaj pri oscilacijama u vazduhu) i kada veličina A nije bliska jedinici, onda se u formuli (89) može smatrati da je $\psi \approx 0$.

U tom slučaju dobijaju se isti rezultati koje smo već i pre dobili, tj.

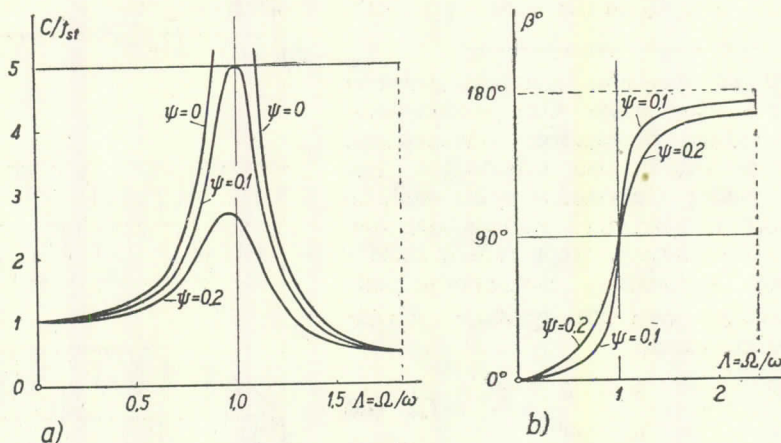
$$C_1 \approx \frac{f_{st}}{|1 - A^2|}; \quad \beta \approx 0 \text{ (pri } A < 1); \quad \beta \approx 180^\circ \text{ (pri } A > 1). \quad (90)$$

Razmotrimo još sledeće posebne slučajeve.



Sl. 289

1) Ako je odnos frekvencija Λ vrlo mali ($\Omega \ll \omega$), onda se može staviti da je $\Lambda \approx 0$, tako, da iz formule (89) proizlazi $C_1 \approx f_{st}$. Oscilacije se u tom slučaju vrše sa amplitudom jednakom statičkom pomeranju f_{st} i faznom razlikom $\beta = 0$.



Sl. 290

2) Ako je odnos frekvencija Λ vrlo veliki ($\Omega \gg \omega$), amplituda C_1 postaje mala. Ovaj slučaj je od interesa u problemu vibroizolacije različitih konstrukcija, pribora i slično. Pri tome, smatrajući da je otpor mali i zanemarujući u (89) $2\Lambda\psi$ i 1 u poređenju sa Λ^2 , može se za izračunavanje amplitude C_1 dobiti približna formula

$$C_1 = f_{st}/\Lambda^2 = h/\Omega^2$$

3) U svim slučajevima koji su od interesa u praksi veličina ψ je mnogo manja od jedinice. Tada, kao što se vidi iz (89), ako je veličina Λ bliska jedinici, amplituda prinudnih oscilacija dostiže maksimum. Pojava, koja tom prilikom nastaje, naziva se rezonanca.*

Pri rezonanci u formulama (89) može se smatrati da je $\Lambda_r = 1$, i tada je

$$C_{1r} = \frac{f_{st}}{2\delta}, \quad \beta_r = \frac{\pi}{2} \quad (91)$$

Oдавде se vidi da amplituda C_{1r} može da dostigne vrlo velike vrednosti kada je δ malo.

Oscilacije sa amplitudom C_{1r} , kao i uopšte prinudne oscilacije, ne ustaljuju se odjednom pri rezonanci. Proces ustaljivanja je isti kao onaj na sl. 289, c. Ukoliko je manji otpor δ , utoliko je veća veličina C_{1r} ; međutim, istovremeno će i vreme ustaljivanja ovih oscilacija t_u biti veće. (Vidi fusnotu na str. 282.)

* Iz formule (89) se vidi da je $C_1 = (C_1)_{max}$ kada funkcija $f(\xi) = (1 - \xi)^2 + 4\psi^2\xi$ (gde je $\xi = \Lambda^2$), koja se nalazi u imenitelju, ima minimum. Rešavanjem jednačine $f'(\xi) = -2(1 - \xi - 2\psi^2) = 0$, nalazimo da je veličina C_1 u maksimumu pri $\xi = 1 - 2\delta^2$, tj. kada je $\Lambda_r = \sqrt{1 - 2\delta^2}$. Prema tome, rezonanca nastupa onda kada je Λ nešto malo manje od jedinice. Međutim, praktično se može zanemariti δ^2 i smatrati da rezonanca nastupa pri $\Lambda_r = 1$

Kada otpor, a samim tim i veličina δ teži nuli, onda, kao što se vidi iz formule (91), granična vrednost C_1 , teži beskonačnosti; u tom slučaju će i vreme ustaljivanja, takođe, težiti beskonačnosti. Prema tome, u slučaju odsustva otpora, proces »razmahivanja« sistema trajao bi pri rezonanci beskonačno dugo, a isto tako bi se i amplituda ovih oscilacija povećavala do beskonačnosti. Dijagram ovih oscilacija pokazan je na sl. 291. Analogan bi bio i dijagram rezonantnih oscilacija pri vrlo malom otporu. Kod mehaničkih sistema takav proces može da bude vrlo opasan, tako da može da dovede do razaranja jedne konstrukcije.

3. Opšta svojstva prinudnih oscilacija. Iz svih do sada dobijenih rezultata proizlazi da prinudne oscilacije poseduju izvesna vrlo važna svojstva koja se razlikuju od sličnih svojstava sopstvenih oscilacija. Ta svojstva su sledeća:

1) Amplituda prinudnih oscilacija ne zavisi od početnih uslova kretanja.

2) Prinudne oscilacije se ne amortizuju pri postojanju otpora.

3) Frekvencija prinudnih oscilacija jednaka je frekvenciji poremećajne sile i ona ne zavisi od karakteristika sistema koji osciluje (poremećajna sila »nameće« sistemu svoju frekvenciju oscilovanja).

4) I pri maloj prinudnoj sili (F_0 je malo) mogu da nastanu vrlo velike prinudne oscilacije, ako je otpor mali, i ako je frekvencija Ω bliska frekvenciji ω (rezonanca).

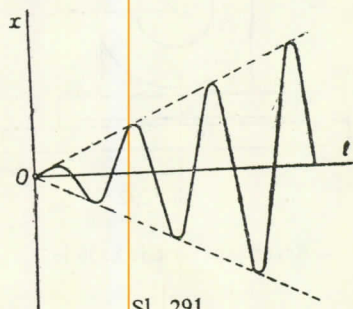
5) I pri vrlo velikoj prinudnoj sili prinudne oscilacije mogu da budu vrlo male, ako je frekvencija Ω mnogo veća od frekvencije ω .

Prinudne oscilacije, a posebno pojava rezonance, igraju vrlo veliku ulogu u mnogim oblastima fizike i tehnike. Tako, npr., pri radu neke mašine, ili pak nekog motora, uvek nastaju periodični udarci koji izazivaju prinudne oscilacije delova mašine ili pak fundamenta.

Proces promene amplitude tih oscilacija može da se prouči prisiljavajući motor da radi pri raznim brojevima obrtaja, kod koga je $\Omega = \omega^*$, gde je ω^* — ugaona brzina obrtanja motora (vidi zadatak 120.). Sa povećavanjem ω^* amplituda C_1 delova koji osciluju (ili pak fundamenta) se povećava: Kada je $\omega^* = \omega$ nastupa rezonanca i amplituda prinudnih oscilacija dostiže svoju maksimalnu vrednost. Pri daljem povećavanju veličine ω^* amplituda C_1 se smanjuje i kada bude bilo $\omega^* \gg \omega$, veličina amplitude C_1 će praktično biti jednaka nuli. U mnogim inženjerskim konstrukcijama pojava rezonance je krajnje nepoželjna i nju treba izbeći, birajući odnos između frekvencija Ω i ω tako, da amplitude prinudnih oscilacija praktično budu jednake nuli ($\Omega \gg \omega$).

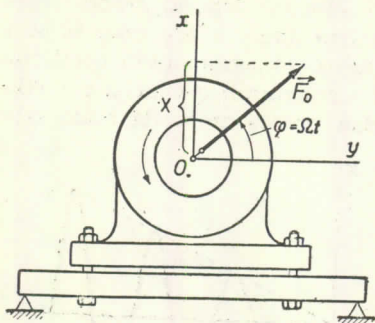
Nasuprot tome, u radiotehnici rezonanca je od vrlo velike koristi jer omogućuje da se izdvoje signali jedne radiostanice od signala svih ostalih radiostanica (štimovanje prijemnika).

Na teoriji prinudnih oscilacija zasniva se konstrukcija raznih pribora, npr. vibrografa — pribora za merenje — registrovanje pomeranja delova mašine, fundamenata, i sl.), a isto tako i seizmografa, koji služe za registrovanje oscilacija Zemljine kore, itd.



Sl. 291

Zadatak 120. Greda na koju je postavljen motor ugne se pod njegovim teretom za $f_{st} = 1$ cm. Pri kom broju obrtaja motora će nastupiti rezonanca?



Sl. 292

Rešenje. Iz rezultata koji je dobijen pri rešavanju zadatka 118. proizlazi da je period sopstvenih oscilacija grede

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{f_{st}}{g}}.$$

Ako se težište motora ne poklapa sa geometrijskom osom vratila, onda će na vratilo delovati centrifugalna sila $\vec{F}_0$ (sl. 292). Njena projekcija na osu Ox jednaka je $X = F_0 \sin \Omega t$ (gde je Ω — ugaona brzina obrtanja vratila) i za gredu predstavlja poremećajnu silu koja na nju deluje; frekvencija ove sile je Ω . Prema tome,

period prinudnih oscilacija je $T_p = \frac{2\pi}{\Omega}$.

Rezonanca nastaje kada je $T_p = T$, tj. pri

$$\Omega_{kr} = \sqrt{\frac{g}{f_{st}}} = 31,3 \text{ s}^{-1}.$$

Odatle proizlazi da je kritični broj obrtaja vratila

$$n_{kr} = \frac{30 \Omega_{kr}}{\pi} \approx 300 \text{ obrtaja/min.}$$

Radni broj obrtaja motora treba da je znatno veći od n_{kr} .

Zadatak 121. Odrediti prinudne oscilacije tereta koji je obešen o cprugu (zadatak 118.) ako gornji kraj A opruge vrši vertikalne oscilacije po zakonu: $\xi = a_0 \sin \Omega t$.

Rešenje. Postavimo osu Oz isto tako kao i u zadatku 118. (vidi sl. 283). Ako zamislimo da smo gornji kraj opruge pomerili od tačke A za veličinu ξ nado'le, onda će tom prilikom dužina opruge biti $l = l_0 - \xi + f_{st} + z$. Tada je $Z = -c\Delta l = -c(f_{st} + z - \xi)$ i diferencijalna jednačina kretanja, ako se zanemari otpor vazduha i uzme u obzir da je $G = cf_{st}$, ima oblik:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = -c(f_{st} + z - \xi) + G = -cz + c\xi.$$

Odatle, ako slično kao u zadatku 118., uvedemo oznaku $\frac{c}{m} = \omega^2$, dobijamo:

$$\ddot{z} + \omega^2 z = a_0 \omega^2 \sin \Omega t.$$

Prema tome, teret vrši prinudne oscilacije, jer se dobijena jednačina po svom obliku poklapa sa jednačinom (80) ili jednačinom (84), ako u njima stavimo da je $\delta = 0$ i $F_0 = a_0 \omega^2$. Iz obrazaca — (88) se vidi da je u datom slučaju $f_{st} = a_0$ i $\psi = 0$. Amplituda prinudnih oscilacija i pomeranje faze mogu da se odrede po formulama (90).

Ako je $\Omega \ll \omega$ (gornji kraj opruge osciluje vrlo sporo), onda je $A \approx 0$ i $C_1 \approx a_0$, dok je pomeranje faze $\beta = 0$. Teret tom prilikom osciluje isto tako kao kad bi opruga bila krut štap, što fizički i odgovara uslovu $\omega \gg \Omega$. Kada je $\Omega = \omega$ nastaje rezonanca, tako da se amplitude oscilacija mnogo povećavaju. Ako frekvencija Ω postane veća od ω ($A > 1$), onda teret osciluje tako, da kada se gornji kraj opruge bude kretao naviše, teret se spušta naniže, i obrnuto (pomeranje faze $\beta = 180^\circ$); amplituda ovih oscilacija biće utoliko manja ukoliko je veća frekvencija Ω . Najzad, kada frekvencija Ω bude mnogo veća od frekvencije ω ($A \gg 1$), tada će amplituda prinudnih oscilacija biti $C_1 \approx 0$. Tada će teret praktično stajati u položaju statičke ravnoteže (tj. u tački O), mada gornji kraj opruge vrši oscilacije sa amplitudom a_0 (frekvencija tih oscilacija je toliko velika da teret ne stiže da na njih reaguje).

Glava XXII

KRETANJE TELA U POLJU DEJSTVA ZEMLJINE TEŽE

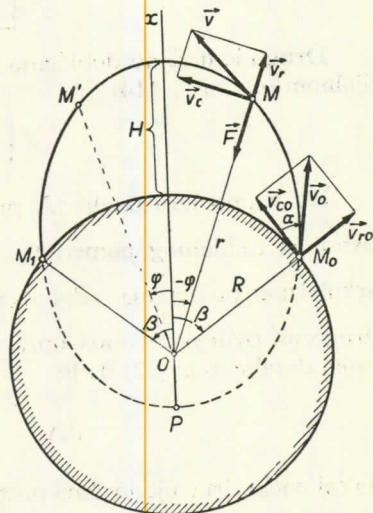
§ 127*. Kretanje materijalne tačke izbačene pod uglom prema horizontu u polju dejstva Zemljine teže (Zemljinog privlačenja)

Zadatak o kretanju tela u polju dejstva Zemljine teže nastaje pri proučavanju kretanja raketa velikog dometa i veštačkih Zemljinih satelita (sputnika), a takođe i pri proučavanju problema međuplanetarnog saobraćaja. U svim ovim slučajevima, kada su dometi i visine penjanja istog reda kao i poluprečnik Zemlje, potrebno je (za razliku od zadataka razmotrenih u § 108) da se uzme u obzir promena sile kojom Zemlja privlači tela u funkciji od rastojanja.

Pokretno telo razmatraćemo kao materijalnu tačku mase m . Neka se u početnom trenutku vremena ta tačka nalazi na površini Zemlje u položaju M_0 (sl. 293) i neka ima početnu brzinu $\vec{v}_0$, usmerenu pod uglom α prema horizontu. Ako zanemarimo otpor vazduha (što je za razmatrane visine u prvom približenju potpuno dopušteno) i ako smatramo da je Zemlja nepomična, onda će na tačku pri njenom kretanju delovati samo

sila privlačenja Zemlje $\vec{F}$, usmerena ka središtu Zemlje, koja se menja po zakonu (vidi § 115, zadatak 108.):

$$F = mg \frac{R^2}{r^2},$$



Sl. 293

gde je $r = \overline{OM}$ — rastojanje tačke M od središta Zemlje, $R = OM_0$ — je vrednost za r u tački M_0 u kojoj tačka napušta Zemljinu površinu, g — ubrzanje sile privlačenja Zemlje u tački M_0 .*

Kako je sila $\vec{F}$ — centralna sila (§ 116, tačka 3), to će putanja tačke biti ravna kriva. Iz tog razloga za proučavanje kretanja mogu da se upotrebe i polarne koordinate $r = \overline{OM}$ i ugao φ , s tim što ćemo koordinatni početak (pol) staviti u središte O Zemlje. Pravac i smer polarne ose Ox , odredićemo kasnije. Postavimo diferencijalne jednačine kretanja tačke M .

Po zakonu površina (§ 116) pri kretanju pod dejstvom centralne sile moment vektora brzine $\vec{v}$ za tačku O (ili dvostruka sektorska brzina tačke) je konstantna veličina. Prema tome, $M_O^v = c = \text{const.}$ Međutim, sa crteža se vidi da je $M_O^v = rv_c$, gde je $v_c = r \frac{d\varphi}{dt} = r\varphi$ cirkularna brzina tačke (vidi § 71). Oдавce proizlazi prva jednačina

$$\boxed{r^2\varphi = c} \quad (93)$$

Veličinu konstante c odredićemo iz početnih uslova kretanja za položaj M_0 , gde je, kako je lako videti, $M_O^v = Rv_0 \cos \alpha$. Prema tome je

$$\boxed{c = Rv_0 \cos \alpha.} \quad (94)$$

Drugu jednačinu dobićemo iz zakona o priraštaju kinetičke energije u diferencijalnom obliku (§ 114)

$$d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = dE_k = dA.$$

Da bismo izračunali dA primetimo da se elementarno pomercanje tačke M sastoji iz radijalnog pomeranja dr , usmerenog duž pravca radijalno brzine $\vec{v}_r$, i cirkularnog pomeranja $r d\varphi$, usmerenog duž cirkularne brzine $\vec{v}_c$ (§ 71, sl. 155).

Drugo od ovih pomercanja upravno je na $\vec{F}$ i uzimajući u obzir smer sile i pomercanja, dobijamo iz (92) da je

$$dA = -F dr = -mgR^2 \frac{dr}{r^2}.$$

Na taj način druga jednačina postaje

$$\boxed{d\left(\frac{1}{2}v^2\right) = gR^2 d\left(\frac{1}{r}\right),} \quad (95)$$

* U formuli (92) R može da ima bilo koju veličinu veću od poluprečnika Zemlje. Kada se tačka M_0 nalazi na Zemljinoj površini, obično se smatra da je R jednako poluprečniku Zemljinog ekvatora $R_0 = 6378$ km i da je $g = g_0 = 9,81$ m/s² (g je svuda ubrzanje Zemljinog privlačenja, a ne sile teže vidi § 121).

gde je (vidi § 71) označeno:

$$v^2 = v_r^2 + v_c^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2. \quad (96)$$

Integriranjem diferencijalnih jednačina (93) i (95) mogu se odrediti r i φ kao funkcije vremena t , tj. može se odrediti zakon kretanja tačke. Umesto toga odredimo zasad putanju tačke. Da bismo uprostiti račun, uvedimo novu promenljivu u stavljajući da je

$$u = \frac{1}{r}; \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\varphi}. \quad (97)$$

Tada, uzimajući u obzir jednačine (97) i (93) dobijamo:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = -r^2 \frac{du}{d\varphi} \frac{c}{r^2} = -c \frac{du}{d\varphi}; \quad r \frac{d\varphi}{dt} = \frac{c}{r} = cu.$$

Ako ove vrednosti unesemo u formulu (96) dobićemo:

$$v^2 = c^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 \right].$$

Posle ovih transformacija, jednačina (95), ako podelimo obe strane jednačine sa $d\varphi$ i ako izračunamo izvod od v^2 , postaje

$$c^2 \left[u \frac{du}{d\varphi} + \frac{du}{d\varphi} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right] = g R^2 \frac{du}{d\varphi}.$$

Ako sada c zamcimo njegovom vrednošću (94) i ako gornju jednačinu podelimo sa $\frac{du}{d\varphi}$, dobićemo definitivno sledeću diferencijalnu jednačinu putanje:

$$\frac{d^2 u}{d\varphi^2} + u = \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha}. \quad (98)$$

Rešenje ove jednačine sastoji se iz opšteg rešenja jednačine ne uzimajući u obzir njenu desnu stranu [ovo rešenje se poklapa sa rešenjem jednačine (62) kada je $\omega = 1$] i partikularnog rešenja jednačine uzimajući u obzir i njenu desnu stranu. To rešenje glasi

$$u = C_1 \sin \varphi + C_2 \cos \varphi + \frac{g}{v_0^2 \cos^2 \alpha},$$

gde su C_1 i C_2 nepoznate integracione konstante.

Izaberimo sada pravac i smer polarne ose Ox , od koje ćemo računati ugao φ , tako da bude ispunjen uslov $\frac{du}{d\varphi} = 0$ kada je ugao $\varphi = 0$ (smisao ovog uslova objasnićemo malo kasnije). Tada, s obzirom da je

$$\frac{du}{d\varphi} = C_1 \cos \varphi - C_2 \sin \varphi,$$

dobijamo $C_1 = 0$. Ako uvedemo oznaku

$$p = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g}, \quad (99)$$

biće $pu = pC_2 \cos \varphi + 1$. Ako sada stavimo $pC_2 = -e$, gde je e — nova integraciona konstanta i ako od promenljive u pređemo na promenljivu r , odredićemo, najzad, jednačinu putanje u obliku

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \varphi}. \quad (100)$$

Iz analitičke geometrije je poznato, da (100) predstavlja jednačinu konusnog preseka (elipsu, parabolu ili hiperbolu) sa žižnim parametrom p i ekscentricitetom e , izraženu u polarnim koordinatama. Pol O nalazi se u jednoj od žiža, a polarna osa je usmerena po osi simetrije krive od temena koje je najbliže žiži (ovim se objašnjava smisao uslova koji je poslužio za izbor polarne ose).

Najzad, oblik putanje zavisi od veličine integracione konstante e , koju ćemo odrediti iz uslova u tački uzletanja (puštanja projektila) M_0 . Označimo veličinu ugla M_0Ox koji nam je zasada nepoznat sa β . Osim toga, iz jednačine (97) i sl. 293 proizlazi da je u tački M_0

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)_0 = -\left(\frac{1}{r} \frac{dr}{d\varphi}\right)_0 = -\frac{1}{R} \frac{(v_r)_0}{(v_\varphi)_0} = -\frac{1}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

Tada će početni uslovi kretanja biti:

$$\text{za } t = 0, \quad \varphi = -\beta, \quad u = \frac{1}{R}, \quad \frac{du}{d\varphi} = -\frac{1}{R} \operatorname{tg} \alpha.$$

Iz (100), ako od promenljive r pređemo na promenljivu u , izlazi da je

$$u = \frac{1}{p} (1 - e \cos \varphi), \quad \frac{du}{d\varphi} = \frac{e}{p} \sin \varphi.$$

Ako ovde smenimo nađene početne podatke i ako istovremeno p zamenimo njegovom vrednošću iz (99), dobićemo jednačine:

$$e \cos \beta = 1 - \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{gR}; \quad e \sin \beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2gR} \quad (101)$$

Ako drugu od jednačina (101) podelimo prvom, dolazimo do izraza

$$\boxed{\operatorname{tg} \beta = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{2(gR - v_0^2 \cos^2 \alpha)}} \quad (102)$$

Kada zatim dignemo na kvadrat obe strane jednačine (101) i kada ih sabere-mo dobijamo:

$$\boxed{e = \sqrt{1 + \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{g^2 R^2} (v_0^2 - 2gR)}} \quad (103)$$

Jednačina (102) određuje ugao β , tj. položaj ose simetrije putanje u odnosu na tačku uzletanja M_0 . Formula (103) određuje veličinu ekscentriciteta putanje. Iz ove jednačine se vidi da će putanja biti:

- | | | |
|--------------|-------------|-----------------------------|
| a) elipsa | ($e < 1$) | ako je $v_0 < \sqrt{2gR}$; |
| b) parabola | ($e = 1$) | ako je $v_0 = \sqrt{2gR}$; |
| c) hiperbola | ($e > 1$) | ako je $v_0 > \sqrt{2gR}$. |

Brzina $v_n = \sqrt{2gR}$ zove se *parabolična brzina* ili *brzina oslobađanja* (pri ovoj brzini se tačka oslobađa dejstva Zemljine teže)*. Ako uzmemo da je $R = R_0 = 6378$ km i da je $g = g_0 = 9,81$ m/s², dobićemo da je $v_n \approx 11,2$ km/s. Prema tome, ako se telo sa Zemljine površine izbací početnom brzinom $v_0 \geq 11,2$ km/s i pod proizvoljnim uglom prema horizontu, ono će da se kreće po paraboli ili po hiperboli (pri $\alpha = 90^\circ$ — po pravoj), i neograničeno će se udaljavati od Zemlje. Postizanje brzina ovog reda potrebno je za međuplanetarni saobraćaj**. Pri brzinama koje su manje od brzine oslobađanja telo će ili ponovo pasti na Zemlju, ili će se pretvoriti u veštački Zemljin satelit (sputnik).

Zakon kretanja tačke duž putanje, tj. njen položaj na putanji u proizvoljnom trenutku vremena, može da se odredi, ako u jednačini (93) r zamenimo njegovom veličinom iz (100) i ako zatim izvršimo integriranje dobijene jednačine.

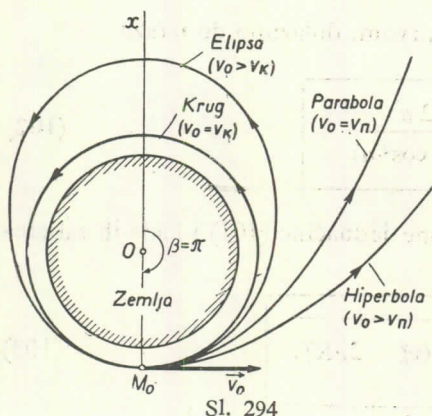
* Potrebna brzina da bi se međuplanetarni brod oslobodio zajedničkog dejstva privlačenja Zemlje i Sunca, treba da bude veća od $\sqrt{2g_0 R_0}$ i pri određenom pravcu početne brzine $\vec{v}_0$ iznosi oko 16,7 km/s.

** Ovo je najmanja brzina koju tačka treba da ima da bi se oslobodila dejstva Zemljine teže.

§ 128*. Veštački Zemljini sateliti (spunici). Eliptične putanje

Ako je početna brzina $v_0 < \sqrt{2gR}$ telo izbačeno sa Zemljine površine može da se pretvori u veštački Zemljin satelit (sputnik), ako njegova putanja (elipsa) ne bude prolazila kroz Zemlju, tj. ako za sve tačke putanje bude bio ispunjen uslov

$r \geq R_0$, ili $r_{\min} = R_0$, gde je R_0 — poluprečnik Zemljinog ekvatora. Kako je $r_{\min} = OP$ (vidi sl. 293), to će uslov $r_{\min} = R_0$ biti ispunjen kada tačka P bude ležala na površini Zemlje, i kada se, prema tome, bude poklapala sa M_0 (vidi sl. 294), tj. kada je ugao $\beta = \pi$. Međutim, kako pokazuje jednačina (101), $\beta = \pi$ samo tada kada je $\alpha = 0$ (ili $\alpha = \pi$) i $v_0^2 \geq gR$, jer e ne može da bude negativno. Prema tome, da bi se telo izbačeno sa Zemljine površine pretvorilo u sputnik Zemlje, potrebno je da budu ispunjena dva uslova:



Sl. 294

$$\alpha = 0, \quad \sqrt{2g_0R_0} > v_0 \geq \sqrt{g_0R_0}. \quad (104)$$

Ekscentricitet putanje sputnika pri $\alpha = 0$ i $\beta = \pi$, kao što se vidi iz jednačine (101), biće:

$$e = \frac{v_0^2}{gR} - 1. \quad (105)$$

Brzina $v_K = \sqrt{gR}$ pri kojoj je $e = 0$, naziva se *orbitna brzina* ili *kružna brzina*, jer se tada sputnik kreće po kružnoj putanji poluprečnika R . Pri izbacivanju sa Zemljine površine, ako se uzme da je $R = R_0 = 6378$ km i $g = g_0 = 9,81$ m/s², orbitna brzina je $v_K \approx 7910$ m/s. Ako je $v_0 > v_K$ putanja sputnika je elipsa, čiji je ekscentricitet utoliko veći ukoliko je veća početna brzina v_0 (sl. 294).

Kad je ugao izbacivanja $\alpha \neq 0$, onda pri bilo kojoj početnoj brzini v_0 telo izbačeno sa Zemljine površine (čak ako se ne uzme u obzir otpor vazduha) ne može da postane Zemljin satelit (sputnik). Prema tome, praktično je nemoguće da se ostvari Zemljin sputnik izbacivanjem iz nekog oruđa na Zemljinoj površini; da bi se to postiglo potrebna je dirigovana raketa, koja pomoću odgovarajućih pribora može da podigne sputnik na datu visinu i da ga u tački M_0 (vidi sl. 294) potrebnu početnu brzinu v_0 pod uglom $\alpha \approx 0$ prema horizontu. Tim putem su bili izbačeni sovjetski sputnici, prvi u svetu.

Prisetimo u zaključku da se sa povećavanjem visine H tačke M_0 nad Zemljinom površinom otpor vazduha smanjuje, tako da će sputnik biti dužeg veka. Istovremeno se tada može postići kretanje sputnika i pri uglovima $\alpha \neq 0$.

Orbitna brzina $v_K = \sqrt{gR}$ sa povećavanjem visine H se smanjuje, jer je $g = g_0R_0^2/R^2$, a $R = R_0 + H$, pa je, prema tome

$$v_K = \sqrt{gR} = \sqrt{\frac{g_0R_0^2}{R}} = \sqrt{g_0R_0} \sqrt{\frac{R_0}{R_0 + H}}$$

Na primer, kada je $H = 0$, $v_K = 7910$ m/s; pri $H = 500$ km; $v_K = 7620$ m/s; pri $H = 1000$ km; $v_K = 7360$ m/s, itd. Međutim, ukupna energija koja se troši na izbacivanje sputnika raste sa povećavanjem visine H . Naime, ako energiju, koja se odnosi na jedinicu mase, označimo sa $\tilde{E}$, onda će se za podizanje do tačke M_0 (bez uticaja otpora vazduha) utrošiti energija $\tilde{E}_1 = \frac{1}{2} v_{\text{poc}}^2 = \frac{1}{2} \frac{2g_0 R_0 H}{R_0 + H}$ (vidi zadatak 108., str. 248), a za postizanje orbitne brzine — energija $\tilde{E}_2 = \frac{1}{2} v_K^2$. Prema tome, ukupna energija koja se utroši na jedinicu mase, iznosi:

$$\tilde{E} = \frac{1}{2} \left(\frac{g_0 R_0^2}{R_0 + H} + \frac{2g_0 R_0 H}{R_0 + H} \right) = \frac{1}{2} g_0 R_0 \frac{R_0 + 2H}{R_0 + H},$$

i biće utoliko veća ukoliko je veća visina H .

Eliptične putanje Kada je $\alpha > 0$ i $v_0 < \sqrt{2g_0 R_0}$ telo izbačeno sa Zemljine površine opisuje luk ellipse i pašće ponovo na Zemlju. Takve eliptične putanje opisuju rakete velikog dometa, a posebno i međukontinentalne rakete. Odredimo osnovne karakteristike ovih putanja.

Kako je osa Ox osa simetrije putanje, to će tačka padanja biti M_1 i domet D biće jednak dužini luka $\widehat{M_0 M_1}$ (vidi sl. 293); prema tome:

$$D = 2R_0 \beta, \quad (106)$$

gde je ugao β određen formulom (102). U obrascu (106) R_0 je srednji poluprečnik Zemlje.

Najveća visina H putanje jednaka je, očividno, $[(r)_{\varphi=0} - R_0]$, ili, saglasno jednačinama (99) i (100)

$$H = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{(1-e)g_0} - R_0, \quad (107)$$

gde je e određeno formulom (103).

Vreme letenja T odredićemo iz jednačine (93), koja zajedno sa jednačinom (94) daje:

$$dt = \frac{r^2}{c} d\varphi = \frac{r^2}{R_0 v_0 \cos \alpha} d\varphi.$$

Ako ovde zamenimo r njegovom vrednošću koja se dobija iz jednačina (99) i (100), i ako integriramo gornju jednačinu, dobićemo:

$$T = \frac{v_0^3 \cos^3 \alpha}{R_0 g_0^2} \int_{-\beta}^{\beta} \frac{d\varphi}{(1 - e \cos \varphi)^2}.$$

Kada izračunamo ovaj integral i izvršimo više transformacija dolazimo do izraza

$$T = \frac{2v_0^3 \cos^3 \alpha}{R_0 g_0 (\sqrt{1-e^2})^3} (z + e \sin z), \quad (108)$$

gde je uvedena oznaka

$$z = 2 \arctg \left(\sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \right). \quad (109)$$

Iz dobijenih formula, ako znamo početnu brzinu v_0 i ugao izbacivanja α , može da se odrede: domet D , najveća visina putanje H i vreme letenja T .

S praktične tačke gledišta važno je da se odredi minimalna brzina $(v_0)_{\min}$ i najpogodniji ugao izbacivanja α_H , koji dopuštaju (obezbeđuju) da se postigne dati domet $D = 2R_0 \beta$.

U tom cilju iz jednačine (102) izračunajmo početnu brzinu v_0 . Izlazi da je

$$v_0 = \sqrt{\frac{2R_0 g_0 \operatorname{tg} \beta}{\sin 2\alpha + 2 \cos^2 \alpha \operatorname{tg} \beta}}. \quad (110)$$

Za dati domet (za dati ugao β) potrebna brzina v_0 zavisi od ugla α . Kako ugao α u jednačini (110) dolazi samo u imenitelju, to početna brzina v_0 ima minimum kada taj imenitelj bude imao maksimalnu veličinu. Ako izvod imenitelja izjednačimo sa nulom, dobićemo:

$$\cos 2\alpha - \sin 2\alpha \operatorname{tg} \beta = 0,$$

odakle je $\operatorname{ctg} 2\alpha_H = \operatorname{tg} \beta$, tako da je najpovoljniji ugao izbacivanja

$$\alpha_H = 45^\circ - \frac{1}{2} \beta. \quad (111)$$

Da veličina ugla α_H određuje zaista minimalnu početnu brzinu $(v_0)_{\min}$, možemo lako proveriti po znaku drugog izvoda. Ako ovu vrednost za α_H smenimo u jednačinu (110), dobićemo:

$$(v_0)_{\min} = \sqrt{2R_0 g_0 \frac{\sin \beta}{1 + \sin \beta}}. \quad (112)$$

Formule (112) i (111) određuju najmanju početnu brzinu i najpogodniji ugao izbacivanja, koji obezbeđuju potrebni domet. Visina putanje i vreme letenja se tom prilikom izračunavaju po formulama (107) i (108), u kojima se v_0 i α zamenjuju

njihovim vrednostima iz (112) i (111). Radi preglednosti izračunati su elementi nekoliko najvažnijih eliptičnih putanja po ovim formulama za $R_0 = R_{sr} = 6370$ km; ti elementi dati su u Tablici I (sve vrednosti u ovoj tablici date su sa tačnošću do 5 jedinica poslednjeg znaka).

Tablica I

Ugao β	Domet D u km	Neophodna početna brzina (v_0) _{min}	Najpogodniji ugao izbacivanja α_H	Visina putanje H u km	Vreme letenja T
10°	2 220	4 300	40°	500	12 min 30 s
20°	4 450	5 650	35°	900	19 min 10 s
30°	6 670	6 460	30°	1 170	24 min 50 s
40°	8 900	7 000	25°	1 300	30 min 00 s
70°	15 570	7 780	10°	900	40 min 10 s
90°	20 020	7 910	0°	0	42 min 10 s

Napomenimo da se svi ovi proračuni odnose na kretanje u bezvazдушnom prostoru i da oni ne uzimaju u obzir uticaj obrtanja Zemlje. U zaključku primećimo, takođe, da je pri malim dometima (kada je ugao β mali) luk elipse, koji opisuje izbačeno telo, približan luku parabole. Ako se tom prilikom uzme da je $\sin \beta \approx \beta$ i $2R_0\beta = D$ i ako se veličina β u drugim jednačinama zanemari u odnosu na jedinicu, onda u graničnom slučaju sve formule prelaze u odgovarajuće formule za parabolične putanje (vidi § 108). Posebno, iz (111) i (112) odmah se dobija $\alpha_H = \alpha^* = 45^\circ$; $(v_0)_{\min} = \sqrt{g_0 D^*}$.

ČETVRTI DEO

DINAMIKA
SISTEMA I KRUTOG TELA

Glava XXIII

UVOD U DINAMIKU SISTEMA. MOMENTI INERCije KRUTOG TELA

§ 129. Mehanički sistem (sistem materijalnih tačaka). Unutrašnje i spoljašnje sile

Mehaničkim sistemom materijalnih tačaka ili tela naziva se takav njihov skup, u kome položaj, ili pak kretanje, svake tačke ili tela, zavisi od položaja i kretanja svih ostalih tačaka (tela). U daljim izlaganjima smatraćemo da materijalno telo predstavlja sistem materijalnih delića (tačaka) iz kojih se sastoji telo.

Klasičan primer za mehanički sistem je, npr., Sunčev sistem, u kome sva tela deluju jedno na drugo silom uzajamnog privlačenja. Kao drugi primer za mehanički sistem može, npr., da posluži bilo koja mašina, ili pak mehanizam, u kome su sva tela međusobno povezana zglobovima, štapovima, kaišima i slično, tj. u kome su sva tela međusobno povezana različitim geometrijskim vezama. U tom slučaju na pojedina tela iz kojih se sastoji sistem deluju sile uzajamnog pritiska ili zatezanja, koje se prenose preko veza.

Skup tela, između kojih ne postoje sile uzajamnog dejstva, ne obrazuje mehanički sistem (npr., eskadrila aviona pri letu u vazduhu). U daljim našim razmatranjima posmatraćemo samo i isključivo mehaničke sisteme tela i zvacemo ih jednostavno sistemima.

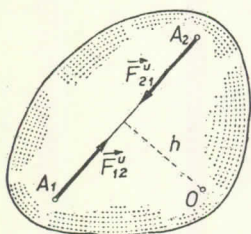
U vezi sa svim što smo do sada rekli, sile koje deluju na tačke ili tela sistema, mogu da se podele na spoljašnje i unutrašnje.

Spoljašnjim silama se nazivaju one sile, koje deluju na tačke sistema (ili pak na tela sistema) od strane drugih tačaka ili tela, koja ne ulaze u sastav datog sistema. Unutrašnjim silama se nazivaju one sile, koje deluju na tačke ili pak tela sistema, od strane tačaka, ili pak tela, koje pripadaju istom sistemu koji posmatramo. Spoljašnje sile označićemo simbolom $\vec{F}^s$, a unutrašnje simbolom $\vec{F}^u$.

Kako unutrašnje, tako i spoljašnje sile, po svojoj prirodi mogu da budu ili aktivne sile ili pak reakcije veza. Podela sila na spoljašnje i unutrašnje je uslovna i zavisi od sistema čije se kretanje posmatra. Npr., ako se posmatra kretanje celokupnog Sunčevog sistema, onda je sila uzajamnog privlačenja između Zemlje i Sunca unutrašnja sila; ako se pak posmatra samo kretanje Zemlje po njenoj putanji oko Sunca, onda ta sila uzajamnog privlačenja spada u spoljašnje sile.

Unutrašnje sile poseduju sledeća svojstva:

1. *Geometrijski zbir (glavni vektor) svih unutrašnjih sila jednak je nuli.* Naime, na osnovu trećeg zakona dinamike bilo koje dve tačke sistema (sl. 295) deluju jedna na drugu silama istog pravca, istog intenziteta, ali suprotnog smera. Ako označimo ove sile sa $\vec{F}_{12}^u$ i $\vec{F}_{21}^u$, onda je jasno da je njihov geometrijski zbir jednak nuli. Sličan rezultat dobija se i za bilo koje druge dve tačke sistema, tako da za čitav sistem važi



Sl. 295

$$\vec{F}_R^u = \sum \vec{F}_i^u = 0. \quad (1)$$

2. *Zbir momenata (glavni moment) svih unutrašnjih sila sistema za bilo koju tačku ili osu jednak je nuli.* Naime, ako uočimo bilo koju proizvoljnu tačku O , onda se iz

sl. 295 vidi da je $\vec{M}_{O12}^u + \vec{M}_{O21}^u = 0$. Analogni rezultat se dobija i pri izračunavanju momenata za osu. Prema tome, za sve tačke sistema biće:

$$\vec{M}_O^u = \sum \vec{M}_O^u = 0, \quad \text{ili} \quad M_x^u = \sum M_x^u = 0. \quad (2)$$

Iz dokazanih svojstava ne proizlazi, međutim, istovremeno, da su unutrašnje sile uzajamno uravnotežene i da ne utiču na kretanje sistema, jer ove sile deluju na razne materijalne tačke ili tela sistema i mogu da izazovu uzajamno pomeranje tačaka ili tela sistema. Unutrašnje sile biće uravnotežene tada kada razmatrani sistem predstavlja kruto telo (vidi § 3).

§ 130. Masa sistema. Središte (centar) sistema materijalnih tačaka

Na kretanje sistema, osim sila koje na njega deluju, utiče i ukupna masa sistema, a, takođe, i raspored masa sistema. *Masa sistema* jednaka je aritmetičkom zbiru masa svih tačaka ili tela, koje obrazuju sistem:*

$$M = \sum m_i. \quad (3)$$

Raspored masa u prvom redu je okarakterisan položajem tačke sistema, koja se zove središte (centar) masa. *Središtem masa ili centrom inercije sistema materijalnih tačaka naziva se geometrijska tačka C , čije su koordinate određene formulama:*

$$x_C = \frac{\sum m_i x_i}{M}, \quad y_C = \frac{\sum m_i y_i}{M}, \quad z_C = \frac{\sum m_i z_i}{M}, \quad (4)$$

* Masu sistema, po pravilu, označavamo simbolom M , tj. istim simbolom kao i moment sile. Tom prilikom ne može doći do nesporazuma, jer kada smo slovom M označavali moment sile, onda je taj simbol uvek bio praćen i nekim indeksom (npr. M_C , M_x , M_O , i slično). Jedino u glavi XXIX, usled bliske povezanosti ovih oznaka obeležavamo radi bolje preglednosti masu sistema velikim pisanim slovom $\mathcal{M}$.

gde su m_i — mase materijalnih tačaka koje obrazuju sistem, a x_i, y_i, z_i — koordinate tih tačaka.

Ako položaj središta sistema materijalnih tačaka odredimo njegovim vektorom položaja $\vec{r}_C$, onda iz formule (4) proizlazi za $\vec{r}_C$ sledeći izraz:

$$\vec{r}_C = \frac{\sum m_i \vec{r}_i}{M}, \quad (5)$$

gde su $\vec{r}_i$ — vektori položaja tačaka koje obrazuju sistem.

Položaj središta sistema materijalnih tačaka poklapa se sa položajem težišta tela koje se nalazi u homogenom polju sile teže. Naime, ako u formulama 74 (§ 53) stavimo $G_i = m_i g$ i $G = Mg$, gde je g — ubrzanje teže, koje je konstantno za sve tačke homogenog polja teže, onda, kada izvršimo skraćivanja sa g , dobićemo iz jednačina (74) formule (4).

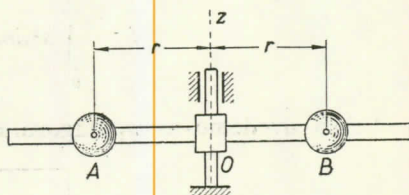
Međutim, pojam o težištu i pojam o središtu masa, nije istovetan. Pojam o težištu tela, kao o tački, kroz koju prolazi napadna linija rezultante sila teže, u suštini, ima smisla samo za kruto telo, koje se nalazi u homogenom polju sile teže. Međutim, pojam o središtu sistema materijalnih tačaka, kao karakteristici rasporeda masa sistema, ima smisla za bilo koji sistem materijalnih tačaka ili tela, pri čemu taj pojam zadržava svoj smisao nezavisno od toga da li na dati sistem deluju bilo kakve sile ili ne.

§ 131. Moment inercije tela za osu. Poluprečnik inercije

Položaj središta sistema materijalnih tačaka ne karakteriše u potpunosti raspored masa sistema. Npr., (sl. 296), ako se rastojanje r od ose Oz svake od jednakih kugli A i B poveća za jednu te istu dužinu, onda se položaj središta sistema neće promeniti, dok će raspored masa postati drugojačiji i to utiče na kretanje sistema (npr. pri obrtanju oko ose Oz , pri istim uslovima, u drugom slučaju biće obrtanje sporije).

Iz tog razloga se u mehanici uvodi još jedna karakteristika rasporeda masa — moment inercije. *Momentom inercije za bilo koju datu osu Oz naziva se skalarna veličina, koja je jednaka sumi proizvoda masa svih tačaka tela i kvadrata njihovih rastojanja od te ose*

$$J_z = \sum m_i r_i^2. \quad (6)$$



Sl. 296

U daljim izlaganjima pokazaćemo da moment inercije pri obrtnom kretanju krutog tela igra istu ulogu kao masa pri translatornom kretanju, tj. drugim rečima, *moment inercije je mera inercije tela pri obrtnom kretanju.*

Iz formule (6) proizlazi da je moment inercije tela jednak sumi momenata inercije svih njegovih delova za istu osu. Za jednu materijalnu tačku koja se nalazi na rastojanju r od ose, biće $J = mr^2$. Dimenzija momenta inercije u tehničkom sistemu mera biće $[J] = \text{kpm}^2$.

Pri raznim računima vrlo često se upotrebljava pojam poluprečnika inercije. Poluprečnikom inercije tela za osu Oz naziva se veličina i_z , koja ima dimenziju dužine i koja je određena jednačinom

$$J_z = Mi_z^2, \quad (7)$$

gde je M — masa tela.

Iz gornje definicije proizlazi da je poluprečnik inercije geometrijski jednak rastojanju od ose Oz one tačke, u kojoj treba koncentrisati celokupnu masu tela, da bi moment inercije jedne takve tačke za osu Oz bio isti kao i moment inercije čitavog tela za istu osu.

Ako znamo poluprečnik inercije tela može se po formuli (7) odrediti moment inercije tela, i obrnuto.

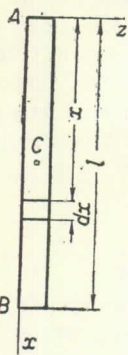
§ 132. Momenti inercije nekih homogenih tela

Ako telo rastavimo na elementarne deliće, onda će u graničnom procesu suma koja se nalazi u jednačini (6) preći u integral, tako da će biti

$$J_z = \int_V r^2 dm, \quad (8)$$

gde se integral rasprostire na čitavu zapreminu tela, dok r zavisi od koordinata tačaka tela.

Formula (8) naročito je pogodna za upotrebu pri izračunavanju momenata inercije homogenih tela. Razmotrimo pojedine primere.



Sl. 297

1. Tanki homogeni štap dužine l i mase M . Odredimo moment inercije ovog štapa za osu Az , koja je upravna na štap (sl. 297). Povucimo duž štapa AB osu Ax . Tada je za bilo koji delić dužine dx veličina $r = x$, dok je odgovarajuća masa elementarnog delića $dm = \rho_1 dx$, gde je $\rho_1 = M/l$ masa jedinice dužine štapa. Formula (8) daje*

$$J_z = \int_0^l x^2 dm = \rho_1 \int_0^l x^2 dx = \frac{1}{3} \rho_1 l^3.$$

Ako uvedemo za ρ_1 odgovarajući izraz, dobićemo definitivno

$$J_z = \frac{1}{3} Ml^2. \quad (9)$$

2. Tanki kružni homogeni prsten poluprečnika R i mase M^{**} . Odredimo moment inercije ovakvog jednog prstena (tačka) za osu Cz , koja je uprav-

* Vrlo često se umesto oznake J_z piše i J_A , čime se želi da označi da je to moment inercije za osu koja prolazi kroz tačku A . Isto tako se, npr., sa J_C obeležava moment inercije za osu koja prolazi kroz težište tela C , i slično.

** Primedba prevodioca. Ovde se, ustvari, radi o tankoj homogenoj žici savijenoj u krug.

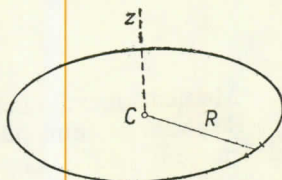
na na ravan prstena i koja prolazi kroz njegov centar (sl. 298). Kako se sve tačke prstena nalaze na rastojanju $r_i = R$ od ose Cz , to formula (6) daje

$$J_z = \sum m_i R^2 = (\sum m_i) R^2 = MR^2.$$

Prema tome, za prsten je

$$J_z = MR^2$$

(10)



Sl. 298

Očividno je da se isti rezultat dobija i za moment inercije tanke cilindrične ljuske mase M i poluprečnika R , a za uzdužnu osu ljuske.

3. Kružna homogena ploča ili valjak poluprečnika R i mase M . Izračunajmo moment inercije kružne ploče za osu Cz , koja je upravna na ravan ploče i koja prolazi kroz njeno središte (sl. 299, a). U tom cilju uočimo u ploči elementarni prsten poluprečnika r i širine dr . Površina ovog prstena jednaka je $2\pi r dr$, dok je masa $dm = \rho_2 2\pi r dr$, gde je $\rho_2 = M/R^2\pi$ masa jedinice površine ploče. Tada po formuli (10) za elementarni prsten biće

$$dJ_C = r^2 dm = 2\pi \rho_2 r^3 dr,$$

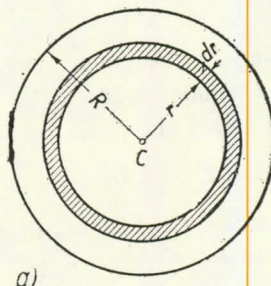
dok je za celu ploču

$$J_C = 2\pi \rho_2 \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho_2 R^4.$$

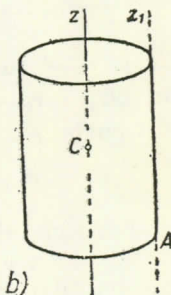
Ako sada smenimo odgovarajući izraz za ρ_2 , dobićemo definitivno

$$J_C = \frac{1}{2} MR^2.$$

(11)



a)



b)

Sl. 299

Istu ovakvu formulu dobili bismo, očividno, i za moment inercije homogenog valjka mase M i poluprečnika R , a za osu Cz (sl. 229, b)

4. Pravougaona ploča, konus, kugla. Izostavljajući izvođenja navedemo samo izraze za momente inercije sledećih tela (jer te formule može i sam čitalac lako da dobije samostalno):

a) homogena tanka ploča mase M sa stranama a i b (osa x usmerena je duž stranice a , a osa y duž stranice b):

$$J_x = \frac{1}{3} M b^2,$$

$$J_y = \frac{1}{3} M a^2;$$

b) pravi kružni homogeni konus mase M i poluprečnika osnove R (osa z usmerena je duž ose konusa):

$$J_z = \frac{3}{10} MR^2;$$

c) homogena kugla mase M i poluprečnika R (osa z je usmerena duž prečnika kugle:)

$$J_z = \frac{2}{5} MR^2.$$

Momenti inercije nehomogenih tela i tela složene konfiguracije mogu se odrediti eksperimentalnim putem pomoću odgovarajućih pribora. Jedna od tih metoda izložena je u § 155.

§ 133. Momenti inercije tela za paralelne ose

Momenti inercije datog tela za razne ose biće uopšte različiti. Pokažimo kako se može odrediti moment inercije za bilo koju osu koja je povučena kroz telo, ako se zna moment inercije za drugu bilo koju njjoj paralelnu osu.

Povucimo osu Cz kroz središte masa C tela i njoj paralelnu osu Oz_1 (sl. 300); rastojanje između paralelnih osa označimo sa d . Tada će po definiciji biti:

$$J_{Oz_1} = \sum m_i r_i^2, \quad J_{Oz} = \sum m_i r_i'^2,$$

gde je r_i — rastojanje proizvoljne tačke B tela od ose Oz_1 , a r_i' — rastojanje te iste tačke od ose Cz . Iz trougla Bae proizlazi da je

$$r_i^2 = r_i'^2 + d^2 - 2 dr_i' \cos \alpha_i.$$

Povucimo iz tačke C , kao koordinatnog početka, ose x i y upravne na Cz , pri čemu je osa x izabrana tako da seče osu Oz_1 ; tada je, očevидno, $Cx \parallel ae$. Ako sada označimo koordinate tačke B sa x_i, y_i, z_i , dobićemo $r_i' \cos \alpha_i = x_i$ i $r_i^2 = r_i'^2 + d^2 - 2 dx_i$.

Ako ovaj izraz za r_i smenimo u izraz za J_{Oz_1} i ako izvučemo opšte mnoziocce d^2 i $2d$ ispred znakova suma, dobićemo:

$$J_{Oz_1} = \sum m_i r_i'^2 + (\sum m_i) d^2 - 2 d \sum m_i x_i.$$

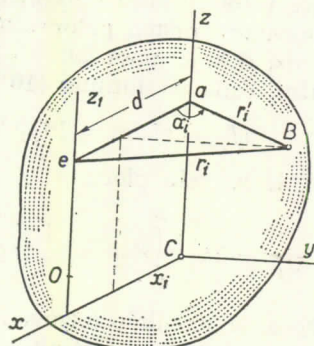
Na desnoj strani ove jednačine prva suma jednaka je J_{Cz} , dok je druga jednaka masi tela M . Odredimo treću sumu. Na osnovu formule (4) za koordinate središta sistema materijalnih tačaka je $\sum m_i x_i = M x_C$. Kako je u našem slučaju tačka C koordinatni početak, to je $x_C = 0$, pa je, prema tome, i $\sum m_i x_i = 0$. Na taj način konačno dobijamo:

$$J_{Oz_1} = J_{Cz} + M d^2.$$

(12)

Formula (12) izražava sledeću Štajnerovu (Hajgensovu) teoremu*: moment inercije tela za neku osu jednak je zbiru momenta inercije tela za njjoj paralelnu osu,

* Hristijan Hajgens (1629—1695) istaknuti holandski naučnik, mehaničar, fizičar i astronom. Prvi je konstruisao časovnike sa klatnom. U vezi s tim proučio je oscilacije fizičkog klatna (vidi § 154) i uveo je pojam o momentu inercije tela.



Sl. 300

koja prolazi kroz središte mase (centar inercije) tela i proizvoda mase celokupnog sistema i kvadrata rastojanja između paralelnih osa.

Iz formule (12) proizlazi da je $J_{Oz_1} > J_{Cz}$. Prema tome, od svih datih osa istog pravca, osi koja prolazi kroz središte mase odgovara najmanji moment inercije.

Štajnerova teorema omogućuje da se odredi moment inercije tela za datu osu Oz_1 i u tom slučaju kada je poznat moment inercije datog tela za bilo koju drugu osu Az_2 , koja je paralelna datoj osi.

U tom slučaju je potrebno da znamo rastojanja d_1 i d_2 svake od ovih osa od središta mase sistema. Tada znajući J_{Az_2} i d_2 , može, po formuli (12) da se odredi J_{Cz} , a zatim, korišćenjem iste formule da se odredi i traženi moment inercije J_{Oz_1} .

Zadatak 122. Odrediti moment inercije tankog štapa za osu Cz , koja je upravna na štap i koja prolazi kroz njegovo središte mase.

Rešenje. Povucimo kroz kraj A štapa osu Az (vidi sl. 297; osa Cz na njemu nije prikazana). Tada, po formuli (12), biće

$$J_{Cz} = J_{Az} - Md^2.$$

U datom slučaju je $d = \frac{1}{2}l$, gde je l — dužina štapa, dok se veličina J_{Az} može odrediti prema formuli (9). Prema tome je

$$J_{Cz} = \frac{1}{3} Ml^2 - \frac{1}{4} Ml^2 = \frac{1}{12} Ml^2.$$

Zadatak 123. Odrediti moment inercije valjka za osu Az_1 , koja prolazi kroz njegovu izvodnicu (vidi sl. 299, b).

Rešenje. Prema Štajnerovoj teoremi je $J_{Az} = J_{Cz} + Md^2$. U datom slučaju je $d = R$, dok je prema formuli (11) $J_{Cz} = \frac{1}{2} MR^2$.

Ako ove vrednosti smenimo u jednačinu od koje smo pošli, dobićemo:

$$J_{Az_1} = \frac{1}{2} MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2.$$

Glava XXIV

ZAKON O KRETANJU SREDIŠTA MASA SISTEMA

§ 134. Diferencijalne jednačine kretanja sistema

Neka se mehanički sistem sastoji od n materijalnih tačaka. Uočimo jednu, bilo koju, tačku tog sistema čija je masa m_i . Označimo rezultantu svih spoljašnjih sila koje deluju na ovu tačku (kako aktivnih sila, tako i reakcija) sa $\vec{F}_i^s$, a rezultantu svih unutrašnjih sila sa $\vec{F}_i^u$. Ako ova tačka ima ubrzanje $\vec{a}_i$, onda je na osnovu osnovnog zakona dinamike.

$$m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u.$$

Analogni rezultat može da se dobije i za bilo koju drugu tačku sistema. Prema tome, za sve tačke sistema biće:

$$\begin{array}{l} \vec{m}_1 \vec{a}_1 = \vec{F}_1^s + \vec{F}_1^u, \\ \vec{m}_2 \vec{a}_2 = \vec{F}_2^s + \vec{F}_2^u, \\ \dots\dots\dots \\ \vec{m}_n \vec{a}_n = \vec{F}_n^s + \vec{F}_n^u. \end{array} \quad (13)$$

Ove jednačine, iz kojih se može odrediti zakon kretanja svake od tačaka sistema, zovu se *diferencijalne jednačine kretanja sistema materijalnih tačaka* u vektorskom obliku. Jednačine (13) su diferencijalne, jer je $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2}$; sile koje ulaze u desne strane ovih jednačina, u opštem slučaju, mogu da zavise od vremena, od koordinata tačaka sistema, a takođe, i od njihovih brzina (vidi § 99 i § 107).

Projicirajući jednačine (13) na bilo koju od koordinatnih osa, možemo dobiti diferencijalne jednačine kretanja sistema u obliku projekcija na datu osu.

Potpuno rešenje osnovnog zadatka dinamike za sistem, sastojalo bi se u tome, da znajući date sile izvršimo integriranje odgovarajućih diferencijalnih jednačina kretanja i da na taj način pojedinačno odredimo zakon kretanja svake od tačaka sistema.

Međutim, ovaj put za rešavanje problema obično se ne primenjuje, i to iz dva razloga. Na prvom mestu, takav put je vrlo složen, i skoro uvek je vezan sa nepremostivim matematičkim teškoćama. S druge strane, pri rešavanju mehaničkih problema obično je dovoljno da znamo neke sumarne karakteristike kretanja čitavog sistema, a ne kretanje svake od tačaka iz kojih se sastoji sistem. Takve sumarne karakteristike kretanja sistema određuju se pomoću *opštih zakona* dinamike sistema, na čije ćemo proučavanje sada preći.

Osnovna uloga jednačina (13) sastoji se u tome, što one, ili pak njihove posledice, predstavljaju polazne tačke za dobijanje odgovarajućih opštih zakona dinamike sistema materijalnih tačaka.

§ 135. Zakon o kretanju središta masa

U čitavom nizu problema za određivanje karaktera kretanja sistema (a naročito krutog tela), dovoljno je da se poznaje zakon kretanja njegovog središta masa. Da bismo došli do tog zakona, vratimo se na jednačine kretanja sistema (13) i sabirimo član po član njihovih levih i desnih strana. U krajnjem rezultatu dobija se:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^s + \sum \vec{F}_i^u. \quad (14)$$

Transformišimo levu stranu ove jednačine. Iz formule (5) za vektor položaja središta masa sistema proizlazi

$$\sum m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_C.$$

Ako potražimo druge izvode po vremenu od obe strane ove jednačine i ako uzmemo u obzir da je izvod zbira jednak zbiru izvoda pojedinih članova zbira, dobićemo:

$$\sum m_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = M \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2},$$

ili

$$\sum m_i \vec{a}_i = M \vec{a}_C, \quad (15)$$

gde je $\vec{a}_C$ — ubrzanje središta masa sistema. Kako je na osnovu svojstava unutrašnjih sila sistema (§ 129) $\sum \vec{F}_i^u = 0$, to unošenjem (15) u jednačinu (14) dolazimo do jednačine:

$$M \vec{a}_C = \sum \vec{F}_i^s = \vec{F}_R. \quad (16)$$

Jednačina (16) izražava zakon o kretanju središta masa sistema. Kao što vidimo po svom spoljašnjem obliku ona se poklapa sa jednačinom koja određuje zakon kretanja materijalne tačke (§ 100, formula 3). U jednačini (16) je $m = M$, a aktivne sile jednake su $\sum \vec{F}_i^s = \vec{F}_R$. Prema tome, dokazani zakon o kretanju središta masa može se formulisati na sledeći način: *središte masa sistema materijalnih*

tačka kreće se kao materijalna tačka čija je masa jednaka ukupnoj masi celokupnog sistema i na koju deluje rezultanta svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem.

Projicirajući obe strane jednačine (16) na koordinatne ose, dobijamo:

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= M \ddot{x}_C = \Sigma X_i^s = X_R^s, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= M \ddot{y}_C = \Sigma Y_i^s = Y_R^s, \\ M \frac{d^2 z_C}{dt^2} &= M \ddot{z}_C = \Sigma Z_i^s = Z_R^s. \end{aligned} \quad (16')$$

Ove jednačine predstavljaju diferencijalne jednačine kretanja središta masa sistema izražene u obliku projekcija na koordinate ose.

Značaj dokazanog zakona sastoji se u sledećem.

1) Zakon daje obrazloženje metodama dinamike tačke. Iz jednačina (16') se vidi da rešenja koja dobijamo posmatrajući dato telo kao materijalnu tačku, određuju zakon kretanja središta masa ovog tela. Prema tome, ova rešenja imaju potpuno jasan i tačan smisao.

U posebnom slučaju, ako se telo kreće translatorno, onda je njegovo kretanje u potpunosti određeno kretanjem središta masa. Prema tome, telo koje se kreće translatorno može se uvek smatrati materijalnom tačkom, čija je masa jednaka masi čitavog tela. U ostalim slučajevima telo se može smatrati materijalnom tačkom samo tada, kada je, praktično, za određivanje položaja tela, dovoljno da se zna samo položaj njegovog središta masa.

2) Zakon omogućuje da se prilikom određivanja zakona kretanja središta masa bilo kog sistema isključe iz razmatranja sve unapred nepoznate unutrašnje sile. U ovome se sastoji praktični značaj izvedenog zakona.

§ 136. Zakon o održanju kretanja središta masa

Iz zakona o kretanju središta masa mogu se dobiti sledeće vrlo važne posledice.

1) Neka je geometrijski zbir svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, jednak nuli:

$$\Sigma \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s = 0.$$

Tada iz jednačine (16) proizlazi, da je $\vec{a}_C = 0$ ili $\vec{v}_C = \text{const.}$

Prema tome, ako je geometrijski zbir svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, jednak nuli, onda se središte masa sistema kreće brzinom konstantnog intenziteta i konstantnog pravca, tj. središte masa se kreće ravnomerno i pravolinijski. U posebnom slučaju, ako je u početnom trenutku središte sistema bilo u miru, onda će ono i dalje ostati u miru. Kao što vidimo, unutrašnje sile ne mogu izazvati promenu kretanja središta masa sistema.

2) Neka geometrijski zbir spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, nije jednak nuli, ali neka su ove sile takve da je suma njihovih projekcija na neku osu (npr., na osu Ox) jednaka nuli:

$$\Sigma X_i^s = X_R^s = 0.$$

Tada, prva od jednačina (16') daje

$$\frac{d^2x_C}{dt^2} = 0, \quad \text{odnosno} \quad \frac{dx_C}{dt} = v_{Cx} = \dot{x}_C = \text{const.}$$

Prema tome, ako je suma projekcija svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, na neku osu jednaka nuli, onda je projekcija brzine središta masa sistema na tu osu konstantna veličina. U posebnom slučaju, ako je u početnom trenutku vremena $v_{Cx} = 0$, onda će i u bilo kom drugom trenutku vremena, koji sledi, biti $v_{Cx} = 0$, tj. središte sistema masa neće se kretati duž ose Ox ($x_C = \text{const.}$).

Svi navedeni rezultati izražavaju zakon o održanju kretanja središta masa sistema materijalnih tačaka. Razmotrimo neke primere, koji će ilustrovati primenu ovog zakona.

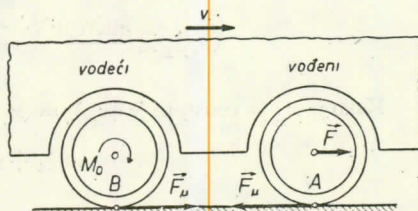
a) Kretanje središta masa Sunčevog sistema. Kako se privlačenje pojedinih zvezda praktično može zanemariti, to se može smatrati, da na Sunčev sistem ne deluju nikakve spoljašnje sile. Prema tome, u prvom približenju, središte masa Sunčevog sistema kreće se ravnomerno i pravolinijski.

b) Dejstvo sprega sila na tela (vidi, npr., sl. 43). Ako na slobodno kruto telo počne da deluje spreg sila ($\vec{F}'$, $\vec{F}$), onda je geometrijska suma spoljašnjih sila jednaka nuli ($\vec{F} + \vec{F}' = 0$). Prema tome, središte masa C tela, ako je ono u početnom trenutku vremena bilo nepomično, ostaje nepomično i kad na telo deluje spreg. Na taj način, ako na slobodno kruto telo delujemo spregom sila, ono će početi da se obrće oko svog središta masa (vidi § 19).

c) Kretanje po horizontalnoj ravni. Pri odsustvu trenja pomoću svojih mišićnih naprezanja (unutrašnjih sila) čovek ne bi mogao da se kreće u horizontalnoj ravni, jer je u tom slučaju suma projekcija svih spoljašnjih sila koje deluju na čoveka (sila teže i reakcija ravni) na bilo koju horizontalnu osu Ox jednaka nuli, tako da se središte masa čoveka neće kretati duž horizontalne ravni ($x_C = \text{const.}$).

Ako, npr., čovek pomeri svoju desnu nogu unapred, onda će leva noga skliznuti nazad, dok će središte masa čoveka ostati na istom mestu. Međutim, ako postoji trenje, klizanje leve noge unazad biće sprečeno silom trenja, koja će u tom slučaju biti usmerena unapred. Ova sila trenja u navedenom slučaju biće ona spoljašnja sila koja omogućuje čoveku da se pomera u stranu njenog dejstva (u datom slučaju unapred).

Na analogan način nastaje i kretanje lokomotive ili automobila. Sila pritiska pare ili pak gasa u motoru je unutrašnja sila i sama po sebi ne može da pomeri središte masa sistema. Kretanje se vrši na taj način što motor predaje odgovarajućim točkovima, koji se nazivaju vodećim, *obrtni moment*. Tom prilikom tačka dodira B vodećeg točka (sl. 301) teži da sklizne ulevo. Međutim, na točak deluje sila trenja usmerena



SL. 301

udesno. Ova spoljašnja sila omogućuje kretanje težišta lokomotive ili automobila udesno. Kada ova sila ne postoji, ili pak kada ona nije dovoljna da savlada otpor koji postoji na vođenim točkovima*, onda vozilo ne može da se kreće unapred (udesno); u tom slučaju vodeći točkovi se obrću u mestu.

* Na vođeni točak ne deluje obrtni moment, već sila na osovinu točka. Pod njenim dejstvom ceo točak, pa s njim i tačka dodira A točka sa podlogom, teži da se pomeri unapred. Tom prilikom na točak deluje sila trenja usmerena unazad. Ova spoljašnja sila koči (sprečava) kretanje unapred.

d) Kočenje. Za kočenje doboša, čvrsto vezanog za točak koji se kotrlja, upotrebljava se papuča za kočenje. Sila trenja koja tom prilikom nastaje između papuče za kočenje i doboša je unutrašnja sila i sama po sebi ne može da izmeni kretanje središta mase, tj. ona sama ne može da ukoči automobil ili pak voz. Trenje papuče za kočenje o doboš usporiće obrtanje točka oko njegove ose, a to će povećati silu trenja točka o šinu (odnosno o podlogu), usmerenu nasuprot kretanju. Ta spoljašnja sila će usporiti kretanje središta mase voza, odnosno automobila, tj. ona će omogućiti kočenje (vidi zadatak 148., § 156).

§ 137. Rešavanje zadataka

Korišćenjem zakona o kretanju središta mase, možemo, ako znamo spoljašnje sile, odrediti zakon kretanja središta mase i obrnuto, ako znamo kretanje središta mase, možemo odrediti glavni vektor spoljašnjih sila koje deluju na sistem. Primer za rešavanje drugog zadatka razmotren je malo niže.

Ovaj zakon omogućuje da se isključe iz razmatranja sve unutrašnje sile. Iz tog razloga treba se postarati da pri rešavanju zadataka posmatrani sistem izaberemo tako da bude što je moguće više nepoznatih unutrašnjih sila.

U slučaju kada važi zakon o održanju kretanja središta mase, ovaj zakon omogućuje da se na osnovu kretanja jednog dela sistema odredi kretanje drugog dela sistema.

Dokazali smo da je za vreme kretanja sistema stalno $x_C = \text{const}$ kada je ispunjen uslov $X_R^s = \Sigma X_i^s = 0$, i kada je u početnom trenutku vremena $v_{Cx} = 0$. Neka se, npr., sistem sastoji od tri tela čije su mase m_1, m_2, m_3 i neka u početnom trenutku koordinate središta tih masa budu x_1, x_2, x_3 . Ako pod dejstvom unutrašnjih (ili spoljašnjih) sila tela izvrše apsolutna pomeranja i ako su projekcije tih pomeranja na osu $Ox - \xi_1, \xi_2, \xi_3$, onda će odgovarajuće koordinate središta mase pojedinih tela postati $x_1 + \xi_1, x_2 + \xi_2, x_3 + \xi_3$. U tom slučaju koordinate središta mase čitavog sistema x_C u početnom i krajnjem trenutku vremena biće:

$$(x_C)_0 = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{M}$$

$$(x_C)_1 = \frac{m_1(x_1 + \xi_1) + m_2(x_2 + \xi_2) + m_3(x_3 + \xi_3)}{M},$$

Kako je $x_C = \text{const}$, to je $(x_C)_0 = (x_C)_1$, pa je, prema tome,

$$m_1 \xi_1 + m_2 \xi_2 + m_3 \xi_3 = 0, \quad (17)$$

ili

$$G_1 \xi_1 + G_2 \xi_2 + G_3 \xi_3 = 0. \quad (17')$$

Na taj način, u slučaju kada važi zakon o održanju kretanja središta mase duž ose Ox , algebarska suma proizvoda mase (ili težina) tela sistema i projekcija apsolutnih pomeranja njihovih središta mase mora biti jednaka nuli, pod uslovom da je u početnom trenutku vremena $v_{Cx} = 0$. Pri određivanju $\xi_1, \xi_2, \dots$, treba uvek voditi računa o njihovom znaku.

Zadatak 124. Na pramcu i krmi čamca težine G sede na rastojanju l jedan od drugog dva čoveka težine G_A i G_B svaki (sl. 302). Zanemarujući otpor vode odrediti u kome će se smeru i za koliko pomeriti čamac ako ljudi u čamcu budu promenili svoja mesta.

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja nepoznate sile trenja nogu o dno čamca i mišićna naprezanja ljudi, posmatraćemo čamac i ljude kao jedan sistem (tada su pomenute sile unutrašnje sile). Spoljašnje sile koje deluju na sistem su vertikalne sile $\vec{G}$, $\vec{G}_A$, $\vec{G}_B$, $\vec{F}_N$. Tada iz uslova $X_R^s = \Sigma X_i^s = 0$, s obzirom da je u početnom trenutku vremena $v_{Cx} = 0$, dobijamo da je $x_C = \text{const}$. Prema tome, apsolutna pomeranja svih tela vezana su zavisnošću (17).

Prikažimo čamac i ljude u početnom i krajnjem položaju; pomeranje čamca je $\xi = x$. Dalje, apsolutno pomeranje prvog čoveka je $\xi_A = x + l$; apsolutno pomeranje drugog čoveka jednako je $\overline{BB_1}$, a projekcija ovog pomeranja na osu Ox biće $\xi_B = -(l - x)$. Tada, prema jednačini (17'), dobijamo:

$$Gx + G_A(x + l) + G_B[-(l - x)] = 0,$$

odakle nalazimo da je pomeranje čamca

$$x = \frac{G_B - G_A}{G + G_A + G_B} l.$$

Ako je $G_B > G_A$, onda je $x > 0$, tj. čamac se pomera udesno; ako je $G_B < G_A$ čamac se pomera ulevo. Isto tako, kada je $G_B = G_A$ čamac ostaje u mestu.

Podvucimo, takođe, još jednom vrlo važan zaključak: sistem, čije kretanje treba proučiti u nekom zadatku, treba da se izabere tako da unapred nepoznate sile budu unutrašnje sile.

Zadatak 125. Težište vratila motora udaljeno je od ose vratila za veličinu $\overline{AB} = a$. Težina vratila jednaka je G_1 , dok težina svih ostalih delova motora iznosi G . Odrediti po kom će se zakonu kretati motor, postavljen na glatku horizontalnu ravan, kada se vratilo obrće konstantnom uganom brzinom ω . Odrediti, isto tako, kolikom bi maksimalnom silom bio opterećen zavrtnaj, kad bi motor bio pričvršćen za podlogu.

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja sile koje obrću vratilo, smatrajući ih unutrašnjim silama, posmatrajmo ceo motor sa vratilom kao jedan sistem.

1) Kada motor nije čvrsto vezan za svoju podlogu onda će sve sile koje na njega deluju biti vertikalne, tako, da slično kao i u prethodnom zadatku, može da se upotrebi zakon o održanju kretanja središta masa duž ose Ox . Prikažimo motor u proizvoljnom položaju (sl. 303), smatrajući da je početni položaj onaj položaj kada tačke A i B leže na jednoj vertikali (na osi Oy). Tada je u proizvoljnom položaju $\xi_A = x$, $\xi_B = x + a \sin \varphi$. Odavde, imajući u vidu da je $\varphi = \omega t$, prema formuli (17') nalazimo

$$Gx + G_1(x + a \sin \omega t) = 0,$$

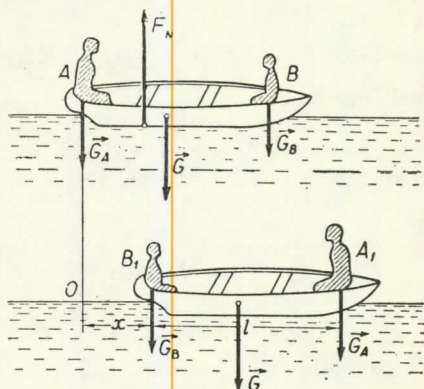
odakle je

$$x = -\frac{G_1 a}{G + G_1} \sin \omega t.$$

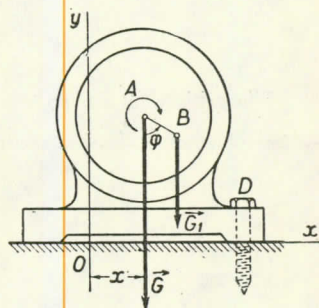
Prema tome, motor vrši harmonijske oscilacije sa kružnom frekvencijom ω .

2) Kada je motor pričvršćen, onda će prema prvoj od jednačina (16') horizontalna reakcija X zavrtnja biti jednaka

$$X = M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = M \ddot{x}_C, \quad \text{gde je} \quad x_C = -\frac{Gx + G_1 x_B}{Mg}.$$



Sl. 302



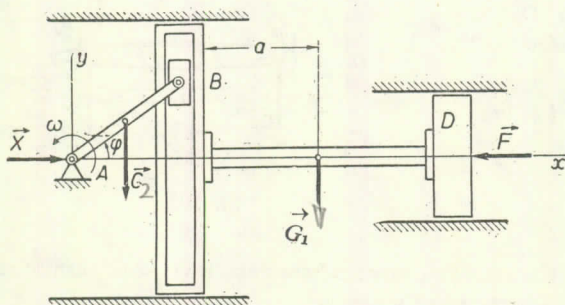
Sl. 303

U ovom slučaju tačka A je nepomična i $x_A = h$ ($h = \text{const}$), dok je $x_B = h + a \sin \omega t$. Diferenciranjem po vremenu i množenjem drugog izvoda masom M (M masa celog sistema), dobijamo:

$$X = M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \frac{G_1}{g} \frac{d^2 x_B}{dt^2} = -\frac{G_1 a \omega^2}{g} \sin \omega t.$$

Sila pritiska na zavrtnj po intenzitetu jednaka je $|X|$ i usmerena je u suprotnu stranu. Njena maksimalna veličina biće $\frac{G_1 a \omega^2}{g}$.

Zadatak 126. Krivaja AB , dužine r i težine G , obrće se konstantnom ugaonom brzinom ω i pokreće kulu, kao i za nju vezani klip D . Ukupna težina kule sa klipom je G_1 (sl. 304). Na klip pri njegovom kretanju deluju



Sl.304

konstantna sila $\vec{F}$. Zanemarujući trenje o vodice, odrediti najveći horizontalni pritisak na osu A krivaje.

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja sile koje obrću krivaju kao i pritisak na nju od strane kule, razmotrimo kretanje celog sistema. Tada, prema prvoj od jednačina (16'), ako označimo horizontalnu reakciju ose A sa $\vec{X}$, biće:

$$M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = M \ddot{x}_C = X - F,$$

gde je saglasno formulama (4)

$$M x_C = m_1 x_1 + m_2 x_2.$$

U našem slučaju je

$$m_1 = \frac{G}{g}, \quad x_1 = \frac{1}{2} r \cos \omega t; \quad m_2 = \frac{G_1}{g}, \quad x_2 = a + r \cos \omega t,$$

jer je $\varphi = \omega t$. Kao krajnji rezultat izlazi da je

$$X = F + M \frac{d^2 x_C}{dt^2} = F - \frac{1}{2} \frac{r \omega^2}{g} \left(\frac{1}{2} G + G_1 \right) \cos \omega t.$$

Sila pritiska na osu po intenzitetu jednaka je $|X|$ usmerena je u suprotnu stranu. Pritisak će dostići svoju maksimalnu vrednost kada je ugao $\varphi = 180^\circ$ i biće jednak $F + \frac{r \omega^2}{g} \left(\frac{1}{2} G + G_1 \right)$.

Glava XXV

ZAKON O PROMENI (PRIRAŠTAJU) KOLIČINE KRETANJA SISTEMA

§ 138. Količina kretanja sistema

Količinom kretanja sistema materijalnih tačaka naziva se vektorska veličina $\vec{K}$, koja je jednaka geometrijskom zbiru (glavnom vektoru) količina kretanja svih tačaka iz kojih se sastoji sistem (sl. 305)

$$\vec{K} = \Sigma \vec{K}_i = \Sigma m_i \vec{v}_i.$$

(18)

Sa crteža se vidi da, nezavisno od veličina brzina tačaka sistema (ako samo te brzine nisu paralelne), vektor $\vec{K}$ može da ima bilo koju vrednost, pa može takode da bude jednak i nuli, kada je poligon konstruisan od vektora $m_i \vec{v}_i$ zatvoren. Prema tome, prema veličini $\vec{K}$ ne može se potpuno suditi o karakteru kretanja sistema.

Potražimo formulu preko koje će biti daleko lakše da se izračuna veličina $\vec{K}$ i koja će daleko bolje objasniti njen smisao. Iz jednačine (5) proizlazi

$$\Sigma m_i \vec{r}_i = M \vec{r}_C$$

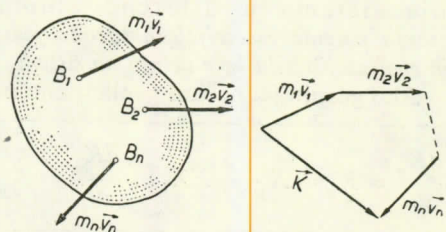
Ako od obe strane ove jednačine potražimo izvod po vremenu, dobićemo

$$\Sigma m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = M \frac{d\vec{r}_C}{dt}, \text{ odnosno } \Sigma m_i \vec{v}_i = M \vec{v}_C,$$

odakle nalazimo da je

$$\vec{K} = M \vec{v}_C,$$

(19)



SL. 305

tj. količina kretanja sistema jednaka je proizvodu iz celokupne mase sistema i brzine njegovog središta masa. Ovaj rezultat je naročito pogodan da se upotrebi pri izračunavanju količine kretanja krutih tela.

Iz formule (19) se vidi da ako se telo (ili pak sistem) kreće tako da središte masa ostaje nepomično, onda je količina kretanja tog tela (odnosno sistema) jednaka nuli. Tako, npr., količina kretanja tela koje se obrće oko nepomične ose, koja prolazi kroz njegovo središte masa, biće jednaka nuli.

Međutim, ako je kretanje tela složeno, onda veličina $\vec{K}$ neće moći da okarakteriše obrtanje oko središta masa. Npr., za točak koji se kotrlja $\vec{K} = M\vec{v}_C$, nezavisno od toga kako se obrće točak oko svog središta masa C .

Prema tome, količina kretanja karakteriše samo translatorno kretanje sistema. Pri složenom pak kretanju veličina $\vec{K}$ karakteriše samo translatorni deo kretanja sistema zajedno sa njegovim središtem masa.

§ 139. Zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja sistema

Neka se sistem sastoji od n materijalnih tačaka. Postavimo za ovaj sistem diferencijalne jednačine kretanje (13) i zatim saberimo sve ove jednačine. Tada ćemo dobiti:

$$\sum m_i \vec{a}_i = \sum \vec{F}_i^s + \sum \vec{F}_i^u$$

Poslednja suma u gornjem izrazu, zbog osobina unutrašnjih sila, biće jednaka nuli. Osim toga je

$$\sum m_i \vec{a}_i = \frac{d}{dt} (\sum m_i \vec{v}_i) = \frac{d\vec{K}}{dt}.$$

Tako dolazimo do jednačine

$$\frac{d\vec{K}}{dt} = \dot{\vec{K}} = \vec{F}_R^s = \sum \vec{F}_i^s. \quad (20)$$

Jednačina (20) izražava zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja sistema u diferencijalnom obliku: *izvod po vremenu od količine kretanja sistema materijalnih tačaka jednak je geometrijskoj sumi (glavnom vektoru) svih spoljašnjih sila koje deluju na sistem.*

Ako gornju jednačinu projiciramo na koordinatne ose dobićemo:

$$\frac{dK_x}{dt} = \dot{K}_x = X_R^s = \sum X_i^s, \quad \frac{dK_y}{dt} = \dot{K}_y = Y_R^s = \sum Y_i^s; \quad \frac{dK_z}{dt} = \dot{K}_z = Z_R^s = \sum Z_i^s.$$

(21)

Iskažimo ovaj zakon u drugom obliku. Neka u trenutku $t = 0$ količina kretanja sistema bude jednaka $\vec{K}_0$, a u trenutku t_1 neka bude jednaka $\vec{K}_1$. Tada, ako obe strane jednačine (20) pomnožimo sa dt , i, ako izvršimo integriranje, dobićemo:

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = \sum \int_0^{t_1} \vec{F}_i^s dt,$$

odnosno

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = \Sigma \vec{I}_i^s, \quad (22)$$

s obzirom da integrali, koji stoje na desnoj strani gornje jednačine, određuju impuls spoljašnjih sila.

Jednačina (22) izražava zakon o promeni (priraštaju) količine kretanja sistema u integralnom obliku: *promena (priraštaj) količine kretanja sistema za neki. konačni vremenski interval jednaka je zbiru impulsa spoljašnjih sila koje u tom vremenskom intervalu deluju na sistem.*

U obliku projekcija na koordinatne ose biće:

$$\begin{aligned} K_{1x} - K_{0x} &= \Delta K_x = \Sigma I_{ix}^s, \\ K_{1y} - K_{0y} &= \Delta K_y = \Sigma I_{iy}^s, \\ K_{1z} - K_{0z} &= \Delta K_z = \Sigma I_{iz}^s. \end{aligned} \quad (23)$$

Pokažimo vezu koja postoji između ovog zakona i zakona o kretanju središta masa. Kako je $\vec{K} = M\vec{v}_C$ i $d\vec{v}_C/dt = \vec{a}_C$, to unošenjem ovih vrednosti u jednačinu (20) dolazimo do $M\vec{a}_C = \Sigma \vec{F}_i^s$, tj. dobijamo jednačinu (15).

Prema tome, zakon o kretanju središta masa i zakon o promeni količine kretanja sistema predstavljaju u suštini dva razna oblika jednog te istog zakona. U svim slučajevima kada se proučava kretanje krutog tela (ili pak sistema tela), može se potpuno ravnopravno upotrebiti bilo koji od ova dva oblika, pri čemu je obično pogodnija za upotrebu jednačina (15).

Međutim, pri proučavanju neprekidnih sredina (tečnosti ili gasa) pojam o središtu masa praktično gubi svoj smisao. U svim takvim slučajevima za rešavanje zadataka koristi se zakon o promeni količine kretanja sistema. Važnu primenu ima ovaj zakon takođe i u teoriji udara (glava XXXI) i pri proučavanju reaktivnog kretanja (§ 142).

Praktični značaj ovog zakona sastoji se u tome što on omogućuje da se isključe iz razmatranja sve unapred nepoznate unutrašnje sile (npr., sile pritiska jednog delića tečnosti na drugi).

§ 140. Zakon o održanju količine kretanja sistema

Iz zakona o promeni količine kretanja sistema mogu da se dobiju sledeće važne posledice:

1) Neka geometrijski zbir (glavni vektor) svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, bude jednak nuli:

$$\Sigma \vec{F}_i^s = \vec{F}_R^s = 0.$$

Tada iz jednačine (20) proizlazi da je onda $\vec{K} = \text{const}$. Prema tome, *ako je glavni vektor spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, jednak nuli, onda će vektor količine kretanja sistema biti konstantan i po intenzitetu i po pravcu.*

2) Neka spoljašnje sile, koje deluju na sistem, budu takve, da je suma njihovih projekcija na neku osu (npr. Ox) jednaka nuli:

$$\Sigma X_i^s = X_R^s = 0.$$

Tada iz jednačina (21) proizlazi da je $K_x = \text{const.}$ Prema tome, ako je suma projekcija spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, na neku osu jednaka nuli, onda je projekcija količine kretanja sistema na tu osu konstantna veličina.

Ovaj rezultat izražava zakon o održanju količine kretanja sistema. Iz ovog zakona proizlazi da unutrašnje sile ne mogu promeniti sumarnu količinu kretanja sistema. Razmotrimo nekoliko primera.

a) Trzanje puške. Ako posmatramo pušku i metak kao jedan sistem, onda će pritisak gasova pri pucnju biti unutrašnja sila. Ova sila ne može promeniti sumarnu količinu kretanja sistema. Međutim, kako barutni gasovi deluju na metak i saopštavaju mu neku količinu kretanja, koja je usmerena unapred, onda oni moraju u isto vreme da saopšte i puški istu takvu količinu kretanja, samo usmerenu u suprotnom smeru, odnosno unazad, da bi količina kretanja ostala nepromenjena, tj. da bi bila jednaka nuli. Ovo izaziva kretanje puške unazad, tj. trzanje puške. Analogna pojava nastaje pri pucnju iz topa.

b) Rad elise (propelera). Elisa saopštava nekoj masi vazduha (ili vode) kretanje duž ose elise potiskivajući ovu masu unazad. Ako budemo posmatrali potisnutu masu i avion (odnosno brod) kao jedan sistem, onda uzajamno dejstvo elise i odgovarajuće sredine predstavlja unutrašnju silu i ne može izazvati promenu sumarne količine kretanja tog sistema. Iz tog razloga pri potiskivanju mase vazduha (ili vode) unazad, avion (ili brod) dobija odgovarajuću brzinu kretanja unapred, koja mora biti takva da količina kretanja čitavog posmatranog sistema bude jednaka nuli, jer je ona bila jednaka nuli i pre početka kretanja.

c) Reaktivno kretanje. U reaktivnom zrnu (raketi) gasoviti produkti sagorevanja goriva izlaze vrlo velikom brzinom iz otvora na repu rakete (iz mlaznice reaktivnog motora). Sile pritiska, koje tom prilikom deluju, biće unutrašnje sile i one ne mogu izmeniti sumarnu količinu kretanja sistema raketa — gasni produkti. Međutim, kako gasni produkti, koji izlaze, imaju izvesnu količinu kretanja, koja je usmerena unazad, to raketa dobija odgovarajuću brzinu kretanja unapred. Veličina ove brzine biće određena u § 142.

Skrećemo pažnju na to da elisni motor (prethodni primer) saopštava objektu, npr. avionu, kretanje na račun potiskivanja unazad delića one sredine u kojoj se avion kreće. U bezvazдушnom prostoru takvo kretanje bilo bi, prema tome, nemoguće. Reaktivni motor pak izaziva kretanje na račun potiskivanja unazad mase, koja se proizvodi u samom motoru (produkti sagorevanja). Prema tome, ovakvo kretanje je moguće ostvariti kako u vazдушnom tako i u bezvazдушnom prostoru.

§ 141. Rešavanje zadataka

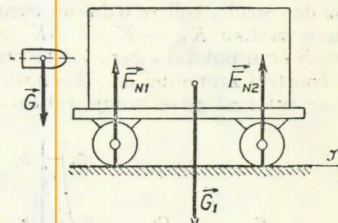
Zakon o promeni količine kretanja obično se koristi pri proučavanju kretanja neke neprekidne sredine — medijuma (tečnosti, gasa).

Korišćenjem ovog zakona mogu se isključiti iz razmatranja sve unutrašnje sile. Prema tome, pri rešavanju zadataka treba sistem koji posmatramo izabrati tako da sve (ili bar deo) unapred nepoznatih sila budu unutrašnje sile.

Zakon o održavanju količine kretanja je korisno primenjivati u svim onim slučajevima kada na osnovu promene translatorne brzine jednog dela sistema, treba odrediti brzinu drugog dela sistema. U posebnom slučaju ovaj zakon se naročito mnogo koristi u teoriji udara.

Zadatak 127. Pušcano zrno, težine G , koje leti u horizontalnom pravcu brzinom v_1 , udari u nepomičan težak sanduk s peskom postavljen na vagonet (sl. 306). Kojom će brzinom početi da se kreće vagonet, posle tog udara, ako ukupna težina sanduka sa vagonetom iznosi G_1 ?

Rešenje. Pušcano zrno i vagonet posmatračemo kao jedan sistem. To omogućuje da pri rešavanju ovog zadatka isključimo iz razmatranja sile koje nastaju pri udaru pušcanog zrna o pesak. Suma projekcija svih spoljašnjih sila na horizontalnu osu Ox jednaka je nuli. Prema tome je $K_x = \text{const}$ ili $K_{0x} = K_{1x}$, gde je K_0 — količina kretanja sistema pre udara, a K_1 — količina kretanja sistema posle udara. Kako je pre udara vagonet bio nepomičan, to je $K_{0x} = \frac{G}{g} v_1$.



Sl. 306

Posle udara vagonet i zrno kretaće se istom brzinom koju ćemo označiti sa v . Tada je

$$K_{1x} = \frac{G + G_1}{g} v.$$

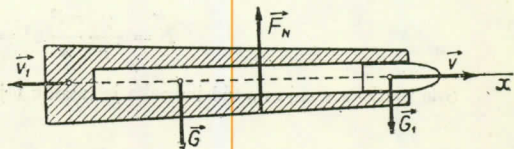
Ako izjednačimo desne strane izraza za K_{0x} i K_{1x} , dobićemo:

$$v = \frac{G}{G + G_1} v_1.$$

Zadatak 128. Odrediti brzinu pomeranja unazad neučvršćenog topa pri pucnju, ako je cev topa horizontalna. Težina dela koji se pomera unazad iznosi G , težina zrna G_1 , a relativna brzina zrna prema cevi u trenutku izlaska iz cevi v .

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja nepoznate sile barutnih gasova posmatračemo zrno i deo topa koji se pomera unazad kao jedan mehanički sistem.

Zanemarićemo otpor koji za vreme kretanja zrna nastaje u cevi. Tada je suma projekcija spoljašnjih sila na horizontalnu osu Ox jednaka nuli (sl. 307) i $K_x = \text{const}$, a kako je u trenutku opaljivanja sistem bio nepomičan ($K_0 = 0$), to će i u bilo kom trenutku vremena biti $K_x = 0$.



Sl. 307

Označimo brzinu delova topa koji se pomeraju unazad u krajnjem trenutku sa $\vec{v}_1$. Tada

će apsolutna brzina zrna u tom trenutku biti $\vec{v} + \vec{v}_1$. Prema tome, dobijamo:

$$K_x = \frac{G}{g} v_{1x} + \frac{G_1}{g} (v_x + v_{1x}) = 0, \quad (a)$$

odakle nalazimo da je

$$v_{1x} = - \frac{G_1}{G_1 + G} v_x.$$

Kada bi bila poznata apsolutna brzina zrna u trenutku izlaska iz cevi $\vec{v}_{ax}$, onda bi u jednačinu (a) umesto $v_x + v_{1x}$ ušla neposredno veličina v_{ax} , tako da bi bilo

$$v_{1x} = - \frac{G_1}{G} v_{ax}.$$

Znak minus u oba slučaja pokazuje da je smer brzine $\vec{v}_1$ suprotan smeru brzine $\vec{v}$.

Podvucimo da pri određivanju ukupne količine kretanja sistema treba uzimati u obzir apsolutne brzine njegovih delova.

Zadatak 129. Pritisak struje. Struja vode ističe iz otvora brzinom $v = 10 \text{ m/s}$ i pod pravim uglom udara o nepomični zid (sl. 308). Prečnik struje, koja ističe, iznosi $d = 4 \text{ cm}$. Zanimajući kontrakciju struje odrediti silu pritiska struje na zid.

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja unutrašnje sile pritiska delića tečnosti jednih na druge, pri njihovom udaru o zid, primenimo prvu od jednačina (23):

$$K_{1x} - K_{0x} = \Delta K_x = \Sigma \mathbf{I}_{ix}^s, \quad (a)$$

na deo struje, koji se u datom trenutku nalazi u zapremini abc . Izračunajmo za uočeni deo zapremine razliku $K_{1x} - K_{0x} = \Delta K_x$ za neki vremenski interval t_1 . Za vreme t_1 taj deo zapremine preći će u položaj $a_1b_1c_1$. Za to vreme veličina K_x umanjuje se za veličinu mv , gde je m — masa tečnosti u zapremini aa_1 . Tečnost, koja pritiče u zapremini bb_1 i cc_1 , kreće se upravno na osu Ox i ne utiče na povećavanje veličine K_x . Kako se, prema tome, veličina K_x samo smanjuje, biće

$$K_{1x} - K_{0x} = \Delta K_x = -mv.$$

Spoljašnje sile koje deluju na uočeni deo zapremine, kada se projiciraju na osu x , daju jedino silu jednaku reakciji zida $\vec{F}$. Ako ovu silu $\vec{F}$ budemo smatrali konstantnom, dobićemo:

$$\Sigma \mathbf{I}_{ix}^s = X t_1 = -F t_1.$$

Prema tome, korišćenjem jednačine (a) izlazi da je

$$mv = F t_1. \quad (b)$$

Odredimo veličinu m . Kako je pomeranje $aa_1 = vt_1$, to je

$$m = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi d^2}{4} vt_1,$$

gde je γ — specifična težina vode, pa je, prema tome, $\frac{\gamma}{g}$ — gustina tečnosti. Ako ovu vrednost smenimo u jednačini (b), i ako uzmemo u obzir da je za vodu $\gamma = 1000 \text{ kp/m}^3$, dobijamo:

$$F = \frac{\gamma}{g} \frac{\pi d^2}{4} v^2 = 12,8 \text{ kp}.$$

Sila pritiska struje na zid jednaka je takođe toj veličini.

§ 142*. Telo promenljive mase. Kretanje raketa

U klasičnoj mehanici se smatra da masa svake tačke ili pak delića nekog sistema ostaje za vreme kretanja konstantna veličina. Međutim, u nekim slučajevima skup delića, koji obrazuju dati sistem ili telo, može se menjati tokom vremena (izvesni delići mogu se odvojiti od tela, ili se spolja novi delići mogu priključiti telu); usled toga menja se i ukupna masa posmatranog tela. Zadatke kod kojih smo imali slično prisajedinjavanje ili odvajanje jediničnih masa već smo proučavali (vidi zadatke 127., 128. ili zadatak 94. u § 103). U ovom paragrafu biće, međutim, proučen drugi vrlo značajan praktičan problem kada se proces odvajanja delića od tela ili pak prisajedinjavanja delića telu vrši neprekidno. Telo čija se masa neprekidno menja tokom vremena, usled prisajedinjavanja ili odvajanja pojedinih materijalnih delića, nazvaćemo *telo promenljive mase*.* Za telo promenljive mase biće

$$M = f(t),$$

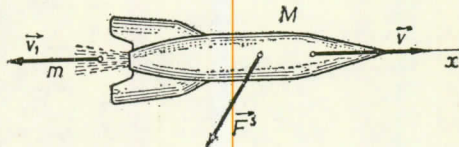
gde je $f(t)$ — neprekidna funkcija vremena.

* Promenljivost mase predstavlja pojam koji nema ničeg zajedničkog sa pojmom promenljive mase u teoriji relativiteta; ovde je taj pojam uveden da bi se okarakterisala promena sastava delića, koji obrazuju posmatrano telo.

Primer za telo promenljive mase je raketa ili reaktivni avion, čija se masa praktično neprestano smanjuje usled trošenja goriva.

Ako su pri kretanju tela promenljive mase, njegove dimenzije prema pređenim rastojanjima vrlo male, tako da se mogu zanemariti, onda se dato telo može posmatrati kao materijalna tačka promenljive mase.

Odredimo jednačinu kretanja rakete čija se masa neprekidno smanjuje, smatrajući je, prema onom što je rečeno, za tačku promenljive mase. Označimo relativnu brzinu (u odnosu na trup rakete) isticanja produkata sagorevanja iz rakete sa v_1 . Da bismo isključili iz razmatranja sile pritiska koje izbacuju produkte sagorevanja, učinimo da te sile budu unutrašnje, tj. posmatrajmo u nekom trenutku vremena t sistem, koji se sastoji iz rakete i delića koji se odvaja od rakete u toku vremenskog intervala dt (sl. 309).



Sl. 309

Masa m tog delića brojčano je jednaka veličini dM i za tu veličinu u toku vremena dt se promeni masa rakete. Kako je M veličina koja se smanjuje, to je $dM < 0$, pa je, prema tome, $m = |dM| = -dM$.

Jednačina (20) za posmatrani sistem može da se napiše u obliku

$$\boxed{d\vec{K} = \vec{F}_R^s dt,} \quad (24)$$

gde je $\vec{F}_R^s$ — geometrijski zbir (glavni vektor) spoljašnjih sila koje deluju na raketu.

Ako se brzina rakete $\vec{v}$ za vreme dt promeni za veličinu $d\vec{v}$, onda će količina kretanja posmatranog sistema pri tome dobiti priraštaj $M d\vec{v}$. Delić koji se odvaja dobiće za to vreme dopunsku brzinu $\vec{v}_1$ (u odnosu na brzinu koju je ranije imao) i usled te dopunske brzine količina kretanja sistema će se povećati za veličinu $m\vec{v}_1 = -v_1 dM$. Prema tome, biće $d\vec{K} = M d\vec{v} - v_1 dM$. Unošenjem ovog izraza u jednačinu (24) i deljenjem cele jednačine sa dt , dolazimo do sledeće zavisnosti:

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_R^s + v_1 \frac{dM}{dt}.} \quad (25)$$

Jednačina (25) predstavlja u vektorskom obliku diferencijalnu jednačinu kretanja tačke promenljive mase ili jednačinu Meščerskog.*

Imajući u vidu da druga komponenta na desnoj strani jednačine (25) predstavlja po dimenziji silu, možemo za tu veličinu uvesti oznaku Φ i napisati jednačinu (25) u obliku

$$\boxed{M \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_R^s + \Phi.} \quad (26)$$

* I. V. Meščerski (1859—1935) istaknuti ruski naučnik — mehaničar. Jednačina (25) data je u jednom njegovom radu 1897. god. Vidi I. V. Meščerski — Radovi iz mehanike tela promenljive mase, izd. 2, Gostehizdat, 1952.

Na taj način, reaktivni efekat se svodi na to da na raketu pri njenom kretanju deluje dopunska sila $\vec{\Phi}$, koja se zove *reaktivna sila*.

Veličina $\frac{dM}{dt}$ brojčano je jednaka masi goriva, koja se potroši u jedinici vremena, tj. ona je jednaka sekundnoj potrošnji goriva G_{sec} .

Prema tome, ako uzmemo u obzir znak, biće

$$\frac{dM}{dt} = - G_{\text{sec}}.$$

Oдавде proizlazi

$$\boxed{\vec{\Phi} = - G_{\text{sec}} \vec{v}_1,} \quad (27)$$

tj. da je reaktivna sila brojčano jednaka proizvodu iz sekundne potrošnje goriva i relativne brzine kojom ističu njegovi produkti sagorevanja i da je usmerena suprotno smeru te brzine.

Primedba. Dobiveni rezultati bili bi strogo ispravni, kad ne bi delići koji se odvajaju uzajamno delovali jedni na druge (na primer, kad bi predstavljali zrnca sačme koja se postupno izbacuju). Stvarno kod rakete produkti sagorevanja goriva izbacuju se u obliku neprekidne gasne struje, čiji delići uzajamno pritiskuju jedni na druge. Iz tog razloga pri letenju kroz atmosferu na raketu deluje dopunska sila $p_g A$ usmerena u smeru kretanja rakete i sila $p_a A$ usmerena u suprotnom smeru. Tu je A površina izlaznog preseka mlaznika motora, p_g — pritisak gasa u tom preseku, p_a — atmosferski pritisak. Kako je $p_g > p_a$, to će reaktivna sila određena formulom (27) biti veća za veličinu $(p_g - p_a) A$ (pri letenju u bezvazдушnom prostoru bilo bi $p_a = 0$). Iz navedenih razloga uvodi se umesto brzine $\vec{v}_1$ neka efektivna brzina $\vec{v}_{1e}$ veća od v_1 (npr., kada je $v_1 = 1900$ m/s, onda je $v_{1e} = 2200$ m/s).

Odredimo kako će se kretati raketa samo pod dejstvom reaktivne sile, smatrajući da je $F_R^s = 0$, i da je brzina isticanja v_1 konstantna. Usmerimo koordinatnu osu x u pravcu kretanja (vidi sl. 309). Tada je $v_x = v$, $v_{1x} = -v_1$ i projekcija jednačine (25) na osu x , ($F_R^s = 0$), daje

$$M \frac{dv}{dt} = - v_1 \frac{dM}{dt}, \quad \text{odnosno} \quad dv = - v_1 \frac{dM}{M}$$

Ako integriramo ovu jednačinu i ako pretpostavimo da je u početnom trenutku vremena masa $M = M_0$, a brzina $v = v_0$ i da je usmerena duž osc Ox , dobićemo

$$\boxed{v = v_0 + v_1 \ln \frac{M_0}{M}.} \quad (28)$$

Označimo masu trupa rakete sa svim uređajima sa M_k , a masu goriva sa M_g . Tada je, očividno, $M_0 = M_k + M_g$, tako da će masa rakete kada se bude potrošilo celokupno gorivo biti M_k . Ako ovu vrednost smenimo u jednačini (28), dobićemo formulu Ciolkovskog,* koja određuje brzinu koju će imati raketa kada se bude potro-

* K. E. Ciolkovski (1857—1935) istaknuti ruski naučnik i pronalazač. Rad u kome je data formula (29) objavljen je u maju 1903. godine u časopisu »Naučni pregled«.

šilo celokupno gorivo (tako zvana brzina na kraju aktivnog dela puta):

$$v_2 = v_0 + v_1 \ln \left(1 + \frac{M_g}{M_k} \right). \quad (29)$$

Strogo uzev ovaj rezultat važi u bezvazdušnom prostoru i izvan polja sila. Iz formule (29) se vidi da granična brzina rakete zavisi od:

- 1) njene početne brzine v_0 ;
- 2) relativne brzine isticanja produkata sagorevanja v_1 ;
- 3) odgovarajućih zaliha goriva M_g/M_k (broja Ciolkovskog).

Vrlo je zanimljiva činjenica da od režima rada raketnog motora, tj. od toga da li će celokupno gorivo sagoreti brže ili sporije, ne zavisi brzina rakete na kraju perioda sagorevanja. Radi preglednosti zavisnosti v_2/v_1 od M_g/M_k (kada je $v_0 = 0$), dati su podaci u Tablici I.

Tablica I.

M_g/M_k	v_2/v_1
1	0,69
2	1,10
3	1,39
4	1,61
5	1,79
10	2,40
20	3,00

Praktični značaj formule Ciolkovskog sastoji se u tome što ona ukazuje na put kojim treba ići da bi se postigle vrlo velike brzine koje su potrebne za kosmičke letove. Taj put se sastoji u tome da se povećaju M_g/M_k , v_1 i v_0 , pri čemu je povećanje v_1 i v_0 efikasnije. Povećanje v_1 i M_g/M_k zavisi od vrste goriva i konstrukcije rakete (kod vrlo velikih raketa sa tečnim gorivom je $M_g/M_k = 3$ do 4, dok je $v_1 = 2000$ do 2500 m/s). Brzina v_0 može se povećati iskorišćavanjem tzv. višestepene rakete, koja je konstruisana tako da se pojedini njeni delovi (stupnjevi), kada se potroši gorivo, koje se nalazi u njima, automatski odvoje od poslednjeg stupnja, čime se dobija dopunska (početna) brzina.

Takva višestepena raketa bila je primenjena za izbacivanje prvih u svetu sovjetskih Zemljinih satelita (sputnika) (4. oktobra i 3. novembra 1957. godine).

Glava XXVI

ZAKON O PROMENI MOMENTA KOLIČINA KRETANJA SISTEMA

§ 143. Glavni moment količina kretanja sistema (zamah)

Pojam o momentu količine kretanja (zamahu) za jednu materijalnu tačku bio je uveden u § 116. Glavnim momentom količina kretanja sistema, ili kinetičkim momentom — (zamahom) za tačku (centar) O naziva se veličina $\vec{L}_O$, koja je jednaka geometrijskoj sumi momenata (glavnom momentu) količina kretanja svih tačaka sistema u odnosu na tu tačku.*

$$\vec{L}_O = \Sigma \vec{M}_O^{\vec{K}_i} = \Sigma \vec{M}_O^{\vec{m}_i \vec{v}_i} \quad (30)$$

Analognim putem se određuju i momenti količina kretanja za ose koordinatnog sistema

$$L_x = \Sigma M_x^{\vec{K}_i} = \Sigma M_x^{\vec{m}_i \vec{v}_i}; \quad L_y = \Sigma M_y^{\vec{K}_i} = \Sigma M_y^{\vec{m}_i \vec{v}_i}; \quad L_z = \Sigma M_z^{\vec{K}_i} = \Sigma M_z^{\vec{m}_i \vec{v}_i} \quad (31)$$

Pri tom, na osnovu teoreme koju smo dokazali u § 43, L_x , L_y , L_z predstavljaju istovremeno i projekcije vektora $\vec{L}_O$ na koordinatne ose.

Da bismo objasnili mehanički smisao veličine $\vec{L}$, potražimo moment količine kretanja tela koje se obrće, za obrtnu osu. Ako se telo obrće oko nepomične ose Oz (sl. 310), onda će bilo koja njegova tačka, koja se nalazi na rastojanju r_i od obrtne ose, imati brzinu $v_i = r_i \omega$. Prema tome, za ovu tačku tela je $M_z^{\vec{m}_i \vec{v}_i} = m_i v_i r_i = m_i r_i^2 \omega$. Za čitavo telo, ako opšti množilac ω izvučemo ispred zagrada, biće:

$$L_z = \Sigma M_z^{\vec{m}_i \vec{v}_i} = \Sigma M_z^{\vec{K}_i} = (\Sigma m_i r_i^2) \omega.$$

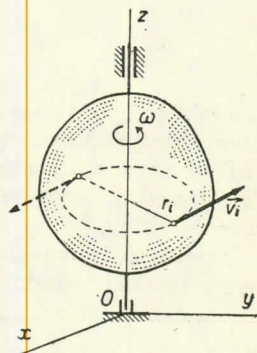
* Često, radi kratkoće, zvaćemo glavni moment količina kretanja sistema jednostavno momentom količina kretanja sistema ili zamahom sistema.

Veličina koja stoji u zagradi predstavlja moment inercije tela za osu z (§ 131). Prema tome, dobijamo definitivno

$$L_z = J_z \omega. \quad (32)$$

Na taj način, *moment količine kretanja tela, koje se obrće, za obrtnu osu, jednak je proizvodu iz momenta inercije tela za tu osu i ugaone brzine kojom se telo obrće.*

Vektor $\vec{L}_O$ za tela koja se obrću oko nepomične ose u opštem slučaju nije jednak L_z i nije usmeren u pravcu ose Oz , jer vektor $\vec{L}_O$ ima još i komponente $\vec{L}_x$ i $\vec{L}_y$ koje nisu jednake nuli. Međutim, ako je osa oko koje se telo obrće, osa simetrije tela, onda će simetrično raspoređenje tačke (vidi sl. 310) imati količine kretanja, koje su jednake po intenzitetu, i pravcu, a suprotne po smeru, tako da će zbir momenata ovih količina kretanja za ose x i y biti jednak nuli ($L_x = L_y = 0$). Prema tome, u tom slučaju vektor $\vec{L}_O$ biće usmeren pravcem obrtne ose i biće brojčano jednak L_z , tj. $J_z \omega$.



Sl. 310

Ako se sistem sastoji od nekoliko tela, koja se obrću oko jedne te iste ose, onda će, očividno, biti

$$L_z = J_{1z} \omega_1 + J_{2z} \omega_2 + \dots + J_{nz} \omega_n. \quad (32')$$

Lako je uočiti analogiju koja postoji između formula (19) i (32): količina kretanja jednaka je proizvodu iz mase (veličine koja karakteriše inertnost tela pri translatornom kretanju) i brzine; moment količine kretanja jednak je proizvodu iz momenta inercije (veličine koja karakteriše inertnost tela pri obrtnom kretanju) i ugaone brzine.

Dakle, kao što se količina kretanja sistema javlja kao karakteristika njegovog translatornog kretanja (vidi § 138), slično tome *glavni moment količina kretanja sistema predstavlja karakteristiku njegovog obrtnog kretanja.*

§ 144. Zakon o promeni glavnog momenta količina kretanja sistema (zakon momenata)

Zakon momenata koji smo dokazali za materijalnu tačku (§ 116), važi za svaku od tačaka sistema. Prema tome, ako tačka sistema ima masu m_i i brzinu $\vec{v}_i$, onda će za nju biti

$$\frac{d\vec{L}_{Oi}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\vec{M}_O^{\vec{K}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i} \right) = \vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u},$$

gde su $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$ rezultante svih spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje deluju na datu tačku.

Ako postavimo ovakve jednačine za svaku od tačaka iz kojih se sastoji sistem i ako zatim sve te jednačine saberećemo, dobićemo

$$\frac{d}{dt} \left(\vec{\Sigma L}_{O_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{\Sigma M}_O^{\vec{K}_i} \right) = \frac{d}{dt} \left(\vec{\Sigma M}_O^{\vec{m}_i \vec{v}_i} \right) = \vec{\Sigma M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{\Sigma M}_O^{\vec{F}_i^u}.$$

Međutim, poslednja suma u gornjoj jednačini, s obzirom na svojstva unutrašnjih sila (§ 129), jednaka je nuli. Tada, zbog jednačine (30) izlazi:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \dot{\vec{L}}_O = \vec{\Sigma M}_O^{\vec{F}_i^s} = \vec{\mathfrak{M}}_O^s.} \quad (33)$$

Dobijena jednačina izražava zakon o priraštaju glavnog momenta količina kretanja (zamaha) sistema, odnosno tzv. zakon momenata za sistem, koji glasi: *izvod po vremenu glavnog momenta količina kretanja sistema za neku nepomičnu tačku, jednak je sumi momenata svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, za istu momentnu tačku.*

Projicirajući obe strane jednačine (33) na ose nepomičnog koordinatnog sistema $Oxyz$ i imajući u vidu teorem dokazan u § 43, dobijamo:

$$\boxed{\frac{dL_x}{dt} = \dot{L}_x = \Sigma M_x^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_x^s; \quad \frac{dL_y}{dt} = \dot{L}_y = \Sigma M_y^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_y^s; \quad \frac{dL_z}{dt} = \dot{L}_z = \Sigma M_z^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_z^s.} \quad (34)$$

Jednačine (34) izražavaju zakon momenata za bilo koju nepomičnu osu.

Važno je primetiti (dokaz tog stava ćemo ispustiti) da jednačine (33) i (34) važe, takođe, i za pokretne koordinatne ose, ali samo tada kada se koordinatni početak nalazi u središtu masa sistema, i kada se koordinatni sistem kreće translatorno zajedno sa središtem masa sistema.

Dokazani zakoni naročito se mnogo koriste pri proučavanju obrtanja krutog tela oko nepomične ose, a takođe i u teoriji udara i teoriji žiroskopa. Međutim, primena ovih zakona nije ograničena u ovim oblastima. Tako, npr., u kinematici je pokazano da se kretanje krutog tela u opštem slučaju sastoji iz translatornog kretanja zajedno sa nekim polom i obrtnog kretanja. Ako za pol izaberemo središte masa sistema, onda se translatorni deo kretanja može proučiti korišćenjem zakona o kretanju središta masa, a obrtni deo korišćenjem zakona momenata. Ovo ukazuje na značaj ovih zakona pri proučavanju kretanja slobodnog tela (avioni, zrna, rakete), a posebno za proučavanje ravnog kretanja (§ 156).

Praktični značaj zakona momenata sastoji se još i u tome što on, analogno zakonu o promeni količine kretanja sistema, omogućuje da se pri proučavanju kretanja sistema isključe iz razmatranja sve unapred nepoznate unutrašnje sile.

§ 145. Zakon o održanju glavnog momenta količina kretanja (zamaha)

Iz dokazanog zakona proizlaze sledeći važni zaključci:

1) Neka je geometrijski zbir (glavni moment) momenata svih spoljašnjih sila za tačku O , koje deluju na sistem, jednak nuli:

$$\boxed{\vec{\Sigma M}_O^{\vec{F}_i^s} = \vec{\mathfrak{M}}_O^s = 0.}$$

Tada iz jednačine (33) proizlazi da je $\vec{L}_O = \text{const.}$ Prema tome, ako je suma momenata za tačku svih spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, jednaka nuli, onda je glavni moment količina kretanja sistema za istu tačku konstantan i po pravcu i po intenzitetu. Ovaj rezultat bio je primenjen pri proučavanju kretanja planeta (§ 116).

2) Neka su spoljašnje sile, koje deluju na sistem, takve, da je suma njihovih momenata za neku nepomičnu osu Oz jednaka nuli:

$$\Sigma M_z^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_z^s = 0.$$

Tada iz jednačine (34) proizlazi da je $L_z = \text{const.}$ Na taj način, ako je suma momenata svih spoljašnjih sila, koje deluje na sistem, za neku osu jednaka nuli, onda je glavni moment količina kretanja sistema za tu osu konstantan.

Ovi rezultati izražavaju zakon o održanju glavnog momenta količina kretanja sistema. Iz njega proizlazi da unutrašnje sile ne mogu promeniti glavni moment količina kretanja sistema.

Slučaj sistema koji se obrće. Neka se mehanički sistem obrće oko nepomične ose (ili oko ose koja prolazi kroz središte masa sistema) Oz . Tada je, prema formuli (32), $L_z = J_z \omega$. Ako je u tom slučaju $\Sigma M_z^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_z^s = 0$, onda je

$$J_z \omega = \text{const.}$$

Odavde možemo izvući sledeće zaključke:

a) Ako je sistem nepromenljiv (kruto telo), onda je $J_z = \text{const.}$ pa je, prema tome, i $\omega = \text{const.}$ tj. kruto telo pričvršćeno za osu obrće se, u posmatranom slučaju, konstantnom ugaonom brzinom.

b) Ako je sistem promenljiv, onda se pod dejstvom unutrašnjih (ili spoljašnjih) sila pojedine tačke sistema mogu udaljavati od ose, što izaziva povećanje momenta inercije J_z , ili se mogu približavati osi, što dovodi do smanjenja momenta inercije J_z . Kako je pri tome $J_z \omega = \text{const.}$ to se pri povećanju momenta inercije ugaona brzina sistema smanjuje, dok se pri smanjivanju momenta inercije ugaona brzina povećava. Prema tome, dejstvom unutrašnjih sila može se promeniti ugaona brzina sistema koji se obrće, jer činjenica da veličina L_z mora biti konstantna ne znači, kao što smo videli, da i ugaona brzina ω mora biti konstantna.

Razmotrimo nekoliko primera.

a) Opiti sa platformom Žukovskog. Za demonstriranje zakona o održanju momenta količine kretanja korisno je da se upotrebi vrlo prosta konstrukcija koja se zove »platforma Žukovskog«. To je ustvari kružna horizontalna platforma, koja se oslanja na kuglična ležišta, tako da se sa malim trenjem može obrtati oko

vertikalne ose z . Za čoveka koji stoji na jednoj takvoj platformi je $\Sigma M_z^{\vec{F}_i^s} = \mathfrak{M}_z^s = 0$, pa je, prema tome, i $J_z \omega = \text{const.}$ Ako čovek rastavi ruke i ako zatim saopšti sebi naglim pokretom (trzajem) obrtanje oko vertikalne ose, pa zatim spusti ruke, onda će se veličina momenta inercije J_z smanjiti, te će se ugaona brzina obrtanja povećati. Ovaj način povećavanja ugaone brzine mnogo se koristi u baletu, pri pravljenju skokova (salta) i slično.

Dalje, čovek koji stoji nepomično na platformi ($L_z = 0$), može da izazove obrtanje platforme u bilo kom smeru, ako se obrće u suprotnom smeru sa horizontalno ispruženom rukom. Ugaona brzina obrtanja čoveka biće u tom slučaju takva da ukupna veličina L_z sistema ostane jednaka nuli.

b) Njihanje ljuljaške. Pritiskom nogu (unutrašnja sila) čovek koji stoji na ljuljaški ne može da poveća njeno njihanje. On može ovo da učini na sledeći način. Kada se ljuljaška nalazi u gornjem levom položaju A_0 čovek čučne. Pri prolasku kroz vertikalni položaj on se zatim hitro uspravi. Tada se masa čoveka približi ka obrtnoj osi z , dok se veličina momenta inercije J_z smanji, tako da se ugaona brzina ω naglo poveća. Ovo povećanje ugaone brzine ω u krajnjem rezultatu dovodi do izdizanja ljuljaške iznad početnog nivoa A_0 . U desnom gornjem položaju, kada je $\omega = 0$, čovek opet čučne (na veličinu ugaone brzine to očividno ne utiče); pri prolazu kroz vertikalni položaj on se ponovo uspravi, itd. Kao rezultat svega ovog njihanje ljuljaške se povećava.

Prinudne oscilacije ljuljaške, koje pri tom nastaju, zovu se parametarske oscilacije, jer se one ne vrše pod uticajem periodično promenljivih sila (§ 126), već pod uticajem periodično promenljivih parametara sistema: njegovog momenta inercije i položaja središta masa.

c) Obrtanje zrna u puščanoj cevi. Ako cev i zrno posmatramo kao jedan sistem, onda će sila pritiska barutnih gasova pri pucnju biti unutrašnja sila; ona ne može da promeni veličinu momenta količina kretanja sistema, koja je do pucnja bila jednaka nuli. Prema tome, ako se pri opaljivanju zrno, zahvaljujući narezima u cevi, počne obrtati, na primer udesno, onda će cev pri tome težiti da se obrne ulevo, da bi u svakom trenutku vremena bilo $J_{zr} \omega_{zr} = J_{cv} \omega_{cv}$. Ovom obrtanju se suprotstavljaju zavrtnji pomoću kojih je cev pričvršćena za lafet. U krajnjem rezultatu pojavljuju se dopunski pritisci na zavrtnje.

d) Reaktivni moment elise. Elisa na helikopteru ne potiskuje samo vazduh naniže (vidi § 140, primer b), već nameće potisnutoj masi i obrtanje. Ukupni moment količina kretanja potisnute mase vazduha i helikoptera, mora pri ovome da ostane jednak nuli, jer je sistem u početku bio nepokretan, dok su sile uzajamnog dejstva elise i spoljašnje sredine unutrašnje sile. Iz tog razloga helikopter počinje da se obrće suprotno od smeru obrtanja elise. Moment koji tom prilikom deluje na helikopter zove se *reaktivni moment*.

Kod helikoptera sa jednom elisom, da bi se sprečilo reaktivno obrtanje, postavi se na njegovom repnom delu odgovarajuća krmna elisa. Kod višeeleisnih helikoptera elise se obrću u raznim smerovima.

Pojava reaktivnog momenta može se iskoristiti za eksperimentalno određivanje obrtnog momenta avionskog motora, jer su ovi momenti po intenzitetu jednaki jedan drugom, a reaktivni moment može lako da se izmeri ako se motor sa obrtnom elisom stavi na odgovarajuću vagu i uravnoteži teretima.

§ 146. Rešavanje zadataka

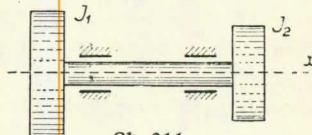
Zakon momenta količina kretanja može se korisno upotrebiti za proučavanje obrtnog kretanja tela (§ 153), ili pak za proučavanje kretanja onih sistema, koji se sastoje iz tela koja se obrću i tela koja vrše translatorno kretanje (zadatak 133.).

Zakon o održanju momenta količina kretanja omogućuje da se na osnovu veličine, ili pak brzine pomeranja jednog dela sistema, odredi promena ugaone brzine (ili obrtni ugao) drugog dela sistema. Tom prilikom iz razmatranja se isključuju sve unapred nepoznate unutrašnje sile, a takođe i spoljašnje sile, koje seku obrtnu osu, ili su pak njoj paralelne.

Zadatak 130. Dva diska nasadena su na zajedničko vratilo (sl. 311). U nekom trenutku vremena vratilo se malo uvije i zatim se prepusti samom sebi. Zanimajući masu vratila odrediti torzione oscilacije diskova, ako su poznati njihovi momenti inercije J_1 i J_2 .

Rešenje. Da bismo isključili iz razmatranja nepoznate elastične sile, koje izazivaju oscilacije diskova, posmatrajmo oba diska i vratilo kao jedan sistem. Spoljašnje sile koje deluju na ovaj sistem (reakcije ležišta i težina vratila) seku osu x . Prema tome, $\Sigma \vec{M}_x^s = \mathcal{M}_x^s = 0$, pa je $L_x = \text{const}$. Međutim, kako je u početnom trenutku vremena $L_x = 0$, onda za sve vreme oscilovanja mora biti $L_x = J_1 \omega_1 + J_2 \omega_2 = 0$ (moment količine kretanja sistema za osu x jednak je sumi momenata količine kretanja svakog od diskova za osu vratila). Oдавде nalazimo da je

$$\omega_1 = -\frac{J_2}{J_1} \omega_2 \quad \text{i} \quad \varphi_1 = -\frac{J_2}{J_1} \varphi_2,$$



Sl. 311

gde su φ_1 i φ_2 — uglovi uvijanja vratila na mestima gde se nalaze diskovi, a koje računamo od početnih položaja (druga jednačina se dobija integriranjem prve jednačine).

Na taj način, oscilacije će se vršiti u suprotne strane, dok će ugaone amplitude oscilacija biti obrnuto proporcionalne momentima inercije diskova. Nepomični presek nalaziće se bliže disku čiji je moment inercije veći.

Zadatak 131. U regulatoru AB , koji se obrće oko vertikalne ose Oz (veličina J_z regulatora je poznata), smeštena su dva simetrično raspoređena tereta mase m svaki, vezana za opruge

(sl. 312). U trenutku $t_0 = 0$ regulator se obrće ugaonom brzinom ω_0 , a svaki od tereta počne da vrši iste prigušujuće oscilacije oko tačke C (rastojanje tačke C od ose Oz jednako je l). Zanimajući trenje pri obrtanju i smatrajući da su tereti materijalne tačke, odrediti kako će se u toku vremena menjati ugaona brzina obrtanja regulatora.

Rešenje. Da bismo isključili nepoznate elastične sile u oprugama posmatračemo regulator i terete kao jedan sistem. Tada

je $\Sigma \vec{M}_x^s = \mathcal{M}_x^s = 0$, tako da mora biti $L_x = \text{const}$. U trenutku $t_0 = 0$ rastojanje

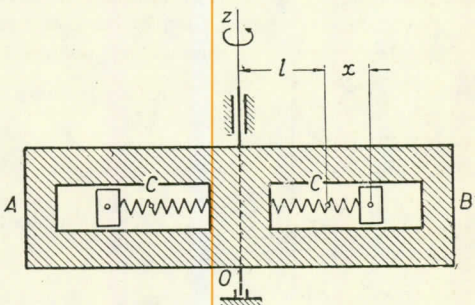
$x = 0$ i $L_{x0} = (J_z + 2ml^2)\omega_0$. U proizvoljnom trenutku vremena t je $L_x = [J_z + 2m(l+x)^2]\omega_0$. Kako je $L_x = L_{x0}$ izlazi da je

$$\omega = \frac{J_z + 2ml^2}{J_z + 2m(l+x)^2} \omega_0.$$

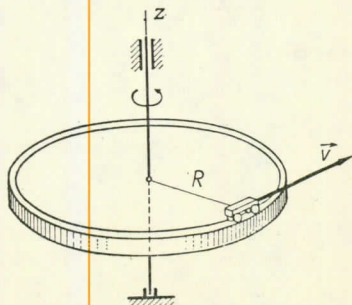
Prema tome, kada je $x > 0$, onda je $\omega < \omega_0$, a kada je $x < 0$, tada je $\omega > \omega_0$, tj. ugaona brzina obrtanja regulatora osciluje oko srednje veličine ω_0 . Tokom vremena pri prigušenim oscilacijama tereta x teži nuli, tako da ω teži ω_0 .

Zadatak 132. Po obimu kružne horizontalne platforme težine G i poluprečnika R postavljene su šine (sl. 313). Platforma, zajedno sa navijenim malim vagončićem težine G_1 , koji stoji na šinama, obrće se oko vertikalne ose Oz ugaonom brzinom ω_0 . U nekom trenutku vremena vagončić počne da se kreće po šinama relativnom brzinom v (u odnosu na platformu) u smeru obrtanja platforme. Kako se tom prilikom menja ugaona brzina obrtanja platforme?

Rešenje. Posmatrajmo platformu i vagončić kao jedan sistem da bismo time isključili nepoznate sile trenja između točkova vagončića i šina. Momenti spoljašnjih sila, koje deluju na sistem, za osu z jednaki su tada nuli. Prema tome, biće $L_z = \text{const}$. Platformu ćemo smatrati homoge-



Sl. 312



Sl. 313

nim kružnim diskom ($J_z = \frac{1}{2} MR^2$), a vagončić materijalnom tačkom. Tada je

$$L_{z0} = \left(\frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 + \frac{G_1}{g} R^2 \right) \omega_0.$$

Kada vagončić počne da se kreće, njegova apsolutna brzina kretanja biće $v_a = v + R\omega$, gde je ω — nova ugaona brzina obrtanja platforme. Moment količine kretanja vagončića za osu z biće tom prilikom jednak $mv_a R = m(vR + R^2\omega)$, tako da za ceo sistem dobijamo:

$$L_{z1} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega + \frac{G_1}{g} (vR + R^2\omega).$$

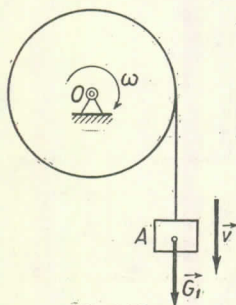
Kako je $L_z = \text{const}$, to je $L_{z1} = L_{z0}$, odakle nalazimo:

$$\omega = \omega_0 - \frac{G_1}{0,5 G + G_1} \frac{v}{R}$$

Ugaona brzina platforme, kao što vidimo, se smanjuje. Međutim, ako bi se vagončić kretao u suprotnom smeru, ugaona brzina obrtanja platforme bi se povećavala.

Podvucimo još jednom da pri izračunavanju veličine L_z treba uzimati *apsolutne brzine* svih pokretnih tačaka ili tela sistema.

Zadatak 133. Na doboš težine G i poluprečnika r (sl. 314) namotan je konopac na čijem je kraju A obešen teret težine G_1 . Zanimajući masu konopca i trenje u ležištima, odrediti ugaono ubrzanje doboša pri vertikalnom spuštanju tereta, ako je poluprečnik inercije doboša za osu oko koje se obrće jednak i .



Sl. 314

Rešenje. Ako primenimo zakon o momentu količine kretanja za osu O , biće:

$$\frac{dL_O}{dt} = \Sigma M_O^{\vec{F}_i} = \mathfrak{M}_O^s \quad (a)$$

Pokretni sistem se sastoji iz dva dela. Prema tome:

$$L_O = L_d + L_t.$$

Teret, koji se kreće translatorno, smatrajmo za materijalnu tačku. Njegova brzina je $v = r\omega$. Doboš se obrće oko nepomične ose. Prema

tome je

$$L_t = \frac{G_1}{g} vr = \frac{G_1}{g} r^2 \omega, \quad L_d = J_O \omega = \frac{G}{g} \omega i^2,$$

$$L_O = (G_1 r^2 + Gi^2) \frac{\omega}{g}.$$

Ako vrednost za L_O smenimo u jednačinu (a), dobićemo:

$$\frac{G_1 r^2 + Gi^2}{g} \frac{d\omega}{dt} = G_1 r,$$

odakle je

$$\dot{\omega} = \frac{G_1 r g}{G_1 r^2 + G i^2}.$$

Glava XXVII

ZAKON O PRIRAŠTAJU KINETIČKE ENERGIJE SISTEMA

§ 147. Kinetička energija sistema

Kinetičkom energijom sistema naziva se skalarna veličina E_k koja je jednaka aritmetičkom zbiru kinetičkih energija svih tačaka iz kojih se sastoji sistem

$$E_k = \frac{1}{2} \sum m_i v_i^2. \quad (35)$$

Kinetička energija sistema je karakteristika kako translatornog, tako i obrtnog kretanja sistema, pa se zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije sistema naročito često koristi pri rešavanju zadataka. Glavna razlika između veličine E_k i ranije uvedenih karakteristika sistema $\vec{K}$ i $\vec{L}_O$, sastoji se u tome što je kinetička energija skalarna veličina i što je ona po svojoj suštini uvek pozitivna veličina. Prema tome, ona ne zavisi od pravca apsolutnog kretanja delova sistema i ne karakteriše promenu tih pravaca.

Primetimo, takođe, i sledeće važno svojstvo kinetičke energije. Unutrašnje sile deluju na delove sistema u uzajamno suprotnim smerovima. Iz tog razloga, kao što smo videli, unutrašnje sile ne mogu izmeniti vektorske karakteristike $\vec{K}$ i $\vec{L}_O$. Međutim, ako se dejstvom unutrašnjih sila promene intenziteti brzina tačaka sistema, onda će se tada promeniti i veličina E_k . Prema tome, *kinetička energija sistema razlikuje se od veličina $\vec{K}$ i $\vec{L}_O$, i po tome, što na njenu promenu utiče dejstvo kako spoljašnjih tako i unutrašnjih sila.*

Ako se sistem sastoji od nekoliko tela, onda je kinetička energija sistema, očevидno, jednaka sumi kinetičkih energija svih tela iz kojih se sastoji sistem:

$$E_k = \sum E_{ki}.$$

Odredimo formule za izračunavanje kinetičke energije tela pri različitim slučajevima kretanja.

1) Translatorno kretanje. U ovom slučaju sve tačke tela kreću se istim brzinama, koje su jednake brzini središta masa. Prema tome, ako je za bilo koju tačku $v_i = v_C$, onda formula (35) daje

$$E_{k\text{ tr}} = \frac{1}{2} \sum m_i v_C^2 = \frac{1}{2} v_C^2 \sum m_i,$$

ili

$$E_{k\text{ tr}} = \frac{1}{2} M v_C^2. \quad (36)$$

Prema tome, *kinetička energija tela pri translatornom kretanju jednaka je polovini proizvoda mase tela i kvadrata brzine središta masa*. Veličina kinetičke energije ne zavisi od pravca kretanja.

2) Obrtno kretanje. Ako se telo obrće oko bilo koje ose Oz (vidi sl. 310), onda je brzina ma koje njegove tačke $v_i = r_i \omega$, gde je r_i — rastojanje tačke od obrtne ose, a ω — ugaona brzina obrtanja tela. Ako ovu vrednost za brzinu unesemo u formulu (35) i ako izvučemo opšti množitelj ispred zgrade, dobićemo:

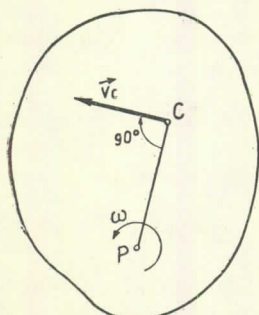
$$E_{k\text{ rot}} = \frac{1}{2} \sum m_i r_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum m_i r_i^2 \right).$$

Veličina koja stoji u zagradi predstavlja moment inercije tela za osu z . Na taj način, konačno dobijamo da je:

$$E_{k\text{ rot}} = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (37)$$

tj. *kinetička energija tela pri obrtnom kretanju jednaka je polovini proizvoda iz momenta inercije tela u odnosu na obrtnu osu i kvadrata ugaone brzine obrtanja*. Veličina kinetičke energije E_k ne zavisi od smera obrtanja.

3) Ravno kretanje* Pri ovom kretanju brzine svih tačaka tela u svakom trenutku vremena raspoređene su tako, kao da se telo obrće oko ose, koja je normalna na ravan kretanja i koja prolazi kroz trenutni pol brzina P (sl. 315). Prema tome, na osnovu formule (37) biće



Sl. 315

$$E_{k\text{ rk}} = \frac{1}{2} J_P \omega^2, \quad (37')$$

gde je J_P — moment inercije tela za naznačenu osu, a ω — ugaona brzina obrtanja tela.

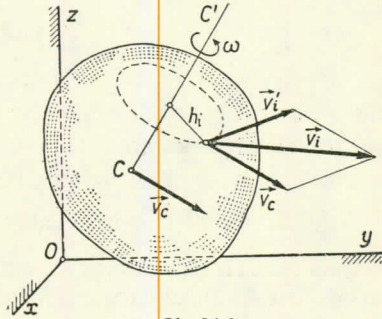
Veličina J_P u formuli (37') je promenljiva, jer se pri ravnom kretanju krutog tela menja položaj trenutnog pola u svakom trenutku. Uvedimo umesto promenljivog momenta inercije J_P konstantni moment inercije J_C za osu koja prolazi kroz središte masa C sistema

* Izraz za kinetičku energiju krutog tela pri ravnom kretanju može se dobiti kao poseban slučaj opšteg kretanja krutog tela, (vidi tačku 4.).

(tela). Na osnovu Štajnerove (Hajgensove) teoreme (§ 133) je $J_P = J_C + Md^2$, gde je $d = \overline{PC}$. Ako ovaj izaz za J_P smenimo u (37'), imajući u vidu da je tačka P trenutni pol brzina, tj. da je $d \cdot \omega = \overline{PC} \cdot \omega = v_C$, gde je v_C brzina središta masa C tela, dobićemo definitivno:

$$E_{\text{krk}} = \frac{1}{2} J_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2. \quad (38)$$

Prema tome, pri ravnom kretanju krutog tela kinetička energija tela jednaka je zbiru iz kinetičke energije translatornog kretanja tela sa brzinom kretanja središta masa i kinetičke energije obrtanja tela oko ose koja prolazi kroz središte masa i upravna je na ravan kretanja.



Sl. 316

4.* Opšti slučaj kretanja. Ako za pol izaberemo središte masa C tela (sl. 316), onda će opšte kretanje tela biti rezultujuće kretanje koje se sastoji iz dva komponentna kretanja: translatornog, koje se vrši brzinom $\vec{v}_C$ središta masa tela i obrtnog kretanja oko trenutne obrtne ose CC' , koja prolazi kroz pol (vidi § 88). Tada će, kao što smo pokazali u kinematici, brzina $\vec{v}_i$ bilo koje tačke tela biti jednaka geometrijskom zbiru iz brzine pola $\vec{v}_C$ i brzine $\vec{v}'_i$, koju dobija tačka tela pri obrtanju zajedno sa telom oko trenutne ose CC'

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}'_i.$$

Intenzitet brzine $\vec{v}'_i$ je jednak $v'_i = h_i \omega$, gde je h_i — rastojanje tačke tela od trenutne obrtne ose CC' , a ω — apsolutna ugaona brzina obrtanja tela oko te ose. Oдавде proizlazi da je*

$$v_i^2 = \vec{v}_i^2 = (\vec{v}_C + \vec{v}'_i)^2 = v_C^2 + v_i'^2 + 2(\vec{v}_C, \vec{v}'_i).$$

Kada smenimo ovu vrednost u jednačini (35) i kad uzmemo u obzir da je $v'_i = h_i \omega$ dolazimo do sledećeg izraza

$$E_k = \frac{1}{2} v_C^2 (\Sigma m_i) + \frac{1}{2} \omega^2 (\Sigma m_i h_i^2) + (\vec{v}_C, \Sigma m_i \vec{v}'_i),$$

gde su opšti množitelj izvučeni ispred zagrada.

U dobijenoj jednačini prva zagrada određuje masu M tela, dok je izraz u drugoj zagradi jednak momentu inercije tela $J_{CC'}$ za trenutnu obrtnu osu CC' . Veličina $\Sigma m_i v'_i = 0$, jer ona predstavlja količinu kretanja koju dobija telo pri obrtanju oko trenutne obrtne ose CC' , koja prolazi kroz središte masa (vidi § 138).

* U vektorskoj algebri uvodi se pojam o *skalarnom proizvodu* dvaju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$, koji je jednak proizvodu iz intenziteta tih vektora i kosinusa ugla α između njih, tj. $(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha$. Oдавде proizlazi da je $v^2 = (\vec{v}, \vec{v}) = vv \cos 0^\circ = v^2$, tj. kvadrat skalarnog proizvoda dvaju istih vektora jednak je kvadratu intenziteta tog vektora.

Tako najzad dobijamo:

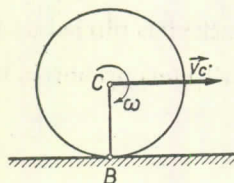
$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_{CC'} \omega^2. \quad (38')$$

Prema tome, *kinetička energija tela u slučaju opšteg kretanja* (a posebno u slučaju ravnog kretanja) *jednaka je zbiru kinetičke energije translatornog kretanja tela koje se vrši brzinom središta mase, i kinetičke energije obrtnog kretanja tela oko trenutne obrtne ose, koja prolazi kroz središte mase.*

Ako za pol ne uzmemo središte mase, već bilo koju drugu tačku A tela, i ako pri tom osa AA' ne prolazi kroz središte mase, onda će za tu osu biti $\sum m_i v_i' \neq 0$, tako da u tom slučaju nećemo dobiti formulu oblika (38') (vidi zadatak 136.).

Pri izračunavanju kinetičke energije važno je napomenuti da u sve dobijene formule ulaze samo *apsolutne brzine* tačaka ili tela. Na karakteristične greške koje se prave pri raznim računima naročito je skrenuta pažnja u zadacima 135. i 136..

Zadatak 134. Odrediti kinetičku energiju homogenog cilindričnog točka mase M , poluprečnika R , koji se kotrlja bez klizanja po horizontalnoj ravni, ako je brzina njegovog središta v_C (sl. 317).



Sl. 317

Rešenje. Točak vrši ravno kretanje. Prema formuli (38) biće:

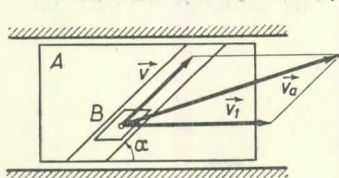
$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Znamo da je (vidi § 132) $J_C = \frac{1}{2} M R^2$, gde je R — poluprečnik točka. S druge strane, kako se u tački B nalazi trenutni pol brzina, to je $v_C = \overline{BC} \cdot \omega = R\omega$, odakle je $\omega = v_C/R$.

Ako smenimo ove vrednosti, dobićemo:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{4} M R^2 \frac{v_C^2}{R^2} = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Zadatak 135. Element A , koji se kreće translatorno brzinom $\vec{v}_1$, ima vodice u kojima se



Sl. 318

brzinom $\vec{v}$ kreće telo B , mase M . Znajući ugao α (sl. 318), odrediti kinetičku energiju tela B .

Rešenje. Apsolutno kretanje tela B je translatorno kretanje, čija je apsolutna brzina $\vec{v}_a = \vec{v}_1 + \vec{v}$ (vidi § 94). Tada je

$$E_k = \frac{1}{2} M v_a^2 = \frac{1}{2} M (v_1^2 + v^2 + 2v_1 v \cos \alpha).$$

Karakteristična greška koja se pravi u sličnim slučajevima sastoji se u tome što se pogrešno uzima da je kinetička energija tela jednaka zbiru kinetičkih energija pri njegovom relativnom i prenosnom kretanju:

$$E_k = E_{kr} + E_{kp} = \frac{1}{2} M v^2 + \frac{1}{2} M v_1^2.$$

Tom prilikom, kao što vidimo, ne uzima se u obzir sabirak: $M v v_1 \cos \alpha$.

Prema tome, *ako telo vrši složeno kretanje, onda u opštem slučaju ukupna kinetička energija tela nije jednaka zbiru iz kinetičkih energija relativnog i prenosnog kretanja.*

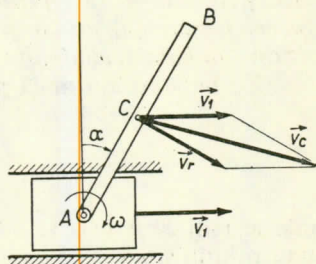
Zadatak 136. Deo jednog mehanizma sastoji se iz elementa koji se kreće translatornom brzinom $\vec{v}_1$ (sl. 319) i štapa AB dužine l , mase M , pričvršćenog za osu elementa A . Štap se oko ose elementa A obrće ugaonom brzinom ω . Odrediti kinetičku energiju štapa pri datom uglu α .

Rešenje. Štap vrši složeno (ravno) kretanje. Prema formuli (38) biće:

$$E_k = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} J_C \omega^2.$$

Brzina tačke C sastoji se iz brzine $\vec{v}_1$ i brzine $\vec{v}_r$, čiji je intenzitet $v_r = \frac{1}{2} l \omega$. Prema tome, (vidi sl. 319), biće

$v_C^2 = v_1^2 + v_r^2 + 2v_1 v_r \cos \alpha$. Ugaona brzina obrtanja štapa oko središta C je ista kao i ugaona brzina obrtanja štapa oko njegovog kraja A , jer kao što znamo, ugaona brzina ne zavisi od izbora pola (vidi § 77). Osim toga je, kao što je bilo pokazano u zadatku 122. (§ 133), $J_C = \frac{1}{12} M l^2$.



Sl. 319

Ako sve ove podatke smenimo u jednačini od koje smo pošli dobićemo:

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} M \left(v_1^2 + \frac{1}{4} l^2 \omega^2 + v_1 l \omega \cos \alpha \right) + \frac{1}{24} M l^2 \omega^2 = \\ &= \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{6} M l^2 \omega^2 + \frac{1}{2} M l \omega v_1 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Karakteristična greška koja se u sličnim slučajevima čini sastoji se u tome što se stavi da je:

$$E_k = E_{k \text{ tr}} + E_{k \text{ rot}} = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = \frac{1}{2} M v_1^2 + \frac{1}{6} M l^2 \omega^2.$$

Ovaj rezultat nije ispravan, jer obrazac $E_k = E_{k \text{ tr}} + E_{k \text{ rot}}$ važi samo u slučaju kada obrtna osa tela prolazi kroz njegovo središte mase, a u datom zadatku osa A ne prolazi kroz središte mase.

§ 148. Zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije sistema

Zakon koji smo dokazali u § 114 važi za bilo koju od tačaka iz kojih se sastoji sistem. Prema tome, ako uočimo bilo koju tačku sistema, čija je masa m_i , i koja ima brzinu v_i , onda će za tu tačku sistema biti

$$(E_{k1})_i - (E_{k0})_i = \Delta(E_k)_i = \frac{1}{2} m_i (v_1)_i^2 - \frac{1}{2} m_i (v_0)_i^2 = \mathbf{A}_i^s + \mathbf{A}_i^u,$$

gde su: $(v_1)_i$ i $(v_0)_i$ — brzine te tačke na kraju i na početku posmatranog pomeranja, a $\mathbf{A}_i^s$ i $\mathbf{A}_i^u$ — zbir radova na tom pomeranju svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na tačku.

Ako postavimo ovakve jednačine za svaku od tačaka sistema i ako zatim sabremo sve te jednačine, dobićemo:

$$\Sigma(E_{k1})_i - \Sigma(E_{k0})_i = \Sigma \Delta(E_k)_i = \frac{1}{2} \Sigma m_i (v_1)_i^2 - \frac{1}{2} \Sigma m_i (v_0)_i^2 = \Sigma \mathbf{A}_i^s + \Sigma \mathbf{A}_i^u,$$

odnosno

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma \mathbf{A}_i^s + \Sigma \mathbf{A}_i^u,$$

(39)

gde su: E_{k_0} i E_{k_1} — kinetička energija čitavog sistema na početku i na kraju pomeranja.

Dobijena jednačina izražava zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije sistema: *priraštaj (promena) kinetičke energije sistema, pri nekom njegovom pomeranju, jednak je sumi radova na tom pomeranju svih sila koje deluju na sistem i to kako spoljašnjih tako i unutrašnjih.*

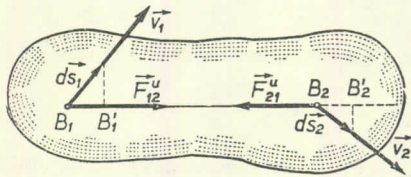
Za beskonačno mala pomeranja ovaj zakon dobija sledeći oblik:

$$dE_k = dA_i^s + dA_i^u, \quad (40)$$

gde je radi kratkoće sa dA_i^s i dA_i^u označen elementaran rad svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na sistem.

Za razliku od prethodnih zakona u jednačinama (39) i (40) nisu isključene unutrašnje sile. Naime, ako su $\vec{F}_{12}^u$ i $\vec{F}_{21}^u$ — sile uzajamnog dejstva između tačaka

B_1 i B_2 sistema (vidi sl. 320), onda je $\vec{F}_{12}^u + \vec{F}_{21}^u = 0$. Pri tom tačka B_1 može da se pomera u pravcu tačke B_2 , a tačka B_2 u pravcu tačke B_1 . Rad svake od ovih sila biće pozitivan, tako da suma ovih radova neće biti jednaka nuli. Kao primer može da posluži trzanje unazad topa pri pucnju (zadatak 128., sl. 307). Unutrašnje sile (sile pritiska) u ovom zadatku, dejstvuju kako na zrno, tako i na deo topa koji se pomera unazad. Suma ovih radova nije jednaka nuli, i menja kinetičku energiju sistema od veličine $E_{k_0} = 0$ u početku opaljivanja do veličine $E_{k_1} = E_{kz} + E_{kt}$ na kraju opaljivanja.



Sl. 320

Slučaj nepromenljivih sistema. *Nepromenljivim* nazvaćemo takav sistem kod koga rastojanja između napadnih tačaka unutrašnjih sila pri kretanju sistema ostaju nepromenjena. U posebnom slučaju takav je sistem, npr., kruto telo.

Neka su B_1 i B_2 dve tačke nepromenljivog sistema (sl. 320) i neka one deluju jedna na drugu silama $\vec{F}_{12}^u$ i $\vec{F}_{21}^u$ ($\vec{F}_{21}^u = -\vec{F}_{12}^u$) i neka u datom trenutku vremena te tačke imaju brzine $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Za vremenski interval dt ove će tačke izvršiti elementarna pomeranja $\vec{ds}_1 = \vec{v}_1 dt$ i $\vec{ds}_2 = \vec{v}_2 dt$, koja su usmerena u pravcu vektora $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$. Međutim, kako je odsečak $\overline{B_1 B_2}$ nepromenljiv, to na osnovu poznate teoreme kinematike o projekcijama brzina $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$, pa, prema tome, i o projekcijama pomeranja na pravac odsečka $\overline{B_1 B_2}$, ove projekcije biće jednake jedna drugoj, tj. $\overline{B_1 B_1'} = \overline{B_2 B_2'}$. U ovom slučaju elementarni radovi sila $\vec{F}_{12}^u$ i $\vec{F}_{21}^u$ biće jednaki po intenzitetu i suprotni po znaku, tako da će suma ovih radova biti jednaka nuli. Ovaj rezultat važi za sve unutrašnje sile pri bilo kakvom pomeranju sistema.

Odavde zaključujemo da je kod nepromenljivih sistema suma radova svih unutrašnjih sila jednaka nuli, tako da jednačina (39) dobija oblik

$$E_{k_1} - E_{k_0} = \Delta E_k = \Sigma A_i^s. \quad (41)$$

U sve jednačine od (39) do (41) u broj spoljašnjih i unutrašnjih sila ulaze kako aktivne sile tako i reakcije veza. Ako je površina veze po kojoj se kreće sistem glatka, onda će kako je pokazano u § 114, rad reakcije takvih veza pri bilo kakvom pomeranju sistema biti jednak nuli, tako da u tom slučaju ove reakcije u jednačine (39) do (41) ne ulaze.

Prema tome, pri primeni zakona o priraštaju kinetičke energije sistema, ako su veze tog sistema bez trenja, onda će iz jednačine koja iskazuje ovaj zakon biti eliminisane sve unapred nepoznate reakcije veza. U ovome se sastoji praktični značaj ovog zakona.

Primetimo da svi ranije izvedeni zakoni omogućuju da se eliminišu iz jednačina kretanja sve unutrašnje sile; međutim, sve spoljašnje sile u koje ulaze i unapred nepoznate reakcije spoljašnjih veza zadržale su se u jednačinama.

§ 149. Neki slučajevi izračunavanja rada

Rad sila izračunava se po formulama koje smo dobili u §§ 112 i 113. Razmotrimo neke dopunske slučajeve.

1. Rad sila teže koje deluju na sistem. Rad sile teže koja deluje na delić težine ΔG_i biće jednak $\Delta G_i [(z_0)_i - (z_1)_i]$, gde su $(z_0)_i$ i $(z_1)_i$ — koordinate koje određuju početni i krajnji vertikalni položaj delića (vidi § 113). Tada će suma radova svih sila teže, saglasno formulama (74) § 53, biti jednaka

$$A = \Sigma \Delta G_i (z_0)_i - \Sigma \Delta G_i (z_1)_i = G[(z_c)_0 - (z_c)_1] = \pm Gh_c,$$

gde je G — težina sistema, h_c — vertikalno pomeranje težišta tela (ili središta masa sistema). Prema tome, *rad sila teže, koje deluju na sistem, izračunava se kao rad njihove rezultante G na vertikalnom pomeranju težišta (ili središta masa) sistema.*

2. Rad sila koje deluju na telo koje se obrće. Elementaran rad sile $\vec{F}$ (sl. 321) koja deluje na kruto telo koje se obrće jednak je (vidi § 112)

$$dA = F_T ds = F_T r d\varphi,$$

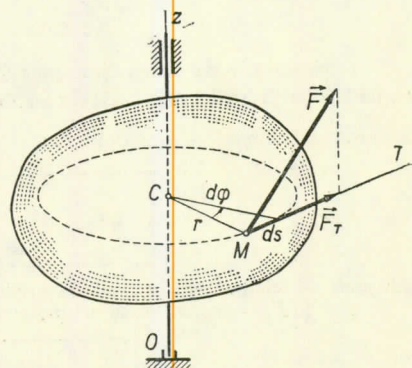
jer je $ds = r d\varphi$, gde je $d\varphi$ — ugao za koji se telo okrenulo.

Međutim, lako je videti da je $F_T r = M_z^F$. Nazovimo veličinu $M_z = M_z^F$ *obrotnim momentom*. Tada ćemo dobiti:

$$dA = M_z d\varphi. \quad (42)$$

Prema tome, u posmatranom slučaju *elementarni rad jednak je proizvodu iz obrtnog momenta i elementarnog ugla obrtanja.*

Formula (42) važi, takođe, i kada deluje više sila, tj kada je $M_z = \Sigma M_z^F$.



Sl. 321

Kađa se telo okrene za konačan ugao φ_1 rad će biti jednak

$$\mathbf{A} = \int_0^{\varphi_1} M_z d\varphi, \quad (43)$$

a u slučaju konstantnog momenta ($M_z = \text{const.}$)

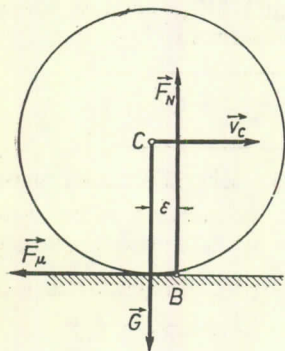
$$\mathbf{A} = M_z \varphi_1. \quad (44)$$

Ako na telo deluje spreg sila koje leže u ravni upravnoj na obrtnoj osi Oz , onda će, očevidno, u formulama (42) – (44) M_z označavati moment ovog sprega.

Pokažimo, takođe, kako se u ovom slučaju izračunava snaga vidi (§ 112). Koristeći se jednačinom (42), dobijamo:

$$P = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{M_z d\varphi}{dt} = M_z \omega.$$

Prema tome, kada sile deluju na kruto telo, koje se obrće oko nepomične ose, snaga je jednaka proizvodu iz obrtnog momenta i ugaone brzine tela. Pri istoj snazi ukoliko se povećava obrtni moment utoliko se ugaona brzina smanjuje.



Sl. 322

3. Rad sile trenja koja deluje na telo koje se kotrlja. Na točak poluprečnika R (sl. 322), koji se kotrlja bez klizanja po nekoj ravni (površini), deluje

sila trenja $\vec{F}_\mu$, koja sprečava klizanje tačke dodira B po ravni. Elementaran rad ove sile je: $d\mathbf{A} = -F_\mu ds_B$. Međutim, tačka B u datom slučaju je trenutni pol brzina (§ 81) i $v_B = 0$. Kako je $ds_B = v_B dt$, to je $ds_B = 0$, tako da je za svako elementarno pomeranje $d\mathbf{A} = 0$.

Prema tome, pri kotrljanju bez klizanja, rad sile trenja, koja sprečava klizanje, na bilo kom pomeranju tela, jednak je nuli. Iz istog razloga u tom slučaju jednak

je nuli i rad normalne reakcije $\vec{F}_N$.

Otpor protiv kotrljanja čini spreg ($\vec{F}_N, \vec{G}$) čiji je moment $M = \epsilon F_N$, gde je ϵ – koeficijent trenja kotrljanja (vidi § 40). Tada prema formuli (42), imajući u vidu da je pri kotrljanju ugao za koji se okrene tačka $d\varphi = \frac{1}{R} ds_C$, dobijamo:

$$d\mathbf{A}_{\text{kotr}} = -\epsilon F_N d\varphi = -\frac{\epsilon}{R} F_N ds_C, \quad (45)$$

gde je ds – elementarno pomeranje središta C tačka.

Ako je $F_N = \text{const.}$, onda je ukupan rad sile otpora protiv kotrljanja jednak

$$\mathbf{A}_{\text{kotr}} = -\epsilon F_N \varphi_1 = -\frac{\epsilon}{R} F_N s_C. \quad (45')$$

Kako je veličina $\frac{\epsilon}{R}$ mala, to se u prvom približenju pri postojanju drugih otpora, otpor protiv kotrljanja može zanemariti.

§ 150. Rešavanje zadataka

Zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije sistema korisno je upotrebiti u svim slučajevima kada je pokretni sistem nepromenljivi sistem. U tom slučaju, ovaj zakon omogućuje da se isključe iz razmatranja sve unapred nepoznate unutrašnje sile, a kada ne postoji trenje, i sve unapred nepoznate reakcije spoljašnjih veza.

U slučaju promenljivog sistema, primenom ovog zakona, mogu se rešiti samo oni zadaci kod kojih su unutrašnje sile unapred poznate. Ako su, međutim, i ove sile nepoznate (zadaci 124., 128., i njima slični), onda je nemoguće rešiti ovakav zadatak korišćenjem samo ovog zakona.

Jednačina (41) omogućuje da se lako reše zadaci kod kojih u broj datih i traženih veličina ulaze:

- 1) sile koje deluju;
- 2) *pomeranje sistema*;
- 3) brzina tela (linearna ili ugaona) na početku i na kraju pomeranja.

Pri tome, *sile koje deluju na telo (sistem) moraju biti ili konstantne ili da zavise samo od rastojanja.*

Isto tako vrlo je važno imati u vidu da se korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije sistema mogu dobiti i *diferencijalne jednačine kretanja sistema*, a u posebnom slučaju mogu se odrediti i ubrzanja pokretnih tela. U tom cilju potrebno je da se postavi jednačina (41), da se diferenciraju po vremenu obe strane ove jednačine, i da se zatim eliminiše iz dobivene jednačine brzina (vidi zadatke 139., 140.). Ako na sistem deluju proizvoljne sile, onda je pogodnije da se postavi jednačina (40), tj. da se primeni ovaj zakon u diferencijalnom obliku (vidi zadatke 141., 148.).

Zadatak 137. Štap AB , dužine l , vezan je zglobovima za tačku A (sl. 323). Zanemarujući trenje u zglobovima, odrediti koliko najmanju ugaonu brzinu ω_0 treba dati štapu da bi on dospao u horizontalan položaj.

Rešenje. U broj datih i traženih veličina ulaze ω_0 , $\omega_1 = 0$, dok je pomeranje sistema određeno uglom B_0AB_1 . Prema tome, za rešavanje ovog zadatka pogodno je da se upotrebi jednačina (41)

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma \mathbf{A}_i^s. \quad (a)$$

Označimo težinu štapa sa G i izračunajmo sve veličine koje ulaze u gornju jednačinu. Prema formulama (37) i (9) biće:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} J_A \omega_0^2 = \frac{1}{6} \frac{G}{g} l^2 \omega_0^2.$$

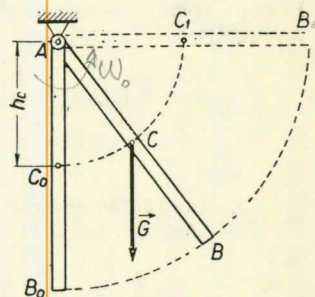
Kako je u krajnjem položaju brzina štapa jednaka nuli, to je: $E_{k1} = 0$. Rad viši samo sila $\vec{G}$, tako da je $\mathbf{A}^s = -Gh_C = -\frac{1}{2}Gl$. Ako sve nađene veličine smenimo u jednačinu (a), dobićemo:

$$-\frac{1}{6} \frac{G}{g} l^2 \omega_0^2 = -\frac{1}{2}Gl,$$

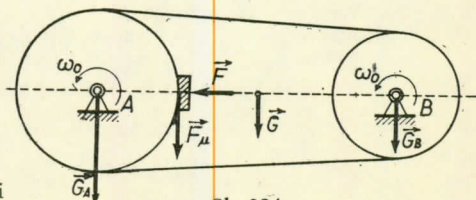
odakle je

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3g}{l}}.$$

Zadatak 138. Kaišnici A i B , spojeni kaišem (sl. 324), obrću se tako da kaišnik A ima ugaonu brzinu ω_0 . Ukupna težina kaišnika iznosi G , a kaiša G_1 . Da bi se kočilo ovo obrtanje, na kaišnik A , poluprečnika R , deluje se silom F preko papuče za kočenje; koeficijent trenja papuče o kaišnik



Sl. 323



Sl. 324

iznosi μ . Zanemarujući trenje u ležištima i smatrajući da su kaišnici homogeni puni diskovi, odrediti koliki će broj obrtaja izvršiti kaišnik A dok se ne zaustavi.

Rešenje: Da bismo odredili traženi broj obrtaja n poslužimo se jednačinom (41)

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma \mathbf{A}_i^s. \quad (a)$$

Pri izračunavanju kinetičke energije, treba, pre svega, imati u vidu da je ukupna kinetička energija sistema jednaka zbiru kinetičkih energija svih tela koja obrazuju sistem. Prema uslovima zadatka je $E_{k1} = 0$, a $E_{k0} = E_{kA} + E_{kB} + E_{kK}$. Uzimajući u obzir da su brzine svih tačaka kaiša $v_k = R\omega_0 = r\omega'_0$, gde je ω'_0 ugaona brzina kaišnika B , a r njegov poluprečnik, dobijamo prema formuli (37) i (11) da je

$$E_{kA} = \frac{1}{2} \left(\frac{G_A}{2g} R^2 \right) \omega_0^2; \quad E_{kB} = \frac{1}{2} \left(\frac{G_B}{2g} r^2 \right) \omega_0'^2 = \frac{1}{2} \frac{G_B}{2g} R^2 \omega_0^2;$$

$$E_{kK} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_{k0}^2 = \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega_0^2.$$

Poslednja od ovih jednačina proizlazi iz činjenice da se sve tačke kaiša kreću istom brzinom. Najzad, s obzirom da je $G_A + G_B = G$, dobijamo:

$$E_{k0} = \frac{G + 2G_1}{4g} R^2 \omega_0^2.$$

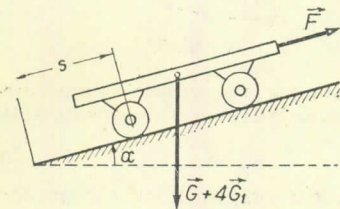
Izračunajmo rad sila. U datom slučaju rad sile teže jednak je nuli, jer se težišta kaišnika i kaiša pri kretanju sistema ne pomeraju. Sila trenja je $F_\mu = \mu F$. Njen rad određujemo prema formuli (44):

$$\mathbf{A}_\mu = -(\mu F R) \varphi_1 = -\mu F R \cdot 2\pi N.$$

Kada sve dobijene izraze zamenimo u jednačinu (a) izlazi da je

$$N = \frac{(G + 2G_1) R \omega_0^2}{8\pi g \mu F}.$$

Zadatak 139. Po strmoj ravni nagiba $\alpha = 30^\circ$ kreću se naviše kolica dejstvom konstantne sile $F = 16$ kp (sl. 325). Težina platforme ovih kolica iznosi $G = 18$ kp, dok je težina svakog od homogenih točkova $G_1 = 2$ kp. Odrediti: 1) kojom će se brzinom v_1 kretati kolica pri translatorsnom kretanju, kada budu bila prešla put $s = 4$ m, ako je $v_0 = 0$; 2) kojim se ubrzanjem kreću kolica. Kotrljanje točkova se vrši bez klizanja. Otpor protiv kotrljanja (sl. 325) zanemariti.



Sl. 325

Rešenje. 1) Da bismo odredili brzinu v_1 upotrebićemo jednačinu (41)

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma \mathbf{A}_i^s.$$

U datom slučaju je $E_{k1} = 0$, a $E_{k0} = E_{kt} + 4E_{k1}$. Kolica se kreću translatorsno, dok je kinetička energija homogenog točka koji se kotrlja bez klizanja izračunata u zadatku 134.; prema tome, biće

$$E_{k1} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_1^2 + 4 \left(\frac{3}{4} \frac{G_1}{g} v_1^2 \right) = \frac{1}{2g} (G + 6G_1) v_1^2.$$

Rad vrše sila F i sila teže jednaka $(G + 4G_1)$. Rad sila trenja, koje sprečavaju klizanje, i normalnih reakcija, jednak je nuli (§ 149). Računom nalazimo da je:

$$\mathbf{A}(\vec{F}) = Fs; \quad \mathbf{A}(\vec{G}_1) = -(G + 4G_1) h_C = -(G + 4G_1) s \sin \alpha.$$

Ako sve dobivene izraze unesemo u jednačinu (a) dobićemo:

$$\frac{1}{2g} (G + 6G_1) v_1^2 = [F - (G + 4G_1) \sin \alpha] s, \quad (b)$$

odakle je

$$v_1 = \sqrt{\frac{2gs [F - (G + 4G_1) \sin \alpha]}{G + 6G_1}} = 2,8 \text{ m/s}.$$

2) Da bismo odredili ubrzanje a kolica, smatraćemo da su u jednačini (b) v_1 i s promenljive veličine. Tada, posle diferenciranja po vremenu obe strane ove jednačine, nalazimo

$$\frac{1}{g} (G + 6G_1) v \frac{dv}{dt} = [F - (G + 4G_1) \sin \alpha] \frac{ds}{dt}.$$

Međutim, $\frac{ds}{dt} = v$, a $\frac{dv}{dt} = a$. Najzad kada skratimo prethodnu jednačinu sa v dobijamo:

$$a = \frac{F - (G + 4G_1) \sin \alpha}{G + 6G_1} g = 0,98 \text{ m/s}^2.$$

Skrećemo pažnju na način kojim smo u ovom zadatku odredili ubrzanje kolica korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije.

Zadatak 140. Na točak poluprečnika R i težine G , koji se kotrlja po horizontalnoj ravni, namotan je konopac, koji je prebačen preko kotura O (sl. 326). Na kraju konopca obešen je teret D , težine G_1 . Odrediti koju će brzinu v_C imati središte točka C , kada točak pređe put s , ako je $(v_C)_0 = 0$ i koliko je ubrzanje a_C središta točka. Koeficijent trenja kotrljanja iznosi ε , dok je poluprečnik inercije točka za osu koja prolazi kroz njegovo središte i_C . Masu konopca i kotura O zanemariti.

Rešenje. 1) Da bismo odredili brzinu v_C iskoristićemo jednačinu (41)

$$E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma \mathbf{A}_i^s.$$

U datom slučaju je $E_{k0} = 0$, a $E_{k1} = E_{kt} + E_{kD}$, pri čemu je prema formulama (36), (38) i (7)

$$E_{kD} = \frac{1}{2} \frac{G_1}{g} v_D^2, \quad E_{kt} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{G}{g} i_C^2 \right) \omega^2.$$

Kako je tačka B trenutni pol brzina to je $\omega = \frac{v_C}{R}$ i $v_D = v_A = 2v_C$. Prema tome, biće

$$E_{k1} = \frac{1}{2g} \left[4G_1 + G \left(1 + \frac{i_C^2}{R^2} \right) \right] v_C^2.$$

Rad ovom prilikom vrše sila $\vec{G}_1$ i spreg $(\vec{F}_N, \vec{G})$. Kako je $v_D = 2v_C$, to je pomeranje tereta D , $h = 2s$ i $\mathbf{A}(\vec{G}_1) = G_1 \cdot 2s$. Rad sila otpora protiv kotrljanja izračunaćemo prema formuli (45), jer je $F_N = G = \text{const.}$ Tada je

$$\Sigma \mathbf{A}_i^s = 2G_1s - \frac{\varepsilon}{R} Gs.$$

Kada sve dobivene izraze smenimo u jednačinu (a) dobićemo:

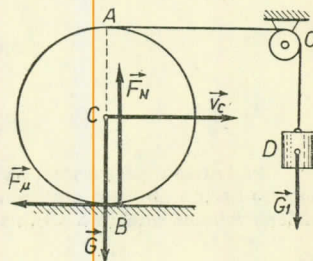
$$\frac{1}{2g} \left[4G_1 + G \left(1 + \frac{i_C^2}{R^2} \right) \right] v_C^2 = \left(2G_1 - \frac{\varepsilon}{R} G \right) s, \quad (\text{b})$$

odakle je

$$v_C = \sqrt{\frac{2g(2G_1R - \varepsilon G)Rs}{4G_1R^2 + G(R^2 + i_C^2)}}.$$

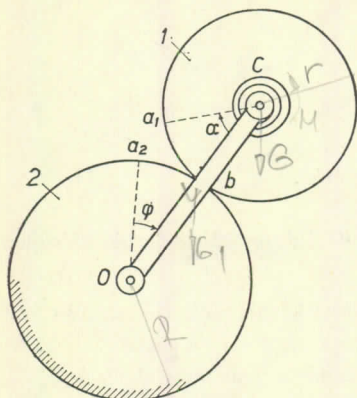
2) Da bismo odredili ubrzanje a_C diferencirajmo po vremenu, kao i u prethodnom zadatku, obe strane jednačine (b). Najzad, uzimajući u obzir da je $\frac{ds}{dt} = v_C$ nalazimo

$$a_C = \frac{(2G_1R - \varepsilon G)R}{4G_1R^2 + G(R^2 + i_C^2)} g.$$



Sl. 326

Zadatak 141. Zupčanik 1, poluprečnika r , težine G , nasaden na krivaju OC , dužine l i težine G_1 , vezan za nju spiralnom oprugom, može se kotrljati po nepomičnom zupčaniku 2, poluprečnika $R = l - r$ (sl. 327). Moment opruge iznosi $M = c\alpha$, gde je α – obrtni ugao zupčanika 1 u odnosu na krivaju. Zanimajući trenje u vezama, odrediti period oscilacija, koje će vršiti krivaja ako je izvedemo iz položaja ravnoteže. Mehanizam se nalazi u horizontalnoj ravni.



Sl. 327

Rešenje. Položaj krivaje određivaćemo uglom koji merimo od položaja ravnoteže. Da bismo isključili iz razmatranja nepoznatu reakciju ose C , posmatrajmo zupčanik 1 i krivaju kao jedan sistem, i postavimo diferencijalnu jednačinu kretanja krivaje korišćenjem jednačine (40).

Odredimo najpre kinetičku energiju sistema u funkciji ugaone brzine obrtanja krivaje ω_K (jer se traži zakon kretanja krivaje). Tako dobijamo:

$$E_k = E_{kK} + E_{kz} = \frac{1}{2} J_{OK} \omega_K^2 + \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_C^2 + \frac{1}{2} J_{Cz} \omega_z^2. \quad (a)$$

Smatrajući krivaju homogenim štapom, a zupčanik – diskom, i imajući u vidu da je za zupčanik 1 tačka dodira trenutni pol brzina, biće

$$J_{OK} = \frac{1}{3} \frac{G_1}{g} l^2, \quad J_{Cz} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} r^2, \\ v_C = l \omega_K, \quad \omega_z = \frac{v_C}{r} = \frac{l}{r} \omega_K.$$

Podvucimo još jednom, da u formulu (38), po kojoj izračunavamo E_{kz} treba uneti *apsolutnu* ugaonu brzinu obrtanja zupčanika, a ne relativnu brzinu obrtanja u odnosu na krivaju. Kada sve nađene veličine smenimo u jednačini (a), izlazi da je

$$E_k = \frac{1}{12g} (2G_1 + 9G) l^2 \omega_K^2 \quad (b)$$

Izračunajmo sada elementaran rad. Spoljašnje sile u datom slučaju ne vrše rad, tako da je $dA^s = 0$. Elementaran rad elastične sile u opruzi (unutrašnja sila) pri obrtanju zupčanika oko krivaje za ugao α jednak je $dA^u = -M d\alpha = -c \alpha d\alpha$ (znak minus dolazi zbog toga što je moment usmeren u stranu suprotnu od smera raščćenja obrtnog ugla zupčanika). S obzirom da tražimo zakon kretanja krivaje, potrebno je da ugao α izrazimo u funkciji od ugla φ . Kako je $\widehat{a_2b} = \widehat{a_1b}$, to je $R\varphi = r\alpha$, odakle je

$$\frac{\alpha}{R} = \frac{\varphi}{r}, \quad \alpha = \frac{l-r}{r} \varphi \quad \text{ i } \quad dA^u = -c \frac{(l-r)^2}{r^2} \varphi d\varphi.$$

Ako sada postavimo jednačinu $dE_k = dA^u$ dobićemo

$$\frac{1}{6g} (2G_1 + 9G) l^2 \omega_K d\omega_K = -c \frac{(l-r)^2}{r^2} \varphi d\varphi.$$

Kada obe strane ove jednačine podelimo sa dt i kad uzmemo u obzir da je $\frac{d\varphi}{dt} = \omega_K$, a

$\frac{d\omega_K}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$, nalazimo diferencijalnu jednačinu kretanja sistema u obliku

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

gde je

$$\omega^2 = \frac{6gc(l-r)^2}{(2G_1 + 9G) l^2 r^2}.$$

Dobijena jednačina predstavlja diferencijalnu jednačinu harmonijskih oscilacija (§ 123). Prema tome, krivaja, izvedena iz položaja ravnoteže, vrši harmonijske oscilacije, čiji je period T jednak

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \frac{lr}{l-r} \sqrt{\frac{2G_1 + 9G}{6gc}}.$$

Način rešavanja ovog zadatka najbolje ilustruje kolike mogućnosti za proučavanje kretanja sistema daje zakon o priraštaju kinetičke energije.

§ 151. Polje sile. Pojam o potencijalnoj energiji

U sile koje mogu delovati na materijalnu tačku pri njenom uzajamnom dejstvu prema drugim telima, spadaju, takođe, i sile koje zavise samo od položaja tačke, tj. samo od njenih koordinata x, y, z . Za takve sile može da se uvede pojam o polju sile. *Poljem sile* naziva se deo prostora, čije sve tačke imaju sledeće svojstvo: na svaki delić mase koja se nalazi u bilo kojoj tački polja, deluje sila potpuno određenog pravca, smeru i intenziteta. Kao primer za polje sile možemo da navedemo polje gravitacije (privlačnih gravitacionih sila) planeta ili Sunca.

Ako rad, izvršen od strane sila polja, pri kretanju materijalne tačke u njemu, zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja te tačke, a ne zavisi od njene putanje, onda se takvo polje sile zove *konzervativno (potencijalno) polje sile*, a sile koje deluju u tom polju nazivaju se *konzervativne (potencijalne) sile*. Konzervativne su, na primer, sledeće sile: sila teže, elastična sila u opruzi, Njutnova gravitaciona sila.

Sile čiji rad zavisi od oblika putanje, ili pak od brzine pokretne tačke, zovu se *nekonzervativne (nepotencijalne) sile*. Takve su, npr., sila trenja, sila otpora.

Za konzervativne sile može da se uvede pojam potencijalne energije, kao o veličini, koja karakteriše »rezervu rada«, kojom raspolaže materijalna tačka u datom položaju u polju sile. Da bismo bili u stanju da uporedimo međusobom te »rezerve rada«, potrebno je izabrati tzv. nultu tačku O , u kojoj se uslovno smatra da je »rezerva rada« jednaka nuli (izbor ove nulte tačke je sasvim proizvoljan, slično kao i izbor koordinatnog početka). *Potencijalnom energijom materijalne tačke u datom položaju M naziva se skalarna veličina E_p , koja je jednaka onom radu, koji izvrše sile polja pri pomeranju tačke iz položaja M u nulti položaj*

$$E_p = A_{(MO)}.$$

Iz ove definicije proizlazi da potencijalna energija E_p zavisi od koordinata x, y, z tačke M , tj. da je $E_p = E_p(x, y, z)$. Da bismo odredili $E_p(x, y, z)$, potrebno je da se izračuna veličina $A_{(MO)}$ po formulama u § 112. Ako nepoznavajući putanju MO , ili zakon kretanja duž te putanje, nismo u stanju da izračunamo rad $A_{(MO)}$, onda to znači da data sila nije konzervativna.

Navedimo primere. Iz rezultata koje smo dobili u § 113, proizlazi da će za silu teže, ako za nultu tačku uzmemo koordinatni početak, i ako osu Oz usmerimo vertikalno naviše, biti (§ 113, tačka 1)

$$E_p = Gz,$$

gde je G — težina delića koji se nalazi u polju teže.

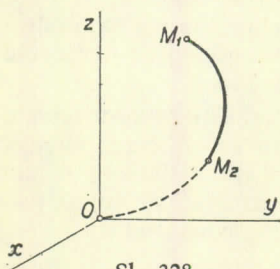
Za elastičnu silu opruge, koja može da se isteže samo duž usmerene ose Ox , ako se kraj nenapregnute opruge smatra za nultu tačku, biće $\Delta l_{\text{poč}} = x$, a $\Delta l_{\text{kon}} = 0$. Prema tome, po formuli (40) iz § 113 proizlazi:

$$E_p = \frac{1}{2} cx^2,$$

gde je c — krutost opruge.

Izrazimo rad preko potencijalne energije. Ako se tačka u konzervativnom polju sile pomeri iz položaja M_1 u položaj M_2 (sl. 328), onda, kako rad ne zavisi od oblika putanje, biće $\mathbf{A}_{(M_1O)} = \mathbf{A}_{(M_1M_2)} + \mathbf{A}_{(M_2O)}$. Međutim, po definiciji je $\mathbf{A}_{(M_1O)} = E_{p1}$, $\mathbf{A}_{(M_2O)} = E_{p2}$. Odavde je

$$\mathbf{A}_{(M_1M_2)} = E_{p1} - E_{p2}. \quad (46)$$



Sl. 328

Prema tome, *rad konzervativne sile jednak je razlici vrednosti potencijalne energije pokretne tačke u njenom početnom i krajnjem položaju*. Pri pomeranju po zatvorenoj putanji ($E_{p2} = E_{p1}$), rad konzervativne sile jednak je, očividno, nuli.

Pokažimo na kraju da ako znamo funkciju $E_p(x, y, z)$ onda možemo odrediti silu u bilo kojoj tački polja sile. U tom cilju izračunajmo elementarni rad $d\mathbf{A}$ pri pomeranju iz tačke $M(x, y, z)$ u tačku $M_1(x + dx, y + dy, z + dz)$. Po formuli (46) biće:

$$d\mathbf{A} = -dE_p(x, y, z),$$

jer pri izračunavanju rada treba uzeti razliku između E_p i E_{p1} , a diferencijal predstavlja priraštavanje vrednosti funkcije, tj. veličine E_{p1} i njene početne vrednosti E_p .

Ako sada u gornji izraz smenimo za $d\mathbf{A}$ odgovarajući analitički izraz (§ 112), a dE_p izračunamo kao diferencijal funkcije od tri promenljive x, y, z , dobićemo

$$Xdx + Ydy + Zdz = - \left(\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz \right),$$

odakle, ako izjednačimo koeficijente uz dx, dy, dz , nalazimo

$$X = -\frac{\partial E_p}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial E_p}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial E_p}{\partial z}. \quad (47)$$

Formule (47) omogućuju da odredimo projekcije sile, koja deluje u konzervativnom polju sile, ako znamo $E_p(x, y, z)$, pa, prema tome, i samu silu. U posebnom slučaju za silu teže i elastičnu silu opruge je:

$$\begin{aligned} X = Y = 0, \quad Z &= -\frac{\partial E_p}{\partial z} = -G; \\ X &= -\frac{\partial E_p}{\partial x} = -cx, \quad Y = Z = 0. \end{aligned}$$

Ponekad se umesto funkcije E_p uvodi funkcija $U(x, y, z) = -E_p(x, y, z)$ koja se zove *funkcija sile*. Za tu funkciju je $d\mathbf{A} = dU$, pa jednačine, slične jednačinama (47), ne sadrže znake minus.

§ 152. Zakon o održanju mehaničke energije

Neka sve sile koje deluju na sistem, kako spoljašnje, tako i unutrašnje, budu konzervativne. U tom slučaju će za svaku od tačaka sistema rad datih sila biti jednak

$$A_i = (E_{p0})_i - (E_{p1})_i.$$

Prema tome, za sve spoljašnje i unutrašnje sile je

$$\Sigma A_i = \Sigma(E_{p0})_i - \Sigma(E_{p1})_i = E_{p0} - E_{p1},$$

gde je $E_p = \Sigma E_{pi}$ potencijalna energija celog sistema.

Ako ovaj izraz za rad smenimo u jednačinu (39), dobićemo:

$$E_{k1} - E_{k0} = E_{p0} - E_{p1},$$

odnosno

$$E_{k1} + E_{p1} = E_{k0} + E_{p0} = E = \text{const.}$$

Prema tome, pri kretanju tela pod dejstvom konzervativnih sila zbir kinetičke i potencijalne energije sistema u svakom položaju sistema ostaje konstantna veličina. U ovome se sastoji zakon o održanju mehaničke energije, koji se javlja kao poseban slučaj opšteg fizičkog zakona o održanju energije. Veličina $E_k + E_p = E$ zove se *ukupna mehanička energija sistema*.

Ako u date sile ulaze i nekonzervativne sile, npr. sile trenja, onda se ukupna mehanička energija sistema za vreme kretanja smanjuje i prelazi u druge oblike energije, npr. u toplotnu energiju.

Značaj dobivenog rezultata sastoji se u tome što se on može dovesti u vezu sa opštim fizičkim zakonom o održanju energije. Međutim, pri rešavanju čisto mehaničkih zadataka može se u svim slučajevima neposredno upotrebiti zakon o priraštaju kinetičke energije.

Primer. Klatno (sl. 329) gradi u početnom trenutku vremena ugao φ_0 sa vertikalom i počinje da se kreće bez početne brzine. Tada je u početnom položaju $E_{p0} = Gz_0$ i $E_{k0} = 0$, gde je G — težina klatna, z — koordinata njegovog težišta. Prema tome, ako zanemarimo sve otpore, u bilo kom drugom položaju biće $E_k + E_p = E_{p0}$, ili

$$Gz + \frac{1}{2} J_A \omega^2 = Gz_0.$$

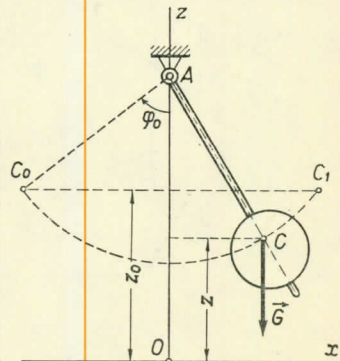
Na taj način, težište klatna ne može se izdići iznad položaja z_0 . Pri spuštanju klatna njegova potencijalna energija se smanjuje, a kinetička energija se povećava, dok pri podizanju, obrnuto, potencijalna energija se povećava, a kinetička energija se smanjuje.

Iz prethodne jednačine proizlazi da je

$$\omega^2 = \frac{2G}{J_A} (z_0 - z).$$

Prema tome, ugaona brzina obrtanja klatna u bilo kom trenutku vremena zavisi samo od položaja koji zauzima njegovo težište, i u jednom istom položaju ima jednu te istu vrednost. Zavisnosti ovakvog oblika javljaju se samo kada pri kretanju deluju konzervativne sile.

Blagodareći trenju u zglobu i otporu vazduha (nekonzervativne — nepotencijalne sile) gornja zavisnost stvarno neće postojati; ukupna mehanička energija klatna smanjivaće se tokom vremena, a oscilacije koje ono vrši će se prigušivati.



Sl. 329

Glava XXVIII

NEKI SLUČAJEVI KRETANJA KRUTOG TELA

§ 153. Obrtno kretanje krutog tela

Proučimo primenu opštih zakona dinamike na neke slučajeve kretanja krutog tela. Kako se proučavanje translatorsnog kretanja krutog tela svodi na problem dinamike materijalne tačke, to ćemo naša razmatranja započeti proučavanjem obrtnog kretanja krutog tela.

Neka na kruto telo, koje može da se obrće oko nepomične ose z (sl. 330), deluje sistem datih sila $\vec{F}_1^s, \vec{F}_2^s, \vec{F}_3^s, \dots, \vec{F}_n^s$. Istovremeno na telo deluju i reakcije ležišta $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$. Da bismo eliminisali iz jednačina kretanja ove unapred nepoznate sile, upotrebimo zakon o momentu količina kretanja za osu z (§ 144). Kako su momenti sile $\vec{F}_A$ i $\vec{F}_B$ za osu z jednaki nuli, to je

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^s,$$

gde je

$$M_z^s = \sum M_{z_i}^s.$$

U daljim izlaganjima veličinu M_z^s zvaćemo *obrotni moment*.

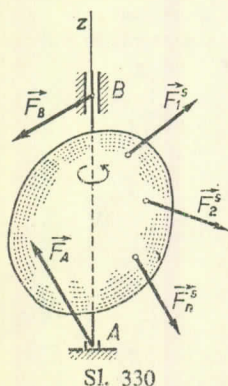
Ako u prethodnu jednačinu smenimo vrednost $L_z = J_z \omega$, dobićemo:

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = M_z^s, \text{ odnosno } J_z \frac{d^2\varphi}{dt^2} = M_z^s. \quad (48)$$

Jednačina (48) predstavlja *diferencijalnu jednačinu obrtnog kretanja krutog tela*. Iz nje proizilazi, da je *proizvod iz momenta inercije tela za obrtnu osu i ugaonog ubrzanja jednak obrtnom momentu*

$$J_z \ddot{\varphi} = J_z \ddot{\omega} = M_z^s.$$

(48')



Iz jednačine (48') se vidi, da pri datom M_z^s , ukoliko je veći moment inercije tela, utoliko će ugaono ubrzanje biti manje, i obrnuto. Prema tome, moment inercije tela, pri obrtnom kretanju igra istu ulogu, kao i masa tela pri translacionom kretanju, tj. moment inercije je mera inercije tela pri obrtnom kretanju (vidi § 131).

Jednačina (48) omogućuje da:

1) znajući obrtni moment, odredimo $\varphi = f(t)$, tj. zakon obrtanja tela i njegovu ugaonu brzinu ω ;

2) znajući zakon obrtanja, tj. $\varphi = f(t)$, odredimo obrtni moment M_z^s .

Pri rešavanju prvog zadatka treba imati u vidu da u opštem slučaju veličina M_z^s može da bude promenljiva i da zavisi od t , φ i $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$.

Umesto jednačine (48) za proučavanje obrtnog kretanja krutog tela možemo se koristiti i zakonom o priraštaju kinetičke energije $E_{k1} - E_{k0} = \Delta E_k = A^s$, gde se E_k i A^s određuju po formulama (37) i (43).

Skrećemo pažnju na posebne slučajeve:

1. Ako je $M_z^s = 0$, onda je $\omega = \text{const}$, tj. telo se obrće *ravnomerno*;

2. Ako je $M_z^s = \text{const}$, onda je i $\dot{\omega} = \text{const}$, tj. telo se obrće *ravnomerno promenljivo*.

Jednačina (48) po svom spoljašnjem obliku analogna je diferencijalnoj jednačini pravolinijskog kretanja tačke (§ 104). Iz tog razloga su i metode integriranja tih jednačina takođe analogne (vidi zadatak 143.).

Pri rešavanju zadataka korisno je da se poslužimo jednačinom (48) jedino *tada* kada se sistem sastoji samo iz jednog tela koje se obrće. Ako u sistemu osim tela koje se obrće ima i drugih pokretnih tela (vidi, na primer, zadatke 133., 138., itd.), onda je bolje da se jednačine kretanja odrede korišćenjem opštih zakona dinamike, ili na način koji bude pokazan u §§ 160 i 167.

Pri rešavanju zadataka tipa 133. korišćenjem jednačine (48) često se pravi karakteristična greška koja se sastoji u tome što se jednačina kretanja postavi u obliku $J_O \dot{\omega} = Fr$. Međutim, na doboš ne deluje sila $\vec{F}$, već sila zatezanja u konopcu $\vec{F}_K$, koja nije jednaka F , tako da jednačina (48) ima oblik $J_O \dot{\omega} = F_K r$. Da bismo rešili ovu jednačinu, treba prethodno odrediti silu F_K postavljanjem jednačine kretanja tereta A , a sve to produžuje račun.

Zadatak 142. Točak težine G obrće se oko ose O ugaonom brzinom ω_0 (sl. 331). U nekom trenutku vremena na točak počne da pritiskuje papuča za kočenje silom F . Koeficijent trenja papuče o točak jednak je μ , dok je poluprečnik točka jednak R . Zanimajući trenje u ležištu i težinu žbica, odrediti posle koliko sekundi će se točak zaustaviti.

Rešenje. Postavimo jednačinu (48) i smatrajmo da je moment pozitivan u slučaju kada je on usmeren u stranu obrtanja točka; tako dobijamo:

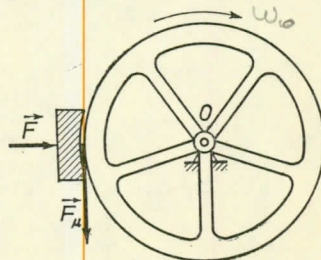
$$J_O \frac{d\omega}{dt} = J_O \dot{\omega} = -\mu Fr, \quad (a)$$

jer je sila trenja $F_\mu = \mu F$. Odavde, integriranjem, dobijamo:

$$J_O \omega = -\mu Fr t + C_1.$$

Prema početnim uslovima je $\omega = \omega_0$ za $t = 0$, pa je, prema tome, $C_1 = J_O \omega_0$, i zato je

$$\omega = \omega_0 - \frac{\mu Fr}{J_O} t.$$



Sl. 331

U trenutku zaustavljanja, kada je $t = t_1$, biće $\omega = 0$. Ako ove vrednosti smenimo u gornju jednačinu i ako uzmemo u obzir da je za obim točka $J_O = \frac{G}{g} r^2$, dobićemo:

$$t_1 = \frac{J_O \omega_0}{\mu F r} = \frac{G r \omega_0}{\mu F g}.$$

Kada bi se tražio broj obrtaja koji izvrši točak do trenutka kada se zaustavi, onda bi se to moglo naći ne samo integriranjem jednačine (b), već i daleko prostije, ako iskoristimo zakon o priraštaju kinetičke energije.

Zadatak 143. Vertikalni cilindrični rotor, čiji je moment inercije za obrtnu osu jednak J_z (sl. 332) obrće se usled dejstva obrtnog momenta M_O . Odrediti kako se pri obrtanju menja ugaona brzina rotora ω , ako je $\omega_0 = 0$, i ako je moment sila otpora vazduha proporcionalan ω , tj. ako je

$$M_w = k\omega.$$

Rešenje. Diferencijalna jednačina obrtanja rotora ima oblik (moment ćemo smatrati pozitivnim kada deluje u smeru obrtanja):

$$J_z \frac{d\omega}{dt} = J_z \dot{\omega} = M_O - k\omega.$$

Ako razdvojimo promenljive i ako stavimo $\frac{k}{J_z} = p$, dobićemo:

$$-k \frac{d\omega}{M_O - k\omega} = -p dt.$$

Odavde, integriranjem izlazi da je

$$\ln(M_O - k\omega) = -pt + \ln C.$$

Kako je za $t = 0$ veličina $\omega = 0$, to je $C = M_O$, i

$$\ln \frac{M_O - k\omega}{M_O} = -kt,$$

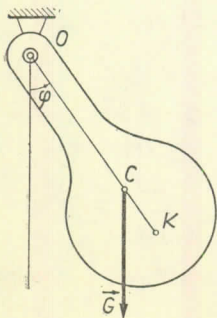
ili

$$\frac{M_O - k\omega}{M_O} = e^{-kt}$$

Konačno dobijamo:

$$\omega = \frac{M_O}{k} \left(1 - e^{-kt} \right)$$

Kako što vidimo, ugaona brzina rotora se povećava tokom vremena i teži graničnoj vrednosti $\omega_{gr} = \frac{M_O}{k}$.



Sl. 333

§ 154. Fizičko klatno

Fizičkim klatnom naziva se kruto telo koje može da osciluje oko nepomične horizontalne ose pod dejstvom sile teže.

Na slici (sl. 333) predstavljen je presek klatna i ravni koja je upravna na osi obrtanja i koja prolazi kroz težište klatna C (sl. 333).

Uvedimo oznake: G — težina klatna, s — rastojanje $\overline{OC}$ od težišta do obrtne ose, J_O — moment inercije mase klatna za obrtnu osu. Položaj klatna određujemo uglom φ , tj. uglom koji gradi prava OC sa vertikalom.

Kako je u datom slučaju obrtni moment $M_O = -Gs \sin \varphi$ (moment je sa znakom minus jer obrće u smeru suprotnom od rašćenja ugla φ), to jednačina (48) glasi

$$J_O \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -Gs \sin \varphi.$$

Ako obe strane ove jednačine podelimo sa J_O i ako uvedemo oznaku

$$\omega^2 = \frac{Gs}{J_O},$$

dobićemo diferencijalnu jednačinu oscilacija klatna u obliku

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \sin \varphi = 0.$$

Ova jednačina ima isti oblik kao i diferencijalna jednačina oscilacija matematičkog klatna (§ 124). Prema tome, oscilacije fizičkog i matematičkog klatna imaju isti karakter.

Ako se ograničimo na slučaj malih oscilacija, tj. ako stavimo da je približno $\sin \varphi \approx \varphi$, dobićemo diferencijalnu jednačinu malih oscilacija klatna u obliku

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0.$$

Ovo je diferencijalna jednačina prostih harmonijskih oscilacija. Prema tome, male oscilacije fizičkog klatna, kao i matematičkog klatna, su harmonijske. Period malih oscilacija je jednak

$$T_\Phi = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J_O}{Gs}}. \quad (49)$$

Upoređivanjem formule (49) sa obrascem za period malih oscilacija matematičkog klatna

$$T_m = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

zapazićemo da će pri dužini

$$l_1 = \frac{J_O g}{Gs} = \frac{J_O}{Ms}, \quad (50)$$

period oscilacija matematičkog klatna biti isti kao i period oscilacija odgovarajućeg fizičkog klatna.

Dužina l_1 takvog matematičkog klatna, čiji je period oscilacija jednak periodu oscilacija datog fizičkog klatna, zove se *redukovana dužina fizičkog klatna*. Tačka K , koja se od obrtne ose nalazi na rastojanju $\overline{OK} = l_1$ zove se *centar oscilacija fizičkog klatna* (vidi sl. 333).

Primitimo da je po Štajnerovoj (Hajgensovoj) teoremi $J_O = J_C + Ms^2$, tako da formulu (50) možemo napisati i u obliku

$$l_1 = s + \frac{J_C}{Ms}. \quad (50')$$

Odavde proizlazi da je rastojanje $\overline{OK}$ uvek veće od rastojanja $\overline{OC} = s$, tj. da se centar oscilacija fizičkog klatna uvek nalazi ispod njegovog središta masa.

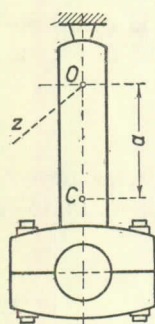
Iz formule (50') se vidi da je $\overline{KC} = J_C / Ms$. Prema tome, ako obrtnu osu premestimo u tačku K , onda će redukovana dužina l_2 dobijenog klatna, prema formuli (50'), biti jednaka

$$l_2 = \overline{KC} + \frac{J_C}{M \cdot \overline{KC}} = \frac{J_C}{Ms} + s = l_1.$$

Zato tačke K i O mogu da izmene uloge, tj. ako obrtna osa prolazi kroz tačku K , onda će centar oscilacija biti tačka O (jer je $l_1 = l_2$) i period oscilacija ostaće isti. Ovo svojstvo se koristi kod klatna koje služi za određivanje ubrzanja sile teže.

§ 155. Eksperimentalno određivanje momenata inercije

Jedna od eksperimentalnih metoda za određivanje momenata inercije tela (metoda oscilacija klatna) zasniva se na korišćenju formule (49) za period malih oscilacija klatna.

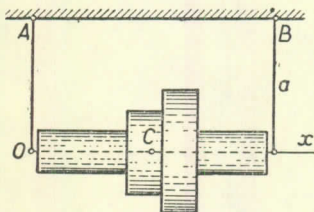


Sl. 334

Neka, npr., treba da se odredi moment inercije za osu Oz tela koje je prikazano na sl. 334 (klipna poluga), a čija je težina G poznata. Obesimo telo tako da osa Oz bude horizontalna, i izmerimo sekundomerom period malih oscilacija T . Zatim metodom — vaganja (vidi § 55, sl. 129) odredimo rastojanje $\overline{OC} = a$. Ako sve to zamenimo u formuli (49), dobićemo:

$$J_{Oz} = \frac{GaT^2}{4\pi^2}.$$

Ako se traži moment inercije tela za osu Ox , koja prolazi kroz težište tela, onda telo možemo obesiti o dva konca tako da osa Ox bude horizontalna (sl. 335),



Sl. 335

i da zatim eksperimentalnim putem odredimo moment inercije J_{AB} tela za osu AB (veličina a u tom slučaju je unapred poznata). Posle toga moment inercije se izračunava korišćenjem Štajnerove (Hajgensove) teoreme:

$$J_{Ox} = J_{AB} - \frac{G}{g} a^2.$$

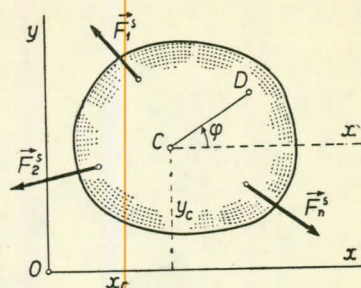
§ 156. Ravno kretanje krutog tela

Položaj krutog tela koje vrši ravno kretanje određen je u svakom trenutku vremena položajem pola i obrtanjem tela oko pola (§ 77). Dinamički zadatak ravnog kretanja rešićemo najprostije ako za pol uzmemo središte masa C tela (sl. 336) i ako položaj tela budemo određivali koordinatama x_C, y_C i obrtnim uglom φ .

Neka na kruto telo deluju spoljašnje sile $\vec{F}_1^s, \vec{F}_2^s, \dots, \vec{F}_n^s$. Tada ćemo kretanje tačke C odrediti korišćenjem zakona o kretanju središta masa

$$M\vec{a}_C = \Sigma \vec{F}_i^s, \quad (51)$$

dok ćemo obrtno kretanje oko središta masa C odrediti jednačinom (48), jer zakon iz koga je dobijena ta jednačina važi i u slučaju obrtanja tela oko središta masa sistema. Projicirajući obe strane jednačine (51) na koordinatne ose, dobićemo:



Sl. 336

$$Ma_{Cx} = \Sigma X_i^s, \quad Ma_{Cy} = \Sigma Y_i^s, \quad J_C \dot{\omega} = \Sigma M_C^{\vec{F}_i^s}, \quad (52)$$

odnosno

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 x_C}{dt^2} &= M \ddot{x}_C = \Sigma X_i^s, \\ M \frac{d^2 y_C}{dt^2} &= M \ddot{y}_C = \Sigma Y_i^s, \\ J_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} &= J_C \ddot{\varphi} = \Sigma M_C^{\vec{F}_i^s}. \end{aligned} \quad (52')$$

Jednačine (52) predstavljaju *diferencijalne jednačine ravnog kretanja krutog tela*. Pomoću njih i datih sila možemo odrediti zakon kretanja tela, ili obrnuto, ako znamo zakon kretanja tela možemo odrediti glavni vektor i glavni moment sila koje deluju na telo.

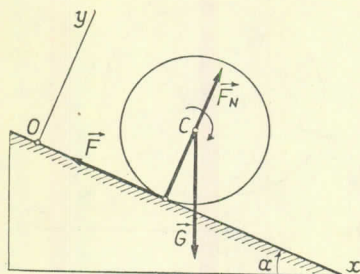
Pri prinudnom kretanju tela, kada je putanja središta masa tela poznata, lakše je jednačine kretanja tačke C postaviti u obliku projekcija na tangentu T i glavnu normalu N te putanje. Tada umesto sistema jednačina (52) dobijamo:

$$M \frac{dv_C}{dt} = \Sigma F_{iT}^s, \quad M \frac{v_C^2}{R_k} = \Sigma F_{iN}^s, \quad J_C \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = \Sigma M_C^{\vec{F}_i^s}, \quad (53)$$

gde je R_k — poluprečnik krivine putanje središta masa.

Primetimo da u slučaju prinudnog kretanja u desne strane jednačina (52) i (53) ulaze i nepoznate reakcije. Radi određivanja tih reakcija potrebne su dopunske jednačine, koje izražavaju uslove, koje propisuju veze (vidi zadatak 144. i druge). Često se jednačine prinudnog kretanja mogu i prostije postaviti, ako se iskoristi zakon o priraštaju kinetičke energije, koji u tom slučaju zamenjuje jednu od jednačina (52) ili (53).

Zadatak 144. Homogeni valjak kotrlja se bez klizanja po strmoj ravni (sl. 337). Odrediti ubrzanje središta mase valjka i najmanju silu trenja pri kojoj je moguće kotrljanje bez klizanja. Otpor protiv kotrljanja zanemariti.



Sl. 337

Rešenje. Označimo sa: α – ugao nagiba strme ravni, G – težinu valjka, R njegov poluprečnik, F – najmanju silu trenja pri kojoj je moguće kotrljanje. Usmerimo osu Ox – duž strme ravni, a osu Oy – upravno na nju.

Kako se duž ose Oy težište valjka ne pomera, to je $a_{Cy} = 0$, pa je zato i suma projekcija svih sila na tu osu jednaka nuli. Na taj način izlazi da je

$$F_N = G \cos \alpha.$$

Postavimo ostale dve jednačine sistema (52), imajući u vidu da je $a_{Cx} = a_C$. Zanemarujući otpor protiv kotrljanja i smatrajući da je moment sila pozitivan kada deluje u smeru

obrtanja valjka, dobićemo

$$Ma_C = G \sin \alpha - F, \quad J_C \dot{\omega} = FR. \quad (a)$$

Jednačine (a) sadrže tri nepoznate a_C , $\dot{\omega}$ i F (ovde se ne može smatrati da je $F = \mu F_N$, jer ovaj obrazac važi samo u slučaju kada tačka dodira klizi niz ravan, a pri odsustvu klizanja može da bude $F \leq \mu F_N$; (vidi § 36)). Dopunsku zavisnost između nepoznatih veličina dobićemo ako uzmemo u obzir da je pri čistom kotrljanju $v_C = R\omega$, odakle diferenciranjem dobijamo $a_C = R\dot{\omega}$.

Tada, druga od jednačina (a), ako uzmemo u obzir da je za homogeni valjak $J_C = \frac{1}{2} MR^2$, postaje

$$\frac{1}{2} Ma_C = F. \quad (b)$$

Ako smenimo ovu vrednost za silu F u prvu od jednačina (a) izlazi da je

$$a_C = \frac{2}{3} g \sin \alpha. \quad (c)$$

Sada iz jednačine (b) proizlazi da je

$$F = \frac{1}{3} G \sin \alpha. \quad (d)$$

Prema tome, sila trenja, koja deluje na valjak, treba da ima vrednost (d) da bi se valjak kotrljao bez klizanja. Malopre bilo je pomenuto da je $F \leq \mu F_N$. Na taj način, čisto kotrljanje nastaje kada je ispunjen uslov

$$\frac{1}{3} G \sin \alpha \leq \mu G \cos \alpha,$$

odnosno

$$\mu \geq \frac{1}{3} \tan \alpha.$$

Ako je koeficijent trenja manji od ove veličine, onda sila F neće moći da dostigne vrednost određenu jednačinom (d), i valjak će se kotrljati niz ravan sa klizanjem. Tada v_C i ω nisu vezani zavisnošću $v_C = R\omega$ (tačka dodira nije trenutni pol brzina), ali zato će sila F imati svoju graničnu vrednost, tj. biće $F = \mu F_N = \mu G \cos \alpha$, i jednačina (a) imaće oblik

$$\frac{G}{g} a_C = G (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \frac{1}{2} \frac{G}{g} R^2 \omega = \mu GR \cos \alpha,$$

odakle je

$$a_C = g (\sin \alpha - \mu \cos \alpha), \quad \omega = \frac{2g\mu}{R} \cos \alpha. \quad (e)$$

Težište valjka u tom slučaju se kreće ubrzanjem a_C , a sam valjak se obrće ugaonim ubrzanjem $\dot{\omega}$, čije su veličine određene jednačinama (e).

Zadatak 145. Rešiti prethodni zadatak uzimajući u obzir i otpor protiv kotrljanja, ako je koeficijent otpora protiv kotrljanja jednak ε .

Rešenje. Pokažimo na ovom primeru i drugi način rešavanja zadatka. Odredimo ubrzanje a_C korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije, tj. polazeći od jednačine

$$dE_k = dA^s. \quad (a)$$

U posmatranom slučaju (vidi zadatak 134., § 147), biće

$$E_k = \frac{3}{4} M v_C^2.$$

Rad vrši samo sila $\vec{G}$ i moment otpora protiv kotrljanja; rad sile $\vec{F}$ pri kotrljanju jednak je nuli (vidi § 149). Tada, imajući u vidu formulu (45), dobićemo (vidi sl. 337, na kojoj treba sada smatrati da je otpor $\vec{F}_N$ pomenen u smeru kretanja za veličinu ε):

$$dA^s = G \sin \alpha \cdot ds_C - \frac{\varepsilon}{R} F_N \cdot ds_C = G \left(\sin \alpha - \frac{\varepsilon}{R} \cos \alpha \right) ds_C.$$

Kada nadene vrednosti smenimo u jednačinu (a) i kada podelimo obe strane jednačine sa dt , dobićemo

$$\frac{3}{2} \frac{G}{g} v_C \frac{dv_C}{dt} = G \left(\sin \alpha - \frac{\varepsilon}{R} \cos \alpha \right) \frac{ds_C}{dt}.$$

Poslednji množitelj jednak je v_C i zato konačno dobijamo

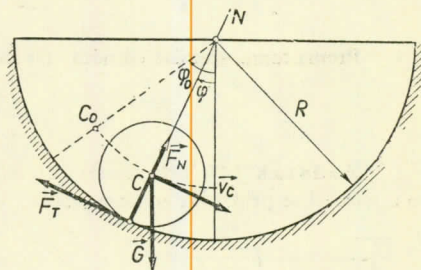
$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = \frac{2}{3} g \left(\sin \alpha - \frac{\varepsilon}{R} \cos \alpha \right).$$

Za $\varepsilon = 0$ ova formula daje isti rezultat kao i u prethodnom zadatku.

Sila trenja može tada da se odredi iz jednačine $Ma_C = G \sin \alpha - F$, koja ne menja svoj oblik, tj. ista je kao i u prethodnom zadatku.

Zadatak 146. Po cilindričnoj površini, poluprečnika R (sl. 338), iz položaja koji je određen uglom φ_0 , počinje da se kreće homogeni valjak težine G , poluprečnika r .

Odrediti: 1) silu pritiska valjka na cilindričnu površinu pri proizvoljnom uglu φ ; 2) zakon kretanja središta masa valjka, kada je ugao φ_0 mali. Otpor protiv kotrljanja zanemariti.



Sl. 338

Rešenje. 1) Na valjak u proizvoljnom položaju deluju sila $\vec{G}$, normalna reakcija $\vec{F}_N$ i sila trenja $\vec{F}_T$ bez koje ne bi bilo moguće kotrljanje bez klizanja.

Putanja tačke C je poznata; to je krug poluprečnika $R - r$. Radi određivanja normalne reakcije F_N iskoristimo drugu od jednačina (53). Kada usmerimo normalu CN u izdubljenju (konkavnu) stranu putanje, dobićemo:

$$M \frac{v_C^2}{R - r} = F_N - G \cos \varphi. \quad (a)$$

Brzinu v_C koja ulazi u ovu jednačinu odredimo korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije (uporedi sa § 118):

$$E_k - E_{k0} = \Delta E_k = \Sigma A^s. \quad (b)$$

U datom slučaju je $E_{k0} = 0$, a $E_k = \frac{3}{4} M v_C^2$ (vidi zadatak 134.). Rad vrši samo sila G . Prema tome je

$$\Sigma A_i^s = Gh = G(R - r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0),$$

i jednačina (b) postaje

$$\frac{3}{4} M v_C^2 = G(R - r)(\cos \varphi - \cos \varphi_0). \quad (c)$$

Izračunajmo iz ove jednačine veličinu $M v_C^2$ i smenimo je u jednačini (a); tako dobijamo definitivno:

$$F_N = \frac{1}{3} G (7 \cos \varphi - 4 \cos \varphi_0).$$

Ako je, npr., $\varphi_0 = 60^\circ$, a $\varphi = 0^\circ$, onda je $F_N = \frac{5}{3} G$.

2) Da bismo odredili zakon kretanja tačke C diferencirajmo jednačinu (c) po vremenu. Izlazi da je

$$\frac{3}{2} \frac{G}{g} v_C \frac{dv_C}{dt} = -G(R - r) \sin \varphi \frac{d\varphi}{dt}.$$

U datom slučaju ugao φ se smanjuje pri kretanju valjka tako da je $\frac{d\varphi}{dt} < 0$. Tada je

$$v_C = (R - r) \left| \frac{d\varphi}{dt} \right| = -(R - r) \frac{d\varphi}{dt}, \quad \frac{dv_C}{dt} = -(R - r) \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Ako unesemo sve ove vrednosti u prethodnu jednačinu, konačno dobijamo:

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{2}{3} \frac{g}{R - r} \sin \varphi = 0.$$

Ako je ugao φ_0 mali, onda, s obzirom da je $\varphi \leq \varphi_0$, može se smatrati da je $\sin \varphi \approx \varphi$, tako da dobijena jednačina prelazi u

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0,$$

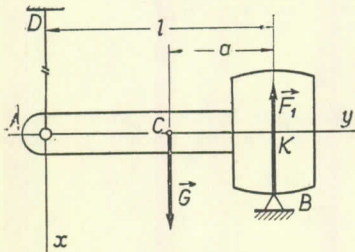
gde je

$$\omega^2 = \frac{2}{3} \frac{g}{R - r}.$$

Prema tome, središte cilindra vrši harmonijske oscilacije (vidi § 123), čiji je period

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{3(R - r)}{2g}}.$$

Zadatak 147. Telo se oslanja u tački B na piezoelektrični pribor kojim se meri sila pritiska, a u tački A se pridržava koncem AD (sl. 339). U ravnotežnom položaju prava AC je horizontalna, a pritisak u tački B je F_0 . Odrediti moment inercije tela J_C za osu koja prolazi kroz njegovo središte masa C , ako u trenutku, kada se preseče konac, pritisak u tački B postane F_1 . Rastojanje l je poznato.



Sl. 339

Rešenje. 1) U položaju ravnoteže biće $F_0 l = G(l - a)$. Odavde nalazimo da je

$$a = \frac{G - F_0}{G} l.$$

2) Čim se konac preseče telo počinje da vrši ravno kretanje. Za početni elementarni vremenski interval promena položaja tela može se zanemariti. Tada jednačine (52), koje važe samo za taj vremenski interval, imaju oblik

$$M a_{Cx} = G - F_1, \quad a_{Cy} = 0, \quad J_C \dot{\omega} = F_1 a, \quad (a)$$

Kako je $a_{Cy} = 0$, to tačka C počinje da se pomera vertikalno naniže, dok tačka B klizi horizontalno (trenje na osloncu smatramo da je malo). Ako povučemo normale na pravce ovih pomeranja, naći ćemo da se trenutni pol brzina nalazi u tački K . Prema tome, je $v_C = a\omega$. Smatrajući

da je u razmatranom elementarnom vremenskom intervalu $a = \text{const}$, posle diferenciranja ove jednačine dobijamo da je $a_C = a\dot{\omega}$. Tada, prva od jednačina (a) postaje:

$$\frac{G}{g} a \dot{\omega} = G - F_1.$$

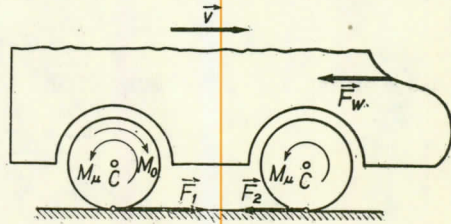
Iz ove jednačine određujemo $\dot{\omega}$ i na taj način definitivno nalazimo da je

$$J_C = \frac{F_1 a}{\dot{\omega}} = \frac{G}{g} \frac{F_1}{G - F_1} a^2$$

Dobijeni rezultat može se iskoristiti za eksperimentalno određivanje momenata inercije.

Zadatak 148. Težina automobila sa točkovima iznosi G (sl. 340); težina svakog od četiri točka je G_1 , a poluprečnik točka r .

Na zadnje vodeće točkove deluje obrtni moment M_O . Automobil koji polazi iz stanja mira savlađuje otpor vazduha, koji je proporcionalan kvadratu njegove translatorne brzine: $F_w = kv^2$. Moment trenja na osi svakog od točkova iznosi M_μ . Zanemarujući otpor protiv kotrljanja odrediti: 1) graničnu brzinu kretanja automobila; 2) silu trenja klizanja, koja deluje na vodeće i vođene točkove pri kretanju.



Sl. 340

Rešenje. 1) Radi određivanja granične brzine kretanja automobila postavimo diferencijalnu jednačinu njegovog kretanja, koristeći se jednačinom (40)

$$dE_k = dA^s + dA^u. \quad (a)$$

Kinetička energija automobila jednaka je zbiru kinetičkih energija šasije i točkova. Imajući u vidu da je G — težina celog automobila i da je $v_C = r\omega$, dobićemo:

$$E_k = \frac{1}{2} \frac{G}{g} v_C^2 + 4 \left(\frac{1}{2} J_C \omega^2 \right) = \frac{1}{2g} \left(G + 4G_1 \frac{r^2}{r^2} \right) v_C^2,$$

gde je sa i_C označen poluprečnik inercije točka.

Od spoljašnjih sila rad vrši samo sila otpora vazduha, jer smo otpor protiv kotrljanja zanemarili, dok je rad sila trenja točkova o podlogu $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ jednak u ovom slučaju nuli (§ 149). Prema tome je

$$dA^s = -kv_C^2 ds.$$

Rad unutrašnjih sila (obrotnog momenta i sila trenja na osovinaama) jednak je

$$dA^u = (M_O - 4M_\mu) d\varphi = (M_O - 4M_\mu) \frac{ds_C}{r}.$$

Ako smenimo sve ove vrednosti u jednačini (a), i ako istovremeno podelimo obe njene strane sa dt , dobićemo:

$$\frac{1}{g} \left(G + 4G_1 \frac{i_C^2}{r^2} \right) v_C \frac{dv_C}{dt} = \frac{1}{r} \left(M_O - 4M_\mu - kr v_C^2 \right) \frac{ds_C}{dt}$$

Odavde, posle skraćivanja sa $v_C = \frac{ds_C}{dt}$ nalazimo:

$$\left(G + 4G_1 \frac{i_C^2}{r^2} \right) a_C = \frac{g}{r} \left(M_O - 4M_\mu - kr v_C^2 \right). \quad (b)$$

Kada brzina automobila dostigne svoju graničnu vrednost, ubrzanje automobila a_C biće jednako nuli. Prema tome, graničnu brzinu $(v_C)_{gr}$ odredićemo iz jednačine:

$$M_O - 4M_\mu - kr v_C^2 = 0,$$

odakle je

$$(v_C)_{gr} = \sqrt{\frac{M_O - 4M_\mu}{kr}}.$$

Ovaj rezultat može se dobiti i neposredno ako izjednačimo sa nulom sumu radova svih sila. Cilj izvođenja, koji je ovde primenjen, bio je da se pokaže kako se postavlja diferencijalna jednačina kretanja (b).

2) Da bismo odredili sile trenja, koje deluju na svaki od točkova, postavimo diferencijalne jednačine obrtanja točkova oko njihovih osovin. Za vodeće točkove, imajući u vidu da je sila trenja koja deluje na svaki od njih usmerena unapred (vidi § 136, sl. 301), dobićemo

$$2 \frac{G_1}{g} i_C^2 \dot{\omega} = M_O - 2M_\mu - 2F_1 r.$$

Kako je pri kotrljanju $a_C = r\dot{\omega}$, to definitivno dobijamo

$$F_1 = \frac{0,5M_O - M_\mu}{r} - \frac{i_C^2}{r^2} \frac{G_1}{g} a_C. \quad (c)$$

Sila trenja $\vec{F}_2$, koja deluje na svaki od vođenih točkova, usmerena je unazad. Prema tome, za vodene točkove biće:

$$-\frac{G_1}{g} i_C^2 \dot{\omega} = F_2 r - M_\mu,$$

odakle je

$$F_2 = \frac{M_\mu}{r} + \frac{i_C^2}{r^2} \frac{G_1}{g} a_C. \quad (d)$$

Iz jednačine (b) se vidi da se povećavanjem brzine ubrzanje a_C smanjuje i da teži nuli.

Na taj način sila trenja, koja deluje na vodeće točkove, pri ubrzanju (polasku) automobila se povećava i dostiže svoju najveću vrednost kada se kretanje ustali ($a_C = 0$). Ako se smeni izraz za ubrzanje a_C iz jednačine (b), onda je lako videti da je poslednji sabirak u formuli (c) mnogo manji od prvog sabirka jer je $G \gg G_1$. Zato se praktično veličina sile trenja F_1 vrlo malo menja.

Na vođenim točkovima sila trenja dostiže svoju maksimalnu veličinu u početku kretanja, a zatim se smanjuje, da bi pri ravnomernom kretanju ($a_C = 0$) imala svoju najmanju veličinu M_μ/r .

Ako koeficijent trenja točkova o podlogu ne bude dovoljan da bi sile trenja dostigle vrednost F_1 i F_2 , onda će se u tom slučaju točkovi obrtati u mestu. Kako je M_O mnogo veći od M_μ , to su od obrtanja u mestu prvenstveno ugroženi vodeći točkovi.

Kada je motor isključen svi točkovi su vođeni i na njih će u početku delovati sila trenja $F = M_\mu/r$. Dejstvo papuča za kočenje ekvivalentno je povećanju momenta trenja M_μ na osovinama, pa je, prema tome, ekvivalentno i povećanju sila trenja, koje deluju na svaki od točkova, čime se pojačava kočenje automobila (vidi § 136).

§ 157*. Približna teorija žiroskopskih pojava

Žiroskopom, ili čigrom, naziva se kruto telo čije su mase simetrično raspoređene prema nekoj osi i koje je čvrsto vezano za bilo koju tačku O te ose. Kod žiroskopskih pribora žiroskopi su obično pričvršćeni za prstenaste okvire (sl. 341) i to tako da pri bilo kakvom obrtanju žiroskopa njegovo težište ostaje nepomično.

Žiroskopi koji se primenjuju u tehnici imaju vrlo veliku ugaonu brzinu obrtanja ω_1 oko svoje ose simetrije. Ova činjenica omogućuje da se u prvom približenju ne uzmu u obzir dopunska obrtanja koja žiroskop dobija pri kretanju njegove ose, i da se na taj način da približna teorija žiroskopskih pojava.

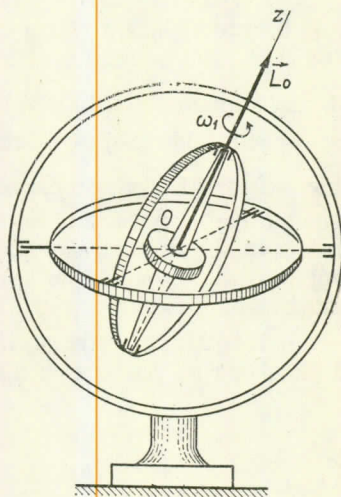
Kod tela koje se obrće oko *nepomične* ose simetrije Oz , vektor $\vec{L}_O$ usmeren je u pravcu obrtne ose (vidi § 143) i izračunava se po formuli (32). Osnovna pretpo-

stavka približne teorije žiroskopskih pojava sastoji se u tome što se, i pri sporom kretanju ose, smatra da u bilo kom trenutku vremena: vektor glavnog momenta količina kretanja za nepomičnu tačku (vektor $\vec{L}_O$) ima pravac ose žiroskopa, isti smer kao vektor $\vec{\omega}_1$, i da je jednak $J_z \omega_1$:

$$\vec{L}_O = \vec{L}_z = J_z \vec{\omega}_1, \quad (54)$$

gde je J_z — moment inercije žiroskopa za osu simetrije. Ovakva pretpostavka utoliko je opravdana ukoliko se žiroskop brže obrće oko svoje ose. Proučimo, polazeći od usvojenih pretpostavki, osnovna svojstva žiroskopa.

1. Slobodni žiroskop. Neka je žiroskop pričvršćen u težištu O (vidi sl. 341). Tada, ako zanemarimo trenje u ležištima na ramu, biće $\sum \vec{M}_O^s = 0$, pa je $\vec{L}_O = \text{const.}$, tj. intenzitet i pravac vektora glavnog momenta količina kretanja je konstantan (vidi § 145). Međutim, kako je vektor $\vec{L}_O$ za sve vreme usmeren u pravcu ose



Sl. 341

žiroskopa, to proizlazi, da osa slobodnog žiroskopa zadržava nepromenljiv pravac u prostoru u odnosu na inercijalni (zvezdani) koordinatni sistem referencije. Ovo je jedno od najvažnijih svojstava žiroskopa, koje se koristi pri konstrukciji žiroskopskih pribora.

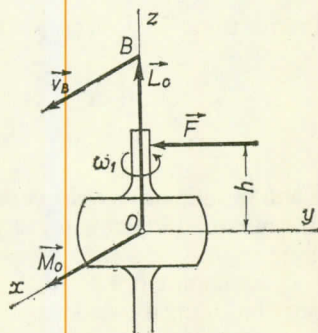
Zadržavajući nepromenljiv pravac prema zvezdanom koordinatnom sistemu referencije, osa slobodnog žiroskopa obrtaće se u odnosu na Zemlju suprotno smeru obrtanja Zemlje. Na taj način, slobodni žiroskop može da se upotrebi kao dokaz da se Zemlja obrće oko svoje ose. Prve eksperimente ove vrste izvršio je Fuko (1852. god.).

2. Dejstvo sile na osu žiroskopa. Neka na osu žiroskopa, koji se obrće vrlo brzo, počne da deluje sila $\vec{F}$ (sl. 342), čiji je moment za tačku O po intenzitetu jednak $M_O = Fh$. Tada će po zakonu momenta količine kretanja (zamaha) (§ 144) biti:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O, \quad \text{odnosno} \quad \frac{d(\vec{OB})}{dt} = \vec{v}_B,$$

gde je B tačka na osi, koja se poklapa sa krajem vektora $\vec{L}_O$. Odatve, uzimajući u obzir da je izvod po vremenu vektora $\vec{OB}$ jednak brzini $\vec{v}_B$ tačke B , dobijamo:

$$\vec{v}_B = \vec{M}_O. \quad (55)$$



Sl. 342

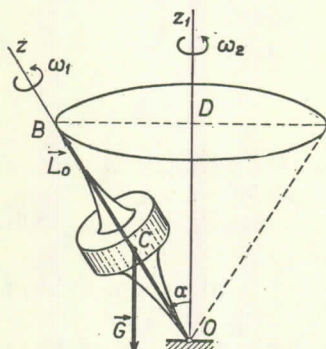
→ Prema tome, tačka B , a s njom i osa žiroskopa, pomeraće se u pravcu vektora $\vec{M}_O$. Zato, možemo zaključiti: ako na osu žiroskopa koji se obrće vrlo brzo počne

da deluje neka sila, onda će osa žiroskopa početi da skreće, ali ne u pravcu dejstva sile, nego u pravcu, koji ima vektor momenta te sile za nepomičnu tačku O žiroskopa, tj. upravno na pravac sile*.

Primetimo, da kad bi se žiroskop obrtao u suprotnu stranu (vidi sl. 342), onda bi u tom slučaju vektor $\vec{\omega}_1$, a sa njim i vektor $\vec{L}_O$, čija se napadna tačka nalazi u tački O , bili usmereni naniže; tada bi donji kraj žiroskopa skretao u pravcu vektora $\vec{M}_O$, tj. ka nama, dok bi gornji kraj skretao u stranu iza crteža.

Iz jednačine (55) proizlazi još jedan važan zaključak. Čim se dejstvo sile prekinе, vektor $\vec{M}_O$, pa, prema tome, i $\vec{v}_B$, postaju jednaki nuli i osa žiroskopa se zaustavlja. Na taj način žiroskop ne održava kretanje koje mu je nametnula sila. Ako je dejstvo sile kratkotrajno (udarno), onda praktično osa žiroskopa neće promeniti svoj pravac. U ovome se sastoji svojstvo *stabilnosti* ose žiroskopa koji se obrće vrlo brzo.

3. Regularna precesija teškog žiroskopa. Neka se nepomična tačka O žiroskopa ne poklapa sa njegovim težištem C (sl. 343). Tada na osu žiroskopa



Sl. 343

za sve vreme deluje sila $\vec{G}$ koja, kako smo malo pre dokazali, ne skreće osu žiroskopa Oz naniže (ne u stranu povećavanja ugla α), već u pravcu $\vec{M}_O^G$, tj. u pravcu upravnom na ravni $Oz z_1$. Zato će osa žiroskopa početi da se okreće oko vertikalne ose Oz_1 i opisivaće konusnu površinu. Takvo kretanje ose žiroskopa naziva se *precesija*.

Nadimo ugaonu brzinu precesije ω_2 . Prema jednačini (55) mora da bude $v_B = M_O$. Ako uvedemo oznaku $\overline{OC} = s$, dobićemo da je u ovom slučaju $M_O = Gs \sin \alpha$. S druge strane, $v_B = BD \cdot \omega_2 = \overline{OB} \sin \alpha \cdot \omega_2 = L_O \omega_2 \sin \alpha$, ili, uzimajući u obzir jednačinu (54):

$$v_B = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha. \quad (56)$$

Prema tome je $J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha = Gs \sin \alpha$, odakle proizlazi da je

$$\omega_2 = \frac{Gs}{J_z \omega_1}. \quad (57)$$

Kako je veličina ω_1 vrlo velika, to je ugaona brzina precesije ω_2 vrlo mala. Sa smanjivanjem ω_1 veličina ω_2 se povećava, što najbolje može da se vidi na primeru dečje čigre.

Analognu precesiju vrši Zemljina osa, jer usled odstupanja Zemlje od oblika pravilne lopte i usled nagiba njene ose, rezultanta sila privlačenja Sunca i Meseca ne prolazi kroz središte masa Zemlje, tako da se pojavljuje moment za središte Zemlje. Period precesije Zemljine ose (vreme jednog obrtaja) približno je jednak 26 000 godina.

* O tome, kako se određuje pravac i smer vektora $\vec{M}_O$, vidi § 41.

4. Žiroskopski efekt. Uočimo žiroskop koji se obrće vrlo brzo i koji je vezan u ležištu A i A' za prsten, koji se obrće nekom ugaonom brzinom ω_2 oko ose DD' , pri čemu je $\omega_2 \ll \omega_1$ (sl. 344). Kako osa žiroskopa vrši pri tom precesiju, to tačka B (kraj vektora $\vec{L}_O$) kao i u prethodnom slučaju ima brzinu v_B određenu jednačinom (56). Na osnovu formule (55) zaključujemo da na osu deluje tom prilikom moment koji je brojčano jednak

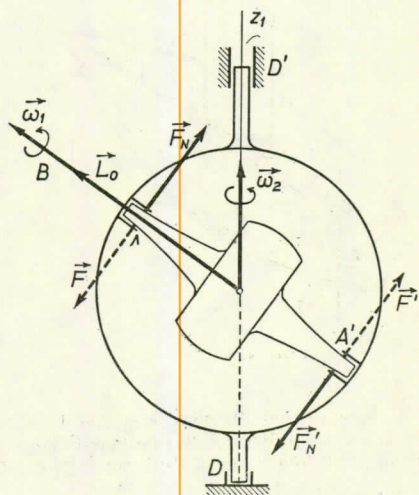
$$M_O = v_B = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha.$$

Taj moment, očividno, čine sile $\vec{F}$, $\vec{F}'$, kojima ležišta A i A' pritiskuju na osu. Kako je središte masa žiroskopa nepomično, to navedene sile obrazuju spreg, čiji moment $\vec{M}_O$ treba da bude usmeren isto tako kao vektor brzine $\vec{v}_B$, tj. naviše (na sl. 344 — prema čitaocu).

Međutim, tada će jednovremeno osa žiroskopa vršiti pritisak na ležišta A i A' silama $\vec{F}_N$, $\vec{F}'_N$, koje su jednake po intenzitetu i suprotne po smeru silama $\vec{F}$, $\vec{F}'$.

Spreg sila ($\vec{F}_N$, $\vec{F}'_N$) zove se žiroskopski spreg, a njegov moment žiroskopski moment. Kako je po intenzitetu $M_{zir} = M_O$, to je

$$M_{zir} = J_z \omega_1 \omega_2 \sin \alpha. \quad (58)$$



Sl. 344

Odavde proizlazi sledeće pravilo N. E. Žukovskog: ako žiroskopu, koji se obrće vrlo brzo, nametnemo prinudno precesiono kretanje, onda će na ležišta, u kojima je pričvršćena osa žiroskopa, delovati spreg sila momenta M_{zir} , koji teži da postavi najkraćim putem osu sopstvenog obrtanja žiroskopa u takav položaj, da bude paralelna osi precesije, tako da se pri tome pravci vektora $\vec{\omega}_1$ i $\vec{\omega}_2$ poklope.

Osim pritiska na ležišta, žiroskopski efekt može da izazove kretanje onog tela za koje su pričvršćena ta ležišta, ako takvo kretanje dopuštaju postojeće veze.

Razmotrimo primer. Ako se brod, u kome se rotor turbine obrće ugaonom brzinom ω_1 (sl. 345), okreće ugaonom brzinom ω_2 , onda će na ležišta A i B delovati žiroskopski pritisci $\vec{F}_{N1}$, $\vec{F}_{N2}$, usmereni tako kako je pokazano na crtežu*. Ako je pri tom $AB = l$, a moment inercije rotora J_z , onda je po formuli (58)

$$M_{zir} = F_N l = J_z \omega_1 \omega_2,$$

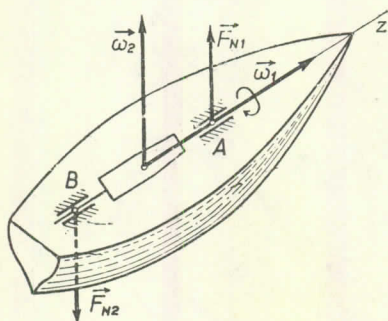
i

$$F_N = \frac{J_z \omega_1 \omega_2}{l}.$$

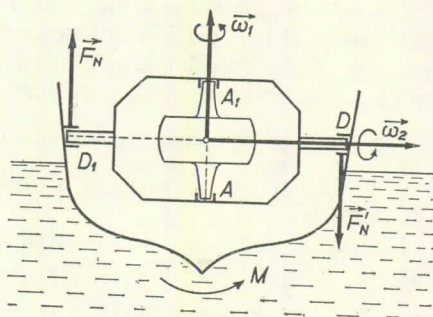
* Žiroskopski pritisci na ležišta nastaju i usled ljuljanja broda. Pravci tih pritiska biće sasvim drukčiji.

Veličine ovih pritisaka mogu dostići i po nekoliko tona, tako da se obavezno moraju uzeti u obzir pri proračunavanju ležišta. Preko ležišta žiroskopski pritisci se prenose na korito broda i kod vrlo lakih brodova mogu izazvati zaronjavanje pramca ili krme. Sličan efekt nastaje i kod elisnih motora pri viranju (okretanje u horizontalnoj ravni).

Na osnovu svojstava žiroskopa proučenih u ovom paragrafu zasniva se konstrukcija različitih žiroskopskih stabilizatora, žiroskopskih navigacionih pribora i pribora za specijalne svrhe.



Sl. 345

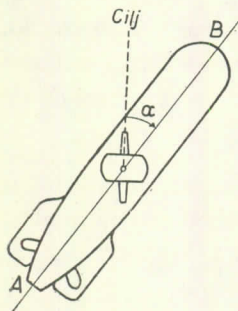


Sl. 346

Kao primer žiroskopskog stabilizatora direktnog dejstva može da posluži dejstvo pribora koji smanjuje ljuljanje. On predstavlja masivni obrtni žiroskop (sl. 346), čija je osa AA_1 pričvršćena za ram, koji ima svoju obrtnu osu DD_1 čvrsto vezanu za korito broda. Kada na brod, koji se kreće po talasima, deluje moment M , onda motor koji je snabdeven specijalnim regulatorom počne da obrće ram ugaonom brzinom ω_2 (vidi crtež). Usled toga, na ležišta D i D_1 delovace žiroskopski spreg $(\vec{F}_N, \vec{F}_N')$, čiji moment $J\omega_1\omega_2$ dovodi do smanjenja nagnjanja broda. Pri promeni smera

dejstva momenta M motor će obrtati ram u suprotnu stranu i stvorice spreg $(\vec{F}_N, \vec{F}_N')$ suprotnog smera.

Kao drugi primer stabilizatora (indirektnog dejstva) može da posluži pribor Obria, koji služi da stabilizuje kretanje mine u horizontalnoj ravni. Element ovog pribora koji služi za stabiliziranje predstavlja slobodni žiroskop (vidi sl. 347), čija se osa u trenutku opaljivanja poklapa sa osom torpeda i usmerena je prema cilju. Ako torpedo nekog trenutka skrene od početnog pravca za ugao α (sl. 347), onda će se osa žiroskopa, koja zadržava nepromenjen pravac prema cilju (na osnovu svojstva slobodnog žiroskopa), okrenuti u odnosu na telo torpeda za isti ugao. Ovo skretanje izaziva pomeranje posebnog regulatora, koji pokreće uređaj za promenu pravca torpeda. Kao rezultat rada ovog uređaja pravac kretanja torpeda će se promeniti i usmeriti u stranu gde se nalazi cilj. Analogna je ideja ugrađivanja uređaja za automatsko pilotiranje. Ovi uređaji konstatuju skretanje aviona od unapred određenog pravca i pokreću odgovarajuće uređaje za uspostavljanje prvobitnog pravca.



Sl. 347

Od žiroskopskih navigacionih instrumenata treba pomenuti, žiropas, žirohorizont, indikator skretanja i drugo. Principi na kojima baziraju konstrukcije ovih instrumenata vrlo su različiti, mada u njihovoj osnovi leže svojstva žiroskopa koja smo razmatrali u ovom paragrafu.

Glava XXIX

DALAMBEROV PRINCIP. DINAMIČKI PRITISCI NA OSU TELA KOJE SE OBRĆE

§ 158. D'alamberov princip za sistem

Neka se sistem sastoji od n materijalnih tačaka. Uočimo bilo koju tačku tog sistema mase m_i i označimo rezultante svih spoljašnjih i unutrašnjih sila koje deluju na nju sa $\vec{F}_i^s$ i $\vec{F}_i^u$. Ako tim silama pridodamo silu inercije $\vec{F}_i^{\text{in}} = -m_i \vec{a}_i$, onda saglasno D'alamberovom principu za jednu tačku (§ 119), koji smo ranije formulisali, sistem sila $\vec{F}_i^s$, $\vec{F}_i^u$, $\vec{F}_i^{\text{in}}$, biće u ravnoteži, tako da je:

$$\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u + \vec{F}_i^{\text{in}} = 0.$$

Ako ova rasuđivanja primenimo na sve tačke sistema, dobićemo sledeći rezultat koji izražava D'alamberov (D'Alembert) princip za sistem: *ako u bilo kom trenutku vremena svakoj tački sistema, osim spoljašnjih i unutrašnjih sila, koje deluju na tu tačku, pridodamo odgovarajuće sile inercije, onda će dobiveni sistem sila biti u ravnoteži, i na njega možemo primeniti sve jednačine statike.*

Iz statike je poznato da je geometrijski zbir sila koja se nalaze u ravnoteži, a takođe i zbir njihovih momenata za bilo koju tačku O jednak nuli, pri čemu, na osnovu principa ukrućivanja (§ 3), to važi ne samo za sile koje deluju na kruto telo, već takođe i za bilo koji promenljivi sistem. Prema tome, na osnovu D'alamberovog principa možemo pisati

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma (\vec{F}_i^s + \vec{F}_i^u + \vec{F}_i^{\text{in}}) = 0, \\ \Sigma (\vec{M}_O^{\vec{F}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^u} + \vec{M}_O^{\vec{F}_i^{\text{in}}}) = 0. \end{array} \right.$$

Ako uvedemo oznake

$$\vec{F}_R^{\text{in}} = \Sigma \vec{F}_i^{\text{in}},$$

$$\vec{M}_O^{\text{in}} = \Sigma \vec{M}_O^{\vec{F}_i^{\text{in}}},$$

(59)

onda veličine $\vec{F}_R^{\text{in}}$ i $\vec{M}_O^{\text{in}}$ predstavljaju *glavni vektor i glavni moment sila inercije za tačku O*. Uzimajući u obzir da je glavni vektor i glavni moment unutrašnjih sila jednak nuli (§ 129), konačno dobijamo:

$$\boxed{\Sigma \vec{F}_i^s + \vec{F}_R^{\text{in}} = \vec{F}_R^s + \vec{F}_R^{\text{in}} = 0,} \quad \boxed{\Sigma \vec{M}_O^{F_i^s} + \vec{M}_O^{\text{in}} = \vec{M}_O^s + \vec{M}_O^{\text{in}} = 0.} \quad (60)$$

Primenom jednačina (60), koje proističu iz D'alambertovog principa, uprošćuje se proces rešavanja zadataka, jer te jednačine ne sadrže unutrašnje sile. Po svojoj suštini, jednačine (60) ekvivalentne su jednačinama koje izražavaju zakon o promeni količine kretanja i zakon o promeni momenta količina kretanja (zamaha) sistema i razlikuju se od tih jednačina samo po formi.

Naročito je korisno da se upotrebe jednačine (60) pri proučavanju kretanja krutog tela ili sistema krutih tela. Za potpuno proučavanje kretanja nekog promenljivog sistema te jednačine neće biti dovoljne*.

Ako se jednačine (60) projiciraju na koordinatne ose, onda se dobijaju jednačine koje su analogne odgovarajućim jednačinama statike (vidi §§ 24, 48). Da bismo mogli da upotrebimo te jednačine potrebno je da znamo izraze za glavni vektor i glavni moment sila inercije.

§ 159. Glavni vektor i glavni moment sila inercije krutog tela

Iz jednačina (59) proizlazi (vidi § 46) da sistem sila inercije krutog tela možemo zameniti jednom silom koja je jednaka $\vec{F}_R^{\text{in}}$, čija se napadna tačka nalazi u tački O, i spregom čiji je moment $\vec{M}_O^{\text{in}}$. Glavni vektor sistema sila kao što je poznato, ne zavisi od redukcione tačke i može se unapred izračunati. Kako je $\vec{F}_i^{\text{in}} = -m_i \vec{a}_i$, onda, imajući u vidu jednačinu (15) (§ 135) dobijamo:**

$$\boxed{\vec{F}_R^{\text{in}} = -\Sigma m_i \vec{a}_i = -\mathcal{M} \vec{a}_C.} \quad (61)$$

Prema tome, *glavni vektor sila inercije tela, koje vrši bilo koje kretanje, jednak je proizvodu iz mase tela i ubrzanja njegovog središta masa i usmeren je suprotno od smera ubrzanja.*

Ako ubrzanje $\vec{a}_C$ razložimo u tangencijalnu i normalnu komponentu, onda se i vektor $\vec{F}_R^{\text{in}}$ može razložiti u odgovarajuće komponente.

$$\boxed{F_{RT}^{\text{in}} = -\mathcal{M} a_{CT}, \quad F_{RN}^{\text{in}} = -\mathcal{M} a_{CN}} \quad (61)$$

Glavni moment sila inercije odredićemo za nekoliko posebnih slučajeva.

* Ovakav zaključak proizlazi iz rasuđivanja sličnih onima koja smo vršili pri razmatranju principa ukrućivanja. Vidi takođe i ono što je rečeno o opštim zakonima dinamike u § 134.

** U ovoj glavi, da ne bi došlo do zabune, masu tela obeležavaćemo pisanim slovom $\mathcal{M}$ (vidi fusnotu na str. 300).

1. Translatorno kretanje. U ovom slučaju telo ne vrši obrtanje oko središta masa C . Odavde zaključujemo da je u ovom slučaju $\Sigma \vec{M}_C^{F_i^s} = 0$, pa jednačina (60) daje $\mathcal{M}_C^{\text{in}} = 0$.

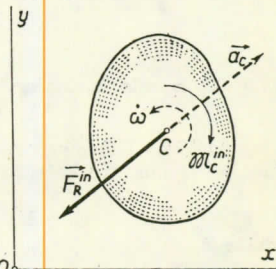
Prema tome, pri translatorskom kretanju sile inercije krutog tela svode se samo na rezultantu, koja je jednaka $\vec{F}_R^{\text{in}}$, i čija se napadna tačka nalazi u središtu masa tela.

2. Ravno kretanje. Neka telo ima ravan simetrije Π i neka se kreće paralelno toj ravni. Zbog simetrije glavni vektor i rezultujući spreg sila inercije, kao i središte masa C tela leže u toj istoj ravni.

Tada, ako za redukcionu tačku uzmemo tačku C , iz jednačine (60) proizlazi da je $\mathcal{M}_C^{\text{in}} = -\Sigma \vec{M}_C^{F_i^s}$. S druge strane (vidi § 156), iz poslednje od jednačina (52) dobijamo: $\Sigma \vec{M}_C^{F_i^s} = J_C \dot{\omega}$. Odavde zaključujemo da je:

$$\mathcal{M}_C^{\text{in}} = -J_C \dot{\omega}.$$

(62)



Sl. 348

Na taj način, u posmatranom slučaju kretanja, sistem inercijalnih sila svodi se na silu koja je jednaka $\vec{F}_R^{\text{in}}$ [(formula (61)], čija se napadna tačka nalazi u središtu masa C tela (sl. 348), i na spreg, koji deluje u ravni simetrije tela, a čiji se moment određuje po formuli (62). Znak minus u formuli pokazuje da je smer momenta $\mathcal{M}_C^{\text{in}}$ suprotan smeru ugaonog ubrzanja tela.

3. Obrtanje tela oko ose koja prolazi kroz središte masa tela. Neka telo opet ima ravan simetrije, a obrtna osa Cz neka prolazi kroz središte masa tela upravno na tu ravan. Tada će ovaj slučaj biti specijalan slučaj prethodnog. Međutim, $\vec{a}_C = 0$, pa je, prema tome, i $\vec{F}_R^{\text{in}} = 0$.

Na taj način, u posmatranom slučaju, sistem sila inercije svodi se na spreg koji deluje u ravni simetrije tela i čiji je moment

$$M_z^{\text{in}} = -J_z \dot{\omega}.$$

(62')

Pri rešavanju zadataka, po formulama (61) i (62) izračunavaju se intenziteti odgovarajućih veličina, dok se njihov smer prikazuje na crtežu.

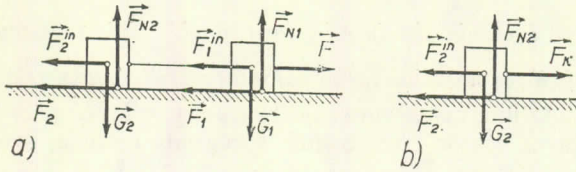
§ 160. Rešavanje zadataka

Dalamberov princip daje jednu metodu za postavljanje jednačina kretanja bilo kog vezanog sistema*. Korišćenjem Dalamberovog principa naročito se lako rešavaju oni zadaci kod kojih je poznato kretanje sistema, a potrebno je odrediti reakcije veza. Pri tom, iz računa se isključuju sve unapred nepoznate unutrašnje sile. U slučajevima, kad treba da se odrede reakcije unutrašnjih veza, sistem treba raščlaniti na takve delove u odnosu na koje će tražene sile biti spoljašnje.

Osim toga, ovaj princip možemo upotrebiti i za postavljanje diferencijalnih jednačina kretanja, a posebno za određivanje ubrzanja pokretnih tela.

* U ovom cilju naročito je korisno kad se zajedno sa Dalamberovim principom upotrebi i princip mogućnih pomeranja (vidi § 167).

Zadatak 149. Dva tereta, težine G_1 i G_2 svaki, vezani konopcem, kreću se po horizontalnoj ravni dejstvom sile $\vec{F}$, koja deluje na prvi teret (sl. 349, a). Koeficijent trenja tereta o ravan jednak je μ . Odrediti ubrzanje tereta i silu u konopcu.



Sl. 349

Rešenje. Prikažimo na slici sve spoljašnje sile koje deluju na ovaj sistem. Pridodajmo zatim ovim silama sile inercije tereta. Kako se oba tereta kreću translatorno istim ubrzanjem $\vec{a}$, to će sile inercije po intenzitetu biti jednake

$$F_1^{\text{in}} = \frac{G_1}{g} a, \quad F_2^{\text{in}} = \frac{G_2}{g} a.$$

Smer ovih sila naznačen je na slici. Sile trenja po intenzitetu su

$$F_1 = \mu G_1, \quad F_2 = \mu G_2.$$

Saglasno D'alamberovom principu, dobiveni sistem sila mora biti u ravnoteži. Ako postavimo jednačinu ravnoteže, projicirajući sve ove sile na pravac ose Ox , dobićemo:

$$\Sigma X \equiv F - \mu(G_1 + G_2) - \frac{1}{g}(G_1 + G_2)a = 0,$$

odakle je

$$a = \left(\frac{F}{G_1 + G_2} - \mu \right) g.$$

Odavde se vidi da će se tereti kretati ako je ispunjen uslov $\mu < \frac{F}{G_1 + G_2}$.

Tražena sila u konopcu je u posmatranom sistemu unutrašnja sila. Da bismo je odredili raščlanimo sistem i primenimo D'alamberov princip na jedan od tereta, npr. na drugi (sl. 349, b).

Na ovaj teret deluje sila $\vec{G}_2$, normalna reakcija $\vec{F}_{N2}$, sila trenja $\vec{F}_2$ i sila u konopcu $\vec{F}_K$. Ako ovim silama pridodamo silu inercije $\vec{F}_2^{\text{in}}$, i ako postavimo uslov ravnoteže ovih sila projicirajući ih na osu Ox , dobićemo:

$$\Sigma X \equiv F_K - \mu G_2 - \frac{G_2}{g} a = 0.$$

Ako sada u ovu jednačinu smenimo ranije nađeni izraz za ubrzanje a nalazimo da je

$$F_K = \frac{F G_2}{G_1 + G_2}.$$

Zanimljivo je da sila u konopcu ne zavisi u ovom slučaju od sile trenja, i pri jednoj te istoj ukupnoj težini čitavog sistema biće utoliko manja, ukoliko je manja težina drugog (poslednjeg) tereta. Iz tog razloga, u jednoj železničkoj kompoziciji napred se stavljaju teži vagoni, a pozadi lakši.

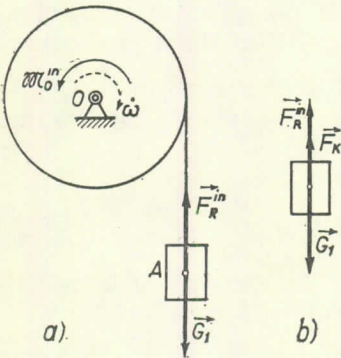
Uzmimo brojčani primer. Neka je $F=20\text{kp}$, $G_1=40\text{kp}$, $G_2=10\text{kp}$. Tada je kretanje moguće ako je ispunjen uslov $\mu < 0,4$. Sila u konopcu tom prilikom biće jednaka 4 kp. Ako pak ovi tereti promene mesta onda će sila u konopcu biti jednaka 16 kp.

Zadatak 150. Rešiti zadatak 133. primenom D'alamberovog principa i odrediti osim toga i silu u konopcu.

Rešenje. 1) Posmatrajmo najpre doboš i teret kao jedan sistem i pridodajmo telima inercijalne sile (sl. 350). Teret A kreće se translatorno i za njega je $F_R^{\text{in}} = \frac{F}{g} a_A = \frac{F}{g} r \dot{\omega}$. Sile inercije

doboša svode se na spreg sila inercije momenta $\mathcal{M}_O^{\text{in}}$, koji je po intenzitetu jednak $J_O \dot{\omega} = \frac{G}{g} i_C^2 \dot{\omega}$ i usmeren suprotno smeru obrtanja (vidi § 159). Kada za sve sile postavimo uslov ravnoteže u obliku $\Sigma \vec{M}_O^{\text{in}} = 0$, dobićemo:

$$|\mathcal{M}_O^{\text{in}}| + F_R^{\text{in}} r - Fr = 0.$$



Sl. 350

odnosno

$$\frac{G}{g} i_C^2 \dot{\omega} + \frac{F}{g} r^2 \dot{\omega} - Fr = 0.$$

Oдавде nalazimo:

$$\dot{\omega} = \frac{Fgr}{Gi_C^2 + Fr^2}.$$

2) Posmatrajmo sada teret A odvojeno i pridodajmo silama $\vec{F}$ i $\vec{F}_K$, koje deluju na teret silu inercije $\vec{F}_R^{\text{in}}$. Iz uslova ravnoteže tereta A dobijamo da je

$$F_K = F - F_R^{\text{in}} = F \left(1 - \frac{r\omega}{g} \right) = \frac{GF i_C^2}{Gi_C^2 + Fr^2}.$$

Zadatak 151. Odrediti silu koja teži da razori zamajac, smatrajući da je njegova masa ravnomerno raspoređena po obimu. Težina zamajca jednaka je G , poluprečnik r , a ugaona brzina obrtanja ω .

Rešenje. Silu koju tražimo je unutrašnja sila. Da bismo je odredili presecimo zamajac na dva dela i primenimo D'alamberov princip na jednu od dobijenih polovina zamajca (sl. 351). Dejstvo odvojenog dela zamajca zamenićemo jednakim silama $\vec{F}'$, koje su po intenzitetu jednake traženoj sili $\vec{F}$. Za svaki element obima sila inercije (centrifugalna sila) usmerena je duž poluprečnika. Sve ove sile prolaze kroz tačku O i imaju rezultantu jednaku glavnom vektoru sila inercije $\vec{F}_R^{\text{in}}$ usmerenu usled simetrije u pravcu ose Ox . Po formuli (61) je $F_R^{\text{in}} = M a_C = M x_C \omega^2$, gde je M — masa polovine obima zamajca, a x_C — koordinata središta masa luka polukruga koja je jednaka $2 \frac{r}{\pi}$ (vidi § 56). Prema tome je

$$M = \frac{G}{2g}, \quad F_R^{\text{in}} = \frac{Gr\omega^2}{\pi g}.$$

Uslov ravnoteže daje $2F = F_R^{\text{in}}$, tako da je konačno

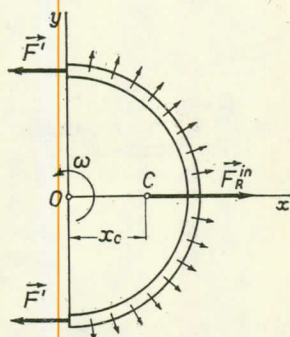
$$F = \frac{Gr\omega^2}{2\pi g}.$$

Pomoću ove formule može se odrediti granična ugaona brzina, koju zamajac od datog materijala može da izdrži.

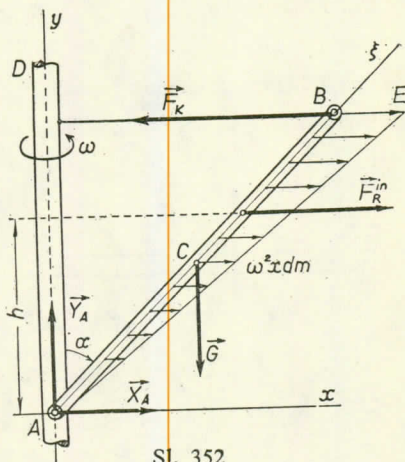
Zadatak 152. Homogeni štap AB , dužine l i težine G , pričvršćen je zglobovima A za vertikalno vratilo koje se obrće ugaonom brzinom ω (sl. 352). Odrediti silu F_K u horizontalnom konopcu koji održava štap pod uglom α prema vratilu.

Rešenje. Koristeći se D'alambrovim principom pridodajmo spoljašnjim silama $\vec{G}$, $\vec{F}_K$, $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$, koje deluju na štap, takođe, i sile inercije. Centrifugalna sila inercije svakog elementa štapa mase Δm jednaka je $\Delta m x \omega^2$, gde je x — rastojanje elementa od obrtne ose Ay . Rezultanta ovih paralelnih sila, koje su raspodeljene po linearnom zakonu (vidi § 28), prolazi kroz težište trougla ABE , tj. na rastojanju $h = \frac{2}{3} l \cos \alpha$ od ose Ax . Kako je ta rezultanta jednaka glavnom vektoru sila inercije, to prema formuli (61) proizlazi da je*

* Iz statike je poznato da je rezultanta bilo kog sistema sila (ukoliko ona postoji) jednaka glavnom vektoru tih sila. Prema tome, rezultanta sila inercije, kada ona postoji, jednaka je $\vec{F}_R^{\text{in}}$; međutim, pri kretanju koje nije translatorno, ta rezultanta ne prolazi kroz središte mase tela, što je, takođe, slučaj i u ovom primeru.



Sl. 351



Sl. 352

$$F_R^{\text{in}} = \mathcal{M} a_C = \mathcal{M} x_C \omega^2 = \frac{G}{g} \omega^2 \frac{l}{2} \sin \alpha,$$

gde je x_C – koordinata središta masa štapa.

Ako postavimo jednačinu ravnoteže u obliku $\Sigma \vec{M}_A^F = 0$, dobićemo:

$$F_K l \cos \alpha - F_R^{\text{in}} h - \frac{1}{2} G l \sin \alpha = 0.$$

Ako u ovu jednačinu zamenimo izraze za F_R^{in} i h nalazimo definitivno:

$$F_K = G \left(\frac{l \omega^2}{3g} \sin \alpha + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right).$$

Drugo rešenje. Ovaj zadatak može, takođe, da se reši ne koristeći se rezultatima dobijenim u § 28, ako neposredno izračunamo sumu momenata sila inercije putem integriranja za tačku A . Povucimo duž ose štapa AB osu $A\xi$. Na svaki element štapa $d\xi$ čija je koordinata ξ , deluje sila inercije jednaka $x \omega^2 dm$. Njen moment za tačku A biće jednak $-y x \omega^2 dm$. Tada momentna jednačina daje

$$\Sigma \vec{M}_A^F = F_K l \cos \alpha - \frac{1}{2} G l \sin \alpha - \int_0^l x y \omega^2 dm. \quad (a)$$

Ako sve veličine koje stoje iza znaka integrala izrazimo u funkciji od ξ , dobićemo:

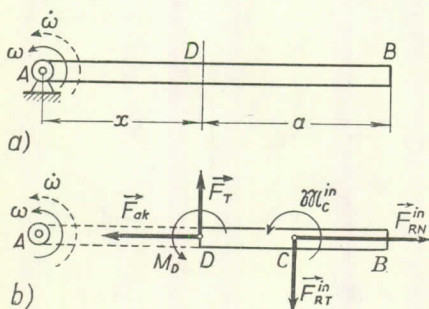
$$x = \xi \sin \alpha, \quad y = \xi \cos \alpha, \quad dm = \frac{\mathcal{M}}{l} d\xi.$$

U krajnjem rezultatu nalazimo da je

$$\int_0^l x y \omega^2 dx = \frac{\mathcal{M}}{l} \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha \int_0^l \xi^2 d\xi = \frac{1}{3} \frac{G}{g} l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Ako sve ove izraze smenimo u jednačini (a), dobićemo za silu u konopcu F_K isti izraz kako i malopre.

Zadatak 153. Homogeni štap AB , mase $\mathcal{M}$, dužine l , obrće se oko ose, koja je upravna na štap (sl. 353, a) i ima u datom trenutku ugaonu brzinu ω i ugaono ubrzanje ω . Odrediti sile u preseku udaljenom za rastojanje x od obrtne ose, koje nastaju usled obrtanja štapa.



Sl. 353

Rešenje. Tražene sile su unutrašnje sile. Da bismo ih odredili podelimo štap na dva dela i razmotrimo kretanje dela DB dužine $a = l - x$ (sl. 353, b). Dejstvo uklonjenog dela AD zamenimo silom čija se napadna tačka nalazi u tački

D preseka, a čije su komponente $\vec{F}_T$ i $\vec{F}_{ak}$ i spregom momenta $\mathcal{M}_D$ (vidi § 26, sl. 62). Veličine F_T , F_{ak} , $\mathcal{M}_D$ predstavljaju opterećenja koja se traže u preseku D štapa, tj: sile kojima delovi AD i BD deluju jedan na drugi. Da bismo odredili veličine ovih opterećenja poslužimo se D'alambrovim principom. Odre-

dimo prethodno glavni vektor $\vec{F}_R^{\text{in}}$ sila inercije odsečka DB , i njihov glavni moment $\mathcal{M}_C^{\text{in}}$ za tačku C odsečka. Masa m odsečka BD i koordinata $x_C = AC$ njegovog težišta očevito su:

$$m = \frac{l-x}{l} \mathcal{M}, \quad x_C = \frac{l+x}{2}.$$

Tada, prema formulama (61') za intenzitete vektora $\vec{F}_{RT}^{\text{in}}$ i $\vec{F}_{RN}^{\text{in}}$ dobićemo

$$|F_{RT}^{\text{in}}| = m |a_{CT}| = m x_C |\dot{\omega}| = M |\dot{\omega}| \frac{l^2 - x^2}{2l},$$

$$F_{RN}^{\text{in}} = m a_{CN} = m x_C \omega^2 = M \omega^2 \frac{l^2 - x^2}{2l}.$$

Osim toga, prema formuli (62) je $M_C^{\text{in}} = -J_C \dot{\omega}$. Kako je u datom slučaju (vidi zadatak 122.

na str. 305) $J_C = \frac{1}{12} m a^2$, to je

$$|M_C^{\text{in}}| = M \frac{(l-x)^3}{12l} |\dot{\omega}|.$$

Smerovi sila $\vec{F}_{RT}^{\text{in}}$ i $\vec{F}_{RN}^{\text{in}}$ i momenta M_C^{in} prikazani su na crtežu.

Prema tome, sve sile inercije odsečka DB štapa zamenjene su silom $\vec{F}_R^{\text{in}}$, čija se napadna tačka nalazi u tački C , a čije su komponente $\vec{F}_{RT}^{\text{in}}$ i $\vec{F}_{RN}^{\text{in}}$, i spregom čiji moment ima intenzitet M_C^{in} . Ako sada postavimo uslove ravnoteže za sile koje deluju na odsečak DB u obliku:

$$\sum X_i = 0, \quad \sum Y_i = 0, \quad \sum M_D^{\vec{F}_i} = 0,$$

dobićemo:

$$F_{RN}^{\text{in}} - F_{ak} = 0, \quad F_T - F_{RT}^{\text{in}} = 0, \quad M_D - |M_C^{\text{in}}| - \frac{1}{2} |F_{RT}^{\text{in}}| a = 0.$$

Odavde proizlazi da u preseku D štapa deluju: 1) aksijalna (zatežuća sila) $F_{ak} = F_{RN}^{\text{in}}$, 2) transversalna (poprečna) sila $F_T = F_{RT}^{\text{in}}$, 3) spreg, čiji je moment savijanja M_D jednak

$$M_D = |M_C^{\text{in}}| + \frac{1}{2} |F_{RT}^{\text{in}}| a = \frac{M |\dot{\omega}|}{12l} [(l-x)^3 + 3(l+x)(l-x)^2],$$

ili konačno

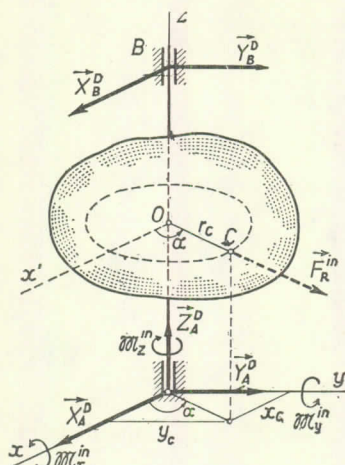
$$M_D = \frac{M |\dot{\omega}|}{6l} (l-x)^2 (2l+x).$$

Sile F_T , F_{ak} i napadni moment M_D imaju najveće vrednosti, što je lako videti, u preseku $x = 0$.

§ 161*. Dinamički pritisci na osu tela koje se obrće

Neka se bilo koje kruto telo *ravnomerno* obrće ugaonom brzinom ω oko ose, koja je učvršćena u ležištima A i B (sl. 354). Odredimo *dinamičke pritiske* X_A^D , Y_A^D , Z_A^D , X_B^D , Y_B^D ležišta na osu, tj. pritiske koji nastaju samo usled obrtanja tela. U tom cilju, iskoristimo Dalamberov princip na taj način što ćemo traženim silama – reakcijama pridodati glavni vektor i glavni moment sile inercije i postaviti jednačine (60) projicirajući ih na koordinatne ose, koje se obrću zajedno sa telom.

U ovom slučaju te jednačine (ili njima odgovarajuće jednačine § 48), ako označimo $AB = b$, glase:



Sl. 354

$$\left\{ \begin{aligned} \Sigma X_i &\equiv X_A^D + X_B^D + X_R^{\text{in}} = 0, \\ \Sigma Y_i &\equiv Y_A^D + Y_B^D + Y_R^{\text{in}} = 0, \\ \Sigma Z_i &\equiv Z_A^D + Z_R^{\text{in}}; \\ \Sigma M_x &\equiv -Y_B^D b + \mathcal{M}_x^{\text{in}} = 0, \\ \Sigma M_y &\equiv -X_B^D b + \mathcal{M}_y^{\text{in}} = 0. \end{aligned} \right. \quad (63)$$

Poslednja jednačina $\mathcal{M}_x^{\text{in}} = 0$ zadovoljena je identički pa je zato nismo ni naveli.

Glavni vektor sila inercije je $\vec{F}_R^{\text{in}} = -\mathcal{M}\vec{a}_C$.

Pri $\omega = \text{const}$ središte masa C ima samo normal-

no ubrzanje $a_{CN} = r_C \omega^2$, gde je r_C — rastojanje tačke C od obrtne ose.

Prema tome, vektor $\vec{F}_R^{\text{in}}$ je usmeren u pravcu OC i tada je*

$$\begin{aligned} X_R^{\text{in}} &= \mathcal{M} \omega^2 r_C \cos \alpha = \mathcal{M} x_C \omega^2, \\ Y_R^{\text{in}} &= \mathcal{M} \omega^2 r_C \sin \alpha = \mathcal{M} y_C \omega^2, \\ Z_R^{\text{in}} &= 0, \end{aligned}$$

gde su x_C i y_C koordinate središta masa.

Da bismo odredili $\mathcal{M}_x^{\text{in}}$ i $\mathcal{M}_y^{\text{in}}$, uočimo bilo koji delić tela mase m_i , koji se od obrtne ose nalazi na rastojanju r_i . Za ovaj delić, pri $\omega = \text{const}$, sila inercije ima takođe samo centrifugalnu komponentu $F_{iN}^{\text{in}} = m_i r_i \omega^2$, čije su projekcije, slično kao i projekcije glavnog vektora F_R^{in} , jednake

$$X_i^{\text{in}} = m_i x_i \omega^2, \quad Y_i^{\text{in}} = m_i y_i \omega^2, \quad Z_i^{\text{in}} = 0.$$

Tada [vidi § 42, formula (52)] imamo da je

$$M_x^{\vec{F}_i^{\text{in}}} = -Y_i^{\text{in}} z_i = -m_i y_i z_i \omega^2, \quad M_y^{\vec{F}_i^{\text{in}}} = X_i^{\text{in}} z_i = m_i x_i z_i \omega^2.$$

Ako postavimo ovakve izraze za sve tačke sistema, zatim ih saberemo, i izvučemo opšti množitelj ω^2 iza zagrade, biće:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_x^{\text{in}} &= -(\Sigma m_i y_i z_i) \omega^2 = -J_{yz} \omega^2, \\ \mathcal{M}_y^{\text{in}} &= (\Sigma m_i x_i z_i) \omega^2 = J_{xz} \omega^2. \end{aligned} \quad (64)$$

Veličine

$$J_{xz} = \Sigma m_i x_i z_i, \quad J_{yz} = \Sigma m_i y_i z_i, \quad (65)$$

* Vektor $\vec{F}_R^{\text{in}}$ prikazan na crtežu predstavlja glavni vektor sila inercije, ali on nije u isto vreme i rezultanta sila inercije. Kada se sile inercije redukuje na središte C , ili pak na tačku O , dobija se takođe i jedan spreg.

koje ulaze u jednačine (64), zovu se *centrifugalni momenti inercije**. Iz formula (65) se vidi da te veličine, kao i momenti inercije masa za ose, zavise samo od rasporeda masa tela; njihov mehanički smisao biće objašnjen malo kasnije.

Ako sve nađene veličine smenimo u jednačine (63), i ako ispustimo veličine, koje su jednake nuli, dobićemo:

$$\begin{cases} X_A^D + X_B^D = -Mx_C\omega^2, & X_B^D = -J_{xz}\omega^2, \\ Y_A^D + Y_B^D = -My_C\omega^2, & Y_A^D = -J_{yz}\omega^2. \end{cases} \quad (66)$$

Jednačine (66) određuju *dinamičke pritiske na ose pri raznomernom obrtanju krutog tela oko ose*.

Ako na telo deluju bilo koje spoljašnje sile $\vec{F}_i^s$ (koje, naravno, ispunjavaju uslov $\sum \vec{M}_z^{\vec{F}_i} = 0$, potreban da bi bilo $\omega = \text{const}$), onda će one izazvati dopunske statičke pritiske, koje treba pridodati dinamičkim pritiscima. Ovi statički pritisci određuju se na osnovu jednačina (66) (§ 48), tj. na isti način kao kad bi telo bilo u miru. U tom slučaju ukupni pritisci bili bi jednaki sumi dinamičkih i statičkih pritisaka.

§ 162*. Glavne ose inercije tela. Dinamičko uravnotežavanje masa

Nastajanje dinamičkih pritisaka uslovljeno je karakterom rasporeda masa tela u odnosu na osu oko koje se ono obrće. Ovi pritisci nastaju kao posledica dinamički neuravnoteženih masa

Da bismo izbegli dinamičku neuravnoteženost, potrebno je, pre svega, kako se vidi iz jednačina (66), da bude ispunjen uslov

$$\boxed{x_C = 0, \quad y_C = 0,} \quad (67)$$

što znači da obrtna osa treba da prolazi kroz središte masa. Tada će biti

$$X_A^D = -X_B^D, \quad Y_A^D = -Y_B^D,$$

tj. dinamički pritisci neće nestati, već obrazuju spreg, koji se obrće zajedno sa telom i izazivaju podrhtavanje obrtne ose**.

Prema tome, dinamička uravnoteženost (ili neuravnoteženost) zavisi ne samo od položaja središta masa, već, takođe, i od veličina J_{xz} i J_{yz} . Ovim se objašnjava njihov mehanički smisao: *centrifugalni momenti inercije J_{xz} i J_{yz} karakterišu stepen dinamičke neuravnoteženosti masa tela pri njegovom obrtanju oko ose Oz* .

Da bi telo bilo dinamički potpuno uravnoteženo, potrebno je da budu ispunjeni novi dopunski uslovi

$$\boxed{J_{xz} = 0, \quad J_{yz} = 0.} \quad (68)$$

* Termin se objašnjava time što ove veličine ulazu u izraze za momente centrifugalnih inercijalnih sila.

** Ovo podrhtavanje ose je krajnje nepoželjno, jer može pored ubrzanog abanja ležišta da izazove i rezonantne pojave u pojedinim delovima ili fundamentu mašine.

Osa Oz , za koju su centrifugalni momenti inercije J_{xz} i J_{yz} jednaki nuli, zove se *glavna osa inercije tela za tačku O*. Na primer, ako je ravan Oxy ravan materijalne simetrije tela, onda će osa Oz biti glavna osa inercije za tačku O , jer u tom slučaju za svaki od delića tela, čije su koordinate x, y, z , postoji njemu simetričan delić, čije su koordinate $x, y, -z$, pa će, prema tome, sume (65) biti jednake nuli. Na sličan način, osa Ox , biće glavna osa za tačku O , ako je za nju ispunjen uslov $J_{xy} = J_{xz} = 0$, itd.

Glavna osa inercije, koja prolazi kroz središte masa tela, zove se *glavna centralna osa inercije tela*. Na primer, ako je osa Oz osa materijalne simetrije tela, onda će ona biti glavna centralna osa inercije, jer će, u tom slučaju, svakom od delića tela, čije su koordinate x, y, z , odgovarati simetrično postavljen delić, čije su koordinatama $-x, -y, z$, i prema tome, sume (65), u tom slučaju, postaju nule. Tada će istovremeno biti $x_C = y_C = 0$, što je već poznato iz statike.

Iz svega što smo dosad izneli proizlazi da će *dinamički pritisci na obrtnu osu tela biti jednaki nuli, ako je ta osa glavna centralna osa inercije tela* (a posebno, osa materijalne simetrije tela). Ovaj zaključak ostaje u važnosti i u slučaju ako se telo obrće neravnomerno.

Dinamičko uravnoteženje masa (ili kako se često naziva i uravnoteženje sila inercije) predstavlja vrlo važan tehnički zadatak, koji se, kao što smo videli, svodi na određivanje glavnih centralnih osa inercije.

Ne treba pogrešno shvatiti da glavne ose inercije imaju samo simetrična tela. Može se dokazati da kroz bilo koju tačku nesimetričnog tela, pa, prema tome, i kroz središte masa, prolaze tri međusobom upravne glavne ose inercije za tu tačku.

Dokažimo drugi, sa praktične tačke gledišta ne manje važan, stav: *bilo koja osa, koja prolazi kroz telo, može da postane glavna centralna osa inercije, ako telu pridodamo mase u dvema tačkama*. Neka masa nekog tela bude M , i neka budu poznate veličine x_C, y_C, J_{xz}, J_{yz} , koje nisu jednake nuli. Ako telu dodamo dve mase m_1 i m_2 u tačkama čije su koordinate (x_1, y_1, z_1) i (x_2, y_2, z_2) , onda iz formula (4) i (65) proizlazi da će za telo sa pridodatim masama biti $x'_C = y'_C = J'_{xz} = J'_{yz} = 0$, ako su ispunjeni uslovi

$$\begin{aligned} Mx_C + m_1x_1 + m_2x_2 &= 0, & J_{xz} + m_1x_1z_1 + m_2x_2z_2 &= 0, \\ My_C + m_1y_1 + m_2y_2 &= 0, & J_{yz} + m_1z_1y_1 + m_2z_2y_2 &= 0. \end{aligned} \quad (69)$$

Osa Oz biće onda glavna centralna osa inercije. Ako mase m_1 i m_2 , kao i njihov položaj izaberemo tako da budu zadovoljeni uslovi (69), onda ćemo time jednovremeno rešiti i postavljeni zadatak. Pojedine od tih veličina mogu unapred da budu date. Npr., možemo unapred da usvojimo određene vrednosti za mase m_1 i m_2 i za njihove koordinate z_1, z_2 (ali tako da bude $z_1 \neq z_2$); onda se koordinate x_1, y_1, x_2, y_2 , mogu odrediti iz jednačina (69), i slično.

Izložena metoda uravnotežavanja masa široko se koristi u tehničkoj praksi za uravnotežavanje kolenastih vratila, klipnih vratila, klipnih poluga i slično. Pri tom se konačno balansiranje (uravnotežavanje) vrši na specijalnim mašinama.

Za određivanje pritisaka na osc u konkretnim zadacima obično se ne koriste gotove jednačine (66), već se u svakom konkretnom slučaju primenjuje neposredno D'alamberov princip. Obično se istovremeno uzimaju u obzir i sve sile koje deluju na telo, tako da se određuju ukupni pritisci na osc, tj. određuje se suma statičkih i dinamičkih pritisaka zajedno.

Zadatak 154. Obrtna osa diska, koja je upravna na njegovu ravan (sl. 355), udaljena je od središta masa diska za rastojanje a . Težina diska jednaka je G ; a ugaona brzina obrtanja ω . Odrediti dinamičke pritiske na obrtnu osu, ako je $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Rešenje. Osa Oz je glavna osa inercije za tačku O , jer je ravan Oxy ravan simetrije diska. Tada je $J_{xz} = J_{yz} = 0$, pa iz formula (64) proizlazi da je: $M_O^{\text{in}} = 0$, tj. da se inercijalne sile svode samo na rezultantu, koja prolazi kroz tačku O i koja je usmerena u pravcu OC (duž ose Oy). Po intenzitetu je $F_R^{\text{in}} = Ma_{CN} = \frac{G}{g} a \omega^2$. Tada, kako je lako videti, biće:

$$Y_A^D = Y_B^D = \frac{G a \omega^2}{2g}.$$

Sile $\vec{Y}_A^D$ i $\vec{Y}_B^D$ za sve vreme kretanja nalaze se u ravni Oyz koja se obrće zajedno sa telom.

Nadanim pritiscima treba takođe pridodati i statičke pritiske, koji nastaju od dejstva sile teže $\vec{G}$. Oni mogu da se odrede ako je poznato rastojanje $\overline{AB}$.

Zadatak 155. Pod pravim uglom prema vertikalnom obrtnom vratilu AB , dužine b , zavarena su dva jednaka štapa, koja se nalaze u jednoj ravni na rastojanju h jedan od drugog (sl. 356); dužina svakog štapa je l , a težina G . Odrediti dinamičke pritiske na vratilo, ako se ono obrće konstantnom ugaonom brzinom ω .

Rešenje. Centrifugalna sila inercije svakog od štapova jednaka je po intenzitetu

$$F_1^{\text{in}} = F_2^{\text{in}} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l \omega^2.$$

Ove sile obrazuju spreg, koji je, očevидno, uravnotežen spregom sila $\vec{X}_A^D, \vec{X}_B^D$. Momenti ovih spregova po intenzitetu jednaki su jedan drugom. Prema tome je $X_A^D b = F_1^{\text{in}} h$ odakle je

$$X_A^D = X_B^D = \frac{F_1^{\text{in}} h}{b} = \frac{G l h}{2 g b} \omega^2.$$

Spreg se za sve vreme obrtanja nalazi u ravni Axz , koja se obrće zajedno sa telom.

Pokažimo kako se do istog rezultata može doći korišćenjem jednačine (66). U datom slučaju je $x_C = y_C = 0$ i $J_{yz} = 0$, jer je ravan Oxz — ravan simetrije. Veličina J_{xz} iznosi $J_{xz} = J'_{xz} + J''_{xz}$ tj. jednaka je zbiru centrifugalnih momenata inercije svakog od štapova. Za donji štap je $z_i = a$, dok je za gornji $z_i = a + h$. Tada, po formuli (65) dobijamo:

$$J'_{xz} = (\sum m_i x_i) a = m x'_C a = -\frac{G}{g} \frac{l}{2} a;$$

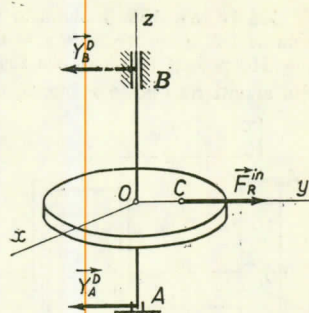
$$J''_{xz} = m x''_C (a + h) = \frac{G}{g} \frac{l}{2} (a + h),$$

odakle je

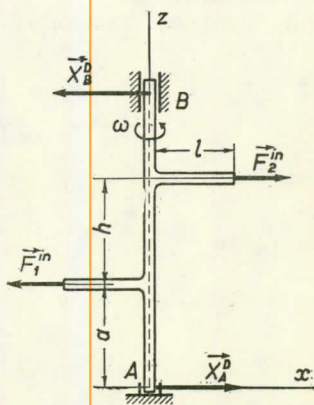
$$J_{xz} = \frac{1}{2} \frac{G}{g} l h.$$

Kada sve nadene podatke smenimo u jednačini (66), dobićemo

$$Y_A^D = Y_B^D = 0, \quad X_A^D = -X_B^D = \frac{G l h}{2 g b} \omega^2.$$



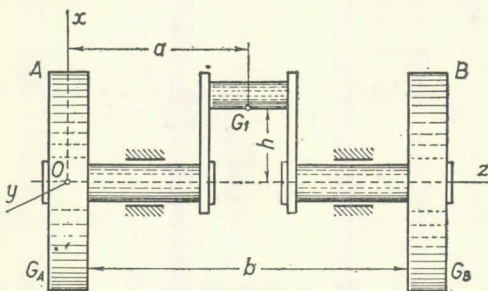
Sl. 355



Sl. 356

Znak minus kod veličine X_B^D se pojavljuje iz razloga što sile $\vec{X}_B^D$ na sl. 354 i 356 imaju suprotan smer.

Zadatak 156. Kolenasto vratilo gasnog jednocilindričnog motora nosi dva jednaka zamajca A i B poluprečnika $r = 0,5$ m. Smatrajući rukavac i koleno rukavca kao teret težine $G_1 = 21$ kp, koji se nalazi na rastojanju $h = 0,2$ m od ose, odrediti težine tereta G_A i G_B , koje treba staviti na obode zamajca, da bi se sistem izbalansirao (uravnotežio), ako je $a = 0,6$ m, $b = 1,4$ m (sl. 357).



Sl. 357

Rešenje. Povucimo koordinatne ose, koje se obrću zajedno sa telom tako da koleno vratila bude u ravni Oxz (vidi crtež). Tada će ova ravan biti ravan simetrije. Prema tome je $y_C = 0$, i kako je tom prilikom osa Oy za tačku O glavna osa, to je i $J_{yz} = 0$. Osim toga, ako ukupnu težinu celog sistema označimo sa G , onda će biti

$$x_C = \frac{G_1}{G} h, \quad J_{xz} = \frac{G_1}{g} h a.$$

Ovaj poslednji rezultat proizlazi iz činjenice da je centrifugalni moment inercije sistema jednak sumi centrifugalnih momenata inercije njegovih delova, a za zamajac i njemu pričvršćene delove vratila centrifugalni momenti inercije jednaki su nuli, jer je osa Oz — osa simetrije.

Tada, kao što se vidi iz jednačine (69), za pridodate terete koordinate su. $y_A = y_B = 0$, dok težine G_A i G_B treba da zadovolje jednačine:

$$G x_C + G_A x_A + G_B x_B = 0, \quad J_{xz} + \frac{G_A}{g} x_A z_A + \frac{G_B}{g} x_B z_B = 0.$$

Kako se tereti nalaze na obodu zamajca, to je $z_A = 0$, $z_B = b$ i $x_A = x_B = -r$ (za znak plus gornje jednačine ne bi imale rešenja, a to znači da teret mora da bude ispod ose Oz). Rešavanjem jednačina nalazimo:

$$G_A = \frac{(b-a)h}{rb} G_1 = 4,8 \text{ kp}, \quad G_B = \frac{ah}{rb} G_1 = 3,6 \text{ kp}.$$

Pridodavanjem tereta G_A i G_B sistem se uravnotežava i osa Oz postaje glavna osa inercije (međutim, ona nije osa simetrije).

Glava XXX

PRINCIP MOGUĆNIH POMERANJA I OPŠTA JEDNAČINA DINAMIKE

§ 163. Mogućna (virtualna) pomeranja sistema. Broj stepena slobode kretanja

U prvom delu ovog kursa proučili smo metode koje se vrlo često nazivaju *metode geometrijske statike*. Pri korišćenju tih metoda za postavljanje uslova ravnoteže nekog sistema potrebno je da se posebno ispita ravnoteža svakog od tela koje ulazi u sistem i da se pri tom zamene uticaji jednog tela na drugo unapred nepoznatim reakcijama veza. Kako je često broj tela u jednom sistemu vrlo veliki, to rešavanje problema ovakvim metodama može da bude vrlo složeno, jer dovodi do rešavanja velikog broja jednačina sa velikim brojem nepoznatih.

Sada ćemo, koristeći niz novih kinematičkih i dinamičkih pojmova, proučiti drugu, daleko opštiju metodu za rešavanje zadataka statike, koja omogućuje da se odmah odrede uslovi ravnoteže bilo kog mehaničkog sistema. Osnovna razlika između metode koju ćemo sada proučiti i metoda geometrijske statike sastoji se u tome što se primenom nove metode uticaj veza ne uzima u obzir uvođenjem reakcija, već posmatranjem pomeranja, koja mogu da izvrše pojedine tačke posmatranog sistema, kada se sistem izvede iz položaja koji zauzima*. Takva pomeranja nazivaju se u mehanici *moćna* (ili *virtualna*) *pomeranja*.

»Moćna« pomeranja tačaka jednog sistema moraju da ispune sledeća dva uslova:

1) ona moraju da budu *beskonačno mala*, jer pri konačnom pomeranju tačaka jednog sistema, sistem može da pređe u drugi položaj i u tom položaju uslovi ravnoteže mogu da budu drugojačiji;

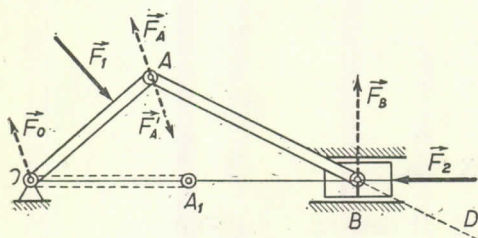
2) ona moraju da budu takva da se *sve veze, kojima je podvrgnut sistem, održe i dalje* (tj. ne smeju da se naruše), jer ako se one ne održe onda od jednog sistema prelazimo na neki drugi mehanički sistem (tj. drugim rečima to više neće biti onaj sistem koji smo trebali da proučimo).

Na primer, pomeranje krivaje klipnog mehanizma, prikazanog na sl. 358, iz položaja OA u položaj OA_1 ne sme da se posmatra kao »moćno« pomeranje, jer su u novom položaju uslovi ravnoteže mehanizma pod dejstvom sila $\vec{F}_1$ i $\vec{F}_2$ sasvim drugojačiji. Isto tako, čak ni beskonačno

* Ovakve metode rešavanja zadataka često se nazivaju *metode analitičke statike*.

malo pomeranje tačke B klipne poluge u pravcu BD nije moguće pomeranje; to pomeranje bi bilo moguće, kad bi u tački B umesto ukrasne glave bio obrtni zglob (vidi sl. 188, zglob C), tj. kada bi mehanizam bio drugojačiji.

Prema tome, mogućnim (virtualnim) pomeranjima jednog sistema nazivaćemo skup bilo kojih beskonačno malih pomeranja tačaka sistema, koja, u datom trenutku vremena, dopuštaju sve veze kojima je podvrgnut sistem. Moguće pomeranje bilo koje tačke sistema prikazaćemo tom prilikom elementarnim vektorom $\vec{\delta s}$, koji je usmeren u stranu pomeranja.



SL. 358

U opštem slučaju za tačke ili tela sistema može da postoji vrlo veliki broj različitih mogućnih pomeranja (pomeranja $\vec{\delta s}$ i $-\vec{\delta s}$ ne smatraju se različitim pomeranjima). Međutim, za svaki sistem, a u zavisnosti od karaktera veza, moguće je da se nađe određen broj takvih međusobno nezavisnih pomeranja, da se

svako drugo moguće pomeranje sistema može prikazati kao njihov geometrijski zbir. Na primer, kuglica, koja leži na horizontalnoj površini, može da se pomeri na toj površini u beskonačno mnogo različitih pravaca. Međutim, bilo koje moguće pomeranje $\vec{\delta s}$, može da se dobije kao zbir dvaju pomeranja $\vec{\delta s}_1$ i $\vec{\delta s}_2$ duž dvaju međusobno upravnih osa koje leže u istoj ravni ($\vec{\delta s} = \vec{\delta s}_1 + \vec{\delta s}_2$).

Broj međusobno nezavisnih mogućnih pomeranja sistema naziva se broj stepena slobode kretanja datog sistema. Tako, na primer, kuglica na površini koju smo malo pre naveli (ako kuglicu smatramo materijalnom tačkom) ima dva stepena slobode. Klipni mehanizam, imaće, očevидno, svega jedan stepen slobode. Slobodna materijalna tačka ima tri stepena slobode kretanja (nezavisna će biti tri pomeranja duž triju međusobno upravnih osa). Slobodno kruto telo ima šest stepena slobode kretanja (nezavisna pomeranja biće: tri translatorska pomeranja duž koordinatnih osa i tri obrtanja oko tih osa).

§ 164. Idealne veze

Ako je veza jedne materijalne tačke glatka površina ili glatka linija, onda je reakcija takve glatke površine (ili linije) usmerena po normalni na površinu (ili liniju), i pri bilo kom mogućnom pomeranju rad takve reakcije $\vec{F}_N$ biće jednak nuli (vidi § 114). U § 149 bilo je pokazano da je suma radova reakcija $\vec{F}_N$ i $\vec{F}_T$, pri bilo kom mogućnom pomeranju tela koje se kotrlja, kada se zanemari otpor protiv kotrljanja, jednaka nuli. Ovu osobinu imaju, takođe, i sve unutrašnje sile bilo kog nepromenljivog sistema (§ 148, sl. 320).

Razmotrimo, takođe, sledeći primer. Kod klipnog mehanizma (vidi sl. 358) ako zanemarimo trenje u ležištu O i duž horizontalne ose (vodica klipa B), rad reakcije $\vec{F}_O$ biće jednak nuli, jer se tačka O ne pomera; isto tako rad reakcije $\vec{F}_B$ biće, takođe, jednak nuli, jer je sila $\vec{F}_R$ upravna na pomeranje tačke B . Rad svake od

reakcija $\vec{F}_A$ i $\vec{F}'_A$ ($\vec{F}_A$ — je pritisak klipne poluge na krivaju, $\vec{F}'_A$ — pritisak krivaje na klipnu polugu) nije jednak nuli, ali je suma tih radova jednaka nuli, jer je $\vec{F}_A = -\vec{F}'_A$.

U daljim izlaganjima elementaran rad bilo koje aktivne sile $\vec{F}^a$ na bilo kom mogućnom pomeranju $\vec{\delta s}$ označićemo simbolom $\delta \mathbf{A}^{F^a}$ ($\delta \mathbf{A}^{F^a} = F^a \delta s \cos \alpha$, gde je α ugao između pravca sile i pravca pomeranja), dok ćemo rad bilo koje reakcije $\vec{F}_N$ označiti simbolom $\delta \mathbf{A}^{F_N}$. Tada, za sve veze koje smo malopre razmatrali, biće

$$\Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F_N} = 0. \quad (70)$$

Veze kod kojih je suma elementarnih radova svih reakcija pri bilo kom mogućnom pomeranju sistema jednaka nuli, zvaćemo *idealne veze*.

U takve veze, kao što smo videli, spadaju sve veze bez trenja, kada se telo kliza duž tih veza, i veze sa trenjem (ali bez otpora pri kotrljanju), kada se telo kotrlja po tim vezama.

§ 165. Princip mogućnih (virtualnih) pomeranja

Neka se sistem materijalnih tačaka nalazi u ravnoteži pod dejstvom sila koje na njega deluju i pod dejstvom reakcija veza kojima je podvrgnut. Smatraćemo da su sve veze sistema idealne. Uočimo proizvoljnu tačku B_i tog sistema i označimo rezultantu svih aktivnih sila koje deluju na tačku (spoljašnjih i unutrašnjih) sa $\vec{F}_i^a$, a rezultantu svih reakcija veza (takođe, kako spoljašnjih, tako i unutrašnjih) sa $\vec{F}_{Ni}$. Tada, s obzirom da se tačka B_i , kao i čitav sistem, nalazi u ravnoteži biće $\vec{F}_i^a + \vec{F}_{Ni} = 0$, ili $\vec{F}_{Ni} = -\vec{F}_i^a$. Prema tome, pri bilo kom mogućnom pomeranju tačke B_i , radovi $\delta \mathbf{A}_i^{F^a}$ i $\delta \mathbf{A}_i^{F_N}$ sila F_i^a i F_{Ni} , koje deluju na tačku, biće jednaki po veličini, a suprotni po znaku, i njihov zbir biće jednak nuli*, tj. biće

$$\delta \mathbf{A}_i^{F^a} + \delta \mathbf{A}_i^{F_N} = 0.$$

Kad bismo analogna rasuđivanja primenili za sve tačke sistema, dobili bismo slične jednačine za svaku od tačaka sistema. Ako sve te jednačine postupno sabavimo, dobićemo

$$\Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F^a} + \Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F_N} = 0. \quad (70)$$

Druga suma u ovoj jednačini jednaka je nuli na osnovu osobine (70) idealnih veza. Prema tome je

$$\Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F^a} = 0, \quad (71)$$

ili

$$\Sigma (F_i^a \delta s_i \cos \alpha_i) = 0. \quad (71')$$

* Tačka B_i u stvarnosti se nalazi u miru i ne vrši nikakvo pomeranje. Ovde se samo posmatra šta bi bilo sa radovima sila koje deluju na ovu tačku, kad bi ona izvršila bilo koje moguće pomeranje.

Jednačina (71) iskazuje princip mogućnih (virtualnih) pomeranja*: *ako se sistem, koji je podvrgnut idealnim vezama, nalazi u ravnoteži, onda je suma elementarnih radova svih aktivnih sila, koje deluju na sistem, na bilo kom mogućnom pomeranju, jednaka nuli.*

Važi i obrnut stav: *ako aktivne sile koje deluju na sistem zadovoljavaju uslov (71), onda se taj sistem nalazi u ravnoteži.* Na taj način, uslov (71) je neophodan i potreban uslov ravnoteže za bilo koji mehanički sistem sa idealnim vezama.

Ovaj uslov može, takođe, da se napiše i u analitičkom obliku (vidi § 112):

$$\Sigma(X_i^a \delta x_i + Y_i^a \delta y_i + Z_i^a \delta z_i) = 0. \quad (72)$$

Jednačina (71), odnosno (72), predstavlja opštu jednačinu statike.

U jednačini (72) δx_i , δy_i , δz_i , predstavljaju projekcije mogućnog pomeranja $\rightarrow \delta s_i$ tačke B_i na ose koordinatnog sistema. Ove projekcije su jednake elementarnim priraštajima koordinata te tačke pri njenom pomeranju i određuju se na isti način kao i diferencijali odgovarajućih koordinata.

Značaj principa mogućnih pomeranja sastoji se u tome što on u opštoj formi daje uslove ravnoteže bilo kog mehaničkog sistema kao celine, dok metode geometrijske statike zahtevaju da se posebno posmatra ravnoteža svakog tela koje ulazi u sistem. Osim toga, primena ovog principa zahteva da se uzmu u obzir samo aktivne sile i omogućuje da se isključe iz razmatranja sve unapred nepoznate reakcije veza, kada su veze idealne.

§ 166. Rešavanje zadataka

Za sisteme sa jednim stepenom slobode kretanja jednačine (71) ili (72) daju odmah uslove ravnoteže sistema. Ako pak sistem ima nekoliko stepena slobode kretanja, onda uslovi (71) ili (72) treba posebno da se postave za svako od nezavisnih pomeranja sistema; u tom slučaju dobija se za sistem onoliko uslova ravnoteže koliki broj stepena slobode kretanja ima sistem.

Kod različitih ravnih mehanizama pri rešavanju zadataka broj stepena slobode kretanja praktično može da se odredi na sledeći način. Zamislimo da se mehanizam kreće. Ako zatim zaustavimo translatorno, ili obrtno kretanje, bilo kog elementa mehanizma, i ako se tom prilikom istovremeno zaustavi ceo mehanizam, onda takav mehanizam ima samo jedan stepen slobode kretanja. Ako posle zaustavljanja translatornog ili obrtnog kretanja jednog elementa mehanizma, mehanizam može da nastavi kretanje, ali posle zaustavljanja nekog drugog elementa mehanizma, kao celina, prestane da se kreće, onda takav mehanizam ima dva stepena slobode kretanja, itd.

Korišćenjem principa mogućnih pomeranja, zadaci se mogu rešavati geometrijskom i analitičkom metodom.

Pri rešavanju zadataka geometrijskom metodom treba da se učini sledeće:

1) prikažu se najpre aktivne sile koje deluju na sistem;

2) saopšti se zatim sistemu moguće pomeranje i na crtežu se prikažu vektori $\rightarrow \delta s_i$ elementarnih pomeranja napadnih tačaka aktivnih sila, ili pak uglovi $\delta \varphi_i$ elementarnih okretanja tela na koja deluju sile (kada sistem ima nekoliko stepena

* U formi blisko sadašnjoj, ali bez dokaza, ovaj princip je prvi iskazao znameniti matematičar i mehaničar Švajcarac po poreklu J. Bernuli (1667–1748). U opštem obliku ovaj princip je prvi formulisao i dokazao Ž. Lagranž (1788), tako, da se ovaj princip vrlo često naziva i Lagranžev princip virtuelnih pomeranja. Uopštenje ovog principa za slučaj nezadržavajućih veza (veze koje telo može da napusti) dao je M. V. Ostrogradski u svojim radovima 1838–1842. godine.

slobode kretanja, onda njemu treba da se saopšti samo jedno od nezavisnih pome-
ranja);

3) izračunaju se posebno elementarni radovi za svaku od aktivnih sila na moguć-
nom pomeranju po formulama

$$\delta A_i^a = F_{iT}^a \delta s_i \quad \text{ili} \quad \delta A_i^a = M_O^{\vec{F}_i^a} \delta \varphi_i^*$$

i onda se postavi uslov (71);

4) ustanovi se zavisnost između pome-
ranja δs_i i $\delta \varphi_i$ koja ulaze u uslov (71),
i izraze se sve te veličine preko jednog jedinog pome-
ranja (pošto je sistemu bilo
saopšteno nezavisno pome-
ranje, to između pome-
ranja δs_i i $\delta \varphi_i$, mora da postoji
takva veza i ona može da se odredi).

Kada se posle toga u uslovu (71) zamene svi izrazi za pome-
ranja δs_i i $\delta \varphi_i$,
koja su izražena u funkciji samo od jednog parametra, onda se dobija jednačina
iz koje se može odrediti veličina ili zavisnost koja se traži u zadatku.

U sistemima koji imaju više stepena slobode kretanja navedeni računi moraju
se posebno izvršiti za svako od nezavisnih pome-
ranja.

Zavisnost između pome-
ranja δs_i i $\delta \varphi_i$ može se odrediti:

a) iz čisto geometrijskih odnosa (zadaci 157., 162.);

b) kinematičkim metodama, ako odredimo vezu između odgovarajućih line-
arnih brzina v_i , ili ugaonih brzina ω_i , koje bi imao sistem kada bi se kretao, a zatim
ako uzmemo u obzir da je $\delta s_i = v_i dt$ i $\delta \varphi_i = \omega_i dt$ (zadaci 158., 159. i drugi).

Analitička metoda rešavanja zadataka obično se primenjuje onda kada je teško
jednostavnim putem odrediti zavisnost između pome-
ranja δs_i i $\delta \varphi_i$. Uslovi ravno-
teže se u tom slučaju postavljaju u obliku (72). Radi toga treba najpre izabrati
koordinatni sistem. Zatim se izračunaju projekcije aktivnih sila na ose tog koordi-
natnog sistema, kao i napadne tačke tih sila kao funkcije bilo kog parametra (na
primer, ugla). Posle toga veličine δx_i , δy_i , δz_i , nalaze se diferenciranjem po para-
metru koordinata x_i , y_i , z_i .

Ukoliko ne uspemo da izrazimo odmah sve koordinate x_i , y_i ,
 z_i , preko jednog jedinog parametra, onda je potrebno da se uvede u
račun više parametara i zatim da se ustanove veze koje postoje
između tih parametara.

Primerimo, na kraju, da se uslovi (71) i (72) mogu upotrebiti
i za rešavanje takvih zadataka u kojima postoji i sila trenja, ako
silu trenja uvrstimo u aktivne sile. Istim putem mogu se određivati
i reakcije veza, ako se ukloni odgovarajuća veza, pa se njen uti-
caj zameni reakcijom veze. Ova reakcija se zatim uključi u broj
aktivnih sila.

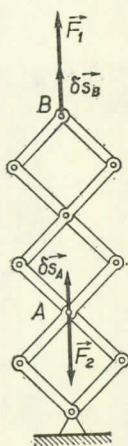
Zadatak 157. Odrediti zavisnost između sila F_1 i F_2 kod mehanizma
prikazanog na crtežu (sl. 359).

Rešenje. Ako sistemu damo virtualno pome-
ranje, onda će se sve dija-
gonale paralelograma, koje obrazuju štapovi, izdužiti za jednu istu veličinu
 δs . Tada je $\delta s_A = \delta s$, $\delta s_B = 3\delta s$. Kada postavimo jednačine (71), dobićemo

$$F_1 \delta s_B - F_2 \delta s_A = 0, \quad \text{odnosno} \quad (3F_1 - F_2) \delta s = 0.$$

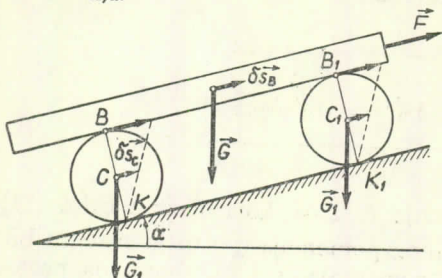
odakle je $F_2 = 3F_1$. Kao što vidimo, do rezultata se dolazi vrlo prosto.

* Primenba prevodioca. Kroz tačku O prolazi obrtna osa.



Sl. 359

Zadatak 158. Težina balvana jednaka je G , a težina svakog od valjaka, na koje je postavljen balvan iznosi G_1 . Kolikom silom F treba delovati na balvan da bi se on održao u ravnoteži na strmoj ravni pri datom uglu α (sl. 360). Trenje valjka o podlogu i o balvan obezbeđuje kotrljanje bez klizanja.

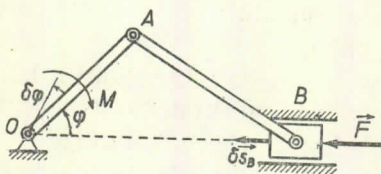


Sl. 360

δs_B smenimo u prethodnu jednačinu dobićemo definitivno

$$F = (G + G_1) \sin \alpha.$$

Zadatak 159. Odrediti zavisnost između momenta M sprega, koji deluje na krivaju klipnog mehanizma (sl. 361) i sile pritiska, koja deluje na klip, pri ravnoteži. Dužina krivaje je $\overline{OA} = r$, a klipne poluge $\overline{AB} = l$.



Sl. 361

Rešenje. Uslovi ravnoteže (71) daju $M \delta \varphi - F \delta s_B = 0$, odnosno $M \omega_{OA} = F v_B$, jer je $\delta \varphi = \omega_{OA} dt$, $\delta s_B = v_B dt$. Zadatak se svodi na iznalaženje zavisnosti između v_B i ω_{OA} . Takav kinematički zadatak bio je rešen ranije (§ 82, zadatak 71.); koristeći se rezultatima, koji su tada dobiveni, nalazimo da je

$$M = Fr \left(1 + \frac{r \cos \varphi}{\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2 \varphi}} \right) \sin \varphi.$$

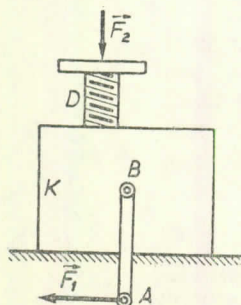
Zadatak 160. Za reduktor, koji je razmatran u zadatku 91. (vidi § 96), odrediti zavisnost između obrtnog momenta M_A , koji deluje na vodeće vratilo A , i momenta otpora M_B , koji deluje vođeno vratilo, ako se oba vratila obrću ravnomerno.

Rešenje. Pri ravnomernom obrtanju odnos između momenata M_A i M_B biće isti kao i pri ravnoteži. Prema tome, uslovi (71) dovode do zavisnosti:

$$M_A \delta \varphi_A - M_B \delta \varphi_B = 0, \quad \text{odnosno} \quad M_A \omega_A = M_B \omega_B,$$

jer je $\delta \varphi_A = \omega_A dt$ i $\delta \varphi_B = \omega_B dt$. Odavde, koristeći se rezultatima dobijenim u zadatku 91., nalazimo da je

$$M_A = \frac{\omega_B}{\omega_A} M_B = \frac{n_B}{n_A} M_B = 2,8 M_B.$$



Sl. 362

Zadatak 161. Odrediti zavisnost između sila F_1 i F_2 kod dizalice, čiji se elementi nalaze u kućici K (sl. 362), ako je poznato da se pri svakom obrtaju ručice AB ($\overline{AB} = l$) zavrtnaj D izdigne za visinu h .

Rešenje. Postavljanjem uslova ravnoteže (71) dolazi se do zavisnosti

$$F_1 l \delta \varphi_{AB} - F_2 \delta s_D = 0.$$

Smatrajući da se pri ravnomernom obrtanju ručice takođe i zavrtnaj obrće ravnomerno, dobićemo:

$$\frac{\delta \varphi_{AB}}{2\pi} = \frac{\delta s_D}{h}, \quad \text{odnosno} \quad \delta \varphi_{AB} = \frac{2\pi}{h} \delta s_D.$$

Ako unesemo ovu vrednost za $\delta \varphi_{AB}$ u prethodnu jednačinu, dobićemo

$$F_2 = \frac{2\pi l}{h} F_1.$$

Primitimo da se metodama geometrijske statike ovaj vrlo prost zadatak ne može rešiti jer nisu poznati elementi mehanizma.

Zadatak 162. Nosač koji se sastoji od dva štapa vezana zglobovom C nosi teret $\vec{G}$ (sl. 363, a). Dimenzije nosača i raspored oslonaca prikazan je na slici. Zanemarujući težinu nosača odrediti pritisak na oslonac B .

Rešenje. Uklonimo oslonac B i njegovo dejstvo na nosač zamenimo silom $\vec{F}_B$ koja je brojčano jednaka traženom pritisku (sl. 363, b). Dajmo sada sistemu virtualno pomeranje; tada postavljanjem jednačine (71) dobijamo

$$F_B \delta s_B - G \delta s_E = 0.$$

Vezu između δs_B i δs_E nalazimo iz proporcija

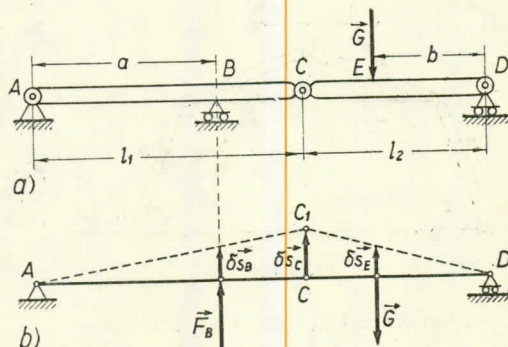
$$\frac{\delta s_B}{a} = \frac{\delta s_C}{l_1}, \quad \frac{\delta s_E}{b} = \frac{\delta s_C}{l_2},$$

odakle je

$$\delta s_E = \frac{bl_1}{al_2} \delta s_B.$$

Prema tome je

$$F_B = \frac{bl_1}{al_2} G.$$



Sl. 363

Ovaj zadatak može da se reši i metodama geometrijske statike, samo je to rešenje znatno duže (bilo bi potrebno da se posebno razmotri ravnoteža svakog od delova nosača, da se uvedu u račun reakcije veza i da se zatim te reakcije eliminišu iz dobijenog sistema jednačina ravnoteže).

Zadatak 163. Kod planetarnog mehanizma sa diferencijalnim prenosnikom (vidi § 96) na osovinu A , nezavisno jedno od drugog, nasadeni su zupčanik 1, poluprečnika r_1 , i krivaja AB , koja na svom kraju nosi vratilo B zupčanika 2, poluprečnika r_2 (sl. 364). Na krivaju deluje obrtni moment M , a na zupčanike momenti otpora M_1 i M_2 . Odrediti veličine momenata M_1 i M_2 pri ravnoteži mehanizma.

Rešenje. Mehanizam ima dva stepena slobode kretanja, jer su kod njega moguća dva nezavisna pomeranja: a) obrtanje krivaje AB , kada je zupčanik 1 nepomičan, i b) obrtanje zupčanika 1, kada je krivaja AB nepomična. Posmatrajmo prvo virtualno pomeranje sistema kada zupčanik 1 ostaje nepomičan (sl. 364, a). Za ovo pomeranje jednačina (71) daje

$$M \delta \varphi_{AB} - M_2 \delta \varphi_2 = 0.$$

Međutim, kada je zupčanik 1 nepomičan biće tačka dodira zupčanika trenutni pol brzina za zupčanik 2. Prema tome je $v_B = r_2 \omega_2$. U isto vreme je $v_B = (r_1 + r_2) \omega_{AB}$. Odavde proizlazi da je $r_2 \omega_2 = (r_1 + r_2) \omega_{AB}$, ili $r_2 \delta \varphi_2 = (r_1 + r_2) \delta \varphi_{AB}$, te najzad dobijamo:

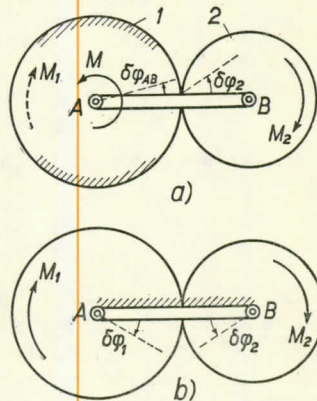
$$M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} M.$$

Posmatrajmo sada drugo virtualno pomeranje, nezavisno od prvog, kada krivaja AB ostaje nepokretna (sl. 364, b). Za ovo pomeranje prema uslovu (71) biće

$$M_1 \delta \varphi_1 - M_2 \delta \varphi_2 = 0.$$

Međutim, kada je krivaja nepomična, postoje zavisnosti

$$\frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{i} \quad M_1 = \frac{r_1}{r_2} M_2.$$

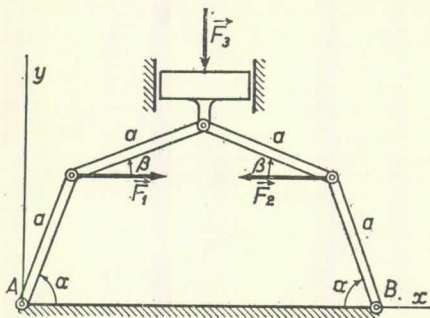


Sl. 364

Prema tome, konačno dobijamo

$$M_1 = \frac{r_1}{r_1 + r_2} M, \quad M_2 = \frac{r_2}{r_1 + r_2} M.$$

Zadatak 164. Odrediti kod prese, koja je prikazana na sl. 365, zavisnost između sila $F_1 = F_2$ i F_3 pri ravnoteži. Uglovi α i β su poznati. Težinu štapova zanemariti.



SL. 365

Diferenciranjem ovih izraza dobijamo

$$\delta x_1 = -a \sin \alpha \delta \alpha, \quad \delta x_2 = -a (\sin \alpha \delta \alpha + 2 \sin \beta \delta \beta), \quad \delta y_3 = a (\cos \beta \delta \beta + \cos \alpha \delta \alpha).$$

Unesimo dobijene izraze u jednačinu (a) i uzmimo u obzir da je $X_1 = F_1$, $X_2 = -F_1$, $Y_3 = -F_3$. Tada izlazi da je

$$2F_1 \sin \beta \delta \beta - F_3 (\cos \beta \delta \beta + \cos \alpha \delta \alpha) = 0. \quad (b)$$

Da bismo odredili zavisnost između $\delta \alpha$ i $\delta \beta$ primetimo da je u datom zadatku $\overline{AB} = \text{const.}$ Prema tome je $2a (\cos \alpha + \cos \beta) = \text{const.}$ Diferenciranjem ove jednačine dobijamo

$$\sin \alpha \delta \alpha + \sin \beta \delta \beta = 0, \quad \text{odnosno} \quad \delta \alpha = -\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} \delta \beta.$$

Smenimo nađeni izraz za $\delta \alpha$ u jednačinu (b), posle čega ova jednačina postaje:

$$2F_1 \sin \beta - F_3 (\cos \beta - \text{ctg} \alpha \sin \beta) = 0,$$

odakle proizlazi da je

$$F_3 = \frac{2F_1}{\text{ctg} \beta - \text{ctg} \alpha}.$$

Kao što vidimo, pri uglu β koji je po veličini blizak uglu α , pritisak F_3 može da ima vrlo velike vrednosti.

§ 167. Opšta jednačina dinamike

Princip virtualnih pomeranja daje opštu metodu za rešavanje zadataka statike. To znači da on omogućuje da se metode dinamike iskoriste za rešavanje zadataka statike. S druge strane, D'alambertov princip omogućuje da se iskoriste metode statike za rešavanje zadataka dinamike. Prema tome, istovremenim korišćenjem ova dva principa, može se dobiti opšta metoda za rešavanje zadataka dinamike.

Neka je kretanje sistema materijalnih tačaka podvrgnuto idealnim vezama.

Ako u svim tačkama sistema aktivnim silama $\vec{F}_i^a$ i reakcijama $\vec{F}_{Ni}$, koje deluju na te tačke, pridodamo još i odgovarajuće sile inercije $\vec{F}_i^{\text{in}} = -m_i \vec{a}_i$, onda će, saglasno D'alambertovom principu, dobijeni sistem sila biti u ravnoteži. Ako sada na ovakav jedan sistem sila primenimo princip virtualnih pomeranja, dobićemo

$$\sum \delta \mathbf{A}_i^{\vec{F}^a} + \sum \delta \mathbf{A}_i^{\vec{F}^{\text{in}}} + \sum \delta \mathbf{A}_i^{\vec{F}^N} = 0.$$

Međutim, poslednja suma u ovoj jednačini, saglasno uslovu (70), biće jednaka nuli i na taj način konačno izlazi da je

$$\Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F^a} + \Sigma \delta \mathbf{A}_i^{F^{in}} = 0. \quad (73)$$

Jednačina (73) predstavlja opštu jednačinu dinamike. Iz nje proizlazi da je *pri kretanju sistema sa idealnim vezama, u svakom trenutku vremena, suma elementarnih radova svih aktivnih sila, koje deluju na sistem, i svih sila inercije, na bilo kom virtualnom pomeranju sistema, jednaka nuli*. U analitičkom obliku jednačina (73) ima oblik

$$\Sigma [(X_i^a - m_i \ddot{x}_i) \delta x_i + (Y_i^a - m_i \ddot{y}_i) \delta y_i + (Z_i^a - m_i \ddot{z}_i) \delta z_i] = 0. \quad (74)$$

Jednačine (73) ili (74) omogućuju da se postave diferencijalne jednačine kretanja bilo kog mehaničkog sistema.

Ako sistem predstavlja skup bilo kakvih krutih tela, onda je za postavljanje jednačina potrebno da se aktivnim silama, koje deluju na svako kruto telo, pridoda sila, koja predstavlja glavni vektor sila inercije sa napadnom tačkom u bilo kojoj tački, i spreg, čiji je moment jednak momentu sila inercije za tu istu tačku, i da se zatim primeni princip virtualnih pomeranja.

Zadatak 165. Centrifugalni regulator (sl. 366) obrće se ravnomerno oko vertikalne ose ugaonom brzinom ω . Težina svake od kugli A_1 i A_2 regulatora iznosi $G_1 = G_2 = G$, dok je težina ogradice C_1C_2 jednaka G_3 . Zanemarujući težinu štapova odrediti veličinu ugla α , ako je $\overline{OA_1} = \overline{OA_2} = l$; $\overline{OB_1} = \overline{OB_2} = \overline{B_1C_1} = \overline{B_2C_2} = a$.

Rešenje: Pridodajmo aktivnim silama $\vec{G}_1, \vec{G}_2$ i $\vec{G}_3$, centrifugalne sile inercije $\vec{F}_1^{in}, \vec{F}_2^{in}$ (sila inercije ogradice, biće, očevидno, jednaka nuli) i postavimo opštu jednačinu dinamike (74). Posle izračunavanja projekcija svih sila na koordinatne ose dobijamo:

$$G_1 \delta x_1 + G_2 \delta x_2 - F_1^{in} \delta y_1 + F_2^{in} \delta y_2 + G_3 \delta x_3 = 0.$$

Pri tome je

$$F_1^{in} = F_2^{in} = \frac{G}{g} a_A = \frac{G}{g} l \omega^2 \sin \alpha.$$

Koordinate napadnih tačaka pojedinih sila su:

$$x_1 = x_2 = l \cos \alpha, \quad y_2 = -y_1 = l \sin \alpha, \\ x_3 = 2a \cos \alpha.$$

Diferencijali ovih izraza iznose:

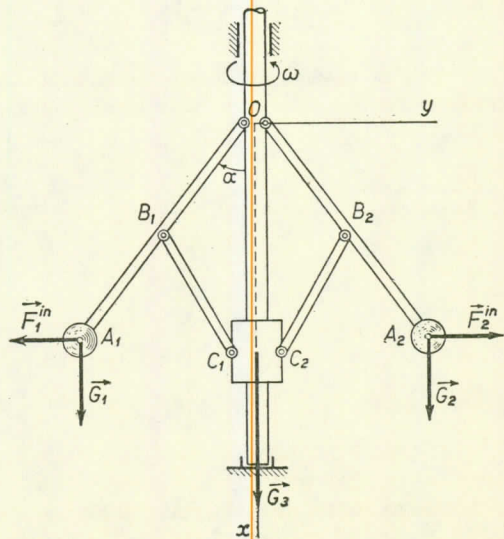
$$\delta x_1 = \delta x_2 = -l \sin \alpha \delta \alpha, \\ \delta y_2 = -\delta y_1 = l \cos \alpha \delta \alpha, \delta x_3 = -2a \sin \alpha \delta \alpha.$$

Kada sve dobijene izraze smenimo u jednačini (a) izlazi da je

$$(-2Gl \sin \alpha + 2 \frac{G}{g} l^2 \omega^2 \sin \alpha \cos \alpha - 2G_3 a \sin \alpha) \delta \alpha = 0.$$

Odatavde, definitivno, dobijamo:

$$\cos \alpha = \frac{Gl + G_3 a}{Gl^2 \omega^2} g.$$



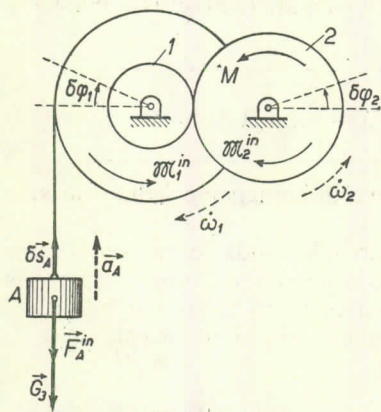
Sl. 366

Kako je $\cos \alpha \leq 1$, to će se kugle udaljavati od vertikale kada je ispunjen uslov:

$$\omega^2 > \frac{Gl + G_3 a}{Gl^2} g.$$

Sa povećavanjem ugaone brzine ω ugao α se povećava i teži uglu od 90° kada $\omega \rightarrow \infty$.

Zadatak 166. Kod dizalice, prikazane na sl. 367, na zupčanik 2, težine G_2 , poluprečnika inercije i_2 , deluje obrtni moment M . Odrediti ubrzanje tereta A , težine G_3 , koji podiže dizalica, zanemarujući težinu konopca i trenje u ležištima. Doboš na koji se namotava konopac i čvrsto spojen sa njim zupčanik 1, imaju ukupnu težinu G_1 i poluprečnik inercije i_1 . Poluprečnici zupčanika jednaki su r_1 i r_2 , dok je poluprečnik doboša r .



Sl. 367

Rešenje. Prikažimo opterećenja koja deluju na sistem — aktivnu silu $\vec{G}_3$ i obrtni moment M (sile $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$ ne vrše rad); pridodajmo ovim opterećenjima silu inercije tereta i spregove čiji su momenti $\mathcal{M}_1^{in} < \mathcal{M}_2^{in}$ na koje se svede sile inercije tela koje se obrću (vidi § 159). Te veličine po intenzitetu su jednake

$$F_A^{in} = \frac{G_3}{g} a_A, \quad |\mathcal{M}_1^{in}| = \frac{G_1}{g} i_1^2 \dot{\omega}_1.$$

$$|\mathcal{M}_2^{in}| = \frac{G_2}{g} i_2^2 \dot{\omega}_2.$$

Smerovi ovih veličina prikazani su na slici. Posmatrajmo virtualno pomeranje sistema i postavimo jednačinu (73). Tada izlazi da je

$$-(G_3 + F_A^{in}) \delta s_A - \mathcal{M}_1^{in} \delta \varphi_1 + (M - \mathcal{M}_2^{in}) \delta \varphi_2 = 0.$$

Ako sva pomeranja izrazimo u funkciji od $\delta \varphi_1$ dobićemo:

$$\delta s_A = r \delta \varphi_1, \quad \frac{\delta \varphi_2}{\delta \varphi_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{i} \quad \delta \varphi_2 = \frac{r_1}{r_2} \delta \varphi_1.$$

Konačno, jednačina kretanja imaće oblik

$$G_3 \left(1 + \frac{a_A}{g}\right) r + \frac{G_1}{g} i_1^2 \dot{\omega}_1 + \frac{G_2}{g} i_2^2 \dot{\omega}_2 \frac{r_1}{r_2} - M \frac{r_1}{r_2} = 0.$$

Veličine ugaonih ubrzanja $\dot{\omega}_1$ i $\dot{\omega}_2$, koja ulaze u ovu jednačinu, izrazićemo preko traženog ubrzanja a_A . Imajući u vidu da su ugaona ubrzanja $\dot{\omega}_1$ i $\dot{\omega}_2$ vezana međusobom istim odnosima kao i ugaone brzine ω_1 i ω_2 dobićemo

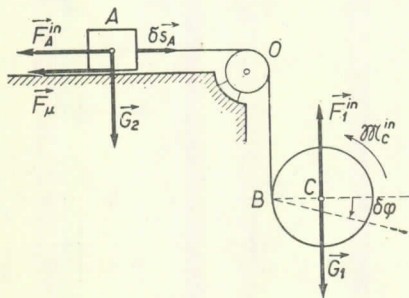
$$\dot{\omega}_1 = \frac{a_A}{r}, \quad \dot{\omega}_2 = \frac{r_1}{r_2} \dot{\omega}_1 = \frac{r_1}{r_2} \frac{a_A}{r}.$$

U krajnjem rezultatu nalazimo da je

$$a_A = \frac{\frac{r_1}{r_2} M - r G_3}{G_3 r + \frac{i_1^2}{r} G_1 + \frac{i_2^2}{r} \frac{r_1^2}{r_2^2} G_2} g.$$

Ovaj zadatak može, takođe, da se reši i korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije (vidi § 150).

Zadatak 167. Na puni cilindar težine G_1 namotan je konopac, koji je prebačen preko kotura O . O kraj konopca pričvršćen je teret A , težine G_2 (sl. 368). Teret može da klizi po horizontalnoj ravni, pri čemu koeficijent trenja klizanja iznosi μ . Odrediti ubrzanje tereta i središta cilindra C pri kretanju ovog sistema zanemarujući masu kotura O i konopca.



Sl. 368

Rešenje. Ako kretanje počinje iz stanja mirovanja, onda se središte C cilindra pomera vertikalno i sistem ima dva stepena slobode (obrtanje cilindra u odnosu na konopac kad se teret ne pomiče i pomeranje tereta kada se cilindar ne obrće).

Pridodajmo aktivnim silama $\vec{G}_1$ i $\vec{G}_2$ i $\vec{F}_\mu$, sile inercije cilindra, koje se svode na glavni vektor $\vec{F}_1^{\text{in}}$ i na spreg čiji je moment $\mathcal{M}_C^{\text{in}}$ (vidi § 159), i inercijalnu silu tereta $\vec{F}_A^{\text{in}}$. Ove sile i momenti po intenzitetu su jednaki:

$$F_A^{\text{in}} = \frac{G_2}{g} a_A, \quad F_1^{\text{in}} = \frac{G_1}{g} a_A, \quad \left| \mathcal{M}_C^{\text{in}} \right| = J_C \dot{\omega} = \frac{G_1}{2g} r^2 \frac{a_C - a_A}{r}.$$

Poslednji rezultat proizlazi iz činjenice da ako tačka C cilindra ima brzinu v_C , a tačka B (zajedno sa konopcem) brzinu $v_B = v_A$, onda je ugaona brzina obrtanja cilindra $\omega = \frac{v_C - v_A}{r}$ (vidi § 81, formula 56), pa je, prema tome, $\dot{\omega} = \frac{a_C - a_A}{r}$. Osim toga, za cilindar je $J_C = \frac{1}{2} m r^2$, gde je r — poluprečnik cilindra.

Dajmo sada sistemu virtualno pomeranje δs_A , pri kome se cilindar ne obrće, već se kreće translatorno zajedno sa teretom. Spreg momenta $\mathcal{M}_C^{\text{in}}$ na tom pomeranju ne vrši rad, i iz jednačine (73) proizlazi:

$$(-F_\mu - F_A^{\text{in}} - F_1^{\text{in}} + G_1) \delta s_A = 0.$$

Oдавде, s obzirom da je $F_\mu = \mu G_2$, dobijamo:

$$\frac{G_1}{g} a_A + \frac{G_2}{g} a_A = G_1 - \mu G_2. \quad (\text{a})$$

Uočimo sada drugo virtualno pomeranje sistema, nezavisno od prvog, pri kome je teret A nepomičan, dok se cilindar okrene oko tačke B (koja je za dato pomeranje trenutni pol brzina) za ugao $\delta\varphi$. Iz jednačine (73) proizlazi da je na ovom pomeranju

$$(G_1 - F_1^{\text{in}}) r \delta\varphi - \mathcal{M}_C^{\text{in}} \delta\varphi = 0.$$

Kada smenimo ovde izraze za F_1^{in} i $\mathcal{M}_C^{\text{in}}$ dobićemo konačno:

$$3a_C - a_A = 2g. \quad (\text{b})$$

Rešavanjem jednačina (a) i (b), odredićemo tražena ubrzanja

$$a_A = \frac{G_1 - 3\mu G_2}{G_1 + 3G_2} g, \quad a_C = \frac{G_1 + (2 - \mu) G_2}{G_1 + 3G_2} g$$

Iz dobijenih rešenja se vidi da je posmatrano kretanje moguće ako je ispunjen uslov $\mu \leq G_1/3G_2$. Kada bi koeficijent trenja bio veći od ove veličine, onda bi teret A ostao nepomičan. U tom slučaju pomeranje δs_A bilo bi nemoguće za sistem i jednačina (a) ne bi postojala. Kretanje središta cilindra u tom slučaju možemo odrediti ako u jednačini (b) stavimo da je $a_A = 0$. Prema tome, kada je $\mu > G_1/3G_2$ teret A je nepomičan, dok se središte cilindra C spušta ubrzanjem $a_A = 2g/3$.

Skrećemo pažnju na to da za sistem koji ima više od jednog stepena slobode ne treba postavljati diferencijalne jednačine kretanje metodama koje su izložene u § 150. U tom slučaju treba primeniti primeniti opštu jednačinu dinamike.

Glava XXXI

TEORIJA UDARA

§ 168. Osnovna jednačina teorije udara

Pri kretanju tela pod dejstvom običnih sila, koje smo ranije proučavali, brzine tačaka tela menjale su se neprekidno, tj. svakom beskonačno malom intervalu vremena odgovarao je beskonačno mali priraštaj brzine. Tako, ako impuls bilo koje sile $\vec{F}_i$ za vremenski interval τ predstavimo u obliku $\vec{F}_i^* \tau$, gde je $\vec{F}_i^*$ — srednja vrednost te sile za vremenski interval τ , onda zakon o priraštaju količine kretanja tačke, na koju deluje sila $\vec{F}_i$, daje

$$m(\vec{v}_1 - \vec{v}_0) = \Delta K = \Sigma \vec{F}_i^* \tau. \quad (75)$$

Oдавде se vidi da kada je vreme τ beskonačno malo (tj. kada teži nuli), biće, pri dejstvu običnih sila, i priraštaj brzine $\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$ takođe beskonačno mali (težiće takođe nuli).

Međutim, ako u date sile ulaze vrlo velike sile (reda $1/\tau$), onda će priraštaj brzine, za mali interval vremena τ , biti konačan.

Pojava pri kojoj se brzine tačaka tela u toku vrlo malog intervala vremena τ promene za konačnu veličinu naziva se udar. Sile pod čijim dejstvom nastaje udar zovu se *udarne sile* i obeležavaju se simbolom $\vec{F}_{ud}$. Vrlo mali interval vremena τ u kome se izvrši udar zove se *vreme udara*.

Kako su udarne sile vrlo velike, i kako se za vreme trajanja udara menjaju u širokim granicama, to se u teoriji udara kao mera uzajamnog dejstva između tela ne uzimaju same udarne sile, već njihovi impulsi.

Impuls udarnih sila

$$\vec{I}_{ud} = \int_0^\tau \vec{F}_{ud} dt = \vec{F}_{ud}^* \tau$$

je konačna veličina. Impulsi neudarnih sila za vreme τ imaju vrlo malu veličinu, tako da se praktično mogu zanemariti.

U daljim izlaganjima brzinu tačke na početku udara označavaćemo sa $\vec{v}$, a brzinu tačke na kraju udara sa $\vec{v}'$. U tom slučaju jednačina (75) imaće oblik:*

$$m (\vec{v}' - \vec{v}) = m \Delta \vec{v} = \Delta \vec{K} = \Sigma \vec{I}_i. \quad (76)$$

Gornji rezultat izražava zakon o promeni količine kretanja tačke pri udaru: *promena količine kretanja materijalne tačke za vreme udara jednaka je sumi impulsa udarnih sila koje deluju na tačku*. Jednačina (76) predstavlja osnovnu jednačinu u teoriji udara u i teoriji udara ima istu ulogu kao osnovni zakon dinamike $\vec{m}\vec{a} = \vec{F}$ pri proučavanju kretanja pod dejstvom neudarnih sila.

U zaključku primetimo da će pomeranje tačke za vreme udara biti $v_{sr} \tau$; tj. biće jednako vrlo maloj veličini, koja se praktično može zanemariti.

Prema tome, iz svih dobijenih rezultata proizlazi sledeće:

- 1) dejstvo neudarnih sila (takva je npr. sila teže) za vreme udara može se zanemariti;
- 2) pomeranja tačaka tela za vreme udara mogu se zanemariti i telo se može smatrati nepokretnim za vreme udara;
- 3) promena brzina tačaka tela za vreme udara određuje se na osnovu osnovne jednačine teorije udara (76).

§ 169. Opšti zakoni teorije udara

Udar se u sistemu materijalnih tačaka ili tela proučava na osnovu sledećih zakona:

1. Zakon o priraštaju (promeni) količina kretanja sistema pri udaru. Neka se sistem sastoji od n materijalnih tačaka. Označimo rezultantu impulsa spoljašnjih udarnih sila, koje deluju na tačku mase m_i sa $\vec{I}_i^s$, a rezultantu impulsa unutrašnjih udarnih sila sa $\vec{I}_i^u$. Tada, prema jednačini (76), biće

$$m_i (\vec{v}_i' - \vec{v}_i) = m_i \Delta \vec{v}_i = \Delta \vec{K}_i = \vec{I}_i^s + \vec{I}_i^u \quad (77)$$

Ako postavimo ovakve jednačine za svaku od tačaka sistema i ako ih zatim saberemo, dobićemo:

$$\Sigma m_i \vec{v}_i' - \Sigma m_i \vec{v}_i = \Sigma m_i \Delta \vec{v}_i = \Sigma \Delta \vec{K}_i = \Sigma \vec{I}_i^s + \Sigma \vec{I}_i^u$$

Sume, koje stoje na levoj strani gornje jednačine predstavljaju količine kretanja sistema na kraju i na početku udara, koje ćemo označiti sa $\vec{K}_1$ i $\vec{K}_0$. Druga suma koja stoji na desnoj strani gornje jednačine predstavlja sumu impulsa unutrašnjih udarnih sila i ona je zbog osobina unutrašnjih sila jednaka nuli. Zato nala-

*U daljim izlaganjima impuls udarnih sila označavaćemo jednostavno simbolom $\vec{I}$, jer se u teoriji udara impulsi neudarnih sila ne uzimaju u obzir.

zimo da je

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = \Sigma \vec{I}_i^s, \quad (78)$$

tj. da je priraštaj (promena) količine kretanja sistema za vreme udara jednaka sumi impulsa svih spoljašnjih udarnih sila koje deluju na sistem.

Izražena u obliku projekcija na bilo koju koordinatnu osu x jednačina (78) daje:

$$K_{1x} - K_{0x} = \Delta K_x = \Sigma I_{ix}^s. \quad (79)$$

Ako je geometrijski zbir svih impulsa spoljašnjih udarnih sila jednak nuli, onda se, kako se to vidi iz jednačine (78), količina kretanja sistema za vreme udara neće promeniti. Prema tome, impulsi unutrašnjih udarnih sila ne mogu promeniti količinu kretanja čitavog sistema.

2. Zakon o promeni glavnog momenta količina kretanja (zamaha) sistema (zakon momenata) pri udaru. Slično kao i u prethodnom slučaju postavimo za tačku čija je masa m_i jednačinu (77), u obliku

$$m_i \vec{v}_i' = m_i \vec{v}_i + \vec{I}_i^s + \vec{I}_i^u.$$

Vektori koji ulaze u ovu jednačinu deluju na tačku, koja, za vreme udara, ostaje nepomična. Tada, ako odredimo momente svih tih vektora za bilo koju tačku O , dobićemo po Varinjonovoj teoremi (koja važi za bilo koje vektorske veličine) da je

$$\vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i'} = \vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i} + \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s} + \vec{M}_O^{\vec{I}_i^u}$$

Ako postavimo ovakve jednačine za sve tačke sistema i ako ih zatim saberemo, dolazimo do jednačine

$$\Sigma \vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i'} = \Sigma \vec{M}_O^{m_i \vec{v}_i} + \Sigma \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s} + \Sigma \vec{M}_O^{\vec{I}_i^u}$$

Suma koja stoji na levoj strani ove jednačine i prva suma na desnoj strani predstavljaju glavne momente količina kretanja (zamaha) sistema za tačku O na kraju i na početku udara. Njih ćemo označiti sa $\vec{L}_1$ i $\vec{L}_0$. Treća suma koja stoji na desnoj strani ove jednačine odnosi se na momente impulsa unutrašnjih udarnih sila i ona je zbog svojstava unutrašnjih sila jednaka nuli. Prema tome, definitivno je

$$\vec{L}_1 - \vec{L}_0 = \Delta \vec{L} = \Sigma \vec{M}_O^{\vec{I}_i^s} \quad (80)$$

tj. promena momenta količina kretanja (zamaha) sistema za bilo koju tačku, za vreme udara, jednaka je sumi momenata za istu tačku svih impulsa spoljašnjih udarnih sila koje deluju na sistem.

U obliku projekcija na bilo koju osu x jednačina (80) daje

$$L_{1x} - L_{0x} = \Delta L_x = \Sigma M_x^{\vec{I}_i^s} \quad (81)$$

Iz dobijenih jednačina proizlazi: ako je suma momenata impulsa spoljašnjih udarnih sila za bilo koju tačku (ili osu) jednaka nuli, onda se glavni moment količina kretanja (zamaha) sistema, za istu tačku (odnosno za istu osu) za vreme udara, ne menja. Prema tome, impulsi unutrašnjih udarnih sila ne mogu da promene moment količina kretanja (zamaha) sistema.

Zakon o priraštaju (promeni) kinetičke energije ne primenjuje se za rešavanje osnovnih zadataka dinamike u teoriji udara, jer se smatra da su tačke, za vreme udara, nepokretne, dok se umesto udarnih sila razmatraju njihovi impulsi. Prema tome, ne može se neposredno izračunati (na osnovu sila i pomeranja) rad udarnih sila. U daljim izlaganjima proučimo samo problem o gubitku kinetičke energije tela za vreme udara (§ 173).

§ 170. Koeficijent uspostavljanja (restitucije) pri udaru

Veličina impulsa udarnih sila, koji nastaje pri udaru dva tela, ne zavisi samo od masa i brzina tela pre udara, već, takođe, i od elastičnih osobina tih tela, koje se karakterišu veličinom koju zovemo *koeficijent uspostavljanja (restitucije)*.

Neka kugla pada vertikalno naniže na nepomičnu horizontalnu ploču (sl. 369). Pri upravnom udaru, koji će tom prilikom nastati, treba razlikovati dva perioda (dva procesa — faze). U toku prvog perioda (*period kompresije*) brzine delića kugle, koje su u trenutku početka udara jednake v (kretanje kugle smatra se translatorskim) smanjuju se na nulu. Kugla se pri tome deformiše (ploču smatramo krutom) i sva njena početna kinetička energija $\frac{1}{2} Mv^2$ prelazi u unutrašnju potencijalnu energije

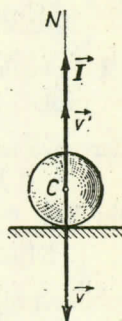
deformisanog tela. U toku drugog perioda (*period restitucije*) kugla pod dejstvom unutrašnjih elastičnih sila teži da uspostavi svoj raniji oblik; tom prilikom njena unutrašnja potencijalna energija prelazi u kinetičku energiju kretanja delića kugle. Na kraju udara brzine delića kugle biće jednake v' , a kinetička energija kugle biće

$\frac{1}{2} Mv'^2$. Međutim, ukupna mehanička energija kugle se ne uspostavlja, tj. ne povraća se u svom prvobitnom ukupnom iznosu, jer se jedan deo utroši na trajnu deformaciju kugle, a drugi deo i na njeno zagrevanje. Iz tog razloga brzina v' biće manja od brzine v .

Veličina k koja je pri upravnom udaru tela o nepomičnu pregradu jednaka odnosu intenziteta brzine tela na kraju udara i intenziteta brzine na početku udara zove se *koeficijent uspostavljanja pri udaru*:

$$k = \frac{v'}{v}$$

(82)



Sl. 369

Veličina koeficijenta uspostavljanja pri udaru određuje se eksperimentalnim putem za različita tela. Na osnovu opita utvrđeno je da veličina k zavisi samo od elastičnih svojstava tela koja se udaraju ako diapazon brzine v nije suviše veliki.

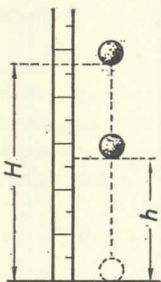
Kao granični slučajevi smatraju se slučaj *apsolutno elastičnog udara* ($k = 1$), pri kome se mehanička energija tela posle udara u potpunosti uspostavlja i slučaj *apsolutno neelastičnog (plastičnog) udara* ($k = 0$), kada se udar završava na kraju prvog perioda i kada se celokupna mehanička energija tela gubi na njegovu deformaciju i zagrevanje.

Eksperimentalno veličina k može da se odredi ako budemo posmatrali kuglu koja slobodno pada na ploču sa prethodno izmerene visine H , i ako zatim budemo izmerili visinu h do koje odskoči kugla posle udara o ploču. Tada, na osnovu Galilejevog obrasca, biće

$$v = \sqrt{2gH} \quad \text{i} \quad v' = \sqrt{2gh},$$

pa je

$$k = \frac{v'}{v} = \sqrt{\frac{h}{H}}. \quad (82)$$



Sl. 370

Za neke materijale nađene su sledeće veličine koeficijenta uspostavljanja (do brzina udara reda 3 m/s):

Tela koja se udaraju	k
drvo o drvo	1/2
čelik o čelik	5/9
slonova kost o slonovu kost	8/9
staklo o staklo	15/16

§ 171. Udar tela o nepomičnu pregradu

Neka telo (kugla) mase M udari o nepomičnu ploču. Udar na silu, koja u tom slučaju deluje na telo, biće reakcija ploče; impuls te sile za vreme udara označimo sa $\vec{I}$. Povucimo normalu na površinu tela u tački njegovog dodira sa pločom i neka ona prolazi kroz središte mase tela (kod kugle će to uvek biti). U tom slučaju se udar zove *centralni*. Ako je brzina $\vec{v}$ središta mase tela u početku udara usmerena po normali N na ploču, onda će udar biti *prav (upravan)*, dok je u protivnom slučaju *kos*.

1. Slučaj upravnog udara. Ako za ovaj slučaj postavimo jednačinu (79) u obliku projekcija na normalu N (vidi sl. 369), i ako uzmemo u obzir da je $\vec{K}_0 = M\vec{v}$ i $\vec{K}_1 = M\vec{v}'$ dobićemo

$$M(v'_N - v_N) = \Delta K_N = I_N.$$

Pri upravnom udaru je $v'_N = v'$, $v_N = -v$, $\vec{I}_N = \vec{I}$. Prema tome je

$$M(v' + v) = \Delta K = I.$$

Drugu jednačinu, potrebnu za rešenje ovog problema, daje jednačina (82) $v' = kv$.

Iz dobijenih jednačina ako znamo M , v , k , nalazimo nepoznate veličine v' i I . Tom prilikom izlazi da je

$$I = M(1 + k)v.$$

Kao što vidimo impuls udarnih sila biće utoliko veći ukoliko je veći koeficijent uspostavljanja k . Na ovu zavisnost između I i k bila je skrenuta pažnja u § 170.

Da bi se odredila srednja vrednost udarne sile (reakcije), treba osim toga da se zna i vreme udara τ , koje može da se odredi eksperimentalnim putem.

Primer. Pri padanju čelične kugle težine $G = 1$ kp sa visine $H = 3$ m na čeličnu ploču ($k = 5/9$) dobijamo $v = \sqrt{2gH} \approx 7,7$ m/s i $v' = kv \approx 4,3$ m/s. Udarni impuls u ovom slučaju biće jednak

$$I = \frac{G}{g} v(1 + k) \approx 1,2 \text{ kps.}$$

Ako je vreme udara $\tau = 0,0005$ s, onda je srednja veličina udarne reakcije

$$(F_N^*)_{ud} = \frac{I}{\tau} = 2400 \text{ kp.}$$

2. Slučaj kosog udara. Neka brzina $\vec{v}$ središta masa tela u početku udara obrazuje prema normali na ploču ugao α , a brzina $\vec{v}'$ na kraju udara — ugao β (sl. 371). U tom slučaju jednačina (78) u obliku projekcija na tangentu T i na normalu N , daje

$$M(v'_T - v_T) = 0, \quad M(v'_N - v'_N) = I.$$

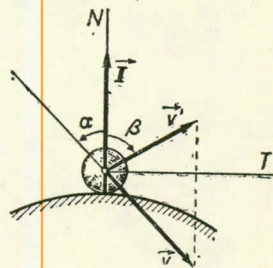
Koeficijent uspostavljanja u datom slučaju jednak je odnosu intenziteta brzina $|v'_N|$ i $|v_N|$, jer se udar zbiva samo u pravcu normale na površinu (uticaj trenja zanemarujemo). Tada, uzimajući u obzir znake projekcija brzina, dobijamo $v'_N = -kv_N$. U krajnjem rezultatu biće:

$$v'_T = v_T, \quad v'_N = -kv_N, \quad I = M|v_N|(1 + k).$$

Iz ovih jednačina može se odrediti intenzitet i pravac brzine na kraju udara i impuls udarnih sila, ako su veličine M , v , α i k , poznate. Na primer, iz prve jednačine, imajući u vidu da je $v_T = |v_N| \operatorname{tg} \alpha$ i $v'_T = |v'_N| \operatorname{tg} \beta$, dobijamo da je $|v'_N| \operatorname{tg} \beta = |v_N| \operatorname{tg} \alpha$, odakle je

$$k = \frac{|v'_N|}{|v_N|} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \beta}.$$

Prema tome, pri kosom udaru odnos tangensa upadnog ugla prema tangensu odbojnog ugla jednak je koeficijentu uspostavljanja. Kako je $k < 1$, to je $\alpha < \beta$, tj. *upadni ugao uvek je manji od odbojnog ugla*.



SL. 371

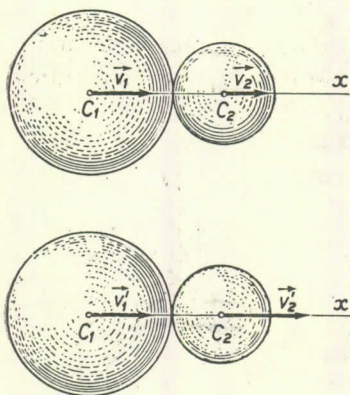
§ 172. Upravni centralni sudar dva tela (sudar kugli)

Pri sudaru dvaju tela udar se naziva *upravni i centralni* kada zajednička normala na površine tela u tački dodira prolazi kroz njihova središta masa i kada brzine središta masa u početku udara imaju pravac te zajedničke normale. Takav će, npr., biti sudar dveju homogenih kugli, čija se središta pre udara kreću duž jedne iste prave.

Označimo mase tela koja se sudaraju sa M_1 i M_2 , brzine njihovih središta masa u početku sudara sa v_1 i v_2 , a na kraju sudara sa v'_1 i v'_2 . Povucimo kroz središta masa C_1 i C_2 koordinatnu osu C_1x , usmerenu *uvek* od C_1 ka C_2 (sl. 372). Tada, da bi nastao sudar, treba da bude $v_{1x} > v_{2x}$ (jer prvo telo u protivnom slučaju ne bi stiglo drugo telo); osim toga biće i $v'_{1x} \leq v'_{2x}$, jer telo koje udara ne može da prestigne telo koje je udareno.

Smatrajući M_1 , M_2 , v_{1x} , v_{2x} i k poznatim veličinama potražimo v'_1 i v'_2 , i u tu svrhu primenimo zakon o promeni količine kretanja na sistem koji se sastoji od dva tela koja se sudaraju. Tada će udarne sile, koje deluju između tela, biti unutrašnje, tj. neće biti spoljašnjih udarnih sila, pa je $\Sigma \mathbf{I}_{ud} = 0$. Korišćenjem jednačine (79) u konačnom rezultatu dobićemo da je $K_{1x} = K_{2x}$, odnosno, da je

$$M_1 v'_{1x} + M_2 v'_{2x} = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}. \quad (83)$$



Sl. 372

Drugu jednačinu odredićemo iz izraza za koeficijent uspostavljanja. Pri sudaru dva tela intenzitet udara (impuls udarnih sila) ne zavisi od apsolutnih veličina brzina svakog od tela, već od viška brzine, kojim raspolaže telo koje udara, prema telu koje je udareno, tj. od razlike $v_{1x} - v_{2x}$. Prema tome, pri udaru dvaju tela, imajući u vidu da je uvek $v_{1x} < v_{2x}$, a $v'_{1x} \leq v'_{2x}$, dobićemo:

$$k = \frac{|v'_{1x} - v'_{2x}|}{|v_{1x} - v_{2x}|} = - \frac{v'_{1x} - v'_{2x}}{v_{1x} - v_{2x}}, \quad (84)$$

ili

$$v'_{1x} - v'_{2x} = -k(v_{1x} - v_{2x}). \quad (84')$$

Sistem jednačina (83), (84) omogućuje da rešimo postavljeni zadatak. Impuls udarnih sila, koji deluje na tela koja se sudaraju, odredićemo, ako postavimo jednačine (79) za jedno od dva tela, na primer za prvo telo. Tada je

$$\mathbf{I}_{1x} = M_1(v'_{1x} - v_{1x}), \quad \mathbf{I}_{2x} = -\mathbf{I}_{1x}. \quad (85)$$

Razmotrimo dva granična slučaja.

a) Apsolutno neelastičan (plastičan) sudar ($k=0$). U tom slučaju iz jednačina (84) i (83) nalazimo:

$$v'_{1x} = v'_{2x} = \frac{M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}}{M_1 + M_2} \quad (86)$$

Oba tela posle sudara kreću se istom brzinom. Impuls udarnih sila koji deluje na tela tom prilikom je jednak

$$I_{2x} = -I_{1x} = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

b) Apsolutno elastičan sudar ($k=1$). U ovom slučaju iz jednačine (83) i (84) proizlazi:

$$v_{1x} = v_{1x} - \frac{2 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}), \quad (87)$$

$$v'_{2x} = v_{2x} + \frac{2 M_1}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

Impuls udarnih sila koji deluje na tela tom prilikom je jednak

$$I_{2x} = -I_{1x} = \frac{2 M_1 M_2}{M_1 + M_2} (v_{1x} - v_{2x}).$$

Kao što vidimo, pri apsolutno elastičnom sudaru impuls udarnih sila dva puta je veća od impulsa sila pri apsolutno neelastičnom (plastičnom) sudaru.

U posebnom slučaju kada je $M_1 = M_2$, iz jednačina (87) dobijamo da je $v'_{1x} = v_{2x}$, $v'_{2x} = v_{1x}$; prema tome, dva tela sa jednakim masama pri apsolutno elastičnom sudaru razmeniče uzajamno brzine.

Zadatak 168. Dve kugle masa M_1 i M_2 obešene su tako kako je pokazano na sl. 373. Prva kugla postavi se tako da u početnom trenutku zaklapa ugao α sa vertikalom i zatim pusti bez početne brzine. Posle sudara druga kugla se odbije do položaja u kome konac gradi ugao β prema vertikal. Odrediti koeficijent uspostavljanja za kugle pri ovom sudaru.

Rešenje. Na osnovu datih podataka može se odrediti brzina v_1 središta prve kugle na početku sudara i brzina v_2 središta druge kugle na kraju sudara. Korišćenjem zakona o priraštaju kinetičke energije na pomeranju $B_0 B_1$ dobićemo za prvu kuglu

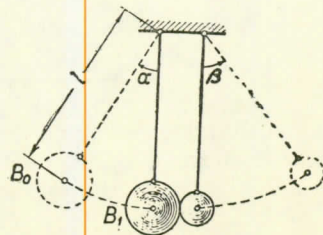
$$\frac{1}{2} M_1 v_1^2 = G_1 h = M_1 g l (1 - \cos \alpha),$$

gde je l — rastojanje središta kugle od tačke vešanja. Odavde je

$$v_1 = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \sqrt{gl}.$$

Analognim putem nalazimo da je

$$v_2 = 2 \sin \frac{\beta}{2} \sqrt{gl}.$$



Sl. 373

Pošto je u našem slučaju $v_2 = 0$, jednačine (83) i (84) daju:

$$M_1 v'_{1x} + M_2 v'_{2x} = M_1 v_{1x}, \quad v'_{2x} - v'_{1x} = k v_{1x}.$$

Ako iz ovih jednačina eliminišemo v'_{1x} i uzmemo u obzir da je $v_{1x} = v_1$ i $v'_{2x} = v'_2$, dobićemo:

$$M_1 v_1 (1 + k) = (M_1 + M_2) v'_2.$$

Odavde nalazimo da je

$$k = \frac{(M_1 + M_2) v'_2}{M_1 v_1} - 1 = \frac{(M_1 + M_2) \sin \frac{\beta}{2}}{M_1 \sin \frac{\alpha}{2}} - 1.$$

§ 173. Gubitak kinetike energije pri apsolutno neelastičnom (plastičnom) sudaru dvaju tela. Teorema Karno

Iz rasuđivanja navedenih u § 170 proizlazi da pri neelastičnom sudaru nastaje gubitak kinetičke energije tela koja se sudaraju. Najveću veličinu taj gubitak ima pri apsolutno neelastičnom udaru. Odredimo veličinu gubitka kinetičke energije sistema pri apsolutno neelastičnom sudaru dvaju tela.

Neka se tela koja se sudaraju kreću translatorno. Ako označimo sa $\vec{v}'$ njihovu zajedničku brzinu posle apsolutno neelastičnog sudara, dobićemo da je kinetička energija sistema na početku i na kraju sudara određena izrazima:

$$E_{k0} = \frac{1}{2} (M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2), \quad E_{k1} = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v_x'^2. \quad (88)$$

Gubitak kinetičke energije pri sudaru biće jednak $E_{k0} - E_{k1}$. Prikažimo tu razliku u obliku

$$E_{k0} - E_{k1} = E_{k0} - 2E_{k1} + E_{k1}. \quad (89)$$

Kako iz formula (86) proizlazi da je

$$(M_1 + M_2) v_x' = M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x},$$

to je

$$2E_{k1} = (M_1 + M_2) v_x'^2 = (M_1 v_{1x} + M_2 v_{2x}) v_x'. \quad (90)$$

Ako u desnu stranu jednačine (89) umesto E_{k0} i E_{k1} unesemo njihove vrednosti iz formula (88), a umesto $2E_{k1}$ desnu stranu izraza (90) dobićemo:

$$E_{k0} - E_{k1} = \frac{1}{2} (M_1 v_{1x}^2 + M_2 v_{2x}^2 - 2M_1 v_{1x} v_x' - 2M_2 v_{2x} v_x' + M_1 v_x'^2 + M_2 v_x'^2),$$

odnosno

$$E_{k0} - E_{k1} = \frac{1}{2} M_1 (v_{1x} - v_x')^2 + \frac{1}{2} M_2 (v_{2x} - v_x')^2. \quad (91)$$

Razlike brzina $(v_{1x} - v_x')$ i $(v_{2x} - v_x')$ pokazuju za koliko se smanjuje pri sudaru brzina svakog od dvaju tela koja se sudaraju. Njih možemo nazvati *izgubljenim brzinama usled sudara*. Tada iz formule (91) proizlazi sledeća teorema Karno: * gubitak kinetičke energije sistema tela pri apsolutno neelastičnom (plastičnom) sudaru

* Lazar Karno (1753 — 1823) istaknuti francuski naučnik (matematičar i mehaničar) i poznati javni radnik francuske buržoaske revolucije.

jednak je onoj kinetičkoj energiji tog sistema koju bi imao sistem ako bi se kretao izglavljenim brzinama.

Razmotrimo poseban slučaj udara pokretnog tela o prvobitno nepomično telo. U tom slučaju je $v_2 = 0$, te je

$$E_{k0} = \frac{1}{2} M_1 v_1^2, \quad v' = -\frac{M_1}{M_1 + M_2} v_1.$$

Tada je

$$E_{k1} = \frac{1}{2} (M_1 + M_2) v'^2 = \frac{1}{2} \frac{M_1^2}{M_1 + M_2} v_1^2 = \frac{M_1}{M_1 + M_2} \frac{1}{2} M_1 v_1^2,$$

odnosno

$$E_{k1} = \frac{M_1}{M_1 + M_2} E_{k0} \quad (92)$$

Formula (92) pokazuje kolika je energija koja ostaje u sistemu posle udara. Razmotrimo dva interesantna granična slučaja.

a) Masa tela koje udara mnogo je veća od mase tela koje je udareno ($M_1 \gg M_2$). U tom slučaju može se smatrati da je $M_1 + M_2 \approx M_1$ i formula (92) daje $E_{k1} \approx E_{k0}$. Prema tome, iako je u ovom slučaju udar apsolutno neelastičan (plastičan), ipak pri udaru uopšte ne dolazi do gubitka kinetičke energije i sistem posle udara počinje da se kreće istom kinetičkom energijom koju je imao u početku udara.

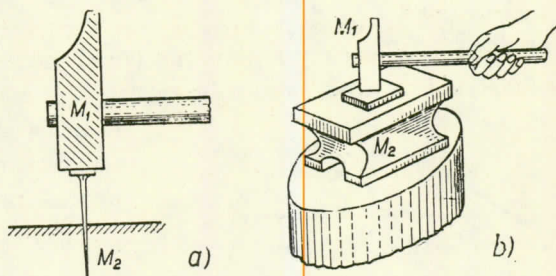
U praksi ovaj slučaj nastaje, na primer, pri zabijanju eksera i sl. Prema tome, u ovom slučaju je potrebno da masa čekića bude mnogo veća da mase eksera (374, a).

b) Masa tela koje se udara je mnogo veća od mase tela koje udara ($M_2 \gg M_1$). U ovom slučaju možemo smatrati da je

$$\frac{M_1}{M_1 + M_2} \approx 0,$$

i formula (92) daje $E_{k1} \approx 0$. Prema tome, u ovom slučaju pri udaru skoro celokupna kinetička energija se troši na deformaciju tela koja se udaraju, tako da se može smatrati da su tela nepokretna po završetku udara.

Praktično, takav slučaj može se očekivati pri kovanju, zakivanju i slično. Prema tome, u ovom slučaju je potrebno da masa nakovnja bude mnogo veća od mase čekića (sl. 374, b).



Sl. 374

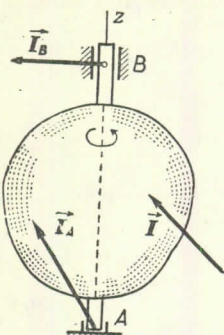
§ 174*. Udar po telu koje se obrće

Uočimo telo koje se obrće oko z ose (sl. 375). Neka u nekom trenutku vremena telu bude saopšten impuls $\vec{I}$ udarnih sila. Tada, na osnovu jednačine (81), biće

$$L_{1z} - L_{0z} = \Delta I = M_z \vec{I},$$

jer će momenti impulsnih reakcija $\vec{I}_A$ i $\vec{I}_B$ za osu z , koje nastaju u ležištima, biti

jednaki nuli. Ako u početku udara telo ima ugaonu brzinu ω_0 , a na kraju udara ω_1 , onda je $L_{0z} = J_z \omega_0$ i $L_{1z} = J_z \omega_1$, tako da konačno dobijamo:



Sl. 375

ili

$$J_z (\omega_1 - \omega_0) = M \vec{I}_z, \quad (93)$$

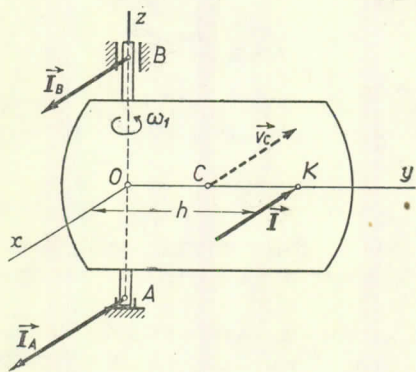
$$\omega_1 = \omega_0 + \frac{M \vec{I}_z}{J_z}. \quad (93')$$

Formula (93) određuje promenu ugaone brzine tela pri udaru. Iz nje proizlazi da se ugaona brzina tela za vreme udara promeni za veličinu jednaku količniku momenta impulsa udarnih sila i momenta inercije tela za obrtnu osu.

Centar udara. Pri udaru u tačkama u kojima je telo pričvršćeno za obrtnu osu nastaju impulsne reakcije, koje mogu doprineti ubrzanom abanju ležišta, pa čak u izvesnim slučajevima mogu i da ih razore. Potražimo uslove koje treba da zadovolji udar po telu, pričvršćenom za obrtnu osu, da ne bi izazvao impulsne pritiske u ležištima.

Za ovo je, pre svega, potrebno da masa tela bude dinamički uravnotežena u odnosu na ravan, u kojoj deluje udar, tj. ta ravan treba da bude, npr., ravan simetrije tela.*

Neka telo ima ravan simetrije Oxy i neka je pričvršćeno ležištima A i B za osu AB , koja je upravna na toj ravni (sl. 376). Povucimo osu Oy kroz središte masa C tela i označimo rastojanje $\overline{OC} = a$.



Sl. 376

Smatraćemo da je telo u početku udara nepomično ($\omega_0 = 0$), što ne utiče na konačan rezultat. Neka se impuls $\vec{I}$ spoljašnjih sila nalazi u ravni simetrije tela. Dejstvo tog impulsa na telo izaziva u ležištima impulsne reakcije $\vec{I}_A$ i $\vec{I}_B$. Tada na osnovu jednačine (78) biće

$$\vec{K}_1 - \vec{K}_0 = \Delta \vec{K} = \vec{I} + \vec{I}_A + \vec{I}_B. \quad (94)$$

U našem slučaju je $\vec{K}_0 = 0$, $\vec{K}_1 = M \vec{v}_C'$, gde je $\vec{v}_C'$ — brzina središta masa C tela na kraju udara. Tada se iz jednačine (94) vidi da uslov $\vec{I}_A = \vec{I}_B = 0$ može biti ispunjen, ako je $\vec{I} = M \vec{v}_C'$.

* Radi uprošćenja posmatra se slučaj kada telo ima ravan simetrije Oxy , koja je upravna na osi z . Međutim, svi rezultati koje ćemo dobiti, važe i u slučaju kada telo nije simetrično, ali kada udar deluje u ravni Oxy , koja prolazi kroz tačku O , za koju je osa z glavna osa inercije tela.

Oдавде најпре произлази да импулс $\vec{I}$ треба да буде паралелan brzini $\vec{v}_C$, tj. треба да bude upravan na pravac OC (na osi Oy). Osim toga, iz jednakosti vektora proizlazi i jednakost njihovih intenziteta; prema tome, treba da bude:

$$I = Mv'_C = Ma\omega_1.$$

Međutim, veličina ω_1 za osnovu jednačine (93), iznosi

$$\omega_1 = \frac{M_z^I}{J_z} = \frac{Ih}{J_z}.$$

Ako unesemo ovu veličinu u prethodnu jednačinu, dobićemo:

$$h = \frac{J_z}{Ma}. \quad (95)$$

Formula (95) određuje rastojanje h od ose, na kome treba da deluje impuls udarnih sila.

Prema tome, da ne bi nastale impulsne reakcije pri udaru po telu koje je pričvršćeno za osu z , oko koje se telo obrće, treba da budu ispunjeni sledeći uslovi:

1. udar treba da deluje u ravni Oxy , koja je normalna na osi z , i koja je ravan simetrije tela (ili, osa z treba da bude glavna osa inercije tela za tačku O u kojoj ona prodire kroz ravan dejstva impulsa);

2. udar treba da bude upravan na ravni, koja prolazi kroz obrtnu osu Az i središte masa C tela;

3. impuls udarnih sila treba da deluje na rastojanju $h = \frac{J_z}{Ma}$ od obrtne ose (na onu stranu od ose gde se nalazi središte masa).

Tačka K , kroz koju prolazi impuls udarnih sila, koji ne izaziva reakcije u ležištima tela pričvršćenog za obrtnu osu, zove se *centar udara*.

Primitimo, da na osnovu jednačine (95) proizlazi da se centar udara poklapa sa centrom oscilacija fizičkog klatna. Prema tome, kako je bilo pokazano u § 154, $h > a$, tj. rastojanje centra udara od obrtne ose je veće nego li rastojanje središta masa od ose. Ako obrtna osa prolazi kroz središte masa tela, onda je $a = 0$, i tada izlazi da je $h = \infty$. U tom slučaju ne postoji centar udara na konačnom rastojanju, tako da će se svaki udar po telu prenети i na obrtnu osu.

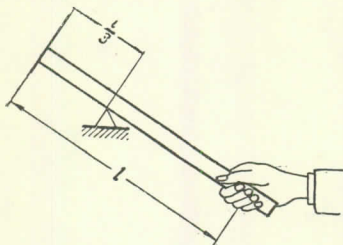
Kada udar, koji deluje u ravni simetrije Oxy , ne prolazi kroz centar udara, u ležištima se pojavljuju impulsne reakcije $\vec{I}_A$ i $\vec{I}_B$. Ako su ležišta simetrično postavljena biće $I_A = I_B$ i ove veličine mogu se odreditи iz jednačina (94).

Primenu dobijenih rezultata ilustrovaćemo sledećim primerima:

1) Pri konstruisanju obrtnog oroza (zadatak 169.), ili pribora koji ima oblik klatna, a služi za ispitivanje materijala na udar, i slično, treba postaviti obrtnu osu tako, da tačka tela, koja udara, bude centar udara za obrtnu osu.

2) Pri radu sa ručnim čekićem treba čekić uhvatiti za ručicu na takvom mestu, da tačka kojom se udara bude centar udara za ruku. U protivnom slučaju ruka će se vrlo jako uzdrmati (osetiti udarac).

3) Pri udaru palicom, da se ruka ne bi »uzdrimala« (sl. 377), treba udariti onim mestom palice, koje će za ruku biti centar udara. Ako palicu smatramo homogenim štapom dužine l , i ako se obrtna osa poklapa sa njegovim krajem, onda je $a = \frac{1}{2}l$, $J_z = \frac{1}{3}Ml^2$ i $h = \frac{J_z}{Ma} = \frac{2}{3}l$.



Sl. 377

Prema tome, u slučaju prikazanom na sl. 377, treba udariti onom tačkom palice, koja se nalazi na rastojanju $\frac{2}{3}l$ od ruke, ili na rastojanju $\frac{1}{3}l$ od drugog kraja palice.

Zadatak 169. Obrtni oroz (na puški) AD u trenutku udara po obaraču B (sl. 378) ima ugaonu brzinu obrtanja ω_0 . Odrediti brzinu obarača na kraju udara i impulsni pritisak na osu A . Mase M i m oroza i obarača, moment inercije J_A oroza za osu A i rastojanja a i b su poznata (tačka C — je središte masa oroza).

Rešenje. Označimo impulse udarnih sila koji deluju na oroz i obarač pri udaru sa $\vec{I}_1$ i $\vec{I}_2$. Tada za oroz [prema jednačini (93)] i za obarač [prema jednačini (79)], uzimajući u obzir da je $\vec{I}_1 = \vec{I}_2 = \vec{I}$, a $v_B = 0$, dobijamo:

$$J_A(\omega_1 - \omega_0) = -Ib \quad mv'_B = I \quad (a)$$

Moment Ib ima znak minus iz razloga što je ovaj moment usmeren suprotno od smera obrtanja oroza. Osim toga, kako je za tačku D oroza $v_D = b\omega_0$, a $v'_D = b\omega_1$ (v_D — je brzina na početku udara, v'_D — brzina na kraju udara), to prema formuli (84), kojom se određuje koeficijent uspostavljanja pri upravnom udaru dvaju tela, dobijamo:

$$v'_D - v_B = -k(v_D - v_B),$$

ili

$$b\omega_1 - v'_B = -kb\omega_0.$$

Ako unesemo u ovu jednačinu izraze za ω_1 i $\vec{I}$ iz jednačina (a), naćićemo brzinu obarača na kraju udara:

$$v'_B = \frac{J_A b(1+k)}{J_A + mb^2} \omega_0.$$

Da bismo odredili impulsnu reakciju $\vec{I}_A$ kojom osa deluje na oroz, postavimo jednačine (94) u obliku projekcija na ose Ax i Ay . Imajući u vidu da je

$$K_{0x} = Mv_{Cx} = Ma\omega_0, \quad K_{1x} = Mv'_{Cx} = Ma\omega_1,$$

dobijamo

$$Ma(\omega_1 - \omega_0) = -I + I_{Ax}, \quad I_{Ay} = 0. \quad (b)$$

Međutim, iz jednačina (a) proizlazi da je

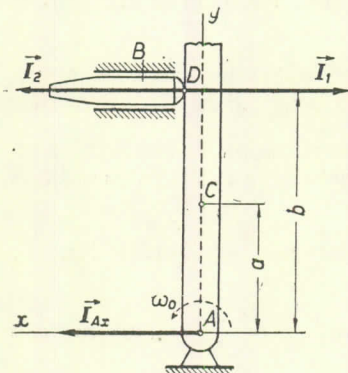
$$I = mv'_B, \quad \omega_1 - \omega_0 = -\frac{mb}{J_A} v'_B.$$

Ako ove izraze kao i izraz za brzinu v' smenimo u jednačini (b) dobićemo definitivno

$$I_{Ax} = -\frac{J_A - Mab}{J_A + mb^2} - mb(1+k)\omega_0.$$

Oдавde se vidi da kada je $b = \frac{J_A}{Ma}$, tj. kada je tačka D centar udara, biće $I_A = 0$.

Kada je $Mab < J_A$, izlazi da je $I_{Ax} > 0$, tj. da je impulsni pritisak na oroz usmeren — ulevo, a pritisak na osu — udesno. Ako je pak $Mab > J_A$ pritisak na osu biće usmeren ulevo.



Sl. 378

REGISTAR IMENA

Arhimed, 3
Aristotel, 2
Bernuli, J., 374
Ciolkovski, E. K., 4, 320
Čapljigin, S. A., 4
Čebišev, P. L., 4
D'alamber, Ž., 3, 258, 359
Galilej Galileo, 3, 214, 263
Hajgens, K., 304
Karno, L., 390
Koriolis G., 192, 264
Kovalevskaja S., 4

Krilov A. N., 4
Lagranž, Ž., 3, 374
Lomonosov, M. V., 3
Ljapunov, A. M., 4
Meščerski, I. V., 4, 319
Njutn, I., 3, 214
Ojler, L., 3
Ostrogradski, M. V., 3, 374
Poanson, L., 42
Stajner, J., 304
Varinjon, P., 36, 98
Žukovski, N. E., 4, 357

REGISTAR POJMOVA

A

afel, 253
 aksioma o, paralelogramu sila, 11
 —, vezama, 15
 aksiome statike, 10
 aktivna sila, 13
 amortizovane oscilacije, 276
 amplituda oscilacija, 124, 272
 analitički način definisanja kretanja tačke, 132
 analitički uslovi ravnoteže, 25, 36, 52, 97
 apsolutna, putanja, 185
 —, ravnoteža, 7
 apsolutni sistem jedinica, 216
 apsolutno, elastičan udar, 385, 389
 —, kretanje, 185
 —, neelastičan udar, 385, 389
 —, pomeranje, 186
 —, ubrzanje, 185, 191
 astronomska širina, 266

B

binormala, 254
 broj Ciolkovskog, 320
 brojčana vrednost vektora, 121
 brzina, 121, 160, 163
 —, cirkularna, 145
 —, dolazna (na početku udara), 383
 —, izgubljena, 391
 —, jednolikog obrtanja, 153
 —, kružna, 292
 —, linearna, 154
 —, na kraju aktivnog dela puta, 321
 —, obimna, 154
 —, odlazna (na kraju udara), 383
 —, orbitna, 292
 —, oslobađanja, 291
 —, parabolična, 291
 —, početna, 221, 294
 —, pri padanju u otpornoj sredini, 229
 —, priraštaj, 382

—, projekcija, 162
 —, radijalna, 145
 —, sektorska, 253
 —, slaganje, 185
 —, slobodnog padanja, 228, 229
 —, srednja, 121, 152
 —, tačke, 133
 —, translacije, 150
 —, trenutna ugaona, 180
 —, ugaona, 152
 —, u polarnim koordinatama, 144

C

centar, inercije (sistema), 300
 —, masa (sistema), 300
 —, oscilacija fizičkog klatna, 347
 —, oscilovanja, 124
 —, paralelnih sila, 107, 108
 —, udara, 392
 centralna sila, 252
 centrifugalna (normalna) sila inercije, 7, 260
 centrifugalni moment inercije, 368
 cilindrični zupčasti prenosnici, 203
 cirkularna brzina, 154

C

čigra, 354
 čvrsto telo, 8

D

Dalamberov princip, 258, 359
 data sila, 13
 dekrement, 279
 deformabilno telo, 8
 deformacija, 7
 diferencijalni prenosnik, 203
 dijagram, brzine, 124
 [brzina — vreme; (v , t)]

dijagram, kretanja, 124
 [pomeranje — vreme; (x, t)]
 —, Maksvela i Kremone, 74
 —, rastojanja, 124
 —, ubrzanja, 124
 [ubrzanje — vreme; (a, t)]
 dinama, 96
 dinamika, 2, 3, 213
 dinamički koeficijent trenja klizanja, 78
 dinamički neuravnotežene mase, 367
 dinamički (kinetički) pritisci, 365
 dinamički pritisci, 21
 dinamički zavrtnaj, 96
 dinamičko trenje, 78
 dinamičko uravnotežavanje masa, 367, 368
 direktni zadatak dinamike, 218
 dopunsko ubrzanje, 192
 drugi zadatak (problem) dinamike, 218
 drugi zakon dinamike, 215

DZ

džul, 240

E

elastična sila, 242
 elementarni, impuls, 236
 —, rad, 238, 239
 elisa, rad, 316
 —, reaktivni moment, 326
 eliptične putanje, 292
 eksperimentalno određivanje momenata inercije, 348, 352
 ekvivalentnost spregova, 43, 91
 energija, kinetička, 235, 243, 328—335
 —, mehanička, 343
 —, potencijalna, 341
 —, ukupna (totalna), 343

F

faza, 272
 —, početna, 272
 fizičko klatno, 346, 348
 —, redukovana dužina, 347
 fizički sistem jedinica, 216
 frekvencija oscilacija (oscilovanja), 273
 formula, Ciolkovskog, 320
 —, Galileja, 247
 funkcija sila, 342

G

Galilejev obrazac (formula), 247
 geocentrična širina, 266
 glatka površina, 13
 glavna normala, 148
 glavne centralne ose inercije, 368
 glavne ose inercije, 368
 glavni moment, 49, 94
 glavni vektor sila inercije, 360
 glavni moment sila inercije, 306
 glavni vektor, 49, 94
 grafička metoda izračunavanja rada, 240

grafički uslovi ravnoteže, 25
 —, proizvoljnog ravnog sistema sila, 71
 grafičko, ispitivanja kretanja tačke, 145
 —, određivanje rezultante, 69
 —, određivanje rezultujućeg sprega, 70
 —, određivanje sila u štapovima rešetke, 72
 —, svodenje ravnog sistema sila na dve sile, 68
 grafostatika, 68
 granična, sila trenja, 76
 —, vrednost brzine pri padanju tela u otpornoj sredini, 229
 granično trenje, 77
 gravitacija (težina), 10, 266
 gubitak kinetičke energije pri udaru, 390

H

Hajgensova teorema, 304
 harmonijsko kretanje, 124
 harmonijske oscilacije, 272
 hod zavojnice, 135
 hod zavrtnja, 208
 homogeno polje sile teže, 109
 hrapave veze, 78

I

idealne veze, 372
 inercija, 213
 inercijalni koordinatni sistem, 215, 263
 inertnost, 213
 intenzitet vektora, 121
 inverzni zadatak dinamike, 218
 izračunavanje rada, 241

J

jednačina, kretanja tačke promenljive mase, 319
 —, Meščerskog, 309
 —, obrtnog kretanja krutog tela, 344
 —, pravolinijskog kretanja materijalne tačke, 220
 —, prinudnih oscilacija bez otporne sile, 280
 —, prinudnih oscilacija sa otpornom silom, 281
 —, prigušenih oscilacija, 277
 —, slobodnih harmonijskih oscilacija, 272
 jednačine kretanja, sistema materijalnih tačaka, 306
 —, tačke po nepomičnoj krivoj, 254
 jednačine, krivolinijskog kretanja tačke, 158
 —, momentne, 36
 —, ravnog kretanja (kinematičke), 158
 —, ravnog kretanja krutog tela (dinamičke), 349
 —, relativnog kretanja i relativnog mirovanja tačke, 262
 jednoliko, kretanje, 122
 —, krivolinijsko kretanje, 140
 —, obrtanje, 151

jednoliko, pravolinijsko kretanje, 140
 —, promenljivo kretanje, 141
 —, promenljivo obrtanje, 152
 —, ubrzano kretanje, 122
 —, usporeno kretanje, 122

K

karakteristika opruge, 242
 Karnoova teorema, 390
 Keplerovi zakoni, 253
 kilogram, 217
 kilopond, 217
 kilopondmetar, 240
 kilovat-čas, 241
 kinematika, 2, 119
 kinetička energija, tačke, 235
 —, sistem materijalnih tačaka, 329—332
 kinetički (dinamički) pritisci, 365
 kinetičko trenje, 78
 klasična mehanika, 3
 klatno, matematičko, 275
 —, fizičko, 346, 348
 klizeći vektor, 10
 koeficijent, prigušenja, 278
 —, restitucije, 385
 —, uspostavljanja, 385
 koeficijent trenja, klizanja 76
 —, kotrljanja, 83
 —, obrtanja (vrćenja), 84
 količina kretanja, tačke, 235
 —, sistema materijalnih tačaka, 313
 komponenta, 23
 koncentrisana sila, 9
 kontinualno rasporedene sile, 9, 64
 konzervativna sila, 242, 341
 konjska snaga, 241
 koordinate težišta, 109—115
 koordinantni sistem referencije, 119
 —, inercijalni, 215, 263
 —, nepokretni, 184, 215
 —, pokretni, 184
 korak zavojnice, 135, 208
 koriolisova sila inercije, 263
 Koriolisova teorema, 192
 koriolisovo ubrzanje, 192, 194
 kos hitac, 232
 kos udar, 386, 387
 krak, momenta, 34
 —, sprega, 42
 —, trenja kotrljanja, 83
 Kremonin plan sila, 74
 kretanje, 1, 119
 —, analitičko definisanje, 132
 —, apsolutno, 185
 —, centra inercije, 307—310
 —, grafičko prikazivanje, 145
 —, harmonijsko, 124
 —, jednako ubrzano, 124
 —, jednako usporeno, 124
 —, jednoliko, 123
 —, jednoliko krivolinijsko, 140
 —, jednoliko pravolinijsko, 140
 —, jednoliko promenljivo pravolinijsko, 123

—, jednoliko promenljivo krivolinijsko, 141
 —, koordinantni način definisanja, 132
 —, krivolinijsko, 128, 140, 230
 —, neslobodno, 218, 254, 349
 —, obrtno, 151, 344
 —, opšte, 182
 —, oscilatorno, 271
 —, pravolinijsko, 119—124, 140, 220
 —, prenosno, 184, 195
 —, po inerciji, 25, 214
 —, prinudno, 218, 254, 349
 —, prirodni način definisanja, 137
 —, projektila, 232
 —, prosto harmonijsko, 124
 —, ravno, 158, 182, 194, 348
 —, reaktivno, 316
 —, relativno, 184, 262, 266
 —, rezultujuće, 184, 200, 207
 —, slobodno harmonijsko, 271
 —, složeno, 185, 200
 —, tačke promenljive mase, 319
 —, tela koje ima nepomičnu tačku, 179
 —, ubrzano, 122
 —, usporeno, 122
 —, vezano, 218, 254, 349
 —, vektorski način definisanja, 128
 —, zakon, 120
 krivolinijsko kretanje, 128, 230
 krutost opruge, 242
 kruto telo, 7, 8
 kružna frekvencija oscilacija (oscilovanja)
 273
 kvantna mehanika, 3

L

labilna ravnoteža, 106
 linearna brzina, 154
 linija putanje, 173
 logaritamski dekrement, 279

M

Maksvelov dijagram, 74
 masa, 214, 215
 materijalna tačka, 214
 matematičko klatno, 275
 međukontinentalna raketa, 293
 mehanička energija, 343
 mehanički sistem, 299
 mehaničko kretanje, 1
 mehaničko međudejstvo, 1
 mehanika, klasična, 1, 3
 —, kvantna, 3
 —, relativistička, 3
 metar, 9
 metoda preseka, 75
 mirovanje, 119
 modul vektora, 121
 moguće pomeranje, 371
 moment, glavni, 49, 94
 —, inercije, 301, 348, 352
 —, žiroskopski, 357

moment, napadni, 335, 344
 —, obrtni, 335, 344
 —, savijanja, 50
 —, sile, 34, 35, 85
 —, sprega, 42, 90
 —, vektorski izraz za, 86
 momentne jednačine, 36, 53

N

napadni moment, 50
 nekonzervativna sila, 341, 343
 nepokretni koordinatni sistem referencije,
 119, 215
 neprigušene oscilacije, 283
 neprigušene prinudne oscilacije, 280
 neslobodno telo, 13
 nepromenljivi sistem, 334
 normalna sila inercije, 260
 normalna težina, 217
 normalno ubrzanje, 138, 141
 multi štap, 75

NJ

njihanje ljuljaške, 326
 njutn, 217
 njutnmetar, 240

O

običan prenosnik, 203
 obimna brzina, 154, 215
 obimna sila, 46
 obrnuti zadatak dinamike, 218
 obrtanje, 151, 344
 —, jednoliko, 152
 —, jednoliko promenljivo, 153
 —, slaganje, 201
 —, rezultujuće, 206
 —, zrna u pušanoj cevi, 326
 obrtna osa, 151
 —, trenutna, 165, 180, 201
 obrtni moment, 309, 344
 —, ugao, 151
 —, sistemi, 325
 održanje, količine kretanja, 315
 —, kretanja centra masa (inercije) siste-
 ma, 307
 —, mehaničke energije, 349
 —, zamaha, 324
 odnos frekvencija, 284
 Ojler-Dalamberova teorema, 179
 osa inercije, glavna, 368
 —, glavna centrala, 362
 osa zavrtnja, 208
 oskulatorna ravan, 131
 oscilacije (oscilovanje), 271
 —, amortizovane, 276
 —, amplituda, 124, 272
 —, centar, 124
 —, faza, 272
 —, frekvencija, 276
 —, harmonijske, 272

—, kružna frekvencija, 273
 —, neprigušene, 280
 —, parametarske, 326
 —, period, 124, 273, 278
 —, početna faza, 273
 —, prigušene, 276
 —, prigušene — prinudne, 281
 —, prinudne — neprigušene, 279
 —, slobodne, 272
 —, ugaona frekvencija, 273
 —, ustaljene — prinudne, 283
 osnovna jednačina teorije udara, 382
 osnovni zadatak, dinamike, 218
 —, kinematike, 120
 osnovni zakoni dinamike, 214
 opruga, 242
 opšti zakoni dinamike, tačke, 235
 —, sistema materijalnih tačaka, 307
 opšti zakoni teorije udara, 383
 opšta jednačina dinamike, 378
 opšta jednačina statike, 374

P

padanje tela u otpornoj sredini, 228
 parabolična brzina, 291
 paralelne sile, 39, 98, 107
 —, centar (središte), 107, 108
 —, ravnoteža, 98
 —, razlaganje, 41
 —, rezultanta, 39, 40, 107
 —, slaganje, 39, 40
 —, središte, 107, 108
 paralelepiped sila, 17
 paralelogram, brzina, 186
 —, sila, 17
 —, ubrzanja, 192
 parametarske oscilacije, 326
 perihel, 253
 period oscilacija (oscilovanja), 124, 273, 278
 period kompresije, 385
 period restitucije, 385
 periodična sila, 279
 perturbaciona sila, 279
 plan, brzina 169
 —, sila, 68
 —, ubrzanja, 175
 planetarni prenosnik, 203
 plastičan udar, 385, 389
 platforma Zukovskog, 325
 početna brzina, 221
 —, faza, 273
 početni, položaj, 221
 —, trenutak vremena, 221
 —, uslovi kretanja, 221
 početno, kinematičko stanje, 221
 —, pomeranje, 221
 pokretni koordinatni sistem referencije, 184
 pol, brzina, 162
 —, ubrzanja, 176
 polarne koordinate, 144
 poluprečnik, inercije, 302
 —, krivine, 138
 poligon, Kremonin (Kremonin plan sila),
 74

- poligon, sila, 18, 68
 —, vektorski, 18
 —, verižni, 68, 69
 polje sile, 341
 pomeranje, apsolutno, 186
 —, moguće, 371
 —, početno, 221
 —, relativno, 186
 —, virtualno, 371
 poremećajna sila, 279
 postulati statike, 10
 potencijalna, energija, 341,
 —, sila, 242, 341
 pravila o, paralelopipedu sila, 17
 —, paralelogramu sila, 11
 pravilo Žukovskog, 357
 pravolinijsko kretanje, 119—124, 140, 220
 precesija, 356
 prenosna, brzina, 185
 —, sila inercije, 261
 prenosni broj zupčastog prenosnika, 203
 prenosnik, obični, 203
 —, diferencijalni, 203
 —, planetarni, 203
 prenosno, kretanje, 184, 195
 —, ubrzanje, 185
 prigušene oscilacije, 276
 —, period, 278
 princip, D'alambertov, 254, 359
 —, mogućih pomeranja, 378
 —, relativnosti klasične mehanike, 263
 —, solidifikacije, 12
 —, virtualnih pomeranja, 379
 —, ukrućivanja, 12
 principi statike, 10
 priraštaj, kinetičke energije, 243, 264, 334
 —, količine kretanja, 237, 314
 —, zamaha, 250, 323
 prirodni način definisanja kretanja, 137
 prinudno kretanje, 218, 244, 267
 prinudne oscilacije, 279, 285, 326
 prinudne oscilacije sa otpornom silom, 281
 pritisak, 13
 pritisak na vezu, 13
 projekcija, izvoda vektora, 131
 —, sila, 21
 promena, kinetičke energije, 243, 264, 334
 —, količine kretanja, 237, 314
 —, zamaha, 250, 323
 promenljiva, masa, 318
 —, sila, 213
 —, vektor, 128
 propeler, 316, 326
 propulzija elise, 316
 prosto harmonijsko kretanje, 124
 prostor, 119
 prostorni sistem sila, 100
 protivdeystvo veze, 13
 prvi, zakon dinamike, 214
 —, zadatak dinamike, 218
 putanja, apsolutna, 185
 —, eliptična, 292
 —, relativna, 184
 —, tačke, 133
 putanje tačaka tela pri ravnom kretanju te-
 la, 160
 R
 rad, 238, 335, 373
 —, konzervativne sile, 342
 —, elastične sile, 242
 —, sila, 238
 —, sila teže, 241, 335
 —, sila trenja, 243
 radijalna brzina, 154
 raketa, 319
 ravna rešetka, 72
 ravno kretanje, 158, 182, 194, 348
 ravnoteža, analitički uslovi, 25, 36, 52, 97
 —, apsolutna, 7
 —, grafički uslovi, 25, 71
 —, indiferentna, 106
 —, labilna, 106
 —, neslobodnog tela, 105
 —, neutralna, 106
 —, paralelnih sila, 54, 98
 —, prostornog sistema sila, 97
 —, ravnog sistema sila, 52, 53
 —, relativna, 7, 263
 —, sistema krutih tela, 60
 —, spregova, 45, 107
 —, stabilna, 106
 —, uslovi, 8
 reakcija hrapave veze, 78
 —, nosača, 55
 —, oslonca, 55, 71
 —, veze, 13, 55
 —, veze sa trenjem, 78
 reakcije oslonca, grafičko određivanje, 71
 reakcije veza, određivanje, 256
 reaktivna sila, 320
 reaktivni efekat, 320
 —, moment, 326
 reaktivno, kretanje, 316
 —, trzanje puške, 316
 redukcija sistema sila, 48, 50, 93, 95
 redukciona tačka, 48
 relativna, brzina, 184
 —, putanja, 186
 —, ravnoteža, 7, 264
 relativno, kretanje, 184, 262, 266
 —, mirovanje, 266
 —, pomeranje, 185
 —, ubrzanje, 185, 191
 restituciona sila, 271
 rešetka, 72
 rezonanca, 281, 285
 rezultanta, 9
 rezultanta paralelnih sila, 38, 39, 107
 rezultujuće kretanje, 184, 200, 207
 rezultujuće obrtanje, 206
 S
 sekunda, 119
 sektorska brzina, 253
 sila, 1, 8, 213

- sila, aktivna, 13
 —, analitičko definisanje, 22
 —, centralna 252
 —, centrifugalna (normalna) inercijalna, 260
 —, data, 13
 —, granična trenja, 77
 —, elastična, 242
 —, inercijalna, 258—260, 359
 —, komponenta, 23
 —, koncentrisana, 9
 —, koriolisova inercijalna, 264
 —, konzervativna, 242, 341
 —, moment, 34, 85, 87
 —, nekonzervativna, 341, 343
 —, normalna inercijalna, 260
 —, obimna, 46
 —, otpora, 281
 —, periodična, 279
 —, perturbaciona, 279
 —, polje, 341
 —, polje teže, 266
 —, poremećajna, 279
 —, potencijalna, 242, 341
 —, prenosna inercijalna, 263
 —, projekcija, 21
 —, promenljiva, 213
 —, rad, 238
 —, razlaganje, 18
 —, reaktivna, 320
 —, redukcija, 48, 50, 93, 95
 —, restituciona, 242, 271
 —, slaganje, 16, 17, 23
 —, spoljašnja, 9, 12, 299
 —, svodenje, 48, 50, 93, 95
 —, tangencijalna inercijalna, 260
 —, trenutna, 382
 —, trenja, 243
 —, udarna, 382
 —, unutrašnja, 9, 12, 299
 —, uspostavljanja, 271
 sistem, jedinica, 216
 —, sila, 9
 skalar, 8
 slaganje, brzina, 185
 —, obrtanja, 200, 206
 —, sila, 16, 17, 23
 —, spregova, 45, 91
 —, translacije i rotacije, 207
 —, ubrzanja, 189, 192
 slobodan vektor, 90
 slobodne oscilacije, 272
 slobodni žiroskop, 341
 slobodno harmonijsko kretanje, 271
 —, padanje, 109, 215, 228, 279
 —, telo, 9, 13
 složeno kretanje, 184, 200
 snaga, 241, 336
 sopstvene oscilacije, 280
 specifično opterećenje, 64
 spoljašnje, veze, 60
 —, sile, 9, 299
 spreg, kinematički, 202
 —, ekvivalentni, 43, 91
 —, obrtanja, 202
 —, sila, 41
 —, slaganje, 45, 91
 —, žiroskopski 357
 sputnjik, 292
 središte, masa (sistema), 300, 307—310
 —, paralelnih sila, 107, 108
 srednja, brzina, 129
 —, ugaona brzina, 152
 srednje ubrzanje, 122, 152
 —, ugaono ubrzanje, 152
 stabilnost ravnoteže, 105
 statički, koeficijent trenja klizanja, 76
 —, neodređeni sistemi, 27
 —, određeni sistemi, 27
 —, pritisci, 21
 —, ugib, 248, 274
 statičko, izduženje, 274
 —, trenje, 76, 77
 statika, 2, 7
 stepen slobode kretanja, 371, 374
 svodenje sistema sila, 48, 50, 93, 95
 sučeljne sile, 16
 sudar dveju kugli 388
- S**
- širina, astronomska, 266
 —, geocentrična, 266
 Štajnerova teorema, 304
- T**
- tačka, 214
 —, brzina, 129
 —, kretanje, 142, 151, 156
 —, putanja, 133
 —, slobodno padanje, 267
 —, trajektorija, 133
 —, ubrzanje, 134
 talasni metar, 9
 tangencijalna sila inercije, 260
 tangencijalno ubrzanje, 138, 140
 tehnički sistem jedinica, 216
 telo, čvrsto, 8
 —, kruto, 7, 8
 —, neslobodno, 13
 —, oslobođeno od veza, 28
 —, slobodno, 13
 —, vezano 13
 teorema, Hajgensova, 304
 —, Karnoova, 390
 —, Koriolisova, 192
 —, Ojler-Dalamberova, 179
 —, Štajnerova, 304
 —, Varinjonova, 36, 98
 teorema o paralelnom prenošenju sile, 47
 —, projekcijama brzina, 162
 —, redukciji sile na tačku, 47
 —, slaganju ubrzanja, 189
 —, tri sile, 26
 teorija relativiteta, 3
 teorijska mehanika, 1
 težina, 10, 109, 267
 težište, 107—115

težište, homogenog tela, 110
 —, krutog tela, 109
 trajektorija tačke, 133
 translacija, 149, 207
 treći zakon dinamike, 216
 trenje, 43
 —, dinamičko, 78
 —, granično, 77
 —, kinetičko, 78
 —, klizanja, 76
 —, koeficijent pri klizanju, 76
 —, koeficijent pri kotrljanju, 83
 —, koeficijent pri obrtanju (vrćenju), 84
 —, konopca, 81
 —, kotrljanja, 83
 —, rad sile, 243
 —, statičko, 76, 77
 —, ugao, 78
 —, užeta, 81
 —, vrćenja (obrtanja), 84
 trenutna, brzina, 121
 —, obrtna osa, 165, 180, 201
 —, translacija, 165, 202
 —, ugaona brzina, 180
 —, zavojna osa, 209
 trenutni pol, brzina, 162
 —, ubrzanja, 176
 trenutno, ubrzanje, 130
 —, translatorno kretanje, 165, 202
 trougao sila, 16

U

ubrzanje, 122, 123,
 —, apsolutno, 185, 191
 —, centripetalno, 182
 —, koriolisovo, 192, 193
 —, normalno, 138, 141
 —, obrtno, 182, 192
 —, prenosno, 185
 —, relativno, 185, 191
 —, sile teže, 215
 —, slaganje, 189—192
 —, slobodnog padanja, 215
 —, srednje, 122, 152
 —, tačke, 134
 —, tačke u određenom trenutku, 130
 —, tangencijalno, 138, 140
 —, translatorno, 150
 —, ugaono, 152, 180
 ubrzano kretanje, 122
 udar, centralni, 388
 —, centralni upravni, 388
 —, gubitak kinetičke energije, 390
 —, elastičan, 385, 390
 —, kos, 386
 —, neelastičan, 385, 390
 —, plastičan, 385, 390
 —, prav, 386
 —, upravan, 386
 ugao, izbacivanja, 294
 —, kontingentni, 138
 —, obrtni (obrtanja), 151
 —, odbojni, 387
 —, trenja, 78

—, upadni, 387
 ugaona brzina, 152, 164, 180, 202
 —, frekvencija oscilacija, 273
 ugaono ubrzanje, 152, 180
 ukupna mehanička energija, 343
 unutrašnje sile, 9, 12, 299
 —, veze, 60
 upravni centralni udar, 388
 uslovi ravnoteže, 8
 —, proizvoljnog prostornog sistema sila, 97
 —, proizvoljnog ravnog sistema sila, 52
 —, prostornog sistema paralelnih sila, 54
 —, prostornog sistema spregova, 91
 —, ravnog sistema paralelnih sila, 98
 —, ravnog sistema spregova, 45
 —, sučelnog sistema sila, 25
 usporeno kretanje, 122
 ustaljene prinudne oscilacije, 283

V

Varinjonova teorema, 36, 98
 vat, 241
 vatsekunda, 241
 verižni poligon, 68
 vertikalni hitac, 267
 vertikalno padanje, 267
 virtualni rad, 373
 virtualno pomeranje, 371
 vektor, 8
 —, brojčana vrednost, 121
 —, brzine, 129, 181
 —, funkcija, 128
 —, glavni, 49, 94, 360
 —, intenzitet, 121
 —, klizeći, 10
 —, modul, 121
 —, položaja, 86, 128
 —, projekcija izvoda, 131
 —, slobodan, 90
 —, vezan za pravu, 10
 —, vezan za tačku, 86
 —, ubrzanja, 131
 veštački zemljin satelit, 292
 veza, 13, 55
 —, apsolutno glatka, 13, 80
 —, bez trenja, 13, 80
 —, hrapava, 78
 —, sa trenjem, 78
 —, spoljašnja, 60
 —, unutrašnja, 60
 vezano telo, 13
 veze, aksioma o, 15
 —, bez trenja, 80
 —, idealne, 372
 —, reakcija, 71, 256
 vrćenje, trenje, 84
 vreme, 119
 —, udara, 382
 —, univerzalno, 119
 —, ustaljivanja, 282

Z

zadatak dinamike, 218

—, prvi, 218

—, direktni, 218

—, drugi, 218

—, inverzni, 218

—, obrnuti, 218

zakon, akcije i reakcije, 12, 216

—, Bera, 267

—, dinamike — drugi, 215

—, dinamike — osnovni, 215

—, dinamike — prvi, 215

—, dinamike — treći, 216

—, inercije, 214

—, kretanja tačke, 137

—, momenata, 250, 323, 384

—, obrtnog kretanja krutog tela, 151

—, površina, 253

—, pravolinijskog kretanja tačke, 120

—, relativnog kretanja tačke, 263

zakoni dinamike, 214—216, 262

zakoni trenja klizanja pri mirovanju, 76

zakon o, jednakosti dejstva i protivdejstva, 12, 216

—, kretanju središta masa (centra inercije) sistema, 307

—, održanju glavnog momenta količina kretanja (zamaha) sistema, 323

—, održanju količine kretanja sistema, 315

—, održanju kretanja središta masa (centra inercije) sistema, 308

—, održanju mehaničke energije, 343

—, promeni (priraštaju) glavnog momenta količina kretanja (zamaha) sistema, 323

—, promeni glavnog momenta količina kretanja (zamaha) sistema (zakon momenta) pri udaru, 384

—, promeni (priraštaju) kinetičke energije sistema, 333

—, promeni (priraštaju) kinetičke energije pri relativnom kretanju, 264

—, promeni (priraštaju) kinetičke energije tačke, 243

—, promeni (priraštaju) količina kretanja sistema, 314

—, priraštaju (promeni) količine kretanja sistema pri udaru, 383

—, promeni (priraštaju) količine kretanja tačke, 237

zadah, 250, 322, 324

zavojnica, 135, 208

zavojna osa, trenutna, 209

zavojno kretanje, 135

zavrtanj, dinamički, 97

Z

žiroskop, 354

—, slobodan, 355

žiroskopski, efekat, 357

—, moment, 357

—, spreg, 357

žiroskopsko dejstvo, 354