Универзитет у Београду,
Математички факултет

Мастер рад

Тема: Полиноми у додатној настави и такмичарским задацима за ученике средњих школа

Ментор:

др Тања Стојадиновић

Студент:

Исидора Лукач

Београд, 2021.

Хвала ти, моја Милице.

Садржај

1 Прстени

1.1 Појам прстена

Адитивна група целих бројева $(\mathbb{Z}, +)$ је једно раширење адитивне полугрупе природних бројева $(\mathbb{N}, +)$, у којој за свако $k \in \mathbb{Z}$ важи тачно једна релација: $k \in \mathbb{N}, k = 0, -k \in \mathbb{N}$. Наравно, ту је 0 неутрал те групе. Отуда, ако се са mn означава производ природних бројева m и n, тада је са $m \cdot n = mn$, затим $m \cdot (-n) = (-m) \cdot n = -mn, (-m) \cdot (-n) = mn$ и $m \cdot 0 = 0 \cdot m = 0$ дефинисана још једна бинарна операција у скупу целих бројева. Зовемо је и њиховим **множењем**. Уз то се лако провери да је $(\mathbb{Z}, \cdot)$ један моноид, као и да је $(a+b)\,c = ac + bc, a\,(b+c) = ab + ac$ за свако a, b, c из $\mathbb{Z}$, то јест да је та операција дистрибутивна у односу на операцију сабирања целих бројева. Тако одређену структуру $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ зовемо и **прстеном целих бројева**.

Слична својства има и структура $(\mathbb{Z}_k, +, \cdot)$, где су $+$ и $\cdot$ операције сабирања и множења по модулу k у скупу $\mathbb{Z}_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ свих могућих остатака при еуклидском дељењу са k. Зовемо је и прстеном остатака по модулу k.

И уопште, по аналогији са тим, под прстеном подразумевамо сваку алгебарску структуру са две бинарне операције, на пример $(K, +, \cdot)$, која задовољава услове:

1° $(K, +)$ је комутативна група

2° $(K, \cdot)$ је моноид

3° Друга операција је дистрибутивна у односу на прву.

Саме операције прстена обично означавамо са $+$ и $\cdot$ (тим редом) и зовемо његовим сабирањем и множењем. Уз то, уместо прстен $(K, +, \cdot)$ често кажемо само прстен K.

1.2 Проста раширења прстена

Нека је L било који натпрстен датог прстена K. Јасно је да сваки од његових потпрстена A који садржи K и неки фиксиран елемент $\lambda \in L$ мора да садржи и скуп $K[\lambda]$ свих елемената $a \in L$ који се могу представити у облику

$$a = \alpha_0 + \alpha_1\lambda + \alpha_2\lambda^2 + \ldots + \alpha_n\lambda^n, \alpha_r \in K, n \in \mathbb{N}_0.$$

При том је тај скуп и једна подгрупа адитивне групе прстена L. Заиста, ако за уочено a и

$$b = \beta_0 + \beta_1\lambda + \beta_2\lambda^2 + \ldots + \beta_m\lambda^m$$

ставимо $k = max\{m, n\}$, као и $\alpha_r = \beta_s = 0$ за свако $r > n$ и свако $s > m$, тада у самом прстену L важи

$$a + b = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)\lambda + \ldots + (\alpha_k + \beta_k)\lambda^k,$$

а тиме и $a + b \in K[\lambda]$. Међутим, у општем случају, скуп $K[\lambda]$ не мора бити и потпрстен прстена L. Ово последње ће бити ако, на пример, само λ комутира са сваким од елемената из K, то јест ако је $\alpha\lambda = \lambda\alpha$ за свако $\alpha \in K$. Наиме, како је тада и $\alpha\lambda^r = \lambda^r\alpha$, ако су $a = \sum \alpha_r\lambda^r$ и $b = \sum \beta_s\lambda^s$ назначени елементи скупа $K[\lambda]$, одмах следи да је и $ab = \sum \delta_k\lambda^k$, са $\delta_k = \alpha_0\beta_k + \alpha_1\beta_{k-1} + \ldots + \alpha_k\beta_0$. Отуда је и $ab \in K[\lambda]$, што заједно са претходним значи да је тада скуп $K[\lambda]$ управо минимални потпрстен од L који садржи λ и уочени прстен K.
Посебно, ако је ту $L = K[\lambda]$ за бар једно $\lambda \in L$ које комутира са свим елементима из K, за сам прстен L кажемо и да је једно **просто раширење** датог прстена K (са генератором λ). Јасно је да је тада $K[\lambda]$ и један K-модул са генератрисом $e = [1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^n, \ldots]$. Уз то, ако је та фамилија e и линеарно независна над прстеном K, то јест ако за свако $n \in \mathbb{N}_0$ и произвољне α_r-ове из K важи $\alpha_0 + \ldots + \alpha_n\lambda^n = 0 \Rightarrow \alpha_0 = \ldots = \alpha_n = 0$, за само то λ кажемо и да је трансцендентно над K. То тачно значи да тада и за свако a из $K[\lambda]$ постоји тачно један низ $a_e = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ елемената из прстена K, такав да је $\alpha_r \neq 0$ за највише коначно много r-ова и $a = \sum \alpha_r\lambda^r$.

1.3 Прстен полинома

Докажимо, сада, да и сваки прстен K има бар једно просто раширење $K[\lambda]$ у коме је то λ и трансцендентно над K. Штавише, показаће се да су сва таква његова раширења и узајамно изоморфна.
Наиме, управо смо видели да је свако просто раширење $K[\lambda]$ од K у тесној вези са једним подскупом L свих низова $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$, са α_r-овима из K. Наравно, ту је L потпуно одређено са K. Такође, ако су a и b било који низови из L, на пример

$$(1)\quad a = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots), b = (\beta_0, \beta_1, \ldots),$$

због $\alpha_r, \beta_r \in K$, тај скуп L садржи и, како њихову суму

$$(2)\quad a + b = (\alpha_0 + \beta_0, \alpha_1 + \beta_1, \ldots),$$

тако и њихов производ:

$$(3)\quad a = (\delta_0, \delta_1, \delta_2, \ldots), \delta_k = \sum_{r=0}^{k} \alpha_r \beta_{k-r}.$$

Тиме су, по аналогији са претходном тачком, и у скупу L дефинисане две бинарне операције $(a, b) \mapsto a + b$ и $(a, b) \mapsto ab$. Штавише, лако се провери да је и сама та структура $(L, +, \cdot)$ такође један прстен, са јединицом $e = (1, 0, 0, \ldots)$. Уз то је са $\alpha \mapsto (\alpha, 0, 0, \ldots)$ дефинисан и један мономорфизам прстена K у тај прстен L, чија је слика $K_0 = \{(\alpha, 0, 0, \ldots) : \alpha \in K\}$ потпрстен од L изоморфан са K. Самим тим, прстене K и K_0 можемо и поистоветити, у смислу да сваки од елемената $\alpha \in K$ има значење низа $(\alpha, 0, 0, \ldots)$ у прстену L, па тада пишемо $K = K_0$ и $\alpha = (\alpha, 0, 0, \ldots)\ (\alpha \in K)$.
Даље, међу преосталим низовима из прстена L најпростији облик има низ $X = (0, 1, 0, 0, \ldots)$.
При том, из (3) непосредно следи да за свако $a = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots)$ из L важи $aX = (0, \alpha_0, \alpha_1, \ldots)$. Такође је $Xa = aX$, као и $\alpha a = (\alpha\alpha_0, \alpha\alpha_1, \ldots)$ за свако α из K.
Према тачки 1, тиме је и скуп

$$K[X] = \{\alpha_0 + \alpha_1 X + \ldots + \alpha_n X^n \ : \alpha_r \in K, n \in \mathbb{N}_0\}$$

управо минимални потпрстен прстена L који садржи уочени елемент X и сам прстен K, то јест K_0.

Наравно, ту је $X^2 = X \cdot X = (0,0,1,0,\ldots)$, затим $X^3 = X^2 \cdot X = (0,0,0,1,0,\ldots)$, и тако даље, па на основу тога непосредно следи да је и

$$(4) \quad \alpha_0 + \ldots + \alpha_n X^n = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots)\,,$$

са $n \in \mathbb{N}_0$ и $\alpha_r \in K$. То посебно значи да је ту X и трансцендентно над прстеном K, јер је тај низ *нула*, ако и само ако је $\alpha_r = 0$ за свако r.
Тако одређен прстен $K\,[X]$ зовемо **прстеном полинома**, а саме његове елементе **полиномима по неодређеној X** над датим прстеном K.
У суштини, елементи тог прстена су низови од K облика (4), док су му операције одређене са $(1-3)$. При том је K, то јест K_0 потпрстен од $K\,[X]$, уз напомену да $\alpha \in K$ има значење низа $(\alpha, 0, 0, \ldots)$, као и да ту неодређена $X = (0,1,0,\ldots)$ може бити означена и неким другим симболом.
Саме чланове низа $p = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n, 0, \ldots)$ зовемо и **коефицијентима** полинома $p = \sum \alpha_r X^r$. Тиме су два полинома **једнака**, ако и само ако су им једнаки и одговарајући коефицијенти. Посебно, полином $p = \sum \alpha_r X^r$ је **нула**, ако и само ако је и $\alpha_r = 0$ за свако r.
Наравно, ту је $Xp = pX$ и за сваки полином p, из прстена $K\,[X]$, али је, према (3), тај прстен и комутативан, ако и само ако је то и сам прстен K. У том случају, прстен $K\,[X]$ је линеарна алгебра над K, са спољном k-операцијом $(\alpha, p) \mapsto \alpha p$.
И на крају, ако је прстен K потпрстен неког прстена L, одговарајући прстени полинома имају исту неодређену, на пример X, па је тада и прстен полинома $K\,[X]$ потпрстен прстена $L\,[X]$.

2 Рационални алгебарски изрази

У току школовања у разним гранама математике, као и у многим њеним применама, сусретали смо се често са **алгебарским изразима.** Поменимо, на пример, изразе $2\,(a+b)$ за обим паралелограма, $\frac{1}{2}ah$ за површину троугла, $\frac{s}{t}$ за брзину код равномерног праволинијског кретања, $\sqrt{2gh}$ за брзину код слободног падања итд. Заједничко свим тим изразима је да су у њима симболи неких константи $(2, \frac{1}{2}, g, \ldots)$ и симболи неких променљивих $(a, b, h, s, t, \ldots)$ међусобно повезани одређеним операцијама (сабирањем, множењем, дељењем, степеновањем, кореновањем, …).

Дефиниција 1.
1° Симболи реалних бројева $\left(1, 2, 0, -4, \frac{1}{5}, \sqrt{2}, \pi, \ldots\right)$ су рационални алгебарски изрази;
2° симболи променљивих $(x, y, a, b, \alpha, \ldots)$ су рационални алгебарски изрази;
3° ако су A и B рационални алгебарски изрази, онда су и $(A+B), (A-B)$, $(A \cdot B), \frac{A}{B}$ рационални алгебарски изрази (при том усвајамо уобичајене конвенције о брисању заграда кад оне нису неопходне);
4° сви рационални алгебарски изрази се добијају на описани начин (коначном применом претходних правила).

Дакле, рационални алгебарски изрази су, на пример, $\sqrt{2}, 2x-y, \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{x^3-3x^2y+3xy^2-y^3}{x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}$.
Алгебарски изрази $\sqrt{2gh}, x+\sqrt{x}$ и сл. нису рационални. Када будемо желели да истакнемо променљиве које учествују у формирању неког израза, означаваћемо те изразе, на пример, на следећи начин: $P\,(x) = 3x^2+5x+2, f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}, A\,(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha+\beta+\gamma$.
Јасно је да се сваки од рационалних алгебарских израза може трансформисати у више различитих облика. На пример, дистрибутивни закон множења према сабирању у скупу реалних бројева, као што знамо, гласи $x\,(y+z) = xy+xz$. Ту једнакост схватамо као **идентитет**, у том смислу што подразумевамо да је она тачна за све вредности променљивих које у њој учествују. Такође, она остаје на снази и ако неку од тих променљивих заменимо неким другим изразом, на пример, $(a-b)\,(y+z) = (a-b)\,y + (a-b)\,z$.
Ми ћемо се бавити **целим** алгебарским изразима, тј. оним изразима у чијем формирању не учествује операција дељења изразом који садржи променљиве.

Такве изразе ћемо звати **полиномима**. Дакле, полиноми су, на пример, изрази $0, -\sqrt{3}, \frac{1}{2}x^5y+xz^2, 4x^3-3x^2+2x-1$. Специјално, међу полиномима ћемо истицати **мономе** (на пример $1, 5x, \frac{1}{4}x^3, -4xy^2z^3$), **биноме** (на пример $1+x, a-b, x^2+y^2$), **триноме** (на пример $x^2+x+1, a^2-2ab+b^2$).

2.1 Цели алгебарски изрази

При раду са мономима користимо особине операције множења $(\cdot)$ и операције супротан број $(-)$. Осим тога, користимо степене и основне особине у вези са њима да бисмо поједноставили записивање монома.
Кажемо да је моном у **сређеном облику** ако представља производ константе и степена чије су основе међусобно различите променљиве. Константа која се појављује у сређеном облику монома назива се коефицијент тог монома.

Теорема 1. Сваки моном се применом закона комутативности и асоцијативности за множење може трансформисати у еквивалентан моном који је у сређеном облику.

На основу претходне теореме, пажњу можемо усмерити само на мономе у сређеном облику.
Два монома у сређеном облику су **слична** ако им се разликују само коефицијенти (а имају исте степене променљивих).
Степен монома је збир изложилаца свих степена променљивих који се појављују у том моному. Дакле, константе су мономи степена нула.

Пример 1. Мономи $2xy^2$ и $-xy^2$ су слични и њихов степен је 3.
Мономи $3xy$ и $3x^2$ нису слични, али су истог степена 2.
Мономи $-3x^2yz^3$ и $-3xyz^3$ нису слични, нити су истог степена. Степен монома $-3x^2yz^3$ је 6, а степен монома $-3xyz^3$ је 5. ▲

Збирови и разлике монома су цели алгебарски изрази. Подсећамо да се разлика монома може свести на збир: $A-B=A+(-B)$.

Сређени облик целог алгебарског израза који је збир монома добијамо тако што најпре саберемо сличне мономе, а затим добијене мономе (међу којима нема сличних) поређамо тако да њихови степени не расту гледано слева надесно. Наравно, несличне мономе истог степена наводимо један поред другог у произвољном редоследу. Пример сређеног израза је $2x^4 - xy^3 + xy^2 + y^3 - x + 1$. Збир два несличнa монома назива се **бином**, док се збир три монома који нису међусобно слични назива **трином**.

2.2 Трансформације целих алгебарских израза

Трансформације целих алгебарских рационалних израза заснивају се на одређеним правилима која су последице основних особина операција $\cdot, +$ и $-$.

Теорема 2. (Дистрибутивни закон) За изразе A, B, C и D важи:

(а) $A(B + C) = AB + AC, A(B - C) = AB - AC$;
(б) $(A + B)(C + D) = AC + BC + AD + BD$.

Прво тврђење под (а) је сам дистрибутивни закон множења према сабирању, а друго тврђење под (а), као и тврђење под (б) су његове једноставне последице. Приметимо одмах да ћемо ово правило (а то ће важити и за сва остала правила која наводимо у овом поглављу) примењивати, зависно од потребе, на два начина. Наиме, некад ћемо га читати слева надесно, а некад здесна налево. Тако, ако желимо да неки полином изразимо као збир монома, извршићемо сва назначена множења (примена правила слева надесно), на пример:

$$(a + b)(a^2 + b^2) = a^3 + a^2b + ab^2 + b^3,$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = x^3 + x^2 - x^2 - x + x + 1 = x^3 + 1,$$

$$(y - 3)(y^2 + 2y + 4) + 12 = y^3 - 3y^2 + 2y^2 - 6y + 4y - 12 + 12 = y^3 - y^2 - 2y.$$

Приметимо да смо приликом ових сређивања још вршили свођење сличних монома: $x^2 - x^2 = 0, -x + x = 0, -3y^2 + 2y^2 = -y^2, -6y + 4y = -2y, -12 + 12 = 0$.

Обрнуто, ако желимо да полином буде изражен у облику производа других полинома (да буде **растављен на чиниоце** или **факторисан**), примењиваћемо та правила здесна налево - у случају правила (а) кажемо да вршимо **издвајање заједничког чиниоца**, а у случају правила (б) још да претходно вршимо **груписање сабирака**.
На пример:

$$ax + ay - az^2 = a(x + y - z^2),$$

$$x^3 + x^2 + x + 1 = x^2(x + 1) + (x + 1) = (x^2 + 1)(x + 1),$$

$$ax + by - ay - bx = (ax - ay) - (bx - by) = a(x - y) - b(x - y) = (a - b)(x - y).$$

Често примењујемо комбинацију оба правила, на пример:

$$3x^4 - 5x^3 + 3x^2 - 5x = x(3x^3 - 5x^2 + 3x - 5) = x[3x(x^2 + 1) - 5(x^2 + 1)] = x(3x - 5)(x^2 + 1).$$

Теорема 3. (О разлици квадрата) За изразе A и B важи:

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2.$$

Доказ. Применом дистрибутивног и комутативног закона добијамо
$(A - B)(A + B) = A^2 - BA + AB - B^2 = A^2 - AB + AB - B^2 = A^2 - B^2$. ■

Пример 2.
1° $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$;
2° $(a + b)^2 - (a - b)^2 = [(a + b) - (a - b)][(a + b) + (a - b)] = 2b \cdot 2a = 4ab$;
3° $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$. ▲

Покажимо да се збир квадрата у последњој загради не може раставити на производ два линеарна фактора. Претпоставимо, супротно, да постоје реални бројеви a, b, c, d такви да за свако x, y важи $x^2 + y^2 = (ax + by)(cx + dy)$. Тада би морало да важи $x^2 + y^2 = acx^2 + (ad + bc)xy + bdy^2$, за свако x, y. Ставимо у ту једнакост, редом, најпре $x = 1, y = 0$, затим $x = 0, y = 1$ и, најзад $x = y = 1$. Добијамо да важе следеће три једнакости: $ac = 1, bd = 1, ad + bc = 0$.
Из прве и друге од тих једнакости најпре закључимо да бројеви a, b, c, d не могу бити једнаки нули, а затим да важи $c = \frac{1}{a}$ и $d = \frac{1}{b}$.
Заменом у трећу једнакост добијамо да је $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} = 0$, одакле $\frac{a^2+b^2}{ab} = 0$, односно $a^2 + b^2 = 0$. Последња релација је, међутим, немогућа за реалне бројеве a и b

различите од нуле.

Теорема 4. (О збиру и разлици кубова) За изразе A и B важи:

$$A^3 + B^3 = (A+B)(A^2 - AB + B^2),$$

$$A^3 - B^3 = (A-B)(A^2 + AB + B^2).$$

Доказ.
$(A+B)(A^2 - AB + B^2) = A^3 + A^2B - A^2B - AB^2 + AB^2 + B^3 = A^3 + B^3,$
$(A-B)(A^2 + AB + B^2) = A^3 - A^2B + A^2B - AB^2 + AB^2 - B^3 = A^3 - B^3.$ ■

Пример 3.
1° $x^3 + 1 = (x+1)(x^2 - x + 1);$
2° $2xy^3 - 54x^4z^3 = 2x(y^3 - 27x^3z^3) = 2x(y - 3xz)(y^2 + 3xyz + 9x^2z^2);$
3°$A^6 - B^6 = (A^3 - B^3)(A^3 + B^3) = (A-B)(A^2 + AB + B^2)(A+B)(A^2 - AB + B^2).$

У овом примеру приметимо да смо уместо да најпре раставимо разлику квадрата $A^6 - B^6$ могли да прво раставимо разлику кубова: $A^6 - B^6 = (A^2 - B^2)(A^4 + A^2B^2 + B^4)$, али би тада било теже погодити да се трином $A^4 + A^2B^2 + B^4$ може раставити, на пример, на следећи начин:
$A^4 + A^2B^2 + B^4 = A^4 + 2A^2B^2 + B^4 - A^2B^2 = (A^2 + B^2)^2 - (AB)^2 = (A^2 + AB + B^2)(A^2 - AB + B^2).$ ▲

Теорема 5. (О квадрату бинома) За изразе A и B важи:

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2,$$

$$(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2.$$

Доказ.
$(A+B)^2 = (A+B)(A+B) = A^2 + AB + AB + B^2 = A^2 + 2AB + B^2,$
$(A-B)^2 = (A-B)(A-B) = A^2 - AB - AB + B^2 = A^2 - 2AB + B^2.$ ■

Пример 4.
1° $999^2 = (1000-1)^2 = 1000^2 - 2 \cdot 1000 + 1 = 998001;$

2° $(x+y+z)^2 = [(x+y)+z]^2 = (x+y)^2 + 2(x+y)z + z^2 = x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz$;

3° $(ax-by)^2+(bx+ay)^2 = a^2x^2-2abxy+b^2y^2+b^2x^2+2abxy+a^2y^2 = (a^2x^2+b^2x^2)+(a^2y^2+b^2y^2) = (a^2+b^2)(x^2+y^2)$;

4° $4x^2+12x+9 = (2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+3^2 = (2x+3)^2$;

5° $n^3-4n^2+4n = n(n^2-4n+4) = n(n-2)^2$;

6° $2bc-b^2-c^2+a^2 = a^2-(b^2-2bc+c^2) = a^2-(b-c)^2 = (a-b+c)(a+b-c)$. ▲

У последњих неколико примера показано је како се примењује правило о квадрату збира и разлике на растављање израза које називамо **квадратним триномима**. Међутим, оно се очигледно не може применити за било који квадратни трином, већ само на онај који обично зовемо **потпуним**, тј. који је облика $A^2+2AB+B^2$ или $A^2-2AB+B^2$.

Када квадратни трином није потпун, то правило је, наравно, непримењиво, али ипак се у неким случајевима такав трином може раставити. Показаћемо на примерима два метода који некад могу довести до одговарајућег резултата.

Први метод: $x^2+5x+6 = x^2+(2+3)x+2\cdot 3 = x^2+2x+3x+2\cdot 3 = x(x+2)+3(x+2) = (x+3)(x+2)$.

Други метод: $x^2+5x+6 = x^2+2x\cdot\frac{5}{2}+(\frac{5}{2})^2-(\frac{5}{2})^2+6 = (x+\frac{5}{2})^2-\frac{1}{4} = (x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2})(x+\frac{5}{2}+\frac{1}{2}) = (x+2)(x+3)$.

Објаснимо на који начин смо дошли до последњег резултата: прва два сабирка смо схватили као прве сабирке разлагања неког квадрата бинома; затим смо им додали $(\frac{5}{2})^2$ да бисмо имали заиста потпуни квадратни трином; наравно, тај број смо морали и да одузмемо и на крају смо преписали ранији слободни члан 6. Прва три сабирка добијеног израза представљали су квадрат бинома, а сређивањем остатка добили смо једну разлику квадрата, чијим растављањем смо дошли до коначног резултата. Овај метод обично називамо *метод допуњавања до квадрата бинома.*

Наводимо још неколико примера растављања квадратних тринома:

$y^2-(2a+1)y+a(a+1) = y^2-ay-(a+1)y+a(a+1) = y(y-a)-(a+1)(y-a) = (y-a-1)(y-a)$,

$a^5-5a^3+4a = a(a^4-5a^2+4) = a(a^4-a^2-4a^2+4) = a[a^2(a^2-1)-4(a^2-1)] = a(a^2-4)(a^2-1) = a(a-1)(a+1)(a-2)(a+2)$,

$a^2+2ab-35b^2 = a^2+2a\cdot b+b^2-b^2-35b^2 = (a+b)^2-(6b)^2 = (a+b-6b)(a+b+6b) = (a-5b)(a+7b)$,

$2x^2+xy-6y^2 = 2(x^2+\frac{1}{2}xy-3y^2) = 2[(x+\frac{1}{4}y)^2-\frac{1}{16}y^2-3y^2] = 2[(x+\frac{1}{4}y)^2-(\frac{7}{4}y)^2] = 2(x-\frac{3}{2}y)(x+2y) = (2x-3y)(x+2y)$.

Последњи метод има предност што се код њега одмах види када се дати ква-

дратни трином не може раставити - то је случај увек када се после допуњавања уместо разлике добије збир квадрата.
На пример: $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1, a^2 + 2ab + 4b^2 = (a+b)^2 + 3b^2$.

Теорема 6. (О кубу бинома) За изразе A и B важи:

$$(A+B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3,$$

$$(A-B)^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3.$$

Доказ.
$(A+B)^3 = (A+B)^2(A+B) = (A^2+2AB+B^2)(A+B) = A^3 + 2A^2B + AB^2 + A^2B + 2AB^2 + B^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3$,
$(A-B)^3 = (A-B)^2(A-B) = (A^2-2AB+B^2)(A-B) = A^3 - 2A^2B + AB^2 - A^2B + 2AB^2 - B^3 = A^3 - 3A^2B + 3AB^2 - B^3$. ■

Пример 5.
1° $101^3 = (100+1)^3 = 100^3 + 3\cdot 100^2 + 3\cdot 100 + 1 = 1030301$;
2° $(x-2)^3 = x^3 - 3x^2\cdot 2 + 3x\cdot 2^2 - 2^3 = x^3 - 6x^2 + 12x - 8$;
3° $8x^3 + 12x^2 + 6x + 1 = (2x)^3 + 3\cdot(2x)^2\cdot 1 + 3\cdot 2x\cdot 1^2 + 1^3 = (2x+1)^3$. ▲

3 Полиноми

Полином чији су сви коефицијенти једнаки нули, тј. $a(x) \equiv 0$ назива се **нула - полином**. Степен нула - полинома се не дефинише.

Будући да су полиноми уједно и функције променљиве x, могу се посматрати две дефиниције једнакости полинома.

Дефиниција 1. Два полинома, P и Q, су **једнака** ако имају идентичке канонске облике, тј. ако имају једнаке степене и све одговарајуће коефицијенте једнаке међу собом.

$$P(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; Q(x) = b_n x^n + \ldots + b_1 x + b_0 \text{ и}$$
$$a_n = b_n, \ldots, a_1 = b_1, a_0 = b_0.$$

Дефиниција 2. Полиноми P и Q су **једнаки** ако су једнаке одговарајуће функције, тј. ако за свако $x \in \mathbb{R}$ важи $P(x) = Q(x)$.
Испоставља се да су ове две дефиниције једнакости (у случају прстена $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) еквивалентне.

Пример 1. Одреди коефицијенте p, q и r тако да полиноми $a(x) = 3x^3 - px^2 + 5$ и $b(x) = qx^3 - 4x^2 + (r-1)x + 5$ буду једнаки.

Решење. Ови полиноми су једнаки ако и само ако је $3 = q, -p = -4, 0 = r-1$, тј. $p = 4, q = 3, r = 1$. ▲

У задацима се често тражи збир (свих или неких) коефицијената полинома:
• збир коефицијената полинома је $P(1) = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0$;
• збир коефицијената са парним индексима полинома је $\frac{P(1)+P(-1)}{2} = \ldots + a_4 + a_2 + a_0$;
• збир коефицијената са непарним индексима полинома је $\frac{P(1)-P(-1)}{2} = \ldots + a_5 + a_3 + a_1$.

Са полиномима једне променљиве могу се једноставно изводити неке алгебарске операције. Збир, разлика и производ два полинома су поново полиноми.

Пример 2.
1° $(3x^3 - 2x^2 + 4x - 3) + (2x^3 + 2x^2 - 2x + 5) = 5x^3 + 2x + 2;$
2° $(4x^2 - 2x + 5) - (4x^2 + 2x - 5) = -4x + 10;$
3° $(x - 1)(x^3 + x^2 + x + 1) = x^4 - 1.$ ▲

Прецизније:

Дефиниција 3. $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i + \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum\limits_{k=0}^{max\{n,m\}} (a_k + b_k) x^k$ (при овоме су, ако је $n > m$ сви $b_{m+1}, b_{m+2}, \ldots, b_n$ једнаки нули и обратно, ако је $n < m$ сви $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_m$ једнаки нули).

Дефиниција 4. $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i x^i \cdot \sum\limits_{j=0}^{m} b_j x^j = \sum\limits_{k=0}^{n+m} c_k x^k$, где је $c_k = \sum\limits_{v=0}^{k} a_v b_{k-v} = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \ldots + a_k b_0$ (уз сличну напомену као у претходној дефиницији).

Теорема 1. Нека су P и Q два полинома, различита од нултог. Тада је степен полинома PQ једнак збиру степена полинома P и Q; степен полинома $P+Q$, односно $P-Q$ (ако ти полиноми нису нулти) није већи од већег од степена полинома P и Q.

Приметимо да је неутрални елемент за сабирање нула-полином, а супротни елемент за полином $a(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ је $-a(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} (-a_k) x^k$.

3.1 Дељивост полинома

Много је компликованији проблем **дељења полинома**. У том смислу ситуација је врло слична оној коју имамо у скупу $\mathbb{Z}$ целих бројева, па се и многи појмови уводе на сличан начин као у скупу $\mathbb{Z}$.

Дефиниција 5. Нека су A и B два полинома, при чему је полином B различит од нултог. Ако постоји такав полином Q да важи $A = BQ$, онда кажемо да је полином A **дељив** полиномом B, или је B **делилац (чинилац)** полинома A, а полином Q зовемо **количником** при дељењу A са B.

Пример 3.

1° Полином $x^3 - 1$ дељив је полиномом $x - 1$, јер је $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$; количник одговарајућег дељења је полином $x^2 + x + 1$.

2° Полином $x^2 + 1$ није дељив полиномом $x - 1$. Заиста, ако би постојао полином Q, такав да је $x^2 + 1 = (x-1)Q(x)$, та једнакост би морала да важи за свако реално x. Међутим, за $x = 1$ њена лева страна узима вредност 2, а десна вредност 0, што значи да такав полином Q не може да постоји. ▲

На тај начин, дељење полинома је операција која у скупу полинома није увек изводљива. Уместо тога изводљива је операција коју обично зовемо *дељење са остатком* и која је заснована на следећој теореми:

Теорема 2. Нека су A и B произвољни полиноми, при чему је полином B различит од нултог. Тада постоје и јединствено су одређени полиноми Q и R, такви да важи

$$A = BQ + R,$$

при чему је полином R или нулти или има мањи степен од полинома B.

Доказ. Докажимо најпре јединственост полинома Q и R. Претпоставимо да постоје два пара полинома: Q_1 и R_1, односно Q_2 и R_2, који задовољавају услове теореме:

$$A = BQ_1 + R_1, A = BQ_2 + R_2.$$

Изједначавањем десних страна тих релација добијамо:

$$B[Q_1 - Q_2] = R_2 - R_1.$$

Ако полином на десној страни не би био нулти (тј. ако не би важило $R_1 = R_2$), тај полином би био степена мањег од полинома B (јер ту особину имају оба полинома R_1 и R_2). Међутим, степен полинома на левој страни је већи или једнак од степена полинома B (опет изузев у случају када је $Q_1 = Q_2$). Дакле, та једнакост може да важи само у случају $Q_1 = Q_2$ и $R_1 = R_2$, што је и требало доказати.
Остало је да докажемо егзистенцију полинома $Q(x)$ и $R(x)$. Нека су дати полиноми $A(x)$ и $B(x)$ облика

$$A(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \;\; B(x) = b_m x^m + \ldots + b_1 x + b_0,$$

где је $a_n, b_m \neq 0$, тј. степени полинома $A(x)$ и $B(x)$ су n, односно m. Ако је $n < m$, довољно је узети $Q(x) = 0, R(x) = A(x)$ и важиће $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Ако је $n \geq m$, одузимамо од полинома $A(x)$ полином $\frac{a_n}{b_m} x^{n-m} B(x)$; добићемо нови полином чији степен мора бити мањи од n. Ако је тај степен мањи и од m, означимо полином који смо одузимали са $Q(x)B(x)$, а добијени остатак $A(x) - Q(x)B(x)$ са $R(x)$ и опет ћемо имати тражену релацију $A(x) = B(x)Q(x) + R(x)$. Ако то није случај, наставимо описани поступак одузимања док год не добијемо остатак мањег степена од степена m полинома $B(x)$. ■

Дефиниција 6. Полином Q из претходне теореме назива се **количником**, а полином R **остатком** при дељењу полинома A полиномом B.

Поставља се питање на који начин можемо практично одредити полиноме $Q(x)$ и $R(x)$. Показаћемо на једном примеру два метода за одређивање.

Пример 4. Поделимо полином $A = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5$ полиномом $B = x^2 + 2x - 3$.

Први метод бисмо могли назвати *метод неодређених коефицијената*. Количник поменутог дељења очигледно мора бити полином другог степена, а остатак степена највише првог. Такође, јасно је да је најстарији коефицијент количника једнак 1. Зато потражимо те полиноме у облику $Q = x^2 + ax + b, R = cx + d$.

Дакле, треба да важи:

$$x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 + ax + b) + (cx + d),$$

односно $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = x^4 + (2 + a)x^3 + (-3 + 2a + b)x^2 + (-3a + 2b + c)x + (-3b + d)$. Добијена једнакост полинома еквивалентна је једнакостима одговарајућих коефицијената:

$$-3 = 2 + a, 2 = -3 + 2a + b, 1 = -3a + 2b + c, -5 = -3b + d.$$

Решавање добијеног система једначина је једноставно и даје: $a = -5, b = 15, c = -44, d = 40$, тј. $Q = x^2 - 5x + 15, R = -44x + 40$.

Други метод дељења је аналоган поступку дељења вишецифрених бројева; у ствари, он је практично записивање оног поступка којим смо и доказали егзистенцију полинома $Q(x)$ и $R(x)$. У датом примеру он се састоји у следећем: прво делимо најстарије чланове $x^4 : x^2 = x^2$, Затим множимо полином B добијеним мономом x^2 - добијамо полином $x^4 + 2x^3 - 3x^2$ - и тај резултат одузимамо од полинома A. У резултату $-5x^3 + 5x^2 + x - 5$ уочавамо најстарији члан $-5x^3$ и делимо га са x^2, па добијеним количником $-5x$ множимо полином B итд. Овај поступак понављамо док остатак не постане 0 или полином мањег степена од 2 (тј. од степена полинома B). Записујемо:

$$\begin{array}{l}
\big(\;\; x^4 - 3x^3 \;\; + 2x^2 \;\;\; + x \;\; - 5\big) : \big(x^2 + 2x - 3\big) = x^2 - 5x + 15 + \dfrac{-44x + 40}{x^2 + 2x - 3} \\
\underline{\; - x^4 - 2x^3 \;\; + 3x^2 \;} \\
\qquad\quad - 5x^3 \;\; + 5x^2 \;\;\; + x \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; 5x^3 + 10x^2 - 15x} \\
\qquad\qquad\qquad 15x^2 - 14x \;\; - 5 \\
\qquad\qquad\quad \underline{- 15x^2 - 30x + 45} \\
\qquad\qquad\qquad\quad - 44x + 40
\end{array}$$

Дакле, количник је $Q = x^2 - 5x + 15$, а остатак $R = -44x + 40$, тј. $x^4 - 3x^3 + 2x^2 + x - 5 = (x^2 + 2x - 3)(x^2 - 5x + 15) + (-44x + 40)$. ▲

Пример 5. Поделити полином $P(x) = 2x^2 + x + 1$ полиномом $Q(x) = x + 1$.

Решење.

$$
\begin{array}{l}
\big(\;\; 2x^2 \;\; + x + 1\big) : \big(x+1\big) = 2x - 1 + \dfrac{2}{x+1} \\
\underline{-\,2x^2 - 2x} \\
\qquad\quad -\,x + 1 \\
\qquad\quad \underline{\;\;\; x + 1} \\
\qquad\qquad\;\; 2
\end{array}
$$

Овде смо добили да полином $P(x) = 2x^2 + x + 1$ није дељив полиномом $Q(x) = x + 1$ (тј. добили смо остатак 2 и количник $2x - 1$). Полином $P(x)$ можемо представити као $P(x) = (x + 1)(2x - 1) + 2$. ▲

У неким задацима интересоваће нас само остатак који се добија дељењем двају полинома, а не и количник. Поставља се питање да ли се он може добити, а да се не врши цео поступак дељења. Потврдан одговор на ово питање у случају дељења линеарним биномом $x - a$ даје следећа **Безуова теорема**:

Теорема 3. Нека је P полином и a реалан број. Остатак при дељењу полинома P полиномом $x-a$ једнак је $P(a)$, тј. вредности полинома P у тачки $x = a$.

Доказ. Остатак при дељењу P са $x - a$ мора бити или нула или полином нултог степена - у сваком случају неки реалан број. Означимо тај број са r. Дакле, важи

$$P(x) = (x - a)Q(x) + r,$$

за неки полином Q. Ова релација важи за свако x, па замењујући у њој $x = a$ добијамо $P(a) = (a - a)Q(a) + r = r$, што је и требало доказати. ■

У применама ћемо најчешће користити следећу једноставну последицу ове теореме:

Последица. Полином P дељив је линеарним биномом $x - a$, тј. може се факторисати као $P(x) = (x - a)Q(x)$, ако и само ако је $P(a) = 0$.

Пример 6.

1° Факторисаћемо следећи полином једне променљиве $P = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ знајући да је његова вредност у тачки 1 једнака нули. Користећи услов $P(1) = 0$ закључујемо да је полином P дељив са $x-1$. Када извршимо то дељење, добијамо количник x^2-5x+6, тј. добијамо да је $P = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

2° Да бисмо раставили полином $P = x^4 - x^3 + 2x^2 + x - 3$, приметимо да је $P(1) = 0$. Дељење P са $x - 1$ даје количник $Q = x^3 + 2x + 3$. Даље је $Q(-1) = 0$, па треба поделити Q са $x + 1$. То дељење даје $Q = (x + 1)(x^2 - x + 3)$, тј. $P = (x - 1)(x + 1)(x^2 - x + 3)$ (трином $x^2 - x + 3$ се не може раставити).

3° Факторисати израз $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$.

Решење. Посматрајмо тај израз као полином променљиве a. Стављајући $a = b$, добијамо да је тада његова вредност нула, па је он дељив са $a-b$. Слично, схватајући тај израз као полином по b и стављајући $b = c$, добијамо да је он дељив са $b - c$. Најзад, слично добијамо да је он дељив и са $c - a$. Дакле, мора бити $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = k(a - b)(b - c)(c - a)$, при чему k мора бити број (полином нултог степена), јер су обе стране ове једнакости полиноми другог степена по било којој од променљивих. Да бисмо добили тај број, довољно је у ту једнакост ставити било које конкретне (али међусобно различите) вредности за a, b, и c. На пример, за $a = 0, b = 1, c = 2$, та једнакост постаје $6 = 2k$, одакле је $k = 3$ и коначно $(a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3 = 3(a - b)(b - c)(c - a)$. ▲

Пример 7. Испитати да ли је полином $a(x) = x^5 - 5x^4 - x + 5$ дељив полиномима $x - 1, x + 1, x - 2, x - 5$.

Решење. Како је $a(1) = 0, a(-1) = 0, a(2) = -45, a(5) = 0$, по *Безуовој теореми* $a(x)$ је дељив са $x - 1, x + 1$ и $x - 5$, а при дељењу са $x - 2$ даје остатак -45. ▲

Пример 8. Полином $p(x) = x^n - a^n$ дељив је са $x - a$, а полином $q(x) = x^{2n} - a^{2n}$ дељив је са $x + a$ јер је $p(a) = 0$ и $q(-a) = 0$. ▲

Пример 9. Ако полином $a(x)$ при дељењу са $x - 1$ даје остатак 3, а при дељењу са $x-2$ остатак 4, колики је његов остатак при дељењу са $(x-1)(x-2)$?

Решење. По *теореми 2* тражени остатак је полином степена не већег од 1; дакле,

$$a(x) = (x-1)(x-2)b(x) + \alpha x + \beta.$$

Ако у претходну једнакост заменимо $x = 1$, а затим $x = 2$, добијамо

$$a(1) = \alpha + \beta, a(2) = 2\alpha + \beta.$$

Међутим, по *Безуовој теореми* је $a(1) = 3, a(2) = 4$, па је $\alpha + \beta = 3$ и $2\alpha + \beta = 4$ и, најзад, $\alpha = 1, \beta = 2$. Дакле, тражени остатак је $r(x) = x + 2$. ▲

У вези са претходним задацима занимљиво је поставити питање да ли се и на какве чиниоце може раставити произвољан полином једне (реалне) променљиве. Одговор на то питање садржи следеће тврђење:
Сваки полином једне реалне променљиве са произвољним реалним коефицијентима, степена већег од нуле, може се раставити на производ извесног броја линеарних чинилаца (од којих неки могу бити и једнаки међу собом) и извесног броја (непотпуних) квадратних тринома (од којих такође неки могу бити једнаки међу собом).
На пример, $x^7 + 2x^6 - 2x^4 - 4x^3 + x + 2 = (x-1)^2(x+2)(x^2+x+1)^2$.

Погодан метод за рачунање вредности полинома у тачки α, као и за дељење полинома $P(x)$ полиномом $x-\alpha$ је ***Хорнерова шема*** (добијамо и $Q(x)$ и r, где је $P(x) = (x-\alpha)Q(x) + r$).
У шему горе упишемо коефицијенте полинома $P(x)$, почев од водећег $(a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0)$, лево упишемо број α и онда по следећем алгоритму одређујемо коефицијенте количника $Q(x)$ $(b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_1, b_0)$ и остатак r:
- водећи коефицијент, a_n, само препишемо, тј. $b_{n-1} = a_n$,
- сваки следећи коефицијент (b_k) добијамо тако што број који је лево од њега (b_{k+1}) помножимо са α и томе додамо број изнад њега (a_{k+1}), тј. $b_k = b_{k+1}\alpha + a_{k+1}$ (укључујући и $r = b_0\alpha + a_0$).

Последњи број који добијамо је остатак r и он је, по *Безуовој теореми*, баш једнак вредности полинома $P(\alpha)$, тј. $r = P(\alpha)$. Овај целокупан поступак можемо приказати шемом.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	a_2	a_1	a_0
α	a_n	$\alpha b_{n-1} + a_{n-1}$	$\alpha b_{n-2} + a_{n-2}$	$\dots$	$\alpha b_2 + a_2$	$\alpha b_1 + a_1$	$\alpha b_0 + a_0$
	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\dots$	b_1	b_0	$r = P(\alpha)$

Пример 10. Поделимо полином $P(x) = 2x^2 + x + 1$ полиномом $T(x) = x + 1$. Коефицијенти полинома $P(x)$ су, редом, 2, 1, 1, док је $\alpha = -1$, јер је $x + 1 = x - (-1)$.

	2	1	1
-1	2	-1	2

Први број 2 смо спустили (од 2), док следеће рачунамо као: $-1 = 2(-1) + 1$ и $2 = (-1)(-1) + 1$. Дакле, коефицијенти од $Q(x)$ су 2 и -1, тј. $Q(x) = 2x - 1$, а остатак је $r = 2$. Такође, добили смо и вредност полинома $P(x)$ у тачки $x = -1$, тј. $P(-1) = 2$.

3.2 Највећи заједнички делилац и најмањи заједнички садржалац

Дефиниција 7. Нека су A и B полиноми. Полином C је **заједнички делилац** полинома A и B ако је он делилац и полинома A и полинома B. **Највећи заједнички делилац (НЗД)** полинома A и B (различитих од нултог) јесте онај полином D који је заједнички делилац тих полинома и који је и сам дељив било којим другим делиоцем тих полинома.

Ова дефиниција очигледно оставља отвореним три питања. Прво, да ли полином D са описаним својствима постоји; друго, да ли је он јединствено одређен? Најзад, поставља се и проблем одређивања таквог (или таквих) полинома D. На прво и треће питање одговор даје следећи **Еуклидов алгоритам.**

Нека су дати полиноми A и B. Извршимо дељење (евентуално са остатком) A са B:

$$A = BQ_1 + R_1.$$

Поделимо сада полином B добијеним остатком R_1:

$$B = R_1 Q_2 + R_2.$$

У следећем кораку извршимо дељење претходног делиоца $R_1(x)$ остатком $R_2(x)$:

$$R_1 = R_2 Q_3 + R_3.$$

Овај поступак наставимо све дотле док у неком кораку не добијемо за остатак нулти полином. (Приметимо да се степени добијених остатака $R_1, R_2, \ldots$ стално смањују, те ће описани поступак морати да се заврши на тај начин.)

Запишимо две последње једнакости: $R_{k-2} = R_{k-1} Q_k + R_k, R_{k-1} = R_k Q_{k+1}$.

Теорема 4. Последњи остатак R_k различит од нултог у описаном поступку јесте највећи заједнички делилац полинома A и B.

Доказ. Последња једнакост показује да је R_k делилац полинома R_{k-1}. Одатле следи да су оба сабирка на десној страни претпоследње једнакости дељива са R_k, па је и полином R_{k-2} дељив са R_k. Настављајући оваква разматрања, редом добијамо да је R_k делилац и полинома $R_{k-3}, \ldots, R_1, B$ и најзад A (из прве једнакости). На тај начин, R_k је заједнички делилац полинома A и B.
Докажимо још да је R_k највећи заједнички делилац тих полинома. У том циљу уочимо било који заједнички делилац C полинома A и B. Како су лева страна и први сабирак на десној страни прве једнакости дељиви са C, то је и остатак R_1 дељив са C. После k корака таквих разматрања закључујемо да је и R_k дељив са C, што је и требало доказати. ■

Доказана теорема даје одговор на два постављена питања. Што се тиче јединствености полинома НЗД(A, B), јасно је да он може бити одређен само до на константан чинилац, тј. важи: ако полином D задовољава услове дефиниције 7, онда те услове задовољава и полином kD, за произвољно $k \neq 0$. Најчешће (мада не обавезно) полином D се бира тако да има најстарији коефицијент једнак 1 - у том случају он је јединствено одређен.

Пример 11.
1° Нађимо највећи заједнички делилац полинома $A = x^3 + x^2 - 4x - 4$ и $B = x^2 + 4x + 3$.

Дељењем добијамо $A(x) = B(x)(x-3) + (5x+5), B(x) = (5x+5)\left(\frac{1}{5}x + \frac{3}{5}\right)$.
Како је у последњем дељењу остатак 0, тражени НЗД је остатак из претходног дељења $5x+5$, односно (ако тражимо да је најстарији коефицијент једнак 1): НЗД$(A, B) = x + 1$.

2° $A = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, B = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$.

Решење. У поступку одређивања НЗД очигледно је дозвољено у неким корацима помножити (или поделити) неки од полинома који се деле константом (различитом од нуле). То, наравно, може променити тражене остатке, али опет само до на константан чинилац, што, као што знамо, не представља проблем. У нашем примеру поступимо на следећи начин:

$$9A(x) = B(x)(3x-1) + (-5x^2 - 25x - 30),$$

$$B(x) = \left(-\frac{1}{5}\right)(-5x^2 - 25x - 30)(3x-5) + (9x+27),$$

$$x^2 + 5x + 6 = \frac{1}{9}(9x+27)(x+2).$$

Последњи остатак различит од нуле (помножен са $\frac{1}{9}$) јесте $x+3$ и он је тражени НЗД(A, B). ▲

Појам највећег заједничког делиоца може се дефинисати и за више полинома и то очигледно на потпуно аналоган начин. За одређивање НЗД, на пример, трију полинома A, B и C, треба најпре одредити НЗД$(A, B) = D$, а затим НЗД(C, D) и он ће бити тражени НЗД(A, B, C).

Пример 12. Нека је $A = x^2 - 1, B = x^2 - 3x + 2, C = x^2 + x - 2$. Еуклидовим алгоритмом најпре добијамо НЗД$(A, B) = x - 1$, а затим НЗД$(C, x-1) = x - 1$, па је НЗД$(A, B, C) = x - 1$. ▲

Описани поступак налажења НЗД за два (или више) полинома је универзалан, али има и тај недостатак што је често веома гломазан. Једноставнији поступак је могућ у случају да знамо да факторишемо дате полиноме и то на чиниоце који се не могу даље растављати.
Узмимо као пример већ посматране полиноме $A = x^3 + x^2 - 4x - 4$ и $B = x^2 + 4x + 3$. Ако их раставимо, добијамо $A = (x+1)(x-2)(x+2)$ и $B = (x+1)(x+3)$. Одатле

је јасно да највећи заједнички делилац тих полинома мора бити $D = x + 1$, јер је он заједнички делилац полинома A и B, а очигледно било који други њихов делилац мора делити D. Овај поступак можемо примењивати и за полиноме више променљивих, као и када се тражи НЗД за више полинома.

Пример 13.

1° Одредити највећи заједнички делилац полинома $A = (x-1)^2(x^2-x+1)^2$ и $B = (x-1)^3(x+2)(x^2-x+1)$.

Решење. Приметимо најпре да су дати полиноми написани у облику производа чинилаца који се даље не могу раставити. Фактори полинома $D =$НЗД(A, B) биће они који се јављају и у полиному A и у полиному B и то су $x-1$ и x^2-x+1. При том сваки од њих треба степеновати мањим од изложилаца са којим он учествује у тим факторизцијама; за $x-1$ то је изложилац 2, а за x^2-x+1 то је изложилац 1. Дакле, $D = (x-1)^2(x^2-x+1)$.

2° Нека је $A = x^2-4, B = x^2-x-2, C = x^2-3x+2$. Факторизацијом датих полинома добијамо $A = (x-2)(x+2), B = (x+1)(x-2), C = (x-1)(x-2)$. Зато је НЗД$(A, B, C) = x-2$.

3° $A = (3x-2)(x+4)^2(x^2+2x+5)^2, B = (3x-2)^2(x-6)(x^2+2x+5)^3, C = (3x-2)^3(x+8)(x^2+2x+5)^2$,

$$\text{НЗД}(A, B, C) = (3x-2)(x^2+2x+5)^2.$$

4° Изрази $a^2-b^2, a^2+2ab+b^2, a^2-ab-2b^2$, факторисани, добијају облик

$$(a-b)(a+b), (a+b)^2, (a+b)(a-2b).$$

Зато је

$$\text{НЗД}(a^2-b^2, a^2+2ab+b^2, a^2-ab-2b^2) = a+b. \ \blacktriangle$$

Ако је највећи заједнички делилац за два (или више) полинома једнак константи, кажемо да су полиноми **узајамно прости**.

Пример 14.

1° $x^2-7x+10 = (x-2)(x-5), x^2+7x+10 = (x+2)(x+5)$, па су полиноми $x^2-7x+10$ и $x^2+7x+10$ узајамно прости.

2° НЗД$(a^2-2ab+b^2, a^2+2ab+b^2) =$НЗД$((a-b)^2, (a+b)^2) = 1$, па су полиноми $a^2-2ab+b^2$ и $a^2+2ab+b^2$ узајамно прости.

3° Полиноми $(a+1)(a+2), (a+1)(a+3)$ и $(a+2)(a+3)$ су узајамно прости, јер је њихов највећи заједнички делилац једнак 1. Приметимо, међутим, да они нису **узајамно прости у паровима** јер, на пример, прва два имају заједнички чинилац $a+1$. ▲

Дефиниција 8. Нека су A и B ненулти полиноми. Полином C је **заједнички садржалац** полинома A и B ако су оба полинома његови делиоци. **Најмањи заједнички садржалац** (НЗС) полинома A и B јесте онај полином D који је њихов заједнички садржалац и који је сам делилац било којег другог заједничког садржаоца тих полинома.

На сличан начин се дефинише заједнички садржалац за више од два полинома. Најмањи заједнички садржалац увек постоји и одређен је до на константни фактор (као и НЗД). За његово одређивање послужићемо се методом сличним другом од описаних метода одређивања НЗД, дакле аналогном оном што је познато за природне бројеве.

На пример, узмимо поново полиноме $A = x^3 + x^2 - 4x - 4, B = x^2 + 4x + 3$. Видели смо да после факторисања они добијају облик $A = (x+1)(x-2)(x+2), B = (x+1)(x+3)$. Сада треба узети у НЗС све факторе који учествују било у A било у B, и то са већим од одговарајућих степена:

$$\text{НЗС}(A, B) = (x+1)(x-2)(x+2)(x+3).$$

Пример 15. Наћи НЗС полинома из примера 13.

Решење.

1° $A = (x-1)^2(x^2-x+1)^2, B = (x-1)^3(x+2)(x^2-x+1)$, $\text{НЗС}(A, B) = (x-1)^3(x+2)(x^2-x+1)^2$.

2° С обзиром на познату факторизацију полинома $A = x^2 - 4, B = x^2 - x - 2, C = x^2 - 3x + 2$, добијамо

$$\text{НЗС}(A, B) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2).$$

3° $\text{НЗС}(A, B, C) = (3x-2)^3(x+4)^2(x-6)(x+8)(x^2+2x+5)^3$.

4° $\text{НЗС}(a^2-b^2, a^2+2ab+b^2, a^2-ab-2b^2) = (a-b)(a+b)^2(a-2b)$. ▲

Поставља се проблем одређивања НЗС полинома за које не умемо да нађемо факторизацију. Јасно је да ће један од заједничких садржалаца таквих полинома увек бити њихов производ, но он наравно не мора бити и НЗС. За два полинома, међутим, постоји тврђење којим се можемо послужити да одредимо НЗС под условом да најпре нађемо њихов НЗД. Наиме, из другог од описаних метода налажења НЗД одмах следи да важи:

Нека су A и B полиноми са најстаријим коефицијентом једнаким 1. Тада је производ највећег заједничког делиоца и најмањег заједничког садржаоца тих полинома једнак производу самих полинома A и B.

Пример 16.

1° Узмимо поново $A = x^3 + x^2 - 4x - 4 = (x+1)(x-2)(x+2), B = x^2 + 4x + 3 = (x+1)(x+3)$. Видели смо да је НЗД$(A, B) = x + 1$, а НЗС$(A, B) = (x+1)(x-2)(x+2)(x+3)$, што је очигледно једнако производу AB.

2° Одредити НЗС полинома $A = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3$ и $B = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3$.

Решење. У једном ранијем примеру одредили смо НЗД$(A, B) = x + 3$. Како је производ AB једнак $3x^7 + 19x^6 + 29x^5 - 19x^4 - 60x^3 - 35x^2 + 6x + 9$, то се дељењем тог полинома са $x + 3$ добија да је тражени НЗС(A, B) једнак $3x^6 + 10x^5 - x^4 - 16x^3 - 12x^2 + x + 3$ (односно једној трећини тог израза, ако захтевамо да НЗС има најстарији коефицијент једнак 1). ▲

3.3 Нуле полинома. Основни став алгебре.

Посебно значајан појам у теорији полинома је појам нуле (корена) полинома, тј. оне вредности променљиве за коју полином добија вредност нула.

Дефиниција 9. **Нула (корен)** полинома $a(x)$ је било које решење једначине $a(x) = 0$.

Ако је α нула полинома $a(x)$, по *Безуовој теореми* следи да је полином $a(x)$ дељив са $x - \alpha$, тј. $a(x)$ се може написати у облику $a(x) = (x - \alpha)b(x)$, где је $b(x)$ полином степена за један мањег него $a(x)$. Јасно је да важи и обратно, дакле тачно је тврђење:

Теорема 5. Број α је нула полинома $a(x)$ ако и само ако $x-\alpha|a(x)$, тј. $a(x)=(x-\alpha)b(x)$ за неки полином $b(x)$.

Теорема 6. Ако су α и β две различите нуле полинома $a(x)$, тада је $a(x)$ дељив са $(x-\alpha)(x-\beta)$.

Доказ. По теореми 5, биће $a(x)=(x-\alpha)b(x)$. Ако у овој релацији заменимо $x=\beta$, добија се $a(\beta)=(\beta-\alpha)b(\beta)$, тј. $(\beta-\alpha)b(\beta)=0$ и, због $\beta\neq\alpha$, $b(\beta)=0$, па је поново по теореми 5, $b(x)=(x-\beta)b_1(x)$. Дакле, биће $a(x)=(x-\alpha)(x-\beta)b_1(x)$, што значи да $(x-\alpha)(x-\beta)|a(x)$. ■

Дефиниција 10. Број α је нула к-тог реда (или к-тострука нула) полинома $a(x), k\in\mathbb{N}$, ако је $(x-\alpha)^k|a(x)$ и $(x-\alpha)^{k+1}\nmid a(x)$.

Пример 17. Одреди бар један полином чије су нуле:
а) $\alpha_1=1,\alpha_2=3-i,\alpha_3=5,\alpha_4=-i$;
б) $\alpha_1=2$ је двострука нула, $\alpha_2=i$ је трострука нула.

Решење.
а) $a_1(x)=(x-1)(x-3+i)(x-5)(x+i)$;
б) $a_2(x)=(x-2)^2(x-i)^3$. ▲

Значајно место у историји математике заузима питање да ли сваки полином са коефицијентима из прстена K има бар једну нулу у том прстену. Лако се закључује да ако је K један од прстена $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ или $\mathbb{R}$, овакво тврђење не важи. Довољно је уочити полином x^2+1 са целобројним коефицијентима, који нема корене ни у једној од поменутих структура. Међутим, у пољу комплексних бројева ситуација је другачија. Доказује се да сваки полином степена $n\geq 1$ са коефицијентима из поља $\mathbb{C}$ има тачно n корена у пољу $\mathbb{C}$ (рачунајући сваки корен онолико пута колика је његова вишеструкост). Ово тврђење следи из наредне теореме која је, због свог значаја, својевремено названа *основним ставом* *алгебре.*

Теорема 7. (Основни став алгебре) Сваки полином степена $n \geq 1$ са коефицијентима из поља комплексних бројева има бар једну нулу у пољу $\mathbb{C}$.

Комбинујући теорему 7 са теоремом 5 лако индукцијом добијамо да важи поменута

Теорема 8. Сваки полином $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ степена $n \geq 1$ са коефицијентима из поља комплексних бројева има тачно n корена у том пољу, при чему је сваки корен рачунат онолико пута колика је његова вишеструкост. Другим речима, тај полином се може представити у облику

$$a(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\ldots(x - \alpha_n),$$

где су $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ његове нуле.

Може се догодити да неки од бројева $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ из претходне теореме буду једнаки међу собом. Зато се наведена факторизација полинома може написати у облику

$$a(x) = a_n(x - \alpha_1)^{k_1}(x - \alpha_2)^{k_2}\ldots(x - \alpha_m)^{k_m},$$

где су $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ међусобно различите нуле полинома $a(x)$, $k_1, \ldots, k_m$ су природни бројеви и $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n = st(a(x))$. Овакво представљање се зове **канонска факторизација** полинома $a(x)$.

Још једна непосредна последица теореме 8 је следећи важан критеријум за испитивање дељивости полинома.

Теорема 9. Полином $a(x)$ дељив је полиномом $b(x)$ акко је свака нула α полинома $b(x)$ уједно нула полинома $a(x)$ и при томе ред вишеструкости броја α као нуле полинома $b(x)$ није већи од његовог реда вишеструкости као нуле полинома $a(x)$.

Пример 18. Полином $a(x) = (\cos\phi + x\sin\phi)^n - \cos n\phi - x\sin n\phi$ $(n \in \mathbb{N}, \phi \in \mathbb{R})$ дељив је полиномом $b(x) = x^2 + 1$. Наиме, нуле полинома $b(x)$ су $\alpha_1 = i$ и $\alpha_2 = -i$, а $a(i) = (\cos\phi + i\sin\phi)^n - \cos n\phi - i\sin n\phi = 0$ по *Моавровој формули*. Слично се показује и да је $a(-i) = 0$. ▲

3.4 Вијетове формуле

За квадратни полином $a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_2 \neq 0)$ важе *Вијетове форуме*

$$x_1 + x_2 = -\frac{a_1}{a_2},\ \ x_1x_2 = \frac{a_0}{a_2}$$

ако и само ако су x_1 и x_2 корени посматраног полинома. Значај Вијетових формула код квадратног полинома није велики јер се корени тих полинома лако налазе применом познатог алгоритма. Међутим, за полиноме вишег степена је тешко, а понекад и потпуно немогуће одредити корене, па су најчешће Вијетове везе (а оне важе, као што ћемо видети, за све полиноме степена не мањег од два) те, које дају једине информације о коренима неког полинома.

Посматрајмо сада полином трећег степена $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ $(a_3 \neq 0)$. На основу теореме 8 је $a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = a_3(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$, при чему су x_1, x_2, x_3 корени овог полинома.
После множења и сређивања добијамо
$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 =$
$= a_3x^3 - a_3(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + a_3(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)x - a_3x_1x_2x_3$, одакле је

$$\begin{gathered} x_1 + x_2 + x_3 = -\tfrac{a_2}{a_3}, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = \tfrac{a_1}{a_3}, \\ x_1x_2x_3 = -\tfrac{a_0}{a_3}. \end{gathered}$$

Лако се показује да важи и обратно. На сличан начин се доказује да за све полиноме произвољног степена $n \geq 2$ важи

Теорема 10. Бројеви $x_1, \ldots, x_n$ су корени полинома $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ $(a_n \neq 0)$ ако и само ако важе Вијетове формуле:

$$x_1 + \ldots + x_n = -\tfrac{a_{n-1}}{a_n},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \tfrac{a_{n-2}}{a_n},$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\tfrac{a_{n-3}}{a_n},$$
$$\vdots$$
$$x_1x_2\ldots x_n = (-1)^n\tfrac{a_0}{a_n}.$$

На пример, за полином четвртог степена $a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$ Вијетове формуле гласе:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\tfrac{a_3}{a_4},$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \tfrac{a_2}{a_4},$$
$$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = -\tfrac{a_1}{a_4},$$
$$x_1x_2x_3x_4 = \tfrac{a_0}{a_4}.$$

Пример 19. Наћи збир квадрата корена једначине $x^4 - 5x^2 + 3x + 4 = 0$.

Решење. По Вијетовим формулама је $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$ и $x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -5$, па је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 - 2(x_1x_2 + \ldots + x_3x_4) = 10$. ▲

Пример 20. Дужине страница неког троугла су решења једначине $x^3 - 42x^2 + 587x - 2730 = 0$. Наћи површину тог троугла.

Решење. По Вијетовим формулама је $x_1+x_2+x_3 = 42$, $x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3 = 587$ и $x_1x_2x_3 = 2730$. Полуобим троугла је $s = \frac{x_1+x_2+x_3}{2} = 21$, па применом *Херонове формуле* за површину добијамо
$P^2 = s(s - x_1)(s - x_2)(s - x_3) = 21(21 - x_1)(21 - x_2)(21 - x_3) =$
$= 21^4 - 21^3(x_1 + x_2 + x_3) + 21^2(x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3) - 21x_1x_2x_3 = 7056$, и $P = 84$. ▲

3.5 Полиноми са реалним коефицијентима

Теорема 11. Ако је x_r корен полинома $a(x)$ са реалним коефицијентима, онда је $\overline{x_r}$ корен истог полинома. Штавише, ако је x_r корен реда k_r, онда је и $\overline{x_r}$ корен реда k_r.

Доказ. Нека је $a(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \;\; a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ и $a(x_r) = 0$. Тада је
$\overline{a(x)} = \overline{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0} = a_n \overline{x}^n + a_{n-1}\overline{x}^{n-1} + \ldots + a_1 \overline{x} + a_0 = a(\overline{x})$,
дакле и $a(\overline{x_r}) = 0$.
Претпоставимо сада да је x_r корен реда k_r. Тада је, по теореми 8, $a(x) = a_n(x - x_1)^{k_1} \ldots (x - x_m)^{k_m}, k_1 + \ldots + k_m = n$, па је, према претходном $\overline{a(x)} = a_n(x - \overline{x_1})^{k_1} \ldots (x - \overline{x_m})^{k_m}$. Из последње једнакости непоредно следи тврђење теореме. ■

Пример 21. Знајући да је $x_1 = 1 + i$ један корен полинома $a(x) = x^4 - 2x^3 - 62x^2 + 128x - 128$, наћи остале корене.

Решење. По теореми 11 налазимо да је и $x_2 = 1 - i$ један корен полинома. Дељењем полинома $a(x)$ са $(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1 - i)(x - 1 + i) = x^2 - 2x + 2$ добијамо полином $x^2 - 64$, чије су нуле $x_{3,4} = \pm 8$ у исто време и нуле полинома $a(x)$. ▲

Чињеница доказана у теореми 11, да се комплексне нуле полинома са реалним коефицијентима појављују у паровима има значајне непосредне последице.

Теорема 12. Полином са реалним коефицијентима непарног степена има бар једну реалну нулу; ако их има више - њихов број је непаран.

Теорема 13. Полином $a(x)$ са реалним коефицијентима степена $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ може се на јединствен начин (са тачношћу до поретка чланова) изразити у облику производа
$a(x) = a_n(x - x_1)^{s_1} \ldots (x - x_m)^{s_m}(x^2 + p_1 x + q_1)^{t_1} \ldots (x^2 + p_k x + q_k)^{t_k}$,
$x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}, \;\; s_1, \ldots, s_m, t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{N}, \;\; p_1, \ldots, p_k, q_1, \ldots, q_k \in \mathbb{R}$,
при чему је $s_1 + \ldots + s_m + 2(t_1 + \ldots + t_m) = n$ и за све $i = 1, \ldots, k, \;\; p_i^2 - 4q_i < 0$.

Доказ. Тврђење теореме следи из теореме 8 и 11, коришћењем идентитета $(x - x_r)(x - \overline{x_r}) = x^2 - (x_r + \overline{x_r})x + x_r\overline{x_r} = x^2 - (2Rex_r)x + |x_r|^2$. ■

Пример 22. Доказати да полином $x^3+ax+b,\ \ a>0,\ \ b\in\mathbb{R}$ има тачно један реални корен.

Решење. По Вијетовим формулама налазимо $x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2a<0$, па овај полином не може имати све реалне корене. Према теореми 12 следи да он има тачно један реални корен. ▲

Пример 23. По теореми 13, сваки полином са реалним коефицијентима се може раставити у производ реалних чинилаца првог и другог степена, при чему чиниоци другог степена немају реалне нуле. Наводимо неколико примера

$$x^4+1=(x^2-x\sqrt{2}+1)(x^2+x\sqrt{2}+1),$$
$$x^3-4x^2+5x-2=(x-1)^2(x-2),$$
$$x^4+x^2+1=(x^2-x+1)(x^2+x+1),$$
$$x^6-1=(x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1).\quad ▲$$

За полиноме са целобројним коефицијентима важе извесна тврђења која омогућују налажење свих целих, односно рационалних корена тих полинома.

Теорема 14. Ако је цео број α корен полинома $a(x)$ са целобројним коефицијентима, тада је α делилац слободног члана тог полинома.

Доказ. Нека је $a(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0,\ \ a_0,a_1,\ldots a_n\in\mathbb{Z}$ и $a(\alpha)=0$. Из $a_0=-\alpha(a_n\alpha^{n-1}+\ldots+a_1)$ следи $\alpha|a_0$. ■

Пример 24. Нека је $a(x)=x^3-2x^2-x-6$. По теореми 14, целобројне нуле овог полинома могу бити $\pm1,\pm2,\pm3,\pm6$. Непосредном провером испоставља се да је $a(3)=0$ и затим да је $a(x)=(x-3)(x^2+x+2)$, па $a(x)$ нема других целобројних нула.
На сличан начин закључујемо да је, на пример,
$x^3-6x^2+11x-6=(x-1)(x-2)(x-3)$,
$x^4-x^3+2x^2+x-3=(x-1)(x+1)(x^2-x+3)$,
а да полином $3x^4+x^3-5x^2-2x+2$ нема целобројних корена. ▲

Теорема 15. Потребан услов да је рационалан број $\frac{p}{q}$ $((p,q)=1,\ \ p,q\neq 0)$ корен полинома $a(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ са целобројним коефицијентима $(a_0 a_n \neq 0)$ је $p|a_0$ и $q|a_n$.

Доказ. Из $a_n(\frac{p}{q})^n + a_{n-1}(\frac{p}{q})^{n-1} + \ldots + a_1(\frac{p}{q}) + a_0 = 0$ следи

(1) $a_n \frac{p^n}{q} + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0 q^{n-1} = 0$,

(2) $a_n p^{n-1} + a_{n-1}p^{n-2}q + \ldots + a_0 \frac{q^n}{p} = 0$.

Из (1), имајући у виду да су p и q узајамно прости цели бројеви, непосредно следи да $q|a_n$, а из (2) да $p|a_0$. ■

Пример 25. Посматрајући полином $9x^3 - 6x^2 - 5x + 2$ закључујемо да, ако он има рационални корен облика $\frac{p}{q}$, $(p,q) = 1$, по теореми 15, мора бити $p|2$ и $q|9$. За нуле датог полинома, од рационалних долазе у обзир само бројеви $\pm 1, \pm 2, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{1}{9}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{2}{9}$. Непосредном провером налазимо да су нуле $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{3}$ и $x_3 = \frac{1}{3}$. ▲

4 Алгебарске једначине трећег степена

Алгебарском једначином степена n, $n \in \mathbb{N}$, над пољем реалних бројева зовемо једначину облика:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 = 0$$

где су $a_n, a_{n-1}, .., a_1, a_0 \in \mathbb{R}$, $a_n \neq 0$, коефицијенти те једначине.
Видимо да је то једначина облика $P_n(x) = 0$, где је $P_n(x)$ полином степена n са реалним коефицијентима.

У првом разреду смо научили да решавамо произвољне алгебарске једначине првог степена (линеарне једначине), односно једначине облика

$$a_1 x + a_0 = 0, \ \ a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ \ a_0 \neq 0$$

и видели да таква једначина има јединствено решење $x_1 = -\frac{a_0}{a_1}$; то решење је реалан број.

У другом разреду смо научили да решавамо произвољне алгебарске једначине другог степена (квадратне једначине), односно једначине облика

$$a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0, \ \ a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}, \ \ a_2 \neq 0$$

и видели да таква једначина има два решења у скупу комплексних бројева $\mathbb{C}$. Та решења могу бити: 1° међусобно једнаки реални бројеви; 2° међусобно различити реални бројеви; 3° пар конјуговано комплексних бројева.
Тада смо се договорили да их, традиционално, записујемо у облику

$$x_{1,2} = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}.$$

Природно је поставити питање може ли се извести формула за налажење решења произвољне алгебарске једначине степена већег од 2.

Након година и векова, расправа и двобоја, бурне историјске прошлости, опште решење кубне једначине је угледало светлост дана у касној ренесанси у 16. веку у Италији.

Италијански математичар Дел Феро ($Del\ \ Fero, 1456-1526$) први је решио један од типова кубне једначине, али је поступак држао у тајности. На самрти, он тајну поверава свом ученику Антонију Марији Фиори, а белешке је дао свом зету Невеу.

Није познато колико је облика кубне једначине умео да реши Дел Феро. Чињеница да је умео да реши само један долази од када је самоуки математичар и познати дуелант Николо Фонтана Тартаља ($Niccolo\ Fontana$
$Tartaglia, 1499-1557$) изазвао Фиору који се хвалио како зна метод за решавање кубне једначине. Математички двобој је одигран, Тартаља је успео да реши противникове проблеме, док је Фиори успео да реши само један случај кубне једначине. Остаје тајна да ли је Феро знао оба случаја кубне једначине, али је ипак ученику саопштио само један.

Тартаљина победа привукла је пажњу Ђиралома Кардана ($Gerolamo$
$Cardano, 1501-1576$), који је, за разлику од Тартаље, био школован математичар.

Кардано је успео извући метод за решавање кубне једначине, уз обећање да га неће објављивати. Тартаља је Кардану послао решење у стиховима, те овом није било тешко да закључи како се ради.

Када су куб и ствар заједно
Једнаки неком константном броју
Пронађи друга два броја која се за тај разликују.
Тада ћеш усвојити ово као навику
Да им производ треба бити једнак
Тачно кубу трећине од ствари,
Остаје онда као опште правило
Да ће разлика њихових кубних корена
Бити једнака твојој основној ствари.

Шта се онда дешава?

Кардано са својим учеником Фераријем (*Lodovico Ferrari*, $1522-1566$) развија методу за решавање свих типова кубне једначине, док ученик Ферари иде још даље и развија метод за решавање једначине четвртог степена.

Сва знања и открића су сабрали у дело „Велика вештина” (*Ars magna*, 1545.)

Данас су формуле за решавање кубне једначине познате као **Кардано-Тартаљине формуле**.

4.1 Карданова формула

Произвољна алгебарска једначина трећег степена

$$a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ \ a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R},\ \ a_3 \neq 0 \tag{1}$$

еквивалентна је једначини

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0, \tag{2}$$

$a = \frac{a_2}{a_3},\ \ b = \frac{a_1}{a_3},\ \ c = \frac{a_0}{a_3}$, па ћемо у даљем решавати једначину (2).

Уведимо нову непознату y заменом

$$y = x + \frac{a}{3}.$$

Једначина постаје $\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$, односно $y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$, односно

$$y^3 + py + q = 0, \tag{3}$$

Уведимо нову непознату y заменом

$$y = x + \frac{a}{3}.$$

Једначина постаје $\left(y - \frac{a}{3}\right)^3 + a\left(y - \frac{a}{3}\right)^2 + b\left(y - \frac{a}{3}\right) + c = 0$, односно $y^3 + (b - \frac{a^2}{3})y + \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c = 0$, односно

$$y^3 + py + q = 0, \tag{4}$$

$p = b - \frac{a^2}{3}$, $q = \frac{2a^3}{27} - \frac{ab}{3} + c$.

Претпоставимо да је

$$y = u + v, \tag{5}$$

где су u и v нове непознате. Ове две непознате треба да задовоље једну једначину (3), па можемо наметнути још један услов, који ћемо изабрати. Заменом у једначину налазимо

$$(u + v)^3 + p(u + v) + q = 0,$$

односно $u^3 + v^3 + 3uv(u + v) + p(u + v) + q = 0$, тј.

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0. \tag{6}$$

Сада захтевамо да буде

$$3uv + p = 0. \tag{7}$$

Тиме једначина (5) постаје

$$u^3 + v^3 + q = 0. \tag{8}$$

Дакле, u и v задовољавају

$$u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}, \quad u^3 + v^3 = -q,$$

па кубови u^3 и v^3 непознатих u и v, према Вијетовим формулама, представљају решења квадратне једначине

$$z^2 - (u^3 + v^3)z + u^3v^3 = 0,$$

односно

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0. \tag{9}$$

Решења једначине (8) су

$$z_1 = u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}},$$

$$z_2 = v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Одатле, одређивањем бројева (реалних или комплексних) чији су кубови једнаки нађеним бројевима, добијамо

$$y = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}. \tag{10}$$

Добијена формула (9) позната је као ***Карданова формула***.

Нека је u^3 било које од решења квадратне једначине (8),

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4\frac{p^3}{27}}}{2} = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}.$$

Уочимо било које решење ове кубне једначине, $u_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$.
Нека је $u_1 = \alpha$. Тада је $u_2 = \omega\alpha$ и $u_3 = \omega^2\alpha$, где је $\omega = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}$ (то је један од трећих корена јединице; остали су, као што знамо, ω^2 и $\omega^3 = 1$). Из релације (6) добијамо да је $v_1 = -\frac{p}{3\alpha}, v_2 = -\frac{p}{3\omega\alpha}$ и $v_3 = -\frac{p}{3\omega^2\alpha}$.
Увођењем смене $-\frac{p}{3\alpha} = \beta$ добијамо

$$v_1 = \beta, v_2 = \omega^2\beta \text{ и } v_3 = \omega\beta.$$

Онда су решења једначине (3)

$$y_1 = \alpha + \beta,\ \ y_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta,\ \ y_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta,$$

а решења полазне једначине (2):

$$x_1 = \alpha + \beta - \frac{a}{3},\ \ x_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta - \frac{a}{3},\ \ x_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta - \frac{a}{3}.$$

Пример 1. Решити једначину

$$x^3 - 3x^2 + 9x - 5 = 0.$$

Решење: Да бисмо уклонили други степен из једначине уводимо нову непознату заменом $y = x + \frac{a}{3}$. Како је $a = -3$, имамо да је $y = x - 1$, односно $x = y + 1$. Добија се

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 9(y+1) - 5 = 0,$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 9y + 9 - 5 = 0,$$
$$y^3 + 6y + 2 = 0; \quad p = 6,\ q = 2.$$

Како је
$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u^3 = -1 + \sqrt{1+8} = 2.$$

Како је
$$v^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow v^3 = -1 - \sqrt{1+8} = -4.$$

Сада налазимо једну од три вредности такве да задовоље услов $3uv + p = 0 \to uv = -\frac{p}{3}$.
За реалне бројеве $\sqrt[3]{2}$ и $-\sqrt[3]{4}$ важи $\sqrt[3]{2} \cdot (-\sqrt[3]{4}) = -\sqrt[3]{8} = -2 = -\frac{p}{3}$, па можемо узети $\alpha = \sqrt[3]{2}$, $\beta = -\sqrt[3]{4}$. Стога је

$$y_1 = \alpha + \beta \Rightarrow y_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4};$$
$$y_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta \Rightarrow y_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$
$$y_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta \Rightarrow y_3 = \sqrt[3]{2}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \sqrt[3]{4}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

y_1 је реално решење, y_2 и y_3 представљају пар конјуговано комплексних решења.
Даље налазимо
$$x_1 = y_1 + 1,$$
$$x_2 = y_2 + 1,$$
$$x_3 = y_3 + 1. \quad \blacktriangle$$

Пример 2. Решити једначину
$$x^3 + 3x - 4 = 0.$$

Решење: Видимо да једначина има реално решење $x_1 = 1$ (проверавамо делиоце слободног члана). Стога је она еквивалентна са
$$(x-1)(x^2 + mx + n) = 0,$$

односно, након дељења,

$$(x-1)(x^2+x+4)=0,$$

и решења су

$$x_1=1,\quad x_2=\frac{-1+i\sqrt{15}}{2},\quad x_3=\frac{-1-i\sqrt{15}}{2}.$$

Да смо превидели ову чињеницу, радили бисмо преко Карданове формуле.

Други начин: Како је $a=0$, нема потребе уводити нову непознату јер је тада $y=x$. Дакле, $p=3,\ q=-4$.
Како је

$$u^3=-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\Rightarrow u^3=2+\sqrt{4+1}=2+\sqrt{5}.$$

Како је

$$v^3=-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}\Rightarrow v^3=2-\sqrt{4+1}=2-\sqrt{5}.$$

Сада налазимо једну од три вредности такве да задовоље услов $3uv+p=0\rightarrow uv=-\frac{p}{3}$.
За реалне бројеве $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$ и $\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$ важи $\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\cdot(\sqrt[3]{2-\sqrt{5}})=\sqrt[3]{-1}=-1=-\frac{p}{3}$, па можемо узети $\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}$, $\beta=\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}$. Стога је

$$x_1=\alpha+\beta\Rightarrow x_1=\alpha=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}},$$

одакле се не назире решење $x_1=1$. Ипак, због

$$\left(\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)\right)^3=\frac{1}{8}\left(1+3\sqrt{5}+15+5\sqrt{5}\right)=2+\sqrt{5},$$

$$\left(\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)\right)^3=\frac{1}{8}\left(1-3\sqrt{5}+15-5\sqrt{5}\right)=2-\sqrt{5},$$

можемо узети $x_1=\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{5}\right)+\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{5}\right)=1$.
Даље налазимо

$$x_2=\omega\alpha+\omega^2\beta\Rightarrow x_2=\sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\ \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

$$x_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta \Rightarrow x_3 = \sqrt[3]{2+\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \ \blacktriangle$$

Пример 3. Решити једначину $x^3 - 3x^2 + 12x + 16 = 0$.

Решење: Да бисмо уклонили други степен из једначине уводимо нову непознату заменом $y = x + \frac{a}{3}$. Како је $a = -3$, имамо да је $y = x - 1$, односно $x = y + 1$. Добија се

$$(y+1)^3 - 3(y+1)^2 + 12(y+1) + 16 = 0,$$

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 1 - 3y^2 - 6y - 3 + 12y + 12 + 16 = 0,$$

$$y^3 + 9y + 26 = 0; \quad p = 9,\ q = 26.$$

Како је

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u^3 = -13 + \sqrt{169+27} = 1.$$

Како је

$$v^3 = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}} \Rightarrow v^3 = -13 - \sqrt{169+27} = -27.$$

Сада налазимо једну од три вредности такве да задовоље услов $3uv + p = 0 \to uv = -\frac{p}{3}$. За реалне бројеве 1 и -3 важи $1 \cdot (-3) = -3 = -\frac{p}{3}$, па можемо узети $\alpha = 1,\ \beta = -3$. Стога је

$$y_1 = \alpha + \beta \Rightarrow y_1 = 1 - 3 \Rightarrow y_1 = -2;$$

$$y_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta \Rightarrow y_2 = 1\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y_2 = 1 + 2\sqrt{3}i;$$

$$y_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta \Rightarrow y_3 = 1\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow y_3 = 1 - 2\sqrt{3}i;$$

y_1 је реално решење, y_2 и y_3 представљају пар конјуговано комплексних решења. Даље налазимо

$$x_1 = y_1 + 1 \Rightarrow x_1 = -1;$$

$$x_2 = y_2 + 1 \Rightarrow x_2 = 2 + 2\sqrt{3}i;$$

$$x_3 = y_3 + 1 \Rightarrow x_3 = 2 - 2\sqrt{3}i. \ \blacktriangle$$

Пример 4. Решити једначину $x^3 + 6x - 20 = 0$.

Решење: Како је $a = 0$, нема потребе уводити нову непознату јер је тада $y = x$. Дакле, $p = 6,\ q = -20$. Како је

$$u^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}} \Rightarrow u^3 = 10 + \sqrt{100 + 8} = 10 + \sqrt{108}.$$

Како је

$$v^3 = -\tfrac{q}{2} - \sqrt{\tfrac{q^2}{4} + \tfrac{p^3}{27}} \Rightarrow v^3 = 10 - \sqrt{100 + 8} = 10 - \sqrt{108}.$$

Сада налазимо једну од три вредности такве да задовоље услов $3uv + p = 0 \to uv = -\frac{p}{3}$. За реалне бројеве $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ и $\sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$ важи $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} \cdot \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}} = \sqrt[3]{-8} = -2 = -\frac{p}{3}$, па можемо узети $\alpha = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ и $\beta = \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}$. Стога је

$$x_1 = \alpha + \beta \Rightarrow x_1 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}} + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}};$$

$$x_2 = \omega\alpha + \omega^2\beta \Rightarrow x_2 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$x_3 = \omega^2\alpha + \omega\beta \Rightarrow x_3 = \sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt[3]{10 - \sqrt{108}}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right); \blacktriangle$$

Пример 5. Решити једначину $2x^3 + 3x^2 + 3x + 1 = 0$.

Решење: Увођењем смене $x = \frac{1}{y}$ једначина постаје $\frac{2}{y^3} + \frac{3}{y^2} + \frac{3}{y} + 1 = 0$. Множењем претходне једначине са y^3, добијамо

$$y^3 + 3y^2 + 3y + 2 = 0.$$

Да бисмо уклонили други степен из једначине уводимо нову непознату заменом $z = y + \frac{a}{3}$. Како је $a = 3$, имамо да је $z = y + 1$, односно $y = z - 1$. Добија се

$$(z - 1)^3 + 3(z - 1)^2 + 3(z - 1) + 2 = 0,$$

$$z^3 - 3z^2 + 3z - 1 + 3z^2 - 6z + 3 + 3z - 3 + 2 = 0,$$
$$z^3 + 1 = 0,$$
$$(z+1)(z^2 - z + 1) = 0.$$

Ако je $z_1 = -1 \Rightarrow y_1 = -2 \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}$.
Решавањем квадратне једначине $z^2 - z + 1 = 0$, добијамо решења $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$ и $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2}$.
Ако je $z_2 = \frac{1+\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow y_2 = \frac{\sqrt{3}i-1}{2} \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$.
Ако je $z_3 = \frac{1-\sqrt{3}i}{2} \Rightarrow y_3 = \frac{-\sqrt{3}i-1}{2} \Rightarrow x_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}$. ▲

5 Алгебарска једначина четвртог степена

Општи облик алгебарске једначине четвртог степена је:

$$a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0,\ a_4 \neq 0 \tag{1}$$

Једначина (1), дељењем са a_4, еквивалентна је једначини

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0, \tag{2}$$

где је $a = \frac{a_3}{a_4},\ b = \frac{a_2}{a_4},\ c = \frac{a_1}{a_4}$ и $d = \frac{a_0}{a_4}$.
Ако је једначина четвртог степена сведена на облик (2), кажемо да је нормирана.
Увек можемо једначину (1) да сведемо на облик (2).
Један од начина решавања алгебарске једначине четвртог степена је ***Феraријево решење***.

5.1 Феријево решење

Нека је дата једначина четвртог степена (2), тј.

$$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0.$$

У оваквом начину решавања настоји се поделити једначину на две квадратне једначине. Последња једначина је еквивалентна једначини

$$x^4 + ax^3 = -bx^2 - cx - d.$$

Одакле допуњавањем леве стране једнакости до квадрата бинома, добијамо

$$x^4 + ax^3 + \left(\frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{ax}{2}\right)^2 - bx^2 - cx - d,$$

тј.

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)x^2 - cx - d. \tag{3}$$

Видимо да је лева страна потпун квадрат, настојимо да и на десној страни добијемо потпуни квадрат $L^2(x)$, јер би тада из (3) произилазило:

$$x^2 + \frac{ax}{2} = \pm L(x). \tag{4}$$

Уколико у првој загради израза (3) додамо непознати израз и пошто је

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(x^2 + \frac{ax}{2}\right)^2 + yx^2 + \frac{ayx}{2} + \frac{y^2}{4},$$

добијамо да је

$$\left(x^2 + \frac{ax}{2} + \frac{y}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + y\right)x^2 + \left(\frac{ay}{2} - c\right)x + \left(\frac{y^2}{4} - d\right). \tag{5}$$

Да би у последњој једнакости десна страна била потпун квадрат $L^2(x)$, треба дискриминанта по x да буде једнака 0, тј. да важи:

$$\left(\frac{ay}{2} - c\right)^2 - 4\left(\frac{a^2}{4} - b + y\right) \cdot \left(\frac{y^2}{4} - d\right) = 0. \tag{6}$$

Последња једначина је једначина трећег степена по y коју знамо решити и назива се *Фераријева резолвента једначине* (2).
Значи из једначине (6) нађе се y, за такво y десна страна од (5) постаје $L^2(x)$, па из (5) закључујемо да важи (4); а квадратну једначину знамо решити.

Пример 1. Решити једначину $x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0$.

Решење: Идеја је да се ова једначина подели на две квадратне једначине. Почетна једначина је еквивалентна једначини

$$x^4 - 10x^3 = -35x^2 + 50x - 24.$$

Допуњавањем леве стране једнакости до квадрата бинома, добијамо

$$(x^2 - 5x)^2 = -10x^2 + 50x - 24.$$

Ако у заграду претходне једначине додамо непознати израз λ, добијамо

$$(x^2 - 5x + \lambda)^2 = -10x^2 + 50x - 24 + \lambda^2 + 2\lambda(x^2 - 5x).$$

Сређивањем десне стране једнакости, добијамо

$$(x^2 - 5x + \lambda)^2 = (-10 + 2\lambda)x^2 + (50 - 10\lambda)x + \lambda^2 - 24. \tag{1}$$

Да би у последњој једнакости десна страна била потпун квадрат, треба дискриминанта по x да буде једнака 0, тј. да важи:

$$(50 - 10\lambda)^2 - 4(-10 + 2\lambda)(\lambda^2 - 24) = 0.$$

Одавде добијамо једначину трећег степена по λ чија су решења $\lambda_1 = 5,\ \lambda_2 = \frac{11}{2}$ и $\lambda_3 = 7$.
Заменом вредности $\lambda_1 = 5$ у једначину (1), добијамо

$$(x^2 - 5x + 5)^2 = 1.$$

$$\Rightarrow (x^2 - 5x + 5)^2 - (1)^2 = 0$$
$$\Rightarrow (x^2 - 5x + 6)(x^2 - 5x + 4) = 0$$

Решавањем квадратних једначина добијамо четири решења:

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4.\ \blacktriangle$$

Пример 2. Решити једначину $x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12 = 0$.

Решење: Идеја је да се ова једначина подели на две квадратне једначине. Почетна једначина је еквивалентна једначини

$$x^4 + 2x^3 = 7x^2 + 8x - 12.$$

Допуњавањем леве стране једнакости до квадрата бинома, добијамо

$$(x^2 + x)^2 = 8x^2 + 8x - 12.$$

Ако у заграду претходне једначине додамо непознати израз λ, добијамо

$$(x^2 + x + \lambda)^2 = 8x^2 + 8x - 12 + \lambda^2 + 2\lambda(x^2 + x).$$

Сређивањем десне стране једнакости, добијамо

$$(x^2 + x + \lambda)^2 = (8 + 2\lambda)x^2 + (8 + 2\lambda)x + \lambda^2 - 12. \tag{1}$$

Да би у последњој једнакости десна страна била потпун квадрат, треба дискриминанта по x да буде једнака 0, тј. да важи:

$$(8+2\lambda)^2 - 4(8+2\lambda)(\lambda^2-12) = 0.$$

Дељењем претходне једначине са $(8+2\lambda)$, добијамо

$$8+2\lambda = 4(\lambda^2-12).$$

$$\Rightarrow 2\lambda^2 - \lambda - 28 = 0$$

Решавањем квадратне једначине по λ добијамо решења: $\lambda_1 = 4$ и $\lambda_2 = -\frac{7}{2}$. Заменом вредности $\lambda_1 = 4$ у једначину (1), добијамо

$$(x^2+x+4)^2 = 16x^2+16x+4.$$

$$\Rightarrow (x^2+x+4)^2 = (4x+2)^2$$

$$\Rightarrow (x^2+x+4)^2 - (4x+2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow (x^2+5x+6)(x^2-3x+2) = 0$$

Решавањем квадратних једначина добијамо четири решења:

$$x_1 = -3,\ x_2 = -2,\ x_3 = 1,\ x_4 = 2. \ \blacktriangle$$

6 Разни задаци

1. Колико има полинома P са целобројним коефицијентима за које важи $16P(x^2) = (P(2x))^2,\ \ x \in \mathbb{R}$?

Решење. Нека је дат полином $n-$тог степена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

где је $a_0 \neq 0$. Како је

$$16P(x^2) = 16a_0x^{2n} + \ldots,\ \ (P(2x))^2 = 2^{2n}a_0^2x^{2n} + \ldots,$$

при чему смо узели чланове са највећим степеном, из једнакости $16P(x^2) = (P(2x))^2$ излази

$$16a_0 = 2^{2n}a_0^2, \text{ тј. } 2^{2n}a_0 = 16.$$

Пошто је a_0 цео број, последња једнакост има три решења:

$$1^\circ\ \ a_0 = 1, n = 2;\ \ 2^\circ\ \ a_0 = 4, n = 1;\ \ 3^\circ\ \ a_0 = 16, n = 0.$$

1° Полином је $P(x) = x^2 + a_1x + a_2$. Из једнакости

$$16(x^4 + a_1x^2 + a_2) = (4x^2 + 2a_1x + a_2)^2$$

добијамо $a_1 = 0$ и $a_2 = 0$, па је $P(x) = x^2$.
2° Полином је линеарна функција, $P(x) = 4x + a_1$. Из једнакости $16(4x^2 + a_1) = (8x + a_1)^2$ налазимо $a_1 = 0$, одакле је $P(x) = 4x$.
3° Полином је константа, $P(x) = 16$.
Дакле, постоје три полинома који задовољавају услове задатка: $P(x) = x^2, P(x) = 4x$ и $P(x) = 16$.
Наведеним решењима треба додати тривијално решење, $P(x) = 0$. Дакле, постоје четири полинома који испуњавају услове задатка.

2. Одреди производ свих рационалних нула полинома $2x^3 + x^2 + 2x + 1$.

Решење. Како је

$$2x^3 + x^2 + 2x + 1 = 2x(x^2 + 1) + x^2 + 1 = (2x + 1)(x^2 + 1),$$

једина рационална нула полинома је $x = -\frac{1}{2}$, па је производ таквих нула једнак $-\frac{1}{2}$.

3. Одреди збир коефицијената полинома $p(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 1)^{2002}$.

Решење. Ако је дат полином $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$, збир коефицијената је једнак вредности полинома за $x = 1$. У овом примеру, $p(1) = 1$.

4. Одреди збир коефицијената полинома $P(x) = (2x^2 + x^3 - x - 1)^{2008} + 2007$ уз парне степене $(x^0, x^2, x^4, \ldots)$.

Решење. Ако је полином $P(x)$ дат у облику $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$, за $x = 1$ и $x = -1$ добијамо

$$P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 \ldots, \;\; P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots.$$

Сабирањем ових једнакости, налазимо $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots = \frac{1}{2}(P(1) + P(-1))$. За задати полином је $P(1) = 2008$ и $P(-1) = 2008$, па је $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots = 2008$.

5. Колики је збир коефицијената полинома $P(x) = (x^3 + 2x^2 - x - 1)^{2008}$ уз непарне степене $(x, x^3, x^5, \ldots)$?

Решење. Нека је дат полином $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots$. За $x = 1$ и $x = -1$ имамо $P(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_2 + \ldots, \;\; P(-1) = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$. Збир коефицијената уз непарне степене је $a_1 + a_3 + a_5 + \ldots = \frac{1}{2}(P(1) - P(-1))$. У нашем задатку је $P(1) = 1$ и $P(-1) = 1$, па је збир коефицијената једнак нули.

6. Одреди остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{1994} + 16x^{994} - 28x^{94} - 10x^4 + x + 3$ полиномом $x^2 - 1$.

Решење. Према теореми 2 са стране 15. дати полином P се може приказати у облику

$$(1)\ \ P(x) = (x^2 - 1)Q(x) + Ax + B,$$

где је Q количник и $Ax + B$ остатак. За $P(x)$ важи: $P(1) = -17, P(-1) = -19$, па из (1) за $x = 1$ и $x = -1$ добијамо систем

$$A + B = -17,\ \ -A + B = -19 \ \ \Rightarrow\ \ A = 1, B = -18.$$

Остатак је $x - 18$.

7. За које $n \in \mathbb{N}$ је полином $P(x) = (2x^2+1)^{n+1} - (3x+15)^{2n}$ дељив полиномом $x + 2$?

Решење. Ако је полином $P(x)$ дељив са $x + 2$, онда је $P(-2) = 0$, тј.

$$P(-2) = 9^{n+1} - 9^{2n} = 9^{n+1}(1 - 9^{n-1}) = 0, \text{ одакле се добија } n = 1.$$

8. Колико заједничких делилаца облика $z - \alpha$ имају полиноми $z^6 - 1$ и $z^{45} + z^{30} + z^{15} + 1$?

Решење. Број заједничких нула ових полинома једнак је броју заједничких делилаца. Како је $z^6 - 1 = (z^3 + 1)(z^3 - 1)$, ако је $z^3 = 1$, онда је вредност другог полинома једнака 4, а ако је $z^3 = -1$, онда је вредност другог полинома једнака нули. Према томе, дати полиноми имају три заједничке нуле (решења једначине $z^3 + 1 = 0$), тј. три заједничка делиоца облика $z - \alpha$, где $\alpha \in \mathbb{C}$.

9. Одреди број различитих целобројних решења једначине $x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4 = 0$.

Решење. Пошто је производ решења -4, целобројна решења треба потражити у скупу $\{1, -1, 2, -2, 4, -4\}$. Директним претраживањем утврђујемо да су целобројна решења -1 и 4. Како је

$$(x^4 - x^3 - 9x^2 - 11x - 4) : ((x+1)(x-4)) = x^2 + 2x + 1,$$

закључујемо да је -1 троструко решење.

10. Колико има целих бројева који задовољавају неједначину $x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 2x + 24 < 0$?

Решење. Полином на левој страни неједначине може се факторисати на следећи начин:

$$\begin{aligned} x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 2x + 24 &= x^4 - 2x^3 - 24x^2 - x^2 + 2x + 24 \\ &= x^2(x^2 - 2x - 24) - (x^2 - 2x - 24) \\ &= (x^2 - 1)(x^2 - 2x - 24) \\ &= (x-1)(x+1)(x-6)(x+4). \end{aligned}$$

Решење неједначине $(x-1)(x+1)(x-6)(x+4) < 0$ је $x \in (-4, -1) \cup (1, 6)$. Има 6 целобројних решења: -3, -2, 2, 3, 4, 5.

11. Одреди број реалних решења једначине $x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

Решење. Дата једначина је такозвана *реципрочна* једначина која се решава на следећи начин:

$$x^4 - 4x^3 + 5x^2 - 4x + 1 = 0, \text{ одакле је } x^2 + \tfrac{1}{x^2} - 4\left(x + \tfrac{1}{x}\right) + 5 = 0.$$

Сменом $x + \frac{1}{x} = t$, за коју је $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$, добијамо

$$t^2 - 2 - 4t + 5 = 0, \text{ тј. } t^2 - 4t + 3 = 0, \text{ па је } t_1 = 1, t_2 = 3.$$

Једначина $x + \frac{1}{x} = 1$, тј. $x^2 - x + 1 = 0$ нема реалних решења, а решења једначине $x + \frac{1}{x} = 3$, тј. $x^2 - 3x + 1 = 0$ су $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$. Дакле, једначина има два реална решења.

12. Нека је $p(x)$ полином степена n $(n \geq 3)$. Ако је остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $x+1$ једнак 2, а остатак при дељењу полинома $p(x)$ са x^2+1 једнак $x-1$, колики је онда остатак при дељењу полинома $p(x)$ са $(x+1)(x^2+1)$?

Решење. На основу *Безуове теореме* имамо $p(-1)=2, p(i)=i-1, p(-i)=-i-1$. Нека је

$$\frac{p(x)}{(x+1)(x^2+1)} = q(x) + \frac{ax^2+bx+c}{(x+1)(x^2+1)}, \text{ тј.}$$
$$p(x) = (x+1)(x^2+1)q(x) + ax^2 + bx + c.$$

За $x=-1, i, -i$ добијамо редом

$$p(-1) = a-b+c = 2, p(i) = -a+bi+c = i-1, p(-i) = -a-bi+c = -i-1.$$

Из овог система излази $a=2, b=1$ и $c=1$, па је остатак $2x^2+x+1$.

13. Колики је остатак при дељењу полинома $P(x)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$ полиномом $x-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$?

Решење. На основу *Безуове теореме* важи једнакост $P\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=R$, где је R остатак. За комплексан број $a=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$ имамо $a^3=-1$, тј. $a^3+1=0$, одакле је $a^2-a+1=0$, тј. $a^2=a-1$. На основу тога добијамо

$$\begin{aligned} P(a) &= a^4+2a^3-13a^2-14a+24 = -a-2-13(a-1)-14a+24 \\ &= -28a+35 = -28\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+35 = 21-i14\sqrt{3}. \end{aligned}$$

14. Ако је $a, b \in \mathbb{R}$ и $(x^2+1)|ax^{2005}+2x^{2004}+3x^{2003}+b$, одреди разлику коефицијената $a-b$.

Решење. Пошто је полином $P(x)=ax^{2005}+2x^{2004}+3x^{2003}+b$ дељив са x^2+1, његови корени су $\pm i$. За $x=i$ имамо

$$P(i) = ai^{2005}+2i^{2004}+3i^{2003}+b = ai+2-3i+b = 0.$$

Из ове једнакости излази $a=3$ и $b=-2$, па је $a-b=5$.

15. Колико има заједничких делилаца облика $x-\alpha$ полинома x^4-1 и $x^{999}-x^{666}+x^{333}-1$?

Решење. Полином x^4-1 има 4 нуле: $1,-1,i,-i$. За полином $p(x)=x^{999}-x^{666}+x^{333}-1$ имамо $p(1)=0, p(-1)=-4, p(i)=0, p(-i)=0$. Дакле, постоје 3 заједничка делиоца: $x-1, x-i, x+i$.

16. Колико заједничких делилаца облика $x-\alpha$ имају полиноми $P(x)=x^5+1$ и $Q(x)=x^{44}-x^{33}+x^{22}-x^{11}+1$?

Решење. Полиноми P и Q имају онолико заједничких делилаца облика $x-\alpha$ колико имају заједничких нула. Једна нула полинома P је $x=-1$. Како је $Q(-1)=5, x=-1$ није нула полинома Q. Остале четири нуле полинома $P(x)$ задовољавају једначину $x^5+1=0$, тј. $x^4-x^3+x^2-x+1=0$. Нека су нуле овог полинома $x_k,\ \ k=1,2,3,4$. Тада је $x_k^4-x_k^3+x_k^2-x_k+1=0$, а важи и $x_k^5=-1$. Потражимо $Q(x_k)$:

$$\begin{gathered}
Q(x_k)=x_k^{44}-x_k^{33}+x_k^{22}-x_k^{11}+1\\
=x_k^{40}\cdot x_k^4-x_k^{30}\cdot x_k^3+x_k^{20}\cdot x_k^2-x_k^{10}\cdot x_k+1\\
=(x_k^5)^8x_k^4-(x_k^5)^6x_k^3+(x_k^5)^4x_k^2-(x_k^5)^2x_k+1\\
=(-1)^8x_k^4-(-1)^6x_k^3+(-1)^4x_k^2-(-1)^2x_k+1\\
=x_k^4-x_k^3+x_k^2-x_k+1=0.
\end{gathered}$$

Као што се види, остале четири нуле полинома P су такође нуле полинома Q. Према томе, ови полиноми имају 4 заједничка делиоца облика $x-\alpha$.

17. Ако полином са комплексним коефицијентима при дељењу да $x-i, x-4i$ и $x^2-5ix-4$ даје остатке $2i, 5i$ и $Ax+B\ \ (A,B\in\mathbb{C})$, одреди збир коефицијената $A+B$

Решење. Приметимо најпре да је $x^2-5ix-4=(x-i)(x-4i)$. Важи једнакост

$$P(x)=(x^2-5ix-4)Q(x)+Ax+B.$$

На основу *Безуове теореме* имамо $P(i)=2i, P(4i)=5i$, тако да се за $x=i$ и $x=4i$ једнакост $P(x)=(x^2-5ix-4)Q(x)+Ax+B$ своди на: $2i=Ai+B, 5i=4Ai+B$, тј. $A=1, B=i$, одакле је $A+B=1+i$.

18. Ако је број $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ нула полинома $P(x) = x^4 + ax^2 + 1$, одреди вредност коефицијента a.

Решење. Нека је $x_0 = \sqrt{2}+\sqrt{3}$ нула полинома P. Важи једнакост

$$x_0^4 + ax_0^2 + 1 = 0, \text{ тј. } a = -\left(x_0^2 + \frac{1}{x_0^2}\right).$$

Како је $x_0^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, $\frac{1}{x_0^2} = 5 - 2\sqrt{6}$, добијамо $a = -10$.

19. Ако је $P(x)$ полином петог степена са реалним коефицијентима, чији је најстарији коефицијент 3 и чија је двострука нула број $2-i$, а број 3 једнострука нула, чему је једнако $P(1)$?

Решење. Пошто полином $P(x)$ има реалне коефицијенте, његова двострука нула је $2+i$. На основу тога је

$$P(x) = 3((x-(2-i))(x-(2+i)))^2(x-3) = 3(x^2-4x+5)^2(x-3),$$

одакле излази $P(1) = 3 \cdot 4 \cdot (-2) = -24$.

20. При дељењу полинома $P(x)$ са $x-1$ добија се остатак 1, са $x-3$ такође 1, а дељив је са $x-2$. Колики је остатак при дељењу $P(x)$ са $x^3-6x^2+11x-6$?

Решење. За полином P важе једнакости $P(1) = 1, P(3) = 1$ и $P(2) = 0$. Нуле полинома $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ су 1, 2 и 3. Како је

$$\frac{P(x)}{x^3-6x^2+11x-6} = Q(x) + \frac{ax^2+bx+c}{x^3-6x^2+11x-6},$$

где је $Q(x)$ количник и ax^2+bx+c остатак, последња једнакост се може написати у облику

$$P(x) = (x^3-6x^2+11x-6)Q(x) + ax^2 + bx + c.$$

Ако у ову једнакост ставимо $x = 1, 2$ и 3, долазимо до система

$$a+b+c = 1, 4a+2b+c = 0, 9a+3b+c = 1,$$

чије је решење $a = 1, b = -4, c = 4$. Остатак је $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

21. Одреди реални део комплексног корена полинома $P(x) = x^4 + 6x^3 + 6x^2 - 5x + 12$.

Решење. Приметимо најпре да полином P нема позитивних корена. Пошто је 12 производ корена, треба испитати да ли неки корен припада скупу $\{-1, -2, -3, -4, -6, -12\}$. Утврђујемо да су корени $x_1 = -3, x_2 = -4$, тј. полином је дељив са $(x+3)(x+4)$.

Како је $\frac{P(x)}{(x+3)(x+4)} = x^2 - x + 1$, комплексне корене добијамо из једначине

$$x^2 - x + 1 = 0, \text{ одакле је } x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Према томе, реални део комплексног броја је $\frac{1}{2}$.

22. Нека је $R(x)$ остатак при дељењу полинома $P(x) = x^{2011} + x^{2008} + \ldots + x^7 + x^4 + x$ полиномом $x^2 - x + 1$. Одреди вредност $R(2)$.

Решење. Из једнакости $\frac{P(x)}{x^2-x+1} = Q(x) + (\frac{ax+b}{x^2-x+1})$, где је $Q(x)$ количник и $R(x) = ax + b$ остатак, добијамо

$$(1) \quad P(x) = (x^2 - x + 1)Q(x) + ax + b.$$

Нуле тринома $x^2 - x + 1$ су $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Пошто је $(x^2 - x + 1)(x + 1) = x^3 + 1$, приметимо да је $x_{1,2}^3 + 1 = 0$, тј. $x_{1,2}^3 = -1$. Прикажимо полином P у облику

$$P(x) = x(1 + x^3 + x^6 + \ldots + x^{2007} + x^{2010}) = x(1 + x^3 + (x^3)^2 + \ldots + (x^3)^{669} + (x^3)^{670}).$$

За $x = x_1$ имамо

$$P(x_1) = x_1(1 - 1 + 1 - 1 + \ldots + 1 - 1 + 1) = x_1.$$

Ако у (1) уведемо $x = x_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, налазимо $x_1 = ax_1 + b$, одакле је $a = 1$ и $b = 0$. Према томе, $R(x) = x$, па је $R(2) = 2$.

23. Ако је $1+i\sqrt{3}$ један од корена једначине $x^4+4x^3+10x^2+ax+b=0,\ \ a,b\in\mathbb{R}$, одреди збир модула свих решења једначине.

Решење. Пошто су коефицијенти полинома реални, $1-i\sqrt{3}$ је други корен једначине. То значи да је полином дељив са x^2-2x+4, па важи разлагање:

$$(x^2-2x+4)(x^2+\alpha x+\beta)=x^4+4x^3+10x^2+ax+b.$$

Изједначавањем коефицијената уз x^3 и x^2, добијамо систем $-2+\alpha=4, 4-2\alpha+\beta=10$, из којег излази $\alpha=6$ и $\beta=18$. Из једначине $x^2+6x+18=0$ налазимо још два корена: $x_{3,4}=-3\pm i3$. Како је $|x_1|=|x_2|=2, |x_3|=|x_4|=3\sqrt{2}$, збир свих модула је $4+6\sqrt{2}$.

24. Ако је полином $ax+b$ остатак при дељењу реалног полинома x^{2008} полиномом $x^2+2\sqrt{2}x+4$, одреди разлику његових коефицијената $a-b$.

Решење. Нуле полинома $x^2+2\sqrt{2}x+4$ су $x_{1,2}=-\sqrt{2}(1\pm i)$. Ако у једнакост

$$\frac{x^{2008}}{x^2+2\sqrt{2}x+4}=Q(x)+\frac{ax+b}{x^2+2\sqrt{2}x+4},\ \text{тј.}$$
$$x^{2008}=(x^2+2\sqrt{2}x+4)Q(x)+ax+b$$

ставимо $x=-\sqrt{2}(1+i)$, добијамо

$$(1)\ \ 2^{1004}(1+i)^{2008}=-\sqrt{2}(1+i)a+b.$$

Како је $(1+i)^{2008}=(2i)^{1004}=2^{1004}$, једнакост (1) постаје

$$2^{2008}=-\sqrt{2}(1+i)a+b\Rightarrow\ \ a=0,b=2^{2008}.$$

Према томе, $a-b=-2^{2008}$.

25. Одреди остатак при дељењу полинома $x^{111} + x^{108} + \ldots + x^6 + x^3 + 8$ полиномом $x^2 - x + 1$.

Решење. Важи једнакост

$$(1)\quad \frac{x^{111} + x^{108} + \ldots + x^6 + x^3 + 8}{x^2 - x + 1} = Q(x) + \frac{ax + b}{x^2 - x + 1},$$

где је $Q(x)$ количник и $ax + b$ остатак при дељењу. Корени квадратне једначине $x^2 - x + 1 = 0$ су $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Ако леву и десну страну једначине $x^2 - x + 1 = 0$ помножимо са x добијамо

$$x^3 - x^2 + x = 0, \text{ тј. } x^3 = x^2 - x = -1, \text{ одакле је } x_1^3 = -1, x_2^3 = -1.$$

Прикажимо једнакост (1) у облику

$$x^{111} + x^{108} + \ldots + x^6 + x^3 + 8 = (x^2 - x + 1)Q(x) + ax + b.$$

Ако у ову једнакост уведемо $x = x_1$ и $x = x_2$, налазимо

$$-1 + 1 - \ldots + 1 - 1 + 8 = ax_1 + b,$$

$$-1 + 1 - \ldots + 1 - 1 + 8 = ax_2 + b,$$

тј. $ax_1 + b = 7, ax_2 + b = 7$, одакле је $a = 0$ и $b = 7$. Према томе, тражени остатак је 7.

26. Одреди остатак при дељењу полинома $x^{2^n} + 1$ са $x^{2^{n-1}} + i$.

Решење. Како је $x^{2^n} + 1 = (x^{2^{n-1}} + i)(x^{2^{n-1}} - i)$, излази $(x^{2^n} + 1) : (x^{2^{n-1}} + i) = (x^{2^{n-1}} - i)$, па је тражени остатак једнак нули.

27. Ако је $ax + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ остатак при дељењу полинома $x^{2010} + x^{2009} + 1$ са $x^2 + x + 1$, одреди збир коефицијената $a + b$.

Решење. Важи једнакост $\frac{x^{2010}+x^{2009}+1}{x^2+x+1} = Q(x) + \frac{ax+b}{x^2+x+1}$, тј.

$$(1)\ \ x^{2010} + x^{2009} + 1 = (x^2 + x + 1)Q(x) + ax + b,$$

где је $Q(x)$ количник.
Како је $x^2 + x + 1 = 0$, одакле је $x_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, заменом $x = x_1$ у једначини (1), излази

$$(2)\ \ x_1^{2010} + x_1^{2009} + 1 = ax_1 + b.$$

Израчунајмо $x_1^{2010} + x_1^{2009}$. За x_1 имамо $x_1^3 = -1, 1 + x_1 = -x_1^2$, одакле је

$$x_1^{2010} + x_1^{2009} = x_1^{2009}(1 + x_1) = -x_1^{2011} = -x_1^{2010} \cdot x_1 = -((x_1^3)^{670})x_1 = -x_1.$$

Једначина (2) постаје $-x_1 + 1 = ax_1 + b$, тј. $\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = a\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + b$. Изједначавањем реалних и имагинарних делова, долазимо до система

$$\frac{3}{2} = -\frac{a}{2} + b,\ \ -1 = a, \text{ па је } a = -1, b = 1,$$

одакле је $a + b = 0$.

28. Ако је $ax^2 + bx + c$ остатак при дељењу полинома $x^{2014} + x^{2013} + x^{2012}$ са $x^3 - 1$, одреди вредност $a + 2b - 3c$.

Решење. Важи једнакост

$$(1)\ \ P(x) = x^{2014} + x^{2013} + x^{2012} = x^{2012}(x^2 + x + 1) = (x^3 - 1)Q(x) + ax^2 + bx + c,$$

где је $Q(x)$ количник и $R(x) = ax^2 + bx + c$ остатак.
Из једначине $x^3 - 1 = 0$, тј. $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$, добијамо три решења $x_1 = 1, x_{2,3} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. За $x = x_1, x = x_2$ и $x = x_3$ једнакост (1) се своди на систем линеарних једначина:

$$a + b + c = 3,\ \ ax_1^2 + bx_1 + c = 0,\ \ ax_2^2 + bx_2 + c = 0.$$

Приметимо да су x_1 и x_2 нуле остатка. Водећи рачуна да је $a+b+c = 3$, добијамо директно $R(x) = x^2 + x + 1$, тј. $a = b = c = 1$, па је $a + 2b - 3c = 0$.

29. Ако је један корен полинома $x^3 - 2x + a$, $a \in \mathbb{R}$, комплексан број $1+i$, одреди реалан корен тог полинома.

Решење. Пошто су коефицијенти полинома реални бројеви, а један корен, x_1, је комплексан број, онда је други корен коњугован први корен, тј. $x_2 = 1 - i$. Нека је трећи корен x_3. На основу *Вијетовог правила* следи

$$1 + i + 1 - i + x_3 = 0,$$

па је $x_3 = -2$.

30. Једно решење једначине $z^3 - (4+2i)z^2 + (5+8i)z - 10i = 0$ је облика ai за неки реалан број a. Одреди модул разлике њена преостала два решења.

Решење. Ако у дату једначину уведемо $z = ai$, добијамо

$$4a^2 - 8a - i(a^3 - 2a^2 - 5a + 10) = 0.$$

Из $4a^2 - 8a = 0$ излази $a = 2$. Према томе, један корен је $z_1 = 2i$. На основу *Вијетових правила* имамо

$$z_1 + z_2 + z_3 = 4 + 2i, \text{ тј. } z_2 + z_3 = 4, z_1 z_2 z_3 = 10i, \text{ одакле је } z_2 z_3 = 5.$$

Одавде је

$$z_2^2 + 2z_2z_3 + z_3^2 = 16, \text{ па је } z_2^2 - 2z_2z_3 + z_3^2 = (z_2+z_3)^2 - 4z_2z_3 = 16 - 20 = -4,$$
$$\text{тј. } (z_2 - z_3)^2 = -4 \text{ и } |z_2 - z_3| = 2.$$

31.Одреди збир квадрата решења једначине $x^3 + px^2 + q = 0$.

Решење. На основу *Вијетових правила* важе једнакости

$$x_1 + x_2 + x_3 = -p, \;\; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 0.$$

Квадрирањем прве једнакости добијамо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = p^2$, одакле је $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = p^2$.

32. Збир два решења једначине $2x^3 - x^2 + \lambda x - 3 = 0$ једнак је 1. Одреди вредност параметра λ.

Решење. На основу *Вијетових правила* збир решења је $\frac{1}{2}$. Пошто је збир два решења једнак 1, треће решење је $x = -\frac{1}{2}$. Заменом $x = -\frac{1}{2}$ у дату једначину, добијамо $-\frac{\lambda}{2} - \frac{7}{2} = 0$, тј. $\lambda = -7$.

33. Збир две нуле полинома $P(x) = 4x^3 + 8x^2 + x + \lambda$ једнак је трећој. Одреди вредност параметра λ.

Решење. Према *Вијетовим формулама* збир нула је $x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{8}{4} = -2$. Пошто је збир две нуле једнак трећој, трећа нула је -1. Из услова $P(-1) = -4 + 8 - 1 + \lambda = 0$ излази $\lambda = -3$.

34. Саставити једначину трећег степена чија су решења x_2x_3, x_3x_1 и x_1x_2, где су x_1, x_2 и x_3 решења једначине $x^3 + 2x - 1 = 0$.

Решење. Нека је $y^3 + py^2 + qy + r = 0$ једначина која се тражи. Применом *Вијетових правила* добијамо

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \;\; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 2, \;\; x_1x_2x_3 = 1.$$

Одавде излази

$$\begin{gathered} p = -(x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2) = -2, \\ q = x_1x_2x_3^2 + x_2x_3x_1^2 + x_3x_1x_2^2 = x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 0, \\ r = -(x_1x_2x_3)^2 = -1, \end{gathered}$$

па једначина гласи $y^3 - 2y^2 - 1 = 0$.

35. Збир два корена полинома $P(x) = x^3 - ax^2 + 8x - 11$ износи -3, а трећи корен је позитиван. Колики је производ свих решења једначине $P(x) = 0$ која су из скупа $\mathbb{R}$?

Решење. Нека је трећи корен x_3. Применом *Вијетовог правила* имамо $-3 + x_3 = a$, одакле је $x_3 = a + 3$. Из једнакости $P(x_3) = 0$ добијамо квадратну једначину $3a^2 + 26a + 40 = 0$, чији су корени $a_1 = -2$ и $a_2 = -\frac{20}{3}$. За $a = -2$ један корен, $x = 1$, је позитиван. Како је $(x^3 + 2x^2 + 8x - 11) : (x - 1) = x^2 + 3x + 11$, остала два корена су комплексна, па је производ реалних решења 1.

36. Одреди разлику $x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3)$ производа и збира решења кубне једначине $64x^3 - 1 = 0$.

Решење. На основу *Вијетових правила* имамо $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ (коефицијент уз x^2) и $x_1x_2x_3 = \frac{1}{64}$ (слободан члан подељен са 64, са промењеним знаком). Према томе,

$$x_1x_2x_3 - (x_1 + x_2 + x_3) = \frac{1}{64} = 64^{-1}.$$

37. Одреди збир свих решења једначине $z^n = 2 \ (z \in \mathbb{C}, n \in \mathbb{N}, n \neq 1)$.

Решење. Пошто је код једначине $z^n - 2 = 0$ коефицијент уз z^{n-1} једнак нули, на основу *Вијетових правила* збир решења је једнак нули.

38. Одреди збир свих решења једначине $(x^2 - 7x + 2)^3 - 13(x^2 - 7x) - 26 = 0$.

Решење. Дата једначина се може приказати у облику

$$\begin{aligned} & (x^2 - 7x + 2)^3 - 13(x^2 - 7x + 2) = 0 \\ \Rightarrow \ & (x^2 - 7x + 2)((x^2 - 7x + 2)^2 - 13) = 0 \\ \Rightarrow \ & (x^2 - 7x + 2)(x^2 - 7x + 2 + \sqrt{13})(x^2 - 7x + 2 - \sqrt{13}) = 0. \end{aligned}$$

Лева страна почетне једнакости еквивалентна је производу три квадратне једначине. На основу *Вијетовог правила* свака од ових једначина има збир решења 7. Према томе, тражени збир решења је $3 \cdot 7 = 21$.

39. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ различити од -1 корени једначине $x^{11} + 1 = 0$. Одреди вредност производа $(1 - x_1)(1 - x_2) \cdot \ldots \cdot (1 - x_{10})$.

Решење. Сменом $y = 1 - x$, тј. $x = 1 - y$, дата једначина се своди на

$$(1 - y)^{11} + 1 = 0, \text{ тј. } y^{11} + \ldots - 2 = 0.$$

Пошто је $y = 1 - x$, један корен ове једначине је $1 - (-1) = 2$. Применом *Вијетовог правила* је

$$2 \cdot y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_{10} = 2, \text{ тј. } y_1 y_2 \cdot \ldots \cdot y_{10} = 1,$$

а то је тражени производ.

40. Одреди збир квадрата корена једначине $5x^3 - 3x^2 - 4x + 2 = 0$.

Решење. На основу *Вијетових правила* имамо

$$x_1 + x_2 + x_3 = \frac{3}{5}, \;\; x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -\frac{4}{5}.$$

Квадрирањем прве једначине налазимо

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = \frac{9}{25},$$

одакле је

$$x_1^2 + x_2^3 + x_3^2 = \frac{9}{25} - 2 \cdot (-\frac{4}{5}) = \frac{49}{25}.$$

41. Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $x^3 - 2x^2 + x + 1 = 0$, одреди једначину чија су решења x_1^2, x_2^2, x_3^2.

Решење. На основу *Вијетових правила* једначина трећег степена чија су решења x_1^2, x_2^2, x_3^2 гласи:

$$(1)\ \ x^3 - (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)x^2 + (x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2)x - x_1^2x_2^2x_3^2 = 0.$$

Вијетова правила за дату једначину гласе

$$(2)\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 2,\ \ (3)\ \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = 1,\ \ (4)\ \ x_1x_2x_3 = -1.$$

Квадрирањем једначине (2) излази

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 4,$$

па уз помоћ (3) добијамо $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 - 2 \cdot 1 = 2$.
Квадрирањем једначине (3) налазимо

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 + 2(x_1x_2^2x_3 + x_2x_3^2x_1 + x_3x_1^2x_2) = 1,$$

одакле је

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 = 1 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3) = 1 - 2(-1) \cdot 2 = 5.$$

Најзад, из (4) је $x_1^2x_2^2x_3^2 = (-1)^2 = 1$.
Тражена једначина гласи: $x^3 - 2x^2 + 5x - 1 = 0$.

42. Ако су x_1, x_2, x_3 решења једначине $x^3 - 2x - 1 = 0$, одреди вредност израза $x_1^4 + x_2^4 + x_3^4$.

Решење. *Вијетова правила* за дату једначину гласе:

$$(1)\ \ x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ \ (2)\ \ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = -2,\ \ (3)\ \ x_1x_2x_3 = 1.$$

Квадрирањем (1), уз помоћ (2), добијамо

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1) = 0, \text{ тј. } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4.$$

Квадрирањем добијене једнакости и (2) излази

$$(3)\ \ x_1^4+x_2^4+x_3^4+2(x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2)=16$$
$$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+2(x_1x_2^2x_3+x_2x_3^2x_1+x_3x_1^2x_2)=4,$$
$$\text{па је } x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_1^2+2x_1x_2x_3(x_1+x_2+x_3)=4,$$
$$\text{одакле је } x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_3^1x_1^2=4.$$

Према томе, једнакост (3) постаје $x_1^4+x_2^4+x_3^4=16-8=8$.

43. Нека су x_1,x_2 и x_3 нуле полинома $p(x)=x^3+7x^2-2$, а x_1+x_2, x_2+x_3 и x_3+x_1 нуле полинома $q(x)$ са најстаријим коефицијентом једнаким 1. Одреди збир коефицијената полинома $q(x)$.

Решење. Нека је $q(x)=x^3+px^2+qx+r$. За нуле полинома $p(x)$ важе *Вијетова правила*

$$x_1+x_2+x_3=-7,\ \ x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0,\ \ x_1x_2x_3=2.$$

Из пре две једнакости излази $x_1^2+x_2^2+x_3^2=49$. Израчунајмо коефицијенте полинома q:

$$p=-((x_1+x_2)+(x_2+x_3)+(x_3+x_1))=-2(x_1+x_2+x_3)=-2\cdot(-7)=14;$$
$$q=(x_1+x_2)(x_2+x_3)+(x_2+x_3)(x_3+x_1)+(x_3+x_1)(x_1+x_2)$$
$$=3(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1^2+x_2^2+x_3^2=3\cdot 0+49=49;$$
$$r=-(x_1+x_2)(x_2+x_3)(x_3+x_1)$$
$$=-(x_1+x_2+x_3)(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)+x_1x_2x_3=2.$$

Збир коефицијената је $p+q+r=14+49+2=65$.

Литература

Алгебра - Гојко Калајџић

Математика 1, уџбеник са збирком задатака за први разред гимназије - Небојша Икодиновић

Анализа са алгебром 1 - Зоран Каделбург, Соња Чукић, Срђан Огњановић

Анализа са алгебром 3 - Зоран Каделбург, Соња Чукић, Срђан Огњановић, Владимир Мићић

Виша алгебра - др Ђуро Купера

Линеарна алгебра - Градимир Миловановић, Радосав Ђорђевић

Линеарна алгебра,полиноми,аналитичка геометрија - Д.С. Митриновић, Д. Михајловић, П.М. Васић

Анализа са алгебром, зборник решених задатака и проблема 1&**2** - Милољуб Албијанић, Добрило Тошић

Анализа са алгебром, зборник решених задатака и проблема 3&**4** - Милољуб Албијанић, Добрило Тошић