UNIVERZITET U BEOGRADU

MATEMATIČKI FAKULTET

MASTER RAD

Uvođenje realnih brojeva u osnovnu školu

Mentor:

Dr. Aleksandar Lipkovski

Student:

Marina Kovačević

Beograd, 2021. godine

Sadržaj:

Matematika je kraljica nauka,

a teorija brojeva kraljica matematike.

K.F.Gaus(1777-1855)

1. Uvod

Broj je osnovni pojam u matematici. Drugim rečima, pojam broja ne objašnjavamo koristeći druge jednostavnije pojmove. Počevši od prvog razreda osnovne pa kroz srednju školu i kasnije na fakultetima upoznajemo se sa više skupova brojeva. Najpre je to skup N, prirodnih brojeva. Potrebe prakse zahtevaju da taj skup proširimo do skupa Z, celih brojeva, zatim skupa Q, racionalnih brojeva, skupa R, realnih brojeva i konačno skupa C, kompleksnih brojeva. U radu su navedene jednačine koje opravdavaju takva proširenja.

Kada govorimo o jednom skupu brojeva naučimo i binarne operacije u njemu. Svojstva tih operacija prenosimo i na ostala proširenja. Govorimo o principu permanencije.

U uvodnom delu je navedeno šta je suština (temelj) svake matematičke teorije (aksiome i osnovni pojmovi). Za istu teoriju temelji mogu biti različiti. Navedena su dva pristupa izgradnje teorije prirodnih brojeva. Nisam se upuštala u detalje. To bi mogla biti tema posebnog rada. Skup Z, celih brojeva, sadrži N kao pravi podskup. Od skupa N je nasledio asocijativnost i komutativnost sabiranja i množenja. Logično je što Z ima i dodatne osobine. Zbog toga je, između ostalog, i formiran.

Zbog nemogućnosti rešavanja jednačine $a \cdot x = b$ za $a \neq 0$ u skupu Z izvedeno je novo proširenje do skupa Q. O ovom skupu je rečeno nešto više jer to zahteva nastavni plan matematike u osnovnoj i srednjoj školi. Objašnjeni su postupci kojima decimalne brojeve pišemo u obliku razlomaka. To su činjenice koje mogu shvatiti učenici osnovne škole. Zbog toga treba insistirati na njihovom razumevanju i potpunosti.

U nastavku izlaganja je pokazano da $\sqrt{2}$ ne pripada skupu Q i da dijagonala i stranica kvadrata nisu samerljive duži.

Skup Q, iako svuda gust, ima određene manjkavosti. Drugim rečima, brojna prava na kojoj smo predstavljali racionalne brojeve ima šupljina. Ne možemo u skupu Q rešiti jednačinu $x^2 = 2$ i sl. Zbog toga je uveden skup iracionalnih brojeva, I. Navedeni su primeri koji pokazuju da je skup I beskonačan. Skup R, realnih brojeva, je unija disjunktnih skupova Q i I. Kao i kod ostalih brojnih skupova postoje različiti pristupi (temelji) izgradnje njihove teorije. Odabrala sam metod prihvatljiv za učenike srednje škole. Navedene su aksiome uređenog polja (R, +, ·, ≤). Koristeći te aksiome u osnovnoj, a zatim i u srednjoj školi naučimo teoreme o ekvivalentnim jednačinama i nejednačinama. Značajne nejednakosti u skupu R, pojam korena, stepena sa realnim eksponentom, logaritma itd. Nastojala sam da deo izlaganja bude prihvatljiv za osnovce i srednjoškolce gde se pomenuti sadržaji predaju. Na kraju rada sam navela i određena tvrđenja potrebna za početne korake u Analizi 1 i njenim primenama.U literaturi koju sam koristila mogu se naći izloženi sadržaji, i mnogo više od toga.

Prijatna mi je dužnost da se zahvalim mentoru rada prof.dr. Aleksandru Lipkovskom, redovnom profesoru Matematičkog fakulteta, Univerziteta u Beogradu. Zajedno smo odabrali temu, profesor je svojim primedbama doprineo da ubrzam pisanje rada i da kvalitet izloženog bude što bolji.

1.1 Istorijski pregled razvoja pojma broja

Razumljivo da se brojevima prvo nazivaju prirodni brojevi 1, 2, 3, ... Ostali brojevi su kasnije tekovine ljudske kulture. Međutim, dok se razlomci i računanje razlomcima nalazi već u papirusu, dotle negativne i imaginarne brojeve ne nalazimo ni kod Grka ni Arapa, a u Zapadnoj Evropi ovi brojevi stiču pravo građanstva tek u 17. veku. Ukoliko se nailazi, pri rešavanju jednačine, na negativne brojeve, nazivaju ih „apsurdni brojevi“ , a slično se i kompleksna rešenja nazivaju „sakrivena rešenja“ . Za Lajbnica su imaginarni brojevi „utočište Božjeg duha“, „međubiće, između bića i nebića“. Isto tako ni Grci ni Arapi ni evropski matematičari srednjeg veka ne smatraju nulu brojem i ne uzimaju je kao rešenje jednačine.

U tom pogledu daleko je naprednija induska kultura. Indusi za negativne brojeve imaju i poseban znak: tačku iznad broja. Naziv za pozitivne i negativne brojeve imaju značenje imetka, odnosno duga. Zbog poznavanja relativnih brojeva i operacija sa njima, Indusi imaju umesto Diofantova tri pravila za rešavanje kvadratnih jednačina samo jedno takvo pravilo. Isto tako, Indusi imaju za nulu poseban znak, što je i omogućilo doslednu izgradnju pozicionog sistema pisanja (celih) brojeva, jedne od najvećih tekovina ljudske kulture (naime, kad nema jedinica određene klase na odgovarajuće mesto stavlja se nula).

Uvođenje negativnih i kompleksnih brojeva proističe iz nastojanja da se uspostavi jedan opšti stav za sve algebarske jednačine: da ova jednačina ima onoliko rešenja koliki je njen stepen. Zatim, za uvođenje negativnih brojeva od velikog je značenja bila Dekartova analitička geometrija, jer je bilo prirodno da se od pozitivnih ordinata i apcisa pređe na negativne.

Za afirmaciju kompleksnih brojeva značajan je Gausov pronalazak grafičkog predstavljanja kompleksnih brojeva, početkom 19. veka, kao tačaka koordinatne ravni (Gausova ravan), jer je na taj način kompleksnim brojevima prvi put dao neko realno tumačenje.

Za afirmaciju negativnih brojeva značajniji su radovi velikih matematičara 17. i 18. veka. Za zasnivanje teorije negativnih brojeva značajna je zasluga Henkela (1839-1873). Za zasnivanje teorije kompleksnih brojeva značajniji su radovi Hamiltona (1837), Kronekera (1887), Henkela (1867), koji je uspostavio princip „permanencije“.

Iako Grci, do Diofanta, ne smatraju razlomke brojevima nego više množinu delova jedinice ili kao odnos celih brojeva, kod Diofanta nalazimo shvatanje razlomaka kao brojeva, jer rešenja mnogih Diofantovih zadataka koji se odnose na „naći broj“ jesu razlomci.

Drugačije stvar stoji sa iracionalnim brojevima čija istorija počinje sa grčkom matematikom. Grci su, naime, otkrili nesamerljive veličine (na primer, još u Pitagorejskoj školi otkrivena je nesamerljivost dijagonale i stranice kvadrata), kojima kao mere odgovaraju iracionalni brojevi, i razvili učenje o tim veličinama, ali oni u stvari nisu došli do pojma iracionalnog broja. Naprotiv, Euklid kaže, u knjizi „Elementi“: „Nesamerljive veličine ne odnose se jedna prema drugoj kao brojevi“. Diofant pri rešavanju kvadratnih jednačina postavlja uslov da diskriminanta bude potpuni kvadrat.

Na Zapadu se prvo znalo samo za korenske iracionalitete koji slično negativnim i kompleksnim brojevima dobijaju nazive „nemi brojevi“ .

Svaki racionalan broj je rešenje neke algebarske jednačine, npr. broj $\frac{p}{q}$ je rešenje jednačine $qx - p = 0$. Ali i svaki iracionalni broj oblika korena $\sqrt[n]{a}$ je rešenje algebarske jednačine $x^n - a = 0$. Postavilo se pitanje ima li iracionalnih brojeva koji nisu koreni nijedne algebarske jednačine s racionalnim koeficijentima. Da takvi brojevi postoje dokazao je prvi Liouville (1844), zatim Cantor (1874). Takve iracionalne brojeve još Lajbnic naziva transcendentnim veličinama. Nasuprot njima, brojevi koji su koreni bilo koje algebarske jednačine s racionalnim koeficijentima nazivani su algebarskim brojevima.

Aritmetičke definicije i teoriju iracionalnih brojeva daju tek Kantor i Dedekind definišući iracionalne brojeve prvi pomoću tzv. fundamentalnih nizova, a drugi pomoću tzv. preseka u skupu raconalnih brojeva.

Interesantno je da Egipćani računaju samo sa razlomcima čiji je brojilac uvek jednak 1, tako da razlomak mogu da označe jednostavno na taj način da iznad imenioca stave, kao znak da se radi o razlomku, jednu tačku. Sve razlomke oni svode na takve razlomke, npr. $1\frac{1}{7} = 1\frac{1}{4}\frac{1}{8}\frac{1}{16}$.

Pisanje razlomaka na taj način da se brojilac stavi iznad imenioca potiče od Indusa koji imaju za sve četiri računske operacije s razlomcima pravila slična današnjim. Ovaj način pisanja došao je preko Arapa u Zapadnu Evropu. Odvajanje brojioca od imenioca crticom nalazimo prvi put u „Liber abaci“ (1228.) Leonarda iz Pize.

Interesantno je da Diofant pri množenju razlika upotrebljava nazive „dodavajući“ i „oduzimajući“ brojevi i daje pravila za množenje ovih brojeva sasvim slična pravila o predznacima pri množenju relativnih brojeva, no ipak kod njega ne postoji pojam negativnog broja, jer on pri tom operiše sa razlikama kod kojih je umanjenik veći od umanjioca. Kod Diofanta, kod Arapa, kao i kod matematičara srednjeg veka na zapadu ne postoje negativna rešenja jednačina.

1.2 Važniji logički momenti u matematici

Formalno logičko zaključivanje, kao i rezultati istraživanja u matematici formulišu se u stavove. Matematika je deduktivna nauka, tj novi stavovi se izvode iz već poznatih zaključivanjem na osnovu pravila formalne logike. U logici izučavamo pravila izvođenjem novih sudova, na osnovu poznatih. Pri tome je važna forma, vrsta sudova, a nije bitan konkretan sadržaj tih sudova. Zato govorimo o formalnoj logici.

Primer 1: *Ako nemamo predstave o pojmu realne funkcije, šta znači neprekidna, a šta diferencijabilna funkcija, možemo zaključiti da ova dva suda:*

1) *Sve neprekidne funkcije su diferencijabilne.*
2) *Neke neprekidne funkcije nisu diferencijabilne.*

ne mogu biti oba tačna. Netačnost iskaza 1) utvrđujemo tako što navedemo primer funkcije koja jeste neprekidna, ali nije diferencijabilna. Takva je npr. funkcija

$f(x) = \sqrt{x}$ u tački $x = 0$.

Primer 2: *Posmatramo ova dva iskaza:*

1) *Svaki paralelogram je centralno simetrična figura.*
2) *Pravougaonik je paralelogram.*

Svako, ko i ne zna sadržaj pojmova paralelogram, pravougaonik i centralna simetrija, izvodi tačan zaključak.

3) *Pravougaonik je centralno simetrična figura*

U primeru 2. je naveden skup od tri iskaza, gde iz prva dva, koje zovemo premisama, izvodimo zaključak, odnosno treći iskaz. Takav skup zovemo silogizam.

Bitno je istaći da se formalno-logičkim zaključivanjem ne utvrđuje apsolutna tačnost trećeg suda u silogizmu već samo to da je on istinit ako su takve premise. Ako su premise u silogizmu dobijene kao zaključci nekih prethodnih silogizama, jasno je da se pitanje istinitosti izvedenog suda prenosi na istinitost premisa ovih silogizama itd.

Aksiome i osnovni pojmovi. U matematici se novi stavovi izvode logičkom dedukcijom iz prethodnih, ovi iz njima prethodnih itd. Prema tome, pre svake dedukcije treba imati neke unapred zadate stavove iz kojih bismo izvodili nove. Ove početne stavove zovemo aksiomama. Zato kažemo da su aksiome polazni stavovi svake matematičke discipline, koji se uzimaju kao istiniti bez dokaza.

Za jednu matematičku teoriju treba da je dat određen sistem aksioma za koji su utvrđeni precizni uslovi koje moraju ispunjavati. Svi ostali stavovi te teorije su logička posledica utvrđenog sistema aksioma i zovu se teoremama. Obrazlaganje tačnosti tvrđenja teoreme logičkim zaključivanjem primenom aksioma i prethodno dokazanih teorema zovemo dokaz teoreme.

Da bi bilo jasno sta iskazuju aksiome i teoreme kotistimo, osim običnih termina iz života, i stručne nazive prisutne npr. u matematici. Kratko rečeno, moramo znati o čemu govorimo. Rečenice kojima određujemo značenje i sadržaj pojmova su definicije tih pojmova.

Primer: *Za prirodan broj p kažemo da je prost, ako ima tačno dva delioca, p i 1.*

U ovoj definiciji prostog broja se pominje stručan termin delilac. Njega definišemo pomoću drugog pojma. Vidimo da u jednoj matematičkoj disciplini za sve korišćene pojmove ne možemo dati definiciju. Neke od pojmova uzimamo kao polazne, primarne, osnovne. Drugim rečima, značenje takvih pojmova uzimamo poznatim. Svi pojmovi koji nisu osnovni zahtevaju definiciju. Zovemo ih izvedeni pojmovi. Definicija je ispravna, ako, između ostalog, sadrži samo osnovne pojmove i pojmove prethodno definisane.

U jednoj matematičkoj teoriji možemo govoriti o dokazu u strogom smislu samo ako je za tu teoriju postavljen sistem aksioma i osnovnih pojmova. Ako je ovaj uslov ispunjen, celokupna teorija je logička posledica tog sistema.

1.3 Zasnivanje teorije prirodnih brojeva

Zasnivanjem neke naučne teorije zovemo naučni postupak postavljanja temelja te teorije(sistem aksioma i osnovni pojmovi). Treba naglasiti da sistem aksioma i pripadajućih im osnovnih termina u jednoj matematičkoj teoriji nije uvek jednoznačno određen. Aksiome možemo zameniti ekvivalentnim aksiomama. Kažemo da su aksiome A i B ekvivalntne u odnosu na sistem S ostalih aksioma ako se iz sistema koji čine A i S može izvesti B i obrnuto.

Navešću kratko dva načina izgradnje teorije prirodnih brojeva.

1) Ovaj način je postavio italijanski matematičar i logičar Peano.

Definicija: Skup prirodnih brojeva je neprazan skup N za čije elemente n i n' postoji odnos " n' sledi n" i tačne su aksiome:

1) 1 je prirodan broj.
2) Svaki prirodan broj n ima sledbenika $n' = n+1$.
3) $n' \neq 1$ tj. 1 nije sledbenik ni za koji prirodan broj n.
4) Ako je $n' = m'$, onda je $n = m$, tj. dva prirodna broja su jednaka ako su jednaki njihovi sledbenici.
5) Aksioma indukcije: Ako neki skup M koji sadrži prirodne brojeve ima ove dve osobine:
   1) $1 \in$ M,
   2) Ako je n bilo koji prirodan broj iz M implicira $n' \in$ M, onda je M = N, tj. skup M sadrži sve prirodne brojeve.

Koristeći navedeni pristup mogu se definisati operacije sabiranja i množenja u skupu N, a zatim navesti osobine tih operacija.

2) U srednjoj, delom i u osnovnoj školi, učenici se upoznaju sa pojmom funkcije, bijekcije, operacijama sa skupovima pa im je jasna ova:

Definicija: Za skupove A i B kažemo da su ekvivalentni i pisemo A $\sim$ B ako postoji bijekcija f sa skupa A na skup B.

Koristeći navedenu definiciju, kao i stečena znanja o relacijama, inverznoj funkciji i slaganju(kompoziciji) funkcija učenici za vežbu mogu pokazati da je definisana relacija jedna relacija ekvivalencije.Prema tome, možemo, u smislu uvedene relacije, posmatrati sve skupove ekvivalentne zadatom. To su klase ekvivalencije. Za dva ekvivalentna skupa kažemo da imaju isti kardinalni broj. Prazan skup ima kardinalni broj 0. Ako sa n(A) označimo kardinalni broj skupa A onda je:

$$n(\emptyset) = 0;$$

$$n\{0\} = 1;$$

$$n\{0, 1\} = 2;$$

$$n\{0, 1, 2\} = 3; \text{ itd.}$$

Operacije sabiranja i množenja u N, ako imamo u vidu ovaj pristup, definišemo kao kardinalne brojeve od A ∪ B, gde su A i B disjunktni za slučaj sabiranja, odnosno kardinalni broj Dekartovog proizvoda A x B kod množenja. Osobine operacija se izvode koristeći osobine operacija sa skupovima.

2. Metodički pristup obradi teme "Uvođenje realnih brojeva u osnovnoj skoli"

Sa pojmom realnog broja učenici se prvi put sreću u sedmom razredu osnovne škole. Do tada su upoznati sa skupom N,prirodnih brojeva, operacijama i jednačinama u tom skupu. Skup Z, celih brojeva je, po planu, na početku šestog razreda. Novi pojmovi su negativan broj, apsolutna vrednost, suprotan broj, upoređivanje brojeva u Z, brojevna prava. Pri izlaganju ovih sadržaja voditi računa o preciznosti, postupnosti i tačnosti. Definicije treba da budu ispravne, u jezičkom, logičkom i matematičkom smislu. Tako, npr. naglasimo da apsolutna vrednost celog broja a, u oznaci $|a|$ je pozitivan broj ili nula sa osobinom:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a, & a < 0 \end{cases}$$

Od učenika možemo čuti npr. apsolutna vrednost može biti plus ili minus što je, naravno, pogrešno. Ističemo da suprotni brojevi a i $-a$ imaju istu apsolutnu vrednost pa npr. jednačina $|x| = 8$ ima rešenja $x = 8$ ili $x = -8$. Iz primera koje navedemo možemo rešiti jenačinu $|2x - 7| = 5$.

Naravno, pazimo, (za sada) da rešenje bude ceo broj. Isto tako, ističemo da apsolutna vrednost celog broja nije negativan broj. Prema tome, jednačina $|x| = a$ ima rešenje samo za $a \geq 0$. Ako je taj uslov ispunjen, ona je ekvivalentna sa $x = a$ ili $x = -a$.Možemo navesti i jednostavne primere nejednačina: $|x| < 5$, $|x| > 7$, i sl.

Kada govorimo o operacijama u skupu Z, na nivou osnovne škole, istaknemo i tražimo da učenici zapišu pravila za sabiranje, množenje i deljenje dva cela broja istog znaka i suprotnog znaka. I pored insistiranja da je npr. zbir dva negativna broja negativan, a proizvod i količnik pozitivni, čućemo izjave : " Minus i minus daju plus. ", " Plus i minus daju minus. " i sl. Ovakve izjave ispravljamo navodeći da je zbir dva negativna broja negativan, a njihov proizvod pozitivan.

Kada govorimo o oduzimanju, u početku to svedemo na dodavanje broja suprotnog umanjiocu. Kasnije to, kada učenici savladaju tehniku, možemo izostaviti.

Sa skupom pozitivnih razlomaka, decimalnih brojeva, pretvaranju jednih u druge, učenike upoznamo u drugom polugodištu petog razreda. Ako smo dobro savladali deljivost u skupu N, prirodnih brojeva, pokazuje se da u ovom delu nema poteškoća.

U šestom razredu učenike upoznamo sa skupom Q, racionalnih brojeva, pa napišemo da je :

$$Q = \left\{\frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N\right\}.$$

Ovo je matematički zapis definicije koju navedemo. Dobro je da istu učenici zapišu u sveske. Ovde se pokaže da trud koji smo uložili u petom i početkom šestog razreda, kada smo radili cele brojeve, se isplati višestruko. Najpre, na primerima, a zatim u opštem slučaju navodimo osobine operacija sabiranja, oduzimanja i množenja u skupu Q. Neke od tih osobina su poznate i prenesene prvo iz N u Z, a zatim iz Z u Q.

Kada uspešno završimo šesti razred, očekuje nas skup R, realnih brojeva, već na početku sedmog. Ova nastavna tema je podeljena u više nastavnih jedinica. U udžbenicima (9., 10., 11.) koje sam koristila, izlaganje počinje sa kvadratom racionalnog broja(što je potpuno opravdano). Obzirom da je učenicima poznat obrazac za površinu kvadrata i površinu kocke, mogu na primeru odrediti površinu kvadrata ako

$a \in \{5cm;\ 2dm; 0{,}4m, \dots\}$.

Kako bi izlaganje bilo jasno i učenici motivisani da prate nastavu, na početku časa treba ponoviti:

1) Definiciju skupa Q;
2) Pravila za proizvod dva racionalna broja istog znaka;
3) Komutativnost i asocijativnost proizvoda.

U glavnom(centralnom) delu časa navodimo definiciju kvadrata racionalnog broja a.

Slede primeri tipa:

Popuni prazna mesta u tabeli:

Tabela treba da sadrži određene vrednosti za $a \in Q$, npr. $a \in \left\{5;\ -8;\ \frac{3}{4}; 0; 1; 0{,}3; 2\frac{1}{4}\right\}$, zatim $-a$, a^2, $(-a)^2$, $|a|$, $|a|^2$.

Ako je zadatak, uz pomoć nastavnika, rešen, onda možemo zaključiti:

1) Kvadrat racionalnog broja nije negativan broj.
2) Suprotni brojevi imaju jednake kvadrate, $(-a)^2 = a^2$.
3) Jednakost $|a|^2 = a^2$ je tačna za sve brojeve u tabeli(kasnije se pokaže da važi $\forall a \in$ R).

Učenicima predložim da sve brojeve u tabeli koje smo dobili računanjem razlikujemo od zadanih, npr. zaokruživanjem.

Kako bismo upoznali osobine kvadrata racionalnog broja, možemo rešiti zadatke tipa:

Ako su x i y zadani racionalni brojevi, zapiši:

- kvadrat zbira od x i y, $(x + y)^2$*;*

-zbir kvadrata od x i y, $x^2 + y^2$*;*

-kvadrat proizvoda od x i y, $(x \cdot y)^2$*;*

-proizvod kvadrata od x i y, $x^2 \cdot y^2$*;*

-kvadrat količnika od x i y , y ≠ 0, $(x : y)^2$*;*

-količnik kvadrata od x i y, y ≠ 0. $x^2 : y^2$*;*

Ako je, npr. $x = 14, y = -7$, naći svaki od navedenih izraza. Ima li među njima jednakih?

Ako su a i b racionalni brojevi i $b \neq 0$, onda je:

1) $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$,
2) $(\frac{a}{b})^2 = \frac{a^2}{b^2}$.

Zbog simetrije jednakosti, ove formule možemo pročitati i primenjivati u oba smera. Koristeći tu činjenicu, možemo izračunati:

1) $(-8 \cdot 5)^2$;
2) $(0{,}3)^2$;
3) $16^2 \cdot (0{,}25)^2$;
4) $\frac{28^2}{(-7)^2}$

U cilju uvežbavanja i usvajanja izloženih sadržaja, možemo zadati domaći zadatak(iz zbirke koju učenici imaju). Uobičajeno je da učenici istog odeljenja, škole, a u manjim mestima i cele opštine, koriste udžbenike istog izdavača. Smatram da predmetni nastavnik treba da je upoznat sa udžbenicima više izdavača, da predloži učenicima dva ili tri i da izbor prepusti njima. Zavisno od interesa i stručnog mišljenja nastavnika, može se preporuka suziti na jedan ili dva.

Kada savladamo kvadrat racionalnog broja, spremni smo za nastavnu jedinicu Rešavanje jednačine $x^2 = a, a \geq 0$.

Čas počinjemo pregledom i analizom domaćeg zadatka(ako je bio zadat), a zatim ponovimo definiciju kvadrata racionalnog broja sa naglaskom da je $a^2 \geq 0$, za $a \in Q$.

Primer: *Odrediti a) obim i stranicu kvadrata površine 81* cm^2.

b)ivicu i zapreminu kocke površine 150 cm^2.

Rešavanje zadatka se svodi na jednačinu $a^2 = 81$ pod a, odnosno $6 \cdot a^2 = 150$ pod b.

Prema tome, imamo posla sa jednačinom $x^2 = a$, gde je x nepoznati broj. Obzirom da je $x^2 \geq 0$, jednačina ima rešenje samo ako je $a \geq 0$ što smo istakli u naslovu.

U obradi i utvrđivanju nastavne jedinice "Kvadrat racionalnog broja" od učenika bih tražila da u sveske zapišu i nauče kvadrate prirodnih brojeva iz intervala $[1, 20]$, (za početak).

Ako su to prihvatili, onda zaključuju da je a = 9 stranica kvadrata i a = 6 ivica kocke u navedenom primeru.

Imamo posla sa određivanjem broja čiji je kvadrat pozitivan ili nula.

$$0^2 = 0, \sqrt{0} = 0;$$

$$1^2 = 1, \sqrt{1} = 1;$$

$$3^2 = 9, \sqrt{9} = 3;$$

….

Uvodimo pojam kvadratnog korena iz pozitivnog racionalnog broja. Egzistencija kvadratnog korena iz broja 2 će biti dokazana kasnije. Tada ćemo navesti i teoremu koja govori o postojanju kvadratnog korena iz pozitivnog broja.

Definicija: *Kvadratni koren iz pozitivnog broja a je pozitivan broj x čiji je kvadrat jednak broju a.*

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a,\ a > 0,\ x > 0,$$

$$\sqrt{0} = 0.$$

Na osnovu definicije vidimo da kvadratni koren iz negativnog broja ne postoji u skupu do sada poznatih brojeva.

Tako, npr. $\sqrt{-1}, \sqrt{-2}, \sqrt{-20}, \ldots , \sqrt{-100}$ nisu definisani u skupovima koje smo do sada učili.

U udžbenicima (9., 10. i 11.) ne nailazimo na zadatke tipa:

*Za koje racionalne brojeve su definisani: $\sqrt{x}$, $\sqrt{-x}$, $\sqrt{x-2}$, $\sqrt{5-2x}$?

Srećemo se sa novim pojmom (operacijom) kvadratni koren.

Potrebno je istaći:

1. $\sqrt{0} = 0$,
2. Koren iz pozitivnog broja je pozitivan broj.

Primer: *Kvadratni koren iz 9 je* $\sqrt{9} = 3$ *jer je* $3^2 = 9$.

Kvadratni koren iz broja 8 je $\sqrt{8}$ koji treba kvadrirati da se dobije 8, tj. $\sqrt{8}^2 = 8$. Definicija korena i ništa drugo.

Izjave “koren i kvadrat se skrati”, “poništimo koren i kvadrat”, “nestane koren”, “ovo 2 i ovo 2 nema” i slično, koje čujemo od učenika, ispravljati u startu.

Primer: *Koristeći definiciju kvadratnog korena proveriti:*

$\sqrt{256} = 16$, jer je $16^2 = 256$

$\sqrt{361} = 19$, jer je $19^2 = 361$,

ali i $\sqrt{444\,889} = 667$ (za učenike).

Na osnovu definicije kvadratnog korena i pravila za kvadrat proizvoda i količnika, dobijamo:

1. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$,
2. $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$.

Primere možemo uzeti iz zbirki autora udžbenika (9., 10. i 11.).

Primer: *Stranice trougla su a = 9, b = 10 i c = 17. Odredi njegovu površinu i najdužu visinu.*

Ako je $s = \frac{a+b+c}{2}$ poluobim, onda je $P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

U našem slučaju je *s* = 18, pa je $P = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = \sqrt{2 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 8} = \sqrt{9 \cdot 9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 3 \cdot 4 = 36$. Najduža visina odgovara najkraćoj stranici, *a* = 9. Iz P = $\frac{a \cdot h_a}{2}$ dobijamo h_a = 8.

(Neki od učenika će odrediti proizvod $18 \cdot 9 \cdot 9 = 1296$, pa nas pitati: "Da li je koren iz 1296 okrugao broj?" i sl. Zato je dobro potkorenu veličinu pisati kao proizvod potpunih kvadrata, tamo gde je to moguće.)

U navedenim zbirkama i udžbenicima se ne insistira na izrazima $(\sqrt{x})^2$ i x. Ako sa izrazima izvodimo operacije, potrebno je znati značenje tog izraza, uslove postojanja u skladu sa definicijom i operacije. Konkretno, $(\sqrt{x})^2$ je x samo ako je $x \geq 0$. S druge strane, x postoji $\forall x \in$ Q (kasnije i $x \in R$).

Naučili smo da suprotni brojevi imaju jednake kvadrate koji su pozitivni. Na osnovu toga pitanje rešenja jednačine $x^2 = 25$ može da glasi: Odredi sve brojeve čiji je kvadrat jednak 25. To su brojevi 5 i –5. Na ovom mestu naglasimo da jednačina $x^2 = a$, za a > 0 ima dva rešenja: $x = \sqrt{a}$ i $x = -\sqrt{a}$.

Pozitivno rešenje te jednačine je $\sqrt{a}$. Zato $\sqrt{a}$ i rešenja jednačine $x^2 = a$, za a > 0, nisu jednaki skupovi.

Primer za vežbu za domaći:

Reštiti jednačine: $x^2 = 49$, $5x^2 = 80$, $(x-1)^2 = 25$, $(3x+2)^2 = 100$, $\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$.

** Odredititi dužinu stranice kvadrata čija je površina 5* cm^2.

Rešenje: Dužina stranice je pozitivno rešenje jednačine $a^2 = 5$, tj. $a = \sqrt{5}$.

2.1 Pojam iracionalnog broja

Na početku časa, još jednom, ponovimo definiciju skupa Q . Ovoga puta naglašavamo da se u skupu Q nalaze svi brojevi oblika $\frac{a}{b}$, gde je a ceo broj, a b prirodan broj. Ovo je prilika da se podsetimo postupka pretvaranja čisto perioodičnih i mešovito periodičnih decimalnih brojeva u razlomke. To su decimalni brojevi koji imaju beskonačno mnogo cifara iza zareza, pri čemu se jedna cifra ili grupa cifara ponavlja (period).

Teorema: *Jednačina x^2 = 2 nema rešenja u skupu racionalnih brojeva.*

Dokaz: Najpre pokazujemo:

Lema: *Ako je kvadrat prirodnog broja paran, taj prirodan broj je paran.*

Dokaz: U matematici često koristimo sledeću tautologiju:

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p).$$

Ova tautologija je poznata pod imenom zakon kontrapozicije. Iskazi p ⇒ q i (¬ q ⇒ ¬ p) su iste tačnosti.

(a^2 je paran ⇒ a je paran) ⇔ a je neparan ⇒ a^2 je neparan.

a = 2k +1 ⇒ a^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k + 1) što je neparan broj.

Prelazimo na **dokaz** teoreme:

Treba pokazati da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj, tj $\sqrt{2}$ ne možemo napisati u obliku razlomka $\frac{m}{n}$ gde su m i n uzajamno prosti prirodni brojevi tj. $\frac{m}{n}$ je nesvodljiv. Pretpostavimo da to tvrđenje nije tačno, tj. $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$, gde je D(m, n)=1 i $m, n \in$ N. Tada je 2 = $\frac{m^2}{n^2}$ tj m^2 =2·n^2. Desna strana, 2·n^2, ove jednačine je paran broj. Zato je i m^2 paran broj.

Na osnovu navedene Leme je i broj m paran, tj. m = 2 · a, $a \in$ N. Tada iz m^2 = 2 · n^2 dobijamo 4 · a^2 = 2 · n^2 tj n^2 = 2 · a^2. Pošto je 2 · a^2 paran, to je i n^2 paran. To je, na osnovu Leme, moguce ako je n paran tj *n* = 2 · *b*.

Pretpostavka da je $\sqrt{2}$ racionalan dovodi do zaključka da je D(m, n)=2, što je suprotno da su *m* i *n* uzajamno prosti brojevi.

Slično se pokazuje da brojevi $\sqrt{3},\ \sqrt{5},\ \sqrt{5}+2,\ 3-\sqrt{7}$nisu racionalni.

Skup iracionalnih brojeva je skup brojeva koje ne možemo zapisati u obliku razlomka kod koga su brojilac i imenilac celi brojevi i imenilac nije nula. Dakle, iracionalni brojevi su neperiodični decimalni brojevi sa beskonačno mnogo cifara iza zareza. Takvi su $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, \frac{3}{4}\sqrt{2}, \sqrt{\frac{5}{2}}$, itd.

Neke od iracionalnih brojeva, konkretno π, upoznajemo u sedmom razredu. Ostale u srednjoj školi.

Sledeći primeri pokazuju da je skup iracionalnih brojeva beskonačan:

1. *Zbir racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan.*
2. *Proizvod racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan.*

U oba slučaja, pretpostavimo suprotno, pa koristimo da je skup Q zatvoren u odnosu na sabiranje, množenje i deljenje. Na osnovu toga je svaki broj oblika $a + b\sqrt{2}$ iracionalan, ako su $a, b \in$ Q .Primeri pokazuju da zbir i proizvod dva iracionalna broja može biti racionalan i iracionalan.

Znači, skup I nije zatvoren u odnosu na sabiranje i množenje.

Primer:

1. $a = 3 + \sqrt{5}$

$b = 3 - \sqrt{5}$

Tada je $a + b = 6 \in Q$, $a \cdot b = 4 \in Q$.

2. $a = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$

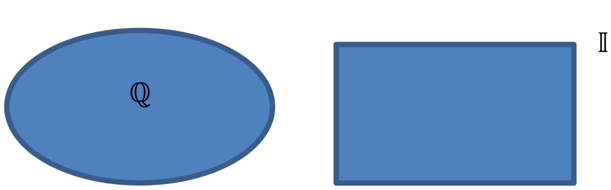
$b = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$

Tada je $a + b = 4$ i $a \cdot b = 1$, tj. oba puta racionalan broj.

3. $a = 5 + \sqrt{3} \in$ I

$b = 3 - \sqrt{2} \in$ I

$a + b = 8 + \sqrt{3} - \sqrt{2} \in$ I.



$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$

$\mathbb{Q} \cap \mathbb{I} = \emptyset$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{I}$

$\mathbb{R} \setminus \mathbb{I} = \mathbb{Q}$

Kao primer, možemo navesti zadatak:

Iz skupa $\left\{\frac{3}{4}\ ; 0\ ;\ -\sqrt{7}\ ; 0,(56)\ ;\ \frac{\sqrt{3}}{2}\ ; -5{,}7; 4-5\sqrt{2}\right\}$ *izdvoj racionalne i iracionalne brojeve.*

Sada možemo navesti i primere jednačina čija su rešenja iracionalni brojevi. Možemo koristiti zbirku autora udžbenika (10), str. 11. Zadatak 7.

Učenicima možemo za domaći tražiti da iz zbirke nađu i reše jednačine čija su rešenja iz skupa Q odnosno I.

<u>Primer</u>: *Koji od sledećih izraza je racionalan, a koji iraconalan?*

1. $\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)$
2. $\left(\sqrt{2}-3\sqrt{8}+5\sqrt{50}\right)\cdot\sqrt{9}$
3. $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$

Učenicima smo naveli izraze za kvadrat zbira (razlike) ne izvodeći dokaz u opštem slučaju. Možemo rešiti primer 3:

Neka je

$$x=\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

Tada je $$x^2=\left(\sqrt{9+4\sqrt{5}}\right)^2+\left(\sqrt{9-4\sqrt{5}}\right)^2-2\sqrt{9+4\sqrt{5}}\cdot\sqrt{9-4\sqrt{5}}$$

$$x^2=9+4\sqrt{5}+9-4\sqrt{5}-2\cdot\sqrt{81-80}$$

$$x^2=18-2=16$$

U skupu realnih brojeva jednačine $x=a$, i $x^2=a^2$ nisu ekvivalentne. Druga od njih ima i rešenje $x=-a$ koje ne zadovoljava prvu. Zato u startu odredimo kog je znaka x. Ovde je $x>0$ pa je $x=4$.

Napomena: Ako je $y=\sqrt{9-4\sqrt{5}}-\sqrt{9+4\sqrt{5}}$, onda je $y<0$ i $y^2=16$, tj. $y=-4$.

U korišćenim udžbenicima (9, 10, 11) činjenici $\sqrt{\boldsymbol{a^2}}=|\boldsymbol{a}|$ nije (po mom mišljenju) posvećena potrebna pažnja. To je po planu posebna nastavna jedinica, pa je kao takvu (a naročito zbog kasnijeg učenja matematike) treba posmatrati.

$$\boxed{\sqrt{\boldsymbol{a^2}}=|\boldsymbol{a}|}$$

Naglasimo i na primerima pokažimo da jednakost važi za svaki realan broj a.

Primer*: Zadat je skup* $S=\left\{3\ ;\ -\frac{2}{5}\ ; 0\ ; 1-\sqrt{5}\ ; 0{,}8\ ;\ \sqrt{3}-\sqrt{5}\right\}$

Izdvoj $A=\left\{x\in S\ |\sqrt{x^2}=x\right\}$

$B=\left\{x\in S\ |\sqrt{x^2}=-x\right\}$ *pa naći* $A\cap B$.

Ovog puta naglasimo da izrazi $\sqrt{a^2}$, $\left(\sqrt{a}\right)^2$, a nisu jednaki. (objasniti)

Rešimo jednačinu:

a) $\sqrt{(2x-3)^2}=7$
b) $\sqrt{x^2-6+9}=3$
c) $\sqrt{(x-3)^2}=3 \; (=) \; x-3=3 \; \vee x-3=-3, \quad x=6 \; \vee x=0.$

Ovde učenici ponekad „skrate“ koren i kvadrat pa dobiju npr. $2x-3=7$ za a). Ima i onih koji startuju ispravno, pa pišu $2x-3=7$ ili $2x-3=-7$, reše prvu , dobiju $x=5$, a potom, po njima poznatoj inerciji, napišu $x=-5$ ne rešavajući drugu.

Kod izvođenja operacija sa realnim brojevima, smatram da na pažljivo odabranim primerima treba ponoviti sve operacije, uključujući i kvadriranje u skupu Q, a zatim i u R, imajući u vidu kvadratne korene.

Istaći da: $\sqrt{\boldsymbol{a}}\cdot\sqrt{\boldsymbol{b}}=\sqrt{\boldsymbol{ab}}$, $\sqrt{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}=\frac{\sqrt{\boldsymbol{a}}}{\sqrt{\boldsymbol{b}}}$, važi za $a>0$ i $b>0$, dok je za sabiranje potrebno poštovati pravila koja će upoznati kod sličnih monoma.

Primer: $2\sqrt{5}+3\sqrt{8}-4\sqrt{80}+5\sqrt{72}=2\sqrt{5}+3\cdot 2\sqrt{2}-4\cdot 4\cdot\sqrt{5}+5\cdot 6\cdot\sqrt{2}=$

$$=2\sqrt{5}+6\sqrt{2}-16\sqrt{5}+30\sqrt{2}=-14\sqrt{5}+36\sqrt{2}\ .$$

Uočila sam da učenici (izgleda da im je tako lakše) računaju i ovako.

$\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ (posebno u opštem slučaju). Manja je šansa, naročito ako nastavnik kaže „pazi“, da će napisati $\sqrt{9+16}=\sqrt{9}+\sqrt{16}$. Slično je kod korenovanja razlike.

Obzirom da su iracionalni brojevi neperiodični decimalni brojevi sa beskonačno mnogo cifara iza zareza u konačnom rezultatu ih treba ostavljati kao iracionalne. Ako je naglašeno, kao npr. u udžbenicima da koristeći kalkulator ili tablice, pročitaju približnu vrednost $\sqrt{57}$ i da rezultat zaokruže na 3 decimale, onda treba tako i da postupe. Pazimo da učenicima koji kažu da je npr. $\sqrt{3}=1{,}73$, $\pi=3{,}14$, skrenemo pažnju da je greška i u čemu se ona sastoji. O približnim vrednostima iracionalnih brojeva je dovoljno rečeno u udžbenicima 9, 10, 11. Izlaganje ovih sadržaja ne predstavlja veći problem učenicima.

O predstavljanju realnih brojeva na pravoj možemo detaljnije govoriti nakon obrađenih primena Pitagorine teoreme. Tada od učenika možemo zahtevati da na brojnoj pravoj predstave iracionalne brojeve $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, itd. Konstruisati kvadrat čija je površina jednaka zbiru ili razlici površina dva data kvadrata je zadatak koji nalazimo u pomenutim udžbenicima.

Kada su u pitanju konstrukcije možemo kod učenika naići na razne poteškoće. Naglasimo da konstruktivni zadatak ima 4 etape: analiza, konstrukcija, dokaz i diskusija.

U većini pomenutih udžbenika su zadati podaci konstantni, sa takvim zadatak ima jedinstveno rešenje pa su dokaz i diskusija suvišni. Osnovni problem je analiza. Pravilno provedena ukazuje na korake koje treba izvesti u konstrukciji.

Primer: *Konstruisati kvadrat* $P = 5cm^2$.

Ako je a stranica kvadrata, $a^2 = 5$.

Koristimo li Pitagorinu teoremu potrebno je broj 5 napisati kao zbir ili razliku kvadrata dva (obično) prirodna broja.

$$a^2 = 4 + 1$$

$$a^2 = 2^2 + 1^2 \ ,$$

pa je a hipotenuza pravouglog trougla čije su katetete 2 i 1.

Ukoliko neki od učenika napiše da je

$$a^2 = 5 = 9 - 4 = 3^2 - 2^2$$

i kaže da je a kateta pravouglog trougla čija je hipotenuza 3, a kateta 2, obavezno ga treba pohvaliti.

Za vežbu možemo zadati da prirodne brojeve manje od 25 koji nisu potpuni kvadrati zapišemo kao zbir ili razliku kvadrata dva prirodna broja.

Pri kraju sedmog razreda učenike upoznamo sa obimom kružnice i njenih delova, površinom kruga i njegovih delova i iracionalnim brojem π. Podvučemo da je 3,14 približna vrednost broja π na dve decimale. Isti broj koristimo kod površina i zapremina obrtnih tela.

Neke od primedbi vezane za ovu temu:

Učenici malo, usudila bih se reći, skoro uopšte ne koriste postojeće udžbenike.Uglavnom se zadovolje onim što čuju na času i rešavanjem (za neke čitati prepisivanjem) domaćih zadataka. Osim toga, deo učenika tekst zadatka ne pišu u svesci. Tako postupaju i kod izrade domaćih zadataka. Nakon naslova „Domaći zadatak“ i eventualnog datuma izrade jedan deo učenika napiše, npr. STR 12. ZADACI 6(a, b, g), 9(a), 15(a, d). Posle toga reše, ili prepišu od druga ili iz zbirke gotove rezultate. Mislim da je obavezan tekst zadataka. Ako je to urađeno, onda tačno znamo šta nam je činiti. Uz pretpostavku da zadatak pravilno reši, onda naša školska sveska i domaći zadatak mogu poslužiti i drugima.

Proučavajući sadržaje udžbenika 9, 10 i 11 i zbirku zadataka navela bih:

1. U svakom od udžbenika bi elemente uopštene teorije (na nivou osnovne škole) trebalo smanjiti.
2. Na primerima potencirati ispravnost i potpunost u izražavanju.
3. Zbirke treba da sadrže zadatke različitih tipova.

Nisam naišla na zadatke tipa:

1. *Broj* $\sqrt{5}$ *je :*
   a) *Ceo*
   b) *Realan*
   c) *Racionalan*
   d) *Iracionalan*

Zaokruži tačan odgovor.

2. Ako je $a = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$ *, odrediti* a^2 *pa navedi da li* $a \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

3. Ako su a *i* b *racionalni brojevi i* $a + b\sqrt{3} = 0$, *pokazati da je* $a = 0$ *i* $b = 0$.

Na osnovu toga, iz $a + b\sqrt{3} = c + d\sqrt{3}$, $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$, zaključak je $a = c$ i $b = d$.

Sigurno postoje zbirke zadataka u kojima su ispoštovani prethodni i mnogi drugi elementi.

Zadatak nastavnika je da prouči takve zbirke, izdvoji dobre sadržaje iz njih i po potrebi predloži zainteresovanim učenicima.

Istakla bih da se tema Realni brojevi realizuje u sedmom razredu u okvuru 18-20 nastavnih časova. To je sasvim dovoljno da ovu materiju pravilno izložimo učenicima. Međutim, realni brojevi su zastupljeni kroz kompletno matematičko obrazovanje. Zato izložene sadržaje, kad se ukaže prilika treba koristiti i kasnije. Znanja će biti sadržajnija kad upoznamo polinome i operacije sa njima.

2.2 Zadaci za vežbu i za kontrolni kod kojih se prave najčešće greške

1) Izračunaj:
a) $-2^2 =$
b) $(-2)^2 =$
c) $-(-2)^2 =$
d) $(-2^2) =$

2) Upiši znak $>, <$ ili $=$ tako da dobiješ tačno tvrđenje:
a) $(7 + 5)^2 \square 7^2 + 5^2$;
b) $17^2 - 8^2 \square 2^2 \cdot (5)^2)$;
c) $\sqrt{1+\frac{9}{16}} \square 1{,}25$;
d) $-20^2 \square (-20)^2$;

3) Dati su izrazi $(\sqrt{x})^2$, $\sqrt{x^2}$, x i $\frac{x^2}{x}$. Koji su od svih jednakosti jednaki za $x \in R$?

4) Uporedi razliku kvadrata brojeva 6,25 i 3,75 sa proizvodom zbira i razlike tih brojeva.

5) Za $a = \frac{1}{4}$, $b =$ -16 odrediti vrednost izraza $-7\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2}$.

6) Iz skupa A= $\left\{-\frac{3}{4}; 0; 8; 0,(54); 3{,}14;\ 1{,}73;\ \sqrt{3}-2;\ \pi\right\}$ izdvoj racionalne brojeve.

7) Koja jednakost je tačna:
$\sqrt{(-2021)^2} = 2021$,
$\sqrt{1089} = 33$,
$\sqrt{-4 \cdot (-25)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$,
$\sqrt{49} = -7$?

8) Reši jednačine:
$(2x - 5)^2 = 81$;
$x^2 + 7 = (-5)^2 + 3$;

$\frac{1}{5}x^2$ - $\frac{3}{4} = \frac{1}{2}$.

9) Uprosti izraze:

a) $5\sqrt{12}$ - $\sqrt{75}$ + $4\sqrt{108}$;

b) $3\sqrt{45}$ - $2\sqrt{20}$ + $3\sqrt{80}$;

10) Ako je A = $\sqrt{0,36}$ + $\sqrt{\frac{4}{50}}$ + $\sqrt{1 + (-\frac{3}{4})^2}$ - $\sqrt{3 - 0,44}$, odrediti A^2. Koje tvrđenje je tačno:

a) $\sqrt{A} \in$ R

b) $\sqrt{A} \in$ R \ I

c) $A^2 \in$ N

11) Dopuni jednakosti tako da budu tačne:

a) Q ∩ I =

b) Q ∪ I =

c) R \ Q =

d) R ∩ Q =

e) I \ R =

f) N ∩ Z =

g) Z \ N =

12) Ako za realne brojeve a i b važi $a > b$ da li je $a^2 > b^2$? Navedi primer koji ilustruje odgovor.

13) Vrednost izraza $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ je:

a) 2 - $\sqrt{5}$,

b) 2 + $\sqrt{5}$,

c) $\sqrt{5}$ – 2,

d) 2 - $\sqrt{5}$.

14) Dati su brojevi: $a = (2\frac{1}{4}\sqrt{2}$ - $\frac{3}{4}\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{50}$, $b = (2\sqrt{3}$ + $3\sqrt{2}) \cdot (-5\sqrt{32})$. Iracionalni su:

1) samo a

2) samo b

3) oba

4) nijedan.

15) Dati su skupovi:

A = $\left\{\sqrt{12}, \sqrt{169}, \frac{\sqrt{9}}{2}, -\sqrt{\frac{9}{2}}, \sqrt{\frac{-63}{-7}}, 5\sqrt{18}, \sqrt{5}\ \cdot \sqrt{80}, \frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}\right\}$;

B = $\left\{\sqrt{6}, \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}, 3 - 2\sqrt{5}, \sqrt{2} \cdot \sqrt{8},\ \pi - 2\right\}$;

Odredi A ∩ I, B ∩ I.

16) Poveži izraz sa odgovarajućom formulom:

a) Zbir kvadrata brojeva a i b;	$(a - b)^2$
b) Kvadrat razlike brojeva a i b;	$(a + b)^2$
c) Proizvod kvadrata brojeva a i b;	$a^2 + b^2$
d) Razlika kvadrata brojeva a i b;	$a^2 - b^2$
e) Kvadrat zbira brojeva a i b;	$a^2 \cdot b^2$

17) Neka je A skup jednocifrenih završetaka kvadrata prirodnog broja n i B skup delilaca broja 30. Odrediti A, B, A ∪ B, A ∩ B.

18) Pokazati da je broj $\sqrt{\frac{0,(592)}{0,(925)}}$ racionalan.

19) Dokazati nejednakost:

$$\sqrt{12+\sqrt{12+\sqrt{12}}}<4$$

20) Proveriti tačnost jednakosti

a) $1^2 + 2^2 + 3^3 + \ldots\ldots + n^2 = \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6}$ za $n = 8$.

b) Koliko na šahovskoj tabli 8 x 8 ima kvadrata?

2.3 Rešenja zadataka, komentari i najčešće greške koje učenici prave

1) Izračunaj:

e) $-2^2 = -4$
f) $(-2)^2 = 4$
g) $-(-2)^2 = -4$
h) $(-2^2) = -4$

U ovom zadatku pojedini učenici u svim primerima dobiju isti rezultat, broj 4. Najčešće greše u primeru pod c) gde kažu "Minus i minus daju plus.", zatim kvadriraju samo broj 2 i dobiju rezultat 4, a ovo je ustvari suprotan broj broju $(-2)^2$, kao i pod d) kada vide da je i minus u zagradi kažu "Pa rekli ste kada je i minus u zagradi da se kvadrira broj -2 i onda je to pozitivno." zanemarujući to što na kvadrat nije posle zagrade.

2) Upiši znak $>, <$ ili $=$ tako da dobiješ tačno tvrđenje:

e) $(7 + 5)^2 > 7^2 + 5^2$ **;**

Najčešće u ovakvim primerima učenici stave znak jednakosti, vodeći se pravilom za kvadrat proizvoda.

f) $17^2 - 8^2 > 2^2 \cdot (5)^2$**;**

Ovde neki od 17 oduzmu 8 pa rezultat kvadriraju, 2 pomnoze sa 5 pa kvadriraju i tako dobiju da je leva starana manja od desne.

g) $\sqrt{1+\frac{9}{16}} = 1{,}25$**;**

Česta greška je što kažu "Koren iz 1 je 1, a koren iz $\frac{9}{16}$ je $\frac{3}{4}$." i onda saberu 1 i $\frac{3}{4}$, umesto da saberu pa tek onda računaju koren.

h) $-20^2 < (-20)^2$**;**

Ovo je nekim učenicima jednako.

U ovakvim zadacima posebno treba skrenuti paznju i naglasiti da pravila $a^2 \cdot b^2 = (a \cdot b)^2$ i $a^2 : b^2 = (a : b)^2$ nikako ne važe kada su u pitanju sabiranje i oduzimanje, tj. **ne važi** $a^2 + b^2 = (a + b)^2$, kao ni $a^2 - b^2 = (a - b)^2$.

3) Dati su izrazi $(\sqrt{x})^2$, $\sqrt{x^2}$, x i $\frac{x^2}{x}$. Koji su od svih jednakosti jednaki za $x \in$ R?

Rešenje: $(\sqrt{x})^2 = x$; $\sqrt{x^2} = |x|$; $\frac{x^2}{x} = x$ i ovde x ne sme biti jednako nula.

Ovaj zadatak dajem uvek na kontrolnom i bar polovina učenika ovde odgovori samo da su svi izrazi jednaki.

$\sqrt{x}^2$ - za ovaj izraz neki kazu "Koren i kvadrat se skrate.", pa im ostane samo x.

$\frac{x^2}{x} = x$ - insistiram u ovakvim i sličnim primerima da uvek prvo napišu kada dati izraz postoji.

4) Uporedi razliku kvadrata brojeva 6,25 i 3,75 sa proizvodom zbira i razlike tih brojeva.

Rešenje: $6{,}25^2 - 3{,}75^2 \ \square\ (6{,}25 + 3{,}75) \cdot (6{,}25 - 3{,}75)$

$39{,}0625 - 14{,}0625 \ \square\ 10 \cdot 2{,}5$

$25 = 25$

U trenutku kada rade ovaj zadatak nisu jos učili formulu za razliku kvadrata, pa im kada urade zadatak i vide da su rešenja ista napomenem da je to formula koju će tek učiti i da je mnogo kraći put i lakše rešiti zadatak primenom te formule, što vide i sami iz ovog primera.

5) Za $a = \frac{1}{4}$, b = -16 odrediti vrednost izraza $-7\frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 \cdot b^2}$.

Rešenje: $-\frac{15}{2} \cdot \sqrt{(\frac{1}{4})^2 \cdot (-16)^2} = -\frac{15}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 16 = -30.$

U ovakvim primerima se uglavnom prave sledeće greške: učenici "skrate" koren i kvadrate i ostane im $\frac{1}{4} \cdot (-16)$. Zato je jako važno ponavljati da znaju $\sqrt{x^2} = |x|$.

6) Iz skupa A= $\left\{-\frac{3}{4}; 0; 8; 0,(54); 3,14;\ 1,73;\ \sqrt{3}-2;\ \pi\right\}$ izdvoj racionalne brojeve.

Rešenje: $\left\{-\ \frac{3}{4}; 0; 8; 0,(54); 3{,}14;\ 1{,}73\right\}$.

Neki učenici u rešenju ne navedu 3,14 jer kažu to je π, a učili smo da je π iracionalan broj. To je dobar zadatak, da im se skrene pažnja, da zapamte, da to nije π, jer je 3,14 približna vrednost broja π. Nije π = 3,14. Slična situacija je sa 1,73. Učenici kažu to je broj $\sqrt{3}$, a on je iracionalan pa je 1,73 iracionalan. Ali, treba naglasiti da je 1,73 približna vrednost broja $\sqrt{3}$ i da nije $\sqrt{3}$ = 1,73.

7) Koja jednakost je tačna:

$\sqrt{(-2021)^2} = 2021$, (T)

$\sqrt{1089} = 33$, (T)

$\sqrt{-4 \cdot (-25)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{25}$, (T)

$\sqrt{49} = -7$? (H)

Rešenje: $\sqrt{(-2021)^2} = |-2021| = 2021$;

$33 \cdot 33 = 1089$ pa je $\sqrt{1089} = 33$;

$\sqrt{-4 \cdot (-25)} = \sqrt{100} = 10$, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{25} = 2 \cdot 5 = 10$;

$\sqrt{49} = 7$. Koren bilo kog broja je uvek veći ili jenak od nule.

8) Reši jednačine:

a) $(2x-5)^2 = 81;$

b) $x^2 + 7 = (-5)^2 + 3;$

c) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}.$

Rešenje:

a) $(2x-5)^2 = 81$

$2x - 5 = 9$ ili $2x - 5 = -9$

$2x = 14 \qquad 2x = -4$

$x = 7 \qquad x = -2$

U ovoj, i sličnim, jednačinama se dešava da zaborave da napišu $2x - 5 = -9$, nego napišu samo da je 9. Ili, napišu oba slučaja a onda kada dobiju rešenje za prvu jednačinu, $2x - 5 = 9$, $x = 7$, drugu ne rešavaju nego samo napišu suprotan broj broju koji su dobili za rešenje prve, u ovom slučaju -7. Zbog takvih, i sličnih grešaka, uvek insistiram da za svaku jednačinu imaju postupak i da provere rešenje.

b) $x^2 + 7 = (-5)^2 + 3$

$x^2 = 25 + 3 - 7$

$x = \pm\sqrt{21}$

c) $\frac{1}{5}x^2 - \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{5}x^2 = \frac{5}{4}$

$x^2 = \frac{25}{4}$

$x = \pm\frac{5}{2}$

9) Uprosti izraze:

c) $5\sqrt{12} - \sqrt{75} + 4\sqrt{108};$

d) $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 3\sqrt{80};$

Rešenje:

a) $5\sqrt{12} - \sqrt{75} + 4\sqrt{108} = 10\sqrt{3} - 5\sqrt{3} + 24\sqrt{3} = 29\sqrt{3};$

b) $3\sqrt{45} - 2\sqrt{20} + 3\sqrt{80} = 9\sqrt{5} - 4\sqrt{5} + 12\sqrt{5} = 17\sqrt{5};$

Kada dajem ove zadatke na kontrolnom, rešenja su razna:

-neki saberu i oduzmu sve brojeve i ispred korena i pod korenom,

-neki pomnoze brojem ispred korena broj pod korenom pa sve oduzmu i saberu i sl.

10) Ako je $A = \sqrt{0,36} + \sqrt{\frac{4}{50}} + \sqrt{1 + (-\frac{3}{4})^2} - \sqrt{3 - 0,44}$**, odrediti** A^2**. Koje tvrđenje je tačno:**

d) $\sqrt{A} \in \mathbf{R}$

e) $\sqrt{A} \in \mathbf{R} \setminus \mathbf{I}$

f) $A^2 \in \mathbf{N}$

Rešenje:

A = $\sqrt{0{,}36} + \sqrt{\frac{4}{50}} + \sqrt{1 + (-\frac{3}{4})^2} - \sqrt{3 - 0{,}44}$ = 0,6 + $\frac{2}{25}$ + $\frac{5}{4}$ – 1,6 = 0,6 + 1,33 – 1,6 = 0,33.
A^2 = 0,1089, tačno je pod a).

11) Dopuni jednakosti tako da budu tačne:

- **h)** **Q** ∩ **I** = ∅
- **i)** **Q** ∪ **I** = R
- **j)** **R** \ **Q** = I
- **k)** **R** ∩ **Q** = Q
- **l)** **I** \ **R** = ∅
- **m)** **N** ∩ **Z** = N
- n) **Z** \ **N** = Z^- ∪ {0}

Ovaj zadatak uvek postavim učenicima nakon obrađene teme Realni brojevi, jer se ovde vidi ko je razumeo skupove i koji brojevi su u kom skupu. Postoje učenici koji sve urade tačno, a naravno ima i onih koji posebno znaju koji je koji skup ali ne znaju ovo da urade.

12) Ako za realne brojeve a i b važi $a > b$ da li je $a^2 > b^2$? Navedi primer koji ilustruje odgovor.

Rešenje: $a > b$, ne znači da je $a^2 > b^2$. To se najbolje vidi na primeru negativnih celih brojeva, -2 je veće od -5, ali $(-2)^2 = 4$, a $(-5)^2 = 25$, a 4 nije veće od 25. Nekolicina učenika ovde samo napiše da jeste i na pitanje zašto jeste kažu pa logično nam je da jeste, dok ne provere na primeru.
Zato je za ovakve nejednakosti najbolje dati primere, jer tako učenici mnogo bolje i brže zapamte.

13) Vrednost izraza $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$ je:

- **e)** **2 - $\sqrt{5}$,**
- **f)** **2 + $\sqrt{5}$,**
- **g)** **$\sqrt{5}$ – 2,**
- **h)** **2 - $\sqrt{5}$.**

Rešenje: $\sqrt{(2-\sqrt{5})^2} = |2-\sqrt{5}| = \sqrt{5} - 2$ zato što je $\sqrt{5}$ veći od 2. Kao i u nekim od prethodnih primera, često je ovde odgovor pod a) 2 - $\sqrt{5}$ jer učenici "skrate kvadrat i koren".

14) Dati su brojevi: $a = (2\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{50}$, $b = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \cdot (-5\sqrt{32})$. Iracionalni su:

- **5)** **samo *a*,**
- **6)** **samo *b*,**
- **7)** **oba,**
- 8) **nijedan.**

Rešenje: $a = (2\frac{1}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}) \cdot 6\sqrt{50} = (\frac{9}{4}\sqrt{2} - \frac{3}{4}\sqrt{2}) \cdot 30\sqrt{2} = \frac{6}{4}\sqrt{2} \cdot 30\sqrt{2} = 45\sqrt{2}$,

$b = (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2}) \cdot (-5\sqrt{32}) = -10\sqrt{81} - 15\sqrt{64} = -10 \cdot 9 - 15 \cdot 8 = -210$,

pa je tačan odgovor pod 1).
Najčešće greške ovde su što neki učenici čim vide u izrazu korene kažu to će biti iracionalan broj na kraju jer ima korene iz kojih ne mozemo da izračunamo broj.

15) Dati su skupovi:

$$\mathbf{A}=\left\{\sqrt{12},\sqrt{169},\frac{\sqrt{9}}{2},-\sqrt{\frac{9}{2}},\sqrt{\frac{-63}{-7}},5\sqrt{18},\sqrt{5}\ \cdot\sqrt{80},\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}}\right\};$$

$$\mathbf{B}=\left\{\sqrt{6},\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}},\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}},3-2\sqrt{5},\sqrt{2}\cdot\sqrt{8},\ \pi-2\right\};$$

Odredi A ∩ I, B ∩ I.

Rešenje: A= $\left\{2\sqrt{3},13,\frac{3}{2},-\frac{3\sqrt{2}}{2},3,15\sqrt{2},20,5\right\}$, B = $\left\{\sqrt{6},2,\sqrt{3},3-2\sqrt{5},4,\pi-2\right\}$,

A ∩ I = $\left\{2\sqrt{3},-\frac{3\sqrt{2}}{2},15\sqrt{2}\right\}$,

B ∩ I = $\left\{\sqrt{6},\sqrt{3},-2\sqrt{5},\pi-2\ \right\}$.

U ovakvim zadacima treba prvo izračunati brojeve koji mogu da se izračunaju, iz oba skupa, pa tek onda raditi presek sa skupom I. Greška učenika je što to ne urade prvo, nego sve brojeve kod kojih vide koren svrstaju u iracionalne.

16) Poveži izraz sa odgovarajućom formulom:

f) Zbir kvadrata brojeva a i b;	$(a-b)^2$
g) Kvadrat razlike brojeva a i b;	$(a+b)^2$
h) Proizvod kvadrata brojeva a i b;	a^2+b^2
i) Razlika kvadrata brojeva a i b;	a^2-b^2
j) Kvadrat zbira brojeva a i b;	$a^2\cdot b^2$

Rešenje:

a) a^2+b^2;
b) $(a-b)^2$;
c) $a^2\cdot b^2$;
d) a^2-b^2;
e) $(a+b)^2$.

Neko će, možda, pomisliti zašto ovo davati kao zadatak. Iz iskustva sam videla da je i ovo nekima problem, da razgraniče šta je npr. kvadrat zbira, a šta zbir kvadrata.Zato uvek insistiram na zapisivanju ovih formula i na času dok učimo i vežbamo, a i na proverama.

17) Rešenje:

A = {0, 1, 4, 5, 6, 9},
B = {1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30},
A ∪ B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15, 30},
A ∩ B = {1, 5, 6}.

18) Rešenje:

0,(592) = $\frac{592}{999}$ i 0,(925) = $\frac{925}{999}$

Potkorena veličina je $\frac{592}{925}=\frac{37\cdot16}{37\cdot25}=\frac{16}{25}$, $\sqrt{\frac{16}{25}}=\frac{4}{5}\in$ Q.

19) Rešenje:

Učenici sa nekoliko kvadriranja dobiju nejednakost $\sqrt{12}<4$ koja je tačna, što je pogrešno.
To je analitički ili regresivni put u dokazu. Postupak učenika može dovesti do nejednakosti od koje treba krenuti.

$\sqrt{12} < 4 \Rightarrow 12 + \sqrt{12} < 16 \Rightarrow \sqrt{12 + \sqrt{12}} < 4 \Rightarrow 12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}} < 16 \Rightarrow \sqrt{12 + \sqrt{12 + \sqrt{12}}} < 4.$

Može se zadata nejednakost zamenjivati ekvivalentnim dok ne dobijemo nejednakost $\sqrt{12} < 4$ koja je tačna. Obzirom da je ekvivalentna polaznoj i polazna je tačna.

20) Rešenje:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 = 204 = L$

$\frac{8 \cdot (8+1)(2 \cdot 8+1)}{6} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204 = D$

L = D

b) Na šahovskoj tabli ima $8 \cdot 8 = 8^2$ kvadrata stranice 1, $7 \cdot 7 = 7^2$ kvadrata stranice 2, $6 \cdot 6 = 6^2$ kvadrata stranice 3, ..., $1 \cdot 1 = 1^2$ kvadrat stranice 8. Ukupno: $1^2 + 2^2 + 3^3 + ... + 8^2 = 204$.

3. Skup N, prirodnih brojeva

Sa skupom N, prirodnih brojeva, učenici se upoznaju već u prvom razredu osnovne škole. To je skup N = {1, 2, 3, 4, … *n-1*, *n*, *n+1*,…}.

Učenici primećuju neke od njegovih osobina:

- Najmanji element tog skupa je 1.
- Taj skup sadrži beskonačno mnogo elemenata.
- Svi brojevi iza, na primer, 5 su veći od 5. Prvi od njih sa tom osobinom je 6. Kažemo da je 6 sledbenik broja 5. U tom slučaju je 5 prethodnih broja 6. Broj 1 nije sledbenik nijednog prirodnog broja.
- Svaki prirodan broj n, osim 1 ima prethodnika, $n – 1$, i sledbenika, $n + 1$.

Sa tehnikom pisanja, sabiranja i množenja u N učenici se upoznaju u prva 3 razreda osnovne škole. Uz pomoć nastavnika uočavaju određene osobine navedenih operacija. Zaključuju da zbir dva prirodna broja ne zavisi od redosleda sabiraka, pa je, na primer, 25 + 17 = 17 + 25. Isto tako, zaključuju da se zbir tri i više prirodnih brojeva ponekad može lakše izračunati ako ih podesno grupišemo. U tim situacijama, zadatak može da glasi: Navedeni zbir odrediti na 2 ili više načina. Nakon savladanog sabiranja govorimo o zbiru dva ili više jednakih sabiraka. Uvodimo pojam množenja, na primer pišemo:

$$7 + 7 + 7 = 3 \cdot 7 = 21$$

Kažemo da je 21 proizvod brojeva 7 i 3. Brojevi 7 i 3 su činioci ili faktori proizvoda.Nastavniku ostaje da objasni zašto se u izrazu $8 + 3 \cdot 7$ prvo izvodi množenje (množenje prirodnih brojeva je specijalno sabiranje, to jest kraći način zapisivanja istih sabiraka).

Kod učenja tablice množenja jednocifrenih brojeva učenicima treba navesti da je, na primer, $8 \cdot 9 = 9 \cdot 8 = 72$, $6 \cdot 7 = 7 \cdot 6 = 42$ i slično, pa u tablici nema toliko mnogo rezultata kao na prvi pogled.

Kad povezujemo operacije sabiranja i množenja u skupu N učenici mogu dobiti, na primer, zadatak:

Ako jedno jaje košta 12 dinara koliko košta 17 jaja?

Ukoliko su savladali množenje jednocifrenih brojeva, učenici mogu računati ovako: 17 jaja po 10 dinara je 170dinara, 17 jaja po ostalih 2 dinara su 34 dinara.

Ukupno 170 dinara + 34 dinara = 204 dinara.

Prethodno rezonovanje zapisujemo ovako:

$17 \cdot 12 = 17 \cdot (10 + 2) = 17 \cdot 10 + 17 \cdot 2 = 170 + 34 = 204$.

Na istom principu zasnivamo množenje višecifrenih brojeva međusobno.

Koristeći N kao oznaku za skup prirodnih brojeva, a, b, c bilo koje prirodne brojeve i univerzalni kvantor ∀, sa kojim se upoznajemo na početku prvog razreda srednje škole, prethodnu priču matematički zapisujemo ovako:

1) $(\forall a, b \in N)\ a + b = b + a$ (komutativnost sabiranja);
2) $(\forall a, b, c \in N)\ (a + b) + c = a + (b + c)$ (asocijativnost sabiranja);
3) $(\forall a, b \in N)\ a \cdot b = b \cdot a$ (komutativnost množenja);
4) $(\forall a, b, c \in N)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (asocijativnost množenja);
5) $(\forall a, b, c \in N)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (distributivnost množenja prema sabiranju);
6) $(\forall a \in N)\ a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ (broj 1 je neutralni element za množenje);

U skupu N, prirodnih brojeva, definišemo relaciju $\leq$.

Već u prvom razredu učenici nauče da je, na primer, $53 > 8$ jer je $53 = 8 + 45$. To možemo tumačiti i ovako: Ako deda ima 53 godine, a unuk 8, onda je deda za 45 godina stariji od unuka.

Koristeći matematičke oznake i stečena znanja, možemo kazati :

7) Relacija $\leq$ je refleksivna, to jest $a \leq a$, $\forall a \in N$;
8) Relacija $\leq$ je antisimetrična, to jest $(a \leq b$ *i* $b \leq a) \rightarrow a = b$;
9) Relacija $\leq$ je tranzitivna, to jest $(a \leq b$ *i* $b \leq c) \rightarrow a \leq c$;
10) Poredak uveden relacijom $\leq$ je linearan, to jest $(\forall a, b \in N$ *je* $a \leq b$ *ili* $b \leq a)$;

U nižim razredima osnovne škole ne treba insistirati previše na stručnim definicijama. Potrebno je koristiti te osobine. Govoreći o binarnim relacijama u prvom razredu srednje škole i kasnije, možemo relaciju $\leq$ u skupu N, kasnije i ostalim skupovima Z, Q, I, R navesti kao dobar primer relacije linearnog uređenja (poretka).

11) Relacija $\leq$ je saglasna sa sabiranjem $(\forall a, b, c \in N)\ a \leq b \rightarrow a + c \leq b + c$;

Na poslednjoj osobini, koja važi i za skup R, se zasniva teorema o ekvivalenciji jednačina, odnosno nejednačina (8. razred).

12) U skupu N, prirodnih brojeva, relacija $\leq$ je saglasna sa množenjem, to jest $(\forall a, b, c \in N)$ $a \leq b \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$;

4. Skup Z, celih brojeva

Nakon savladanih operacija sabiranja i množenja u skupu N učenici dobijaju da reše jednostavne jednačine, na primer:

$$x + 5 = 19$$

$$27 + x = 43 \ldots$$

Naravno, udžbenici sadrže i tekstualne zadatke koje možemo prevesti na "jezik algebre".

Primer:*Luka ima 250 evra. Za kupovinu bicikla potrebno mu je ukupno 430 evra. Koliko evra treba da dobije od deke i bake za rođendan da bi izvršio ovu kupovinu?*

Ako je poznat jedan sabirak i zbir, drugi sabirak određujemo operacijom oduzimanja. Ponovo možemo navesti primer iz prakse.

$$15 - 8 = 7$$

$$430 - 250 = 180$$

Ako bismo upitali učenika prvog, drugog, možda i trećeg razreda koliko je 2-5 odgovor bi bio "ne može". Isti odgovor dobijamo u slučajevima 15-40 , 98-153 i slično. Većina će za 20-20 kazati da je 0 (neki kažu ništa).

Vidimo da je u skupu N, prirodnih brojeva, operacija oduzimanja izvodljiva samo u određenim situacijama. Tako je $a - b$ prirodan broj za zadane $a, b \in$ N samo ako je $a > b$. Rešenje prethodnih i mnogih drugih zadataka dobijamo proširivanjem skupa N, prirodnih brojeva.

Učenici šestog razreda se prvi put sreću sa takvim proširivanjem. Upoznati su da temperatura može biti 25° sredinom oktobra ali i -7° u januaru. Iz geografije znaju šta je nadmorska visina, pa su čuli za 2573m ali i 2m ispod nivoa mora. Zbog toga ne treba na tom nivou insistirati na apstraktnim definicijama.

Kada proširujemo skup prirodnih brojeva, kasnije i ostalih, zaključno sa skupom C, kompleksnih brojeva, u srednjoj školi, poštujemo *princip permanencije*. Suština je u sledećem: Navedene su određene osobine operacija i relacija u skupu N. Prošireni skup će sadržavati sve elemente od N pa će naslediti i osobine operacija i relacija iz tog skupa.

Primer: *Operacija sabiranja u N je komutativna, pa će takva biti i u proširenjima N, Z, Q, R.*

Ne insistirajući previše na uopštenoj definiciji sabiranja u N naučimo postupak sabiranja. U proširenom skupu takođe govorimo o sabiranju (za sve elemente od N ali i za sve dodatne).

Možemo krenuti ovako: Ako je $a \in$ N onda je i

$$a - a = 0,$$

$$a - (a + 1) = -1,$$

$$a - (a + 2) = -2,$$

....

$$a - (a + n) = -n.$$

Tako dobijamo brojeve -1, -2, -3, ..., -*n* za koje kažemo da su negativni celi brojevi suprotni brojevima 1, 2, 3, 4, ... , *n*. Broj 0 je sam sebi suprotan.

Ako je N=$\{1, 2, 3, \ldots\ldots, n\}$

-N=$\{-1, -2, -3, \ldots\ldots, -n\}$, onda je

Z = N ∪ (-N) ∪ $\{0\}$ skup celih brojeva.

Prema tome **Z**=$\{\ldots\ldots, \mathbf{-3}, \mathbf{-2}, \mathbf{-1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \ \mathbf{2}, \mathbf{3}, \ldots\ldots\}$**.**

U udžbenicima se nalaze i ove oznake: Z^{+}=$\{1, 2, 3, \ldots\}$

Z^{-}=$\{-1, -2, -3, \ldots\}$.

U tom slučaju je **Z =** $\boldsymbol{Z^{+}} \cup \boldsymbol{Z^{-}} \cup \{\mathbf{0}\}$**.**

Elemente skupova Z^{+} odnosno Z^{-} zovemo pozitivni odnosno negativni celi brojevi. Vidimo da je N ⊂ Z tj. svaki prirodan broj je ceo broj. Postoje celi brojevi koji nisu prirodni.

Za razumevanje operacija i relacija u skupu Z potrebno je uvesti pojam apsolutna vrednost.

Definicija: Apsolutna vrednost celog broja *x* u oznaci |*x*| je:

$$|x| = \begin{cases} \mathrm{x} & ,\text{ako x} \in Z^{+} \\ 0 & ,\text{ako je x} = 0 \\ -\mathrm{x} & ,\ \text{ako x} \in Z^{-} \end{cases}$$

Uočavamo da je |*x*| = |-*x*|, |*x* |≥ 0, pri čemu je |*x*| = 0 akko je *x* = 0.

Osobinu po kojoj je | *x* | = | -*x* | koristimo pri rešavanju jednačina.

4.1 Operacije u skupu Z

S obzirom da je N⊂ Z, operaciju sabiranja u Z treba definisati tako da primenjena na elemente skupa N daje isti rezultat dobijen na prethodnim nivoima obrazovanja.

Pokazuje se kao korisno da treba govoriti o zbiru:

2 pozitivna broja, 2 negativna broja, pozitivnog i negativnog broja i zbiru u kojem je jedan sabirak nula. Insistirati na pravilnosti i potpunosti u rešavanju. Učenici to zapamte na osnovu više rešenih primera. Sledi ispravna definicija operacije sabiranja u Z.

Definicija: *Ako su a i b zadani celi brojevi, njihov zbir* $a + b$ *definišemo ovako:*

1) *Ako* $a, b \in Z^{+} = N$, *zbir* $a + b$ *je prirodan broj koji dobijamo sabiranjem brojeva a i b kao što smo radili u N;*
2) $a + 0 = 0 + a = a$;
3) *Ako* $a \in Z^{-}$, $b \in Z^{-}$ *onda je* $a + b = -(|a| + |b|)$;
4) *Ako* $a \in Z^{+}$, $b \in Z^{-}$ *tada:*
   a) *ako je* $|a| > |b|$ *onda je* $a + b = b + a = |a| - |b|$;
   b) *ako je* $|a| < |b|$ *onda je* $a + b = -(|b| - |a|)$;
   c) *ako je* $|a| = |b|$ *onda je* $a + b = b + a = 0$ *tj. zbir dva suprotna broja je nula;*

U odnosu na sabiranje, skup Z, celih brojeva, ima osobine kao skup N u odnosu na istu operaciju. Osim toga je $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in Z$. Kažemo da je 0 neutralni element za sabiranje u Z. Zajedno sa prethodnim osobinama imamo:

1) $(\forall a, b \in Z)\ a + b \in Z$ *tj Z je zatvoren u odnosu na sabiranje;*
2) $(\forall a, b \in Z)\ a + b = b + a$ *(komutativnost);*
3) $(\forall a, b, c \in Z)\ (a + b) + c = a + (b + c)$ *(asocijativnost);*
4) $(\forall a \in Z)(\exists 0 \in Z)\ a + 0 = 0 + a = 0$ *(neutralni element);*
5) $(\forall a \in Z)(\exists -a \in Z)\ a + (-a) = -a + a = 0$ *(-a je suprotan element od a);*

Uređeni par (Z,+) je algebarska struktura koju zovemo Abelova grupa.

Operacija oduzimanja u skupu Z se definiše ovako:

$$a - b = a + (-b) \text{ gde je } -b \text{ suprotan broj od } b.$$

Teorema: Jednačina $x + a = b$ za bilo koja dva cela broja a i b ima jedinstveno rešenje

$$x = b + (-a).$$

Dokaz: $b + (-a) + a = b + ((-a) + a) = b + 0 = b.$

4.2 Množenje u skupu Z

Ponovimo da je Z=$\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Obzirom da su pozitivni celi brojevi prirodni, množenje u delu skupa Z znamo od ranije.

Ako želimo precizno napisati definiciju množenja u Z, korisno je uvesti pojam znaka celog broja.

Definicija: *Ako je* $x \in Z \setminus \{0\}$, *znak od x u oznaci sgn(x) definišemo:*

$$sgn(x) = \begin{cases} 1, & x \in Z^+ \\ -1, & x \in Z^- \end{cases}$$

Znak celog broja 0 se ne definiše.

Definicija: *I Množenje znakova + i – (zbog lakšeg pamćenja) definišemo:*

$$(+) \cdot (+) = (-) \cdot (-) = (+);$$

$$(+) \cdot (-) = (-) \cdot (+) = (-);$$

II Ako je jedan od celih brojeva nula, i proizvod je nula.

III Ako su a i b celi brojevi različiti od nule, onda je:

$$a \cdot b = (sgn(a)) \cdot (sgn(b)) \cdot (|a| \cdot |b|);$$

pri čemu su apsolutne vrednosti od a i b pozitivni brojevi, pa njihov proizvod određujemo kao i ranije.

Za učenike osnovne škole prethodnu definiciju, za praktičnu primenu razdvojimo:

-oba činioca su istog znaka,

-činioci su različitog znaka,

-jedan činilac je nula.

Skup Z u odnosu na množenje ima ove osobine:

1) $(\forall a, b \in Z)\ a \cdot b \in Z$ *(zatvorenost);*
2) $(\forall a, b \in Z)\ a \cdot b = b \cdot a \in Z$ *(komutativnost);*
3) $(\forall a, b, c \in Z)\ (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \in Z$ *(asocijativnost);*
4) $(\forall a \in Z, \exists 1 \in Z) \Rightarrow a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$ *(neutralni ili jedinični element);*

Prema tome, struktura (Z, ·) je komutativna polugrupa.

5) $(\forall a, b, c \in Z)\ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ (množenje je distributivno prema sabiranju);

Za svaki ceo broj x važi: 0 · x = x · 0= 0.

Dokaz: $0 \cdot x = 0 \cdot x + 0 = 0 \cdot x + (0 \cdot x + (-0 \cdot x)) = (0 \cdot x + 0 \cdot x) + (-0 \cdot x) = (0 + 0) \cdot x + (-0 \cdot x) =$

$0 \cdot x + (-0 \cdot x) = 0.$

U ovom dokazu smo koristili:

-nula je neutralni element za sabiranje

-nulu smo zamenili zbirom dva suprotna broja

-asocijativnost sabiranja

-distributivnost množenja prema sabiranju

-zbir dva suprotna broja je nula.

Algebarska struktura (Z, +, ·) je komutativan prsten sa jediničnim elementom.

5. Skup racionalnih brojeva

U skupu Z, celih brojeva, neograničeno su izvodljive operacije sabiranja, oduzimanja i množenja. Drugim rečima, zbir, razlika i proizvod bilo koja dva cela broja je ceo broj.

Kazemo da je skup Z zatvoren u odnosu na navedene operacije.

Neka su a i b zadani celi brojevi i x nepoznat broj. Treba resiti po x jednačinu $a \cdot x = b$.

Za $a = 0$ i $b = 0$ rešenje je proizvoljan ceo (i realan) broj. Ako je $a = 0$ i $b \neq 0$ jednačina je protivrečna, tj nema rešenja.

U nastavku pretpostavimo da je $a \neq 0$.

Rešenja sledećih jednačina:

$2 \cdot x = 8$; $-3 \cdot x = 15$; $-7 \cdot x = 42$ su celi brojevi 4, -5, -6 respektivno.

Jednačine $2 \cdot x = 9$; $5 \cdot x = 8$; $-7 \cdot x = 18$ i slične nemaju rešenja u skupu celih brojeva. Zbog toga je skup Z, celih brojeva, potrebno proširiti tj. dodati mu nove elemente. Kod proširivanja, kao i u prethodnom slučaju, od N na Z, poštujemo princip permanencije. Osobine sabiranja i množenja se prenose sa skupa Z na prošireni skup. Medjutim, u proširenom skupu ima elemenata koji nisu u Z.

Pri definisanju operacija u proširenom skupu treba voditi računa da te operacije imaju "logičko opravdanje", s jedne, i primenjene na elemente skupa Z daju isti rezultat koji smo dobili ranije, s druge strane.

Defnicija: *Neka su a i b zadani celi brojevi i $b \neq 0$. Količnik brojeva a i b je broj $a : b = \frac{a}{b}$ koji pomnožen sa b daje broj a.*

Primer: $(-8 : 2) \cdot 2 = -8$;

$(18 : (-3)) \cdot (-3) = 18$;

$$\frac{a}{b} \cdot b = a, \ b \neq 0 .$$

U skladu sa navedenom definicijom, izrazi: $\frac{-3}{0}, \frac{5}{0}, \frac{7}{0}, \ldots\ldots, \frac{a}{0}$, gde je $a \neq 0$ nemaju smisla.

Pokazano je da za svaki ceo broj a važi $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$, pa ne postoji ceo broj koji pomnožen sa nulom daje -3, 5, 7, ..., a.

Kažemo da deljenje nulom nije definisano(nema smisla).

Napomena: Izraz $\frac{0}{0}$ je neodredjen. Objašnjenje za taj naziv je poznato iz Analize 1 u kojoj se izučavaju granične vrednosti niza i funkcije.

Definicija: *Skup Q, racionalnih brojeva, čine brojevi koje možemo zapisati u obliku* $\frac{a}{b}$ *gde je* $a \in Z$,

$b \in N$.

Ako količnik $a : b$ napišemo u obliku $\frac{a}{b}$, onda je to razlomak kod koga je a brojilac, b imenilac.

$$\mathbf{Q = \{ \frac{a}{b} \mid a \in Z, b \in N\}}$$

Ceo broj možemo zapisati $a = \frac{a}{1}$ tj. svaki ceo broj je racionalan, pa je Z podskup skupa Q.

U petom razredu osnovne škole učenici se upoznaju sa pojmom pozitivnih razlomaka, operacija sa njima, decimalnim zapisom istih kao i rešavanjem jednačina i nejednačina.

Početkom šestog razreda po planu je upoznavanje učenika sa celim brojevima(pozitivnim, negativnim i nulom). Na osnovu toga dolaze do pojma pozitivnih i negativnih razlomaka.

Ako je imenilac razlomka 10, 100, 1000, …., 10^n, $n \in$ N kažemo da je razlomak decimalan.

Primer: *Sledeće decimalne brojeve pretvori u razlomke*:

1) $0{,}8 = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \in Q$
2) $0{,}125 = \frac{125}{1000} = \frac{1}{8} \in Q$
3) $-0{,}35 = -\frac{35}{100} = -\frac{7}{20} \in Q$

Na osnovu prethodnih primera(koristeći pravilno čitanje decimalnih brojeva) pokazujemo da važi:

$$0{,}a_1a_2\ldots\ldots a_n = \frac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{1000\ldots0} = \frac{a_1a_2\ldots\ldots a_n}{10^n}, \text{ pri čemu } a_i \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, 9\}.$$

Prema tome, decimalan broj sa konačno mnogo cifara iza zareza možemo zapisati u obliku razlomka kod koga su brojilac i imenilac celi brojevi. Zato su takvi brojevi racionalni.

Ako razlomak treba napisati u obliku decimalnog broja, to možemo, u opštem slučaju, uraditi deljenjem brojioca imeniocem.

$$\frac{3}{4} = 3 : 4 = 0{,}75$$

$$\frac{17}{25} = 17 : 25 = 0{,}68$$

$$\frac{9}{250} = 9 : 250 = 0{,}036.$$

Ako je imenilac razlomka oblika $2^m \cdot 5^n$, gde su m i n iz skupa N $\cup \{0\}$, onda je zapis razlomka u decimalnom obliku konačan. Dovoljno je razlomak proširiti tako da mu je imenilac oblika 10^k, $k \in$ N.

Primer1: *Napisati u decimalnom obliku* $\frac{1}{7}$ *:*

```
1/7 = 1 : 7 = 0,1428571 ...
 - 0
   10
  - 7
    30
  - 28
     20
   - 14
      60
    - 56
       40
     - 35
        50
      - 49
         10
        - 7
          3
          ⋮
```

U postupku deljenja ponovo se pojavio ostatak 1 koji smo imali na početku. Ako nastavimo postupak deljenja, cifre količnika će se ponavljati.

Prema tome, decimalni zapis razlomka $\frac{1}{7}$ ima beskonačno mnogo cifara. Medjutim, grupa cifara 142857 se ponavlja. Kažemo da je taj decimalni broj periodičan, a grupa cifara 142857 je njegov period.

Napomena: Navedimo proizvod broja 142857 sa 1, 2, 3, 4, 5, 6 i redom:

$$142857 \cdot 1 = 142857$$

$$142857 \cdot 2 = 285714$$

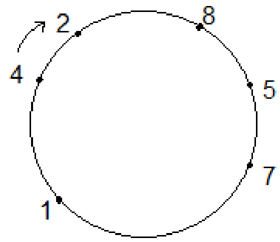
$$142857 \cdot 3 = 428571$$

$$142857 \cdot 4 = 571428$$

$$142857 \cdot 5 = 714285$$

$$142857 \cdot 6 = 857142$$

Vidimo da se dobijeni proizvodi pišu uvek ciframa 1, 4, 2, 8, 5, 7 u rasporedu kao na slici:



Kažemo da je period od $\frac{1}{7}$ ciklički broj.

Primer 2: **Napisati u decimalnom zapisu $\frac{23}{44}$.**

$$
\begin{array}{l}
\frac{23}{44} = 23 : 44 = 0{,}52\underline{\underline{27}}\,\underline{\underline{27}}\ldots \\
\underline{-\,0} \\
\;\;230 \\
\underline{-\,220} \\
\;\;\;\;100 \\
\;\;\underline{-\,88} \\
\;\;\;\;\;120 \\
\;\;\;\underline{-\,88} \\
\;\;\;\;\;\;320 \\
\;\;\;\;\underline{-\,308} \\
\;\;\;\;\;\;\;120 \\
\;\;\;\;\;\underline{-\,88} \\
\;\;\;\;\;\;\;\;32 \\
\;\;\;\;\;\;\;\;\vdots
\end{array}
$$

Decimalni zapis razlomka $\frac{23}{44}$ je takođe periodičan sa periodom 27. Između zareza i periode su cifre 5 i 2 koje čine predperiod.

5.1 Pretvaranje periodičnih decimalnih brojeva u razlomak

Definicija: *Za decimalni broj kažemo da je čisto periodičan ako se u njegovom zapisu odmah iza zareza periodično ponavlja 1 cifra ili grupa cifara (period).*

U sledeća dva primera pokazaćemo kako čisto periodičan decimalan broj pišemo u obliku razlomka:

Primer 1: *Napisati u obliku razlomka broj 0,243243... .*

$x = 0{,}243243\ldots$

Period je trocifren broj 243, pa zadanu jednakost množimo sa $10^3 = 1000$.

Dobijamo:

$1000x = 243{,}243243\ldots$ tj.

$1000x = 243 + 0{,}243243\ldots$

Obzirom da je 0,243243... = x, prethodnu jednačinu pišemo u obliku:

$1000x = 243 + x$, tj.

$999x = 243$.

Rešenje ove jednačine je broj $x = \frac{243}{999}$.

Skraćivanjem ovog razlomka najpre sa 9, a zatim sa 3 dobijamo:

$x = \frac{27}{111} = \frac{9}{37} \in Q$.

Razlomak $\frac{9}{37}$ je nesvodljiv (neskrativ) tj. brojilac i imenilac su uzajamno prosti.

Primer 2: *Zapisati u obliku razlomka broj 3,243243243... .*

y = 3,243243243...

Koristeći prethodni primer dobijamo redom:

y = 3 + 0,243243243...

$y = 3 + \frac{243}{999} = 3 + \frac{9}{37} = \frac{120}{37} \in Q$.

Za vežbu:

1. Napisati u obliku razlomka:

   a) 0,202120212021...

   b) 5,232323...

Prikaži kompletan postupak.

2. Ako decimalan broj 0,259259259...napišemo u obliku nesvodljivog razlomka $\frac{a}{b}$, odrediti zbir a i b.

Definicija: *Za decimalan broj kažemo da je mešovito periodičan ako se između zareza i perioda nalazi jedna cifra ili grupa cifara (predperid).*

Takvi su brojevi:

2,17484848...

0,234212121...

Napomena: U udžbenicima se period piše u zagradi ili se cifre perioda označe crtom iznad.

Primer:

$0,(a_1a_2...a_n) = 0,\overline{a_1a_2...a_n}$.

U skladu sa ovim dogovorom, čisto periodičan decimalan broj kod koga je broj celih nula i period $a_1a_2...a_n$ zapisujemo:

$0,(a_1a_2...a_n) = 0,\overline{a_1a_2...a_n}$.

Primer: *Koristeći prethodna dva primera pokazati da je broj 0, 43(128) racionalan.*

x= 0,43(128)

Period je dvocifren pa jednakost pomnozimo sa 10^2 = 100.

100 · x = 43, (128)

100 · x = 43 + 0, (128)

Kao u primeru 1 pokazujemo da je 0, 128128128....= $\frac{128}{999}$ pa je

100 · x = 43 + $\frac{128}{999} = \frac{43 \cdot 999+128}{999} = \frac{43 \cdot 1000+128-43}{999} = \frac{43128-43}{999}$

Prema tome, x = 0,43(128) = $\frac{43128-43}{99900} \in$ Q.

Za vežbu: Pokazati da su sledeći brojevi racionalni:

1) 0, 285(37)
2) 0, 413(287)

Prikaži postupak.

Koristeći prethodni postupak pokazaćemo da važi:

Teorema: *1.Čisto periodičan decimalan broj kod kog je na mestu celih 0 je razlomak čiji je brojilac jednak periodu kao celom broju, a imenilac se zapisuje sa onoliko cifara 9 koliko period ima cifara tj*

$$0,(a_1a_2 \ldots a_n) = \frac{a_1a_2 \ldots a_n}{99 \ldots 9\ (n\ devetki)}.$$

2. Mešovito periodičan decimalan broj je razlomak čiji je brojilac jednak razlici celog dekadnog broja zapisanog ciframa predperioda i perioda i celog dekadnog broja zapisanog ciframa predperioda, a imenilac ceo broj napisan sa onoliko devetki koliko period ima cifara, a zatim onoliko nula koliko predperiod ima cifara tj.

$$0, b_1b_2 \ldots b_m(a_1a_2 \ldots a_n) = \frac{b_1b_2 \ldots b_m a_1a_2 \ldots a_n - b_1b_2 \ldots b_m}{99999 \ldots 9000 \ldots 0}.(n\ devetki,\ m\ nula).$$

Dokaz:

1) Koristeći zbir geometrijskog niza i činjenicu da je geometrijski red $\sum_{n=1}^{\propto} a_1 q^{n-1}$ konvergentan, ako je -1 < q < 1 i da je njegova suma $s = \frac{a_1}{1-q}$, ovu teoremu možemo dokazati u III razredu srednje škole.

Na nivou sedmog razreda, kada se pominju periodični decimalni brojevi, dokaz bi tekao ovako:

$a = 0,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$

$10^n \cdot x = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$

$10^n \cdot x = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n + 0,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$

Imajući u vidu da je $0,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n) = x$ dobijamo:

$10^n \cdot x = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n + x$

$(10^n - 1) \cdot x = a_1 a_2 \ldots\ldots a_n$

Konačno, $x = \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{10^n - 1} = \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{99999\ldots.9(n\ devetki)}$ čime je prvi deo dokazan.

Napomena: Dobijeni rezultat mozemo, ako to nije i sam zadatak, koristiti kao poznat. Ukoliko dobijeni razlomak mozemo skratiti dobijamo nesvodljiv razlomak.

2) Neka je $x = 0,\ b_1 b_2 \ldots\ldots b_m(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$. Obzirom da predperiod ima m cifara, jednakost ćemo pomnožiti sa 10^m. Dobijamo:

$10^m \cdot x = b_1 b_2 \ldots\ldots b_m(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$.

$10^m \cdot x = b_1 b_2 \ldots\ldots b_m + 0,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n)$.

Na osnovu prvog dela dokaza je $0,(a_1 a_2 \ldots\ldots a_n) = \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{99999\ldots.9}$, pri čemu imenilac ima n devetki.

Prema tome je

$10^m \cdot x = b_1 b_2 \ldots\ldots b_m + \frac{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{99999\ldots.9}$

$$10^m \cdot x = \frac{9999\ldots9(b_1 b_2 \ldots\ldots b_{m)+}\ a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{9999\ldots.9}$$

$10^m \cdot x = \frac{(10^n - 1) b_1 b_2 \ldots\ldots b_m + a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}{9999\ldots9}$

$10^m \cdot x = \frac{b_1 b_2 \ldots\ldots b_m\ 000\ldots0 + a_1 a_2 \ldots\ldots a_n - b_1 b_2 \ldots\ldots b_m}{9999\ldots.9}$

$10^m \cdot x = \frac{b_1 b_2 \ldots\ldots b_m\ a_1 a_2 \ldots\ldots a_n - b_1 b_2 \ldots\ldots b_m}{9999\ldots.9}$

Konačno,

$$x = \frac{b_1 b_2 \ldots\ldots b_m\, a_1 a_2 \ldots\ldots a_n - b_1 b_2 \ldots\ldots b_m}{9999\ldots.9000\ldots0},$$

čime je dokaz završen.

Prema tome, svi periodični decimalni brojevi su racionalni.

Teorema: *Neka su a i b racionalni brojevi i a < b. Dokazati da je* $a < \frac{a+b}{2} < b$. *Dati tumačenje ove nejednakosti.*

Dokaz:

Iz $a < b$ na osnovu saglasnosti relacije < sa sabiranjem dobijamo

$$a + a < b + a$$

$$2 \cdot a < b + a$$

$$a < \frac{a+b}{2} \; (1).$$

Slično iz $a < b$ dobijamo

$$a + b < b + b$$

$$a + b < 2 \cdot b$$

$$\frac{a+b}{2} < b \; (2).$$

Prema tome je $a < \frac{a+b}{2} < b$, iz (1) i (2), čime je dokaz završen.

Obzirom da je skup Q, racionalnih brojeva, zatvoren u odnosu na sabiranje i deljenje brojeva, koji nisu nula, iz činjenice da su a i b racionalni dobijamo da je i $\frac{a+b}{2}$ tj aritmetička sredina od a i b racionalan broj.

Dokazano tvrđenje znači da se između svaka dva racionalna broja nalazi racionalan broj. Koristeći dobijeni rezultat, zaključujemo da se između a i $\frac{a+b}{2}$ nalazi racionalan broj $\frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}$. Nastavljajući ovaj postupak zaključujemo da se između svaka dva racionalna broja nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva.

Definicija: *Za skup kazemo da je svuda gust, ako se između svaka dva njegova elementa nalazi bar jedan element.*

Pokazali smo da je skup racionalnih brojeva, Q, svuda gust. Tu osobinu nemaju skupovi N i Z.

Proširivanjem skupa Z u skup Q mozemo rešiti jednačinu $a \cdot x = b$, za slučaj da je $a \neq 0$.

U odnosu na sabiranje, skup Q ima sledeće osobine:

1) *$\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ iz Q sledi $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ iz Q tj. skup Q je zatvoren u odnosu na sabiranje. Kažemo da je sabiranje unutrašnja operacija u Q;*
2) *Ako su $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$ proizvoljni elementi iz Q, onda je $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$ tj sabiranje je asocijativna operacija u skupu Q;*
3) *$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, za svaki racionalan broj nula je neutralni element za sabiranje;*
4) *Za racionalan broj $\frac{a}{b}$ postoji suprotan racionalan broj $-\frac{a}{b}$ td. je $\frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = 0$;*
5) *Za proizvoljne racionalne brojeve $\frac{a}{b}$ i $\frac{c}{d}$ je $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$ tj. sabiranje je komutativna operacija;*

Uređeni par $(Q, +)$ je komutativna ili Abelova grupa.

Navedene osobine koristimo kod određivanja vrednosti brojevnih izraza.

U odnosu na množenje skup Q ima sledeće osobine:

6) *Množenje je unutrašnja operacija u Q tj $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$ je $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \in Q$;*
7) *Množenje je asocijativna operacija u Q tj jednakost $\left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right) \cdot \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} \cdot \frac{e}{f}\right)$ važi za bilo koji racionalan broj $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f}$;*
8) *Racionalan broj 1 je neutralan element za množenje u skupu Q, tj. $\frac{a}{b} \cdot 1 = 1 \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$, važi $\forall \frac{a}{b} \in Q$;*
9) *Za racionalan broj $\frac{a}{b} \neq 0$ postoji inverzni(recipročni) element $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a}$ td je $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$;*
10) *Množenje je komutativna operacija u skupu Q tj*

    $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \cdot \frac{a}{b}, \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in Q$;

Na osnovu toga vidimo (Q \ {0}, ·) Abelova grupa.

Množenje u skupu Q je distributivno prema sabiranju tj. jednakost:

$$\frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f}, \forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d}, \frac{e}{f} \in Q.$$

Napomena: Jednakost je simetrična relacija u skupovima N, Z, Q, R pa se navedene jednakosti mogu koristiti u oba smera.

5.2 Kvadrat racionalnog broja

Učenici se, već u četvrtom razredu, upoznaju sa obimom i površinom pravougaonika i kvadrata. Ako sa a označimo dužinu stranice kvadrata, njegova površina je P = $a \cdot a$ = a^2.

Definicija: *Ako je* $a \in Q$, *onda je* $a^2 = a \cdot a$.

Primer: *Popuni prazna mesta u tabeli:*

a	5	-3		0,8		
a^2						
$-a$			$-\frac{1}{2}$		0	0,8
$(-a)^2$						
$\|a\|$		3				
$\|a\|^2$		9				

Iz tabele zaključujemo (može se pokazati da važi u opštem slučaju) da je:

1) $a^2 = (-a)^2$;
2) $a^2 \geq 0\ za\ \forall a \in \mathbb{Q}$, pri čemu je $a^2 = 0 \Leftrightarrow a = 0$;
3) $|a|^2 = a^2$.

Primer: *Reši jednačinu:* $x^2 - 2|x| - 15 = 0$ *u skupu* Q.

Rešenje: Obzirom da je $x^2 = |x|^2$ zadanu jednačinu pišemo u obliku:

$$|x|^2 - 2|x| - 15 = 0.$$

Uvođenjem smene $|x| = t, t \geq 0$ dobijamo:

$$t^2 - 2t - 15 = 0,$$

a nakon dopunjavanja prva dva člana do kvadrata binoma dobijamo:

$$t^2 - 2t + 1 = 15 + 1$$

$$(t-1)^2 = 16$$

$$t - 1 = 4 \text{ ili } t - 1 = -4$$

$$t = 5 \text{ ili } t = -3 < 0.$$

Prema tome je $t = 5$, tj. $|x| = 5$, odnosno $x = 5$ ili $x = -5$.

Koristeći komutativnost množenja u skupu Q i definiciju kvadrata, dobijamo:

1. $(a \cdot b)^2 = a^2 \cdot b^2$;
2. $\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a^2}{b^2}, b \neq 0$.

Primer: $25^2 \cdot 4^2 = (25 \cdot 4)^2 = 100^2 = 10\,000$;

$(5 \cdot 0{,}4)^2 = 5^2 \cdot 0{,}4^2 = 25 \cdot 0{,}16 = 4$;

$(0{,}03)^2 = \left(\frac{3}{100}\right)^2 = \frac{3^2}{100} = \frac{9}{10\,000}$

$\frac{(-28)^2}{7^2} = \left(\frac{-28}{7}\right)^2 = (-4)^2 = 16.$

5.3 Jednačina $x^2 = a$

Obzirom da je $x^2 \geq 0$, zaključujemo da da ova jednačina ima rešenje samo ako je $a \geq 0$. Misli se na rešenje u do sada upoznatim skupovima.

Primer: *Površina kvadrata je P = 36 cm^2. Odrediti dužinu stranice tog kvadrata i njegov obim.*

Ako je a stranica kvadrata, onda je $\mathrm{P} = a^2$, tj. $a^2 = 36$.

Primećujemo da je $a = 6$ cm, jer je $a > 0$.

Tada je obim: $O = 4a = 4 \cdot 6 = 24$ cm

Definicija: *Kvadratni koren iz nenegativnog broja a, u oznaci $\sqrt{a}$ je nenegativan broj x čiji je kvadrat jednak a.*

$$\sqrt{a} = x \Leftrightarrow x^2 = a, \quad x > 0, a > 0$$

$$\sqrt{0} = 0 \Leftrightarrow 0^2 = 0$$

Prema navedenoj definiciji, kvadratni koren iz negativnog broja ne postoji u do sad upoznatim skupovima.

Primer: *Odredi cele brojeve x za koje je definisan* $\sqrt{\frac{2x-5}{6-x}} = f(x)$.

Rešenje:

$$\frac{2x-5}{6-x} \geq 0$$

Nule brojioca su rešenja jednačine $2x - 5 = 0$, tj. $x = \frac{5}{2}$. Imenilac promeni znak za $6 - x = 0$, tj. $x = 6$.

Znak razlomka je naveden u tabeli:

		$\frac{5}{2}$		6	
$\frac{2x-5}{6-x}$	-	•	+	X	-

Iz tabele je: $\frac{2x-5}{6-x} \geq 0$ za $x \in \left[\frac{5}{2}, 6\right)$. Celi brojevi iz ovog intervala su: 3, 4 i 5.

Napomena: Učenici osnovne škole su upoznati sa znakom razlomka i ekvivalencijom.

$$\frac{A}{B} \geq 0 \iff (A \geq 0 \land B > 0) \lor (A \leq 0 \land B < 0)$$

Navedenu nejednačinu $\frac{2x-5}{6-x} \geq 0$ mogu rešiti i ovako:

$$\text{I)}\begin{cases} 2x - 5 \geq 0 \\ 6 - x > 0 \end{cases} \lor \text{ II)}\begin{cases} 2x - 5 \leq 0 \\ 6 - x < 0 \end{cases}$$

Rešenje prvog sistema je $\frac{5}{2} \leq x < 6$, dok drugi sistem nema rešenja.

* *Ako su a i b pozitivni racionalni brojevi, onda je:*

$$1)\ \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$2)\ \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}.$$

Dokaz: neka je $\sqrt{a} = x, \sqrt{b} = y$, pri čemu su x i y pozitivni.

Tada je: $x^2 = a$ i $y^2 = b$. Na osnovu pravila o kvadratu proizvoda je:

$x^2 \cdot y^2 = a \cdot b$, tj. $(x \cdot y)^2 = a \cdot b$. Iz poslednje jednakosti, na osnovu definicije kvadratnog korena je $x \cdot y = \sqrt{a \cdot b}$, tj. $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$.

Slično se dokazuje druga osobina.

Primer: Izračunati $\sqrt{6\frac{1}{4}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{25}{16} + \frac{144}{16}} = \sqrt{\frac{25}{4}} + 3 \cdot \sqrt{\frac{169}{16}} = \frac{5}{2} + 3 \cdot \frac{13}{4} = \frac{49}{4}$.

Pokazali smo da je skup Q, racionalnih brojeva, zatvoren u odnosu na sabiranje i oduzimanje, množenje i deljenje pri čemu je delilac $\neq 0$. Na osnovu toga možemo rešiti u skupu Q jednačine u vezi sa sabiranjem, oduzimanjem, množenjem i deljenjem. Ako su „učesnici“ u jednačini racionalni brojevi, rešenje će biti racionalan broj.

Učenici se na časovima matematike, fizike, hemije upoznaju sa pojmom merenja. Kada govorimo o realnim brojevima, upoznaćemo se sa merenjem duži. Za sada:

Definicija: *Za duži AB i CD kažemo da su samerljive ako postoje prirodni brojevi m i n tako da je AB* $= \frac{m}{n} \cdot CD$. *Ovaj uslov je ekvivalentan sa* $\frac{AB}{CD} = \frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{n}}$ *tj. razmera duži je racionalan broj.*

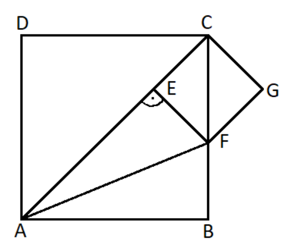
Ako takvi prirodni brojevi ne postoje, onda su duži AB i CD nesamerljive. Velika je zasluga Pitagore i njegove škole jer su pokazali da postoje i nesamerljive duži.

Sledeće tvrđenje mogu razumeti i učenici osnovne škole:

Teorema: *Dijagonala i stranica kvadrata su nesamerljive duži.*

Dokaz: U prethodnoj teoremi je pokazano da $\sqrt{2}$ nije racionalan broj. Ako je a stranica kvadrata, njegova dijagonala je d = $a\sqrt{2}$, pa je $\frac{d}{a} = \sqrt{2}$, čime je teorema dokazana.

Neka je ABCD zadani kvadrat stranice a.



Koristimo Euklidov algoritam za određivanje NZD stranice i dijagonale kvadrata. Potrebno je veću duž(dijagonalu) podeliti manjom. Za početak, stranicu prenesemo na dijagonalu. Neka je AE = AD. Sa slike je AC = AE + EC, tj duž EC je prvi ostatak dobijen Euklidovim algoritmom. Sada stranicu (npr. BC) delimo sa EC. Neka je EF $\perp$ AC. Tada je trougao ECF jednakokrako pravougli, pa je EF = CF.

Obzirom da je AB = AE = AD = a i AF=AF dobijamo ΔABF $\cong \Delta AFE$ pa je EF = BF.

Ako je G četvrto teme kvadrata EFGC, vidimo da ponovo treba stranicu EF preneti na dijagonalu. To smo imali i na početku. Ostatak smo dobili u prvom koraku prenoseći stranicu na dijagonalu, pa ćemo ga uvek dobijati.

To pokazuje da su dijagonala i stranica kvadrata nesamerljive duži.

6. Primeri iracionalnih brojeva

Pokazali smo da je $\sqrt{2}$ iracionalan broj. Obzirom da je svaki racionalan broj količnik dva cela broja sa imeniocem različitim od nule, pokazali smo da su, između ostalih, racionalni svi čisto periodični i mešovito periodični decimalni brojevi. Osim toga možemo i decimalne brojeve sa konačno mnogo cifara iza zareza smatrati periodičnim. Tako je npr. 0,273 = 0,2729999… Na osnovu toga možemo, na nivou osnovne škole, kazati da su iracionalni brojevi neperiodični decimalni brojevi sa beskonačno mnogo cifara iza zareza.

Primer 1: *Pokazati da je broj* $\sqrt{7}$ - $\sqrt{2}$ *iracionan.*

Pretpostavljamo suprotno, da je $\sqrt{7} - \sqrt{2} = a$, $a \in$ Q.

Ova jednakost je ekivalentna sa $\sqrt{7} = \sqrt{2} + a$, odnosno sa $7 = 2 + 2\sqrt{2}\,a + a^2$ Odavde je: $\sqrt{2} = \frac{5-a^2}{2a}$

Ako je $a \in$ Q, obzirom na zatvorenost skupa Q u odnosu na sabirnje, množenje i deljenje brojem različitim od nule, broj $\frac{5-a^2}{2a}$ je racionalan, pa je takav i $\sqrt{2}$.

Primer 2: *Zbir racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan broj.*

Neka je npr. $a \in$ Q i $b \in$ I, gde je I oznaka za skup iracionalnih brojeva. Ako je $x = a + b$ racionalan, onda je $b = x - a$ racionalan kao razlika dva racionalna broja, suprotno prethodnom stavu.

Posledica: Ako je $a \in$ Q i $\sqrt{2} \in$ I prema ovom primeru je $a + \sqrt{2} \in$ I pa je skup I, iracionalnih brojeva, beskonačan.

Primer 3: *Proizvod racionalnog i iracionalnog broja je iracionalan broj, ako racionalan broj nije nula.*

Obrazloženje je isto kao u prethodnom primeru ako imamo u vidu zatvorenost skupa Q u odnosu na deljenje.

$$(a \in \mathrm{Q} \ \wedge \sqrt{3} \in \mathrm{I}) \Rightarrow a\sqrt{3} \in \mathrm{I}$$

Primer 4: *Učenici se u sedmom razredu upoznaju sa obimom (dužinom) kružnice i njenih delova. Tada se sreću sa još jednim iracionalnim brojem π = 3,1415926535… Isti broj se nalazi u izrazima za površinu kruga, njegovih delova, kao i u izrazima za površine i zapremine obrtnih tela koje se izučavaju u osmom razredu, a zatim u III razredu srednje škole. Dokaz iracionalnosti se ne izvodi.*

Primer 5: *Jedna od važnih matematičkih konstanti je iracionalan broj e, poznat kao Ojlerova konstanta.*

Pokazuje se (III razred srednje škole) da je brojni niz sa opštim članom $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ monotono rastući i ograničen, pa je konvergentan. Granična vrednost tog niza je $\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}71828 \ldots$ Broj e je iracionalan.

Brojevi skupa $\sqrt{2}, \sqrt{3}$, $2\sqrt{3}, -3\sqrt{5}$ su iracionalni. Takvi su π i *e*. Između ova dva skupa postoji bitna razlika.

Definicija: *Za realan broj a (racionalan ili iracionalan) kažemo da je algebarski ako postoji polinom P(x) sa celim koeficijentima td. je P(a) = 0 tj. broj a je nula tog polinoma. Jedno od rešenja jednačine* $x^2 - 2=0$ *je* $x = \sqrt{2}$ *pa je* $\sqrt{2}$, *slično i* $-\sqrt{2}$, *algebarski broj.*

Definicija: *Za realan broj kažemo da je transcedentan ako ne postoji polinom sa celim koeficijentima čija je nula upravo taj broj.*

Ne postoji polinom sa celim koeficijentima kojima su π, odnosno e nule. Prema tome, brojevi π i e su transcedentni.. Dokaz ovog tvrđenja zahteva poznavanje algebarskih struktura, rešivosti jednačina i slično. Može se naći npr. u univerzitetskom udžbeniku „Angebra II“, čije je autor prof. dr. Veselin Perić. Razumljivo je što se takav dokaz ne navodi čak ni u srednjoj školi.

Primer: *U II razredu srednje skole učenici se upoznaju sa pojmom logaritama, logaritamske funkcije, jednačina, nejednačina i sistema. Za osnovu logaritama obično imamo broj 10, pišemo* $log_{10} x = log\, x$ *ili pomenuti iracionalni broj e, kada je* $log_e x = ln\, x$ *(prirodni logaritam).*

Jednostavno se pokazuje da je $\log_{10} x$ racionalan, samo ako je *x* oblika $10^{\frac{m}{n}}$ gde su *m* i *n* celi brojevi. Dokaz se izvodi slično kao činjenica da je $\log_{10} 7$ iracionalan.

Ako bi $\log_{10} 7 = \frac{m}{n}$ na osnovu definicije logaritma dobijamo $10^{\frac{m}{n}} = 7$ ili $10^m=7^n$ što je nemoguće ako su *m* i *n* celi brojevi.

Nekada su u sistemu školovanja bile u upotrebi logaritamske tablice. Između ostalih sadržaja tu smo mogli naći logaritme pozitivnog broja za osnovu 10, vrednosti trigonometriskih funkcija, uglova iz intervala (0°, 90°) kao i logaritmi trigonometriskih funkcija. Pomenute vrenosti su obično na 5 decimala.

Primer: *Vrednosti trigonometriskih funkcija uglova mogu biti racionalni i iracionalni brojevi. Tako je npr.* $sin\frac{\pi}{6} = cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $tg\frac{\pi}{4} = ctg\frac{\pi}{4} = 1$ *što su racionalni brojevi. Međutim* $sin\frac{\pi}{3} = cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $tg\frac{\pi}{3} = ctg\frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, sin\frac{\pi}{4} = cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, *svaki od njih je iracionalan.*

Primer: *Pokazati da je broj* $cos\frac{\pi}{9}$ *iracionalan.*

Uočimo da je $3\cdot\frac{\pi}{9} = \frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ i primenimo adicionu formulu:

$\cos 3x = 4\, cos^3 x - 3\cos x$, za $x = \frac{\pi}{9}$

$\cos\frac{\pi}{3} = 4 - 3\cos\frac{\pi}{9}$, tj.

$\frac{1}{2} = 4\, cos^3\frac{\pi}{9} - 3\cos\frac{\pi}{9}$.

Uvođenjem smene $\cos\frac{\pi}{9} = t$, $\frac{1}{2} < t < 1$ dobijamo $\frac{1}{2} = 4t^3 - 3t$ ili $8t^3 - 6t - 1 = 0$ što je algebarska jednačina trećeg stepena.

Ako je racionalan broj $\frac{m}{n}$ rešenje te jednačine, onda je m delilac od -1, a n delilac od 8. Obzirom da je $\frac{1}{2} < t < 1$ u obzir dolaze samo $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}$. Proveravanjem vidimo da nijedan od njih nije rešeje. Prema tome, ova jednačina nema rešenja u Q. Jednostavnim računom vidimo da nijedan od $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}$ nije rešenje te jednačine.

<u>Primer:</u> *Broj 0,01001000100001… u kojem se broj nula izmedju dve susedne jedinice stalno povećava za jedan je iracionalan. Ako bi taj broj bio periodičan onda bi nakon perioda došlo npr. k-nula, $k \in N$, pa bi period bio sastavljen od samih nula, što je netačno.*

<u>Primer:</u> *Zbir dva iracionalna broja može biti racionalan ili iracionalan.*

Uočavamo da je kvadratni koren iz pozitivnog iracionalnog broja iracionalan. Tako je npr. $7 + 4\sqrt{3}$ iracionalan broj, pa je i $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ iracionalan. Slicno je i $\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ iracionalan. Međutim $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ je racionalan. Učenici upoznati sa kvadratom zbira, proizvodom korena i razlikom kvadrata dokaz izvode:

$$x = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}},\ x > 0$$

Uslov $x > 0$ treba navesti jer se kvadiraranjem koje ćemo izvesti iz zadane jednačine ne dobija ekivalentna jednačina.

$$x^2 = 7 + 4\sqrt{3} + 7 - 4\sqrt{3} + 2\sqrt{7^2 - \left(4\sqrt{3}\right)^2}$$

$$x^2 = 14 + 2\sqrt{1} = 16, \text{ što zbog } x > 0 \text{ daje } x = 4$$

Primer: *Broj* $x = \sqrt{6 + 2\sqrt{5}} - \sqrt{6 - 2\sqrt{5}}$, *je racionalan.*

Kada je $6 - 2\sqrt{5} < 6 + 2\sqrt{5}$ to je $x > 0$

$x^2 = 6 - 2\sqrt{5} < 6 + 2\sqrt{5} - 2\sqrt{6^2 - \left(2\sqrt{5}\right)^2}$

$x^2 = 4$, i zbog $x < 4$ je $x = -2$.

Jedna zanimljivost iz istorije jednačine trećeg stepena je data nakon sledećeg primera.

Primer: *Broj* $\sqrt[3]{6 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}} + \sqrt[3]{6 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$ *je racionalan*

Najpre je $x \in$ R. Ako iskoristimo jednakost $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$ i čenjenicu da u skupu R važi ekivalencija x = a ⇔ $x^{2n+1} = a^{2n+1}, \forall n \in N$, dobijmo

$x^3 = 6 + \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + 6 - \frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}} + 3 \cdot \sqrt[3]{6^2 - \left(\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}\right)^2} \cdot x$, gde smo iskoristili značenje od *x*.

$$x^3 = 12 + 3 \cdot \sqrt[3]{36 - \frac{121}{9} \cdot \frac{7}{3}} \cdot x$$

$$x^3 = 12 + 3 \cdot \sqrt[3]{36 - \frac{847}{27}} \cdot x$$

$$x^3 = 12 + 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{972 - 847}{27}} \cdot x$$

$$x^3 = 12 + 3 \cdot \frac{5}{3} \cdot x$$

Prema tome je *x* realno rešenje jednačine.

$x^3 - 5x - 12 = 0$

Delioci broja -12 su: ± 1, ± 2, ± 3, ± 4, ± 6, ± 12

Proverom utvrđujemo da je $x = 3$ jedino rešenje te jednačine. Na osnovu toga je vrednost zadatog izraza racionalan broj 3. Deljenjem polinoma $x^3 - 5x - 12$ dobijamo:

$(x^3 - 5x - 12) : (x - 3) = x^2 + 3x + 4$

Polinom $x^2 + 3x + 4$ nema realne nule.

Jedna zanimljivost: Polazeći od jednačine $Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$ u kojoj su A, B, C, D ralni brojevi i A ≠ 0 dobijamo najpre

$x^3 + \frac{B}{A} \cdot x^2 + \frac{C}{A}x + \frac{D}{A} = 0$, odnosno

$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$

Smenom $x = X - \frac{a}{3}$ poslednja jednačina dobija oblik

$X^3 + pX + q = 0$ u kojoj nema keoficijenta uz X^2.

Italijanski matematičar Kardano (neki navode i druge) je pokazao da se rešenje jednačine $x^3 + p\,x + q = 0$ može napisati u obliku:

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{(\frac{q}{2})^2+(\frac{p}{3})^3}}.$$

Na prvi pogled uočavamo da ova formula nije praktična za primenu. Obično se koristi kada druge metode ne pomažu. Međutim, možemo sastaviti jednačinu oblika $x^3+px+q=0$ čije je rešenje unapred zadan, npr racionalan broj. Jednačina $x^3+5x-12=0$ ima rešenje $x = 3$. U toj jednačini je $p = -5, q = -12$ pa se primenom Kardanove formule dobija:

$$x=\sqrt[3]{6+\sqrt{36-\frac{125}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{36-\frac{125}{27}}}=$$

$$=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{927-125}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{927-125}{27}}}=$$

$$=\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}},\quad \sqrt{847}=\sqrt{121}\cdot\sqrt{7},\ \sqrt{27}=\sqrt{9}\cdot\sqrt{3}$$

$$x=\sqrt[3]{6+\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}+\sqrt[3]{6-\frac{11}{3}\sqrt{\frac{7}{3}}}$$ ovo je upravo broj na početku poslednjeg primera.

Prema tome, poznavanje Kardanove formule može poslužiti kao bogat izbor za sastavljanje zbira iracionalnih izraza sa trećim i kvadratnim korenom čija je vrednost unapred zadan racionalan broj.

Primer: *Pokazati da je* $x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}$ *prirodan broj.*

Posmatramo jednačinu $x^3 - 6x - 40 = 0$, $p = -6$, $q = -40$. Primenom Kardanove formule je

$$x=\sqrt[3]{20+\sqrt{400-8}}+\sqrt[3]{20-\sqrt{400-8}}$$

$$x=\sqrt[3]{20+14\sqrt{2}}+\sqrt[3]{20-14\sqrt{2}}=4.$$

7. Skup R, realnih brojeva

Skup R, realnih brojeva, je unija skupova Q, racionalnih brojeva, i I, iracionalnih brojeva, tj. R = Q ∪ I. Na osnovu definicije vidimo da je Q ∩ I = ∅ tj Q i I su disjunktni skupovi.

7.1 Približna vrednost realnog broja. Zaokrugljivanje

Naveli smo da skup I, iracionalnih brojeva, čine neperiodični decimalni brojevi sa beskonačno mnogo cifara iza zareza. U praksi se pokazuje da je teško računati s takvim brojevima. Korisno je takve decimalne brojeve zameniti brojevima koji imaju manje decimala. Pri tom postupku poštujemo princip po kom greška rezultata zaokrugljivanja bude što manja. Potrebno je, osim pojma apsolutne vrednosti broja, uvesti pojam apsolutne greške.

Definicija: *Apsolutna greška približnog broja* x' *u oznaci* $\Delta(x')$ *je* $\Delta(x')=|x - x'|$ *gde je x tačna, a* x' *približna vrednost*.

Sve numeričke tablice koje sadrže iracionalne brojeve su sastavljene tako da je broj decimala konačan, npr 5.

Ako umesto zadatog decimalnog broja napišemo drugi broj koji sadrži određen broj cifara, kažemo da smo izvršili zaokrugljivanje. Pri tome, imajući princip činjenja manje apsolutne greške poštujemo pravila:

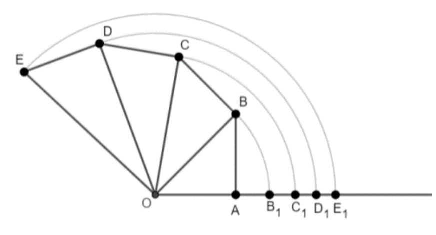
1) Ako je n+1-va cifra veća od 5, onda se n-ta cifra uveća za 1, a sve cifre ispred nje ostaju nepromenjene. Kažemo da smo broj zaokružili na n decimala.
2) Ako je *n*+1-va cifra manja od 5, prvih *n* cifara ostaju nepromenjene.
3) Ako je *n*+1-va cifra 5 i ako iza 5 ima još cifara koje nisu sve same nule, onda se cifra ispred 5 poveća za 1.
4) Ako je *n*+1-va cifra 5 i iza nje nema drugih cifara, dogovorom poštujemo tzv pravilo parne cifre, tj cifru ispred 5 ne menjamo, ako je ona parna, a povećavamo za 1, ako je ona neparna.

Napravili bismo istu apsolutnu grešku da u slučaju 4 uradimo i obrnuto.

7.2 Uređeno polje (R, +, ·, ≤)

Naveli smo da je skup R, realnih brojeva, unija skupova Q, svih racionalnih, i I, skupa svih iracionalnih brojeva. Pokazali smo da je skup I, iracionalnih brojeva, beskonačan. Već u sedmom razredu osnovne škole učenici su upoznati sa primerima iracionalnih brojeva. Takvi su, npr. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $5\sqrt{6}, \pi$.

Pokazali smo da su dijagonala i stranica kvadrata nesamerljive duži, tj $\frac{\mathrm{d}}{a}$ je iracionalan broj $\sqrt{2}$. Primenom Pitagorine teoreme možemo konstruisati duži čije su dužine $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $2\sqrt{3}$ ..., ako je data jedinična duž. Za neke od iracionalnih brojeva konstrukcija je data na slici. Tu je OA=1 jedinična duž.



Tačkama $\mathrm{B}_1, C_1, \mathrm{D}_1, \mathrm{E}_1$ odgovaraju brojevi $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}, \sqrt{5}$. Ranije smo pokazali da se između svaka dva racionalna broja nalazi jedan, a zatim i beskonačno mnogo racionalnih brojeva. I pored toga, obzirom da postoje iracionalni brojevi, vidimo da na brojevnoj pravoj čije tačke odgovaraju samo racionalnim brojevima ima šupljina. To je jedan od razloga zbog kog je skup racionalnih brojeva proširen. Pokazati da postoje nesamerljive duži uopšte nije bio lak zadatak. Precizno rešenje ovog zadatka i uvođenje realnih brojeva dato je u XIX veku radovima tri nemačka matematičara : Vajerštras, Dedekind i Kantor.

7.3 Supremum i infimum

Obzirom da smo upoznati sa skupom Q, racionalnih brojeva, i strukturom (Q, +, $\cdot$, $\leq$) vreme je za:

Definicija: *Neka je S podskup skupa Q. Kažemo da je skup S ograničen odozgo ako postoji $M \in Q$ td je $x \leq M$, $\forall x \in S$. Podskup S skupa Q je ograničen odozdo ako postoji $m \in Q$ td je $m \leq x$, $\forall x \in S$. Ako je skup S ograničen odozgo i odozdo kažemo da je ograničen.*

Brojeve M i *m* iz prethodne definicije zovemo redom majoranta i minoranta skupa S. Ako je M majoranta skupa S, onda je svaki broj veći od M takođe majoranta tog skupa. Slično, ako je *m* minoranta skupa S, onda je i svaki broj manji od *m* minoranta tog skupa. Prema tome, ako je skup $S \subset Q$ ograničen, možemo govoriti o skupu njegovih majoranti i skupu minoranti. Ako skup A ima majorantu M koja mu pripada, onda je to najveći element skupa S, njegov maksimum u oznaci M = maxS. Na isti način definišemo minimum skupa S. To je element $m \in$ S, td. za svako $x \in$ S važi $m \leq x$.

Prethodno razmatranje pokazuje da je opravdana sledeća:

Definicija: *Supremum skupa S je minimum skupa svih majoranti skupa $S \subset Q$ (ako postoji), oznaka supS. Ako postoji, maksimum skupa svih minoranti skupa $S \subset Q$, to je infimum skupa S, infS.*

7.4 Aksiome realnih brojeva

U uvodu smo naveli da se jedna matematička teorija može zasnivati polazeći od različitih temelja, koji čine sistem aksioma i osnovnih pojmova. Postoji i više načina na koje zasnivamo teoriju realnih brojeva. Obično se navede sistem aksioma koji definišu osnovne operacije i relacije u skupu R. Ako prihvatimo takav način, onda lakše dolazimo do važnijih osobina ove strukture.

Definicija: *Neka je S neprazan skup. Binarna operacija definisana u skupu S je svako preslikavanje*

$$* : S \times S \to S.$$

Primer: $(a \in N, b \in N)$, $(a, b) \in N \times N$

$$(a, b) \to a + b$$

Definicija: *Skup R, realnih brojeva, je skup u kom su definisane 2 binarne operacije , sabiranje (+) i množenje ($\cdot$) i binarna relacija $\leq$ tako da su ispunjene sledeće osobine:*

1) $(\forall x, y \in R)\ x + y = y + x;$
2) $(\forall x, y, z \in R)\ (x + y) + z = x + (y + z);$

3) $(\exists 0 \in R)(\forall x \in R)\ x + 0 = x;$
4) $(\forall x \in R)\ (\exists x' \in R)\ x + x' = 0;$
5) $(\forall x, y \in R)\ x \cdot y = y \cdot x;$
6) $(\forall x, y, z \in R)\ (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z);$
7) $(\exists 1 \in R / \{0\})\ (\forall x \in R)\ x \cdot 1 = x;$
8) $(\forall x \in R / \{0\})\ (\exists x' \in R)\ x \cdot x' = 1;$
9) $(\forall x, y, z \in R)\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z;$
10) $(\forall x \in R)\ x \leq x;$
11) $(\forall x, y \in R)((x \leq y \wedge y \leq x) \rightarrow x = y);$
12) $(\forall x, y, z \in R)((x \leq y \wedge y \leq z) \rightarrow x \leq z);$
13) $(\forall x, y \in R)((x \leq y \vee y \leq x);$
14) $(\forall x, y, z \in R)(x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z);$
15) $(\forall x, y \in R)((0 \leq x \wedge 0 \leq y) \rightarrow 0 \leq x \cdot y);$
16) *Svaki neprazan, odozgo ograničen podskup skupa R ima supremum u R.*

Govoreći o skupu Q, racionalnih brojeva, pokaže se da je struktura (Q, +, ·, ≤) uređeno polje. Osobina 16) nema u skupu Q. Osobina 16) je poznata kao Aksioma neprekidnosti ili aksioma supremuma.

Apsolutna vrednost realnog broja x, u oznaci $|x|$, definise se kao što je to navedeno u skupu Z, celih brojeva:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Koristeći ovu definiciju može se dokazati:

Teorema: *Za svako* $x, y \in R$ *i* $a > 0$ *važi:*

1) $|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a;$
2) $-|x| \leq x \leq |x|;$
3) $|x + y| \leq |x| + |y|;$
4) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|;$
5) *Ako je* $y \neq 0$, *onda je* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}.$

Kada govorimo o graničnoj vrednosti niza i funkcije, upoznamo se sa pojmom okoline realnog broja. Pre definicije navodimo jednu od posledica prethodne teoreme.

Posledica: $\forall x, x_0 \in R$ *i* $\varepsilon \in R^+$ *je* $|x - x_0| \leq \varepsilon$ *akko* $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon.$

Dokaz: Uočavamo da se ovo tvrđenje dobija iz dela 1 prethodne teoreme, ako x zamenimo sa $x - x_0$ i a zamenimo sa ε. Dobijamo $-\varepsilon \leq x - x_0 \leq \varepsilon.$

Obzirom da je (osobina 14)) relacija ≤ saglasna sa sabiranjem, možemo pisati $x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon.$

7.5 Neke posledice teoreme o supremumu

Iz aksioma uređenog polja (R, +, ·, ≤) realnih brjeva pokazaćemo da skup R ima Arhimedovo svojstvo.

Teorema 1: Za proizvoljne pozitivne realne brojeve a i b postoji prirodan broj n takav da je $a < n \cdot b$.

Dokaz: Posmatramo podskup A skupa R zadan ovako A=$\{n \cdot b \mid n \in N\}$ i pretpostavimo da tvrđenje teoreme nije tačno. Tada, za svaki prirodan broj n važi $a \geq n \cdot b$, pa je broj a majoranta skupa A. Prema tome, skup A je ograničen pa na osnovu aksiome o supremumu ima supremum $c = \sup A$.

Posmatrajmo broj $c - b$, on je manji od c zbog $b > 0$, pa ne bi smeo da bude njegova majoranta, prema definiciji supremuma c. Znači, morao bi da postoji $n_0 \in$ N za koji je $n_0 \cdot b > c - b$. Ova nejednakost daje $(n_0 + 1) \cdot b > c$. Ovo bi značilo da je element $(n_0 + 1) \cdot b$ skupa A veći od njegovog supremuma c, što je nemoguće. Dobijena kontradikcija pokazuje da je tvrđenje teoreme tačno.

Sada možemo dokazati da broj $\sqrt{2}$ postoji.

Teorema 2: U skupu realnih brojeva postoji jedinstven pozitivan broj x za koji je $x^x = 2$.

Dokaz: Posmatramo skup A = $\{x \in R \mid x^2 < 2\}$. Najpre, skup A nije prazan, jer na primer 1 ∈ A. Još je A ⊂ R, ograničen odozgo(broj 2 je jedna njegova majoranta). Prema aksiomi o supremumu, skup A ima supremum i označimo ga sa y = sup A. Dokazaćemo da je upravo $y^2 = 2$.

Dovoljno je pokazati da nije $y^2 < 2$ i $y^2 > 2$. Ako je, npr. $y^2 < 2$ izabraćemo prirodan broj n za koji je $n > \frac{2y+1}{2-y^2}$. Na osnovu Arhimedovog svojstva skupa R, takav broj postoji.

Tada je: $(y + \frac{1}{n})^2 = y^2 + 2\cdot y \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} < y^2 + 2\cdot y \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = y^2 + (2\cdot y + 1) \cdot \frac{1}{n} < y^2 + (2 - y^2) = 2$ (na osnovu izbora $n \in N$. Zbog $(y + \frac{1}{n})^2 < 2$ vidimo da $y + \frac{1}{n} \in$ A. Kako je on očigledno veći od y dobili smo da je još jedan element skupa A veći od njegovog supremuma, što je nemoguće. Slično se dokazuje da ne može biti $y^2 > 2$, pa je $y^2 = 2$.

Pokazali smo da broj $y \in R^+$ zadovoljava jednačinu $y^2 = 2$. Treba dokazati njegovu jedinstvenost. Pretpostavimo da postoji jos jedan pozitivan broj, z za koji je $z^2 = 2$ i da je npr. $y < z$. Tada bi bilo: $2= y^2 < z^2 = 2$, što je netačno. Dakle, broj y sa trazenom osobinom je jedinstven pa je

Definicija: Broj y čija je egzistencija dokazana u Teoremi 2 zovemo "kvadratni koren iz 2", a pišemo $\sqrt{2}$.

Na osnovu ove definicije je $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Ako bismo u Teoremi 2 broj 2 zamenili bilo kojim pozitivnim brojem a, mogla bi se dokazati:

Teorema 3: U skupu pozitivnih realnih brojeva za dati pozitivan realan broj a postoji jedinstven pozitivan broj x za koji je $x^2 = a$.

Ako je u pitanju jednačina $x^n = a$, $n \in$ N, $a \in$ R$^+$, važi slično tvrđenje. Dokaz je složeniji od prethodnih.

7.6 Intervali

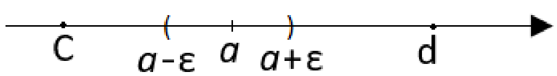
U procesu učenja matematike, rešavanja nejednačina, sistema, ispitivanja funkcija, posebno u analizi vidimo da je potrebno rešenje zadatka zapisati u obliku specijalnih podskupova skupa R i njihovih unija, preseka, razlika i slično.

Definicija: *Neka su a i b dati realni brojevi i npr a < b. Tada je:*

1) *Otvoreni interval (a, b) je skup definisan:*
   $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$.
2) *Zatvoreni interval (segment ili odsečak) je skup* $[a, b]$ *definisan:*
   $[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$.
3) *Okolina broja (tačke) a ∈ R je svaki otvoreni interval skupa R koji sadrži tačku a. Specijalno, ako je ta okolina oblika (a - ε, a + ε), zovemo je ε okolina(simetrična okolina tačke a).*

$$\cup_{\varepsilon}(a) = \{x \in R \mid |x - a| < \varepsilon \}$$

Primer: Na slici je prikazan otvoren interval (c, d) koji je okolina tačke a kao i ε okolina te tačke:



Vidimo da svaka okolina tačke a sadrži neku ε okolinu te tačke.

Definicija: *Neka su* $[a_n, b_n]$ *, n ∈ N odsečci ose brojeva. Ako je za sve n ∈ N ispunjeno*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],$$

kažemo da je niz (I_n), $I_n = [a_n, b_n]$ *niz umetnutih odsečaka.*

7.7 Konačni i beskonačni skupovi

Ako govorimo o brojnim skupovima, obično krenemo od skupa N, prirodnih brojeva, kao nečeg poznatog. Važna je, pa je navodimo ponovo,

Definicija: *Za skupve A i B kažemo da su ekvivalentni i pišemo A ∼ B ako postoji bijekcija sa skupa A na skup B.*

Primer: *Skupovi* $A = \{a, b, c, d, e\}$ *i* $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *su ekvivalentni jer je* $f = \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

jedna od 5! = 120 bijekcija skupa A na skup B.

Ovako uvedena relacija je relacija ekvivalencije tj važi:

1) Refleksivnost: A ∼ A (identična funkcija f(x) = x, ∀x ∈ A je bijekcija)

2) Simetričnost: A ~ B onda je B ~ A (ako je f : A → B bijekcija, onda je f^{-1} : B → A bijekcija)
3) Tranzitivnost: A ~ B i B ~ C →A ~ C (ako je f : A → B bijekcija i g : B → C bijekcija, onda je g ° f : A → C bijekcija).

Definicija: *Za skup A kažemo da je konačan, ako postoji prirodan broj n td. je skup* $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ *ekvivalentan skupu A. Za skup koji nije konačan kažemo da je beskonačan.*

Primer: Skup N, svih prirodnih brojeva, je beskonačan. Naime, ako je $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ podskup skupa N, onda skup N nije ekvivalentan sa navedenim skupom. Dovoljno je uzeti sledbenik prirodnog broja *n* koji nije slika nijednog elementa iz $\{1, 2, 3, \dots, n\}$.

$$\{1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}\}$$

$$\{1, 2, 3, \dots, \mathrm{n}, \mathrm{n}+1, \mathrm{n}+2, \dots.\}\ .$$

U sledeće dve teoreme navodimo osobine konačnih i beskonačnih skupova:

Teorema: *Svaki beskonačan skup se može bijekcijom preslikati na svoj pravi podskup.*

Dokaz: Neka je S beskonačan skup i neka je

$$a \in S$$

$$b \in S \setminus \{a\}$$

$$c \in S \setminus \{a, b\}$$

$$d \in S \setminus \{a, b, c\} \text{ itd.}$$

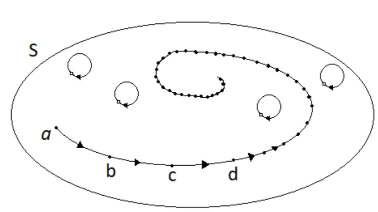
Definišimo preslikavanje f : S →S ovako:

$$f(a) = b$$

$$f(b) = c$$

$$f(c) = d \text{ itd. i } f(x) = x, \text{ za svaki } x \in S \setminus \{a, b, c, \dots\}.$$

Na slici je prikazano preslikavanje f



Preslikavanje f je bijekcija skupa S na skup S \ $\{a\}$, jer element *a* nije slika nijednog elementa iz S.

Teorema: *Svaki skup koji se bijekcijom može preslikati na svoj pravi podskup je beskonačan.*

Dokaz: Neka je S neki skup, P njegov podskup i f : S → P bijekcija. Posmatramo element $a \in S \setminus P$.

$$a \in S \setminus P$$

$$b = f(a)$$

$$c = f(b)$$

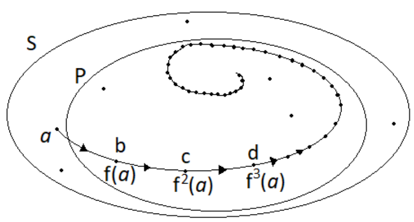
$$d = f(c) \text{ itd.}$$

Obzirom da $a \in S \setminus P$ i $b \in P$ jer f preslikava S → P, to je $a \neq b$. Pošto je bijekcija, „1-1" preslikavanje, iz

$f(a) \neq f(b)$ dobijamo $a \neq b$. Na isti način je:

$f(b) \neq f(c)$ pa je $b \neq c$.

Prema tome, skup S je beskonačan jer sadrži beskonačan podskup $\{a, b, c, d, \ldots\}$



Na osnovu definicije funkcije f vidimo da je:

$$b = f(a),$$

$$c = f(b) = f(f(a)) = f^2(a),$$

$$d = f(c) = f(f^2(a) = f^3(a), \text{ itd.}$$

Prethodne dve teoreme možemo formulisati ovako:

Teorema: *Skup S je beskonačan akko postoji bijekcija tog skupa na neki njegov pravi podskup.*

Primer: *Bijekcija f :* ℕ→ℕ *zadana sa f(n) = 2n preslikava* ℕ *na pravi podskup parnih brojeva*.

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{pmatrix}$$

Prema tome, skup ℕ je beskonačan.

7.8 Neprebrojivost skupa realnih brojeva

Definicija: *Za skup A kažemo da je prebrojiv ako je ekvivalentan skupu prirodnih brojeva.*

Primer 1: Skup $N_0 = N \cup \{0\}$ je prebrojiv. Funkcija f(n) = n – 1 je bijekcija i preslikava N na N_0.

Primer 2: Skup parnih prirodnih brojeva je prebrojiv jer bijekcija f(n) = $2n$ preslikava N na skup parnih prirodnih brojeva.

Primer 3: Skup Z, svih celih brojeva, je prebrojiv. Funkcija zadana sa

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & \cdots \end{pmatrix} \text{ ili}$$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , za\ x = 1 \\ \frac{1}{2}x & , za\ x\ paran\ broj \\ -\frac{1}{2}(x-1) & , za\ x\ neparan\ broj \end{cases}$$

je bijekcija skupa N → Z.

Primer: Skup svih racionalnih brojeva iz intervala (0, 1) je prebrojiv.

Zapišimo skup racionalnih brojeva inteervala (0, 1) u obliku trougaone šeme:

$$\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{6}, \frac{2}{6}, \frac{3}{6}, \frac{4}{6}, \frac{5}{6}$$

$$\vdots$$

U ovoj šemi se neki racionalni brojevi pojaljuju više puta, npr:

$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \cdots$,

$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, itd.

Ako izostavimo racionalne brojeve koji su se jednom već pojavili, možemo definisati bijekciju N → (0, 1) ovako:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{5} & \cdots \end{pmatrix}$$

Vidimo da je skup $\{x \mid x \in Q \text{ i } x \in (0, 1)\}$ ekvivalentan skupu N, pa je taj skup prebrojiv.

Teorema: *Skup realnih brojeva iz intervala (0, 1) nije prebrojiv.*

Dokaz: Treba pokazati da ne postoji bijekcija skupa N na (0, 1).

Pretpostavimo da takvo preslikavanje postoji:

$$1 \to x_1 = 0{,}a_{11}a_{12}\cdots a_{1n}\cdots$$

$$2 \to x_2 = 0{,}a_{21}a_{22}\cdots a_{2n}\cdots$$

$$3 \to x_3 = 0{,}a_{31}a_{32}\cdots a_{3n}\cdots$$

$$\vdots$$

$$n \to x_n = 0{,}a_{n1}a_{n2}\cdots a_{nn}\cdots$$

Posmatramo broj $x = 0{,}a_1a_2a_3\cdots$ u kojem je svaka od cifara različita od 0 i 9. Cifre a_1, a_2,a_3,$\cdots$ biramo tako da je $a_1 \neq a_{11}$, $a_2 \neq a_{22}$, $a_3 \neq a_{33}$, $\cdots$, $a_n \neq a_{nn}$. Broj x je realan i pripada intervalu (0, 1). Taj broj se razlikuje od svakog od brojeva x_1, x_2, x_3, $\cdots$. Prema tome, x nije slika nijednog prirodnog broja. Dakle, skup realnih brojeva iz intervala (0, 1) nije prebrojiv.

Primer: *Svi intervali realnih brojeva, bez obzira na njihovu dužinu su ekvivalentni.*

Linearna funkcija $f(x) = (b - a)x + a$, $a < b$ je bijekcija skupa (0, 1) na (a, b).

Sledeće **posledice aksiome neprekidnosti** navodimo bez dokaza:

1. Svaki neprazan odozgo ograničen podskup skupa R ima infimum u R.
2. Za proizvoljne pozitivne realne brojeve a i b postoji jedinstven prirodan broj n tako da je: $(n - 1)a \leq b < n \cdot a$.
3. Za svaki realan broj b postoji jedinstven ceo broj k takav da je $k \leq b < k + 1$.

Definicija*: Ceo deo reanog broja x je najveći ceo broj koji nije veći od x. Oznaka: [x].*

Postojanje takvog broja je navedeno u posledici.

U nastavku izlaganja ću navesti jedan primer u kom koristimo aksiome uređenog polja (R,+, ·, ≤). Ovaj sadržaj se izučava u 8. razredu osnovne škole u temi “Linearne jednačine i nejednačine sa jednom nepoznatom”. Tada se učenici upoznaju sa opštim pravilima za rešavanje takvih jednačina. Sve do tada su u jednačini uočavali koju “ulogu” ima nepoznata ili izraz koji sadrži nepoznatu i način kako se određuje. Zainteresovani učenik uočava da su ta pravila primenjena na jednačine ranije upoznatih oblika saglasna sa prethodno stečenim znanjem.

8. Ekvivalentnost jednačina (nejednačina)

8.1 Ekvivalentne jednačine (nejednačine)

Definicija 1: *Za jednu jednačinu (nejednačinu) kazaćemo da je u jednoj brojnoj oblasti posledica date jednačine (nejednačine) ako je svako njeno rešenje u toj oblasti ujedno rešenje i te jednačine.*

Skup svih rešenja posledice jedne jednačine (nejednačine) sadrži sva rešenja te jednačine (nejednačine), ali posledica može da ima rešenja koja nisu i rešenja te jednačine (nejednačine). Za ova rešenja kažemo da su za datu jednačinu (nejednačinu) strana. Ako posledica nema drugih rešenja osim rešenja date jednačine (nejednačine) onda za nju kažemo da je ekvivalentna sa datom jednačinom (nejednačinom).

Definicija 2: *Za dve jednačine (nejednačine) kazaćemo da su ekvivalentne, ako je svako rešenje prve ujedno i rešenje druge i obratno.*

Primeri:

1) Jednačine $x-1=0$ i $x^3-1=0$ su u oblasti realnih brojeva ekvivalentne, jer obe imaju samo jedno i isto rešenje $x=1$. U oblasti kompleksnih brojeva druga jednačina je samo posledica prve, jer ona tada pored rešenja $x=1$ ima još dva rešenja $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ koja nisu i rešenja prve jednačine.
2) Jednačina $x-2=3$ ima jedno rešenje $x=5$, a jednačina $(x-2)^2=9$ još i rešenje $x=-1$. Druga je posledica prve.
3) Jednačine $2x-1=x+2$ i $\frac{x+1}{2}=\frac{3x-1}{4}$ su ekvivalentne, jer obe imaju samo jedno rešenje $x=3$.
4) Nejednačine $2x-1>x+2$ i $\frac{x-1}{2}+1<\frac{3x-1}{4}$ su ekvivalentne, jer je $x>3$ oblast rešenja za obe nejednačine.

Primedba. Jednačine $x-1=0$ i $x^2-2x+1=0$ imaju jedno isto rešenje $x=1$. Međutim, pošto je druga jednačina kvadratna, smatra se da ona ima dva rešenja koja su u ovom slučaju jednaka, kaže se da je $x=1$ za drugu jednačinu dvostruk koren. Zbog toga, ako se uzima u obzir višestrukost korena, ove jednačine mogu se smatrati neekvivalentnim.

Grafičko tumačenje ekvivalentnosti jednačina. Ako su jednačine $F(x)=0$ i $G(x)=0$ ekvivalentne, to znači da grafici funkcija $y=F(x)$ i $y=G(x)$ imaju iste presečne tačke na x-osi.

8.2 Ekvivalentnost jednačina (nejednačina) pri transformaciji izraza u njima

Pri rešavanju jednačina vrše se identičke transformacije izraza u njima, tj. vrši se zamena izraza sa njima identičnim izrazima. Pri tome, ako nije došlo do promene definicionog područja jednačine, dobijena jednačina mora biti, razume se, ekvivalentna sa prvom jednačinom. Ali, ako se primenom

identičkih transformacija promenilo definiciono područje dobijena jednačina ne mora uvek biti ekvivalentna sa prvom jednačinom. Tako, ako se definiciono područje proširilo, nova jednačina, može imati rešenja koja ne pripadaju definicionom području prve jednačine, pa su ona za nju strana. Ako se definiciono područje suzi, onda se može desiti da neko rešenje prve jednačine ne spada u definiciono područje nove jednačine, pa ono ne može biti rešenje te jednačine. Kažemo da je došlo do „gubitka" korena jednačine.

Definiciono područje izraza menja se pri skraćivanju razlomljenih izraza, primene pravila za operacije korenima i pravila za operacije logaritmima.

Primeri:

1) $x = 1$ nije rešenje jednačine $\frac{(x-1)^2}{x^2-1} = 0$, jer za tu vrednost izraz na levoj strani nema smisla. Ako izvršimo skraćivanje tog izraza sa $x - 1$, dobijamo izraz koji za $x = 1$ ima smisla i $x = 1$ je rešenje dobijene jednačine $\frac{x-1}{x+1} = 0$.
2) Definiciono područje jednačine $\sqrt{x-1} \cdot \sqrt{x+1} = 0$ je interval $x \geq 1$ i rešenje $x = 1$. Ako primenimo pravilo $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ dobijamo jednačinu $\sqrt{x^2-1} = 0$, čije definiciono područje su dva intervala $x \leq -1$ i $x \geq 1$. Zato nova jednačina ima dva rešenja $x = \pm 1$.
3) Jednačine $\log(x-2) + \log(x-3) = \log(x+1)$ i $\log(x+2)(x-3) = \log(x+1)$ nisu ekvivalentne, jer druga jednačina ima rešenja $x = 1$, $x = 5$, od kojih prvo ne spada u definiciono područje prve jednačine, jer su za $x = 1$ logaritmi na levoj strani te jednačine negativni. Pri primeni pravila $\log a + \log b = \log ab$ došlo je do proširenja definicionog područja.
   Ove primedbe mogu da se odnose i na nejednačine.

8.3 Transformacija jednačina (nejednačina)

Teorema 1: *Ako jednoj i drugoj strani strani jednačine (nejednačine) dodamo izraz koji je definisan u definicionom području jednačine (nejednačine) dobijena jednačina (nejednačina) je ekvivalentna sa datom.*

Dokaz: Dokaz se zasniva na stavovima.

a) Iz $a = b$ sledi $a + c = b + c$,
b) Iz $a + c = b + c$ sledi $a = b$,
c) Iz $a < b$, sledi $a + c < b + c$,
d) Iz $a + c < b + c$ sledi $a < b$.

Dokazaćemo teoremu za jednačine, za nejednačine je dokaz identičan.

Neka je data jednačina

$$f(x) = g(x) \qquad (1)$$

neka je njeno rešenje, tj.

$$f(a) = g(a) \qquad (2)$$

i neka je $h(x)$ bilo kakav izraz definisan u definicionom području jednačine. Tada je $h(a)$ određena vrednost. Dodajmo s obe strane od (1) izraz $h(x)$:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \qquad (3)$$

Iz (2) prema stavu a) sledi

$$f(a) + h(a) = g(a) + h(a) \qquad (4)$$

što zanči da je a rešenje i jednačine (3). Pretpostavimo da je a rešenje od (3), tada važi (4). Na osnovu stava b) iz (4) sledi (2), što znači da je a rešenje od (1). Dakle, svako rešenje od (1), je i rešenje od (3) i obratno svako rešenje od (3) je rešenje od (1), tj. (1) i (3) su ekvivalentne.

Primedbe:

1° Pošto oduzeti izraz $h(x)$ znači dodati izraz $-h(x)$ to se od jedne i druge strane jednačine (nejednačine) može takođe oduzeti isti izraz.
2° Iz dokaza se vidi da izraz $h(x)$ ne mora da bude definisan u celom definicionom području jednačine (1), dovoljno je da on bude definisan za vrednosti x koje su rešenja jednačine (1), tj. da $h(a)$ ima uvek smisla kad je a rešenje jednačine (1).
3° Ako $h(x)$ nije definisan za neko rešenje a od (1) onda izrazi s leve i desne strane od (4) nemaju smisla, te a nije rešenje od (3). (1) i (3) nisu ekvivalentne.
4° Na teoremi 1. zasniva se tzv. pravilo „o prenošenju " članova s jedne strane jednačine (nejednačine) na drugu. Da bismo na primer član $g_2(x)$ u jednačini

$$f(x) = g_1(x) + g_2(x)$$

preneli s jedne strane na drugu treba jednoj i drugoj strani dodati izraz $-g_2(x)$:

$$f(x) - g_2(x) = g_1(x) + g_2(x) - g_2(x)\,,$$

odakle, $$f(x) - g_2(x) = g_1(x).$$

Ovo prenošenje članova može se objasniti i neposredno pošto iz $f(a) = g_1(a) + g_2(a)$ sledi

$f(a) - g_2(a) = g_1(a)$ i obratno.

Jednačina koju smo dobili iz date prenošenjem članova je uvek ekvivalentna sa datom.

Primeri:

1) Jednačine $2x + 1 = x$ i $2x + 1 + x(3x - 1) = x + x(3x - 1)$ su ekvivalentne.

2) Jednačine $2x + 1 = x$ i $2x + 1 + \frac{2x}{x+1} = x + \frac{2x}{x+1}$ nisu ekvivalentne, pošto za vrednost $x = -1$ koja je rešenje prve jednačine izraz $h(x) = \frac{2x}{x+1}$ nije definisan.

Teorema 2. *Ako obe strane jednačine pomnožimo izrazom koji u definicionom području jednačine je definisan i ima vrednost različitu od 0, dobijena jednačina je ekvivalentna sa datom.*

Dokaz: Dokaz se zasniva na stavovima

α) Iz $a = b$ sledi $ac = bc$,
β) Iz $ac = bc$ i $c \neq 0$ sledi $a = b$.
Neka je a rešenje jednačine (1), tj. važi (2) i neka je $h(x)$ izraz koji zadovoljava uslove teoreme. Pomnožimo obe strane od (1) sa $h(x)$:

$$f(x) \cdot h(x) = g(x) \cdot h(x) \qquad (5)$$

Pošto iz (2) na osnovu stava α) sledi

$$f(a) \cdot h(a) = g(a) \cdot h(a) \qquad (6)$$

i obratno iz (6) , s obzirom da je po pretpostavci $h(a) \neq 0$, sledi (2) to su(1) i (3) ekvivalentne.

Primedbe:

1° Za definisanost izraza $h(x)$ važi rečeno uz teoremu 1. , tj. dovoljno je da ovaj izraz bude definisan za sva rečenja od (1). Ako on nije definisan za neko od tih rešenja, (1) i (5) nisu ekvivalentne.

2° Ako je za neku vrednost $x = a$ u definicionom području jednačine (1) $h(a) = 0$, onda je jednakost (6) tačna, tj. a je rešenje od (5), bez obzira da li je ili nije $f(a) = g(a)$, tj. da li je ili nije a rešenje od (1). Ako a nije rešenje od (1), onda (1) i (5) nisu ekvivalentne. No, iako je a rešenje od (1) ono je rešenje od (5) sa povećanom višestrukosti.

Primer:

1) Jednačina $2x + 1 = x$ ima rešenje $x = -1$, a jednačina $(2x + 1)(x^2 - 4) = x(x^2 - 4)$ još i rešenje $x = \pm 2$ za koje se $h(x) = x^2 - 4$ poništava; jednačina $(2x + 1)(x + 1) = x(x + 1)$ nema novih rešenja jer se sada izraz $h(x) = x + 1$ poništava za $x = -1$ koje je rešenje prve jednačine, ali je sada -1 dvostruki koren poslednje jednačine, pošto je ona kvadratna.

Dakle, množenjem jednačine sa izrazom koji može biti jedak nuli uvek uvlačimo strana rečenja, ili bar povećavamo višestrukost rešenja date jednačine.

3° Iz teoreme 2. sledi da jednačinu uvek možemo pomnožiti konstantnim brojem $\neq 0$.

4° Ako jednačinu pomnožimo sa 0 dobijena jednačina $0 * f(x) = 0 * g(x)$ je identitet zadovoljena za sve x u definicionom području jednačine

5° Pošto podeliti izrazom $k(x)$ znači pomnožiti izrazom $h(x) = \frac{1}{k(x)}$ to teorema 2. važi i za deljenje sa izrazom sa sledećom primedbom: izraz $\frac{1}{k(x)}$ kojim sad množimo jednačinu je uvek različit od 0, a da bi on bio definisan treba da izraz $k(x)$ bude ne samo definisan nego i različit od nule. Otud izlazi sledeća teorema:

Teorema 3: *Ako obe strane jednačine podelimo izrazom koji je definisan i nije jednak 0, za vrednosti koje su rešenja date jednačine, dobijena jednačina je ekvivalentna sa datom.*

Posebno. Jednačinu možemo uvek podeliti konstantnim brojem $\neq 0$.

Ako je izraz $k(x)$ kojim delimo jednak 0 za neko rešenje date jednačine onda ono biva izgubjeno.

Ova teorema može se dokazati neposredno bez oslonca na teoremu 2.

Primeri:

a) Jednačine $2x + 1 = x$ i $\frac{2x+1}{x-1} = \frac{x}{x-1}$ su ekvivalentne jer se izraz $k(x) = x - 1$ kojim smo podelili ne poništava za rešenje $x = -1$ prve jednačine. Naprotiv, jednačina $\frac{2x+1}{x+1} = \frac{x}{x+1}$ nije sa prvom ekvivalentna, jer se za $x = -1$ izraz $x + 1$ poništava.
b) Ako jednačinu $(x-1)(x+2) = 5(x-1)$ koja ima za rešenje $x = 1$, „skratimo" sa $x - 1$, onda je to rešenje izgubljeno, jer ono nije rešenje dobijene jednačine $x + 2 = 5$.

Dakle, skraćivanjem jednačine izrazom koji sadrži nepoznatu i koji može biti jednak nuli dolazi uvek do gubitka rešenja, ili smanjivanja višestrukosti rešenja.

3. Pošto za nejednakosti stavovi analogni stavovima $\propto$) i β) glase:

Iz $a < b$ sledi $ac \lesseqgtr bc$, prema tome da li je $c \gtreqless 0$,

Iz $ac < bc$ sledi $a \lesseqgtr b$, prema tome da li je $c \gtreqless 0$,

To za množenje nejednačine izrazom važi sledeća teorema.

<u>Teorema 4</u>: *Nejednačina $f(x) < g(x)$ je ekvivalentna sa nejednačinom $f(x)h(x) < g(x)h(x)$ za one vrednosti x iz definicionog područja prve nejednačine za koje je $h(x) > 0$, a sa nejednačinom $f(x)h(x) > g(x)h(x)$ za one vrednosti x iz te oblasti za koje je $h(x) < 0$.*

Posebno, nejednačinu možemo uvek pomnožiti s pozitivnim konstantnim brojem, i sa negativnim s tim da se izmeni znak nejednakosti u suprotan.

<u>Primer:</u> Nejednačina $\frac{3x-1}{x-3} < 2$, čije je definiciono područje $x \neq 3$, je u oblasti $x > 3$, gde je $x - 3 > 0$, ekvivalentna sa nejednačinom $3x - 1 < 2(x-3)$, a u oblasti $x < 3$ s nejednačinom $3x - 1 > 2(x-3)$. Ako pomnožimo nejdnačinu sa $(x-3)^2$ koji izaz je za $x \neq 3$ pozitivan dobijena nejednačina $(3x-1)(x-3) < 2(x-3)^2$ je ekvivalentna sa datom.

Pri obučavanju dece neophodno je težiti

ka tome da se kod njih postepeno

sjedinjuje znanje sa umenjem. Izgleda da je

od svih nauka jedino matematike sposobna da u potpunosti zadovolji ovaj zahtev.

Imanuel Kant

Literatura:

1) Arif Zolić, Zoran Kadelburg, Srđan Ognjanović: Analiza sa algebrom 1, udžbenik sa zbirkom zadataka za 1. razred matematičke gimnazije, Krug, Beograd
2) Zoran Kadelburg, Vladimir Mićić, Srđan Ognjanović: : Analiza sa algebrom , udžbenik sa zbirkom zadataka za3. razred matematičke gimnazije, Krug, Beograd
3) Dr Vojin Dajović: Matematika za IV razred gimnazije prirodno matematičkog smera, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd 1975.
4) Mirko Radić: Algebra I dio(logika, skupovi, brojevi), Školska knjiga, Zagreb 1974.
5) Veselin Perić: Algebra 2(opšte algebarske strukture, teorija polja, algebarske jednačine, Svjetlost, Sarajevo 1980.
6) Ilija Katić: Matematika za prvi razred srednjeg usmjerenog obrazovanja , Svjetlost, Sarajevo 1983.
7) Stevan Klaševa: Elementarna matematika 1-Algebra(skripta), Sarajevo 1963.
8) Miloš Tomić: Matematika za 7. Razred osnovne škole, Svjetlost, Sarajevo 1991.
9) Mirjana Stojsavljević-Radovanović, Ljiljana Vuković, Zorica Jončić, Matematika, udžbenik za sedmi razred osnovne škole, Kreativni centar
10) Nebojša Ikodinović, Sladjana Dimitrijević, Matematika, udžbenik za sedmi razred osnovne škole, Klett 2017.
11) Siniša N Ješić, Dragica D Mišić, Marko M Ignjatović, Nataša A Babačev, Matematika za 7. Razred osnovne škole, Gerundijum 2017.
12) Zoran Kadelburg, Dušan Adnadjević, Matematička analiza 1, Matematički fakultet, Beograd 2008.