УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАТЕМАТИЧКИ ФАКУЛТЕТ

Симонида Драгаш

ПРИМЕНА СИСТЕМА ЛИНЕАРНИХ ЈЕДНАЧИНА У ТАКМИЧАРСКИМ ЗАДАЦИМА ЗА УЧЕНИКЕ ОСНОВНИХ И СРЕДЊИХ ШКОЛА

мастер рад

Београд, 2021.

Ментор:

др Тања Стојадиновић, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Чланови комисије:

др Небојша Икодиновић, ванредни професор
Универзитет у Београду, Математички факултет

др Славко Моцоња, доцент
Универзитет у Београду, Математички факултет

Датум одбране: 17. децембар 2021.

Садржај

Садржај **1**

1 Увод **2**

2 Системи линеарних једначина **4**
2.1 Системи линеарних једначина у основној школи 14
2.2 Системи линеарних једначина у средњој школи 35

3 Задаци са такмичења **56**
3.1 Задаци са такмичења у основној школи 56
3.2 Задаци са такмичења у средњој школи 64

4 Литература **78**

Глава 1

Увод

Историјат

Решавање система линеарних једначина датира још од времена Вавилона, пре око 4000 година. Већ тада су Вавилонци знали да реше једноставне системе једначина са две непознате. Касније, око 200 година пре нове ере, у Кини је објављена књига „Математика у девет поглавља“ (eng. „Nine chapters of the mathematical art“) у којој се, у осмом поглављу, баве решавањем система три и више једначина са три и више непознатих. Један од примера из осмог поглавља ове старе кинеске књиге је следећи пример.

Пример 1.0.1. *3 снопа доброг, 2 средњег и 1 лошег жита дају 39 мерица зрна,*
2 снопа доброг, 3 средњег и 1 лошег дају 34 мерице зрна,
1 сноп доброг, 2 средњег и 3 лошег дају 26 мерица зрна.
Тражи се количина зрна у снопу доброг, средњег и лошег жита.

Проблем се заправо своди на решавање система од три једначине са три непознате, односно на решавање следећег система

$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 39 \\ 2x + 3y + z &= 34 \\ x + 2y + 3z &= 26. \end{aligned}$$

Поступак решавања из тог времена се своди на трансформације колона табеле у којој су коефицијенти система записани усправно[1] док се не

[1] у то време Кинези су писали усправно

добије троугаони облик. За наведени пример табела је

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 39 & 34 & 26 \end{array},$$

а решење је уређена тројка $\left(\frac{37}{4}, \frac{17}{4}, \frac{11}{4}\right)$.

Иако нам је данас тај алгоритам познат као „Гаусов алгоритам“ он је и у европској математици био познат много пре Гауса. Француски математичар и калуђер, Бутео[2], је на овај начин решавао линеарне системе у својој књизи *Logica*, из 1559. године.

Линеарна алгебра је прави напредак доживела тек у другој половини 17. века. Гаус је током 17. века развио методу најмањих квадрата у својим радовима и књизи *Theoria motus coelestum*(1809) коју је примењивао на линеарне системе. Сводио је системе елиминацијом на дијагонални облик. Гаусова теоријска истраживања нису била ни близу теорије линеарних система, па је назив „Гаусов алгоритам“ дошао тек касније, када су развојем нумеричке математике његови радови из примењене математике добили заслужено место.

Значај система линеарних једначина

Системи линеарних једначина су незаобилазни део математичког рачунања за све природне науке. Истраживачки радови из области хемије, физике, економије, рачунарства и других наука готово су немогући без употребе система линеарних једначина. Осим тога, користећи линеарне једначине и системе можемо предвидети трошкове у свакодневном животу, израчунати колико ће нас коштати камата у банци приликом подизања кредита, предвидети зараду за неки одређени период, израчунати шта нам је исплативије уколико имамо више опција у понуди и многе друге ствари. Због свега наведеног можемо рећи да је ова област математике незаобилазна у животу свакога од нас.

---

[2] Johannes Buteo, рођен као Жан Борел,занимљивост о њему је да је један од математичара који су покушали да израчунају којих димензија је требало да буде Нојева Барка како би у њу стале све животиње света. Осим наведене књиге, објавио је још књиге *Opera Geometrica* (1554) и *De quadratura circuli libri duo* (1559)

Глава 2

Системи линеарних једначина

У овом поглављу осврнућемо се на то како се системи линеарних једначина уводе на факултету[1].
Нека је $\mathbb{F}$ поље (основно поље или поље коефицијената). Пре него што дефинишемо систем линеарних једначина потребно је да дефинишемо линеарну једначину.

Дефиниција 2.0.1. Линеарна једначина са n непознатих над пољем $\mathbb{F}$ представља једначину облика

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b,$$

при чему су сви $a_i, b \in \mathbb{F}$, а x_i $(i = 1, \ldots, n)$ су непознате или променљиве.

Дефиниција 2.0.2. Систем линеарних једначина (или *линеарни систем*) са m једначина и n непознатих над пољем $\mathbb{F}$ је скуп од m таквих једначина облика:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}, \tag{2.1}$$

при чему су сви a_{ij} и b_i $(i = 1, \ldots, m,\ j = 1, \ldots, n)$ из поља $\mathbb{F}$. Елементе a_{ij} називамо *коефицијенти*, b_i *слободни чланови*, а x_i *непознате система*.

Матрица коефицијената:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & \dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

назива се матрица система, док се матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

назива проширена матрица система.
Решење система је уређена $n-$торка $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{F}^n$ коју када заменимо уместо непознатих добијамо m једнакости у пољу $\mathbb{F}$.

Нека је S скуп решења система линеарних једначина. За систем кажемо да је *сагласан* уколико је скуп решења непразан, односно ако важи да је $S \neq \emptyset$, а несагласан уколико је $S = \emptyset$. Сагласан систем је *одређен* ако је скуп S једночлан, односно *неодређен* уколико скуп S има више од једног елемента. Решити систем значи одредити елементе скупа S. Даље разликујемо две случаја у зависности од тога чему су једнаки слободни чланови $b_i,\ i = 1, \dots, m$ - ако је $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ за систем кажемо да је *хомоген*, у супротном за систем кажемо да је *нехомоген*. Важно је напоменути да сваки хомогени систем има тривијално решење, а то је решење $(0, 0, \dots, 0) \in S$, па је самим тим сваки хомоген систем сагласан. Такође, уколико је хомоген систем одређен он има само тривијално решење, док неодређен хомоген систем има и решења која нису тривијална.

Систем је једнозначно одређен својом проширеном матрицом, а сваким системом је једнозначно одређен његов скуп решења. Међутим, може се десити да два различита система имају исти скуп решења, што нас доводи до појма еквивалентности система линеарних једначина.

Дефиниција 2.0.3. Нека је поред система (2.1), чији је скуп решења

S, дат и следећи систем:

$$\begin{array}{c} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \cdots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \cdots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{k1}x_1 + a'_{k2}x_2 + \cdots + a'_{kn}x_n = b'_k \end{array}, \tag{2.2}$$

са истим бројем непознатих и скупом решења S'. Важи да је $S, S' \subset \mathbb{F}^n$. Системи (2.1) и (2.2) су **еквивалентни** ако је $S = S'$.

Укратко, два система су еквивалентна ако је свако решење једног система истовремено и решење другог, и обрнуто. Еквивалентност система нам је важна због тога што поступном трансформацијом система у једноставнији облик, водећи рачуна о еквивалентности система у сваком кораку, на крају добијамо решење које је такође решење полазног система.

Дефиниција 2.0.4. Нека је дат систем (2.1), означимо га словом $\mathcal{A}$. *Елементарна трансформација првог типа* p_{ij} $(i = 1, \ldots, m, i \neq j)$ јесте замена места $i-$те и $j-$те једначине у систему $\mathcal{A}$.

$$p_{ij} : \ \mathcal{A} \mapsto p_{ij}(\mathcal{A}).$$

Елементарна трансформација другог типа $q_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, \ldots, m, i \neq j, \lambda \in \mathbb{F})$ је додавање $j-$тој једначини система $i-$те помножене бројем λ.

$$q_{ij}(\lambda) : \ \mathcal{A} \mapsto q_{ij}(\lambda)(\mathcal{A}).$$

Елементарна трансформација трећег типа $r_i(\lambda)$ $(i = 1, \ldots, m, \lambda \in \mathbb{F})$ јесте множење $i-$те једначине система $\mathcal{A}$ бројем $\lambda \neq 0$.

Ако је систем $\mathcal{A}'$ добијен применом коначног низа елементарних трансформација од система $\mathcal{A}$, кажемо да је добијен еквивалентном трансформацијом и обележавамо то са $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$.

Теорема 2.0.1. *Ако је $\mathcal{A} \rightsquigarrow \mathcal{A}'$, тада је $\mathcal{A}' \rightsquigarrow \mathcal{A}$ и $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}')$, односно системи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}'$ су еквивалентни.*

Доказ. Да бисмо доказали да су системи након еквивалентних трансформација заиста еквивалентни потребно је да докажемо да свака од елементарних трансформација система има инверзну трансформацију.
Непосредно се види да важи следеће:

$$(p_{ij})^{-1} = p_{ij},$$

$$(q_{ij}(\lambda))^{-1} = q_{ij}(-\lambda),$$
$$(r_i(\lambda))^{-1} = r_i(\lambda^{-1}),$$

што доказује наше тврђење.

Дакле, на основу претходног можемо да закључимо да ако је $c = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ решење система $\mathcal{A}$ онда је оно и решење система $p_{ij}(\mathcal{A}), q_{ij}(\mathcal{A})$ и $r_i(\mathcal{A})$. Односно, елементарне трансформације преводе систем у њему еквивалентан, а након примене коначног низа елементарних трансформација добијамо да је $S(\mathcal{A}) = S(\mathcal{A}')$. □

Теорема 2.0.2. *(Гаусова[1] метода елиминације[2])*

i) Сваки систем $\mathcal{A}$ облика:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned},$$

еквивалентан је степенастом систему $\mathcal{A}'$ облика:

$$\begin{array}{rrrl} a'_{1j_1}x_{j_1} + & & \ldots + a'_{1n}x_n = & b'_1 \\ & a'_{2j_2}x_{j_2} + & \ldots + a'_{2n}x_n = & b'_2 \\ & & \vdots & \\ & & a'_{rj_r}x_{j_r} + \ldots + a'_{rn}x_n = & b'_r \\ & & 0 = & b'_{r+1} \\ & & \vdots & \\ & & 0 = & b'_m \end{array}, \tag{2.3}$$

при чему је $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_r \leq n$ и $a'_{1j_1} \cdot a'_{2j_2} \cdots a'_{rj_r} \neq 0$. Промењливе $x_{j_1}, \ldots, x_{j_r}$ у систему степенастог облика називају се главне промењливе, док се остале (ако их има) x_i, $i \neq j_1, \ldots, j_r$, називају слободне промењливе. Коефицијенти $a'_{1j_1}, \ldots, a'_{rj_r}$ су главни коефицијенти.

---

[1] C. F. Gauss (1777-1855), немачки математичар

[2] Ову методу ћемо касније увести и обрадити на начин на који се уводи у средњој школи

ii) *Систем (2.3) је сагласан* $\Leftrightarrow$ *он не садржи једначине облика* $0 = b'_k$ *за* $b'_k \neq 0$.

iii) *Претпоставимо да систем не садржи једначине облика* $0 = b'_k$ *за* $b'_k \neq 0$. *Тада:*

1) *Систем (2.3) је одређен ако је* $r = n$, *то јест нема слободних променљивих. У том случају је* $j_i = i, n \leq m$ *и систем има следећи облик:*

$$\begin{aligned} a'_{11}x_1 + \qquad\qquad\qquad \ldots + a'_{1n}x_n &= b'_1 \\ a'_{21}x_2 + \ldots + a'_{2n}x_n &= b'_2 \\ &\vdots \\ a'_{nn}x_n &= b'_n \end{aligned},$$

при чему смо изоставили једначине облика $0 = 0$, *уколико их има. Решење овог система се добија ходом уназад, тј.*

$$x_k = \frac{1}{a'_{kk}}\left[b'_k - \sum_{j>k} a'_{kj}x_j\right], k = n, n-1, \ldots, 1.$$

2) *За* $r < n$ *систем је неодређен. До скупа решења овог система долазимо тако што слободним променљивима дајемо произвољне вредности из поља* $\mathbb{F}$, *а главне променљиве одређујемо ходом уназад:*

$$x_{j_k} = \frac{1}{a'_{k_{j_k}}}\left[b'_k - \sum_{j>j_k} a'_{k_j}x_j\right], k = r, r-1, \ldots, 1.$$

При томе постоји бијекција између скупова $S(\mathcal{A})$ *и* $\mathbb{F}^{n-r}$.

Доказ. *i)* Тражимо прву колону (слева надесно) која садржи елемент који није једнак нули. Уколико такве колоне нема, $r = 0$ и сви коефицијенти система су једнаки нули, односно, систем се састоји из једначина облика

$$0 = b_i.$$

Ако таква колона постоји, означимо са j_1 њен редни број. Заменом врста можемо врсту у којој је $a_{ij_1} \neq 0$ да доведемо на место a_{1j_1}.

Надаље сматрамо да је $a_{1j_1} \neq 0$, да су сви елементи у колонама $1, 2, \ldots, j_1 - 1$ једнаки нули и да систем не садржи непознате $x_1, x_2, \ldots, x_{j_1-1}$. Елемент a_{1j_1} нам служи за елиминацију непознате x_{j_1} из свих наредних једначина система. Сада прву једначину делимо са a_{1j_1}, а множимо редом са $a_{2j_1}, \ldots, a_{mj_1}$ и одузимамо добијене једначине редом од друге, треће,..., $m-$те, након чега добијамо систем $\mathcal{A}''$ облика:

$$\begin{array}{r} a_{1j_1}x_{j_1} + a_{1j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + a_{1n}x_n \ = b_1 \\ a''_{2j_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + a''_{2n}x_n \ = b''_2 \\ \ldots \qquad \qquad \\ a''_{mj_1+1}x_{j_1+1} + \cdots + a''_{mn}x_n = b''_m \end{array},$$

који промењиву x_{j_1} садржи само у првој једначини. Системи $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}''$ су еквивалентни јер је систем $\mathcal{A}''$ добијен применом елементарних трансформација $p_{1j_1},\ q_{12}(-\frac{a_{2j_1}}{a_{1j_1}}), \ldots,\ q_{1m}(-\frac{a_{mj_1}}{a_{1j_1}})$ на систем $\mathcal{A}$. Сада исти овај поступак применимо на систем $\mathcal{A}''$. Тражимо прву следећу колону са $m-1$ једначином и непознатим $x_{j_1+1}, \ldots, x_n$. Тражимо прву следећу колону са елементом различитим од 0, са редним бројем j_2. Заменом врста доводимо елемент $a''_{j_2} \neq 0$ на почетно место и понављамо поступак елиминације промењиве x_{j_2} редом из друге, треће,..., $m-$те једначине система. После коначно много корака (највише m) овог типа елиминисаћемо све непознате и доћи до траженог система (2.3).

ii) Смер $\Rightarrow$ је очигледан зато што систем који садржи једначину $0 = b,\ b \neq 0$ не може бити сагласан. Доказ смера $\Leftarrow$ следиће из доказа под *iii)*.

iii) Претпоставимо да је систем сагласан, односно да систем (2.3) не садржи једначине $0 = b,\ b \neq 0$. Занемаримо све једначине облика $0 = 0$, а то можемо јер тиме не мењамо скуп решења. Из сваке од једначина система можемо изразити главну промењиву x_{j_k} преко слободних, и то на следећи начин:

$$x_{j_k} = \frac{1}{a'_{k_{j_k}}}\left[b'_k - \sum_{j>j_k} a'_{k_j}x_j\right], k = r, r-1, \ldots, 1.$$

Уколико слободним променљивим доделимо произвољне вредности $c_i \in \mathbb{F}$, $i \neq j_1, \dots, j_r$, израчунавањем по наведеној формули за $k = r, r-1, \dots, 1$ добијамо „ходом уназад“ редом вредности променљивих $x_{j_r}, x_{j_{r-1}}, \dots, x_{j_1}$. На тај начин избор слободних променљивих одређује вредност главних. У том случају је систем увек сагласан, чиме је употпуњен доказ дела ii).
За сваки избор $(n-r)-$торке вредности слободних променљивих $(c_i \mid i \neq j_1 \dots, j_r) \in \mathbb{F}^{n-r}$ добијамо једнозначно одређену $r-$торку вредности главних променљивих $(c_{j_1}, \dots, c_{j_r}) \in \mathbb{F}^r$ и на тај начин једнозначно одређено решење система $(c_1, \dots, c_n) \in S(\mathcal{A}) \subset \mathbb{F}^r$. Тиме је показано да постоји бијекција између скупа решења $S(\mathcal{A})$ и скупа $\mathbb{F}^{n-r}$.
Ако је $n = r$, како важи $1 < j_1 < j_2 < \cdots < j_n \leq n$, мора да буде $j_i = i$. У овом случају нема слободних променљивих, а вредности главних променљивих (које су у овом случају све променљиве) почев од x_n су једнозначно одређене па је и систем одређен.

$\square$

Напомене

1. Приликом решавања система применом елементарних трансформација довољно је писати само коефицијенте и слободне чланове у облику таблице

$$\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ & \dots & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array},$$

јер се ознаке променљивих понављају у одговарајућим колонама.

2. Приметимо да су у доказу теореме 2.0.2 коришћене само трансформације првог и другог типа. Применом трансформација трећег типа на првих r једначина система (2.3) коефицијенти $a'_{1j_1}, \dots, a'_{rj_r}$ који су различити од нуле се могу учинити једнаким 1, што се у пракси често примењује.

3. **Фундаментални скуп решења линеарног система.**
У случају сагласног неодређеног система, ако за слободне променљиве

узмемо редом, за све $j \neq j_1, \dots, j_r$, $(n-r)$ специјалних $(n-r)$-торки $(c_i^{(j)} \mid i \neq j_1, \dots, j_r)$ из $\mathbb{F}^{n-r}$ у којима је

$$c_i^{(j)} = \delta_{ij}{}^3 = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases},$$

добићемо укупно $(n-r)$ решења система $c^{(j)} = (c_1^{(j)}, \dots, c_n^{(j)}) \in S(\mathcal{A})$, $j \neq j_1, \dots, j_r$ која чине *фундаментални скуп решења* система $\mathcal{A}$.
На основу фундаменталног скупа решења, користећи операције сабирања n-торки и њиховог множења скаларом, може се описати цео скуп $S(\mathcal{A})$ решења система $\mathcal{A}$ јер се произвољна $(n-r)$-торка слободних променљивих $(c_i \mid i \neq j_1, \dots, j_r)$ може записати помоћу специјалних $(n-r)$-торки

$$(c_i \mid i \neq j_1, \dots, j_r) = \sum_{j \neq j_1, \dots, j_r} c_j \cdot (c_i^{(j)} \mid i \neq j_1, \dots, j_r),$$

а онда се и произвољно решење c може изразити помоћу фундаменталног скупа решења.

4. **Гаус-Жорданова метода за решавање система линеарних једначина.**
Ова метода се од методе наведене у теореми 2.0.2 разликује у томе што се поништавање коефицијената уз главне променљиве врши не само испод текуће једначине већ и изнад ње. На овај начин добијамо степенасти систем који главну променљиву садржи само у једној, њеној једначини, и то са коефицијентом 1. По завршетку имамо једначине које дају готове изразе за главне променљиве преко слободних, односно имамо решење система. На овај начин смо избегли „ход уназад“ јер смо га имплицитно извели још у току елиминације. Ова метода позната је као *Гаус-Жорданова метода*. У случају одређеног система, када је $r = n$, након извршене елиминације по овој методи решење ће се приказати у колони слободних чланова.

5. **Решавање више система са истим коефицијентима.**
Уколико имамо више система са истим коефицијентима, који се

[3] Кронекеров δ-симбол

разликују само у слободним члановима поступком елиминације можемо добити решења свих система истовремено. Довољно је исписати слободне чланове свих система као колоне на десној страни

$$\begin{array}{ccc|cccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1^{(1)} & b_1^{(2)} & \dots & b_1^{(k)} \\ & \dots & & & & \dots & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m^{(1)} & b_m^{(2)} & \dots & b_m^{(k)} \end{array},$$

а затим елементарне трансформације примењивати на све колоне истовремено.

6. **Одговарајући хомогени систем.**
   Обележимо са $\mathcal{A}_0$ систем

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= 0 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned},$$

   који смо добили из система $\mathcal{A}$ тако што смо све слободне чланове b_i, $i = 1, \dots, m$, у систему заменили нулама. Систем $\mathcal{A}_0$ назива се *хомогени систем који одговара систему* $\mathcal{A}$. Хомогени систем $\mathcal{A}_0$ може се свести истим елементарним трансформацијама на хомогени систем $\mathcal{A}'_0$, који одговара систему $\mathcal{A}'$, што видимо да је могуће на основу претходне напомене. На основу услова из теореме 2.0.2 под *ii*) видимо да је добијени систем сагласан, што је у складу са чињеницом да је хомогени систем увек сагласан.

Тврђење 2.0.1. Број главних променљивих r, као и саме главне променљиве $x_{j_1}, \dots, x_{j_r}, 1 \leq j_1 < \dots < j_r \leq n$, у теореми **2.0.2** не зависе од редоследа елиминације, тј. избора елементарних трансформација приликом свођења система $\mathcal{A}$ (2.1) на систем $\mathcal{A}'$ (2.3). Једнозначно одређен број r назива се *ранг система* $\mathcal{A}$.

За решавање система линеарних једначина постоје различите методе које се користе на различитим нивоима образовања. Први пут се о њима говори у осмом разреду основне школе, а теме које се обрађују су скуп решења, метода супротних коефицијената, смена и графичка метода. У средњој школи, посебно у гимназијама и средњим техничким школама, се знање из система, стечено у осмом разреду, у великој мери проширује. У посебним поглављима биће дат преглед области које се раде у основним и средњим школама као и одговарајући задаци.

2.1 Системи линеарних једначина у основној школи

Увод

У основној школи, као што је наведено у претходном поглављу, системи линеарних једначина се обрађују у другом полугодишту осмог разреда. Прво се изучава линеарна функција и њен график, а потом и сами системи две линеарне једначине са две непознате, као и различити начини за њихово решавање. Посебан акценат је на примени система линеарних једначина приликом решавања текстуалних задатака.[2]

Пример 2.1.1. Ове године је време послужило воћаре и њихов труд се исплатио. Кајсије су родиле 20% боље него претходне године. Заправо, принос по стаблу је порастао за 6kg.

Можемо ли на основу ових података да закључимо колики је принос по стаблу био прошле године, а колики је ове године? Обележимо са x принос по стаблу (у килограмима) за прошлу годину, а са y принос по стаблу (у килограмима) за ову годину. Дати подаци нам дају две линеарне везе између непознатих величина x и y, тј. на основу њих можемо формирати две линеарне једначине са две непознате, уз поштовање услова да је $x \geq 0$, јер принос не може бити негативан. Линеарне једначине које формирамо су $y = 1,2x$ и $y = x + 6$, а оне заједно чине ***систем линеарних једначина***:

$$\begin{aligned} y &= 1,2x, \\ y &= x + 6. \end{aligned}$$

Једнакости $y = 1,2x$ и $y = x+6$ можемо посматрати и као две различите линеарне функције. Графици ових функција се секу. Апсциса пресечне тачке је *решење* линеарне једначине $1,2x = x + 6$, а заменом у било коју од две полазне једначине добићемо вредност ординате. Дакле, $x = 30$ и $y = 36$. Уређени пар $(30, 36)$ је решење обе једначине па је и решење система. Такође, овај уређени пар представља координате пресечне тачке посматраних графика линеарних функција $y = 1,2x$ и $y = x + 6$.

У наредним поглављима ћемо се бавити различитим методама решавања система од две једначине са две непознате.

Линеарна једначина са две непознате

Да бисмо могли да дискутујемо о систему линеарних једначина потребно је да прво уведемо појам линеарне једначине са две непознате.

Дефиниција 2.1.1. *Линеарна једначина с две непознате* x и y је свака једначина еквивалентна једначини облика $ax+by+c=0$, где су a, b и c реални бројеви, а коефицијенти a и b не могу истовремено бити једнаки нули ($a \neq 0$ или $b \neq 0$).

Приметимо да је у дефиницији дозвољено да једна од константи уз непознате буде нула, у том случају бисмо имали линеарну једначину са једном непознатом. Примери линеарних једначина са две непознате су

$$2x - y + 1 = 0, \quad 5x + 2y + 7 = 0, \quad -x + 2y - 4 = 0.$$

Дефиниција 2.1.2. *Решење* линеарне једначине с две непознате $ax + by + c = 0$ је сваки уређени пар (x_0, y_0) који, када заменимо x са x_0 и y са y_0, ту једначину претвара у тачну бројевну једнакост.

На пример, уређени пар $(3, -4)$ јесте решење једначине $3x+2y-1 = 0$ јер заменом у једначину добијамо $3 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) - 1 = 9 - 8 - 1 = 0$. С друге стране, уређени пар $(1, 3)$ није решење ове једначине јер је $3 \cdot 1 + 2 \cdot 3 - 1 = 3 + 3 - 1 = 5 \neq 0$.

Пример 2.1.2. Колико решења има једначина $5x - y - 2 = 0$?
Провером лако можемо да утвдимо да уређени парови $(0, -2)$, $\left(\frac{2}{5}, 0\right)$, $(1, 3)$ јесу решења дате једначине. Међутим, то нису једина решења. Дата једначина има још (бесконачно много) решења. За свако x важи $y = 5x - 2$, па је сваки уређени пар облика $(x, 5x - 2)$ решење дате једначине.

Овај пример можемо да решимо и на други начин. Посматрајмо једначину $5x - y - 2 = 0$. Можемо је посматрати као имплицитно задату линеарну функцију. Тај график (права) је потпуно одређен с две (различите) тачке које му припадају (можемо одредити и више њих, али су нам две сасвим довољне за цртање графика).

Дакле, на основу другог дела претходног примера можемо да закључимо да сваку линеарну једначину са две непознате $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ или $b \neq 0$) можемо тумачити као имплицитно задату линеарну функцију. Зато свакој таквој једначини придружујемо праву у координатном систему. Уређени пар координата сваке тачке те праве је једно од решења одговарајуће једначине.

Теорема 2.1.1. Једначина $ax + by + c = 0$, за $a \neq 0$ или $b \neq 0$, има бесконачно много решења, тј. има онолико решења колико права $ax + by + c = 0$, где је $a \neq 0$ или $b \neq 0$, има тачака.

Систем од две линеарне једначине с две непознате

Дефиниција 2.1.3. Општи облик система од две линеарне једначине са две непознате x и y је

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned} \tag{2.4}$$

где су $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.

Дефиниција 2.1.4. Решење система од две линеарне једначине са две непознате x и y је сваки уређен пар реалних бројева $(x_0,\ y_0)$ који је решење обе једначине тог система.

Пример 2.1.3. Отац је имао 30 година када се родио његов син Марко. Колико година сада има Марко ако знамо да је тренутно отац три пута старији од Марка?

Решење. Да бисмо могли да решимо задатак морамо да одредимо шта нам је непознато у задатку, именујемо непознате, затим одредимо везу између непознатих, односно да поставимо систем једначина.
Означимо са x године сина, а са y године оца. Прва реченица, која каже да је отац имао 30 година када се родио син, нам даје једну везу између непознатих x и y, односно даје нам линеарну једначину са две непознате облика

$$y = x + 30.$$

Друга реченица нам даје још једну везу између непознатих. Чињеницу да је отац сада три пута старији од сина можемо записати као

$$y = 3x.$$

Дакле, описаној ситуацији одговара систем од две линеарне једначине са две непознате:

$$\begin{aligned} y &= x + 30, \\ y &= 3x. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Оно што преостаје је да нађемо уређени пар реалних бројева (x_0, y_0) који задовољава обе једначине. Заменом (x_0, y_0) у систем (2.5) добијамо:

$$\begin{aligned} y_0 &= x_0 + 30 \\ y_0 &= 3x_0 \end{aligned}$$

заменом $3x_0$ из друге једначине у прву уместо y_0 добијамо

$$\begin{aligned} 3x_0 &= x_0 + 30, \\ y_0 &= 3x_0, \end{aligned}$$

одакле се јасно види да је

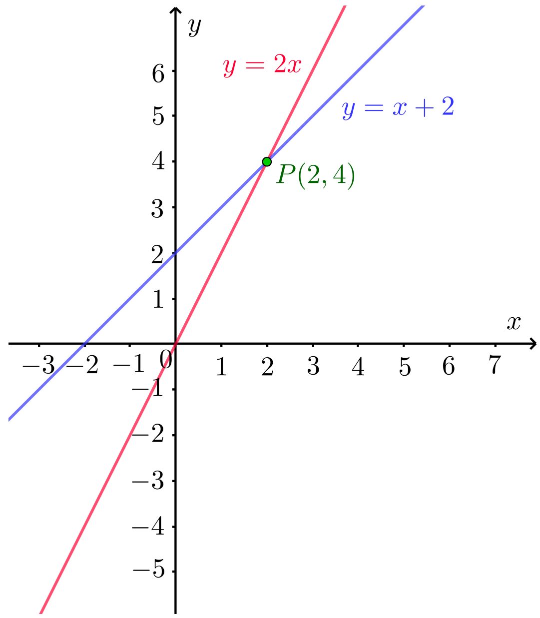
$$\begin{aligned} x_0 &= 15, \\ y_0 &= 45. \end{aligned}$$

Графички начин решавања система линеарних једначина

Како се решавање система једначина своди на одређивање пресека скупова решења две једначине система, а знамо да решења линеарне једначине графички приказујемо као праву, решити систем једначина овом методом значи одредити пресечну тачку две праве.

Посматрајмо систем једначина

$$\begin{aligned} x - y &= -2, \\ 2x - y &= 0. \end{aligned}$$



Слика 2.1: Графички приказ решења система једначина

Свакој од једначина система одговара једна права у координатном систему. Уређени парови координата сваке од тачака праве $y = x+2$ су решења прве, а уређени парови координата сваке од тачака праве $y = 2x$ су решења друге једначине. Онда је уређени пар $(2, 4)$ координата пресечне тачке P решење посматраног система, као што је приказано на слици 2.1.

Теорема 2.1.2. Графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате

$$a_1x + b_1y = c_1,$$

$$a_2x + b_2y = c_2,$$

чине две праве које су графици линеарних функција $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$.

Две праве у равни се могу наћи у једном од 3 међусобно различита односа:

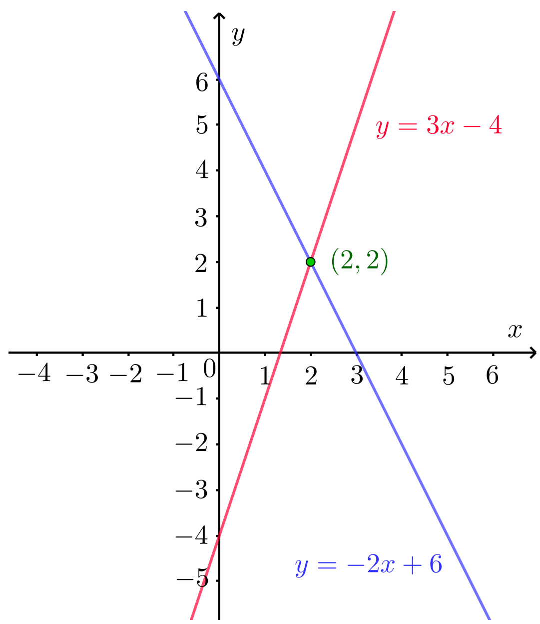
1. праве се секу, тј. имају једну заједничку тачку;

2. праве су паралелне, али се не поклапају, односно немају заједничких тачака;

3. праве се поклапају, тј. имају бесконачно много заједничких тачака.

Пример 2.1.4. Нацртајмо графички приказ система једначина

$$3x - y = 4,$$
$$2x + y = 6.$$



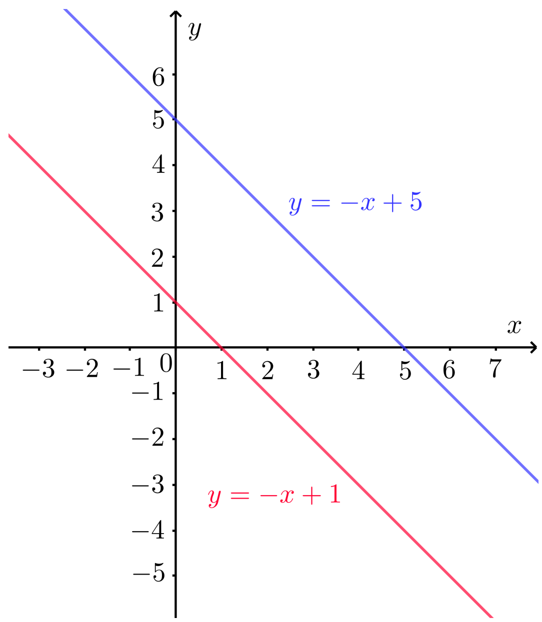
Слика 2.2: Графички приказ система једначина $3x - y = 4$ и $2x + y = 6$.

Праве које одговарају једначинама система су $3x - y = 4$ и $2x + y = 6$ и оне имају експлицитни облик $y = 3x - 4$ и $y = -2x + 6$. Дате праве се секу, а тачка пресека има координате $(2, 2)$. Дакле, постоји један уређени пар $(2, 2)$ који је решење обе једначине датог система на основу чега закључујемо да посматрани систем има јединствено решење $x = 2$ и $y = 2$.

Теорема 2.1.3. Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се секу, тада тај систем има *јединствено решење.*

Пример 2.1.5. Нацртајмо графички приказ система једначина

$$x + y = 1,$$
$$x + y = 5.$$



Слика 2.3: Графички приказ система једначина $x + y = 1$ и $x + y = 5$.

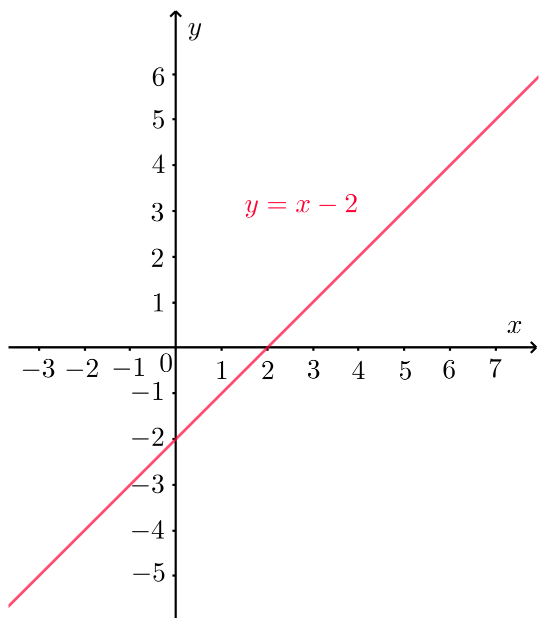
Праве које одговарају једначинама система, записане у експлицитном облику, су $y = -x + 1$ и $y = -x + 5$. Оне су паралелне и немају заједничких тачака. Дакле, не постоји уређени пар бројева који је решење обе једначине, па закључујемо да посматрани систем нема решење.

Теорема 2.1.4. Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две паралелне праве које се не поклапају, тада тај систем *нема решење.*

Пример 2.1.6. Нацртајмо графички приказ система једначина

$$x - y = 2,$$
$$2x - 2y = 4.$$

Једначине $x - y = 2$ и $2x - 2y = 4$ су *еквивалентне* (друга се добија множењем обе стране прве једначине са 2), па се графици који одговарају овим једначинама поклапају. То значи да је сваки уређени пар координата који задовољава једначину решење система, односно систем има бесконачно много решења.



Слика 2.4: Графички приказ система једначина $x - y = 2$ и $2x - 2y = 4$.

Теорема 2.1.5. Ако графички приказ система од две линеарне једначине с две непознате чине две праве које се поклапају, тада систем има *бесконачно много решења.*

Еквивалентност система линеарних једначина

Дефиниција 2.1.5. Два система једначина су *еквивалентна* ако је свако решење једног од њих уједно и решење другог, или ако оба система немају решење.

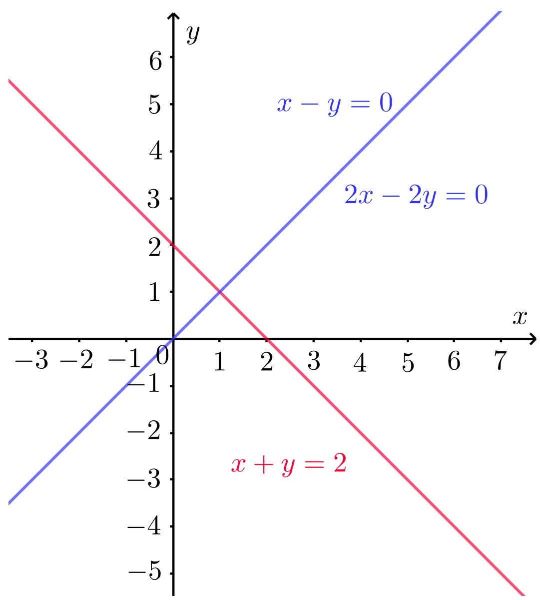
Пример 2.1.7. Посматрајмо следећа два система једначина:

$$\begin{aligned} 2x - 2y &= 0, \\ x + y &= 2, \end{aligned} \tag{2.6}$$

и

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ x + y &= 2. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Оно што можемо одмах да приметимо, прве једначине ових система су еквивалентне (прву једначину у систему (2.7) добијамо тако што прву једначину система (2.6) поделимо бројем 2) док им је друга једначина заједничка.
Првој једначини одговара права $y = x$, а другој права $y = -x + 2$, из чега следи да оба система имају исти графички приказ (слика 5), на основу чега закључујемо са су дати системи еквивалентни и да је њихово једино решење уређени пар $(1, 1)$.



Слика 2.5: Графички приказ оба система једначина.

Теорема 2.1.6. Ако једначину система заменимо њој еквивалентном, добијамо нови систем еквивалентан полазном.

Пример 2.1.8. Посматрајмо систем

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ x + y &= 2. \end{aligned}$$

Погледајмо следећи низ система једначина који добијамо трансформацијом полазног система.

$$x - y = 0 \quad / + y$$
$$x + y = 2$$

$$x = y$$
$$x + y = 2$$

$$x = y$$
$$x + x = 2$$

$$x = y$$
$$x = 1$$

$$y = 1$$
$$x = 1$$

Други систем смо добили из првог замењујући прву једначину њој еквивалентном. На основу претходног правила, ова два система су еквивалентна. Затим, у другој једначини замењујемо y са x, на основу прве једначине $y = x$. Потом другу једначину замењујемо њој еквивалентним једначинама и тако долазимо до последњег система. Видимо да је једино решење последњег система уређени пар $(1, 1)$, а то је уједно решење и полазног система јер су они еквивалентни.

Теорема 2.1.7. Ако у једначини датог система заменимо једну од непознатих изразом који је једнак тој непознатој на основу друге једначине, добијамо нови систем еквивалентан полазном.

Пример 2.1.9. Посматрајмо систем

$$x - y = 0,$$
$$x + y = 2.$$

Ако саберемо прву и другу једначину добијамо следећи систем:

$$\begin{aligned} x - y &= 0, \\ 2x &= 2. \end{aligned}$$

Сада из друге једначине видимо да је, након што једнакост поделимо са 2, $x = 1$, односно, претходни систем је еквивалентан систему:

$$\begin{aligned} y &= x, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} y &= 1, \\ x &= 1, \end{aligned}$$

а последњи систем је најједноставнији облик система из ког можемо директно да прочитамо решење. Решење последњег система је уређени пар $(1, 1)$, а како су сви системи еквивалентни, то је решење и датог система.

Теорема 2.1.8. Ако једну једначину датог система заменимо једначином која је збир или разлика једначина датог система, добијамо систем еквивалентан полазном.

Решавање система методом замене

Решити систем једначина значи одредити решење (решења) тог система или утврдити да тај систем нема решење. При решавању система циљ нам је да применом правила из претходног поглавља добијемо еквивалентан систем најједноставнијег облика.

Суштина **методе замене** је да једну непознату изразимо преко друге (x преко y или y преко x) на основу једне од једначина система, а затим у другој једначини заменимо ту непознату претходно добијеним изразом. Тада друга једначина постаје линеарна једначина с једном непознатом, а њу знамо да решимо. Да ли ћемо изразити x преко y, или обрнуто, зависи у потпуности од нас, па бирамо шта нам је у датом случају погодније.

Пример 2.1.10. Решити следећи систем **методом замене**:

$$x + 2y = 8,$$
$$2x - y = 1.$$

Прво ћемо из прве једначине да изразимо x преко y:

$$x = 8 - 2y$$

$$2x - y = 1.$$

Сада заменимо непознату x из друге једначине изразом са десне стране једнакости, $8 - 2y$ и добијамо систем

$$x = 8 - 2y$$

$$2(8 - 2y) - y = 1.$$

Када заменимо једначину $2(8 - 2y) - y = 1$ њој еквивалентном једначином
$16 - 4y - y = 1$ добијамо систем

$$x = 8 - 2y,$$

$$16 - 4y - y = 1,$$

а он је еквивалентан систему

$$x = 8 - 2y$$

$$15 - 5y = 0,$$

односно

$$x = 8 - 2y$$
$$5y = 15,$$

одакле видимо да је решење друге једначине (која је линеарна једначина са једном непознатом) $y = 3$, па систем има облик

$$x = 8 - 2y,$$
$$y = 3.$$

Остаје нам да заменимо вредност $y = 3$ у првој једначини па добијамо најједноставнији облик система

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ y &= 3. \end{aligned}$$

Дакле, решење нашег система је уређени пар $(2, 3)$.

Пример 2.1.11. Методом замене решити следећи систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 5, \\ 2x + y &= 1. \end{aligned}$$

Непознату y ћемо изразити преко непознате x на основу друге једначине.

$$4x + 2y = 5$$

$$y = 1 - 2x.$$

Сада ћемо заменити израз $1-2x$ уместо непознате y у првој једначини:

$$4x + 2(1 - 2x) = 5$$

$$y = 1 - 2x.$$

Замењујемо прву једначину њој еквивалентном

$$4x + 2 - 4x = 5$$

$$y = 1 - 2x.$$

Поново мењамо прву једначину њој еквивалентном

$$0 \cdot x + 2 = 5$$

$$y = 1 - 2x.$$

Једначина $0 \cdot x + 2 = 5$ нема решење, па ни дати систем нема решење.

Претходни пример је заправо илустрација следеће теореме.

Теорема 2.1.9. Систем еквивалентан систему чија бар једна једначина нема решење такође нема решење.

Пример 2.1.12. Методом замене решити следећи систем линеарних једначина

$$x + 2y = 5,$$
$$5x + 10y = 25.$$

Дати систем еквивалентан је следећем систему

$$x = 5 - 2y$$

$$5x + 10y = 25,$$

јер је једначина $x + 2y = 5$ еквивалентна једначини $x = 5 - 2y$. Сада заменимо израз са десне стране уместо непознате x у другој једначини

$$x = 5 - 2y$$

$$5(5 - 2y) + 10y = 25.$$

Како је једначина $5(5-2y)+10y = 5$ еквивалентна једначини $25-10y+10y = 25$, а она је еквивалентна једначини $0 \cdot y = 0$ то систем има облик

$$x = 5 - 2y$$

$$0 \cdot y = 0.$$

Једначина $0 \cdot y = 0$ је идентитет (сваки реалан број y је решење ове једначине), па су решења система заправо решења његове прве једначине. Односно, овај систем има бесконачно много решења и то су уређени парови облика $(5 - 2a, a), a \in \mathbb{R}$.

Претходни пример је илустрација следеће теореме.

Теорема 2.1.10. Систем има бесконачно много решења ако је еквивалентан систему чија је једна једначина идентитет, а друга има решење.

Решавање система методом супротних коефицијената

За решавање система **методом супротних коефицијената** кључна је примена следећег правила:
ако једну од једначина система заменимо збиром или разликом једначина тог система, добијамо систем еквивалентан полазном.

Пример 2.1.13. Решити систем методом супротних коефицијената

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= 9, \\ 2x - 2y &= 1. \end{aligned}$$

У првом кораку сабирамо једначине система и на тај начин добијамо једначину у којој више не учествује променљива y $(3x + 2x + 2y - 2y = 9 + 1)$, односно добијамо систем једначина

$$\begin{aligned} 5x &= 10, \\ 2x - 2y &= 1. \end{aligned}$$

Сада прву једначину замењујемо њој еквивалентном, $x = 2$, коју добијамо дељењем обе стране једначине са 5

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ 2x - 2y &= 1. \end{aligned}$$

Сада мењамо непознату x са 2 у другој једначини

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ 4 - 2y &= 1. \end{aligned}$$

Замењујемо другу једначину њој еквивалентном (одузмемо од обе стране једначине 4)

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ -2y &= -3. \end{aligned}$$

У наредном кораку замењујемо другу једначину њој еквивалентном (обе стране једначине поделимо са -2)

$$\begin{aligned} x &= 2, \\ y &= \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Дакле, решење датог система је уређени пар $\left(3, \dfrac{3}{2}\right)$.

Методу супротних коефицијената је најпогодније примењивати када су коефицијенти уз исту непознату у две једначине система међусобно супротни бројеви (као у претходном примеру 2 и -2), или међусобно једнаки бројеви. Уколико су коефицијенти међусобно супротни бројеви једначине система сабирамо, као у претходном примеру, а уколико су међусобно једнаки бројеви, једначине система одузимамо једну од друге.

У наредном примеру ћемо приказати решавање система код ког су сви коефицијенти уз променљиве различити од 1 и -1, а парови одговарајућих коефицијената нису међусобно ни супротни ни једнаки.

Пример 2.1.14. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1, \\ -5x - 3y &= 8. \end{aligned}$$

Прво можемо да приметимо, као што је већ наведено, да систем нема специјални облик, парови одговарајућих коефицијената нису ни супротни ни једнаки, нити су једнаки 1 или -1 па можемо да изаберемо методу коју ћемо користити за његово решавање. Како бисмо илустровали примену и једне и друге методе, систем ћемо решити на оба начина. Прво ћемо решити **методом замене**.

$$\begin{aligned} 3x + 2y &= -1 \\ -5x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x &= -1 - 2y \\ -5x - 3y &= 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = \frac{-1-2y}{3} \\ &-5 \cdot \frac{-1-2y}{3} - 3y = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &x = \frac{-1-2y}{3} \\ &\frac{5+10y}{3} - 3y = 8 \quad / \cdot 3 \end{aligned}$$

$$x = \frac{-1-2y}{3}$$
$$5 + 10y - 9y = 24$$

$$x = \frac{-1-2y}{3}$$
$$y = 24 - 5$$

$$x = \frac{-1-2y}{3}$$
$$y = 19$$

$$x = \frac{-1-2\cdot 19}{3}$$
$$y = 19$$

$$x = -13$$
$$y = 19$$

Дакле, решење система је уређени пар $(-13, 19)$.
Сада ћемо систем решити **методом супротних коефицијената**.

$$3x + 2y = -1 \quad / \cdot 3$$
$$-5x - 3y = 8 \quad / \cdot 2$$

$$9x + 6y = -3$$
$$-10x - 6y = 16$$

$$9x + 6y = -3$$
$$-x = 13 \quad / \cdot (-1)$$

$$\begin{aligned} 9x + 6y &= -3 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 \cdot (-13) + 6y &= -3 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -117 + 6y &= -3 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6y &= -3 + 117 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6y &= 114 \quad / : 6 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 19 \\ x &= -13 \end{aligned}$$

Примена система линеарних једначина

Системи линеарних једначина се користе за решавање различитих проблема. То ћемо илустровати у наредних неколико примера.

Пример 2.1.15. Збир два броја је за 1 већи од троструке вредности мањег од та два броја, а петострука вредност мањег је једнака двострукој вредности већег. О којим бројевима је реч?

Решење. Да бисмо решили задатак, потребно је да прво поставимо систем једначина. Означимо са x вредност мањег од два броја, а са y вредност већег. Сада можемо да, на основу текста, поставимо систем

$$\begin{aligned} x + y &= 3x + 1 \\ 5x &= 2y. \end{aligned}$$

Сада нам остаје да решимо систем. У овом случају је погодније користити методу замене, из разлога што нам је једноставно да изразимо x преко y из друге једначине.

$$\begin{aligned} x + y &= 3x + 1 \quad / - x \\ 5x &= 2y \quad / : 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2x + 1 \\ x &= \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 2 \cdot \frac{2}{5}y + 1 \\ x &= \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{5}y + 1 \quad / \cdot 5 \\ x &= \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5y &= 4y + 5 \quad / - 4y \\ x &= \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 5 \\ x &= \frac{2}{5}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 5 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Дакле, реч је о бројевима 2 и 5.

Пример 2.1.16. Јована је отишла у књижару јер је желела да купи 5 свезака и 2 маркера. Понела је 200 динара. Међутим, продавачица јој је рекла да јој недостаје 3 динара за ту куповину, али да може да купи једну свеску мање и да добије кусур од 22 динара. Да ли су ове информације довољне да одредимо појединачне цене свеске и маркера?

Решење. Прво ћемо поставити систем једначина, а потом одредити решење. Означимо са x цену свеске, а са y цену маркера. Сада се решавање постављеног задатка своди на решавање следећег система једначина

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 200 + 3 \\ 4x + 2y &= 200 - 22. \end{aligned}$$

Приметимо да су коефицијенти уз y у обе једначине једнаки. Због тога је овај систем најпогодније решавати методом супротних коефицијената.

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 203 \\ 4x + 2y &= 178 \quad / \cdot (-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 203 \\ -4x - 2y &= -178 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 203 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \cdot 25 + 2y &= 203 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 125 + 2y &= 203 \quad / - 125 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2y &= 78 \quad / : 2 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= 39 \\ x &= 25 \end{aligned}$$

На основу претходног можемо да закључимо да информације јесу довољне за одређивање појединачних цена свеске и маркера. Свеска кошта 25 динара, а маркер 39 динара.

2.2 Системи линеарних једначина у средњој школи

У оквиру овог поглавља бавићемо се системима линеарних једначина на начин на који се изучавају у гимназијама и средњим техничким школама. Системи линеарних једначина се обнављају већ у првом разреду гимназије[3], при чему се знање из осмог разреда основне школе проширује тако што се уводи више променљивих, те самим тим и више једначина, а осим тога уводе се и једначине са параметром. У трећем разреду гимназије се градиво које се тиче система линеарних једначина даље проширује, изучавају се детерминанте и Крамерово правило. Током трећег разреда је акценат управо на решавању система линеарних једначина применом Крамеровог првила.[4]

Системи линеарних једначина у првом разреду средње школе

Општи облик система од две линеарне једначине са две непознате x и y је

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned} \tag{2.8}$$

где су $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.
Решење система (2.8) је сваки уређени пар (x_0, y_0) који, заменом x са x_0 и y са y_0, обе једначине преводи у тачне једнакости, односно за који важи да је

$$\begin{aligned} a_1x_0 + b_1y_0 &= c_1, \\ a_2x_0 + b_2y_0 &= c_2. \end{aligned}$$

Из основне школе су познате метода супротних коефицијената и метода замене, а овде ћемо обрадити још једну методу за решавање система линеарних једначина, која се може врло једноставно уопштити и на случај система са више непознатих[4]. У питању је *Гаусов поступак за решавање система линеарних једначина.*

[4]Општи облик ове методе дат је у поглављу „Системи линеарних једначина“, теорема 2.0.2

Претпоставимо да је у систему (2.8) бар један од коефицијената $a_i,\ b_i, (i = 1, 2)$ различит од нуле. Без умањења општости можемо претпоставити да је то баш a_1 (сличан је поступак уколико бисмо узели да је то било који од других коефицијената). Ако помножимо прву једначину система (2.8) бројем $-\dfrac{a_2}{a_1}$ и тако добијену једначину додамо другој једначини, добијамо систем

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y = c_1, \\ &\left(b_2 - \frac{a_2b_1}{a_1}\right)y = c_2 - \frac{a_2c_1}{a_1}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Добијени систем је еквивалентан полазном и то се може лако доказати. Означимо са $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Тада се систем (2.9) може записати у облику

$$\begin{aligned} &a_1x + b_1y = c_1, \\ &\Delta \cdot y = a_1c_2 - a_2c_1. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Сада ћемо посматрати случајеве у зависности од вредности Δ.

1. Ако је $\Delta \neq 0$ онда друга једначина система (2.10) има јединствено решење
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}.$$
Заменом овог израза у прву једначину система добијамо
$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}.$$
Дакле, у овом случају систем има јединствено решење (x, y) где је
$$\begin{aligned} x &= \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta}, \\ y &= \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta}. \end{aligned}$$

2. Ако је $\Delta = 0$ и $a_1c_2 - a_2c_1 \neq 0$ онда друга једначина система (2.10) нема решење, па ни систем нема решење.

3. Ако је $\Delta = 0$ и $a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ онда је решење друге једначине система (2.10) произвољан реалан број y. Заменом у прву једначину система добијамо да је
$$x = \frac{c_1 - b_1y}{a_1},$$
што је могуће на основу претпоставке да је $a_1 \neq 0$.
Дакле, у овом случају систем има бесконачно много решења, то је сваки уређени пар облика
$$\left(\frac{c_1 - b_1y}{a_1}, y\right), y \in \mathbb{R}.$$

Остаје нам да размотримо случај када су сви бројеви a_i, $b_i (i = 1, 2)$ једнаки нули. Одатле следи да је и $\Delta = 0$. Тада систем (2.8) има облик
$$\begin{aligned} 0 \cdot x + 0 \cdot y &= c_1, \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y &= c_2, \end{aligned}$$
одакле је јасно да

а) ако је бар један од бројева c_i, $i = 1, 2$ различит од нуле, систем (2.8) нема решења;

б) ако је $c_1 = c_2 = 0$, систем (2.8) има бесконачно много решења. Сваки уређени пар (x, y), где је $x, y \in \mathbb{R}$ је решење система.

Теорема 2.2.1. Нека је
$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned} \tag{2.11}$$
систем једначина са непознатим x и y, где су a_i, b_i и c_i $(i = 1, 2)$ дати реални бројеви и $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. Тада

1. ако је $\Delta \neq 0$ тада систем има јединствено решење (x, y) где је
$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta};$$

2. ако је $\Delta = 0$ и бар један од бројева $c_1b_2 - c_2b_1$ и $a_1c_2 - a_2c_1$ различит од нуле, систем (2.11) нема решење;

3. ако је $\Delta = c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ могући су следећи случајеви:

   а) ако је бар један од бројева a_i, b_i различит од нуле, тада систем (2.11) има бесконачно много решења[5];

   б) ако су сви a_i, b_i једнаки нули и бар један од бројева c_i је различит од нуле, тада систем (2.11) нема решења;

   в) ако су сви a_i, b_i и c_i једнаки нули, тада систем (2.11) има бесконачно много решења. Решење је сваки уређени пар (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$.

Пример 2.2.1. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6, \\ -6x - 3y &= -9. \end{aligned}$$

Решење. Једноставним рачуном долазимо до тога да је

$$\begin{aligned} \Delta &= 0, \\ c_1b_2 - c_2b_1 &= 6 \cdot (-3) - (-9) \cdot 2 = -18 + 18 = 0, \\ a_1c_2 - a_2c_1 &= 4 \cdot (-9) - (-6) \cdot 6 = -36 + 36 = 0 \end{aligned}$$

па, на основу претходне теореме (случај 3.а), можемо да закључимо да ће систем имати бесконачно много решења. Остаје нам да видимо ког облика су решења.

$$\begin{aligned} 4x + 2y &= 6 \quad / : 2, \\ -6x - 3y &= -9 \quad / : (-3). \end{aligned}$$

Видимо да након скраћивања добијамо систем са две еквивалентне једначине

$$\begin{aligned} 2x + y &= 3, \\ 2x + y &= 3, \end{aligned}$$

а решење овог система је сваки уређени пар (x, y) који задовољава једначину $2x + y = 3$, то јест сваки уређени пар облика $(x, 3 - 2x)$, где је $x \in \mathbb{R}$.

[5] показали смо у уводном делу случај када је a_1 различито од нуле

Напомена. Приликом решавања система једначина у задацима није неопходно експлицитно рачунати Δ и разлике $c_1b_2 - c_2b_1$ и $a_1c_2 - a_2c_1$, довољно је еквивалентним трансформацијама трансформисати систем до најједноставнијег облика.

Пример 2.2.2. Решити систем

$$\begin{aligned}(x+1)^2 + (y-2)^2 &= (x-2)^2 + (y+1)^2,\\ (x-2)^2 + (y+2)^2 &= (x+2)^2 + (y-1)^2 + 1.\end{aligned}$$

Решење. Иако на први поглед делује да је у питању систем две квадратне једначине са две непознате, након што израчунамо све квадрате бинома, наш систем постаје

$$\begin{aligned}x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1,\\ x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 &= x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + 1,\end{aligned}$$

а након сређивања добијамо систем

$$\begin{aligned}x - y &= 0,\\ -8x + 6y &= -2,\end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned}x &= y,\\ -4x + 3y &= -1,\end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned}x &= y,\\ x &= 1.\end{aligned}$$

Из последњег пара једначина се јасно види да је решење полазног система уређени пар $(1, 1)$.

Системи линеарних једначина у трећем разреду средње школе

У првом разреду средње школе изучавају се системи од две линеарне једначине са две непознате. Решавање се своди на примену Гаусове методе. У трећем разреду се изучавају детерминанте те се знање о њима примењује и на решавање система линеарних једначина од две (три) једначине са две (три) непознате. Такође, понавља се Гаусова метода, при чему се учи њена примена за решавање система једначина са више непознатих.

Системи од две линеарне једначине са две непознате

Општи облик система од две линеарне једначине са две непознате x и y је

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1, \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где су $a_1,\ a_2,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2 \in \mathbb{R}$.
Означимо са $\Delta = a_1b_2 - a_2b_1$. За систем једначина (2.12) у првом разреду средње школе је показано следеће:

1. ако је $\Delta \neq 0$, систем (2.12) има јединствено решење (x, y) где је:
$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{\Delta},$$
$$y = \frac{a_1c_2 - a_2c_1}{\Delta};$$
2. ако је $\Delta = 0$ и бар један од бројева $c_1b_2 - c_2b_1$, $a_1c_2 - a_2c_1$ различит од нуле, систем (2.12) нема решења;
3. ако је $\Delta = c_1b_2 - c_2b_1 = a_1c_2 - a_2c_1 = 0$ разликујемо случајеве
   а) ако је бар један од бројева a_1, a_2, b_1, b_2 различит од нуле тада систем (2.12) има бесконачно много решења;
   б) ако је $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = 0$ и бар један од бројева c_1, c_2 различит од нуле, систем (2.12) нема решења;
   в) ако је $a_1 = a_2 = b_1 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$, систем (2.12) има бесконачно много решења.

Добијене резултате можемо погодније записати, а самим тим и запамтити, увођењем појма детерминанте.
За било које бројеве a, b, c и d дефинишемо следећи израз

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

који се назива *детерминанта реда два.*
Посматрајући детерминанту разликујемо две *врсте* и две *колоне*. Бројеви a и c чине прву колону детерминанте, док бројеви b и d чине другу колону. Прву врсту чине бројеви a и b, док другу врсту чине бројеви c и d.
Сада можемо да формирамо детерминанте које ће нам олакшати решавање система једначина (2.12). Детерминанту формирану од коефицијената уз непознате x и y означаваћемо са D и она има облик

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{2.13}$$

Детерминанту (2.13) називамо *детерминанта система* (приметимо да је $\Delta = D$). Ако заменимо прву колону детерминанте (2.13) (односно, коефицијенте уз x) слободним члановима c_1 и c_2 добијамо детерминанту

$$D(x) = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \tag{2.14}$$

а ако слободним члановима заменимо другу колону детерминанте (2.13) (односно, коефицијенте уз y) добијамо

$$D(y) = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}. \tag{2.15}$$

Сада резултати до којих смо дошли за решења система једначина (2.12) могу да се формулишу на следећи начин:

1. ако је $D \neq 0$, систем једначина (2.12) има јединствено решење облика $\left(\dfrac{D(x)}{D}, \dfrac{D(y)}{D}\right)$;
2. ако је $D = 0$ и $D(x) \neq 0$ или $D(y) \neq 0$, систем једначина (2.12) нема решења;

3. ако је $D = D(x) = D(y) = 0$, систем једначина (2.12) има бесконачно много решења или нема решења.

Пример 2.2.3. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2y &= 5, \\ 2x + y &= 4. \end{aligned}$$

Решење. Формирајмо одговарајуће детерминанте:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 1 - 4 = -3,$$

$$D(x) = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5 \cdot 1 - 2 \cdot 4 = 5 - 8 = -3,$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 4 - 10 = -6.$$

На основу резултата видимо да систем има јединствено решење и то је уређени пар $(x, y) = (1, 2)$.

Пример 2.2.4. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} ax + y &= 1, \\ x + ay &= 1. \end{aligned}$$

у зависности од реалног параметра a.
Решење. Формирајмо одговарајуће детерминанте:

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a \cdot a - 1 \cdot 1 = a^2 - 1 = (a-1)(a+1),$$

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = 1 \cdot a - 1 \cdot 1 = a - 1,$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a \cdot 1 - 1 \cdot 1 = a - 1.$$

Систем ће имати јединствено решење за $D \neq 0$, односно за $a \neq 1$ и $a \neq -1$. У том случају је решење система

$$(x, y) = \left(\frac{D(x)}{D}, \frac{D(y)}{D} \right) = \left(\frac{a-1}{(a-1)(a+1)}, \frac{a-1}{(a-1)(a+1)} \right)$$

тј. $(x,y)=\left(\dfrac{1}{a+1},\dfrac{1}{a+1}\right)$ за $a\in\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$.
Остаје нам да размотримо случајеве када је $a=-1$ и $a=1$.
Ако је $a=-1$ тада систем постаје

$$\begin{aligned} -x+y&=1,\\ x-y&=1. \end{aligned}$$

Сабирањем прве и друге једначине добијамо да је $0=2$ што није могуће, па систем нема решења.
Ако је $a=1$ тада систем постаје

$$\begin{aligned} x+y&=1,\\ x+y&=1. \end{aligned}$$

Имамо две еквивалентне једначине па закључујемо да систем има бесконачно много решења облика

$$(1-y,y),\quad y\in\mathbb{R}.$$

Сада ћемо навести нека важна својства детерминанти реда два.

1. Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места. (односно, ако прва врста постане прва колона, а друга врста друга колона)

2. Ако две врсте (колоне) замене места, детерминанта мења знак.

3. Ако се једна врста (колона) помножи бројем k тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k.

4. Ако су две врсте (колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула.

5. Вредност детерминанте се не мења ако се једној врсти (колони) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) помножени неким бројем.

Наведена својства се користе приликом израчунавања детерминанти чији су елементи велики бројеви како би нам олакшала рачунање.

Системи од три линеарне једначине са три непознате

Да бисмо могли да говоримо о решавању система од три линеарне једначине са три непознате применом детерминанти, потребно је да прво дефинишемо детерминанту реда три.

Детерминанта реда три дефинише се помоћу једнакости

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix}. \tag{2.16}$$

Потребно је да обратимо пажњу на који начин смо добили детерминанте реда два на десној страни једнакости. Прву од њих добили смо одбацивањем прве врсте и прве колоне полазне детерминанте реда три (то су врста и колона у којима се налази елемент a_1). Друга је добијена на сличан начин, тако што смо одбацили врсту и колону у којима се налази елемент b_1, док је трећа добијена одбацивањем врсте и колоне које садрже елемент c_1. Друга важна ствар коју је потребно приметити је алтернирање знакова, односно, полазимо од знака $+$, затим долази знак $-$, а затим опет знак $+$. Овакво израчунавање детерминанте назива се *развој по првој врсти*.
Даљим израчунавањем детерминанти реда два једнакост (2.16) постаје:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} &= a_1b_2c_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 \\ &= a_1b_2c_3 + b_1c_2a_3 + c_1a_2b_3 - c_1b_2a_3 - a_1c_2b_3 - b_1a_2c_3. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Последњи израз нам омогућује да израчунамо детерминанту реда три применом такозваног *Сарусовог правила*. Илустровано Сарусово правило изгледа овако:

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_1 & b_1 & c_1 & a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & a_3 & b_3 \end{array}\right. .$$

Датој детерминанти допишемо са стране прву и другу колону а затим

множимо бројеве дијагонално. Увек полазимо од елемента који се налази у горњем левом углу, у овом случају то је елемент a_1. Сваки од три производа које добијамо множењем елемената повезаних црвеним цртицама како је приказано на шеми имаће знак $+$. Затим полазимо од елемента b_1 и множимо елементе повезане плавим цртицама онако како је приказано на шеми. Сваки од ова три производа имаће знак $-$.
На овај начин добијамо баш једнакост (2.17).
Детерминанту осим по првој врсти можемо развити и по првој колони, односно важи:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Приликом развоја по првој колони, детерминанте реда два са десне стране једнакости добијају се на исти начин као што се добијају приликом развоја по првој врсти у једнакости (2.16).
Наведимо сада нека важна својства детерминанти реда три.

1. Вредност детерминанте се не мења ако врсте и колоне замене места.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Ово својство можемо доказати директним проверавањем, тако што детерминанту са леве стране развијемо по првој врсти, а детерминанту са десне стране једнакости по првој колони.

2. Ако две врсте (колоне) замене места, детерминанта мења знак. Ово својство се доказује директним проверавањем.

3. Ако се једна врста (колона) помножи бројем k тада је вредност детерминанте такође помножена бројем k.
Докажимо једнакост:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Ако развијемо детерминанту са леве стране једнакости по првој колони добијамо да је:

$$\begin{vmatrix} ka_1 & b_1 & c_1 \\ ka_2 & b_2 & c_2 \\ ka_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = ka_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - ka_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + ka_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= k\left(a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \right) = k \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4. Ако су две врсте (колоне) детерминанте пропорционалне, вредност детерминанте је нула.
За доказ овог својства претпоставимо да је вредност детерминанте чије су две врсте (колоне) пропорционалне D и да је k коефицијент пропорционалности. На основу С.3 знамо да важи да је $D = k\Delta$, односно, коефицијент може да се „извуче испред детерминанте“. Након тога детерминанта Δ има две врсте (колоне) које су идентичне. Уколико те две врсте (колоне) замене места, на основу С.2 знамо да детерминанта мења знак па важи да је $\Delta = -\Delta$, одакле следи да је $\Delta = 0$, па је и $D = k\Delta = 0$.

5. Вредност детерминанте се не мења ако се једној врсти (колони) додају одговарајући елементи друге врсте (колоне) помножени неким бројем.
За доказ овог својства довољно је показати да важи следећа једнакост:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \tag{2.18}$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 + kb_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 + kb_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 + kb_2 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_3 & c_3 + kb_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 + kb_1 \\ b_2 & c_2 + kb_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Последња једнакост следи из тога што С.5 важи за детерминанте реда два, а то је управо десна страна једнакости (2.18).

Размотримо сада систем од три линеарне једначине са три непознате x, y и z

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= d_1, \\ a_2x + b_2y + c_2z &= d_2, \\ a_3x + b_3y + c_3z &= d_3, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где су $a_1,\ a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ \ b_3,\ c_1,\ c_2,\ c_3 \in \mathbb{R}$.

Формирајмо детерминанту система (2.19) од коефицијената уз x, y и z, на исти начин као у случају система од две једначине са две непознате:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Уведимо и ознаке

$$D(x) = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D(y) = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix},\ D(z) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix},$$

аналогно ознакама које смо користили за системе од две једначине са две непознате.
Покажимо сада да важи да је $xD = D(x)$:

$$xD = \begin{vmatrix} a_1x & b_1 & c_1 \\ a_2x & b_2 & c_2 \\ a_3x & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

сада додајемо првој колони елементе друге помножене са y (на основу наведених својстава за детерминанте знамо да се вредност неће променити)

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

сада ћемо додати првој колони елементе треће колоне помножене са z

$$= \begin{vmatrix} a_1x + b_1y + c_1z & b_1 & c_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z & b_2 & c_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

а на основу (2.19) знамо да је то

$$= \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = D(x).$$

На исти начин се доказује да је $yD = D(y)$ и да је $zD = D(z)$, на основу чега, за $D \neq 0$, добијамо јединствено решење система (2.19):

$$x = \frac{D(x)}{D},\ y = \frac{D(y)}{D},\ z = \frac{D(z)}{D}.$$

У случају када је $D = 0$, тада систем има бесконачно много решења или нема решење, у зависности од вредности $D(x)$, $D(y)$ и $D(z)$.
Илустроваћемо сва три случаја кроз наредне примере.

Пример 2.2.5. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

Решење. Прво ћемо да израчунамо D, $D(x)$, $D(y)$ и $D(z)$.

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 0 - 3 - 3 = -6.$$

На исти начин рачунамо преостале детерминанте и добијамо

$$D(x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -6,\ D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = -12,\ D(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -18.$$

С обзиром на то да је $D = -6 \neq 0$, систем има јединствено решење облика

$$(x, y, z) = \left(\frac{D(x)}{D}, \frac{D(y)}{D}, \frac{D(z)}{D}\right),$$

односно

$$(x, y, z) = \left(\frac{-6}{-6}, \frac{-12}{-6}, \frac{-18}{-6}\right) = (1, 2, 3).$$

Пример 2.2.6. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 7 \\ 5x - 4y + 7z &= 1 \\ 7x - 3y + 6z &= 8 \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & -4 & 7 \\ 7 & -3 & 6 \end{vmatrix} &= 2\begin{vmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} \\ &= 2 \cdot (-24 + 21) - 1 \cdot (30 - 49) - 1 \cdot (-15 + 28) \\ &= 2 \cdot (-3) - 1 \cdot (-19) - 1 \cdot 13 = -6 + 19 - 13 = 0. \end{aligned}$$

С обзиром на то да је детерминанта система једнака нули, то значи да систем или нема решења или има бесконачно много решења.
Приметимо следеће, уколико одузмемо прву једначину система од треће једначине добићемо систем облика

$$\begin{aligned} 2x + y - z &= 7 \\ 5x - 4y + 7z &= 1 \\ 5x - 4y + 7z &= 1. \end{aligned} \tag{2.20}$$

То значи да наш нови систем нема три једначине већ две, јер су друга и трећа једначина идентичне. Уколико ставимо да је $z = a,\ a \in \mathbb{R}$ систем можемо написати у следећем облику

$$\begin{aligned} 2x + y &= 7 + a \\ 5x - 4y &= 1 - 7a, \end{aligned}$$

где нам a има улогу параметра. Како систем има две једначине са три непознате не можемо да га решимо помоћу детерминанти већ ћемо наћи решење тако што ћемо изразити y из прве једначине и заменити у другу.

$$\begin{aligned} &y = 7 + a - 2x \\ &5x - 4(7 + a - 2x) = 1 - 7a \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} &y = 7 + a - 2x \\ &5x - 28 - 4a + 8x = 1 - 7a \end{aligned}$$

одакле је

$$\begin{aligned} y &= 7 + a - 2x \\ 13x &= 1 - 7a + 4a + 28 \end{aligned}$$

и коначно добијамо да је

$$x = \frac{29 - 3a}{13},$$

одакле следи да је

$$y = \frac{33 + 19a}{13},$$

па је сваки уређени пар

$$(x, y) = \left(\frac{29 - 3a}{13}, \frac{33 + 19a}{13}\right),$$

за свако $a \in \mathbb{R}$ решење система (2.20), а свака уређена трока

$$(x, y, z) = \left(\frac{29 - 3a}{13}, \frac{33 + 19a}{13}, a\right)$$

је решење полазног система.

Пример 2.2.7. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 7 \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$\begin{aligned} D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (-9 + 4) - 1 \cdot (6 - 6) + 1 \cdot (-4 + 9) \\ &= -5 + 5 = 0. \end{aligned}$$

Могли смо и без рачунања да закључимо да је $D = 0$ јер су прва и трећа колона детерминанте идентичне.

С обзиром на то да је детерминанта система једнака нули, то значи да систем или нема решења или има бесконачно много решења.
Ако саберемо прву и другу једначину система добићемо систем облика

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 3x - 2y + 3z &= 4 \\ 3x - 2y + 3z &= 7, \end{aligned}$$

одакле одузимањем друге од треће једначине система добијамо да је $0 = 3$, што није могуће, па закључујемо да систем нема решења.

Важно је поменути још један појам, **хомоген систем**. То је систем облика

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1z &= 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z &= 0. \\ a_3x + b_3y + c_3z &= 0 \end{aligned} \tag{2.21}$$

Систем (2.21) увек има бар једно решење, а то је уређена тројка $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, које се назива *тривијално решење*. За систем (2.21) важи следеће:

1. ако је $D \neq 0$, систем има тачно једно, и то тривијално, решење;
2. ако је $D = 0$, систем има бесконачно много решења.

Гаусов поступак

Овај поступак описан је на почетку рада, у општем делу о системима линеарних једначина док ће у овом поглављу бити описан поступак који се примењује у трећем разреду средњих школа и гимназија.

Гаусов поступак се састоји у постепеном елиминисању променљивих из система трансформисањем полазног система у што једноставнији облик. Поступак ће бити дат кроз примере, без разматрања теорије.

Пример 2.2.8. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ 2x - y + z &= 3 \\ x - 2y + 2z &= 3. \end{aligned}$$

Решење. Ако прву једначину система саберемо са другом, а затим је помножимо са 2 и додамо трећој добијамо систем

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6\\
3x + 2z &= 9\\
3x + 4z &= 15.
\end{aligned}
$$

Приметимо да смо из друге и треће једначине система елиминисали променљиву y. Сада помножимо другу једначину са -1 па је саберимо са трећом. Добијамо систем

$$
\begin{aligned}
x + y + z &= 6\\
3x + 2z &= 9\\
2z &= 6,
\end{aligned}
$$

који је еквивалентан полазном, а из ког видимо да је $z = 3$. Заменом вредности z у другу једначину система добијамо да је $3x = 3$, односно $x = 1$.
Заменом добијених вредности за x и y у прву једначину полазног система добијамо да је $y = 2$, па је решење полазног система уређена тројка $(x, y, z) = (1, 2, 3)$.

Пример 2.2.9. Решити систем једначина

$$
\begin{aligned}
2x + y - z &= 7\\
5x - 4y + 7z &= 1\\
7x - 3y + 6z &= 8.
\end{aligned}
$$

Решење. Ако прву једначину система, помножену са -4, додамо другој и прву једначину помножену са -3 додамо трећој добијамо следећи систем

$$
\begin{aligned}
2x + y - z &= 7\\
13x + 3z &= 29\\
13x + 3z &= 29.
\end{aligned}
$$

Приметимо да је последњи систем заправо систем од две једначине са три непознате, односно еквивалентан је систему

$$
\begin{aligned}
2x + y - z &= 7\\
13x + 3z &= 29\\
0 &= 0.
\end{aligned}
$$

Из друге једначине система имамо да је $z = \dfrac{29-13x}{3}$, за $x \in \mathbb{R}$. Заменом у прву једначину система добијамо да је

$$y = \frac{50-19x}{3},$$

па су сва решења полазног система дата са

$$(x, y, z) = \left(x, \frac{50-19x}{3}, \frac{29-13x}{3}\right), \ x \in \mathbb{R}.$$

Пример 2.2.10. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 2x - 3y + 2z &= 1 \\ 3x - 2y + 3z &= 7. \end{aligned}$$

Решење. Ако прву једначину система, помножену са 3, додамо другој и прву једначину помножену са 2 додамо трећој једначини система добијамо следећи систем

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 5x + 5z &= 10 \\ 5x + 5z &= 13. \end{aligned}$$

Ако другу једначину система помножену са -1 додамо трећој добијамо систем

$$\begin{aligned} x + y + z &= 3 \\ 5x + 5z &= 10 \\ 0 &= 3, \end{aligned}$$

а последњи систем је противречан па нема решења, а онда их нема ни полазни систем јер су еквивалентни.

Гаусов поступак нам је веома значајан због тога што његовом применом можемо решавати и системе једначина код којих број једначина није једнак броју непознатих.

Пример 2.2.11. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 4 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x - y + 4z &= 1 \\ x + 2y - 13z &= 1. \end{aligned}$$

Решење. Ако прву једначину система, помножену редом са -2, -3 и -1 додамо другој, трећој и четвртој једначини система добијамо следећи систем

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 4 \\ -y - 7z &= -9 \\ -4y - 5z &= -11 \\ y - 16z &= -3. \end{aligned}$$

Ако другу једначину система помножену са -4 додамо трећој и саберемо је са четвртом добијамо систем

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 4 \\ -y - 7z &= -9 \\ 23z &= 25 \\ -23z &= -12. \end{aligned}$$

Након сабирања последње две једначине добићемо непротивречан систем.

$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 4 \\ -y - 7z &= -9 \\ 23z &= 25 \\ 0 &= 16, \end{aligned}$$

па полазни систем нема решења.

Гаусов поступак можемо примењивати и на системе са параметром.

Пример 2.2.12. Решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 5 \\ 2x + 2y - z + 2u &= 6 \\ 3x + 2y - 5z \qquad &= \lambda, \end{aligned}$$

где је λ реалан број.

Решење. Примениһемо Гаусов поступак. Елиминисаһемо променљиву x из система. Помножиһемо прву једначину са -2 и додати другој, а затим ћемо је помножити са -3 и додати трећој једначини полазног система.

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 5 \\ -2y - 7z - 6u &= -4 \\ -4y - 14z - 12u &= \lambda - 15. \end{aligned}$$

Ако другу једначину система помножену са -2 додамо трећој добијамо систем

$$\begin{aligned} x + 2y + 3z + 4u &= 5 \\ -2y - 7z - 6u &= -4 \\ 0 &= \lambda - 7. \end{aligned}$$

Сада је потребно да размотримо могућа решења система у зависности од параметра λ. Ако је $\lambda \neq 7$, систем је противречан, односно нема решења, а ако је $\lambda = 7$ онда полазни систем има бесконачно много решења облика

$$x = 1 + 4z + 2u, \quad y = 2 - \frac{7}{2}z - 2u, \quad z, u \in \mathbb{R}.$$

Глава 3

Задаци са такмичења

У овом поглављу налазе се одабрани задаци са додатне наставе из математике за основну и средњу школу из области линеарних једначина и система линеарних једначина, као и задаци који су ранијих година били на такмичењима.

3.1 Задаци са такмичења у основној школи

1. *(Општинско такмичење 2012.)* Одредити параметар a тако да једначине
$2ax - \frac{1}{3}x = a + 4$ и $-\frac{1}{4}(2x-1) = x - \frac{1+x}{2}$ буду еквивалентне.
Решење. Једначине су еквивалентне када имају исти скуп решења. Како друга једначина нема параметар прво ћемо решити њу, а затим ћемо у зависности од њеног скупа решења одредити вредности параметра a.

$$-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} = \frac{2x-1-x}{2} \quad / \cdot 4,$$
$$-2x + 1 = 2x - 2,$$
$$4x = 3.$$

Видимо да је решење друге једначине $x = \frac{3}{4}$. Заменом у прву једначину добијамо:

$$\frac{3}{2}a - \frac{1}{4} = a + 4 \quad / \cdot 4,$$

$$6a - 1 = 4a + 16,$$
$$2a = 17.$$

Вредност параметра је $a = \dfrac{17}{2}$.

2. *(Државно такмичење из математике 2014.)* Одреди све парове целих бројева (m, n) за које важи $m(m+1) = n(n+2)$.
Решење. Прво ћемо трансформисати једначину на следећи начин:

$$m(m+1) = n(n+2) \quad / \cdot 4,$$
$$4m^2 + 4m = 4n^2 + 8n,$$

Сада допунимо до квадрата бинома:

$$4m^2 + 4m + 1 - 1 = 4n^2 + 8n + 4 - 4,$$
$$(2m+1)^2 - 1 = (2n+2)^2 - 4,$$
$$(2n+2)^2 - (2m+1)^2 = 3.$$

Са леве стране једнакости налази се разлика квадрата.

$$(2n + 2 - 2m - 1)(2n + 2 + 2m + 1) = 3,$$
$$(2n - 2m + 1)(2n + 2m + 3) = 3.$$

Сада ћемо размотрити случајеве. Има их четири, а сваки од њих се своди на решавање система две линеарне једначине са две непознате:

а) $2n - 2m + 1 = 1$ и $2n + 2m + 3 = 3$

$$\begin{aligned} 2n - 2m + 1 &= 1 \\ 2n + 2m + 3 &= 3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2n - 2m &= 0 \\ 2n + 2m &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= m \\ 4m &= 0. \end{aligned}$$

Из последњег система видимо да је решење система уређени пар
$(m, n) = (0, 0)$.
На исти начин решавамо и преостала три случаја.

б) $2n - 2m + 1 = 3$ и $2n + 2m + 3 = 1$
Решење је уређени пар $(m, n) = (-1, 0)$.

в) $2n - 2m + 1 = -1$ и $2n + 2m + 3 = -3$
Решење је уређени пар $(m, n) = (-1, -2)$.

г) $2n - 2m + 1 = -3$ и $2n + 2m + 3 = -1$
Решење је уређени пар $(m, n) = (0, -2)$.

3. *(Државно такмичење 2013.)*
Реши систем једначина

$$\begin{aligned} x - 2y - 1 &= 0 \\ x^2 - 4y^2 + 4y - 17 &= 0 \end{aligned}$$

Решење.

$$x - 2y - 1 = 0$$

$$x^2 - 4y^2 + 4y - 17 = 0$$

$$x = 2y + 1$$

$$(2y + 1)^2 - 4y^2 + 4y - 17 = 0$$

$$x = 2y + 1$$

$$4y^2 + 4y + 1 - 4y^2 + 4y - 17 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= 2y + 1 \\ 8y - 16 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 2y+1 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 5 \\ y &= 2 \end{aligned}$$

4. *(Школско такмичење 1994.)* Одреди сва решења једначине $2x^2 - y^2 = y^2 + 1994$ у скупу целих бројева.
Решење. Прво ћемо трансформисати једначину на следећи начин:

$$2x^2 - 2y^2 = 1994 \quad / : 2,$$

$$x^2 - y^2 = 997,$$

Лева страна једнакости је разлика квадрата па је можемо записати као:

$$(x-y)(x+y) = 997,$$

Како је 997 прост број, надаље посматрамо четири случаја (у сва четири случаја решавамо систем од две једначине са две непознате):

a) $x - y = 1$ и $x + y = 997$

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 997. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + y \\ 1 + 2y &= 997. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 + y \\ 2y &= 996. \end{aligned}$$

Из последњег система видимо да је решење уређени пар $(x, y) = (499, 498)$.

б) $x - y = 997$ и $x + y = 1$.
Решење је уређени пар $(x, y) = (499, -498)$.

в) $x - y = -1$ и $x + y = -997$.
Решење је уређени пар $(x, y) = (-499, -498)$.

г) $x - y = -997$ и $x + y = -1$.
Решење је уређени пар $(x, y) = (-499, 498)$.

5. *(Републичко такмичење 1998.)* Наћи решење система једначина

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x + 4y - 3 \\ y^2 + z^2 &= 4y + 4z + 5 \\ z^2 + x^2 &= 4z + 4x + 2, \end{aligned}$$

у скупу реалних бројева.
Решење. Дати систем можемо да трансформишемо на следећи начин

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4x + 4y - 3 \\ y^2 + z^2 &= 4y + 4z + 5 \\ z^2 + x^2 &= 4z + 4x + 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-2)^2 &= 5 \\ (y-2)^2 + (z-2)^2 &= 13 \\ (z-2)^2 + (x-2)^2 &= 10 \end{aligned}$$

Увођењем смене $(x-2)^2 = X$, $(y-2)^2 = Y$ и $(z-2)^2 = Z$ претходни систем постаје систем линеарних једначина

$$\begin{aligned} X + Y &= 5 \\ Y + Z &= 13 \\ Z + X &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 5 - Y \\ Z &= 13 - Y \\ Z + X &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 5 - Y \\ Z &= 13 - Y \\ 13 - Y + 5 - Y &= 10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 5 - Y \\ Z &= 13 - Y \\ Y &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X &= 1 \\ Z &= 9 \\ Y &= 4 \end{aligned}$$

Враћањем смене коју смо увели из последње једначине имамо да је $(y-2)^2$ одакле је $y = 0$ или $y = 4$.
Такође, како је $(x-2)^2 = 1$ то је $x = 1$ или $x = 3$, а из $(z-2)^2 = 9$ добијамо да је $z = -1$ или $z = 5$. Дакле, решења су уређене тројке (x, y, z) где је $x \in \{1, 3\}$, $y \in \{0, 4\}$ и $z \in \{-1, 5\}$.

6. *(Школско такмичење 2000.)* Лека и Жарко су поделили 1416 динара. Када је Лека потрошио $\frac{4}{7}$ свог дела новца, а Жарко $\frac{3}{8}$ свог, имали су једнаке износе. Колико новца је свако од њих добио приликом поделе?
Решење. Да бисмо решили задатак означићемо са x део новца који је Лека добио приликом поделе, а са y део новца који је припао Жарку. На основу података датих у задатку формирамо следећи систем од две једначине са две непознате

$$\begin{aligned} x + y &= 1416 \\ \frac{3}{7}x &= \frac{5}{8}y \quad / \cdot \frac{7}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=1416\\ x&=\frac{35}{24}y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x&=\frac{35}{24}y\\ \frac{59}{24}y&=1416 \end{aligned}$$

Из последњег система добијамо да је $y = 576$, а $x = 840$. Дакле, Лека је приликом поделе добио 840 динара, док је Жарко добио 576 динара.

7. *(Школско такмичење из математике 2004.)* Збир два броја је 135. Ако 35% једног броја износи колико и 28% другог броја, који су то бројеви?
Решење. Означимо први број са x, а други са y. Тада важи

$$\begin{aligned} x+y&=135\\ 0,35x&=0,28y \quad / : 0,35 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x+y&=135\\ x&=0,8y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1,8y&=135\\ x&=0,8y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y&=75\\ x&=0,8\cdot y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y&=75\\ x&=60 \end{aligned}$$

Дакле, први број је 60, док је други број 75.

8. *(Државно такмичење 2010.)* Реши систем једначина

$$\begin{aligned}|x| + y + z &= 2009\\ x + y + z &= 2010\\ x + y + 2z &= 2011\end{aligned}$$

Решење. Због апсолутне вредности решавање система једначина раздвајамо на два случаја.

$x \geq 0$

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2009\\ x + y + z &= 2010\\ x + y + 2z &= 2011\end{aligned}$$

Ако прву једначину помножимо са -1 и додамо другој добијамо противречан систем

$$\begin{aligned}x + y + z &= 2009\\ 0 &= 1\\ x + y + 2z &= 2011,\end{aligned}$$

а он нема решења.

$x < 0$

$$\begin{aligned}-x + y + z &= 2009\\ x + y + z &= 2010\\ x + y + 2z &= 2011\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-x + y + z &= 2009\\ x + y + z &= 2010\\ z &= 1\end{aligned}$$

Заменом вредности за z полазни систем постаје

$$\begin{aligned}-x + y &= 2008\\ x + y &= 2009,\end{aligned}$$

одакле је $y = \dfrac{4017}{2}$, па је $x = \dfrac{1}{2}$ што је противречно претпоставци да је $x < 0$.

Закључујемо да дати систем нема решења.

3.2 Задаци са такмичења у средњој школи

Одабрани задаци са такмичења из математике на различитим нивоима за ученике средњих школа[5][7][8]

1. *(Републичко такмичење 1964., 3. разред)* Решити по x, y и z систем
$$\begin{aligned} ax + by + z &= 1 \\ x + aby + z &= b \\ x + by + az &= 1, \end{aligned}$$
где су a и b дати бројеви. Дискусија!
Решење. Детерминанта система је
$$D = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)^2(a+2).$$
Остале детерминанте су
$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & b & 1 \\ b & ab & 1 \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b),$$
$$D(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = (a-1)(b(a+1)-2),$$
$$D(z) = \begin{vmatrix} a & b & 1 \\ 1 & ab & b \\ 1 & b & 1 \end{vmatrix} = b(a-1)(a-b).$$
Ако је $a \neq 1$ и $b \neq 0$ и $a \neq -2$ онда је и $D \neq 0$ па систем има јединствено решење
$$(x, y, z) = \left(\frac{a-b}{(a-1)(a+2)}, \frac{ab+b-2}{b(a-1)(a+2)}, \frac{a-b}{(a-1)(a+2)} \right).$$

Ако је $b = 0$ и $a \neq 1$ и $a \neq -2$ онда је $D = D(x) = D(z) = 0$ и $D(y) \neq 0$ па систем нема решења.
Ако је $b = 0$ и $a = 1$ систем постаје

$$\begin{aligned} x + z &= 1 \\ x + z &= 0 \\ x + z &= 1, \end{aligned}$$

а овај систем је противречан па нема решења.
Ако је $b \neq 0$ и $a = 1$ систем постаје

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ x + by + z &= b \\ x + by + z &= 1, \end{aligned}$$

одузимањем прве једначине од друге и треће добијамо систем

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ 0 &= b - 1 \\ 0 &= 0, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} x + by + z &= 1 \\ 0 &= b - 1, \end{aligned}$$

одакле видимо да ако је $b = 1$ систем има бесконачно много решења, док је за $b \neq 1$ систем противречан па нема решења.
Ако је $b = 0$ и $a = -2$ систем постаје

$$\begin{aligned} -2x + z &= 1 \\ x + z &= 0 \\ x - 2z &= 1. \end{aligned}$$

Из друге једначине имамо да је $x = -z$, заменом у прву и трећу добијамо да је $3z = 1$ и $-3z = 1$, а то није могуће. Дакле, систем је такође противречан па нема решења.
Ако је $b \neq 0$ и $a = -2$ онда је $D = 0$, $D(x) = D(z) = 3b(b + 2)$

и $D(y) = 3(b+2)$ па за $b \neq -2$ систем нема решење. За $b = -2$ систем постаје

$$\begin{aligned} -2x - 2y + z &= 1 \\ x + 4y + z &= -2 \\ x - 2y - 2z &= 1, \end{aligned}$$

одузимањем прве једначине од треће добијамо систем

$$\begin{aligned} -2x - 2y + z &= 1 \\ x + 4y + z &= -2 \\ 3x - 3z &= 0. \end{aligned}$$

Из последње једначине је $x = z$. Заменом у прву и другу добијамо систем

$$\begin{aligned} -2x - 2y + x &= 1 \\ x + 4y + x &= -2, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} -x - 2y &= 1 \\ x &= -1 - 2y. \end{aligned}$$

Заменом друге у прву једначину добијамо да је $1 + 2y - 2y = 1$ одакле закључујемо да систем има бесконачно много решења облика

$$(y, -1-2y), \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. *(Републичко такмичење 1966., 1. разред)* Решити систем једначина

$$\begin{aligned} mx - 2y &= 3 \\ 3x + my &= 4, \end{aligned}$$

и одредити m тако да решења буду позитивна.

Решење. Из прве једначине имамо да је $y = \dfrac{mx-3}{2}$, заменом у другу добијамо

$$3x + m\frac{mx-3}{2} = 4 \quad / \cdot 2,$$

$$6x + m^2x - 3m = 8,$$
$$x(m^2 + 6) = 8 + 3m,$$
$$x = \frac{8 + 3m}{m^2 + 6},$$

па можемо закључити да је x позитивно ако је $m > -\frac{8}{3}$.

$$y = \frac{m}{2}x - \frac{3}{2},$$
$$y = \frac{m}{2} \cdot \frac{8 + 3m}{m^2 + 6} - \frac{3}{2},$$
$$y = \frac{8m + 3m^2 - 3m^2 - 18}{2(m^2 + 6)},$$
$$y = \frac{8m - 18}{2(m^2 + 6)}.$$

Како је именилац увек већи од нуле, y ће бити позитивно ако је $8m - 18 > 0$, а то је за $m > \frac{9}{4}$.

Коначно, решење система ће бити позитивно за $m > \frac{9}{4}$.

3. *(Републичко такмичење 1967., 1. разред)* Дат је систем једначина

$$\begin{aligned} ax - 4y + 2 &= 0 \\ x - ay - 1 &= 0, \end{aligned}$$

где је a реалан параметар.

1) Одредити параметар a тако да систем
   а) има једно решење (x, y);
   б) нема ни једно решење;
   в) има бесконачно много решења.
2) Да ли дати систем једначина може имати целобројна решења?

Решење. Из друге једначине имамо да је $x = ay + 1$, заменом у прву једначину добијамо да је

$$a^2y + a - 4y + 2 = 0,$$

$$(a^2 - 4)y + a + 2 = 0.$$

За $a \neq \pm 2$ важи

$$y = \frac{a+2}{4-a^2},$$

па је

$$x = \frac{2a+4}{4-a^2}.$$

Ако је $a = 2$ систем постаје

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2 &= 0 \\ x - 2y - 1 &= 0 \quad / \cdot (-2), \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} 2x - 4y + 2 &= 0 \\ -2x + 4y + 2 &= 0. \end{aligned}$$

Сабирањем једначина добијамо да је $4 = 0$, дакле систем нема решења.
За $a = -2$ систем постаје

$$\begin{aligned} -2x - 4y + 2 &= 0 \quad / : 2 \\ x + 2y - 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -x - 2y + 1 &= 0 \\ 2x + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2y \\ 2 - 4y + 4y - 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 1 - 2y \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

па закључујемо да систем има бесконачно много решења облика $(x, y) = (1 - 2y, y)$, где је $y \in \mathbb{R}$. На основу претходног:

1) а) Систем ће имати јединствено решење за $a \neq \pm 2$.
   б) Систем нема решења ако је $a = 2$.
   в) Систем има бесконачно много решења ако је $a = -2$.
2) Систем ће имати целобројна решења ако $a - 2$ дели 2 и дели 1, тј. ако је $2 - a = \pm 1$, па је $a \in \{1, 3\}$.

4. *Републичко такмичење 2003., 3. разред, Б категорија* Решити систем у зависности од реалног параметра a[1]:

$$\begin{aligned} ax + 6y + z &= 1 \\ x + 6ay + z &= 6 \\ x + 6y + az &= 1. \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$D = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)^2(a+2).$$

Израчунајмо и $D(x), D(y), D(z)$:

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 6 & 6a & 1 \\ 1 & 6 & a \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6),$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2(a-1)(3a+2),$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} a & 6 & 1 \\ 1 & 6a & 6 \\ 1 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 6(a-1)(a-6).$$

[1] Општији облик задатка је био на републичком такмичењу 1964., 3. разред., његово решење се налази на почетку овог поглавља

За $a \neq 1$ и $a \neq -2$ важи да је $D \neq 0$ па полазни систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(\frac{a-6}{(a-1)(a+2)}, \frac{3a+2}{3(a-1)(a+2)}, \frac{a-6}{(a-1)(a+2)}\right).$$

За $a = -2$ важи да је $D = 0$ и $D(x) \neq 0$ па систем нема решења.
За $a = 1$ је $D = D(x) = D(y) = D(z) = 0$ па је систем потребно решити Гаусовом методом. Заменом вредности добијамо:

$$\begin{aligned} x + 6y + z &= 1 \\ x + 6y + z &= 6 \\ x + 6y + z &= 1. \end{aligned}$$

Када прву једначину помножену са -1 додамо другој добијамо систем

$$\begin{aligned} x + 6y + z &= 1 \\ 0 &= 5 \\ x + 6y + z &= 1. \end{aligned}$$

Овај систем је противречан па закључујемо да за $a = 1$ полазни систем једначина нема решења.

5. *(Републичко такмичење 2004., 3. разред, Б категорија)* У зависности од реалног параметра a решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2. \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{vmatrix} = (3 + a)(2 - a).$$

Остале детерминанте су

$$D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 3 & a \\ 2 & a & 3 \end{vmatrix} = (3 + a)(2 - a),$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 2 - a,$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 2 - a.$$

За $a \neq -3$ и $a \neq 2$ полазни систем има јединствено решење

$$(x, y, z) = \left(1, \frac{1}{3+a}, \frac{1}{3+a}\right)$$

Ако је $a = -3$ детерминанта система је нула, а $D(y) \neq 0$ и $D(z) \neq 0$ па систем нема решења.
Ако је $a = 2$ Крамерова метода нам неће дати одговор. Заменом вредности a систем постаје

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + 2z &= 3 \\ x + 2y + 3z &= 2. \end{aligned}$$

Ако прву једначину помножену са 2 додамо другој, а помножену са 3 трећој добијамо систем

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 4x + 5y &= 5 \\ 4x + 5y &= 5. \end{aligned}$$

Ако изразимо x и z преко y добијамо облик решења (којих има бесконачно много)

$$(x, y, z) = \left(\frac{5-5y}{4}, y, \frac{-y+1}{4}\right), y \in \mathbb{R}.$$

6. *(Окружно такмичење 2005., 3. разред, Б категорија)* У зависности од реалних параметара α и β решити систем једначина

$$\begin{aligned} x + y + \beta z &= \alpha + 2\beta \\ x + \alpha y + z &= \alpha^2 + \beta + 1 \\ x + y + 2\beta z &= \alpha + 3\beta. \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \beta \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 2\beta \end{vmatrix} = \beta(\alpha - 1).$$

Систем има јединствено решење за $D \neq 0$, односно за $\beta \neq 0$ и $\alpha \neq 1$.
Остале детерминанте су

$$D(x) = \begin{vmatrix} \alpha + 2\beta & 1 & \beta \\ \alpha^2 + \beta + 1 & \alpha & 1 \\ \alpha + 3\beta & 1 & 2\beta \end{vmatrix} = \beta^2(\alpha - 1),$$

$$D(y) = \begin{vmatrix} 1 & \alpha + 2\beta & \beta \\ 1 & \alpha^2 + \beta + 1 & 1 \\ 1 & \alpha + 3\beta & 2\beta \end{vmatrix} = \alpha\beta(\alpha - 1),$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \alpha + 2\beta \\ 1 & \alpha & \alpha^2 + \beta + 1 \\ 1 & 1 & \alpha + 3\beta \end{vmatrix} = \beta(\alpha - 1),$$

а то решење је

$$(x, y, z) = (\beta, \alpha, 1).$$

За $D = 0$ разликујемо два случаја:

1) $\beta = 0$
Систем постаје

$$\begin{aligned} x + y &= \alpha \\ x + \alpha y + z &= \alpha^2 + 1 \\ x + y &= \alpha. \end{aligned}$$

Из прве и треће једначине имамо да је $y = \alpha - x$, заменом у другу добијамо да је $z = 1 + (\alpha - 1)x$ па систем има бесконачно много решења облика

$$(x, y, z) = (x, \alpha - x, 1 + (\alpha - 1)x), x \in \mathbb{R}.$$

2) $\alpha = 1$
Систем постаје

$$\begin{aligned} x + y + \beta z &= 1 + 2\beta \\ x + y + z &= \beta + 2 \\ x + y + 2\beta z &= 1 + 3\beta. \end{aligned}$$

Ако додамо прву једначину помножену са -1 другој и трећој добијамо систем

$$\begin{aligned} x + y + \beta z &= 1 + 2\beta \\ z &= 1 \\ z &= 1. \end{aligned}$$

Закључујемо да систем има бесконачно много решења облика

$$(x, y, z) = (x, 1 + \beta - x, 1), x \in \mathbb{R}.$$

7. *(Општинско такмичење 2007., 1. разред, А категорија)* Решити систем једначина ($[x]$ је цео део реалног броја x)

$$\begin{aligned} x - y &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007. \end{aligned}$$

Решење. Реалан број x можемо написати као

$$x = [x] + \{x\},$$

где је $0 \leq \{x\} < 1$. Дакле, прву једначину система можемо записати у следећем облику

$$[x] + \{x\} - [y] - \{y\} = 2005,$$

одакле закључујемо да је $\{x\} - \{y\} \in \mathbb{Z}$, тј. $\{x\} = \{y\}$, па систем постаје

$$\begin{aligned} [x] - [y] &= 2005 \\ [x] + [y] &= 2007, \end{aligned}$$

одакле је $[x] = 2006$, а $[y] = 1$ па систем има бесконачно много решења облика

$$(x, y) = (2006 + \omega, 1 + \omega), 0 \leq \omega < 1.$$

8. *(Општинско такмичење 2007., 3. разред, Б категорија)*[2] Решити систем једначина

$$\begin{aligned} 2x+y+z+u&=1\\ x+2y+z+u&=1\\ x+y+2z+u&=1\\ x+y+z+2u&=1. \end{aligned}$$

Решење. Уколико прву једначину, помножену са -1 додамо редом другој, трећој и четвртој, након сређивања, добијамо систем

$$\begin{aligned} 2x+y+z+u&=1\\ x&=y\\ x&=z\\ x&=u. \end{aligned}$$

Заменом у прву једначину добијамо да је $x=y=z=u=\dfrac{1}{5}$. Дакле, решење система је $(x,y,z,u)=\left(\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{1}{5}\right)$.

9. *(Општинско такмичење 2008., 3. разред, А категорија)* Нека је $a\in\mathbb{R}$. У скупу реалних бројева решити систем

$$\begin{aligned} x+y+(1-a)z&=a\\ (1-a)x-y+z&=-1\\ x+(a-1)y-z&=0. \end{aligned}$$

Решење. Детерминанта система је

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1-a\\ 1-a & -1 & 1\\ 1 & a-1 & -1 \end{vmatrix}=(a-2)^2(a+1).$$

Остале детерминанте су

$$D(x)=\begin{vmatrix} a & 1 & -a\\ -1 & -1 & 1\\ 0 & a-1 & -1 \end{vmatrix}=0,$$

[2] Задатак је био у часопису „Тангента 38/2“

$$D(y) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1-a \\ 1-a & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(a-2)(a+1),$$

$$D(z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & a \\ 1-a & -1 & -1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{vmatrix} = -(a-2)(a+1)(a-1).$$

За $a \neq 2$ и $a \neq -1$ је $D \neq 0$ па систем има јединствено решење облика

$$(x, y, z) = (0, -\frac{1}{a-2}, \frac{a-1}{a-2}).$$

За $a = 2$ систем има облик

$$\begin{aligned} x + y - z &= 2 \\ -x - y + z &= -1 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

Приметимо да из прве и треће једначине добијамо да је $0 = 2$, дакле систем је немогућ, односно нема решења.
За $a = -1$ систем има облик

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 2x - y + z &= -1 \\ x - 2y - z &= 0. \end{aligned}$$

Ако прву једначину додамо другој и прву једначину помножену са 2 додамо трећој систем постаје

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= -1 \\ 3x + 3z &= -2 \\ 3x + 3z &= -2, \end{aligned}$$

односно

$$\begin{aligned} y &= -\frac{1}{3} - z \\ x &= -\frac{2}{3} - z. \end{aligned}$$

Дакле систем има бесконачно много решења облика

$$(x, y, z) = \left(-\frac{2}{3} - z, -\frac{1}{3} - z, z \right), z \in \mathbb{R}.$$

10. Систем једначина[3]

$$\begin{aligned} bx + ay &= c \\ cx + az &= b \\ cy + bz &= a, \end{aligned}$$

има јединствено решење. Доказати да је $abc \neq 0$ и наћи то решење.

Решење. Детерминанта система је

$$D = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -2abc.$$

Како нам је у тексту речено да систем има јединствено решење, мора важити да је $D \neq 0$, односно $-2abc \neq 0$ одакле директно следи да је $abc \neq 0$.
Даље је

$$D(x) = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = a(a^2 - b^2 - c^2),$$

па је $x = \dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}$.

$$D(y) = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b(b^2 - a^2 - c^2),$$

па је $y = \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac}$.

$$D(z) = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = c(c^2 - a^2 - b^2),$$

па је $z = \dfrac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab}$.
На основу претходног, јединствено решење система је уређена тројка $(x, y, z) = \left(\dfrac{-a^2 + b^2 + c^2}{2bc}, \dfrac{-b^2 + a^2 + c^2}{2ac}, \dfrac{-c^2 + a^2 + b^2}{2ab} \right)$.

[3]Задатак је из збирке „Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији“[8]

Закључак

Идеја овог рада била је да се системи линеарних једначина уведу као појам и прикажу начини њиховог решавања у основној и средњој школи. У првом делу рада акценат је на теорији и примерима који илуструју наведену теорију док су у другом делу рада дати задаци са решењима који су се јављали на такмичењима различитих нивоа у основној и средњој школи.
Оно што је примећено током прегледања задатака са такмичења и издвајања оних у којима се јављају системи линеарних једначина је да су се неки задаци са републичких такмичења из 1960-их година касније појављивали на такмичењима нижих нивоа, што иде у прилог томе да се програм наставе и учења континуирано мења и прилагођава те да ученици данас изучавају детаљније, чак и раније него пре 50 година. Очигледан пример је и измена плана и програма наставе и учења од прошле године када је област "обрада података" из осмог разреда премештена да се изучава у седмом разреду основне школе.

Глава 4

Литература

[1] *Линеарна алгебра и аналитичка геометрија*, Александар Липковски, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, прво издање, 2007.

[2] *Математика 8, уџбеник за осми разред основне школе*, др Небојша Икодиновић, мр Слађана Димитријевић, „Klett“, Београд, 2010.

[3] *Математика за 1. разред средње школе*, др Павле Миличић, мр Владимир Стојановић, др Зоран Каделбург, др Бранислав Боричић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, девето издање, 2000.

[4] *Математика са збирком задатака за 3. разред средње школе за гимназију: опшtу и природно-математичког смера и природно-математичко подручје рада*, др Јован Д. Кечкић, Завод за уџбенике и наставна средства, Београд, десето издање, 2006.

[5] *Хиљаду сто задатака са математичких такмичења ученика основних школа 2004-2013. године*, др Војислав Андрић, Ђорђе Баралић, Јожеф Б. Варга, др Ненад Вуловић, др Драган Ђорић, МилошЂорић, Диана Зита, Александар Илић, мр Милан Јовановић, Вера Јоцковић, Мирјана Катић, Славољуб Милосављевић, др Бранислав Поповић, др Ратко Тошић, Друштво математичара Србије, Београд, 2013.

[6] *Хиљаду задатака са математичких такмичења ученика основних школа 1998-2007. године*, др Војислав Андрић, др Оливера

Ђорђевић, др Драган Ђорић, др Мирјана Ђорић, Александар Илић, мр Милан Јовановић, Мирјана Јовчић, Вера Јоцковић, Љубица Киселички, др Драгослав Љубић, Славољуб Милосављевић, мр Љубинка Петковић, др Бранислав Поповић, мр Драгана Ранковић, др Марија Станић, мр Владимир Стојановић, др Ратко Тошић, др Нинослав Ћирић, Друштво математичара Србије, Београд, 2007.

[7] *Републичка такмичења ученика средњих школа из математике 1959-2000.*, материјали за младе математичаре, свеска 38, Друштво математичара Србије, Београд, 2010.

[8] *Припремни задаци за математичка такмичења средњошколаца у Србији, збирка решених задатака*, мр Владимир Балтић, Душан Ђукић, др Ђорђе Кртинић, др Иван Матић, , Друштво математичара Србије, Београд, друго издање, 2011.